

EL SOLUCIONARIO

EL SOLUCIONARIO

<http://www.elsolucionario.blogspot.com>



LIBROS UNIVERISTARIOS
Y SOLUCIONARIOS DE
MUCHOS DE ESTOS LIBROS

LOS SOLUCIONARIOS
CONTIENEN TODOS LOS
EJERCICIOS DEL LIBRO
RESUELTOS Y EXPLICADOS
DE FORMA CLARA

VISITANOS PARA
DESARGALOS GRATIS.

RESISTENCIA DE MATERIALES

WILLEMS · EASLEY · ROLFE



RESISTENCIA DE MATERIALES



RESISTENCIA DE MATERIALES

Nicholas Willems
John T. Easley
Stanley T. Rolfe
Profesores de Ingeniería Civil
Universidad de Kansas

Traducción

Guillermo Sánchez Bolívar
Ingeniero Mecánico
Universidad Nacional

Revisión

Juan Antonio Torre Marina
Ingeniero Mecánico
Director de la Escuela de Ingeniería
Universidad Anáhuac

Alfonso Ramírez Rivera
Ingeniero Civil, M. F. C., Ph. D.
Profesor Asociado
Universidad Nacional de Colombia

PROPIEDAD DE LA UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
Biblioteca Central

McGRAW-HILL

MÉXICO • BOGOTÁ • BUENOS AIRES • GUATEMALA • LISBOA • MADRID
NUEVA YORK • PANAMÁ • SAN JUAN • SANTIAGO • SÃO PAULO
AUCKLAND • HAMBURGO • JOHANNESBURGO • LONDRES • MONTREAL
NUEVA DELHI • PARÍS • SAN FRANCISCO • SINGAPUR
ST. LOUIS • SIDNEY • TOKIO • TORONTO

Título de la obra

A nuestras esposas

Tabla de contenido

Prólogo

Lista de símbolos

PARTE 1 ANALISIS DE ESFUERZO, DEFORMACION Y DEFORMACION UNITARIA

1	Introducción	1
1-1	Introducción	3
1-2	Breve historia	3
1-3	Descripción de la resistencia de materiales	5
1-4	Idealizaciones en la resistencia de materiales	5
1-5	Relación entre la resistencia de materiales y otras asignaturas	7
1-6	Esbozo de la parte 1	8
1-7	Esbozo de la parte 2	8
2	Acciones internas y esfuerzos	9
2-1	Introducción	9
2-2	Fuerzas internas	9
2-3	Acciones internas	10
2-4	Cálculo de las acciones internas	11
2-5	Esfuerzo	15
2-6	Relaciones entre las componentes del esfuerzo y las acciones internas	16
2-7	Observaciones adicionales sobre el esfuerzo	19
2-8	Valor promedio del esfuerzo normal y del esfuerzo cortante	20
2-9	Resumen	24
	Problemas	25
3	Deformación, deformación unitaria y deformación de corte	38
3-1	Introducción	38
3-2	Deformación	38
3-3	Definición de deformación unitaria y deformación de corte	39

3-4	Discusión adicional sobre la deformación unitaria y la deformación de corte	41
3-5	Relaciones entre las deformaciones unitarias, las deformaciones de corte y los desplazamientos totales	42
3-6	Relaciones diferenciales entre las deformaciones unitarias, las deformaciones de corte y los desplazamientos	45
3-7	Deformaciones térmicas	49
3-8	Resumen	50
	Problemas	50
4	Propiedades mecánicas de los materiales; relaciones entre esfuerzo y deformación unitaria	56
4-1	Introducción	56
4-2	Ensayo de materiales	56
4-3	Diagramas esfuerzo-deformación unitaria	59
4-4	Propiedades mecánicas de los materiales y ley de Hooke	62
4-5	Diagramas idealizados esfuerzo-deformación unitaria	65
4-6	Ley de Hooke para el estado general de esfuerzo, deformación unitaria y deformación de corte	66
4-7	Esfuerzos y deformaciones térmicos	69
4-8	Otros aspectos del comportamiento de los materiales	71
4-9	Resumen	75
	Problemas	75
5	Conceptos sobre la energía	79
5-1	Introducción	79
5-2	Trabajo, energía de deformación y densidad de energía de deformación	79
5-3	Tipos de energía de deformación	82
5-4	Teoremas de Castigliano	86
5-5	Teoremas recíprocos	93
5-6	Resumen	96
	Problemas	96
6	Elementos cargados axialmente	100
6-1	Introducción	100
6-2	Elementos cargados axialmente. Principio de Saint-Venant	100
6-3	Deformación de elementos cargados axialmente	103
6-4	Elementos y sistemas cargados axialmente, estáticamente indeterminados	109
6-5	Elementos compuestos de materiales diferentes	112
6-6	Energía de deformación axial	116
6-7	Resumen	120
	Problemas	120

7	Torsión	130
7-1	Introducción	130
7-2	Suposiciones básicas	130
7-3	Torsión de elementos circulares	131
7-4	Deformaciones por torsión	135
7-5	Energía de deformación	138
7-6	Comportamiento no lineal e inelástico	138
7-7	Secciones rectangulares sólidas	144
7-8	Secciones abiertas de pared delgada	145
7-9	Secciones cerradas de pared delgada	147
7-10	Resumen	150
	Problemas	150
8	Análisis de vigas	159
8-1	Introducción	159
8-2	Suposiciones básicas	160
8-3	Fórmula de la flexión elástica	161
8-4	Flexión de vigas respecto de ejes arbitrarios	166
8-5	Flexión inelástica de vigas	169
8-6	Vigas de dos materiales (vigas compuestas)	175
8-7	Relaciones entre carga, fuerza cortante y momento de flexión	179
8-8	Fórmula de la fuerza cortante	180
8-9	Centro de corte	185
8-10	Diagramas de fuerzas cortantes y momentos para vigas	187
8-11	Energía de deformación en vigas	201
8-12	Deformaciones de vigas	202
8-13	Vigas estáticamente indeterminadas	209
8-14	Vigas curvas	216
8-15	Resumen	220
	Problemas	221
9	Esfuerzos combinados, recipientes a presión, transformación del esfuerzo y la deformación	236
9-1	Introducción	236
9-2	Esfuerzos combinados	236
9-3	Esfuerzos de membrana en recipientes de pared delgada sometidos a presión	242
9-4	Transformación del esfuerzo en un punto	247
9-5	Esfuerzos principales y esfuerzos cortantes máximos	252
9-6	Círculo de Mohr para esfuerzo	258
9-7	Estados tridimensionales de esfuerzo	263
9-8	Transformación de la deformación en un punto	266
9-9	Medición de la deformación plana, rosetas de deformación	272
9-10	Relación entre E , ν , y G	275
9-11	Resumen	276
	Problemas	277

PARTE 2 RESISTENCIA Y COMPORTAMIENTO DE COMPONENTES ESTRUCTURALES

10	Criterios de diseño	291
10-1	Introducción	291
10-2	Márgenes de seguridad	291
10-3	Modos de falla	294
10-4	Criterio de fluencia	294
10-5	Criterio de plasticidad	295
10-6	Criterio de inestabilidad	298
10-7	Criterio de fractura	298
10-8	Criterios de fatiga	299
10-9	Criterio de deformación	300
10-10	Otros criterios	300
10-11	Resumen	301
11	Teorías fundamentales sobre falla de materiales	302
11-1	Introducción	302
11-2	Teorías fundamentales de falla	303
11-3	Verificación experimental y comparación de las teorías fundamentales de falla	309
11-4	Resumen	311
	Problemas	312
12	Estabilidad	314
12-1	Introducción	314
12-2	Tipos de inestabilidad	314
12-3	Pandeo elástico de columnas	318
12-4	Pandeo inelástico	324
12-5	Resumen	329
	Problemas	329
13	Fractura frágil	336
13-1	Introducción	336
13-2	Concentraciones de esfuerzos	339
13-3	Tenacidad a la entalla	347
13-4	Niveles de utilización	352
13-5	Introducción a la mecánica de la fractura	354
13-6	Factores de intensidad del esfuerzo	355
13-7	Factores críticos de intensidad del esfuerzo	357
13-8	Diseño por mecánica de la fractura	360
13-9	Resumen	365
	Problemas	366

14	Fatiga	373
14-1	Introducción	373
14-2	Carga de fatiga	377
14-3	Ensayo de fatiga – Generalidades	380
14-4	Comportamiento hasta la iniciación de la fatiga	383
14-5	Factores que afectan el comportamiento en la iniciación de la fatiga	396
14-6	Comportamiento en la propagación de la fatiga	401
14-7	Resumen	410
	Problemas	411
15	Aplicaciones de los principios de la resistencia de materiales	415
15-1	Introducción	415
15-2	Elementos axiales	423
15-3	Vigas	430
15-4	Ejes	431
15-5	Recipientes a presión	438
15-6	Uniones	457
15-7	Resumen	457
	Problemas	465
Apéndice A	Tablas	465
A-1	Factores de conversión de unidades inglesas (de ingeniería) a unidades SI	465
A-2	Propiedades mecánicas típicas de materiales de ingeniería seleccionados	466
A-3	Propiedades de áreas planas	467
A-4	Perfiles W: Propiedades para diseño	468
A-5	Canales con norma norteamericana: propiedades para diseño	472
A-6	Angulos de alas iguales: propiedades para diseño	474
A-7	Angulos de alas desiguales: propiedades para diseño	476
A-8	Curvas elásticas para vigas	480
A-9	Constantes de torsión, J	484
A-10	Factores para determinar la constante de torsión y el esfuerzo cortante máximo de torsión en barras rectangulares	488
A-11	Esfuerzos cortante y de tracción admisibles en remaches, pernos sin torneado y pernos de resistencia alta. (Especificaciones de la AISC, Tabla 1.5.2.1)	489
Apéndice B	Figuras	491
B-1	Coefficientes de esfuerzo para perfiles T o W con flancos paralelos	491
B-2	Coefficientes para perfiles T ó I de flancos con pendiente interior	491
Indice		492

Con el uso creciente de los materiales estructurales de alta resistencia y las conexiones soldadas, los aspectos no idealizados del comportamiento material han cobrado una mayor importancia en el diseño de elementos estructurales reales. Hoy, los ingenieros de diseño generalmente admiten que la "resistencia" real de una estructura a menudo depende de muchos factores diferentes a la resistencia de fluencia, tales como la ductilidad, la tenacidad, la rigidez, la tenacidad al entalle o la resistencia a la fatiga. En realidad, estos otros aspectos del comportamiento material han adquirido tanta importancia en el diseño de elementos estructurales que resulta necesario darles mayor énfasis en los textos elementales de resistencia de materiales.

Debido a los aspectos no idealizados del comportamiento material, el comportamiento real de los elementos estructurales, incluyendo su falla, es con frecuencia más complejo de lo que el estudiante pudiera pensar en un primer curso de resistencia de materiales. La mayor parte de las estructuras no fallan sencillamente porque su esfuerzo teórico haya sobrepasado el esfuerzo de fluencia. Como resultado de las discontinuidades, la concentración de esfuerzos, los agujeros para pernos, los recortados, etc., el esfuerzo de fluencia puede ser excedido en muchos lugares de una estructura, sin que ésta falle. Las fallas de las estructuras generalmente se deben a las suposiciones ideales utilizadas en su diseño. Dichas suposiciones no conducen a una medición verdadera de la resistencia y del comportamiento de elementos estructurales reales.

En vista de estos factores, este texto se divide en dos partes. La primera parte cubre los temas tradicionales de esfuerzo, deformación y deformación unitaria en elementos estructurales simples (barras, vigas, ejes, etc.) fabricados con materiales idealizados. Su objetivo es enseñar al estudiante los principios básicos del análisis de esfuerzos, deformaciones y deformaciones unitarias. Aunque se hace hincapié en el comportamiento elástico, también se hace el análisis de elementos cargados inelásticamente. La segunda parte consta de los temas fundamentales para comprender la "resistencia" y el comportamiento de estructuras reales, y presenta al estudiante factores diferentes de la resistencia de fluencia, que son importantes en el diseño.

Como se puede observar en la tabla de contenido, el libro cubre la mayoría del material corriente que ofrecen los textos de resistencia de materiales disponibles. No obstante, se ha puesto especial cuidado en señalar al estudiante la limitada aplicabilidad de las suposiciones básicas simplificantes (por ejemplo, que los materiales son lineales, elásticos, homogéneos e isotrópicos) a la vez que se incluye una introducción a

temas tales como inestabilidad, tenacidad a la entalla, fatiga y fractura. Además de dar un conocimiento sobre estos temas, los autores desean recalcar su importancia básica en la evaluación de la verdadera resistencia de los materiales, mostrando su aplicación en ejemplos de diseño sencillos. Se ha intensificado el estudio de las teorías de falla diferentes a las que se basan en criterios de fluencia y se ha disminuido el espacio y el tiempo dedicados a temas que (en opinión de los autores) no corresponden a un texto básico de resistencia de materiales. Temas como el método del momento de las áreas y la ecuación de los tres momentos se consideran técnicas especializadas de análisis que pertenecen a otros cursos o se han vuelto obsoletas debido al desarrollo de los métodos matriciales para computador. En consecuencia, estos temas no se tratan. Otros temas (tales como los diagramas de fuerza cortantes y de momentos, y el círculo de Mohr) se ha conservado para reforzar la comprensión de los principios mencionados, si bien su extensión es limitada.

La parte 1 del libro trata principalmente del análisis clásico de esfuerzos, deformaciones y deformaciones unitarias, pero incluye también el análisis de otros comportamientos diferentes al elástico lineal idealizado, indicando las limitaciones de las idealizaciones empleadas.

La parte 2 pone de relieve la resistencia y el comportamiento reales de los componentes estructurales, describiendo varias desviaciones del comportamiento idealizado del material, así como la diferencia entre el comportamiento al esfuerzo de un bloque infinitamente pequeño (teorías de falla clásicas) y el de un elemento o estructura completa. Para lograr este objetivo, en el primer capítulo de la parte 2 se plantean varios criterios de diseño respecto de los factores que realmente controlan la seguridad de una estructura. También se estudian las teorías clásicas de falla, además de la falla por inestabilidad (pandeo). En seguida se hace una introducción a los temas de fractura y fatiga con el fin de que el estudiante conozca otros tipos de falla fuera de la falla por fluencia local en un pequeño bloque de material ideal.

Con el fin de mejorar la comprensión global del estudiante respecto a los múltiples aspectos de la resistencia y el comportamiento de las estructuras, en el último capítulo se estudia el comportamiento de varios tipos de elementos estructurales y conexiones sencillas, aplicando criterios de diseño tales como la fluencia, el aplastamiento plástico, la fatiga y la fractura. El propósito de este capítulo final es poner de manifiesto la aplicación de todos los principios básicos de la resistencia de materiales en la evaluación del comportamiento de componentes estructurales y no el de enseñar al estudiante todos los intrincados del diseño estructural. La sección dedicada a las uniones describe los posibles tipos de comportamiento (fluencia, fatiga, fractura, etc.), pero no hace una presentación detallada de las reglas de diseño.

Este texto es adecuado para un curso de resistencia de materiales correspondiente a 4 ó 5 horas-crédito, para estudiantes de segundo o tercer año. La parte 1 en combinación con el primer capítulo de la parte 2 podría servir muy bien para un curso semestral de 2 ó 3 horas semanales.

Los autores desean expresar su agradecimiento a la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Kansas por haberles concedido el tiempo necesario para preparar este libro y a la señora Betty Lane por la mecanografía del manuscrito.

Nicholas Willems
John T. Easley
Stanley T. Rolfe

Lista de símbolos

Significado

- a = dimensión
- A = constante de integración de área, punto
- b = dimensión
- c = dimensión, distancia a la fibra extrema
- C, C_c = punto, constante de integración, fuerza de compresión, constante geométrica, relación de esbeltez
- d = diámetro, altura
- D = desplazamiento
- e = excentricidad
- f = frecuencia, esfuerzo, factor de forma
- F = fuerza
- G = módulo de corte
- h = desplazamiento horizontal, altura
- H = fuerza horizontal
- i = número entero
- I, I_p = momento de inercia, producto de inercia
- J = constante de torsión
- k = constante de proporcionalidad, coeficiente de pandeo
- K, K_1 = factor de longitud efectiva, factor de intensidad del esfuerzo
- L = longitud
- M = momento
- N = número de revoluciones, ciclos, duración
- n = número entero, relación entre Ees, normal
- p = intensidad de carga, presión
- P = fuerza
- q = flujo de corte, sensibilidad a la entalla
- Q = momento de primer orden del área, factor de forma de grieta
- r = radio, radio de giro
- R = módulo de resiliencia, resultante, reacción, razón
- s = coordenada, desviación normal
- S = esfuerzo, módulo de la sección
- t = momento de torsión, espesor
- T = momento de torsión, fuerza de tensión, temperatura
- u = desplazamiento en la dirección x
- U = energía de deformación

- v = desplazamiento en la dirección y
- V = fuerza cortante, fuerza vertical, volumen
- w = desplazamiento en la dirección z
- W = trabajo, peso
- x = coordenada
- y = coordenada
- z = coordenada
- Z = módulo plástico

compr = compresión

CVN = Charpy con entalle en V

FS = factor de seguridad

hp = caballo de fuerza

EC = energía cinética

FC = factor de carga

ln = logaritmo de base e

log = logaritmo de base 10

EP = energía potencial

α = ángulo, coeficiente de dilatación térmica

β = ángulo

γ = deformación por corte, peso por unidad de volumen

δ = desplazamiento pequeño, variación

Δ = desplazamiento pequeño, intervalo

ϵ = deformación unitaria

η = constante numérica

θ = ángulo

λ, λ_p = parámetro, relación de esbeltez

ν = relación de Poisson

ξ = constante numérica

ρ = radio de curvatura

σ, σ_0 = esfuerzo normal, intensidad del esfuerzo

Σ = suma

τ = esfuerzo cortante

ϕ = ángulo

Φ = ángulo

χ = constante numérica

ψ = constante numérica

Subíndices

a = dirección

A = punto

b = dirección

B = punto

c = concreto, compresión, centroidal, crítico, dirección

d = densidad, dinámico

e = externo, efectivo

- f = brida, fatiga, grieta
- h = horizontal, aro, agujero
- i = número entero, iniciación, interno, interior
- I, I_p = intensidad
- k = número entero
- l = longitudinal, izquierdo
- L = aplicación de carga
- m = momento, número entero
- n = número entero, normal
- p = fuerza, proporcionalidad, polar, empuje, propagación
- r = derecho
- s = coordenada, cortante
- t = tracción, tangente, teórico
- T = total
- v = vertical, cortante
- w = alma, trabajo
- x = coordenada
- y = coordenada
- z = coordenada

- re = real
- adm = admisible
- amp = amplitud
- pro = promedio
- inf = inferior
- la = latón
- cr = crítico
- dis = diseño
- dist = distorsión
- el = elástico
- extr = extremo
- int = intermedio
- lat = lateral
- lim = límite
- long = longitudinal
- max = máximo
- min = mínimo
- nom = nominal
- oct = octaédrico
- pl = plástico
- req = requisito
- res = residual
- rsc = raíz cuadrada de la suma de los cuadrados
- ac = acero
- tot = total
- tr = transformado
- fin = final
- flu = fluencia

PARTE I

Introducción

Análisis de esfuerzo, deformación y deformación unitaria

Capítulo 1

Introducción

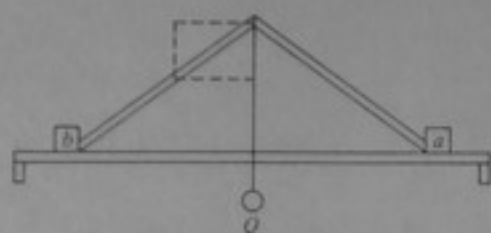
1-1 INTRODUCCION

El tema *resistencia de materiales*, conocido también como *mecánica de materiales*, *mecánica de sólidos* ó *mecánica de cuerpos deformables*, es una ciencia básica de la ingeniería y se utiliza para diseñar toda clase de estructuras, máquinas y equipos con la resistencia adecuada. La aplicación de la resistencia de materiales incluye sistemas tan diversos como edificios, puentes, equipos de construcción, tanques de almacenamiento, recipientes a presión, automóviles, barcos, aviones, naves espaciales, maquinaria de fabricación, motores y generadores eléctricos, torres y antenas de transmisión, herramientas, palos de golf, raquetas de tenis y muchos más.

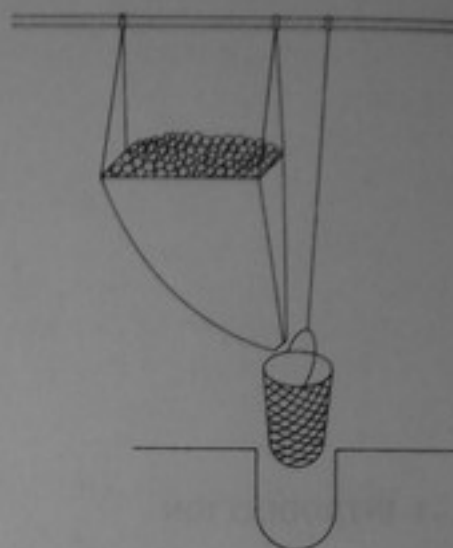
El diseño estructural de un edificio, una máquina o cualquier otro proyecto, es un proceso mediante el cual se establecen las dimensiones de las partes componentes y del conjunto, de modo que tengan la suficiente resistencia para soportar las fuerzas y las condiciones de uso a las cuales van a ser sometidos. El proceso incluye el análisis de esfuerzos de las partes componentes y la consideración de las propiedades mecánicas de los materiales. El *análisis de esfuerzos* y las *propiedades mecánicas de los materiales* constituyen los principales aspectos de la resistencia de materiales.

1-2 BREVE HISTORIA

Los antiguos griegos, romanos, egipcios y otras civilizaciones primitivas tuvieron algún conocimiento de la resistencia de materiales y construyeron muchas estructuras magníficas y duraderas. No obstante, la mayor parte de su conocimiento respecto a la resistencia de materiales se perdió en la Edad Media y no fue recuperada hasta más tarde. El desarrollo de la ciencia moderna de la resistencia de materiales empezó después de la Edad Media, durante el Renacimiento, cuando se revivió el interés por todas las áreas científicas. Algunos de los primeros trabajos de este período fueron las investigaciones científicas realizadas por Leonardo da Vinci (1452-1519) para determinar las fuerzas que actúan en elementos de estructuras y para probar materiales con el fin de determinar su resistencia. La fig. 1-1 muestra los esquemas de los manuscritos de da Vinci. Más tarde, durante el siglo diecisiete, se establecieron academias nacionales de ciencias en Italia, Inglaterra, Francia, Alemania y Rusia, las cuales le imprimieron



(a) Análisis de fuerzas en una estructura



(b) Aparato para ensayos de tensión de alambres

Figura 1-1 Esquema de los manuscritos de da Vinci.

un impulso a la investigación científica tanto en la resistencia de materiales como en otras áreas de la ciencia. Durante esta época, científicos famosos, como Galileo, Hooke, Mariotte, así como John y Jacob Bernoulli, desarrollaron los conocimientos básicos relacionados con el comportamiento de vigas, columnas y varillas e hicieron investigaciones sobre la resistencia y otras propiedades mecánicas de los materiales. Además, Sir Isaac Newton (1642-1727) desarrolló los conceptos de la mecánica newtoniana, que se convirtieron en elementos claves de la resistencia de materiales.

Durante el siglo dieciocho los estudios científicos del siglo diecisiete se extendieron y se aplicaron a situaciones prácticas. Se desarrollaron los campos de la ingeniería militar y de estructuras; se estableció la primera escuela de ingeniería, y se publicaron los primeros libros sobre ingeniería de estructuras. Se realizaron muchos ensayos para determinar las propiedades mecánicas de materiales de construcción tales como madera, piedra, acero y latón, y se desarrollaron las teorías sobre muros de contención y sobre arcos.

En 1795 se estableció en Francia la famosa Ecole Polytechnic, la primera escuela que utilizó el sistema clase-laboratorio, que incluía en su plan de estudios materias básicas tales como matemáticas, física y química. Esta escuela produjo muchos científicos e ingenieros famosos, entre los cuales se cuentan Poinsot, Biot, Poisson, Cauchy y Navier. A estos hombres se les reconoce actualmente por los importantes avances en el campo de la resistencia de materiales durante el siglo diecinueve. La mayor parte de las bases teóricas de la resistencia de materiales moderna ya se había desarrollado a finales del siglo diecinueve.

La revolución industrial, que empezó en las postrimerías del siglo dieciocho, y los subsecuentes desarrollos técnicos que continúan hasta la época actual, han proporcionado muchas áreas nuevas de aplicación a la resistencia de materiales. El desarrollo de los puentes de hierro, la ingeniería de ferrocarriles, el diseño de máquinas y el diseño de aviones son algunos ejemplos. Debido a los nuevos problemas y experiencias presentados por dichas áreas de aplicación se han acumulado muchos conocimientos adicionales, los cuales, junto con los desarrollos logrados en los siglos pasados, consti-

tuyen nuestros conocimientos actuales de resistencia de materiales. Ingenieros y científicos de muchas partes del mundo han contribuido a este acopio de saber.

Desde la época de Leonardo da Vinci se ha logrado un formidable progreso en la resistencia de materiales. Esto lo ilustra la fig. 1-2, en donde se contrastan algunas de las técnicas de ensayo de resistencia de materiales más primitivas con un equipo de ensayos moderno. Hoy, existe una vasta colección de conocimientos que se utiliza en todas las áreas de la ingeniería. Sin embargo, la resistencia de materiales sigue siendo una ciencia dinámica. Se continúan haciendo esfuerzos con el fin de desarrollar mejores métodos para el análisis de esfuerzos y ensanchar los conocimientos relativos a las propiedades mecánicas y el comportamiento de los materiales.

1-3 DESCRIPCION DE LA RESISTENCIA DE MATERIALES

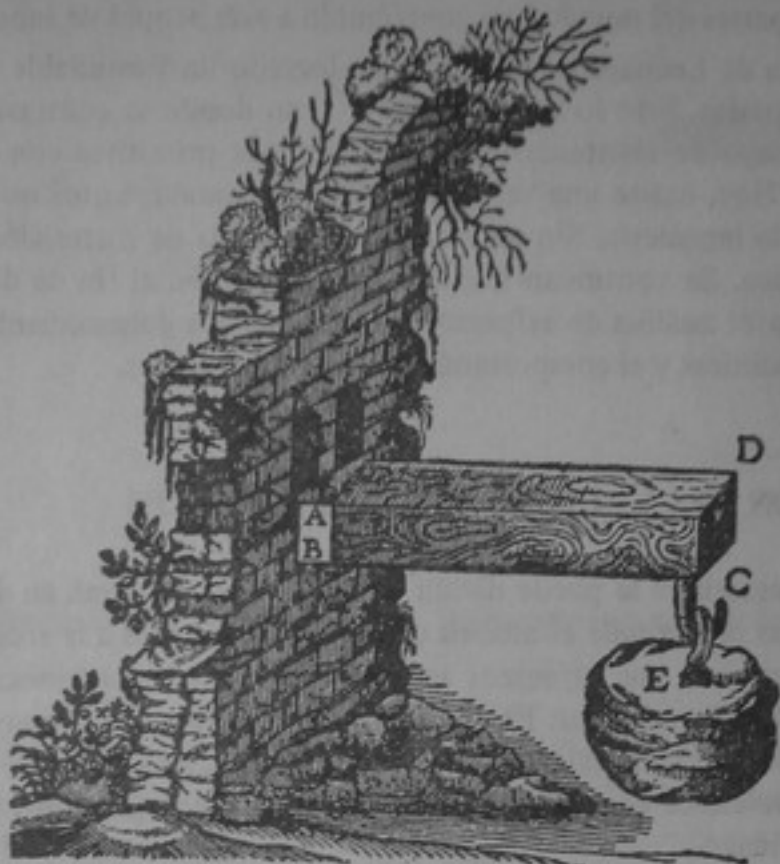
La resistencia de materiales se puede dividir, de una manera general, en dos áreas principales. Una de ellas comprende el análisis de cuerpos sometidos a la acción de fuerzas externas para determinar sus esfuerzos internos y sus deformaciones. Esta área se conoce como *análisis de esfuerzos*. En la resistencia de materiales se consideran únicamente cuerpos de formas simples, tales como varillas (barras), ejes y vigas. Sin embargo, estas formas se presentan con mucha frecuencia en los componentes de diferentes estructuras y máquinas.

La segunda área se refiere a las propiedades mecánicas de los materiales y a la resistencia de los componentes de estructuras o máquinas. En esta área se consideran aspectos como la resistencia del material, la estabilidad, la fatiga y la fractura frágil, los cuales pueden estar involucrados en la falla de los componentes. El conocimiento de las dos áreas permite el dimensionamiento adecuado de los componentes, de tal modo que puedan soportar con seguridad las fuerzas y las condiciones de uso a las cuales han de ser sometidos.

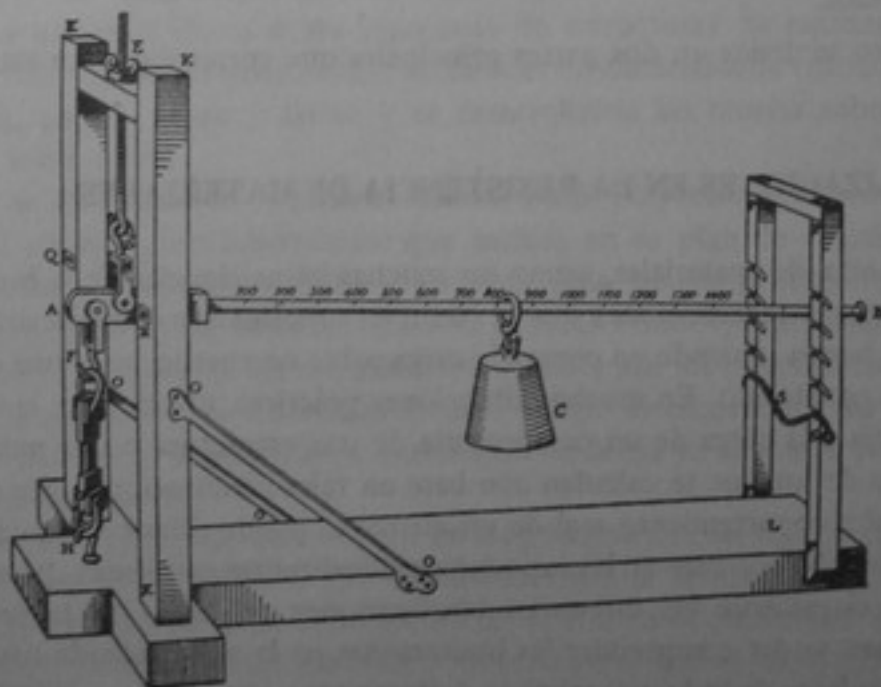
Este libro se divide en dos partes principales que corresponden a estas dos áreas.

1-4 IDEALIZACIONES EN LA RESISTENCIA DE MATERIALES

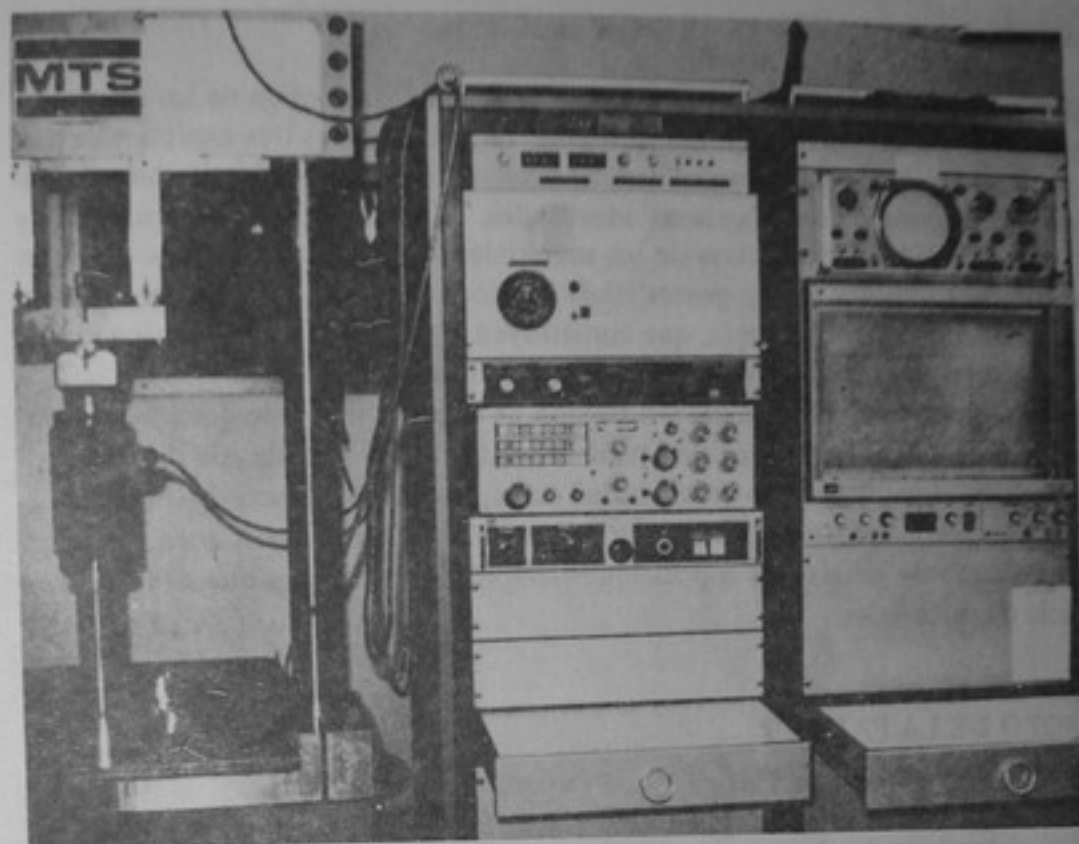
En la resistencia de materiales, como en muchas otras ciencias de la ingeniería, con frecuencia se usan idealizaciones que se basan en suposiciones simplificantes. Las idealizaciones se hacen teniendo en cuenta la carga sobre un cuerpo, su forma o el material del cual está construido. En muchas situaciones prácticas, el esfuerzo, la deformación o la resistencia a la carga de un componente de una estructura o una máquina no difieren mucho de los que se calculan con base en tales idealizaciones. Sin embargo, en otros casos el comportamiento real de un elemento puede diferir sustancialmente del que se ha predicho con base en las suposiciones idealizantes corrientes. Es indispensable comprender claramente las diferentes idealizaciones utilizadas en la resistencia de materiales para poder comprender las limitaciones en la aplicación de sus fórmulas y métodos. A lo largo de todo este texto se destacan estas idealizaciones y las limitaciones asociadas con ellas.



(a)



(b)



(c)

Figura 1-2 Evolución de los ensayos de resistencia de materiales. (a) Ilustración de los ensayos de flexión de Galileo, siglo diecisiete. (b) Máquina de Musschenbroek para ensayos de tracción, siglo dieciocho. (c) Moderno equipo de ensayos que muestra una probeta para fractura por flexión en tres puntos.

1-5 RELACION ENTRE LA RESISTENCIA DE MATERIALES Y OTRAS ASIGNATURAS

En la mayoría de las facultades de ingeniería, la resistencia de materiales es una de las diferentes asignaturas agrupadas en el área de la mecánica de la ingeniería o mecánica aplicada. Otras asignaturas de pregrado de esta área son la estática, la dinámica, la mecánica de fluidos, la mecánica de fractura y, con frecuencia, la ciencia de los materiales. La resistencia de materiales, y en particular la porción tratada en la parte 1 de este libro, está basada en los conceptos de la estática. El conocimiento de la dinámica es menos necesario en un primer curso típico de resistencia de materiales.

Un primer curso de resistencia de materiales es un requisito previo para cursos posteriores en otras áreas. La mayoría de los planes de estudios de las ingenierías aeroespacial, arquitectónica, civil y mecánica contienen cursos que contemplan el análisis y el diseño de estructuras completas o máquinas típicas de cada área; todos estos cursos se basan en un primer curso de resistencia de materiales. Asimismo, en la mayor parte de las facultades de ingeniería se ofrecen cursos de mecánica de ingeniería, a nivel del último año o de postgrado, que se fundamentan sobre un primer curso de resistencia de materiales. Estos cursos versan sobre la resistencia avanzada de materiales, la estabilidad, la elasticidad, la plasticidad, los esfuerzos térmicos, el análisis experimental de esfuerzos, las placas planas y curvas, la mecánica avanzada de la fractura y, quizá, la ciencia de los materiales.

1-6 ESBOZO DE LA PARTE 1

La parte 1 de este texto se ocupa principalmente del análisis clásico de los esfuerzos, las deformaciones y las deformaciones unitarias. En los primeros tres capítulos se presentan los conceptos básicos sobre esfuerzos, acciones internas, deformaciones unitarias y desplazamientos. Los diagramas idealizados esfuerzo-deformación unitaria y algunas otras propiedades mecánicas de los materiales se estudian en el capítulo 4, en donde se presenta también la ley generalizada de Hooke. En el capítulo 5 se estudian conceptos importantes de la energía, que constituyen la base para muchos métodos del análisis estructural. Los capítulos 6, 7 y 8 se ocupan del análisis elástico-lineal clásico de elementos sometidos a carga axial y a torsión de vigas. También se describe el comportamiento no elástico basado en una relación elastoplástica idealizada de esfuerzo-deformación. En el capítulo 9 se estudian los esfuerzos combinados y las transformaciones de esfuerzos y deformaciones unitarias y de corte. A lo largo de toda la parte 1 se tiene el cuidado de señalar las suposiciones simplificantes básicas que se utilizan en la resistencia de materiales.

1-7 ESBOZO DE LA PARTE 2

La parte 2 del texto se refiere principalmente a la resistencia de componentes estructurales. En el capítulo 10 se presentan varios criterios y filosofías de diseño posibles con base en los conceptos de márgenes de seguridad y modos de falla, seguidos por una discusión detallada de varios criterios de falla. En el capítulo 11 se analizan las teorías clásicas de falla de materiales y en el capítulo 12 se hace una introducción a la falla de columnas por estabilidad. En los capítulos 13 y 14 se tratan las fallas por fractura frágil y por fatiga, en donde se puedan presentar discontinuidades e imperfecciones. En estos dos capítulos se explican los conceptos básicos de la mecánica de fractura y se indica el uso de estos conceptos en el diseño para prevenir fallas por fractura o por fatiga. En el último capítulo se estudia el comportamiento de varios tipos de elementos estructurales y de uniones sencillas con el fin de ilustrar los múltiples aspectos de la resistencia y comportamiento de estructuras. Se aplican diferentes criterios de diseño, tales como la fluencia, el aplastamiento plástico, la fatiga y la fractura.

Capítulo 2

Acciones internas y esfuerzos

2-1 INTRODUCCION

Las *acciones internas* y los *esfuerzos* son cantidades fundamentales asociadas con las fuerzas internas en los cuerpos. Las fuerzas internas aparecen en un cuerpo sometido a fuerzas externas. En este capítulo se describen las fuerzas internas, las acciones internas y los esfuerzos. Además, se explica el cálculo de las acciones internas y se presentan algunos problemas introductorios en el cálculo de esfuerzos.

2-2 FUERZAS INTERNAS

Las fuerzas internas en un cuerpo se pueden considerar como fuerzas de interacción entre las partículas de materiales (átomos o moléculas) que constituyen el cuerpo. Además, se puede imaginar que estas fuerzas internas quedan expuestas al pasar diferentes planos cortantes a través del cuerpo, cada uno de los cuales separa a éste en dos partes. Este concepto de las fuerzas internas individuales expuestas por planos cortantes imaginarios se ilustra en la fig. 2-1.

El cuerpo cargado que se muestra en la fig. 2-1a puede representar el caso general de un elemento de una máquina o estructura sometido a fuerzas externas. La fig. 2-1a muestra un plano cortante imaginario que pasa a través del cuerpo y lo separa en dos partes, como se indica en la fig. 2-1b, en donde se ha girado la parte derecha. Este proceso de corte expone ciertas fuerzas internas en el cuerpo, como se puede observar. Las fuerzas internas expuestas por el plano cortante son las fuerzas de interacción entre aquellas partículas que han sido separadas y están localizadas a uno y otro lado del plano cortante. Estas aparecen como fuerzas externas en un diagrama de cuerpo libre de cualquiera de las partes separadas. En la fig. 2-1b las fuerzas internas están representadas por un gran número no especificado de vectores de fuerza individuales, distribuidos sobre la sección cortada imaginaria. En general, estas fuerzas tienen diferentes magnitudes y direcciones, como se indica en la fig. 2-1b.

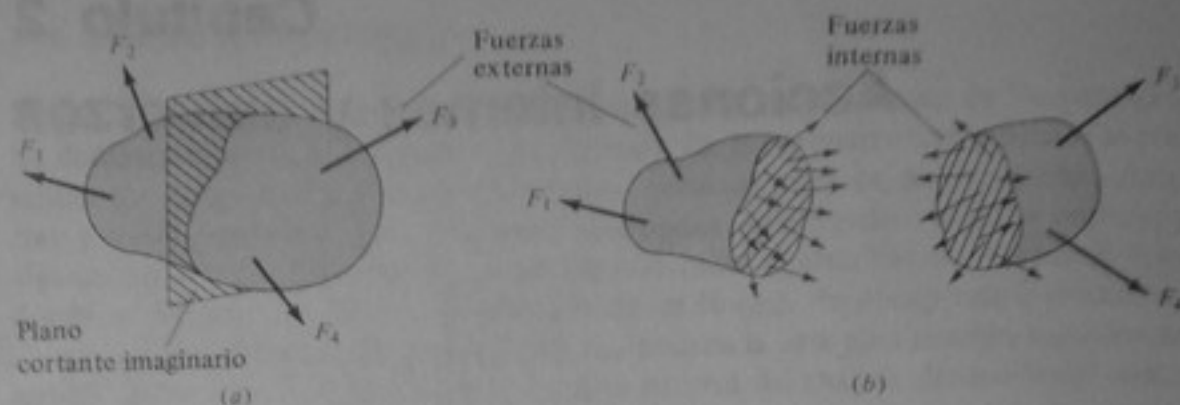


Figura 2-1 Fuerzas internas expuestas por un plano cortante imaginario.

Las fuerzas internas que aparecen en la fig. 2-1b representan las que existen en la localización del plano cortante imaginario de la fig. 2-1a. Las fuerzas internas existentes en otras localizaciones del cuerpo se exponen mediante los planos cortantes situados en posiciones diferentes.

2-3 ACCIONES INTERNAS

Cualquier conjunto de fuerzas se puede representar mediante un sistema estáticamente equivalente que conste de (1) *vector de fuerza* que actúe en un punto escogido arbitrariamente y (2) un *vector de par*. Los vectores de fuerza y de par se denominan *resultantes* del conjunto de fuerzas. Este concepto de resultantes, con el cual debe estar familiarizado el lector, se explica en los textos de estática. Se debe recordar que el vector de fuerza resultante es igual a la suma vectorial de las fuerzas individuales del conjunto, y el vector de par resultante es igual al momento total de las fuerzas individuales del conjunto con respecto a un punto arbitrario.

Las innumerables fuerzas individuales sobre partículas a uno y otro lado de un plano cortante imaginario que atraviesan a un cuerpo, tal como se indica en la fig. 2-1b, se pueden representar, al igual que cualquier conjunto de fuerzas, mediante un vector de fuerza y un vector de par resultantes. Además, los vectores resultantes sobre cada superficie cortada se pueden resolver en sus componentes, como se muestra en la fig. 2-2. Las componentes de las resultantes de las fuerzas internas, orientadas en el sistema de coordenadas x - y - z y con los ejes x perpendiculares a las superficies cortadas, se llaman *acciones internas*.

Las magnitudes de las componentes de la fuerza resultante de las figs. 2-2a y b se designan mediante P , V_y , y V_z . Las componentes del vector de par resultante, representadas mediante flechas con doble punta, tienen magnitudes designadas por T , M_y , y M_z . Esta notación para las acciones internas es consistente con la que se emplea comúnmente en el análisis de tipos específicos de elementos estructurales, y que se considerará más adelante. Como las fuerzas individuales sobre partículas en las dos partes del cuerpo de la fig. 2-1b son fuerzas de interacción y, por tanto, son iguales y directamente opuestas, las componentes de sus resultantes también son iguales y directamente opuestas, como se observa en las figs. 2-2a y b. El origen de los ejes coordenados, a través del cual actúa el vector de fuerza resultante, está localizado en el centroide del área de la sección cortada.

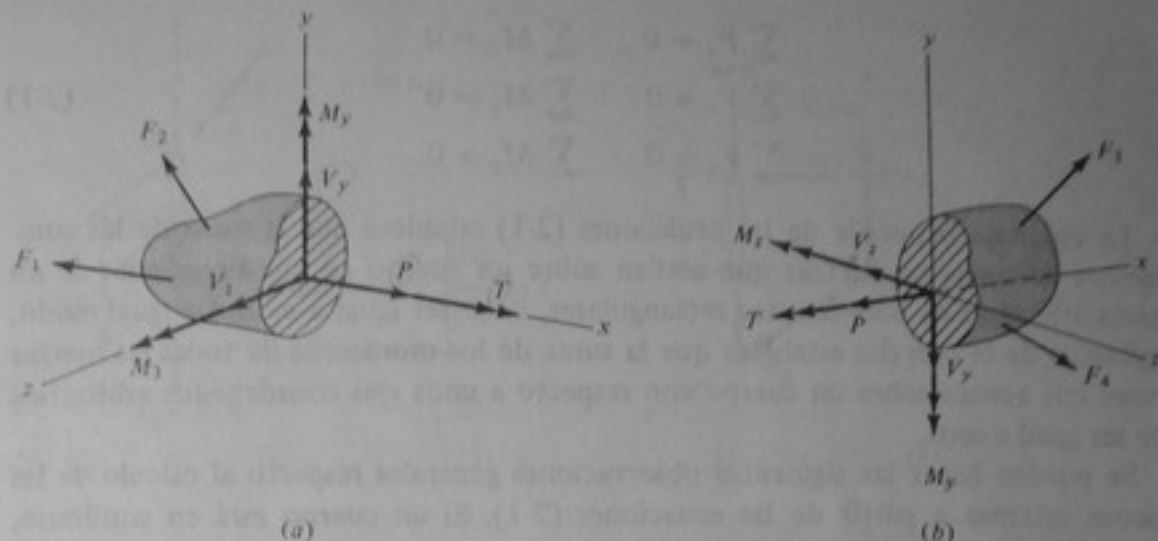


Figura 2-2 Acciones internas a uno y otro lado de un plano cortante imaginario.

La siguiente nomenclatura describe mejor las acciones internas individuales. La componente de fuerza, P , que es normal a la superficie cortada, se llama *fuerza normal* o *axial*; además, se denomina de *tensión* si actúa en el sentido indicado en las figs. 2-2a y b, y de *compresión* si actúa en el sentido opuesto. Las componentes de fuerza, V_y y V_z , que son paralelas a las superficies cortadas, se llaman *fuerzas cortantes* (o *cizalladura*). La componente normal T del vector de par se denomina *momento de torsión* o *momento torsor* y las componentes M_y y M_z se denominan *momentos de flexión*, o *momentos flectores*.

Asimismo, para distinguir entre los dos lados de un plano cortante imaginario, una superficie cortada como la de la fig. 2-2a, en la cual las acciones internas actúan en los sentidos positivos de las coordenadas, se llama la *cara positiva*, y una superficie cortada como la de la fig. 2-2b, en la cual las acciones internas actúan en los sentidos negativos de las coordenadas, se llama la *cara negativa*.

Como se explicó anteriormente, las acciones internas son las componentes de las resultantes de las fuerzas internas que actúan sobre un plano cortante imaginario. Las acciones internas cambian con los planos cortantes, así como lo hacen las fuerzas internas, de tal modo que hay un conjunto de acciones internas asociado con cada plano cortante que atraviese un cuerpo.

2-4 CALCULO DE LAS ACCIONES INTERNAS

El cálculo de las acciones internas sobre varios planos cortantes que atraviesan un cuerpo es un proceso fundamental que se utiliza en el análisis de todos los tipos de elementos de máquinas y estructuras, y se puede realizar sin hacer referencia a las fuerzas internas individuales que actúan sobre un plano cortante, como se explica más adelante. Las acciones internas se calculan utilizando las condiciones de equilibrio estático. Para un cuerpo situado en el espacio, las condiciones de equilibrio estático se pueden escribir en la forma

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 & \sum M_x &= 0 \\ \sum F_y &= 0 & \sum M_y &= 0 \\ \sum F_z &= 0 & \sum M_z &= 0 \end{aligned} \quad (2-1)$$

La columna izquierda de las ecuaciones (2-1) establece que la suma de las componentes de todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo en las direcciones de un sistema arbitrario de coordenadas rectangulares, debe ser igual a cero. De igual modo, la columna de la derecha establece que la suma de los momentos de todas las fuerzas y pares que actúan sobre un cuerpo con respecto a unos ejes coordenados arbitrarios debe ser igual a cero.

Se pueden hacer las siguientes observaciones generales respecto al cálculo de las acciones internas a partir de las ecuaciones (2-1). Si un cuerpo está en equilibrio, entonces una porción de él, aislada por un plano cortante imaginario, también debe estar en equilibrio. Además, cualquier porción aislada, tal como las de las figs. 2-2a y b, se mantiene en equilibrio debido a que las acciones internas que actúan sobre la superficie cortada se oponen a cualesquiera fuerzas externas que estén actuando. Como las ecuaciones (2-1) fueron establecidas para una cualquiera de las porciones aisladas de la fig. 2-2, utilizando las coordenadas indicadas, cada ecuación debe contener una de las seis acciones internas que actúan sobre la respectiva porción, junto con las diferentes componentes de las fuerzas externas. Las ecuaciones de equilibrio de fuerzas a lo largo de x , y y z deben contener, respectivamente, a P , V_y y V_z , mientras que las ecuaciones de equilibrio de momentos respecto a x , y y z deben contener, respectivamente, a M_x , M_y y M_z . Debido a que cada ecuación contiene solo una acción interna, si se conocen todas las fuerzas externas que actúan sobre la parte aislada para la cual se consideran las ecuaciones, las acciones internas que actúan en esa parte se pueden calcular, de una en una, a partir de las ecuaciones de equilibrio.

Cuando se desconocen algunas de las fuerzas externas que actúan sobre una parte aislada (por ejemplo, si algunas de las fuerzas externas son fuerzas de reacciones desconocidas que actúan en los puntos de apoyo), las acciones internas se pueden determinar a partir de las ecuaciones de equilibrio, en función de las fuerzas externas desconocidas. Si un cuerpo no está en equilibrio, las acciones internas se pueden relacionar con las fuerzas externas y las aceleraciones de una parte aislada por medio de las ecuaciones dinámicas de movimiento. En algunos casos las ecuaciones (2-1) se pueden utilizar para determinar las acciones internas, incorporándoles las fuerzas de inercia, de acuerdo con el principio de d'Alembert. No obstante, problemas distintos de los de equilibrio no se consideran, en general, en este texto.

El cálculo de acciones internas, tal como se ha explicado, requiere una comprensión de los conceptos del equilibrio estático. Se sugiere al lector que repase los conceptos básicos del equilibrio en la medida que sea necesario. La solución satisfactoria de los problemas implica el trazado correcto de diagramas de cuerpo libre y la aplicación adecuada de las condiciones de equilibrio (2-1). Los siguientes problemas de muestra ilustran el cálculo de las acciones internas.

Ejemplo 2-1 La barra redonda ABC de la fig. 2-3a tiene el extremo C fijo y está cargada con las fuerzas $F_1 = 100$ N en el plano x - y , y $F_2 = 50$ N a lo largo del eje y , como se indica. Calcular las acciones internas sobre las secciones a y b , normales a los ejes de la barra.

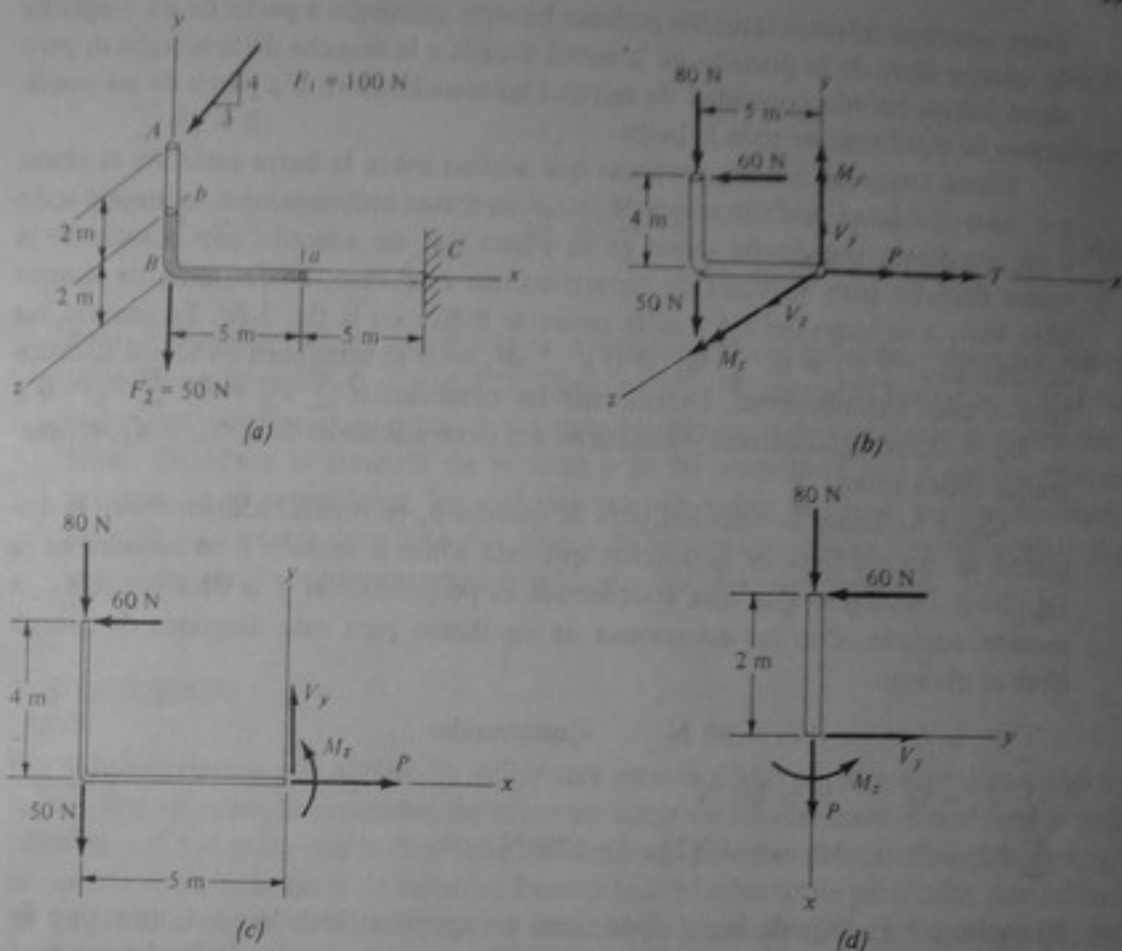


Figura 2-3 Ejemplo 2-1.

SOLUCION Se utiliza el diagrama de cuerpo libre de la porción de barra que está a la izquierda del plano cortante imaginario (fig. 2-3b), resolviendo F_1 en las componentes x y y , para calcular las acciones internas en la sección a . Las ecuaciones de equilibrio para este diagrama de cuerpo libre y sus soluciones son:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0: & & P - 60 = 0 & & & \\ & & P = 60 \text{ N tracción} & & \text{Resp.} & \\ \sum F_y = 0: & & V_y - 80 - 50 = 0 & & & \\ & & V_y = 130 \text{ N} & & \text{Resp.} & \\ \sum F_z = 0: & & V_z = 0 & & \text{Resp.} & \\ \sum M_x = 0: & & T = 0 & & \text{Resp.} & \\ \sum M_y = 0: & & M_y = 0 & & \text{Resp.} & \\ \sum M_z = 0: & & M_z + 60(4) + 80(5) + 50(5) = 0 & & & \\ & & M_z = -890 \text{ N} \cdot \text{m} & & \text{Resp.} & \end{aligned}$$

Estas acciones internas también podrían haberse calculado a partir de un diagrama de cuerpo libre de la porción de la barra situada a la derecha de la sección a , pero antes habría habido necesidad de calcular las reacciones en C a partir de las condiciones de equilibrio de toda la barra.

Como todas las fuerzas externas que actúan sobre la barra están en el plano x - y , este problema también se puede tratar en forma bidimensional, representando a M_z mediante una flecha curva en el plano x - y , de acuerdo con la regla de la mano derecha para vectores de momento. En este caso, el diagrama de cuerpo libre visto a lo largo del eje z sería como se indica en la fig. 2-3c. En general, las condiciones $\sum F_z = 0$, $\sum M_x = 0$ y $\sum M_y = 0$ se satisfacen en forma idéntica para el caso bidimensional. Únicamente las condiciones $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$ y $\sum M_z = 0$ son significativas y conducen a la determinación de P , V_y y M_z , exactamente como antes.

Ahora hallemos la solución para la sección b , en forma bidimensional; el diagrama de cuerpo libre de la porción que está sobre la sección b se muestra en la fig. 2-3d. Obsérvese que una coordenada es perpendicular y la otra paralela a la sección cortada. Con las ecuaciones de equilibrio para este diagrama de cuerpo libre se obtiene:

$$\sum F_x = 0: \quad P = -80 \text{ N} \quad \text{Compresión} \quad \text{Resp.}$$

$$\sum F_y = 0: \quad V_y = 60 \text{ N} \quad \text{Resp.}$$

$$\sum M_z = 0: \quad M_z = -60(2) = -120 \text{ N} \cdot \text{m} \quad \text{Resp.}$$

Ejemplo 2-2 La viga de la fig. 2-4a tiene un apoyo articulado en A , un apoyo de rodillos en B y está cargada con una fuerza F en su punto medio. Hallar las acciones internas para cualquier plano cortante perpendicular al eje longitudinal de la viga.

SOLUCION Este problema es bidimensional. Para resolverlo, primero que todo se puede calcular la reacción externa en el extremo A a partir de un diagrama de cuerpo libre de toda la viga. De este modo se encuentra $R_A = F/2$, que actúa en dirección vertical. Luego se puede utilizar un diagrama de cuerpo libre de una parte de la viga aislada por un plano cortante imaginario situado a una distancia variable $0 < x < L/2$ a partir del extremo izquierdo de la viga, como se indica en la fig. 2-4b. Sólo la fuerza externa R_A aparece en este diagrama, siempre que $0 < x < L/2$. Ahora se pueden determinar las acciones P , V_y y M_z que actúan sobre un plano cortante cualquiera situado en la región $0 < x < L/2$ con base en las condiciones de equilibrio para este diagrama de cuerpo libre.

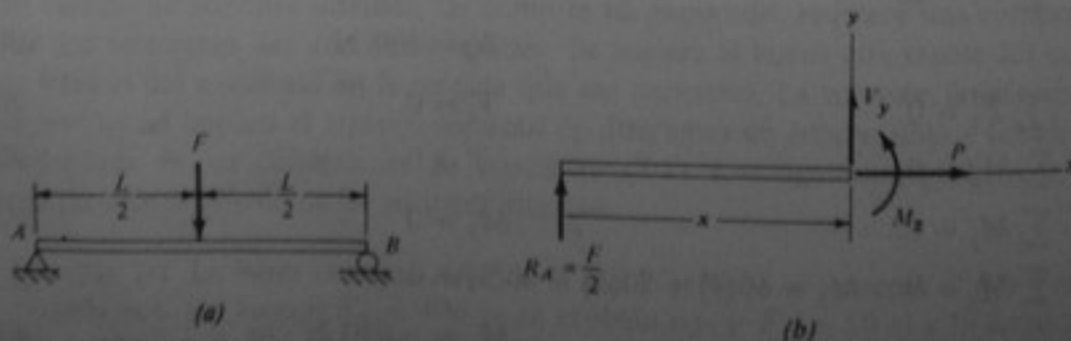


Figura 2-4 Ejemplo 2-2.

$$\sum F_x = 0:$$

$$P = 0$$

Resp.

$$\sum F_y = 0:$$

$$V_y = -\frac{F}{2}$$

Resp.

$$\sum M_z = 0:$$

$$M_z = \frac{Fx}{2}$$

Resp.

Estos resultados indican que P y V_y son constantes para todos los planos cortantes situados en la región $0 < x < L/2$, mientras que M_z aumenta linealmente en esta región con la distancia entre el extremo izquierdo de la viga hasta el plano cortante. Debido a la simetría de la carga y de las reacciones en los apoyos que se presenta en este problema, las acciones internas sobre secciones localizadas simétricamente a uno y otro lado del centro de la viga son iguales. Por tal motivo, los anteriores resultados representan la solución completa del problema.

2-5 ESFUERZO

Las fuerzas internas que actúan en diferentes puntos de un plano cortante son importantes. Por ejemplo, la capacidad de soportar carga de un elemento estructural o una parte de una máquina puede depender de la mayor de estas fuerzas. Sin embargo, no es posible considerar las innumerables fuerzas individuales sobre partículas que actúan en un plano cortante, de acuerdo con lo descrito en la sección 2-2. En lugar de esto, las fuerzas internas que actúan en diferentes puntos se describen en función de una cantidad llamada *esfuerzo*, que representa la intensidad de las fuerzas internas por unidad de área en las diferentes localizaciones de una sección cortada.

Definamos el esfuerzo respecto a una parte aislada de un cuerpo, como la que se muestra en la fig. 2-5. En esta figura, ΔA , es un pequeño elemento de área situado sobre una sección cortada imaginaria, el cual contiene un punto con coordenadas y y z . ΔF es la suma de todas las fuerzas internas individuales que actúan a través del área ΔA . El esfuerzo en el punto (y, z) , situado sobre una sección cortada es un vector definido como

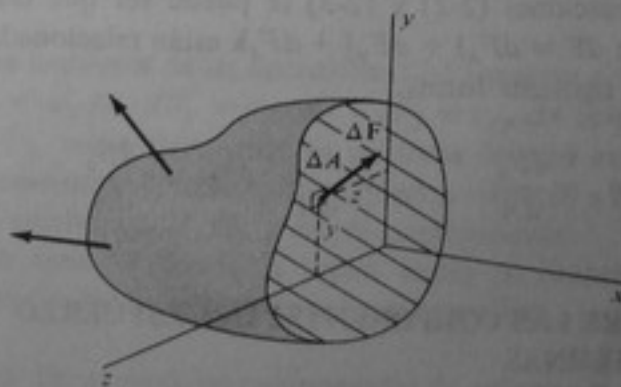


Figura 2-5 Fuerza ΔF que actúa sobre el área ΔA de una sección cortada.

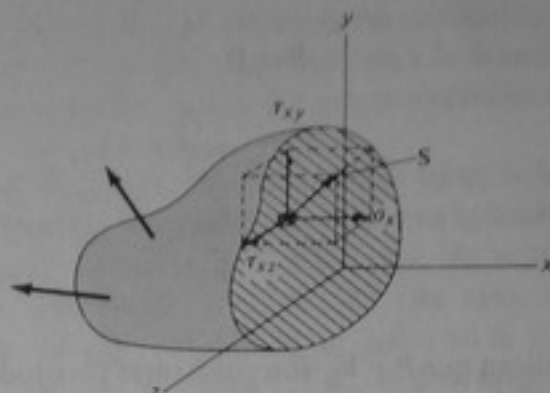


Figura 2-6 Componentes del esfuerzo en un punto situado sobre una sección cortada.

$$S = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{dF}{dA} \quad (2-2)$$

El vector de esfuerzo, S , tiene la misma dirección y el mismo sentido que ΔF y representa la cantidad de fuerza interna por unidad de área en un punto situado sobre un plano cortante dado. El esfuerzo tiene unidades de fuerza por unidad de área.

Un vector de esfuerzo, S , se puede representar mediante las componentes normal y tangencial a la superficie cortada, tal como se muestra en la fig. 2-6. Utilizando los vectores unitarios i , j y k , el vector de esfuerzo se puede expresar en la forma

$$S = \sigma_x i + \tau_{xy} j + \tau_{xz} k \quad (2-3)$$

La componente x de S , designada por σ_x , es normal a la superficie cortada y se llama *esfuerzo normal*. El subíndice x indica la dirección de esta componente del esfuerzo. Los esfuerzos normales se denominan *de tensión* si actúan en el sentido indicado para σ_x en la fig. 2-6, y *de compresión* si actúan en el sentido opuesto. Las componentes de esfuerzo y y z que aparecen en la fig. 2-6 se llaman *esfuerzos cortantes* (debido a que tienden a producir una acción de corte en las partículas de material sobre las cuales actúan) y se designan mediante τ_{xy} y τ_{xz} . El primer subíndice indica la dirección de la normal al plano cortante sobre el cual actúa el esfuerzo, y el segundo subíndice indica la dirección de la componente.

Comparando las ecuaciones (2-2) y (2-3) se puede ver que las componentes de dF expresadas mediante $dF = dF_x i + dF_y j + dF_z k$ están relacionadas con las componentes de esfuerzo en la siguiente forma:

$$\sigma_x = \frac{dF_x}{dA} \quad \tau_{xy} = \frac{dF_y}{dA} \quad \tau_{xz} = \frac{dF_z}{dA} \quad (2-4)$$

2-6 RELACION ENTRE LAS COMPONENTES DEL ESFUERZO Y LAS ACCIONES INTERNAS

Tanto las acciones internas sobre una sección cortada como las componentes del esfuerzo sobre la misma sección están relacionadas con las fuerzas internas que actúan

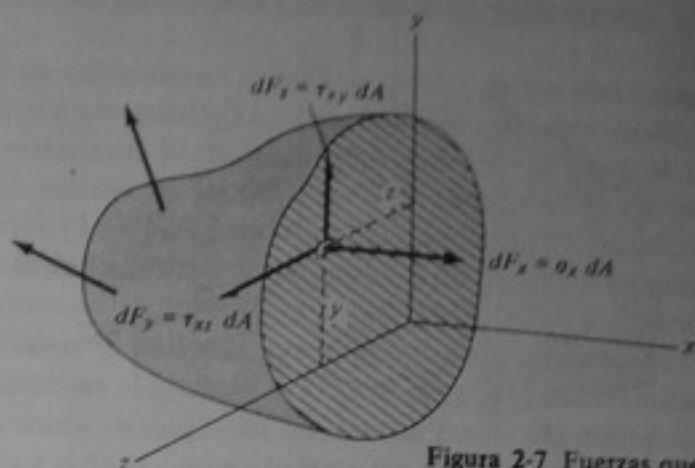


Figura 2-7 Fuerzas que actúan sobre un área infinitesimal típica, dA , expresadas en función de las componentes del esfuerzo.

sobre la sección. Por consiguiente, estas componentes de esfuerzo y las acciones internas deben estar relacionadas entre sí. Las relaciones entre las componentes de esfuerzo y las acciones internas se establecen utilizando el cálculo integral.

El área de una sección cortada como la de las figs. 2-5 ó 2-6 se puede subdividir en áreas de tamaño infinitesimal dA sometidas a la acción de fuerzas dF . En la fig. 2-7 se muestra un área típica dA sobre la cual actúan las componentes de dF , expresadas, utilizando las ecuaciones (2-4), en la forma $dF_x = \sigma_x dA$, $dF_y = \tau_{xy} dA$ y $dF_z = \tau_{xz} dA$.

Las fuerzas dF que actúan sobre todas las áreas infinitesimales de una sección cortada representan las innumerables fuerzas internas individuales sobre esa sección. Por tanto, tienen resultantes idénticas a las acciones internas P , V_y , V_z , T , M_y y M_z sobre la sección.

Las ecuaciones que expresan esta condición son:

$$\begin{aligned}
 P &= \int_A \sigma_x dA & T &= \int_A (\tau_{xz} y - \tau_{xy} z) dA \\
 V_y &= \int_A \tau_{xy} dA & M_y &= \int_A \sigma_x z dA \\
 V_z &= \int_A \tau_{xz} dA & M_z &= -\int_A \sigma_x y dA
 \end{aligned}
 \tag{2-5}$$

La columna izquierda de las ecuaciones (2-5) expresa el hecho de que las sumas de las fuerzas $dF_x = \sigma_x dA$, $dF_y = \tau_{xy} dA$ y $dF_z = \tau_{xz} dA$ son iguales a las fuerzas resultantes P , V_y y V_z , respectivamente. La columna derecha expresa el hecho de que las sumas de los momentos de estas mismas fuerzas respecto a los ejes x , y y z son iguales a los momentos resultantes, T , M_y y M_z , respectivamente.

El siguiente ejemplo ilustra la forma como las ecuaciones (2-5) relacionan las acciones internas con los esfuerzos en un caso específico.

Ejemplo 2-3 En general, las componentes de esfuerzo σ_x , τ_{xy} y τ_{xz} de las ecuaciones (2-5) varían de un punto a otro sobre una sección cortada. Matemáticamente, estas componentes son funciones de las coordenadas del punto, y y z , sobre la

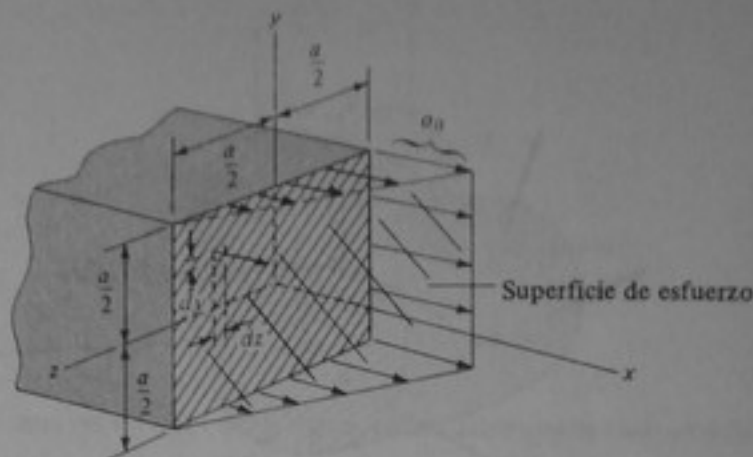


Figura 2-8 Ejemplo 2-3

superficie cortada. Como un ejemplo específico, supongamos que los esfuerzos sobre una sección cortada de forma cuadrada, como la de la fig. 2-8, son $\tau_{xy} = \tau_{xz} = 0$ y $\sigma_x = (\sigma_0/2)(1 - 2z/a)$, en donde σ_0 es el valor máximo de σ_x y a es la dimensión del lado de la sección transversal cuadrada. La distribución del esfuerzo σ_x , representada por la expresión dada, se ilustra en la figura. La distancia perpendicular desde la superficie de la sección cortada, en un punto cualquiera, hasta la "superficie de esfuerzo" inclinada representa el valor de σ_x en ese punto.

Las acciones internas correspondientes a estas componentes de esfuerzo dadas, en el origen de las coordenadas que se muestran, se pueden hallar a partir de las ecuaciones (2-5) así:

$$\begin{aligned}
 P &= \int \sigma_x dA = \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-a/2}^{a/2} \frac{\sigma_0}{2} \left(1 - \frac{2z}{a}\right) dy dz \\
 &= \frac{\sigma_0}{2} \int_{-a/2}^{a/2} \left(1 - \frac{2z}{a}\right) y \Big|_{-a/2}^{a/2} dz \\
 &= \frac{\sigma_0 a}{2} \int_{-a/2}^{a/2} \left(1 - \frac{2z}{a}\right) dz = \frac{\sigma_0 a}{2} \left(z - \frac{z^2}{a}\right) \Big|_{-a/2}^{a/2} = \frac{\sigma_0 a^2}{2} \quad \text{Resp.}
 \end{aligned}$$

$$V_y = \int_A \tau_{xy} dA = 0 \quad \text{Resp.}$$

$$V_z = \int_A \tau_{xz} dA = 0 \quad \text{Resp.}$$

$$T = \int_A (\tau_{xz} y - \tau_{xy} z) dA = 0 \quad \text{Resp.}$$

$$M_y = \int_A \sigma_x z dA = \frac{\sigma_0}{2} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-a/2}^{a/2} \left(1 - \frac{2z}{a}\right) z dy dz = \frac{\sigma_0 a^3}{12} \quad \text{Resp.}$$

$$M_z = - \int_A \sigma_x y dA = - \frac{\sigma_0}{2} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-a/2}^{a/2} \left(1 - \frac{2z}{a}\right) y dy dz = 0 \quad \text{Resp.}$$

2-7 OBSERVACIONES ADICIONALES SOBRE EL ESFUERZO

La determinación de esfuerzos en diferentes puntos de los planos cortantes que atraviesan los elementos estructurales es, obviamente, un objetivo básico en el estudio de la resistencia de materiales. El procedimiento general mediante el cual se logra este objetivo emplea el cálculo de las acciones internas explicado en la sección 2-4, así como las ecuaciones (2-5) para relacionar las componentes de esfuerzo, definidas en la sección 2-5, con las acciones internas. Este último paso se puede llevar a cabo siempre que se conozca la *distribución* de esfuerzos sobre un plano cortante, de tal manera que se puedan efectuar las integraciones de las ecuaciones (2-5). A modo de ilustración, reconsidérese el ejemplo 2-3. Si se conoce la distribución de σ_x como un dato, pero se desconoce su magnitud σ_0 , ésta se puede determinar con las ecuaciones (2-5) en función de P o de M_y , como indican los cálculos del ejemplo.

En los capítulos subsiguientes se explican los métodos para determinar la distribución de esfuerzos sobre planos cortantes y se desarrollan las fórmulas para los esfuerzos en función de las acciones internas para algunos tipos específicos de elementos que deben soportar carga.

El procedimiento descrito para calcular esfuerzos no tiene en cuenta la estructura de las partículas del material del cuerpo. En este método, un cuerpo material se toma como un medio continuo sin estructura de partículas, llamado simplemente *continuo*. Las teorías existentes sobre la resistencia de materiales (así como las teorías avanzadas de análisis de esfuerzos) se basan en el concepto del continuo.

La descripción del esfuerzo, presentada en la sección 2-5, identificó las componentes del esfuerzo en un punto de un cuerpo respecto a un plano cortante. Sin embargo, como a través de un punto cualquiera de un cuerpo puede pasar un infinito número de planos cortantes imaginarios, con diferentes orientaciones, en cada punto realmente existe un infinito número de conjuntos diferentes de componentes del esfuerzo, normal y cortante, y cada conjunto está asociado con cada plano cortante posible. Para futuras referencias son significativas las componentes de esfuerzo sobre las caras de un cubo de tamaño infinitesimal del material, formado por planos cortantes paralelos a los planos coordenados xy , xz y yz . En la fig. 2-9 se muestra este cubo infinitesimal con sus componentes de esfuerzo. La notación de los subíndices para los componentes de esfuerzo en la figura coinciden con la notación explicada anteriormente para las componentes σ_x , τ_{xy} y τ_{xz} .

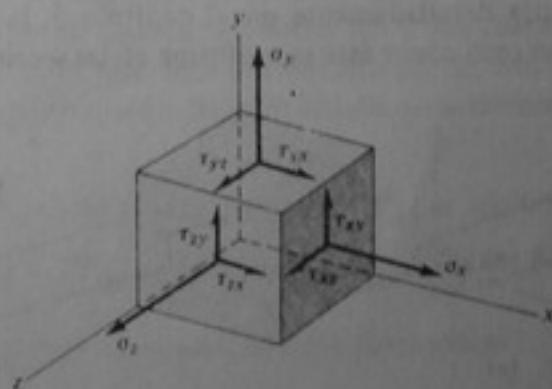


Figura 2-9 Componentes de esfuerzo sobre un elemento cúbico infinitesimal situado en un punto.

Para satisfacer las ecuaciones de equilibrio de momentos para el elemento infinitesimal de material en la fig. 2-9, las componentes de esfuerzo cortante que actúan sobre él deben relacionarse así: $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ y $\tau_{yz} = \tau_{zy}$. De este modo, hay seis componentes diferentes de esfuerzo, σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{xz} y τ_{yz} , asociadas con un elemento infinitesimal como el de la fig. 2-9. Estas seis cantidades son componentes del *tensor de esfuerzo* en un punto y comúnmente se utilizan como componentes de referencia para representar el estado de esfuerzos en un punto de un cuerpo. En los capítulos siguientes se estudiarán conceptos más generales relacionados con los estados de esfuerzos.

2-8 VALOR PROMEDIO DEL ESFUERZO NORMAL Y DEL ESFUERZO CORTANTE

Existen muchos problemas prácticos en los cuales las acciones internas sobre un plano cortante imaginario constan solamente de la fuerza axial P , ya que todas las demás fuerzas son iguales a cero. En otros casos las acciones internas constan únicamente de una de las fuerzas cortantes, V_x o V_y . En estos casos, el *valor promedio* de los esfuerzos asociado a cada acción se puede determinar directamente mediante las ecuaciones (2-5).

Fuerza axial y esfuerzo normal

Considérese una barra recta cargada con dos fuerzas externas, opuestas e iguales, F . El equilibrio de una parte aislada de la barra, como la que se muestra en la fig. 2-10a, requiere que las acciones internas sobre una sección perpendicular al eje longitudinal de la barra consten únicamente de la fuerza axial $P = F$. Obviamente las acciones V_y , V_z y T son iguales a cero y M_y y M_z también son iguales a cero si F es colineal con el eje centroidal x de la barra.

La fuerza axial P , que es normal a la superficie cortada, es la resultante de los esfuerzos normales σ_x sobre la sección transversal. De acuerdo con las ecuaciones (2-5), $P = \int \sigma_x dA = (\sigma_x)_{\text{pro}} A$. De este modo, el valor promedio del esfuerzo normal sobre las secciones de la barra es $(\sigma_x)_{\text{pro}} = P/A$, en donde A es el área de la sección transversal de la barra. Siendo V_y , V_z y T iguales a cero, las ecuaciones (2-5) se satisfacen con $\tau_{xy} = \tau_{xz} = 0$. Además, la condición $M_y = M_z = 0$ en las ecuaciones (2-5) solo exige que σ_x esté distribuida simétricamente con respecto a los ejes y y z .

Como se explicará más detalladamente en el capítulo 6, la distribución real del esfuerzo normal, σ_x , en un caso como éste es uniforme en las secciones suficientemente

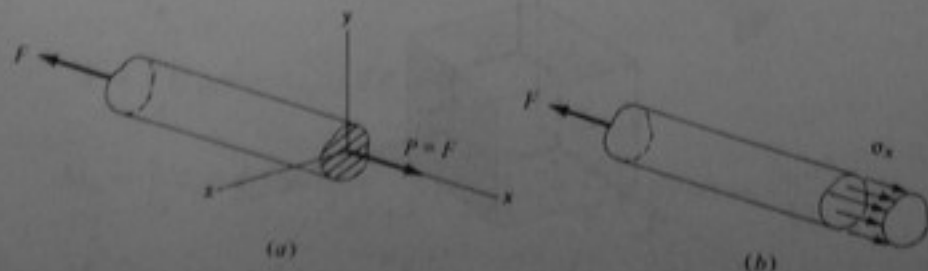


Figura 2-10 Acción interna P y esfuerzo σ_x en un caso especial.

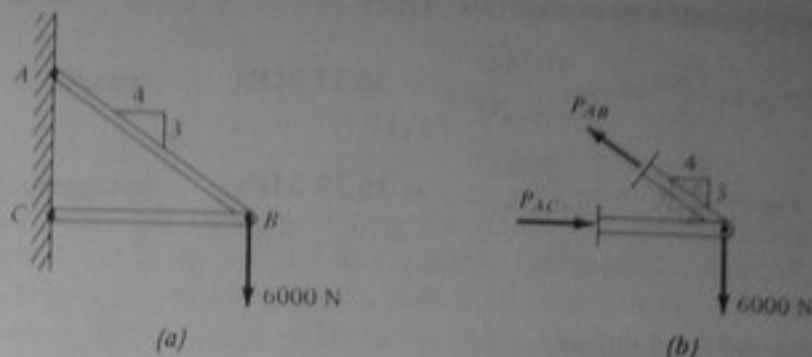


Figura 2-11 Ejemplo 2-4.

alejadas de los extremos de la barra, como se ilustra en la fig. 2-10b. El esfuerzo en todos los puntos de estas secciones es igual al valor promedio. Cancelando los subíndices y llamando a este esfuerzo simplemente σ , se tiene

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad (2-6)$$

La ecuación (2-6) se aplica a muchos casos prácticos relacionados con elementos cargados axialmente. Los esfuerzos sobre los planos cortantes perpendiculares a los ejes longitudinales de, por ejemplo, cables, varillas de apuntalamiento y columnas cargadas en forma centrada o elementos sencillos de armaduras, se pueden calcular a partir de la ecuación (2-6). La acción interna P debe calcularse primero para un plano dado, siguiendo los métodos descritos en la sección 2-4; luego, el esfuerzo en dicho plano está dado por la ecuación (2-6).

Ejemplo 2-4 Calcular los esfuerzos normales sobre los planos cortantes perpendiculares a los ejes de los elementos AB y BC de la estructura unida con pasadores que se muestra en la fig. 2-11a. Los dos elementos son varillas redondas con diámetro $d = 25$ mm.

SOLUCION Se pasan planos cortantes imaginarios perpendiculares a los ejes de las barras con el fin de aislar el diagrama de cuerpo libre de la fig. 2-11b. Cada uno de los elementos de la estructura está sometido a dos fuerzas y por tal razón, las acciones internas en cada elemento son únicamente las fuerzas axiales P_{AB} y P_{AC} indicadas. Para el equilibrio de la porción aislada de la estructura,

$$\begin{aligned} \sum F_y = 0: \frac{3}{5}P_{AB} - 6000 &= 0 & \text{o} & \quad P_{AB} = 10,000 \text{ N} & \text{tracción} \\ \sum F_x = 0: P_{AC} - \frac{4}{5}P_{AB} &= 0 & \text{o} & \quad P_{AC} = 8000 \text{ N} & \text{compresión} \end{aligned}$$

El área de la sección transversal de cada elemento es

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi(0.025)^2}{4} = 491 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

Entonces, el esfuerzo en el elemento AB es

$$\sigma_{AB} = \frac{P_{AB}}{A} = \frac{10,000}{491 \times 10^{-6}} = 20.37 \text{ MPa} \quad \text{tracción} \quad \text{Resp.}$$

$$\sigma_{AC} = \frac{P_{AC}}{A} = \frac{8000}{491 \times 10^{-6}} = 16.29 \text{ MPa} \quad \text{compresión} \quad \text{Resp.}$$

Fuerza cortante y esfuerzo cortante

Existen otras situaciones en las cuales la única acción interna sobre los planos cortantes que atraviesan un elemento es una fuerza cortante. Por ejemplo, éste puede ser el caso con los pernos, pasadores o remaches que conectan dos elementos. Considérese el caso de dos barras planas (fig. 2-12a) que están conectadas mediante un remache y están cargadas con las fuerzas axiales F . Imaginemos que se pasa un plano cortante coincidente con las superficies de contacto de las barras, el cual atraviesa el remache y aísla una barra junto con una porción de remache, como se indica en la fig. 2-12b. Si se desprecian las fuerzas de rozamiento entre las dos barras, el equilibrio de la barra y su porción de remache exige que las acciones internas sobre la sección cortada del remache sean $V_z = F$ y $V_y = P = 0$; además, si F es paralela al eje z e intersecta el eje x , $T = M_x = 0$. Si la fuerza F no es colineal con el eje z , debe existir un pequeño momento M_y ; sin embargo, aquí se supone que $M_y = 0$.

La fuerza cortante diferente de cero, V_z , es la resultante de los esfuerzos cortantes τ_{xz} sobre la sección cortada. De las ecuaciones (2-5), $V_z = \int \tau_{xz} dA = (\tau_{xz})_{\text{pro}} A$. Por tanto, el valor promedio del esfuerzo cortante τ_{xz} sobre la sección cortada del remache es $(\tau_{xz})_{\text{pro}} = V_z/A$, en donde A es el área de la sección transversal del remache. Las ecuaciones (2-5) también se satisfacen con $\tau_{xy} = \sigma_x = 0$. Si se cancelan los subíndices

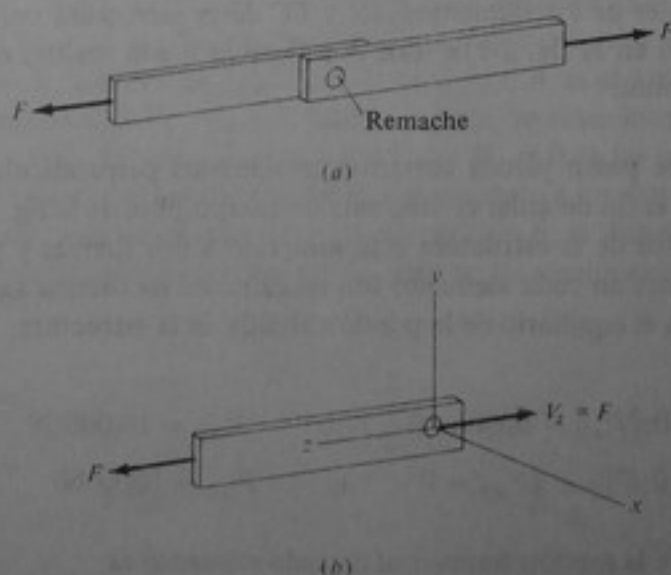


Figura 2-12 Acción interna V_z en un caso especial.

x y z , el esfuerzo sobre la sección del remache se puede expresar más concisamente como

$$\tau_{\text{pro}} = \frac{V}{A} \quad (2-7)$$

La distribución real de los esfuerzos cortantes no es uniforme sobre la sección cortada del remache de la fig. 2-12 (ni en los pernos, pasadores o remaches, en general). El esfuerzo es mayor en algunos puntos y menor en otros que el valor promedio dado por la ecuación (2-7). Sin embargo, el diseño de ingeniería de pernos, pasadores y remaches por regla general se basa en los valores promedios de los esfuerzos cortantes dados por la ecuación (2-7). Más generalmente, la ecuación (2-7) se emplea para calcular el valor promedio de los esfuerzos cortantes asociados a una acción cortante interna V en cualquier dirección y sobre cualquier sección cortada del área transversal A , después de haber calculado la fuerza cortante V como se indicó en la sección 2-4.

Ejemplo 2-5 La unión de horquilla y pasador que se muestra en la fig. 2-13a transmite una fuerza de 22 kN. Calcular:

- El esfuerzo cortante promedio máximo en el pasador.
- El esfuerzo cortante promedio en las secciones que pasan por las soldaduras.
- Los esfuerzos normales promedios máximos en la placa A .

SOLUCION

- Las secciones perpendiculares que atraviesan el pasador y tienen las mayores fuerzas cortantes y por tanto los esfuerzos cortantes promedios máximos, deben ser secciones cortantes localizadas a uno u otro lado de la placa A . En la fig. 2-13b se muestra una vista lateral del diagrama de cuerpo libre de la placa A y una porción del pasador, los cuales han sido aislados por dichos planos cortantes. Para cumplir la condición de equilibrio de este cuerpo libre, la fuerza cortante V sobre cada una de las superficies cortantes que atraviesa

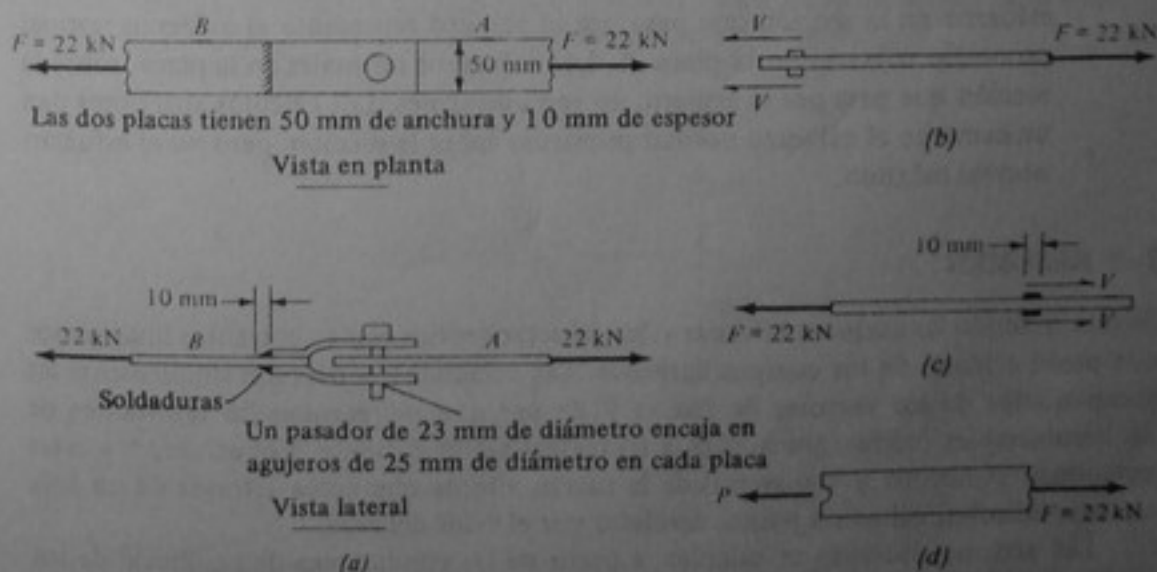


Figura 2-13 Ejemplo 2-5.

x y z , el esfuerzo sobre la sección del remache se puede expresar más concisamente como

$$\tau_{\text{pro}} = \frac{V}{A} \quad (2-7)$$

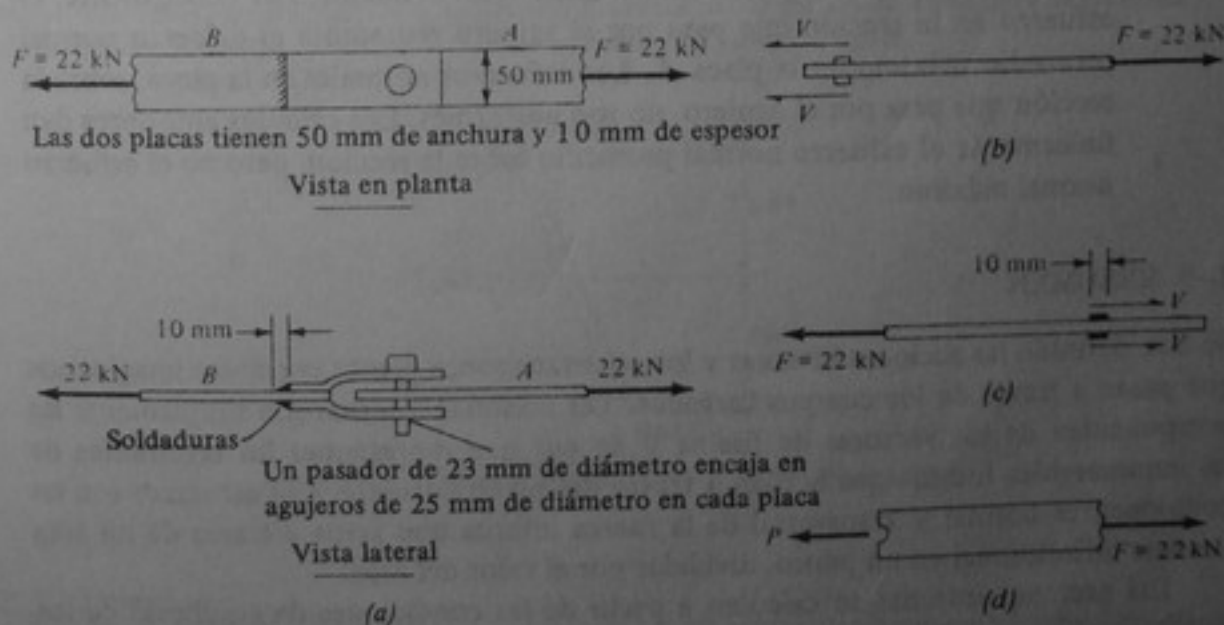
La distribución real de los esfuerzos cortantes no es uniforme sobre la sección cortada del remache de la fig. 2-12 (ni en los pernos, pasadores o remaches, en general). El esfuerzo es mayor en algunos puntos y menor en otros que el valor promedio dado por la ecuación (2-7). Sin embargo, el diseño de ingeniería de pernos, pasadores y remaches por regla general se basa en los valores promedios de los esfuerzos cortantes dados por la ecuación (2-7). Más generalmente, la ecuación (2-7) se emplea para calcular el valor promedio de los esfuerzos cortantes asociados a una acción cortante interna V en cualquier dirección y sobre cualquier sección cortada del área transversal A , después de haber calculado la fuerza cortante V como se indicó en la sección 2-4.

Ejemplo 2-5 La unión de horquilla y pasador que se muestra en la fig. 2-13a transmite una fuerza de 22 kN. Calcular:

- El esfuerzo cortante promedio máximo en el pasador.
- El esfuerzo cortante promedio en las secciones que pasan por las soldaduras.
- Los esfuerzos normales promedios máximos en la placa A .

SOLUCION

- Las secciones perpendiculares que atraviesan el pasador y tienen las mayores fuerzas cortantes y por tanto los esfuerzos cortantes promedios máximos, deben ser secciones cortantes localizadas a uno u otro lado de la placa A . En la fig. 2-13b se muestra una vista lateral del diagrama de cuerpo libre de la placa A y una porción del pasador, los cuales han sido aislados por dichos planos cortantes. Para cumplir la condición de equilibrio de este cuerpo libre, la fuerza cortante V sobre cada una de las superficies cortantes que atraviesa



el pasador es $V = F/2 = 11$ KN. Entonces, el esfuerzo cortante promedio en cada una de estas superficies es:

$$\tau_{\text{pro}} = \frac{V}{A} = \frac{11}{\pi(0.023)^2/4} = 26,476 \text{ kPa} = 26.5 \text{ MPa} \quad \text{Resp.}$$

En este caso el pasador está cargado en *corte doble*.

- (b) En la figura 2-13 *c* se presenta una vista lateral del diagrama de cuerpo libre de la placa *B*, aislada por planos cortantes longitudinales que pasan por las bases de las soldaduras. Para cumplir la condición de equilibrio de este cuerpo libre, la fuerza cortante en cada soldadura debe ser $V = F/2 = 11$ KN. El área transversal de cada una de las secciones que pasa a través de las soldaduras es $A = 10 \times 50 = 500 \text{ mm}^2$. Entonces, el esfuerzo cortante promedio en cada una de las secciones es

$$\tau_{\text{pro}} = \frac{11 \text{ kN}}{500 \times 10^{-6}} = 22,000 \text{ kPa} = 22 \text{ MPa} \quad \text{Resp.}$$

- (c) En la figura 2-13 *d* se muestra una vista en planta del diagrama de cuerpo libre de la porción de la placa *A* situada a la derecha de un plano cortante que pasa por el centro del agujero del pasador, perpendicular al eje longitudinal de la placa. Para cumplir la condición de equilibrio de este cuerpo libre, la fuerza axial sobre esta sección cortante es $P = 22$ KN. El área total de la sección cortada es $A = (50-25)(10) = 250 \text{ mm}^2$. Entonces, el esfuerzo normal promedio sobre esta sección es

$$\sigma_{\text{pro}} = \frac{22 \text{ kN}}{250 \times 10^{-6}} = 88,000 \text{ kPa} = 88 \text{ MPa} \quad \text{Resp.}$$

Todas las demás secciones perpendiculares al eje de la placa *A* tienen áreas transversales mayores y una fuerza axial igual o menor. Por consiguiente, el esfuerzo en la sección que pasa por el agujero representa el esfuerzo normal promedio máximo en la placa *A*. Los esfuerzos normales en la placa, sobre la sección que pasa por el agujero, no son uniformes. Los cálculos anteriores dan únicamente el esfuerzo normal promedio sobre la sección, pero no el esfuerzo normal máximo.

2-9 RESUMEN

Se han definido las acciones internas y los esfuerzos sobre planos cortantes imaginarios que pasan a través de los cuerpos cargados. Las acciones internas son simplemente las componentes de los vectores de fuerza y de par que representan las resultantes de las innumerables fuerzas que actúan a través del plano cortante. Los esfuerzos son las componentes normal y transversal de la fuerza interna que actúa a través de un área unitaria infinitesimal en un punto, divididas por el valor del área.

Las acciones internas se calculan a partir de las condiciones de equilibrio de los diagramas de cuerpo libre aislados por planos cortantes imaginarios, como se estableció en la sección 2-4 y se ilustró con los diferentes ejemplos.

Los esfuerzos sobre una sección cortada se relacionan con las acciones internas sobre la misma sección por medio de las ecuaciones (2-5). En un caso específico, las magnitudes de los esfuerzos en todos los puntos de una sección cortada se pueden calcular en función de las acciones internas sobre esa sección a partir de las ecuaciones (2-5), con tal de que se haya establecido antes la distribución de esfuerzos sobre dicha sección. Los métodos para determinar la distribución de esfuerzos sobre secciones cortadas en casos específicos se describen en los capítulos siguientes de este libro.

En los casos de varillas o cables cargados axialmente, en donde las acciones internas consisten simplemente en una fuerza axial P , o en casos como los de pernos y remaches, en donde las acciones internas consisten únicamente en una fuerza cortante V , los esfuerzos promedios o los esfuerzos uniformemente distribuidos (en donde existen) se pueden calcular en función de las acciones internas mediante las ecuaciones (2-6) o (2-7).

PROBLEMAS†

2-1 El elemento ABC es horizontal y está apoyado mediante un pasador en A y sobre el elemento BD que tiene pasadores en sus extremos. En el extremo C se aplica una carga vertical $F = 300$ lb. Hallar las acciones internas sobre una sección $a-a$, perpendicular al eje longitudinal del elemento BD .

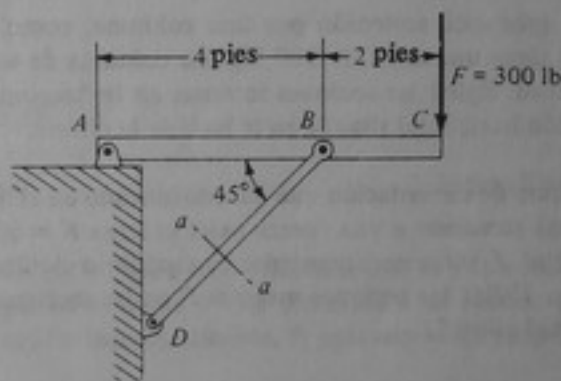


Figura P2-1

2-2 La estructura de la figura consta de tres barras AE , BE y CD , unidas por pasadores. Hallar las acciones internas sobre una sección que atraviesa el elemento CD perpendicularmente a su eje longitudinal, debidas a la carga externa $F = 20$ klb, aplicada en E , como se indica.

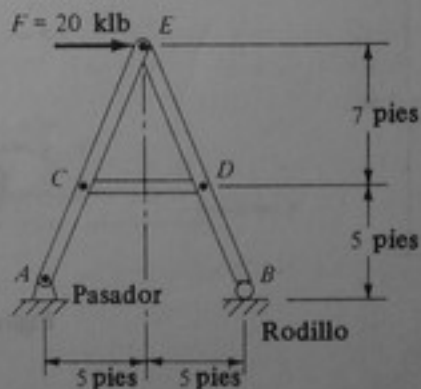


Figura P2-2

† A todo lo largo del texto, las figuras de las problemas se identifican con los mismos números que los problemas a los cuales corresponden. Así, la fig. P2-1 es la figura del problema 2-1.

2-3 La estructura mostrada consta de tres barras, AC , BD y CD , unidas por pasadores. Hallar las acciones internas sobre una sección que corta el elemento BD perpendicularmente a su eje longitudinal, debidas a la carga externa $F = 5 \text{ kN}$, aplicada en C , como se indica.

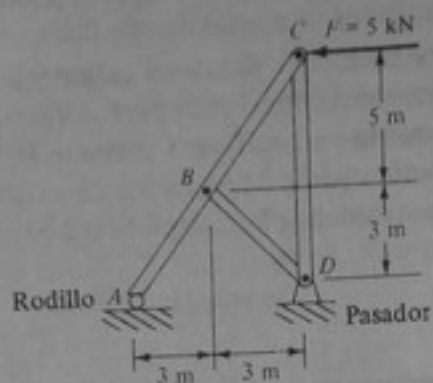


Figura P2-3

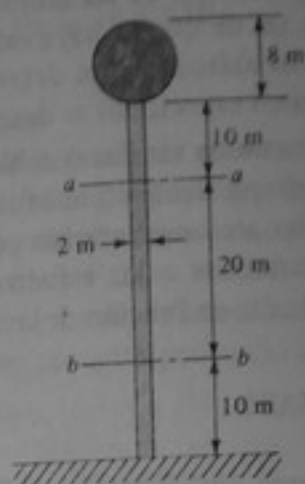


Figura P2-4

2-4 Un tanque esférico de agua está sostenido por una columna, como se muestra en la figura. El tanque con su contenido tiene una masa de 200 Mg. La columna de soporte tiene una masa de 1.10 Mg por metro de longitud. Hallar las acciones internas en las secciones horizontales $a-a$ y $b-b$ de la columna y en una sección horizontal situada en la base de la misma.

2-5 La figura muestra un pilote de cimentación que ha sido hincado en el terreno hasta una profundidad $L = 8 \text{ m}$. El pilote está sometido a una fuerza axial externa $F = 50 \text{ kN}$. La fuerza de rozamiento por unidad de longitud, f , surge para mantener en equilibrio el pilote y se supone uniforme sobre toda la altura de éste. Hallar las acciones internas P en las secciones $a-a$ y $b-b$. ¿Cuál es la acción interna máxima, P , en el pilote?

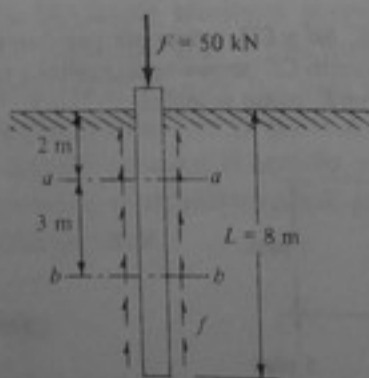


Figura P2-5

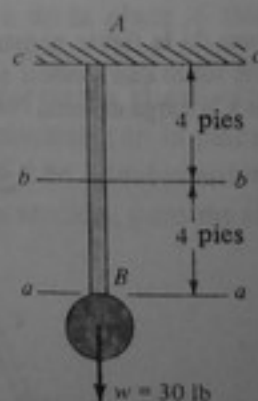


Figura P2-6

2-6 La varilla AB tiene un peso de 2 lb por pie de longitud y soporta un dispositivo que pesa 30 lb, como se ilustra. Hallar las acciones internas, P , en las secciones $a-a$, $b-b$ y $c-c$.

2-7 El elemento recto está sometido a las fuerzas axiales externas que se indican. Hallar la acción interna máxima, P , para secciones perpendiculares al eje longitudinal del elemento.

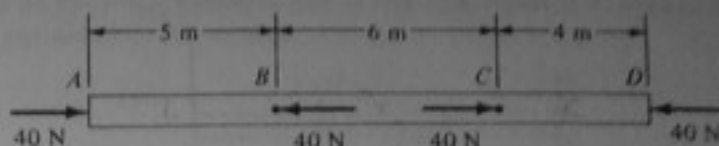


Figura P2-7

2-8 La columna fija al piso que se muestra tiene una masa de 0.80 Mg por metro de longitud. Hallar la acción interna máxima, P , sobre secciones perpendiculares al eje vertical de la columna cuando en la parte superior de ésta se aplica una fuerza de levantamiento, $F = 3$ kN, como se ilustra.

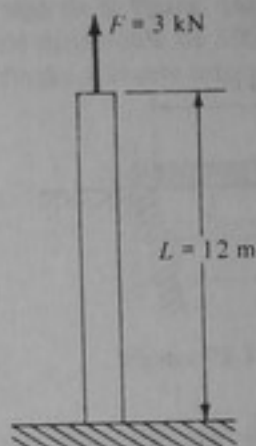


Figura P2-8

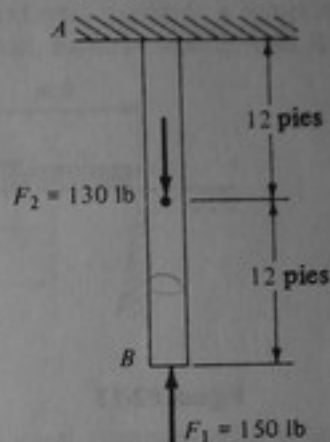


Figura P2-9

2-9 La barra representada en la figura está sostenida por su parte superior y cuelga verticalmente. Su peso es de 5 lb por pie de longitud y está sometida a las fuerzas concentradas $F_1 = 150$ lb y $F_2 = 130$ lb. Hallar la acción interna máxima, P , para secciones perpendiculares al eje longitudinal de la barra.

2-10 El elemento de la figura está cargado con las fuerzas externas colineales, F . Hallar la acción interna sobre la sección $a-a$.

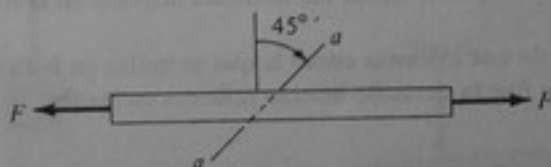


Figura P2-10

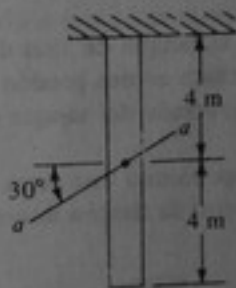


Figura P2-11

2-11 El elemento uniforme que se muestra pende verticalmente bajo la acción de su propio peso. Su masa total es 16 kg. Hallar las acciones internas sobre la sección $a-a$.

2-12 El elemento horizontal representado en la figura tiene su extremo izquierdo empotrado y su extremo derecho cargado verticalmente con una fuerza $F = 10$ kN. Hallar las acciones internas sobre la sección $a-a$.

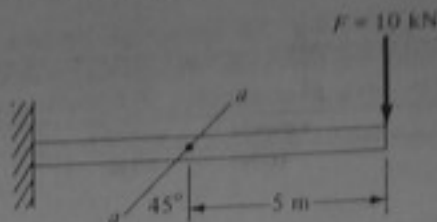


Figura P2-12

2-13 La figura representa una estructura de un puente con extremos articulados que tiene una masa de 600 kg por metro de longitud y soporta una masa de 5 Mg, como se indica. Hallar las acciones internas en las secciones $a-a$ y $b-b$.

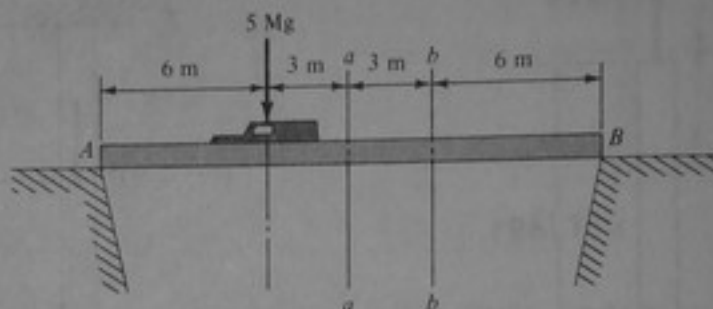


Figura P2-13

2-14 La viga que se muestra está apoyada mediante una articulación en A y un rodillo en B , y soporta la carga indicada. Hallar las acciones internas en las secciones $a-a$ y $b-b$.

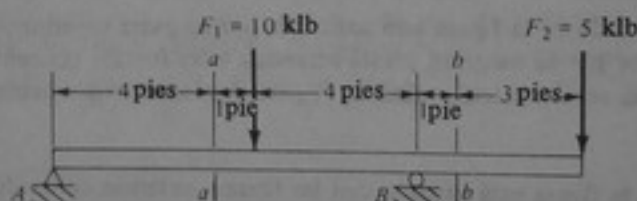


Figura P2-14

2-15 Si el tanque de agua del problema 2-4 está sometido a una carga adicional debida al viento, la cual consiste en una presión horizontal equivalente a 70 N/m^2 uniformemente distribuidos sobre el área proyectada del tanque y la columna de soporte, hallar las acciones internas en la sección $b-b$.

2-16 Suponiendo una carga sobre las alas de una avioneta como la que se indica en la figura, hallar el momento de flexión interno máximo y la fuerza cortante interna máxima en las alas.

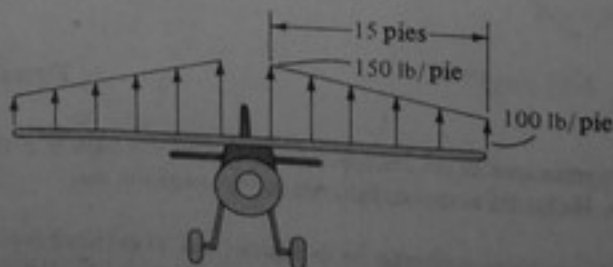


Figura P2-16

2-17 Para la viga de apoyos articulados que se muestra, hallar el momento de flexión interno máximo y la fuerza cortante interna máxima.

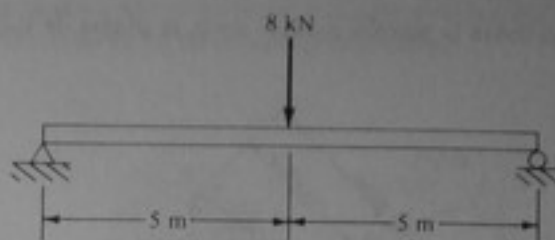


Figura P2-17

2-18 Para la viga de la figura, que está empotrada en el extremo izquierdo y sometida a una carga uniformemente distribuida de 500 N por metro de longitud, hallar el momento de flexión interno máximo y la fuerza cortante interna máxima.

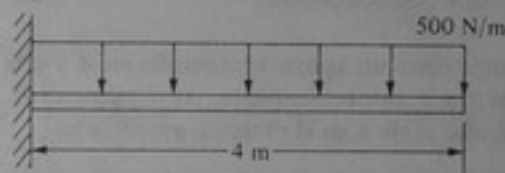


Figura P2-18

2-19 En el problema 2-1, calcular las acciones internas en el elemento ABC sobre una sección vertical situada (a) exactamente a la derecha del pasador B y (b) exactamente a la izquierda del pasador B .

2-20 En el problema 2-2, calcular las acciones internas en el elemento EDB sobre una sección perpendicular a su eje longitudinal situada (a) exactamente debajo del pasador D y (b) exactamente encima del pasador D .

2-21 En el problema 2-3, calcular las acciones internas en el elemento ABC sobre una sección perpendicular a su eje longitudinal situada (a) exactamente debajo del pasador B y (b) exactamente encima del pasador B .

2-22 El montaje manivela-biela-pistón que se muestra está en equilibrio bajo la acción de la fuerza F y el par $C = 200$ lb·pie. Hallar las acciones internas sobre la sección $a-a$ que corta el elemento OA .

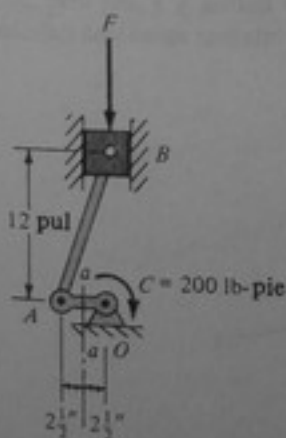


Figura P2-22

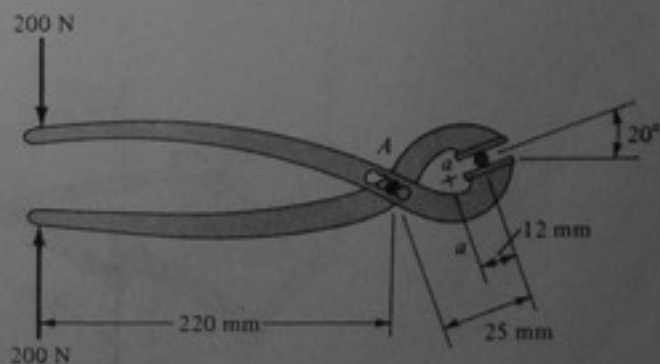


Figura P2-23

- 2-23 Se aplican dos fuerzas de 200 N a las pinzas que se representan en la figura. Hallar las acciones internas sobre la sección $a-a$ que corta la quijada inferior.
- 2-24 Hallar las acciones internas sobre la sección $a-a$ que corta la pluma de la grúa, si la carga es de 5 klb.

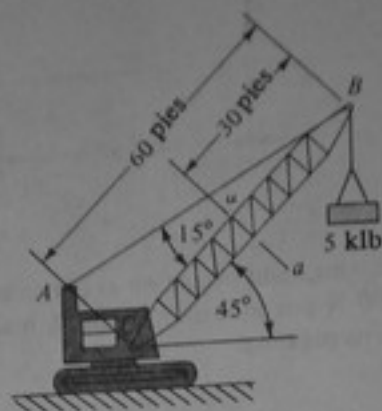


Figura P2-24

- 2-25 La barra rígida que se muestra tiene un apoyo empotrado en A y está sometida a fuerzas de 200 N y 300 N en las direcciones x y z , respectivamente, en el extremo B . Hallar las acciones internas sobre una sección perpendicular al eje x en el extremo empotrado.

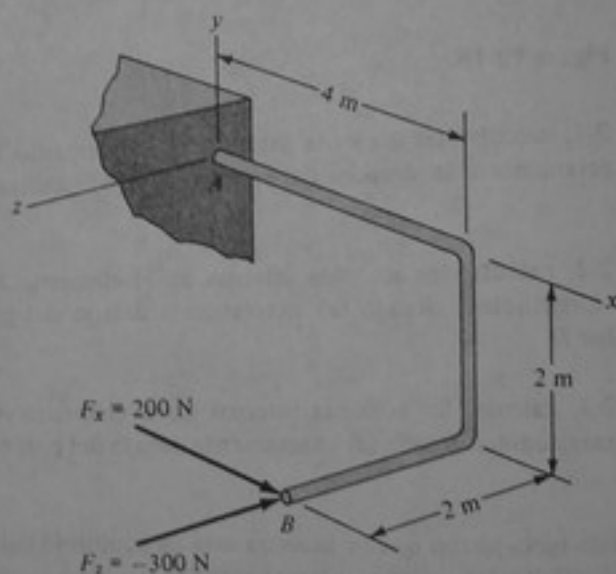


Figura P2-25

- 2-26 Un trozo de tubo se sujeta con una prensa de tornillo, como se indica, y a una llave que agarra el tubo se le aplica una fuerza $F_y = -250$ N. Hallar las acciones internas sobre una sección a , perpendicular al eje longitudinal del tubo.

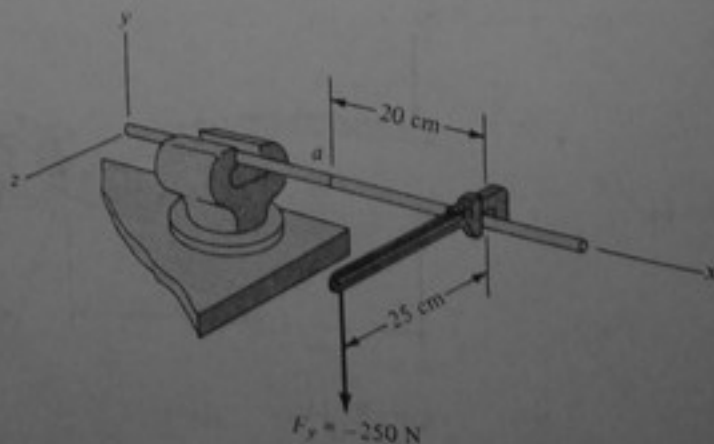


Figura P-2-26

2-27 El berbiquí y la barrena que se muestran en el plano $x-z$ se utilizan para hacer un agujero en O . El berbiquí está sometido a las fuerzas $F_x = -50$ lb, $F_y = -30$ lb y $F_z = -8$ lb, como se indica. Hallar las acciones internas en la barrena, sobre la sección perpendicular a su eje que pasa por O , y en el berbiquí sobre una sección perpendicular a su eje que pasa por a .

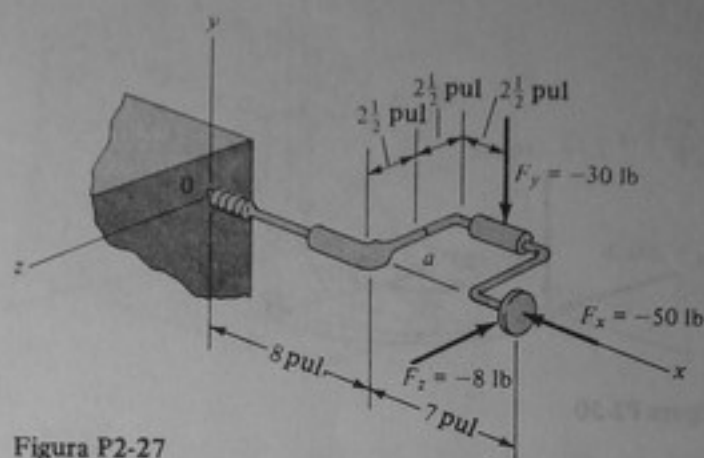


Figura P2-27

2-28 La varilla doblada está situada en el plano $x-z$, soportada por cojinetes en A y B y por un cable en C . Está sometida a las fuerzas $F_x = -100$ N, $F_y = -200$ N y $F_z = -300$ N, como se muestra en la figura. Hallar las acciones internas sobre las secciones a y b , perpendiculares al eje de la varilla.

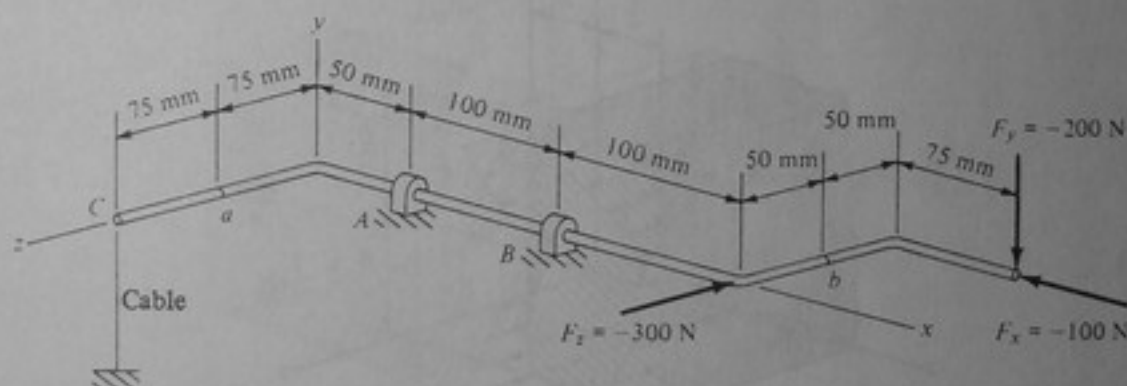


Figura P2-28

2-29 La varilla doblada está soportada en el plano $x-z$ por cojinetes sin rozamiento situados en A , B y C . Hallar las acciones internas en la varilla sobre una sección perpendicular a su eje, a , cuando se aplica la fuerza $F_y = 350$ N.

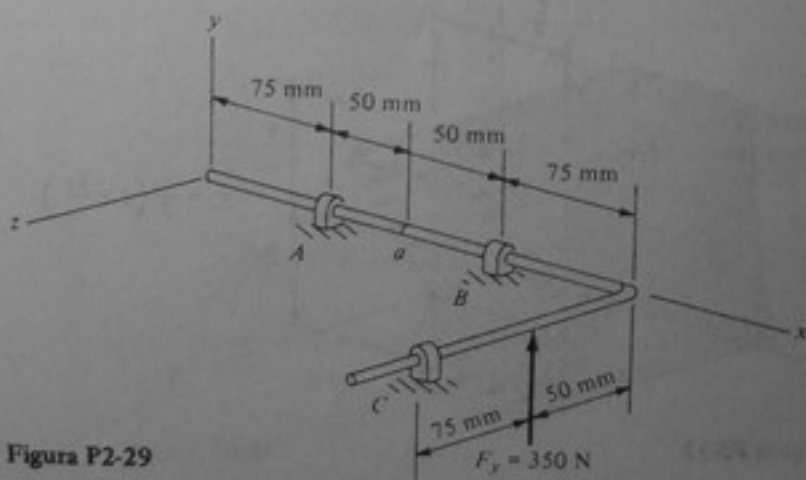


Figura P2-29

2-30 La varilla semicircular de radio $R = 20$ pul está soportada en el plano $x-z$ por un cojinete sin rozamiento situado en O y un cable paralelo al eje y , situado en A . Hallar las acciones internas en la varilla sobre la sección perpendicular que pasa por O , debidas a las fuerzas $F_x = 200$ lb y $F_y = -400$ lb.

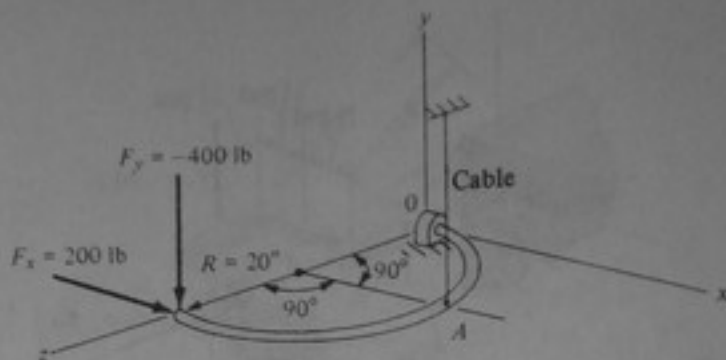


Figura P2-30

2-31 a 2-36 Para cada una de las distribuciones de esfuerzos dadas, hallar las resultantes en el centroide de la sección transversal sobre la cual actúan los esfuerzos dados.

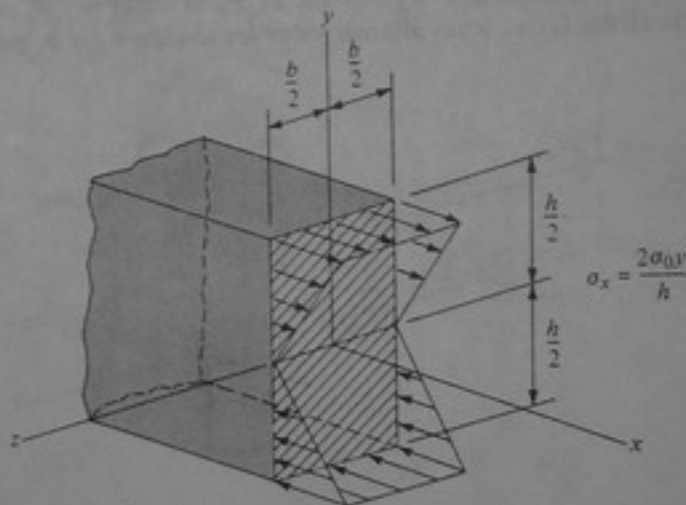


Figura P2-31

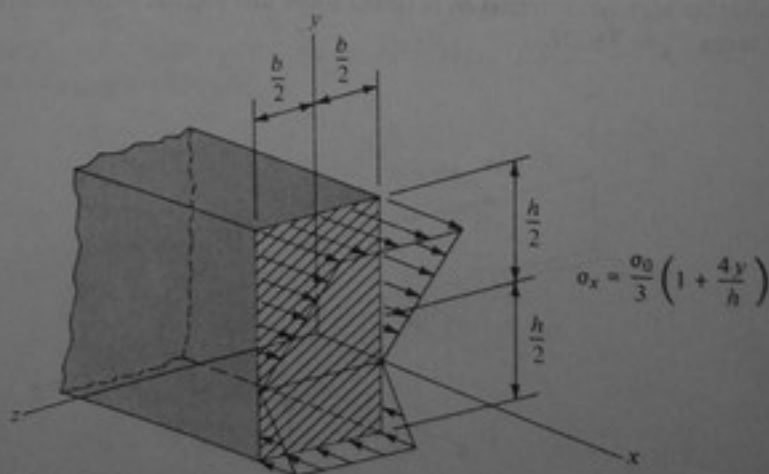


Figura P2-32

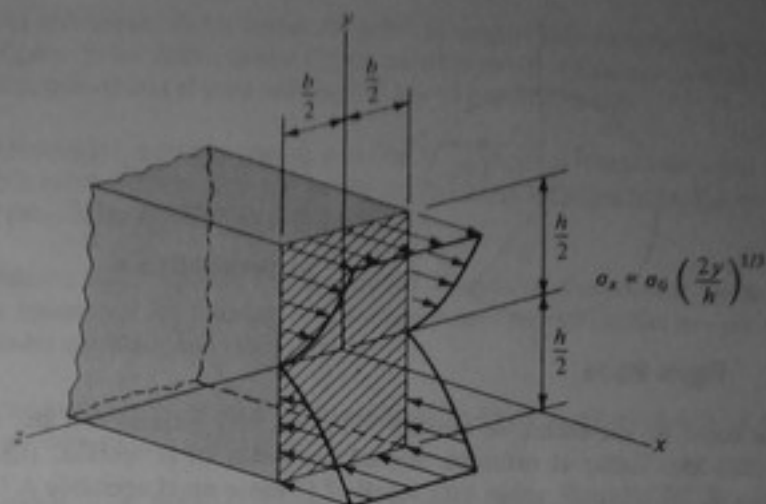


Figura P2-33

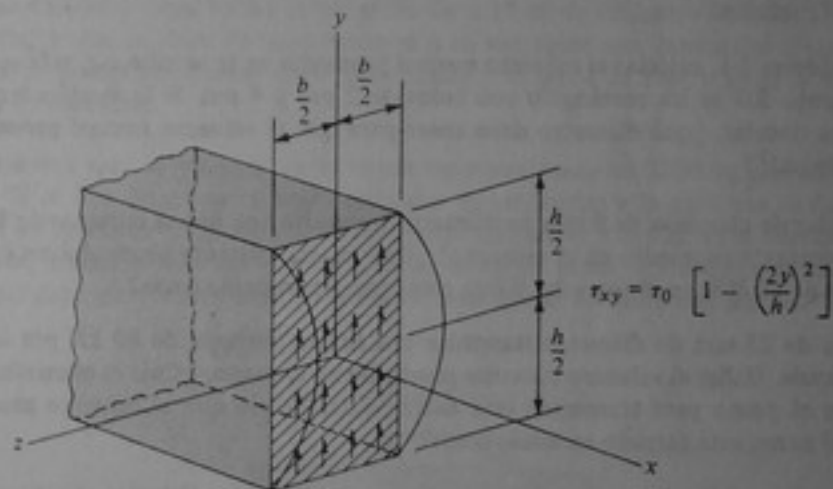


Figura P2-34

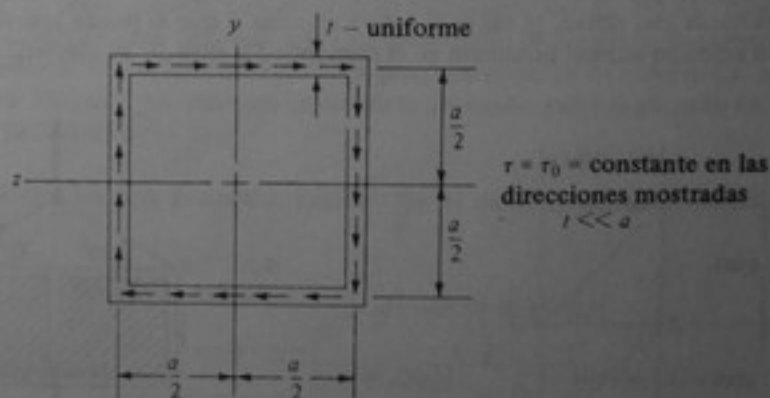


Figura P2-35

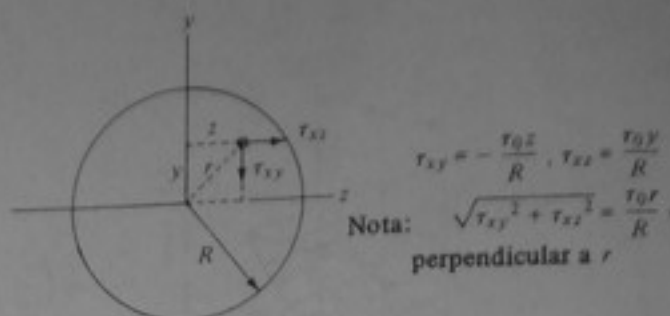


Figura P2-36

2-37 Un perfil de acero de ala ancha, de tamaño $W8 \times 40$, está cargado con una fuerza axial de compresión $F = 200$ klb. Hallar el esfuerzo normal promedio en la sección. ¿Qué fuerza axial causará un esfuerzo de 20 klb/pul² sobre esta sección? (Véanse en el apéndice A las propiedades de los perfiles de acero).

2-38 Un ángulo de acero de $4 \times 4 \times \frac{1}{4}$ pul está cargado con una fuerza axial de tracción, $F = 150$ klb. Calcular el esfuerzo normal promedio en su sección. ¿Qué fuerza axial causará un esfuerzo de 30 klb/pul² en la sección?

2-39 En el problema 2-1, calcular el esfuerzo normal promedio en la sección $a-a$, si la sección transversal de elemento BD es un rectángulo con lados de 2 pul y 4 pul. Si la sección transversal del elemento BD es circular, ¿qué diámetro debe tener para que el esfuerzo normal promedio en ella no pase de 5 klb/pul²?

2-40 Un remache de aluminio de 8 mm de diámetro transmite una fuerza cortante de 8 kN. ¿Cuál es el esfuerzo cortante promedio en el remache? ¿Qué fuerza cortante producirá un esfuerzo cortante promedio de 50 MPa en el remache si éste está cargado en doble corte?

2-41 Un perno de 25 mm de diámetro transmite una fuerza cortante de 80 kN por medio de su porción no roscada. Hallar el esfuerzo cortante promedio en el perno. ¿Cuál es el mínimo diámetro que debe tener el perno para transmitir esta fuerza cortante sin que el esfuerzo promedio pase de 75 MPa, si el perno está cargado en doble corte?

2-42 En el problema 2-3, el pasador B tiene 12 mm de diámetro. Calcular el esfuerzo cortante promedio en el pasador B , suponiendo que está cargado en corte simple. ¿Qué diámetro debería tener el pasador B si estuviera cargado en corte doble para que el esfuerzo cortante promedio no sobrepase 60 MPa?

2-43 En la armadura que se muestra, el elemento BE está compuesto de dos ángulos de $4 \times 4 \times \frac{1}{4}$ pul, colocados dorso con dorso. ¿Cuál es la fuerza máxima F que se puede aplicar horizontalmente en A sin que el esfuerzo normal promedio en el elemento BE pase de 20 klb/pul?

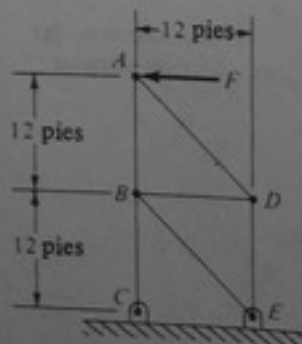


Figura P2-43

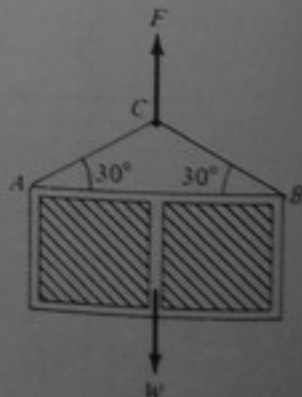


Figura P2-44

2-44 Una eslinga que consta de los cables AB y BC se emplea para levantar huacales pesados, como se indica en la figura. Si los cables tienen 10 mm de diámetro y el esfuerzo normal en ellos no puede pasar de 150 MPa, determinar el peso máximo W que se puede levantar.

2-45 En el problema 2-2, suponer que el pasador D tiene un diámetro de 1 pul y actúa en corte simple. ¿Cuál es la carga máxima F que se puede aplicar horizontalmente en E si el esfuerzo cortante promedio en el pasador no debe pasar de 12 klb/pul?

2-46 En el problema 2-22, suponer que el pasador B actúa en corte doble. Hallar el área que debe tener la sección transversal del pasador si el esfuerzo cortante promedio en éste no debe pasar de 12 klb/pul² bajo las condiciones de carga dadas.

2-47 En el problema 2-23, hallar el diámetro que debe tener el pasador A si el esfuerzo cortante promedio en él no debe pasar de 100 MPa.

2-48 En el problema 2-24, hallar el diámetro que debe tener el cable AB , si el esfuerzo normal en él no debe pasar de 20 klb/pul² para las condiciones de carga indicadas.

2-49 Suponer que la columna de soporte del tanque de agua del problema 2-4 es un tubo cilíndrico cuya pared tiene un espesor de 25 mm; que la columna descansa directamente sobre una placa de base de acero, cuya forma es un anillo de 2.15 m de diámetro exterior y 1.85 m de diámetro interior, y que la placa de base descansa a su vez sobre una fundación de concreto. Hallar los esfuerzos normales promedios entre la columna y la placa de base y entre la placa de base y la fundación de concreto.

2-50 El automóvil que se muestra en la figura tiene una masa de 2200 kg con su centro de gravedad en G . Si el área de contacto entre cada una de las llantas y la carretera es 0.025 m², hallar los esfuerzos de contacto normales promedios entre las llantas y la carretera cuando el automóvil está en reposo. Hallar la relación que debe haber entre las áreas de contacto de las llantas delanteras y traseras para que los esfuerzos de contacto sean iguales en las cuatro llantas.

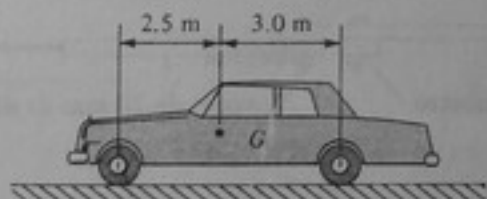


Figura P2-50

2-51 Una columna de acero soporta una carga axial de compresión de 240 klb y descansa sobre una placa de base, la cual a su vez descansa sobre una fundación de concreto. Determinar el tamaño que debe tener la sección W y el área de la placa de base, si el esfuerzo de compresión en la columna no debe pasar de 16 klb/pul² y el esfuerzo de contacto promedio entre la placa de base y la fundación no debe pasar de 3 klb/pul².

2-52 Hallar el esfuerzo normal promedio máximo en el elemento cargado axialmente que se muestra en la figura.

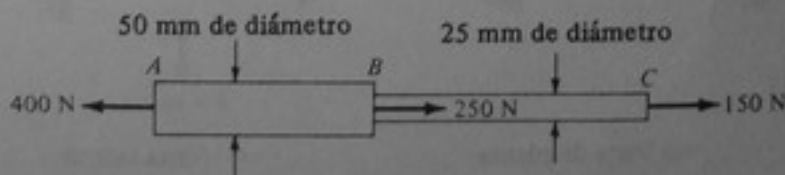


Figura P2-52

2-53 Dos trozos de madera se fijan entre sí por medio de planchas de unión y juntas pegadas, como se muestra en la figura y están sometidas a una carga axial $F = 500$ N. Calcular (a) el esfuerzo cortante promedio en las juntas pegadas, (b) el esfuerzo normal promedio máximo en las planchas de unión y (c) el esfuerzo normal promedio máximo en cada trozo de madera.

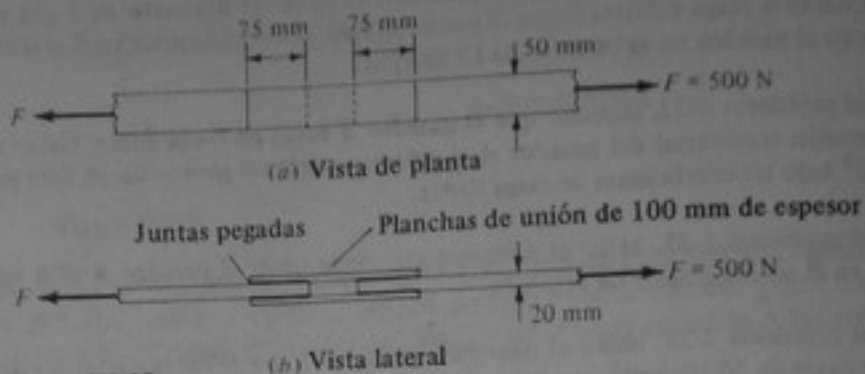


Figura P2-53

2-54 Dos barras de 100 mm de ancho y 10 mm de espesor están unidas mediante una junta traslapada, la cual contiene tres pernos de 20 mm de diámetro encajados en agujeros de 22 mm de diámetro. Si la junta está sometida a una fuerza $F = 40$ kN, hallar (a) el esfuerzo cortante promedio en los pernos, suponiendo que no hay roscas en los planos de corte, y (b) el esfuerzo normal promedio máximo en cada barra.

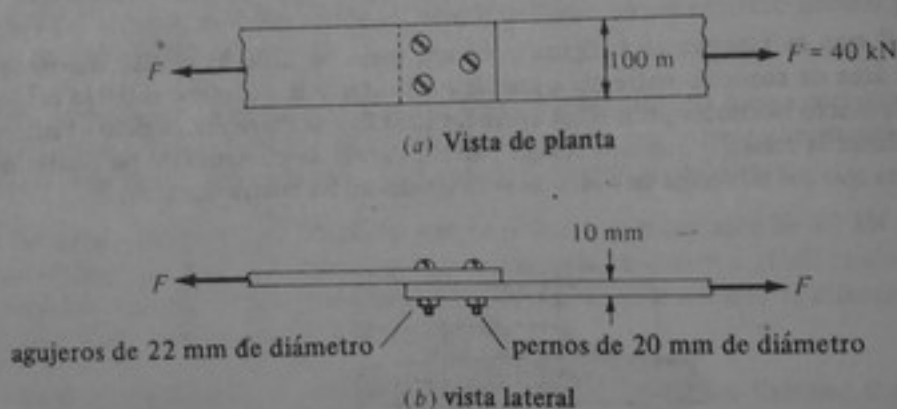


Figura P2-54

2-55 La figura representa un soporte de suspensión para una espiga de madera. El soporte consta de una placa con un agujero de 28 mm de diámetro y un collar con un diámetro exterior de 75 mm, el cual está pegado a la espiga. Para la fuerza $F = 400$ N, hallar (a) el esfuerzo cortante promedio en la junta pegada y (b) el esfuerzo de empuje promedio entre el collar y la placa.

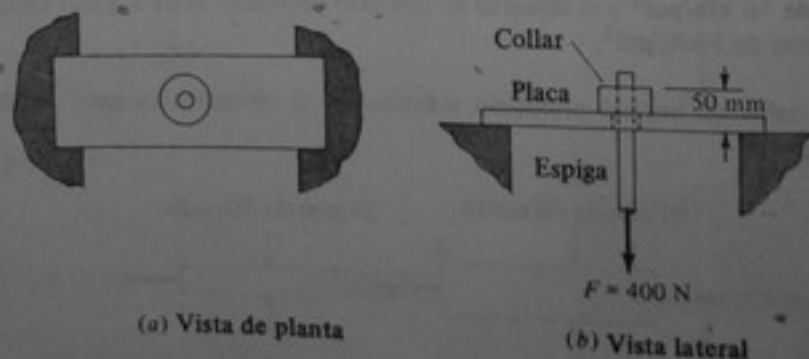
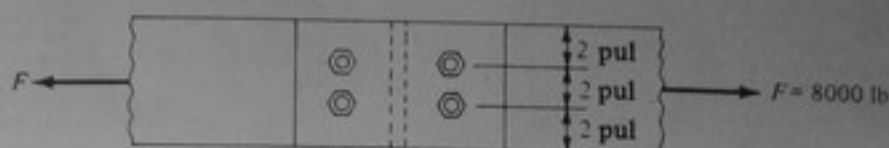


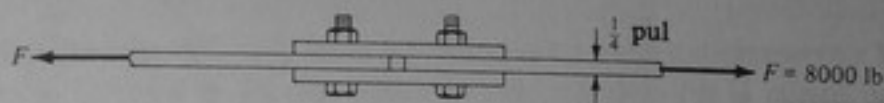
Figura P2-55

2-56 Para la junta de pernos que se muestra en la figura, todos los pernos tienen $\frac{1}{2}$ pul de diámetro, todos los agujeros, $\frac{9}{16}$ pul de diámetro, y todas las placas, $\frac{1}{4}$ pul de espesor y 6 pul de ancho. Si la junta transmite una carga $F = 8000$ lb, calcular:

- El esfuerzo cortante promedio máximo sobre el área transversal completa de cada perno.
- El esfuerzo normal promedio máximo en cada placa.

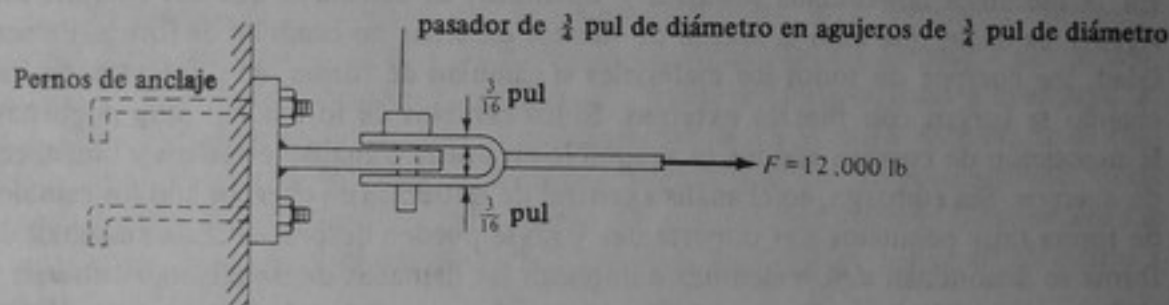


(a) vista de planta

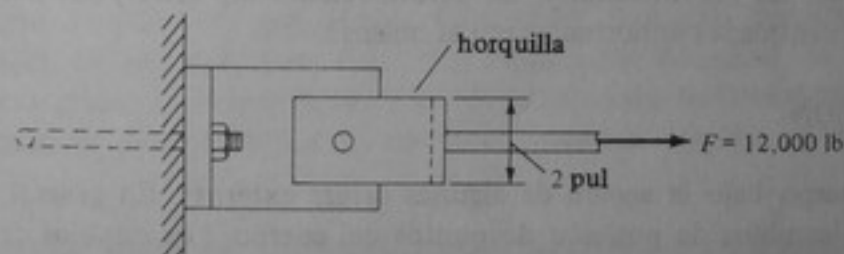


(b) vista lateral

Figura P2-56



(a) Vista de planta



(b) Vista lateral

Figura P2-57

2-57 Una carga $F = 12,000$ lb se aplica a la unión que se muestra. Hallar:

- El esfuerzo cortante promedio máximo en el pasador de $\frac{3}{4}$ pul de diámetro.
- El esfuerzo normal promedio máximo en la horquilla.
- El diámetro que deben tener los pernos para que el esfuerzo normal promedio sobre sus áreas transversales completas no pase de 20 klb/pul².

Deformación, deformación unitaria y deformación de corte

3-1 INTRODUCCION

En la mecánica newtoniana (estática y dinámica) se considera que los cuerpos son *rígidos*, es decir, que bajo la acción de fuerzas externas no cambian de forma. En realidad, los cuerpos de todos los materiales sí cambian de forma, en diferentes grados, cuando se cargan con fuerzas externas. Si los cambios de forma son muy pequeños, la suposición de cuerpos rígidos es aceptable en muchos análisis estáticos y dinámicos de cuerpos. Sin embargo, en el análisis general de esfuerzos en cuerpos aún los cambios de forma muy pequeños son importantes y no se pueden despreciar. Estos cambios de forma se denominan *deformaciones* e implican las llamadas *deformaciones unitarias* y *deformaciones de corte*. Este capítulo presenta los conceptos de deformación, deformación unitaria y deformación de corte de cuerpos. Además de ser necesarias para el análisis de esfuerzos, las deformaciones, las deformaciones unitarias y las deformaciones de corte son cantidades importantes por sí mismas.

3-2 DEFORMACION

Considérese un cuerpo bajo la acción de algunas cargas externas. En general, estas acciones producen cambios de posición de puntos del cuerpo. Los cambios de posición de puntos se llaman *desplazamientos*. Si los desplazamientos son tales que las distancias entre puntos diferentes de un cuerpo no cambian, se dice que el cuerpo ha sido sometido a un desplazamiento de *cuerpo rígido*. Esta clase de desplazamiento implica la *traslación* y la *rotación* del cuerpo como un todo, sin ningún cambio en su forma. Por otra parte, si los desplazamientos son tales que las distancias entre puntos diferentes del cuerpo cambian, entonces la forma del cuerpo también cambia y se dice que el cuerpo ha sido sometido a una *deformación*.

En la figura 3-1 se muestra un ejemplo específico de deformación. La fig. 3-1 *a* muestra una placa no deformada. La fig. 3-1 *b* ilustra aproximadamente cómo se deformaría la placa si se aplicara la fuerza F en el plano de la placa. Con el fin de visualizar mejor la deformación de la placa, se ha trazado sobre su superficie una cuadrícula que la divide en un número de pequeños elementos cuadrados. La placa está restringida de tal manera que los puntos situados a lo largo de su borde izquierdo no se pueden desplazar. Esta restricción impide cualquier desplazamiento de cuerpo rígido de la placa. La magnitud

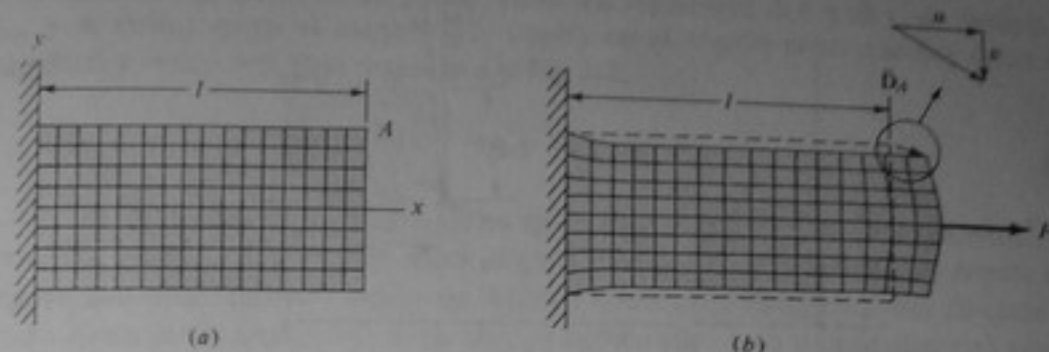


Figura 3-1 Ejemplo de deformación.

de la deformación ilustrada en la fig. 3-1 es muy exagerada respecto a la que se presentaría en la mayoría de los materiales de construcción. En la mayor parte de las situaciones reales las deformaciones son tan pequeñas que difícilmente pueden ser observadas a simple vista.

La deformación de la placa que se muestra en la fig. 3-1b comprende *desplazamientos de puntos* en la placa y *distorsiones de los elementos* formados por la cuadrícula. El *vector de desplazamiento*, D_A , del punto correspondiente a la esquina A de la placa, se indica en la fig. 3-1b. Las componentes x y y de los vectores de desplazamiento de puntos de la placa se designan mediante u y v , respectivamente. Estas componentes varían de punto a punto en la placa y son funciones de las coordenadas x y y de los puntos. Las distorsiones de los elementos también varían de elemento a elemento en la placa.

Estas dos cantidades —desplazamiento de puntos y distorsión de elementos— caracterizan la deformación de cualquier cuerpo deformado. El concepto de desplazamiento de los diferentes puntos debe estar claro. Sin embargo, el concepto de distorsión de los elementos exige una explicación adicional. Se necesita un medio para cuantificar la distorsión de los elementos. Esto se hace definiendo la deformación unitaria y la deformación de corte, como se explica en la siguiente sección.

3-3 DEFINICION DE DEFORMACION UNITARIA Y DEFORMACION DE CORTE

Considérense dos pequeños segmentos de recta con longitudes Δx y Δy , respectivamente, que forman ángulo recto, trazados a partir de un punto A en un cuerpo bidimensional, como se muestra en la fig. 3-2. Estos segmentos pueden representar dos lados adyacentes de uno cualquiera de los pequeños elementos en los cuales se puede dividir un cuerpo, de acuerdo con la ilustración de la fig. 3-1.

En la figura 3-2, Δx , Δy y A representan, respectivamente, las longitudes de los segmentos de recta y la localización del punto en el cuerpo no deformado. Asimismo, $\Delta x'$, $\Delta y'$ y A' representan, respectivamente, las longitudes de los segmentos y la localización del punto en un estado deformado del cuerpo. Cuando el cuerpo se deforma, el punto A sufre un desplazamiento D_A hasta A' y los segmentos se alargan o se contraen hasta las nuevas longitudes $\Delta x'$ y $\Delta y'$ y rotan los ángulos α y β , tal como se indica en la fig. 3-2. Los segmentos deformados $\Delta x'$ y $\Delta y'$ realmente pueden ser curvos pero si sus longitudes son suficientemente pequeñas se pueden representar como segmentos de recta.

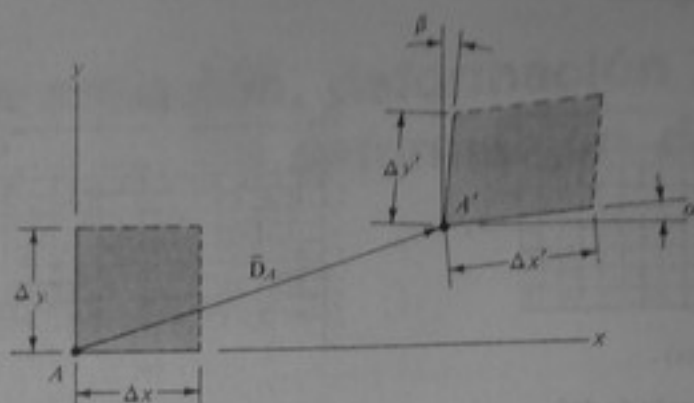


Figura 3-2 Elementos lineales en un punto, en sus estados no deformado y deformado.

En relación con la fig. 3-2 se definen dos clases de deformación, como se verá a continuación.

Deformación unitaria

La deformación unitaria está asociada con el cambio en longitud de un segmento de recta. En primer lugar, considérese el segmento de recta Δx . La deformación unitaria en este segmento se define como

$$\epsilon_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x' - \Delta x}{\Delta x} = \frac{dx' - dx}{dx} \quad (3-1)$$

Análogamente, la deformación unitaria en el segmento Δy se define como

$$\epsilon_y = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta y' - \Delta y}{\Delta y} = \frac{dy' - dy}{dy} \quad (3-2)$$

Las cantidades ϵ_x y ϵ_y representan las deformaciones unitarias (llamadas a veces deformaciones unitarias *lineales*) en el punto A , en las direcciones x y y , respectivamente. Obsérvese que la deformación unitaria en un punto, en una dirección dada, es simplemente el cambio en longitud por unidad de longitud de un segmento infinitesimal de recta en un punto, en la dirección dada. Es una cantidad adimensional pero comúnmente se le asignan las unidades de pulgadas/pulgada, metros/metro, etc. Las deformaciones unitarias se consideran cantidades positivas si los segmentos asociados se alargan y cantidades negativas si los segmentos se acortan.

Las dos deformaciones unitarias ϵ_x y ϵ_y se definieron anteriormente para las direcciones x y y . Asimismo, se pueden definir las deformaciones unitarias para otras direcciones. Así, existe un número infinito de deformaciones unitarias diferentes en cada punto de un cuerpo deformado y cada una de ellas está asociada con un segmento dirigido en una del infinito número de direcciones posibles.

Deformación de corte

La deformación de corte se relaciona con el cambio en ángulo que ocurre entre dos segmentos de recta perpendiculares en un punto durante la deformación. En la fig. 3-2,

la deformación de corte en un punto, entre los segmentos Δx y Δy , se designa por γ_{xy} y se define como el cambio que ocurre en el ángulo recto que hay entre ellos cuando $\Delta x \rightarrow \Delta y \rightarrow 0$. Con respecto a la fig. 3-2,

$$\gamma_{xy} = \alpha + \beta \quad (3-3)$$

La deformación de corte se mide en radianes y es una cantidad adimensional. Se le considera positiva si el ángulo recto original disminuye, y negativa si el ángulo recto original aumenta. También existe un infinito número de deformaciones de corte diferentes en un punto cualquiera de un cuerpo deformado: cada una de ellas está asociada con un conjunto de segmentos perpendiculares entre sí, en todas las diferentes direcciones posibles en el punto.

3-4 DISCUSION ADICIONAL SOBRE LA DEFORMACION UNITARIA Y LA DEFORMACION DE CORTE

Las deformaciones unitarias ϵ_x y ϵ_y y la deformación de corte γ_{xy} , que generalmente varían de punto a punto en un cuerpo cargado, proporcionan una medida de la distorsión de los diferentes elementos de un cuerpo, como los de la fig. 3-1. Las deformaciones unitarias ϵ_x y ϵ_y , en un punto, multiplicadas por las longitudes originales de los lados de un elemento situado en ese punto, dan los cambios en longitud de los lados del elemento. La deformación de corte γ_{xy} especifica la distorsión angular del elemento.

Las distorsiones acumuladas de los elementos están relacionadas con los desplazamientos de los puntos de un cuerpo. La relación entre las deformaciones unitarias y de corte de los elementos y los desplazamientos se plantean en las secciones 3-5 y 3-6.

Además de especificar las distorsiones de los elementos, ϵ_x , ϵ_y y γ_{xy} también sirven como deformaciones unitarias y de corte de referencia a partir de las cuales se pueden hallar las deformaciones unitarias y de corte en otras direcciones para un punto. Esto se explica en el capítulo 9. Así, las deformaciones unitarias ϵ_x , ϵ_y y de corte, γ_{xy} , caracterizan completamente el estado de deformación en un punto de un cuerpo bidimensional deformado.

La descripción de la deformación, la deformación unitaria y la deformación de corte para un cuerpo bidimensional se puede ampliar a tres dimensiones. La deformación, la deformación unitaria y la deformación de corte en un punto de un cuerpo tridimensional se pueden visualizar imaginando que el cuerpo está dividido en un gran número de elementos cúbicos, en lugar de los elementos cuadrados utilizados en el caso bidimensional. El vector de deformación D_A (fig. 3-3) tiene tres componentes designadas por u , v y w en las direcciones x , y y z , respectivamente, en lugar de las dos componentes del caso bidimensional. Las deformaciones unitarias que caracterizan la distorsión de un elemento cúbico en un punto, como se muestra en la fig. 3-3, son las tres deformaciones unitarias correspondientes a los cambios en longitud de los lados del elemento durante la deformación, y las tres deformaciones de corte son las correspondientes a los cambios en los ángulos inicialmente rectos entre pares adyacentes de estos lados durante la deformación, cuando los lados son de longitud infinitesimal. Estas deformaciones se designan ϵ_x , ϵ_y , ϵ_z , γ_{xy} , γ_{xz} y γ_{yz} , respectivamente. Las deformaciones unitarias ϵ_x , ϵ_y y ϵ_z , representan los cambios en longitud por unidad de lon-

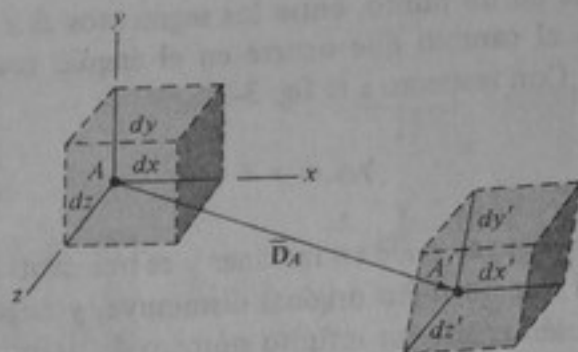


Figura 3-3 Elemento no deformado y deformado en tres dimensiones.

gitud de los lados dx , dy y dz , respectivamente. Las deformaciones de corte γ_{xy} , γ_{xz} y γ_{yz} son los cambios en los ángulos rectos entre los lados dx y dy , dx y dz , y dy y dz , respectivamente.

3-5 RELACIONES ENTRE LAS DEFORMACIONES UNITARIAS, LAS DEFORMACIONES DE CORTE Y LOS DESPLAZAMIENTOS TOTALES

En muchos casos, las deformaciones unitarias y las deformaciones de corte de un elemento de una estructura o máquina se pueden relacionar directamente con el desplazamiento total del elemento. En tales casos, generalmente son uniformes de un punto a otro del elemento y se pueden relacionar con los cambios dimensionales de todo el elemento a través de la geometría de éste. Los siguientes ejemplos ilustran esta idea.

Ejemplo 3-1 Una varilla delgada de longitud $L = 3$ m se alarga una cantidad $\Delta L = 6$ mm (fig. 3-4). Calcular las deformaciones unitarias a lo largo del eje de la varilla, suponiendo que son constantes en todos los puntos de la varilla.

SOLUCION Imaginemos la varilla dividida en segmentos cortos de longitud Δx , uno de los cuales se representa en la fig. 3-4. Con deformación unitaria axial constante, el cambio en longitud por unidad de longitud de cada elemento de longitud Δx es, por proporción directa, igual al cambio en longitud por unidad de longitud de la varilla. De este modo, la deformación unitaria axial en la varilla es

$$\epsilon = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x' - \Delta x}{\Delta x}$$

$$\circ \quad \epsilon = \frac{L + \Delta L - L}{L} = \frac{\Delta L}{L} = \frac{6 \times 10^{-3}}{3} = 2 \times 10^{-3} \text{ m/m} \quad \text{Resp.}$$

Si las deformaciones unitarias no fueran uniformes a lo largo de toda la varilla, la cantidad $\Delta L/L$ representaría el valor promedio de las deformaciones unitarias en cada segmento de la varilla. En general, la relación del cambio en longitud, ΔL , a la longitud, L , en la cual ocurre representa la deformación unitaria *promedio* en

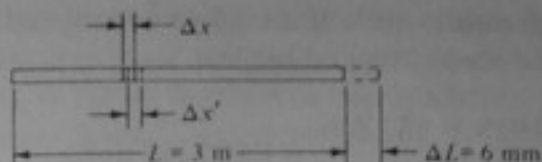


Figura 3-4 Ejemplo 3-1.

la longitud L . Para la deformación unitaria, sea uniforme o variable, ΔL es la suma de los cambios de longitud de los segmentos individuales.

En general, las deformaciones unitarias son cantidades pequeñas, y una unidad de deformación unitaria que se emplea corrientemente es 10^{-6} . Esta unidad de deformación unitaria se llama micropulgada por pulgada o millonésima de metro por metro, o, en forma abreviada, $\mu\text{pul/pul}$ o $\mu\text{m/m}$. En función de estas unidades, la deformación unitaria en la varilla del ejemplo 3-1 es $2000 \mu\text{m/m}$.

Ejemplo 3-2 La placa triangular de la fig. 3-5 está sometida a la deformación indicada por las líneas punteadas, de acuerdo con las cuales la esquina B se mueve hasta B' . Calcular:

- La deformación unitaria promedio a lo largo de la línea media vertical de la placa.
- La deformación unitaria promedio a lo largo del borde AB .
- La deformación de corte entre los bordes AB y BC .

SOLUCION

- (a) Con base en la geometría de la figura, la longitud OB es $L_{OB} = 240/2 = 120 \text{ mm}$. El cambio en longitud de la línea OB es el desplazamiento BB' indicado en la figura. Entonces, la deformación unitaria promedio a lo largo de la línea OB es

$$\epsilon_y = \frac{\Delta L_{OB}}{L_{OB}} = \frac{0.30}{120} = 0.0025 \text{ m/m} \quad \text{Resp.}$$

- (b) De la geometría de la figura,

$$L_{AB} = 120\sqrt{2} = 169.706 \text{ mm}$$

y

$$L_{AB'} = \sqrt{(120)^2 + (120.3)^2} = 169.918 \text{ mm}$$

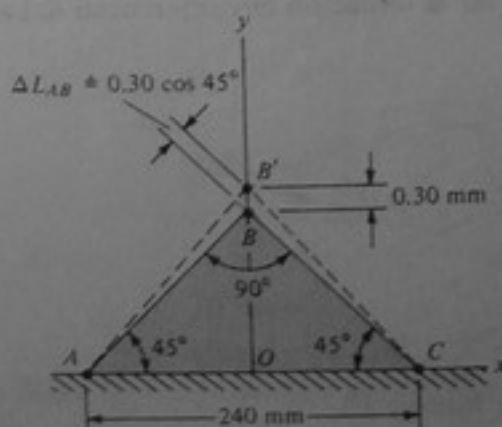


Figura 3-5 Ejemplo 3-2.

La deformación unitaria promedio en la línea AB es su longitud final menos su longitud original dividida por su longitud original. Así,

$$\epsilon_{AB} = \frac{169.918 - 169.706}{169.706} = 0.001249 \text{ m/m} \quad \text{Resp.}$$

Los cálculos anteriores implican una diferencia comparativamente pequeña entre dos números: las longitudes L_{AB} y L_{AB}' . La exactitud en dichos cálculos exige un alto grado de precisión en cada uno de los números que intervienen en la diferencia.

Como otra alternativa, la deformación unitaria ϵ_{AB} se puede calcular haciendo $\Delta L_{AB} = 0.30 \cos 45^\circ$, como se indica en la figura. Esta es una buena aproximación ya que el ángulo $OB'A$ es cercano a 45° , toda vez que BB' es pequeño comparado con OB . Entonces, en forma aproximada,

$$\epsilon_{AB} = \frac{\Delta L_{AB}}{L_{AB}} = \frac{0.30 \cos 45^\circ}{120\sqrt{2}} = 0.001250 \text{ m/m} \quad \text{Resp.}$$

Comparándola con el primer cálculo de ϵ_{AB} se observa que esta aproximación es bastante buena.

- (c) Con base en la geometría de la figura, el ángulo $AB'C$ está dado por

$$AB'C = 2 \tan^{-1} \frac{120}{120.30} = 89.857^\circ$$

Luego el cambio en el ángulo ABC es $90 - 89.857^\circ = 0.143^\circ$. Este cambio de ángulo, convertido a radianes, es la deformación de corte entre las líneas AB y BC . Así,

$$\gamma = 0.143 \frac{\pi}{180} = 0.00250 \text{ rad} \quad \text{Resp.}$$

El ángulo ABC disminuye, de modo que la deformación de corte es una cantidad positiva de acuerdo con nuestra convención de signos.

Ejemplo 3-3 Un anillo circular de radio $r = 18$ pul (fig. 3-6) y hecho de alambre delgado, está sometido a una deformación en la cual el radio aumenta 0.25 pul. Calcular la deformación unitaria en la dirección circunferencial del anillo, suponiendo que es uniforme.

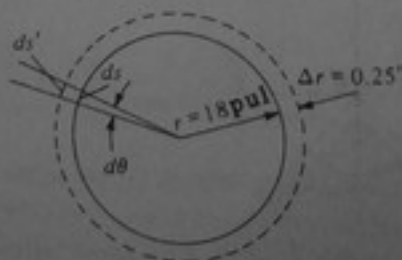


Figura 3-6 Ejemplo 3-3.

SOLUCION Considérese primero una longitud del anillo $ds = r d\theta$, comprendida dentro del ángulo $d\theta$, como se muestra en la figura. Si el anillo se deforma uniformemente, la nueva longitud de este segmento es $ds' = (r + \Delta r) d\theta$. Entonces, la deformación unitaria del elemento, en la dirección circunferencial del anillo, es

$$\epsilon = \frac{ds' - ds}{ds} = \frac{(r + \Delta r) d\theta - r d\theta}{r d\theta} = \frac{\Delta r}{r} = 0.0139 \text{ pul/pul} \quad \text{Resp.}$$

Como la deformación es uniforme, la deformación unitaria circunferencial también está dada por el cambio circunferencial del anillo dividido por la circunferencia original; esto es,

$$\epsilon = \frac{2\pi(r + \Delta r) - 2\pi r}{2\pi r} = \frac{\Delta r}{r} = 0.0139 \text{ pul/pul} \quad \text{Resp.}$$

3-6 RELACIONES DIFERENCIALES ENTRE LAS DEFORMACIONES UNITARIAS, LAS DEFORMACIONES DE CORTE Y LOS DESPLAZAMIENTOS

Los ejemplos de la sección anterior ilustran algunos problemas específicos en los cuales las deformaciones unitarias, las deformaciones de corte y las deformaciones totales en un elemento estructural se pueden relacionar geoméricamente. Esto no se puede realizar siempre en forma tan sencilla como en estos ejemplos. Sin embargo, en el caso general, las deformaciones unitarias y de corte se pueden relacionar con los desplazamientos de puntos mediante relaciones diferenciales que, a su vez, se pueden utilizar para relacionar las deformaciones unitarias y de corte con los desplazamientos totales. Deduiremos ahora las relaciones diferenciales entre deformaciones unitarias, deformaciones de corte y desplazamientos para el caso bidimensional.

En relación con la fig. 3-7, considérense dos segmentos de recta infinitesimales, AB y AC , que se extienden en las direcciones de las coordenadas x y y , en un cuerpo bidimensional no deformado. Las longitudes de los segmentos AB y AC se designan dx y dy , respectivamente. Durante la deformación, los segmentos AB y AC se alargan o se contraen y rotan, mientras que los puntos A , B y C se desplazan hasta A' , B' y C' .

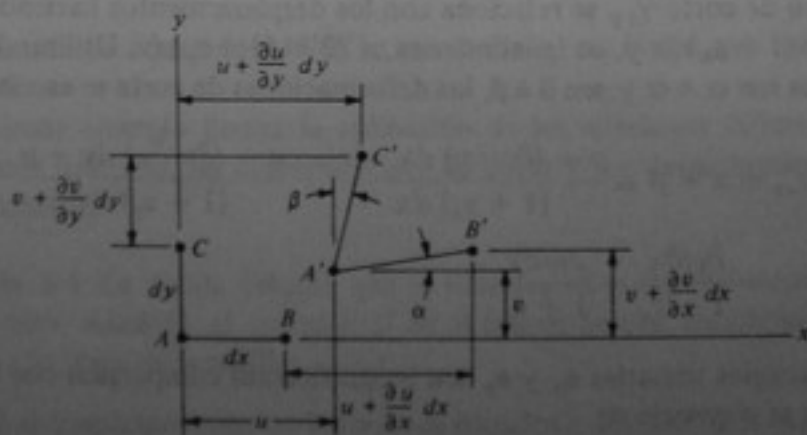


Figura 3-7 Deformación de los segmentos de recta dx y dy en un punto.

Tabla 3-1

Punto	Coordenadas	Componente x de desplazamiento	Componente y de desplazamiento
A	x, y	u	v
B	$x + dx, y$	$u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$	$v + \frac{\partial v}{\partial x} dx$
C	$x, y + dy$	$u + \frac{\partial u}{\partial y} dy$	$v + \frac{\partial v}{\partial y} dy$

Las componentes de desplazamiento del punto A en las direcciones x y y se designan por u y v , respectivamente. Estas cantidades también representan las funciones matemáticas $u(x, y)$ y $v(x, y)$ que especifican los componentes de desplazamiento de todos los puntos del cuerpo. Los desplazamientos de los puntos B y C también se pueden expresar en función de los desplazamientos del punto A, utilizando el cálculo diferencial de funciones de dos variables y las derivadas parciales de las funciones de desplazamiento u y v , enumeradas en la tabla 3-1. Las componentes de los desplazamientos de los puntos A, B y C que aparecen en la tabla 3-1 también se muestran en la fig. 3-7.

Las deformaciones unitarias y de corte en el punto A se relacionan con las derivadas de los desplazamientos u y v en el mismo punto A por medio de la geometría de la fig. 3-7, como se indica enseguida. Se supone que las rotaciones de los segmentos AB y AC son tan pequeñas que las aproximaciones $\cos \alpha \doteq 1$ y $\cos \beta \doteq 1$ son válidas. Entonces, haciendo $A'B' \doteq A'B' \cos \alpha$ podemos relacionar la deformación unitaria ϵ_x con el desplazamiento en la forma

$$\epsilon_x = \frac{A'B' - AB}{AB} \doteq \frac{dx + u + (\partial u / \partial x) dx - u - dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3-4)$$

Análogamente, la deformación unitaria ϵ_y se relaciona con el desplazamiento mediante

$$\epsilon_y = \frac{A'C' - AC}{AC} \doteq \frac{dy + v + (\partial v / \partial y) dy - v - dy}{dy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (3-5)$$

La deformación de corte γ_{xy} se relaciona con los desplazamientos haciendo $A'B' = dx' = \epsilon_x dx + dx = (1 + \epsilon_x) dx$ y, de igual manera, $A'C' = (1 + \epsilon_y) dy$. Utilizando además las aproximaciones $\sin \alpha \doteq \alpha$ y $\sin \beta \doteq \beta$, las deformaciones de corte se escriben

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} = \alpha + \beta &\doteq \frac{v + (\partial v / \partial x) dx - v}{(1 + \epsilon_x) dx} + \frac{u + (\partial u / \partial y) dy - u}{(1 + \epsilon_y) dy} \\ &= \frac{\partial v / \partial x}{1 + \epsilon_x} + \frac{\partial u / \partial y}{1 + \epsilon_y} \end{aligned} \quad (3-6)$$

Si las deformaciones unitarias ϵ_x y ϵ_y son insignificantes comparadas con la unidad, la ecuación (3-6) se convierte en

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3-7)$$

Las ecuaciones (3-4), (3-5) y (3-7) comprenden las relaciones entre las deformaciones unitarias, las deformaciones de corte y desplazamientos para el caso bidimensional. Son válidas para cualquier material continuo en el cual las deformaciones unitarias sean pequeñas comparadas con la unidad y las rotaciones α y β sean ángulos pequeños, como se indicó en las deducciones. Estas condiciones sobre pequeñas deformaciones y rotaciones se satisfacen bastante bien en la mayoría de los casos prácticos. A continuación se escribe el conjunto completo de relaciones entre las deformaciones unitarias, las deformaciones de corte y los desplazamientos bidimensionales para futuras referencias:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3-8)$$

Si las funciones de desplazamiento $u(x, y)$ y $v(x, y)$ se conocen en un caso específico, las deformaciones unitarias ϵ_x , ϵ_y y la deformación de corte γ_{xy} se pueden calcular en todos los puntos a partir de las ecuaciones (3-8), usando la derivación. Por otra parte, si se conocen ϵ_x , ϵ_y y γ_{xy} en todos los puntos, se pueden calcular los desplazamientos u y v en todos los puntos a partir de las ecuaciones (3-8), por integración.

Se pueden deducir de manera semejante las relaciones diferenciales entre las deformaciones unitarias, de corte y los desplazamientos en tres dimensiones, en donde las distorsiones de los elementos están caracterizadas por tres deformaciones unitarias, ϵ_x , ϵ_y y ϵ_z , y las tres deformidades de corte, γ_{xy} , γ_{xz} y γ_{yz} , y en donde los desplazamientos de un punto tienen componentes u , v y w . Las relaciones tridimensionales entre las deformaciones unitarias, de corte y los desplazamientos son:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} & \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \quad (3-9)$$

La deducción de las ecuaciones (3-9) se puede hallar en libros que tratan la mecánica del continuo.

El siguiente ejemplo ilustra la aplicación de las relaciones diferenciales entre las deformaciones unitarias, las deformaciones de corte y los desplazamientos en un problema elemental.

Ejemplo 3-4 La varilla delgada que se muestra en la fig. 3-8 tiene su extremo O empotrado. Además, el extremo O es el origen de una coordenada x que se extiende a lo largo de la varilla.

- (a) Si el desplazamiento de los puntos situados a lo largo de la varilla, en la dirección x , es $u = x^2/400L$, calcular el cambio total de longitud de la varilla y la deformación unitaria máxima ϵ_x en la varilla.

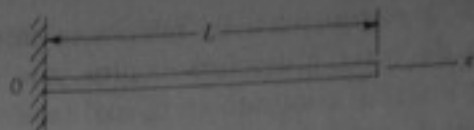


Figura 3-8 Ejemplo 3-4.

- (b) Si la deformación unitaria axial en la varilla es $\epsilon_x = 10^{-4} \cos(\pi x/2L)$, calcular el cambio en longitud de la varilla.

SOLUCION Este es un problema unidimensional en el cual intervienen la deformación unitaria ϵ_x y el desplazamiento $u(x)$. La relación $\epsilon_x = \partial u/\partial x$ se puede utilizar para hallar su solución como se indica a continuación.

- (a) El desplazamiento del punto $x = L$, situado en el extremo derecho de la varilla, representa el cambio total en longitud de la varilla, ΔL . Así, se tiene

$$\Delta L = u_{x=L} = \frac{L^2}{400L} = \frac{L}{400} \quad \text{Resp.}$$

Las deformaciones unitarias ϵ_x son

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{400L} = \frac{x}{200L}$$

Estas deformaciones unitarias varían linealmente desde $\epsilon_x = 0$ hasta un valor máximo en $x = L$. La deformación unitaria máxima es

$$\epsilon_x \Big|_{x=L} = \frac{L}{200L} = 0.005 \text{ pul/pul} \quad \text{Resp.}$$

- (b) Multiplicando cada lado de la relación $\epsilon_x = \partial u/\partial x$ por dx e integrando se obtiene

$$\int \frac{\partial u}{\partial x} dx = \int \epsilon_x dx = \int 10^{-4} \cos \frac{\pi x}{2L} dx$$

$$o \quad u = \frac{2L \times 10^{-4}}{\pi} \text{sen} \frac{\pi x}{2L} + C$$

en donde C es una constante de integración que se debe ajustar para satisfacer la condición $u = 0$ en $x = 0$. Esto es,

$$u_{x=0} = 0 = \frac{2L \times 10^{-4}}{\pi} \text{sen} 0 + C$$

Por consiguiente, $C = 0$. De este modo, el desplazamiento axial de los puntos de la varilla está dado por

$$u = \frac{2L \times 10^{-4}}{\pi} \text{sen} \frac{\pi x}{2L}$$

Entonces, el cambio en longitud de toda la varilla está dado por

$$\Delta L = u_{x=L} = \frac{2L \times 10^{-4}}{\pi} \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 0.636L \times 10^{-4} \quad \text{Resp}$$

3-7 DEFORMACIONES TERMICAS

Los cuerpos se pueden deformar por cambios de temperatura lo mismo que por la aplicación de cargas externas. Los elementos de un cuerpo tienden a dilatarse o contraerse cuando se calientan o se enfrían, y las deformaciones que se presentan se llaman *deformaciones unitarias térmicas*. Si los elementos se pueden deformar libremente, las deformaciones unitarias térmicas no vienen acompañadas de esfuerzos, pero si se restringe la deformación, aparecen *esfuerzos térmicos*. Los esfuerzos térmicos se tratan en el capítulo 4.

Los experimentos demuestran que las deformaciones térmicas que ocurren cuando los elementos se deforman libremente constan únicamente de deformaciones unitarias iguales en todas las direcciones, con tal que el material del cuerpo sea *isotrópico*. (Los materiales isotrópicos se describen en el capítulo 4). Estas deformaciones unitarias están dadas por $\epsilon = \alpha \Delta T$, en donde α es una constante llamada coeficiente de *dilatación térmica* y ΔT es el cambio de temperatura. Los valores de α , que es una propiedad del material, varían para los diferentes materiales y se determinan experimentalmente. En la tabla A-2 del Apéndice A se dan algunos valores típicos de α . En realidad, los coeficientes de dilatación térmica pueden variar con la temperatura, pero son aproximadamente constantes sobre intervalos moderados de temperatura para la mayoría de los materiales. Las deformaciones unitarias térmicas son positivas o negativas según que ΔT sea positivo o negativo.

En vista de lo anterior, las deformaciones unitarias de referencia en cualquiera de coordenadas x, y, z , para elementos isotrópicos deformados libremente son

$$\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \alpha \Delta T \quad (3-10)$$

Los desplazamientos térmicos que ocurren en un cuerpo deformado libremente se pueden relacionar con estas deformaciones unitarias térmicas utilizando la geometría de los desplazamientos totales, como se explicó en la sección 3-4, o utilizando las relaciones entre deformaciones unitarias y desplazamientos expuestas en la sección 3-5. En el siguiente ejemplo se ilustra este concepto con un caso unidimensional.

Ejemplo 3-5 Una varilla delgada de longitud $L = 100$ pul está fija en su extremo izquierdo, pero se puede dilatar libremente debido a un cambio de temperatura (fig. 3-9). Hallar el cambio en longitud de la varilla (a) si se presenta un cambio de temperatura uniforme, $\Delta T = 100^\circ\text{F}$ y (b) si ocurre un cambio de temperatura que varía linealmente, $\Delta T = (100x/L)^\circ\text{F}$. En ambos casos utilícese el coeficiente de dilatación térmica $\alpha = 6 \times 10^{-6}$ pul/pul/ $^\circ\text{F}$.

SOLUCION

(a) Con ΔT uniforme se presenta una deformación unitaria uniforme dada por

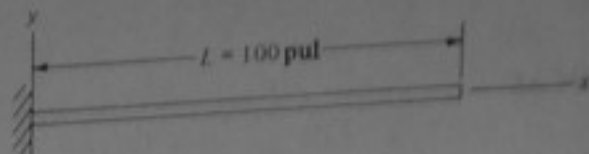


Figura 3-9 Ejemplo 3-5.

Entonces,

$$\Delta L = \epsilon_x L = 600 \times 10^{-6} \times 100 = 0.06 \text{ pul}$$

Resp.

(b) Con $\Delta T = 100x/L$,

$$\epsilon_x = \alpha \Delta T = 6 \times 10^{-6} \frac{100x}{L} = \frac{6 \times 10^{-4} x}{L}$$

Entonces, utilizando $\epsilon_x = \partial u / \partial x$ e integrando se obtiene

$$u = \int \epsilon_x dx = \int \frac{6 \times 10^{-4} x}{L} dx = \frac{3 \times 10^{-4} x^2}{L} + C$$

Empleando la condición $u = 0$ en $x = 0$ se obtiene $C = 0$. Por consiguiente, el alargamiento total es

$$\Delta L = u_{x=L} = \frac{3 \times 10^{-4} (100)^2}{100} = 0.03 \text{ pul}$$

Resp.

3-8 RESUMEN

Las deformaciones de los cuerpos pueden ser producidas por fuerzas externas o cambios de temperatura. La deformación generalmente implica desplazamientos de puntos del cuerpo así como deformaciones unitarias y deformaciones de corte. La deformación unitaria es el cambio en longitud por unidad de longitud de un segmento de recta infinitesimal, y la deformación de corte es el cambio que sufre un ángulo recto formado entre dos segmentos de recta infinitesimales.

En muchos casos, las deformaciones unitarias y de corte y los desplazamientos totales en los cuerpos se pueden relacionar por medio de la geometría de la deformación, como se expuso en la sección 3-4. En general, las deformaciones unitarias y de corte y las derivadas de los desplazamientos en los puntos de un cuerpo se relacionan como se explicó en la sección 3-5.

PROBLEMAS

3-1 La barra AB está fija en el extremo A y libre en el extremo B . Si el extremo B se desplaza 3 mm hacia la derecha, calcular la deformación unitaria longitudinal promedio en la barra. Si esta

deformación unitaria es uniforme sobre toda la longitud de la barra, ¿cuál es el desplazamiento del punto C ?

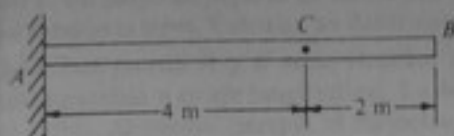


Figura P3-1

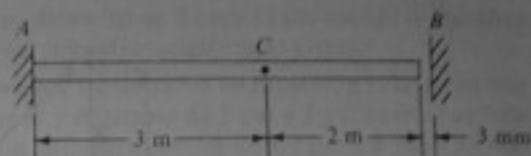


Figura P3-2

3-2 La barra que se muestra está fija en el extremo A e inicialmente está separada 3 mm del apoyo fijo B . Si luego el punto C se desplaza 5 mm hacia la derecha, calcular las deformaciones unitarias promedio en las porciones AC y CB de la barra.

3-3 La barra AB está fija en el extremo A . Si el punto C se desplaza 2 mm hacia la izquierda y el extremo B se desplaza 2 mm hacia la derecha, ¿cuáles son las deformaciones unitarias longitudinales promedio en las porciones AC y CB de la barra?

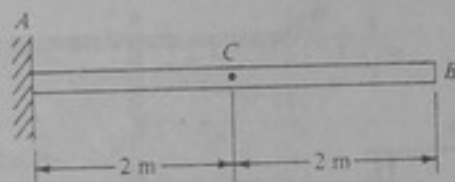


Figura P3-3

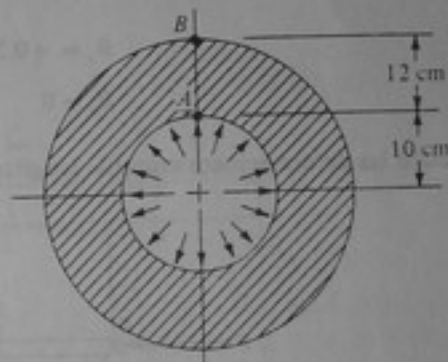


Figura P3-4

3-4 La figura muestra la sección transversal de un tubo de pared gruesa. Si una presión interna hace que los puntos A y B se desplacen hacia afuera 4 mm y 2.5 mm, respectivamente, calcular la deformación unitaria promedio producida entre los puntos A y B .

3-5 Un arco se desplaza hasta la posición indicada para disparar una flecha. Si la cuerda del arco tenía inicialmente 64 pul de longitud entre los puntos A y B , ¿cuál es la deformación unitaria longitudinal de la cuerda en la posición que muestra la figura?

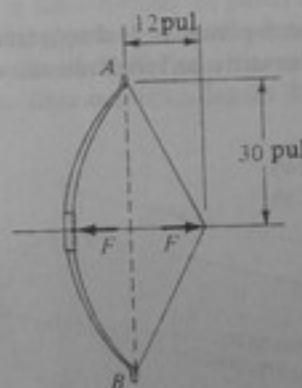


Figura P3-5

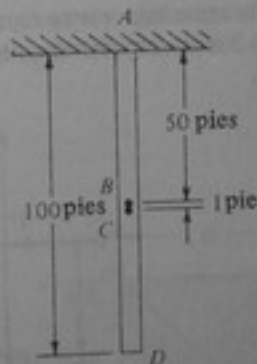


Figura P3-6

3-6 La barra que se muestra en la figura pende del soporte fijo situado en el extremo A por acción de la gravedad. Si el extremo D se desplaza 0.0068 pul hacia abajo, calcular la deformación unitaria longitudinal promedio en la barra. Además, si los puntos B y C se desplazan hacia abajo 0.001700 pul y 0.001835 pul, respectivamente, calcular la deformación unitaria promedio entre los puntos B y C .

3-7 Si el punto B de la estructura que se muestra se desplaza 15 mm hacia la derecha, calcular las deformaciones unitarias longitudinales promedio que se presentan en la barra AB y en el cable CB .

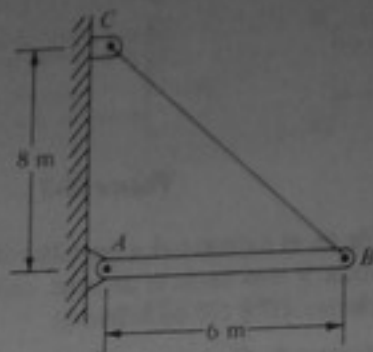


Figura P3-7

3-8 Los puntos B y C de la estructura que se representa en la figura tienen las siguientes componentes de desplazamiento x y y producidas por la carga F :

$$B_x = +0.20 \text{ pul} \quad C_x = +0.12 \text{ pul}$$

$$B_y = 0 \quad C_y = -0.08 \text{ pul}$$

Calcular las deformaciones unitarias longitudinales promedio en los elementos BC y AC .

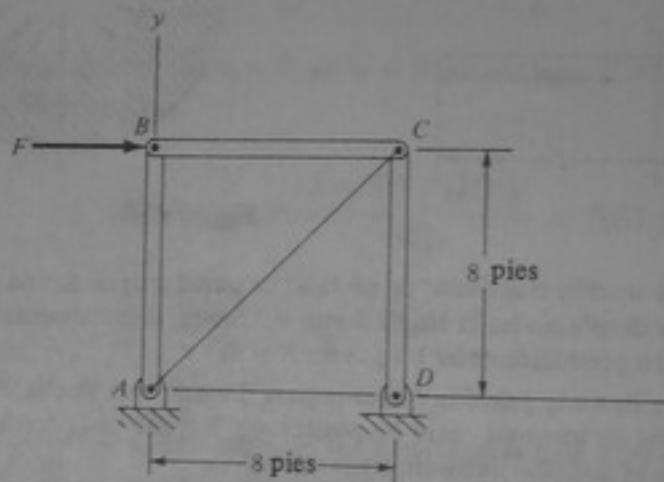


Figura P3-8

3-9 El punto E de la armadura que se representa en la figura tiene componentes de desplazamiento x y y de 4 mm y -2 mm, respectivamente. Hallar las deformaciones unitarias longitudinales en los elementos AE y FE .

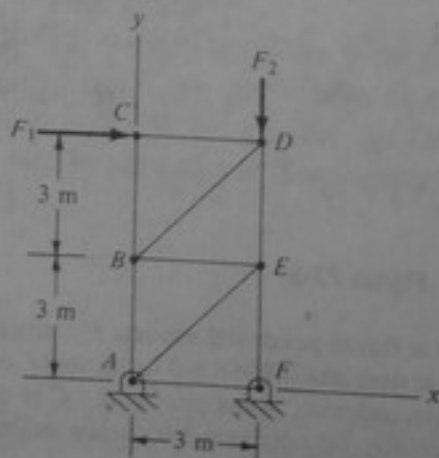


Figura P3-9

3-10 Calcular las deformaciones unitarias circunferenciales en los puntos A y B del tubo de pared gruesa del problema 3-4.

3-11 Un globo de juguete de forma esférica cambia su diámetro de 8 cm a 12 cm cuando se aumenta su presión interna. Calcular las deformaciones unitarias circunferenciales en el globo.

3-12 Los puntos A y B están situados sobre la superficie de un globo de juguete, a lo largo de una línea paralela a su eje longitudinal. La distancia entre A y B cambia de 2 pul a 3 pul cuando se infla el globo. Al mismo tiempo, el diámetro de la porción cilíndrica cambia de 1.5 pul a 4 pul. Calcular las deformaciones unitarias longitudinal y circunferencial en el globo.

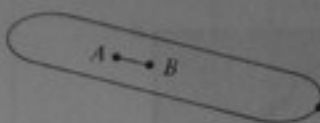


Figura P3-12

3-13 El marco y los tableros se desplazan como se indica con las líneas punteadas. ¿Cuál es la deformación de corte en cada tablero y cuál es la deformación unitaria promedio en el elemento AB del marco?

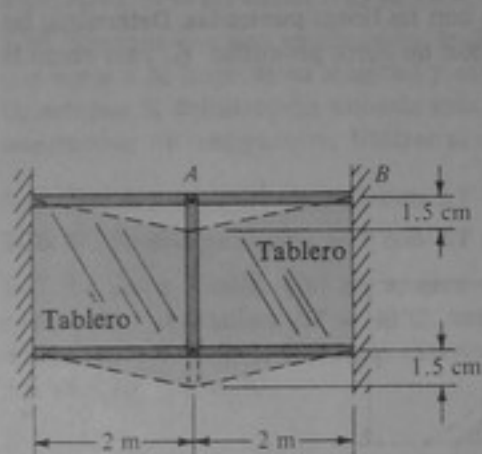


Figura P3-13

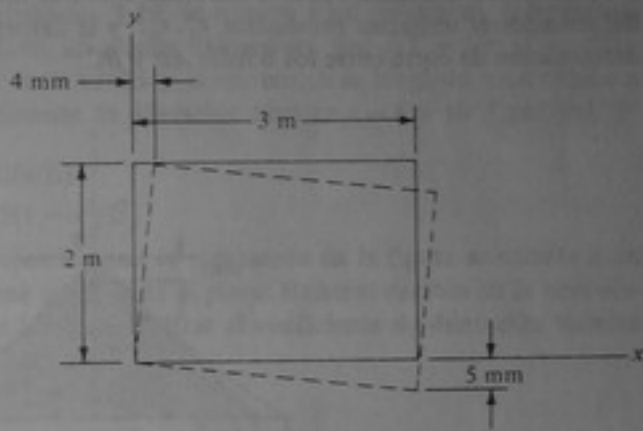


Figura P3-14

3-14 La placa rectangular que se muestra, se deforma como se indica con las líneas punteadas. Determinar la deformación de corte γ_{xy} de la placa asociada a esta deformación.

3-15 Un tubo circular de pared delgada tiene un extremo fijo. Suponiendo que las secciones cortantes imaginarias perpendiculares al eje longitudinal del tubo permanecen planas, hallar la deformación de corte de los elementos planos que se muestran sobre la superficie del tubo cuando el extremo libre se gira un ángulo ϕ como se indica.

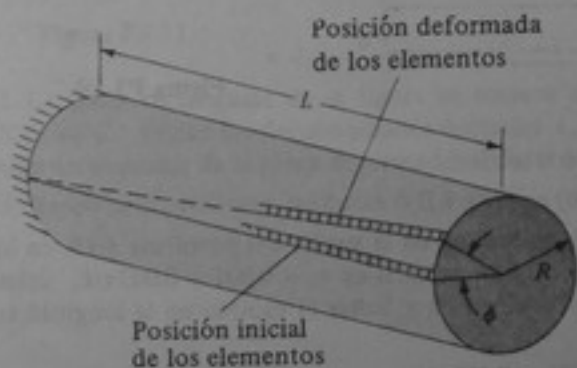


Figura P3-15

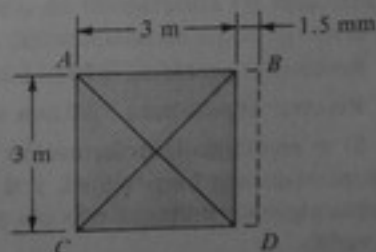


Figura P3-16

3-16 El lado BD de la placa cuadrada que se muestra en la figura se desliza como se indica con las líneas punteadas. Hallar la deformación de corte entre las diagonales AD y CD que acompañan a este desplazamiento.

3-17 La placa cuadrada que se muestra está sometida a las deformaciones uniformes $\epsilon_x = 0.001$, $\epsilon_y = -0.001$, y $\gamma_{xy} = 0$. Hallar la deformación de corte entre las diagonales AD y CD .

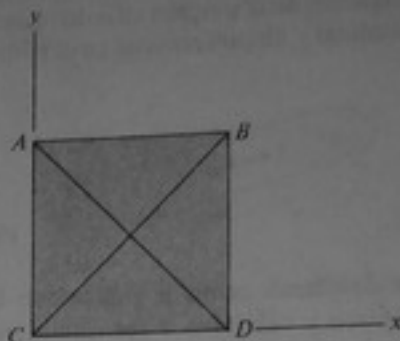


Figura P3-17

3-18 La placa triangular ABC se deforma como se indica con las líneas punteadas. Determinar las deformaciones unitarias promedio ϵ_x , ϵ_y , y la deformación de corte promedio γ_{xy} , así como la deformación de corte entre los bordes AB y BC .

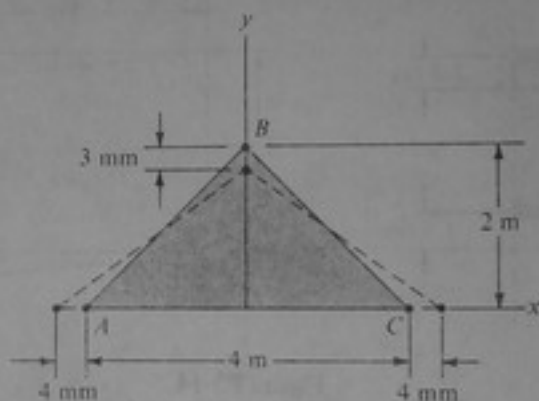


Figura P3-18

3-19 Los desplazamientos longitudinales de los puntos de la barra que se representan en la figura están dados por $u = L/100 - x/50$. Calcular los desplazamientos de los puntos O , A y B y hallar la deformación unitaria máxima en la barra.

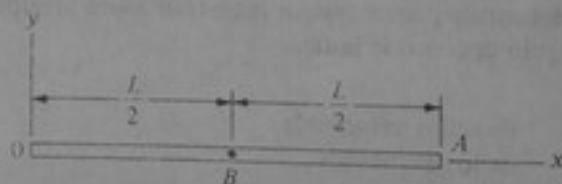


Figura P3-19

3-20 Resolver el problema 3-19 con $u = -L/50 + x^2/50L$.

3-21 Resolver el problema 3-19 con $u = (L/100) \cos(\pi x/L)$.

3-22 Si se especifica la deformación unitaria longitudinal en la varilla del problema 3-19, en lugar del desplazamiento longitudinal, y si esta deformación unitaria es $\epsilon_x = 0.001 + 0.002x/L$, calcular las deformaciones unitarias máxima y mínima en la varilla y hallar el cambio en la longitud total de la varilla.

3-23 Resolver el problema 3-22 con $\epsilon_x = -0.001 + 0.002x/L$.

3-24 Resolver el problema 3-22 con $\epsilon_x = 0.002 - 0.004(x/L)^2$.

3-25 Las componentes de desplazamiento x y y de los puntos situados en la placa rectangular de la figura están dados por $u = by/100h$ y $v = xy/100h$. Hacer un esquema de la forma deformada de la placa y hallar los valores máximos para ϵ_x , ϵ_y , y γ_{xy} .

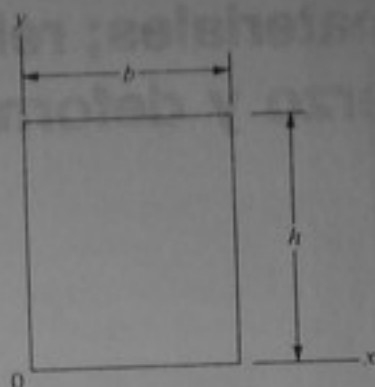


Figura P3-25

3-26 Resolver el problema 3-25 con $u = by^2/50h^2$ y $v = y/100$.

3-27 Resolver el problema 3-25 con $u = -x/50$ y $v = hx^2/50b^2$.

3-28 Suponga que una varilla como la del problema 3-19, se somete a un cambio de temperatura que varía a lo largo de su longitud y está dado, en grados Fahrenheit, por $\Delta T = 100(1 + x/L)$. Determinar la deformación unitaria máxima en la varilla y el cambio en su longitud total debido a este cambio de temperatura. Utilizar el coeficiente de dilatación térmica $\alpha = 6 \times 10^{-6}$ pul/pul/ $^{\circ}$ F.

3-29 Resolver el problema 3-28 con $\Delta T = 50(x/L)^3$.

3-30 Resolver el problema 3-28 con $\Delta T = 75(1 - x^2/L^2)$.

3-31 La placa circular con un agujero concéntrico que se representa en la figura se somete a un cambio de temperatura $\Delta T = 40^{\circ}$ C uniforme sobre toda la placa. Hallar el cambio en la circunferencia interior y en el diámetro exterior de la placa. Utilizar el coeficiente de dilatación térmica $\alpha = 15 \times 10^{-6}$ m/m/ $^{\circ}$ C.

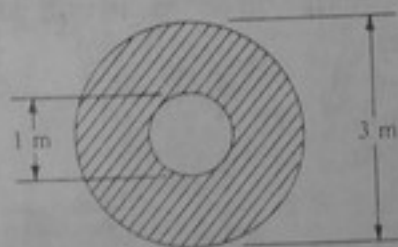


Figura P3-31

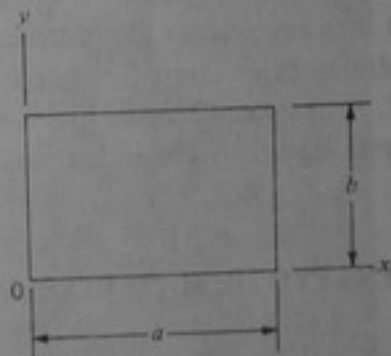


Figura P3-32

3-32 La placa rectangular de la figura se somete a un cambio de temperatura no uniforme $\Delta T = (100x/a)^{\circ}$ C. Hallar las deformaciones unitarias ϵ_x , ϵ_y , y la deformación de corte γ_{xy} en la placa y hacer un esquema de la placa deformada. Utilizar $\alpha = 20 \times 10^{-6}$ m/m/ $^{\circ}$ C.

3-33 Resolver el problema 3-32 con $\Delta T = 200(1 - y/b)^{\circ}$ C.

Propiedades mecánicas de los materiales; relaciones entre esfuerzo y deformación unitaria

4-1 INTRODUCCION

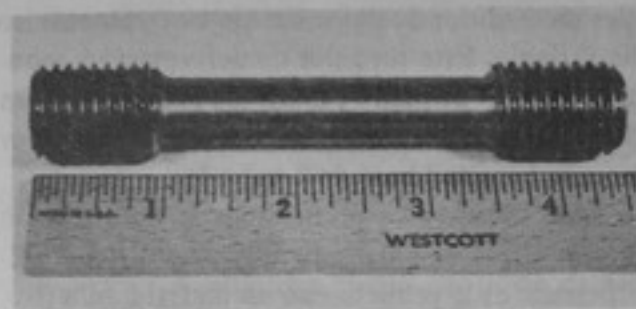
Los esfuerzos y las deformaciones unitarias que se describieron en los capítulos 2 y 3, respectivamente, no son independientes: se presentan simultáneamente en los cuerpos cargados y están relacionados entre sí. Las relaciones entre el esfuerzo y la deformación unitaria son de importancia fundamental en la resistencia de materiales, e implican ciertas propiedades mecánicas de los materiales. Otras propiedades mecánicas de los materiales son de importancia en otras áreas de la resistencia de materiales. En este capítulo se describen las *relaciones entre esfuerzo y deformación unitaria* y las *propiedades mecánicas de los materiales* más significativas.

Tradicionalmente, las propiedades mecánicas de los materiales se han determinado en forma experimental, mediante ensayos de laboratorio de diferentes clases. Este procedimiento permite evitar el uso de consideraciones teóricas sobre la dependencia que tienen las propiedades de un material de su estructura interna y su composición. Dicho procedimiento es consecuente con el concepto de continuo que se describió en el capítulo 2. En este capítulo se hace también una breve descripción de los ensayos de materiales más significativos en la resistencia de materiales.

4-2 ENSAYO DE MATERIALES

La mayor parte de las propiedades de los materiales de importancia en la resistencia de materiales se determinan por ensayos mediante los cuales se cargan probetas adecuadas en forma gradual, ya sea en tracción o en compresión. En la fig. 4-1 se muestran dos probetas típicas. La fig. 4-1a muestra una probeta para tracción, que puede ser de acero, aluminio o cualquier otro metal, y la fig. 4-1b muestra una probeta de concreto para compresión. Las especificaciones de éstas y otras probetas normales para ensayos han sido establecidas por la American Society for Testing and Materials (ASTM).

Usualmente, las probetas se ensayan con máquinas hidráulicas. Estas máquinas ejercen sobre los extremos de la probeta dos fuerzas iguales y opuestas, dirigidas a lo largo del eje longitudinal de aquella. En la fig. 4-2 se muestra una máquina típica de carga hidráulica que contiene una probeta para tracción.



(a)



(b)

Figura 4-1 Probetas normales para ensayos. (a) Metálica. (b) De concreto.

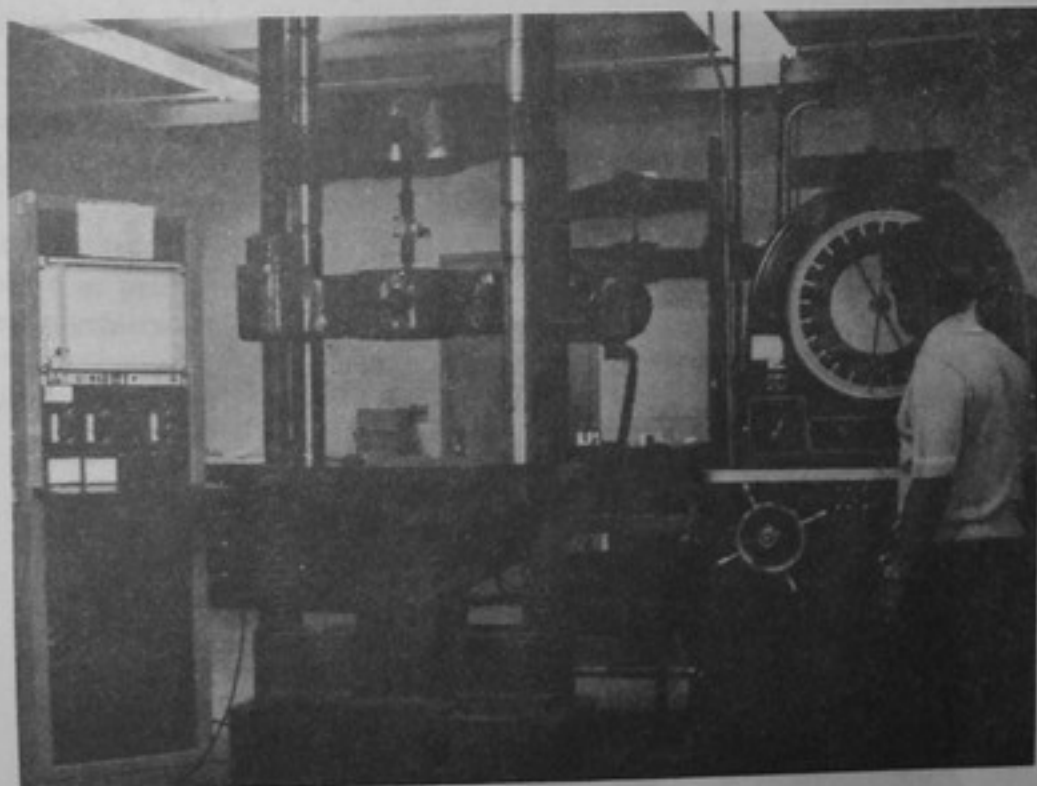
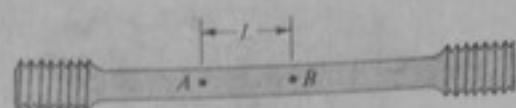


Figura 4-2 Máquina de carga.

Figura 4-3 Longitud base para la medición de ΔL .

La carga axial de una probeta produce una deformación unitaria a lo largo de su eje longitudinal; durante el ensayo se miden las deformaciones unitarias producidas por diferentes valores de la carga. Estas deformaciones generalmente son muy pequeñas, de modo que para su medición se necesitan instrumentos de precisión. Con algunos instrumentos la determinación de las deformaciones unitarias se realiza midiendo el pequeño desplazamiento ΔL que se presenta entre dos puntos A y B , separados una distancia L , sobre una probeta de ensayo (fig. 4-3). Las deformaciones unitarias longitudinales que tienen lugar en la longitud base L se obtienen haciendo $\epsilon_x = \Delta L/L$. El dispositivo para medir ΔL , que se muestra en la fig. 4-4, es un medidor de deformación electromecánico que contiene un circuito de inductancia variable. Este medidor de deformación, montado sobre una probeta para ensayo, convierte un pequeño cambio de longitud ΔL en un cambio de inductancia que se puede medir con exactitud. En este tipo de medidor de deformación se emplea, por lo regular, una longitud base de 2 pulgadas.

Otro dispositivo utilizado para medir deformaciones es el medidor de deformación de resistencia eléctrica (fig. 4-5), hecho con una hoja o alambre muy fino. Estos medidores de deformación se adhieren a la superficie de la probeta con un material adhesivo, de manera que sufren las mismas deformaciones que aquella. Su resistencia eléctrica cambia proporcionalmente a la cantidad deformada. La deformación en el medidor y, por consiguiente, en la probeta a la cual está adherido, se determina indirectamente, midiendo el cambio de su resistencia.

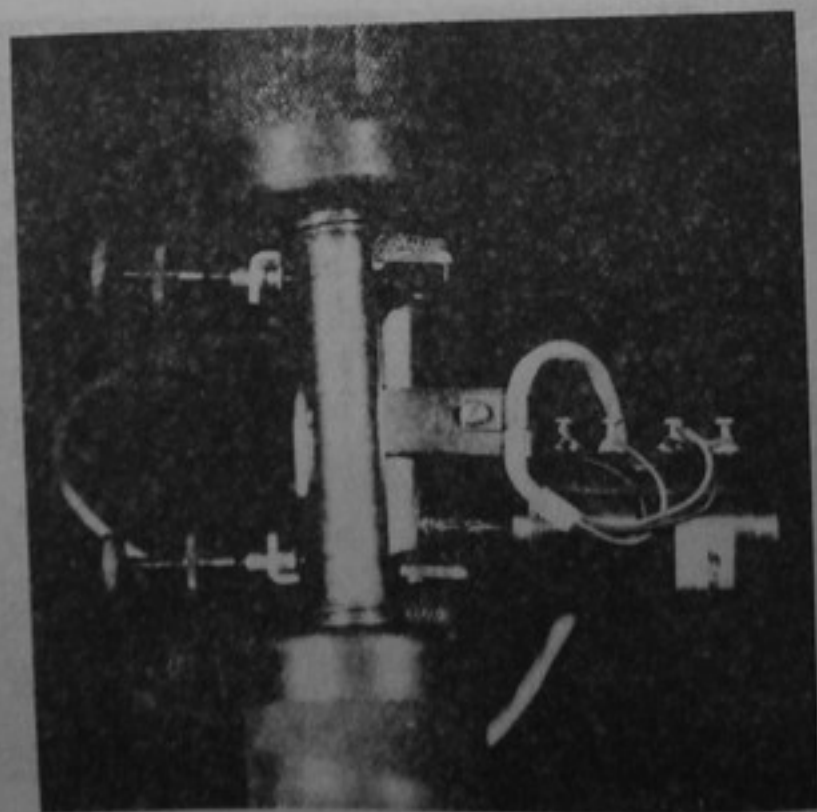


Figura 4-4 Medidor de deformación electromecánico.

Figura 4-5 Medidor de deformación de resistencia eléctrica.

Estos medidores de deformación de resistencia eléctrica se fabrican con una longitud base de 0.008 pul (0.20 mm).

La carga de una probeta se aplica perpendicularmente al eje x de un sistema de ejes x y y longitudinal de una probeta. A es el área original y $A_0 = \pi r_0^2 = 0$. Dicho esta

4-3 DIAGRAMAS E

Los resultados de los ensayos de esfuerzo-deformación se presentan en forma de diagramas de esfuerzo-deformación uniaxial aplicados. Los valores medidos

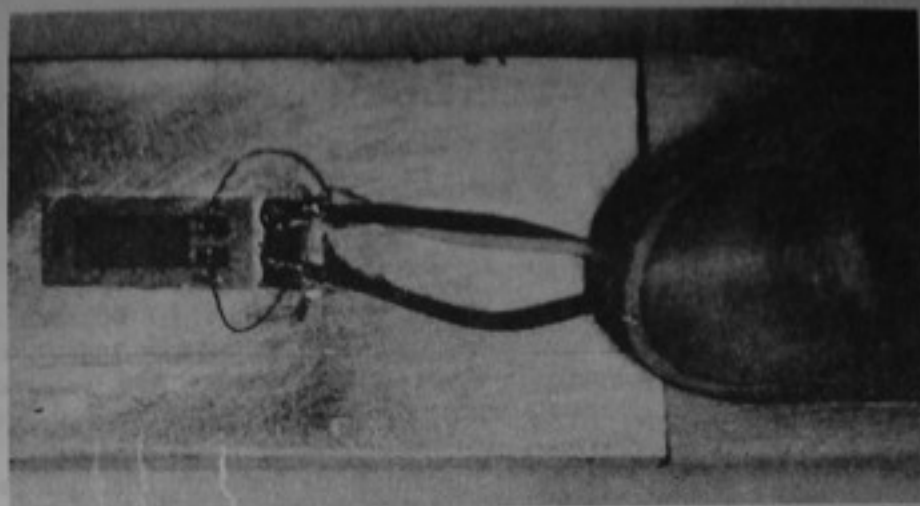


Figura 4-5 Medidor de deformación de resistencia eléctrica.

Estos medidores de deformación se encuentran disponibles en longitudes base desde 0.008 pul (0.20 mm). Existen otros tipos diferentes de dispositivos eléctricos, mecánicos y ópticos utilizados para la medición de deformaciones.†

La carga de una probeta para ensayo, como la que hemos descrito, produce esfuerzos normales en ella; estos esfuerzos son constantes en las secciones transversales perpendiculares al eje longitudinal de la probeta, excepto cerca de los extremos. Si se toma el eje x de un sistema de coordenadas rectangulares x, y, z a lo largo del eje longitudinal de una probeta (fig. 4-6), los esfuerzos son $\sigma_x = P/A$, en donde P es la carga aplicada y A es el área de la sección transversal de la probeta, y $\sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$. Dicho estado de esfuerzo se denomina esfuerzo *uniaxial*.

4-3 DIAGRAMAS ESFUERZO-DEFORMACION UNITARIA

Los resultados de los ensayos de carga, que describimos en la sección anterior, generalmente se presentan mediante los diagramas esfuerzo-deformación unitaria. Un diagrama esfuerzo-deformación unitaria es una representación gráfica de los valores del esfuerzo uniaxial aplicado a la probeta, en lo sucesivo llamado σ , contra los correspondientes valores medidos de la deformación unitaria longitudinal, ϵ . Estos diagramas se

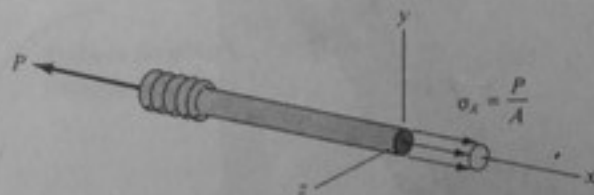


Figura 4-6 Esfuerzo uniaxial en una probeta para tracción.

† Véase, por ejemplo, R. C. Dove y Paul H. Adams, *Experimental Stress Analysis and Motion Measurement*, Merril, Columbus, Ohio, 1964.

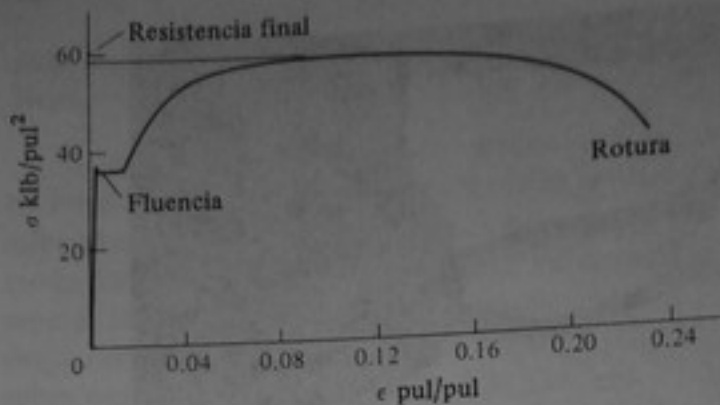


Figura 4-7 Diagrama esfuerzo-deformación unitaria para acero al carbono A36 (designación de la ASTM).

usan para describir muchas propiedades mecánicas de los materiales que son importantes en la resistencia de materiales.

En la figura 4-7 se presenta un ejemplo de un diagrama esfuerzo-deformación unitaria. Este es un diagrama para un acero dulce de bajo carbono, típico. Dichos aceros son los metales estructurales utilizados con mayor frecuencia. La fig. 4-7 ilustra el comportamiento esfuerzo-deformación unitaria de tales aceros al someterlos a un esfuerzo de tracción que aumenta en forma gradual. Como se puede ver en la figura, las deformaciones unitarias longitudinales producidas por los valores más bajos del esfuerzo son demasiado pequeñas y son proporcionales al esfuerzo aplicado. Sin embargo, en un cierto nivel de esfuerzos (aproximadamente 36 klb/pul² en este ejemplo) se presenta un cambio brusco de la deformación unitaria, representado por la parte horizontal del diagrama. Este aumento brusco en la deformación unitaria con un valor constante del esfuerzo se llama *fluencia*. Los incrementos posteriores del esfuerzo, más allá de la fluencia, causan deformaciones cada vez mayores, hasta que se alcanza la *resistencia final*. A continuación se presenta una *estricción* de la probeta (que no se muestra en el diagrama) y se producen mayores deformaciones, hasta que la probeta se rompe o se fractura, separándose en dos partes, como se muestra en la fig. 4-8.

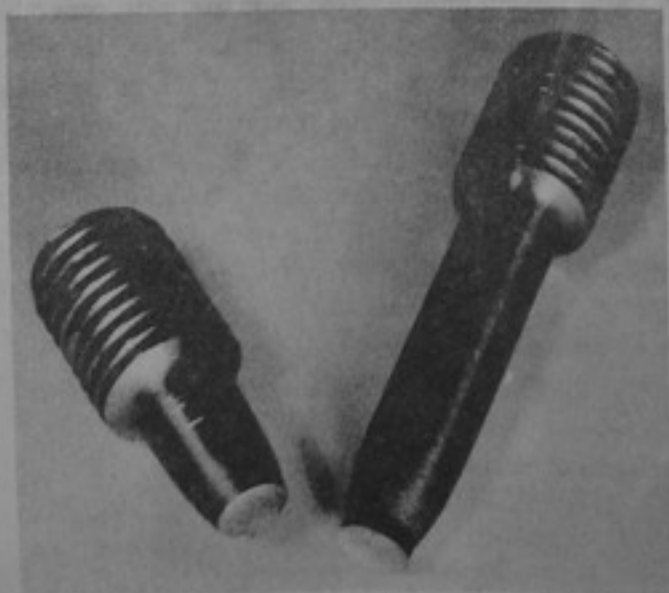


Figura 4-8 Probeta para ensayo de rotura.

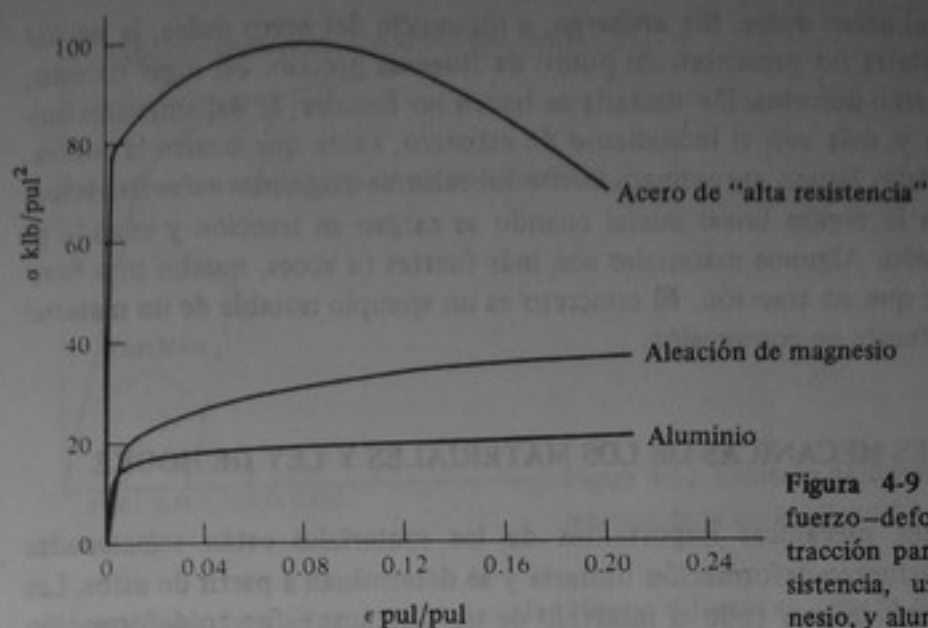


Figura 4-9 Diagrama típico esfuerzo-deformación unitaria de tracción para un acero de alta resistencia, una aleación de magnesio, y aluminio.

El declive que presenta el diagrama antes de la rotura se debe a la estricción de la probeta, que se puede observar en la fig. 4-8. Este declive no representa una disminución del *esfuerzo verdadero* en la probeta. La ordenada de la fig. 4-7 representa únicamente el *esfuerzo nominal* en la probeta, que es igual a la carga dividida por el área de la sección transversal original. El esfuerzo verdadero en la probeta antes de la rotura es igual a la carga dividida por el área de la sección transversal reducida que acompaña a la estricción. Una curva esfuerzo verdadero-deformación unitaria no presenta un declive antes de la rotura.

En las figuras 4-9 y 4-10 se pueden ver los diagramas esfuerzo-deformación unitaria para algunos otros materiales utilizados con frecuencia. La fig. 4-9 representa los diagramas para otros metales y la fig. 4-10 muestra los diagramas para madera y concreto. Los diagramas esfuerzo-deformación unitaria de la mayoría de los materiales tienen una *región lineal* inicial en la cual las deformaciones unitarias son relativamente pequeñas,

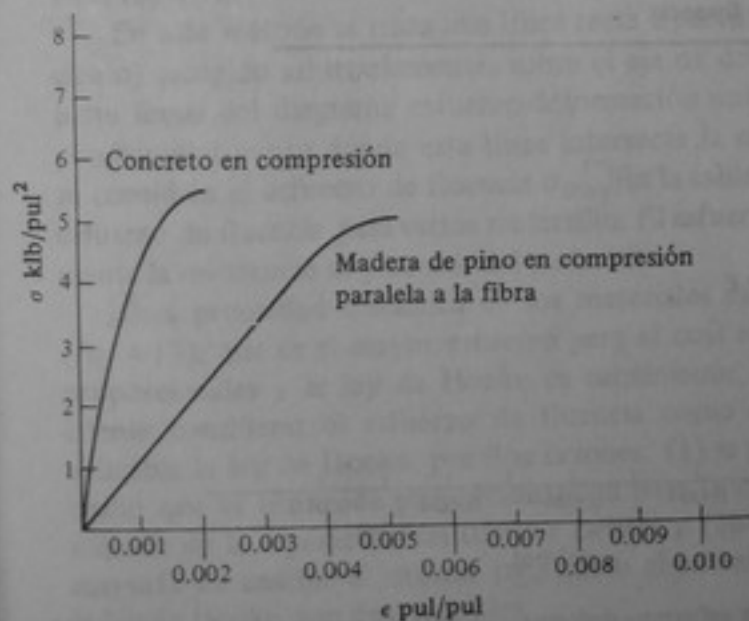


Figura 4-10 Diagramas típicos esfuerzo-deformación unitaria de compresión para concreto y madera.

como en el caso del acero dulce. Sin embargo, a diferencia del acero dulce, la mayor parte de los materiales no presentan un punto de fluencia preciso. En lugar de esto, sus diagramas esfuerzo-deformación unitaria se hacen *no lineales*; la deformación unitaria aumenta más y más con el incremento de esfuerzo, hasta que ocurre la rotura.

Muchos materiales tienen aproximadamente los mismos diagramas esfuerzo-deformación unitaria en la región lineal inicial cuando se cargan en tracción y cuando se cargan en compresión. Algunos materiales son más fuertes (a veces, mucho más fuertes) en compresión que en tracción. El concreto es un ejemplo notable de un material que es mucho más fuerte en compresión.

4-4 PROPIEDADES MECANICAS DE LOS MATERIALES Y LEY DE HOOKE

Algunas propiedades mecánicas importantes de los materiales están relacionadas con los diagramas esfuerzo-deformación unitaria y se determinan a partir de estos. Las propiedades representadas por todo el intervalo de un diagrama esfuerzo-deformación unitaria son importantes, pero la porción lineal del diagrama tiene particular importancia. La mayoría de los elementos estructurales se dimensionan de tal modo que los esfuerzos producidos en ellos por la carga están en la región lineal, en donde las deformaciones unitarias y la correspondiente deformación total del elemento son muy pequeñas.

En la figura 4-11 se representa la porción inicial del diagrama de la fig. 4-7 para acero dulce, con el eje de deformación unitaria ampliado. La relación esfuerzo-deformación unitaria, representada por la porción lineal del diagrama, se puede expresar algebraicamente como

$$\sigma = E\varepsilon \quad (4-1)$$

en donde E es una constante de proporcionalidad llamada *módulo de elasticidad* o *módulo de Young*. El módulo de elasticidad es una propiedad mecánica importante

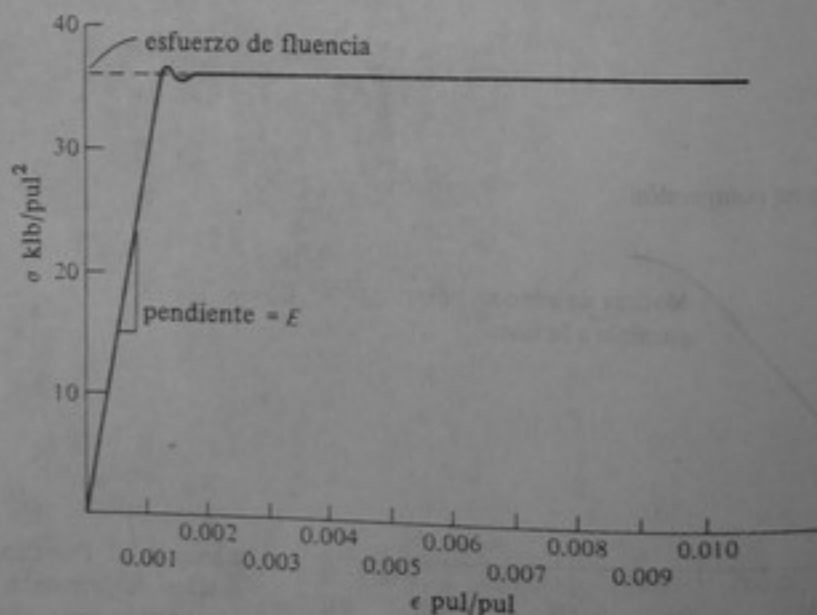


Figura 4-11 Parte inicial del diagrama esfuerzo-deformación unitaria para acero al carbono A36.

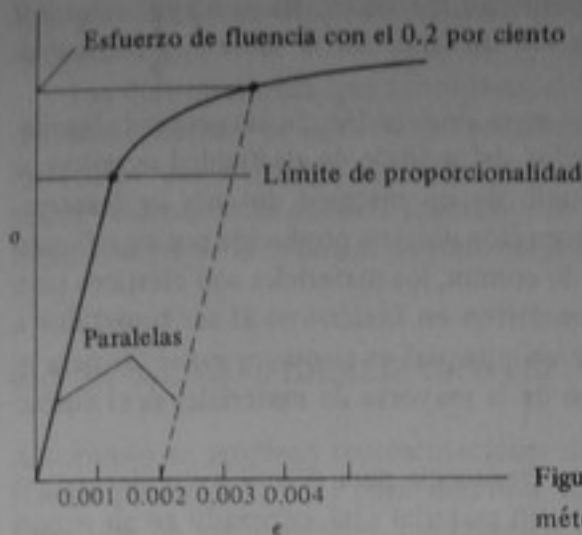


Figura 4-12 Esfuerzo de fluencia determinado con el método de la separación del 0.2 por ciento.

del material. Los diferentes materiales tienen diferentes valores de E . (En la tabla A-2 del apéndice A se dan los valores de E para algunos materiales). Las unidades de E son las mismas del esfuerzo, es decir, fuerza por unidad de área. E representa la pendiente de la parte lineal del diagrama esfuerzo-deformación unitaria para un material. La ecuación (4-1) se llama *ley de Hooke* en honor del científico inglés del siglo diecisiete, Robert Hooke, quien fue el primero en divulgar el comportamiento lineal de los experimentos fuerza-alargamiento con resortes.

El comportamiento de fluencia brusca del acero al carbono se presenta con el *esfuerzo de fluencia* σ_{flu} del material. El esfuerzo de fluencia es una propiedad mecánica de los materiales definida claramente para el acero al carbono. Es sencillamente el esfuerzo para el cual ocurre bruscamente la fluencia, como se representa con la porción plana del diagrama esfuerzo-deformación unitaria. Sin embargo, el esfuerzo de fluencia no está claramente definido para los materiales que no tienen una región plana en sus diagramas. Para estos materiales se acostumbra definir un esfuerzo de fluencia nominal, utilizando el llamado *método de la separación del 0.2 por ciento*, que se ilustra en la fig. 4-12.

En este método se traza una línea recta a partir de un valor 0.002 pul/pul (0.2 por ciento) escogido arbitrariamente, sobre el eje de deformación unitaria, y paralela a la parte lineal del diagrama esfuerzo-deformación unitaria. El valor del esfuerzo correspondiente al punto donde esta línea intersecta la curva esfuerzo-deformación unitaria se considera el esfuerzo de fluencia σ_{flu} . En la tabla A-2 también se dan los valores del esfuerzo de fluencia para varios materiales. El esfuerzo de fluencia se denomina comúnmente la *resistencia de fluencia* del material.

Otra propiedad mecánica de los materiales es el *límite de proporcionalidad* σ_p (fig. 4-12), que es el mayor esfuerzo para el cual esfuerzo y deformación unitaria son proporcionales y la ley de Hooke es cabalmente aplicable. No obstante, es más frecuente considerar el esfuerzo de fluencia como el esfuerzo límite hasta el cual es aplicable la ley de Hooke, por dos razones: (1) se puede medir con mucha mayor precisión que el límite de proporcionalidad para la mayoría de materiales, utilizando el método de la separación del 0.2 por ciento, y (2) los errores que se introducen en la mayoría de análisis al utilizar σ_{flu} como el esfuerzo límite hasta el cual es aplicable la ley de Hooke, son despreciables.

El *esfuerzo final* σ_f también es una propiedad mecánica. Es el mayor valor del esfuerzo en un diagrama esfuerzo-deformación unitaria. En la tabla A-2 se dan algunos valores típicos de σ_f .

Algunos otros términos son importantes en la descripción de las propiedades mecánicas de los materiales. La palabra *elasticidad* del módulo de elasticidad se refiere al comportamiento esfuerzo-deformación unitaria de un material durante la descarga. Se dice que un material es *elástico* si la deformación unitaria producida por un esfuerzo desaparece cuando se retira el esfuerzo. Por lo común, los materiales son elásticos para esfuerzos suficientemente bajos, pero se convierten en *inelásticos* al ser sometidos a mayores esfuerzos. El *límite elástico* σ_{e1} de un material es el mayor esfuerzo para el cual el material es elástico. El límite elástico de la mayoría de materiales es el mismo esfuerzo de fluencia.

El término *elástico lineal* se emplea con frecuencia para describir un cierto tipo de comportamiento del material. Se dice que un material está *esforzado en su región elástica lineal* si el esfuerzo en él está dentro de la porción lineal inicial de su diagrama esfuerzo-deformación unitaria y por debajo de su límite elástico.

El comportamiento de la descarga, y la posterior recarga de las probetas metálicas para ensayo uniaxial esforzadas más allá de su límite elástico, son de mucha importancia. En primer lugar, si una probeta de descarga en forma gradual desde un valor cualquiera de esfuerzo superior al límite elástico, digamos el punto *A* en la fig. 4-13, la relación esfuerzo-deformación unitaria en la descarga sigue una línea recta paralela a la parte lineal de la curva esfuerzo-deformación unitaria, pero desplazada hacia la derecha. La intersección de esta línea de descarga con el eje de deformación unitaria (punto *B* en la fig. 4-13) representa la *deformación unitaria residual permanente* que queda en el material después de retirar la carga.

Si una probeta sometida a un ensayo de esfuerzo-deformación unitaria de descarga y luego se vuelve a cargar, la relación esfuerzo-deformación unitaria de la recarga sigue (hacia arriba) la línea de descarga indicada en la fig. 4-13. A partir del punto de descarga original (punto *A*), sigue la curva esfuerzo-deformación unitaria que habría seguido el material si no hubiera sido descargado. Si la probeta se descarga desde el punto *A* hasta el punto *B* y después de algún tiempo se recarga como un material virgen, su esfuerzo de fluencia estará cerca al punto *A* y será mayor que el original.

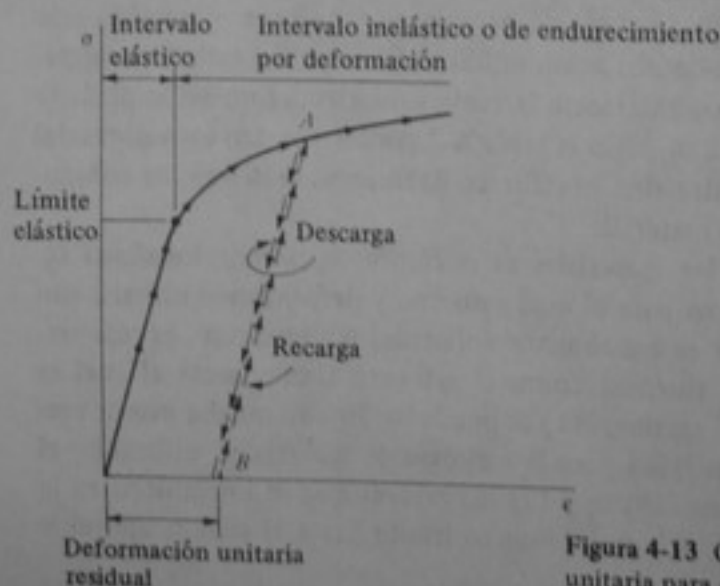


Figura 4-13 Comportamiento esfuerzo-deformación unitaria para descarga y recarga.

Este proceso de elevación del esfuerzo de fluencia se conoce como *endurecimiento por deformación*.

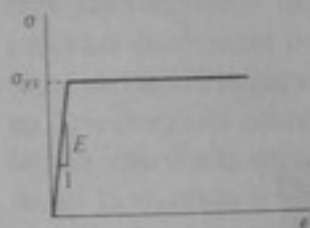
Las deformaciones que sobrepasan el límite elástico, produciendo deformaciones residuales después de la descarga, se llaman *deformaciones inelásticas* o *plásticas*. Los materiales que soportan deformaciones plásticas relativamente grandes antes de la rotura se denominan *dúctiles* y aquellos que solo soportan poca o ninguna deformación plástica antes de la rotura se denominan *frágiles*.

4-5 DIAGRAMAS IDEALIZADOS ESFUERZO-DEFORMACION UNITARIA

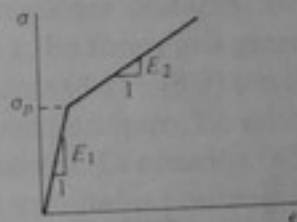
A menudo se emplean representaciones diferentes a la lineal estipulada por la ley de Hooke [ecuación (4-1)] para describir los diagramas esfuerzo-deformación unitaria uniaxiales de los materiales. Las representaciones idealizadas de aquellas porciones que están más allá del límite proporcional en los diagramas inicialmente lineales, lo mismo que las de los diagramas completamente no lineales, se usan para varios fines.

En la figura 4-14 se muestran tres representaciones idealizadas comunes de diagramas esfuerzo-deformación unitaria. La fig. 4-14a se utiliza para representar el comportamiento anterior y posterior a la fluencia, característico del acero dulce. Este diagrama es aplicable al acero dulce para deformaciones unitarias hasta de 15 ó 20 veces la deformación unitaria en el punto de fluencia. Cualquier material para el cual sea aplicable el diagrama se denomina elástico y perfectamente plástico.

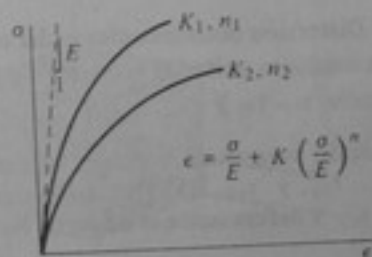
La figura 4-14b es aplicable a un material con un intervalo lineal inicial seguido por otro intervalo lineal de deformación por endurecimiento con pendiente reducida. Esta es una idealización del comportamiento de algunas clases de acero y puede aplicarse a algunos otros materiales.



(a) Material elástico, perfectamente plástico



(b) Material elástico con endurecimiento lineal



(c) Diagramas de Ramberg-Osgood.

Figura 4-14 Diagramas idealizados esfuerzo-deformación unitaria. (a) Material elástico, perfectamente plástico. (b) Material elástico con endurecimiento lineal. (c) Diagramas de Ramberg-Osgood.

La figura 4-14c ilustra una ecuación, señalada en la figura, que se puede aproximar con bastante exactitud bien sea a una región lineal inicial seguida por una región no lineal de endurecimiento por deformación o a un comportamiento completamente no lineal. Los dos tipos de diagramas se indican en la figura. La ecuación dada fue desarrollada por Ramberg y Osgood.[†] La forma de la curva representada por la ecuación está determinada por las constantes K y n . Las dos curvas que se muestran corresponden a diferentes conjuntos de estas constantes. La constante E puede representar la pendiente inicial de un diagrama.

4-6 LEY DE HOOKE PARA EL ESTADO GENERAL DE ESFUERZO, DEFORMACIÓN UNITARIA Y DEFORMACIÓN DE CORTE

El estado general de esfuerzo, deformación unitaria y deformación de corte en un punto de un cuerpo material, que se representan en los elementos de la fig. 4-15, incluye tres componentes de deformación unitaria, tres de deformación de corte, tres de esfuerzo normal y tres de esfuerzo cortante. Las relaciones entre las seis componentes de deformación y las seis componentes de esfuerzo, para materiales esforzados en su región elástica lineal, se denominan la *ley generalizada de Hooke*. Estas relaciones se establecen utilizando la ley uniaxial de Hooke [ecuación (4-1)], la relación de Poisson y las relaciones entre esfuerzo cortante y deformación de corte.

Relación de Poisson

Cuando se carga una probeta de ensayo en tracción o compresión uniaxial, ésta sufre tanto deformaciones unitarias laterales como longitudinales. Por ejemplo, el diámetro de una probeta redonda disminuye bajo tracción longitudinal y aumenta bajo compresión longitudinal. En uno u otro caso, la deformación unitaria lateral se determina a

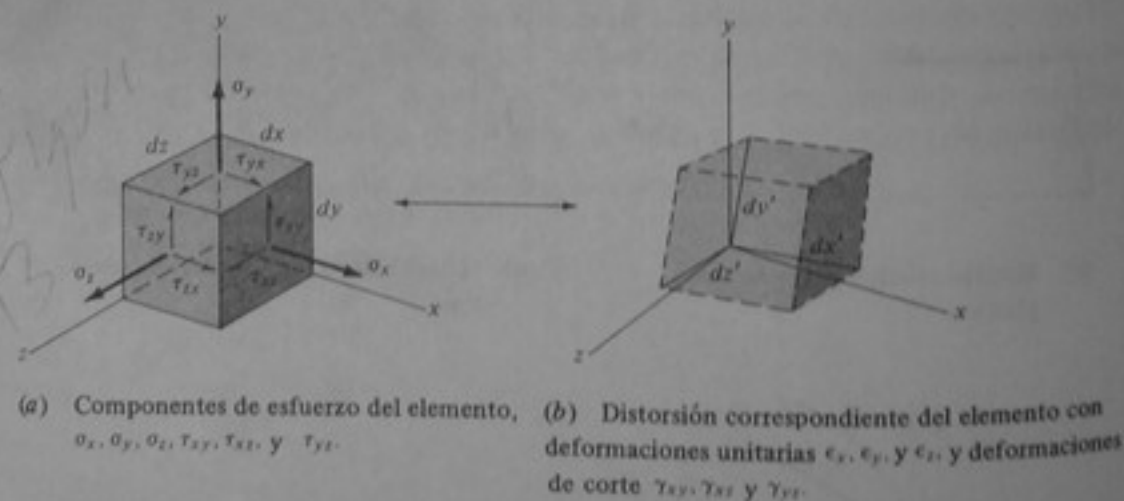


Figura 4-15 Componentes de esfuerzo y de deformación para un elemento infinitesimal. (a) Componentes de esfuerzo del elemento, $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz},$ y τ_{yz} . (b) Distorsión correspondiente del elemento con deformaciones unitarias $\epsilon_x, \epsilon_y,$ y $\epsilon_z,$ y deformaciones de corte $\gamma_{xy}, \gamma_{xz},$ y γ_{yz} .

[†] W. Ramberg and W. R. Osgood, "Description of Stress-Strain Curves by Three Parameters", NACA-TN 902, 1943.

Relaciones esfuerzo cortante—deformación de corte

Es posible realizar ensayos mecánicos en los cuales los pequeños elementos cúbicos de las probetas (de forma adecuada) se cargan únicamente en corte. Dichos ensayos demuestran que en un elemento de un material isotrópico cargado únicamente con una componente de esfuerzo cortante se produce sólo la componente de deformación de corte correspondiente a ese esfuerzo. Por ejemplo, un elemento cargado con el esfuerzo cortante τ_{xy} (fig. 4-17) sufre únicamente la deformación de corte γ_{xy} . Las deformaciones de corte γ_{yz} y γ_{xz} no se producen. Además, los esfuerzos cortantes producen solamente deformaciones de corte en un elemento, no deformaciones unitarias.

Para un elemento de material elástico lineal cargado en corte puro, como se muestra en la fig. 4-17, la deformación de corte producida es proporcional al esfuerzo aplicado. Esta relación se expresa en la forma en donde G , llamado *módulo cortante*

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} \quad (4.4)$$

de elasticidad, es la constante de proporcionalidad entre el esfuerzo cortante y la deformación de corte. G es otra propiedad del material y tiene las mismas unidades que el módulo de elasticidad, E .

Ley generalizada de Hooke

La ley generalizada de Hooke se basa en la ley uniaxial de Hooke, la relación de Poisson y las relaciones esfuerzo cortante-deformación de corte. Si un elemento de un material isotrópico elástico lineal se somete simultáneamente a las tres componentes de esfuerzo normal, σ_x , σ_y y σ_z , entonces ocurren las deformaciones unitarias, ϵ_x , ϵ_y y ϵ_z , cada una de las cuales es producida por el efecto combinado de todos los tres esfuerzos normales. Cualquiera de las deformaciones unitarias es causada por el esfuerzo normal que actúa en su dirección, dado por la ecuación (4-1), y por los dos esfuerzos laterales producidos por el efecto de Poisson y dados por la aplicación de la ecuación (4-3) en cada dirección lateral (con los subíndices apropiados). Si además se aplican al elemento los esfuerzos cortantes τ_{xy} , τ_{xz} y τ_{yz} , se producen las deformaciones de corte γ_{xy} , γ_{xz} y γ_{yz} . Las componentes correspondientes del esfuerzo cortante y de la deformación de corte obedecen la relación de la ecuación (4-4). Las expresiones para las deformaciones producidas por las seis componentes de esfuerzo normal y cortante son:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} \\ \epsilon_y &= -\nu \frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} \\ \epsilon_z &= -\nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \gamma_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{G} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G} \end{aligned} \quad (4.5)$$

La ecuación (4-5) representa la ley generalizada de Hooke. La convención de signos que establece que la tracción es positiva y la compresión negativa se aplica a los esfuerzos normales y a las deformaciones unitarias.

Consideraciones de los esfuerzos y las deformaciones en un punto, en diferentes direcciones de coordenadas, demuestran que las constantes del material, E , ν y G , que aparecen en la ecuación (4-5), no son independientes. En el capítulo 9 se demuestra que

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (4-6)$$

Si se miden E y ν para un material dado mediante los ensayos adecuados, se puede determinar G a partir de la ecuación (4-6).

4-7 ESFUERZOS Y DEFORMACIONES TERMICOS

Como se explicó en el capítulo 3, si un pequeño elemento cúbico de un material isotrópico se somete a un cambio uniforme de temperatura ΔT y no hay restricción para que se dilate o se contraiga libremente, se produce una deformación libre de esfuerzos en la cual el elemento sufre deformaciones unitarias iguales, ϵ_x , ϵ_y y ϵ_z , pero no se presentan deformaciones de corte, γ_{xy} , γ_{xz} o γ_{yz} . Las deformaciones unitarias que ocurren debido al cambio de temperatura ΔT están dadas por

$$\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \alpha \Delta T \quad (4-7)$$

en donde α es el coeficiente de dilatación térmica que se definió en el capítulo 3.

Si el elemento se somete a esfuerzos junto con el cambio de temperatura ΔT , se producen deformaciones adicionales debidas a estos esfuerzos. Si el elemento es de material elástico lineal, estas deformaciones adicionales están dadas por las ecuaciones (4-5). Entonces, las deformaciones totales en el elemento producidas por los cambios de temperatura y por los esfuerzos son las sumas de las deformaciones dadas por las ecuaciones (4-5) y (4-7) y son:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} + \alpha \Delta T \\ \epsilon_y &= -\nu \frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} + \alpha \Delta T \\ \epsilon_z &= -\nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E} + \alpha \Delta T \end{aligned} \quad (4-8)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

Las ecuaciones (4-8) representan la ley generalizada de Hooke con el efecto del cambio de temperatura incluido. En general, los esfuerzos, las deformaciones unitarias y las deformaciones de corte en un cuerpo isotrópico, elástico lineal, sometido a cargas externas y/o a un cambio de temperatura, deben obedecer las ecuaciones (4-8).

Los esfuerzos conocidos como esfuerzos térmicos se pueden producir de dos maneras debido a un cambio de temperatura. En primer lugar los esfuerzos térmicos, tanto normales como cortantes, pueden aparecer en un cuerpo si éste está apoyado y restringido de tal modo que no se pueda deformar libremente durante un cambio de temperatura. En estos casos, surgen cargas externas en los puntos de restricción del cuerpo que tienden a dilatarlo o contraerlo, produciendo los esfuerzos térmicos. Los esfuerzos térmicos también pueden aparecer en un cuerpo no restringido si el cambio de temperatura no es uniforme de punto a punto.† En estos casos, los diferentes elementos tienden a distorsionarse en magnitudes diferentes, pero se restringen recíprocamente o interactúan de alguna otra manera, produciéndose los esfuerzos térmicos.

En general, cualquiera que sea el caso de restricciones externas, distribución de cambios de temperatura o carga externa, los esfuerzos y las deformaciones en un cuerpo isotrópico, lineal elástico, deben satisfacer las ecuaciones (4-8). Algunos problemas de esfuerzos térmicos se pueden resolver utilizando las ecuaciones (4-8), como se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4-1

- (a) Una placa delgada, situada en el plano x - y como se muestra en la fig. 4-18, está cargada con esfuerzos uniformes $\sigma_x = -\sigma_0$. La placa está restringida de tal manera que no puede dilatarse ni contraerse en la dirección y , pero puede contraerse o dilatarse uniformemente en las direcciones x y z . Las superficies de la placa están libres de esfuerzos, de modo que $\sigma_z = 0$. Calcular σ_y , ϵ_x y ϵ_z para esta placa.
- (b) Repetir la parte a si se produce un cambio de temperatura ΔT y todas las demás condiciones permanecen iguales.

SOLUCIÓN

- (a) Debido a la restricción en la dirección y , $\epsilon_y = 0$. Luego, utilizando la segunda, la primera y la tercera ecuaciones de (4-5), en ese orden, se obtiene

$$0 = \frac{\nu(\sigma_0)}{E} + \frac{\sigma_y}{E}$$

$$\text{o} \quad \sigma_y = -\nu\sigma_0 \quad \text{Resp.}$$

$$\text{Entonces} \quad \epsilon_x = \frac{-\sigma_0}{E} - \frac{\nu}{E}(-\nu\sigma_0) = -\frac{1-\nu^2}{E}\sigma_0 \quad \text{Resp.}$$

$$\text{y} \quad \epsilon_z = \frac{\nu(\sigma_0)}{E} - \frac{\nu}{E}(-\nu\sigma_0) = \frac{\nu(1+\nu)}{E}\sigma_0 \quad \text{Resp.}$$

† El cambio de temperatura debe ser una función no lineal de las coordenadas x , y y z . Véase Timoshenko y Goodier, *Theory of Elasticity*, 3a. ed., McGraw-Hill, Nueva York, 1969.

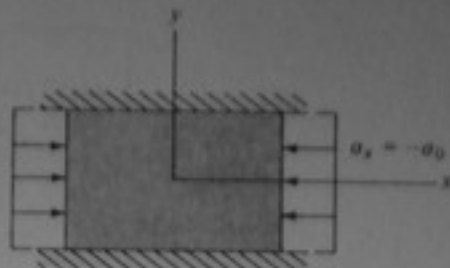


Figura 4-18 Ejemplo 4-1.

- (b) El esfuerzo σ_x es igual al esfuerzo aplicado $-\sigma_0$, a pesar de ΔT , y la restricción aún implica que $\epsilon_y = 0$. Luego, usando la segunda, la primera y la tercera ecuaciones de (4-8) obtenemos

$$0 = \frac{-\nu(-\sigma_0)}{E} + \frac{\sigma_y}{E} + \alpha \Delta T$$

$$\text{o} \quad \sigma_y = -\nu\sigma_0 - E\alpha \Delta T \quad \text{Resp.}$$

$$\text{Entonces} \quad \epsilon_x = \frac{-\sigma_0}{E} - \frac{\nu}{E}(-\nu\sigma_0 - E\alpha \Delta T) + \alpha \Delta T$$

$$= -\frac{1-\nu^2}{E}\sigma_0 + (1+\nu)\alpha \Delta T \quad \text{Resp.}$$

$$\text{y} \quad \epsilon_z = -\frac{\nu}{E}(-\sigma_0) - \frac{\nu}{E}(-\nu\sigma_0 - E\alpha \Delta T) + \alpha \Delta T$$

$$= \frac{\nu(1+\nu)}{E}\sigma_0 + (1+\nu)\alpha \Delta T \quad \text{Resp.}$$

4-8 OTROS ASPECTOS DEL COMPORTAMIENTO DE LOS MATERIALES

Los diagramas de las figs. 4-7, 4-9 y 4-10 ilustran el comportamiento esfuerzo-deformación unitaria de varios materiales sometidos a un esfuerzo uniaxial aplicado gradualmente, a la temperatura ambiente. Sin embargo, el comportamiento esfuerzo-deformación unitaria de la mayoría de materiales cambia con la rapidez de carga y con la temperatura. El comportamiento esfuerzo-deformación unitaria de materiales sometidos a cargas de impacto, a cargas cíclicas o a cargas prolongadas es diferente al exhibido para cargas graduales. Asimismo, la temperatura afecta el comportamiento esfuerzo-deformación unitaria y las propiedades del material sometido a cargas graduales y a diferentes rapidezces de carga.

Con respecto al efecto de la temperatura sobre las propiedades de un material sometido a cargas aplicadas gradualmente, los ensayos realizados a diferentes temperaturas demuestran, en general, que el módulo de elasticidad, el esfuerzo de fluencia y el esfuerzo final son afectados por la temperatura. La fig. 4-19 ilustra la variación con la temperatura del módulo de elasticidad para el acero y para el aluminio. Las curvas de la fig. 4-19 indican que para estos metales E disminuye a altas temperaturas. No obstante, las disminuciones son significativas únicamente a temperaturas muy supe-

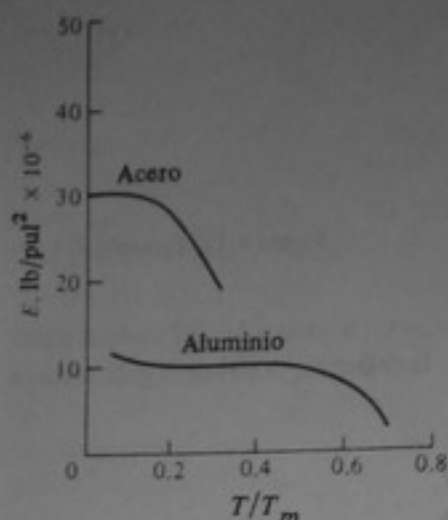


Figura 4-19 Variación de E con la temperatura para hierro y aluminio (T_f = temperatura de fusión)

riores a las temperaturas ambientales máximas. La mayoría de los materiales se reblandecen y tienen valores disminuidos de E a temperaturas suficientemente elevadas. Las variaciones de E con la temperatura cambian mucho de un material a otro.

La figura 4-20 ilustra la variación del esfuerzo de fluencia con la temperatura. La curva representada es para acero A36. Para este material se produce una variación semejante de la resistencia final con la temperatura. Al igual que con el módulo de elasticidad, las disminuciones son significativas solamente a temperaturas muy superiores a las temperaturas ambientales máximas. En general, los demás metales y los no metales también exhiben disminuciones en los esfuerzos de fluencia y final con temperaturas suficientemente elevadas.

En relación con el efecto de la rapidez de la carga, bajo una carga rápida de impacto se puede presentar un comportamiento dúctil y un aumento de los esfuerzos de fluencia y final o bien, un comportamiento frágil y una disminución del esfuerzo final. No obstante, por lo general el módulo de elasticidad no se afecta en forma apreciable con la carga rápida. La fig. 4-21 ilustra el efecto general de la carga rápida sobre la relación esfuerzo-deformación unitaria para aceros estructurales que se comportan

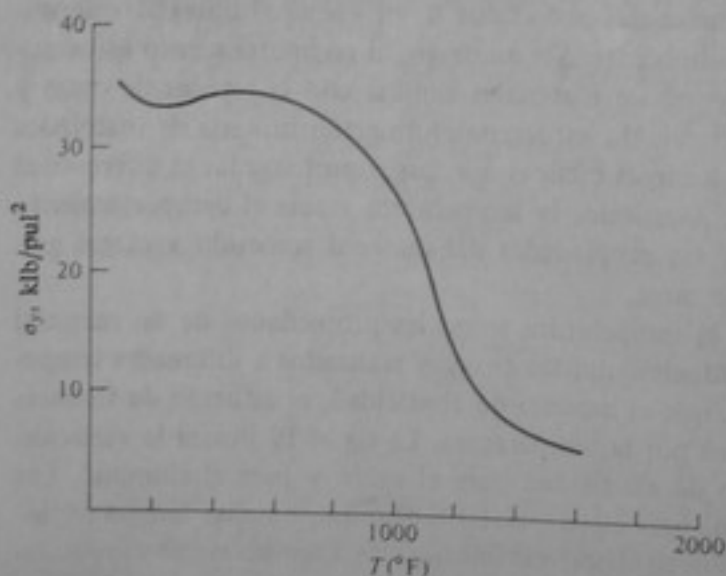


Figura 4-20 Variación del esfuerzo de fluencia con la temperatura para acero A36.

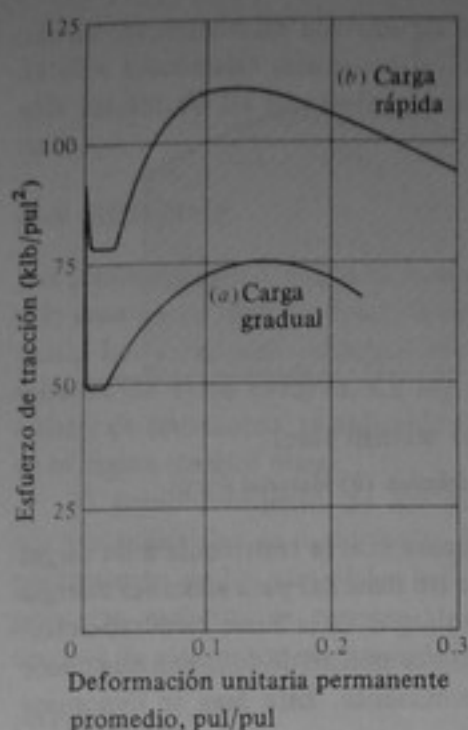


Figura 4-21 Efecto de la rapidez de carga sobre el diagrama esfuerzo-deformación unitaria para acero estructural dúctil.

en forma dúctil. La curva *a* representa la deformación unitaria permanente contra el esfuerzo bajo una carga aplicada gradualmente, mientras que la curva *b* representa la deformación unitaria permanente contra el esfuerzo bajo cargas de impacto crecientes con un tiempo medio de carga de $400 \mu\text{s}$. El comportamiento de los materiales bajo cargas rápidas aplicadas continuamente es parecido al comportamiento bajo cargas crecientes del tipo de impacto representado por estas curvas. La fig. 4-21 indica que los esfuerzos de fluencia y final para un material pueden ser notablemente más altos bajo una carga rápida. Por otra parte, otros ensayos demuestran que a temperaturas bajas y/o en presencia de imperfecciones leves en un material, la carga rápida puede producir una fractura frágil con un esfuerzo bajo, precedida por una pequeña o ninguna deformación plástica. Esta misma fractura frágil prematura puede presentarse bajo cargas aplicadas gradualmente en presencia de imperfecciones. Las fracturas frágiles serán analizadas en el capítulo 13.

La resistencia de un material a las cargas de impacto, expresada en función de la energía mecánica que puede absorber antes de la rotura, se llama *tenacidad*. Se puede demostrar (véase el capítulo 5) que el área bajo la curva esfuerzo-deformación unitaria para un material representa la energía de deformación absorbida por unidad de volumen del material antes de la rotura. El área bajo la curva completa esfuerzo-deformación unitaria se llama *módulo de tenacidad*. La fig. 4-22 ilustra el módulo de tenacidad para materiales frágiles y para un material dúctil. En la figura se observa que los materiales frágiles, aún los de resistencia final más alta, generalmente absorben mucho menos energía de las cargas de impacto que los materiales dúctiles.

La tenacidad se mide en probetas lisas, sin entallas. Otra cantidad diferente, denominada *tenacidad a la entalla*, es de importancia fundamental en el estudio de la fractura frágil de elementos imperfectos. La tenacidad a la entalla, que se trata en el capítulo 13, proporciona una medida de la resistencia de un material a la fractura bajo cargas de impacto cuando existen imperfecciones.

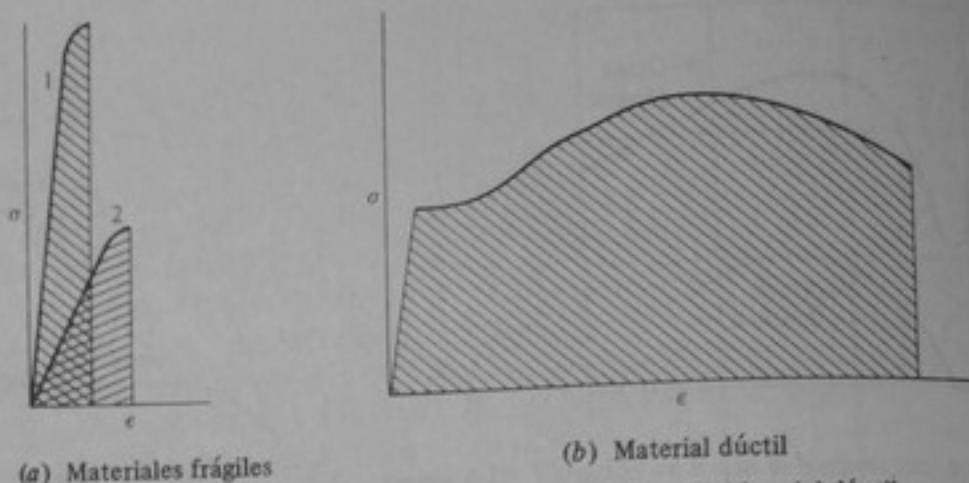


Figura 4-22 Módulo de tenacidad. (a) Materiales frágiles. (b) Material dúctil.

El término *resiliencia* también se utiliza en relación con la resistencia a las cargas de impacto. La resiliencia se refiere a la capacidad de un material para absorber energía sin sufrir deformación plástica. El área bajo la parte elástica de la curva esfuerzo-deformación unitaria representa la energía de deformación por unidad de volumen que puede absorber un material sin sufrir la deformación permanente. Esta área se denomina *módulo de resiliencia*.

Otro aspecto del comportamiento de los materiales es el que ocurre bajo cargas prolongadas. Bajo cargas prolongadas a determinadas temperaturas, los materiales pueden exhibir un comportamiento llamado *flujo*. El flujo consiste en un aumento de la deformación a medida que transcurre el tiempo, mientras el esfuerzo permanece con un valor constante. El flujo puede conducir a deformaciones plásticas apreciables y finalmente a la rotura. La rapidez del flujo generalmente aumenta con el nivel del esfuerzo y con la temperatura, pero el tiempo para llegar a la rotura por flujo varía desde horas hasta años para los diferentes materiales, según el nivel de esfuerzo y la temperatura. La mayor parte de los metales estructurales tienen rapidez de flujo significativas a esfuerzos inferiores al esfuerzo de fluencia únicamente con temperaturas muy superiores a los valores máximos de la temperatura ambiental. Otros metales, incluyendo el plomo y el estaño, y otros materiales, tales como la madera y los polímeros, exhiben rapidez de flujo apreciables a la temperatura ambiental bajo esfuerzos inferiores a sus esfuerzos de fluencia.

Un aspecto final del comportamiento de los materiales bajo diferentes tipos de carga es el que ocurre bajo cargas repetidas o cíclicas. Los materiales sometidos a cargas cíclicas en las cuales los esfuerzos se aplican y se retiran o cambian de tracción a compresión, repetidamente, pueden fallar por fractura a niveles de esfuerzo inferiores a la fluencia. Este fenómeno se llama *fatiga* y se estudia en el capítulo 14. La falla por fatiga a un nivel de esfuerzo determinado se produce después de un cierto número de ciclos de carga. El número de ciclos de carga necesario para producir la falla por fatiga aumenta al disminuir los niveles de esfuerzo; por debajo de un cierto valor límite del esfuerzo no se produce falla por fatiga, cualquiera que sea el número de ciclos de carga. Este valor límite del esfuerzo se denomina *límite de fatiga* o *límite de aguante*. Para la mayoría de metales, el límite de fatiga es menor que el esfuerzo de fluencia.

La descripción del comportamiento de los materiales que hemos presentado en esta sección es relativamente breve y de índole introductoria. Las propiedades mecáni-

cas de los materiales abarcan un tema mucho más amplio que el indicado aquí. Los detalles adicionales relacionados con el comportamiento de los materiales y el estudio más amplio de las propiedades mecánicas debe consultarse en libros íntegramente al tema.

4-9 RESUMEN

Las propiedades mecánicas tales como el módulo de elasticidad, el esfuerzo de fluencia y la resistencia final se determinan mediante ensayos uniaxiales sencillos de los materiales. Las relaciones esfuerzo-deformación unitaria se determinan a partir de los resultados de estos ensayos. La ley generalizada de Hooke, que es un conjunto fundamental de ecuaciones, es aplicable a la mayoría de materiales estructurales para esfuerzos en la región elástica lineal.

El comportamiento de los materiales por encima de la fluencia, observado en ensayos uniaxiales, es importante. El conocimiento de este comportamiento y del comportamiento de los materiales bajo cargas de rapidez variable o cargas cíclicas y temperaturas variables es necesario para determinar adecuadamente la resistencia o el aguantar de elementos estructurales sometidos a diferentes condiciones.

PROBLEMAS

4-1 a 4-3 Los diagramas representan los registros automáticos de la carga axial F contra el alargamiento Δl en una longitud base de 2 pul para probetas metálicas redondas de 0.505 pul de diámetro. Determinar el módulo de elasticidad, el límite de proporcionalidad y el esfuerzo de fluencia, éste último por el método de la separación del 0.2 por ciento, para los materiales correspondientes.

4-4 En un ensayo de tracción de una placa de acero, una probeta de sección transversal rectangular que tiene inicialmente 5 mm de espesor y 20 mm de ancho se somete a una carga de 20 KN. Bajo esta carga, el alargamiento en una longitud base de 50 mm sobre la probeta es 0.05 mm y el ancho de la probeta disminuye 0.0015 mm. Suponiendo que el material de la placa obedece la ley de Hooke, hallar su módulo de elasticidad y su relación de Poisson.

4-5 En un ensayo de compresión de madera, una probeta de sección transversal cuadrada, inicialmente de 50 mm \times 50 mm, se somete a una carga de 105 KN. Bajo esta carga, el acortamiento en una longitud base de 200 mm sobre la probeta es de 0.6 mm y las dimensiones laterales de la probeta aumentan 0.05 mm. Suponiendo que la probeta obedece la ley de Hooke, hallar su módulo de elasticidad y su relación de Poisson.

4-6 Un tubo cilíndrico de pared delgada, de 50 mm de diámetro, 1,25 mm de espesor y 250 mm de longitud, se somete a una fuerza axial de compresión de 40 KN. La longitud total del tubo disminuye 0,73 mm y su circunferencia aumenta 0.14 mm por acción de la carga. Determinar el módulo de elasticidad y la relación de Poisson para el material del tubo, suponiendo que obedece la ley de Hooke.

4-7 Una varilla de control para una máquina está hecha de una aleación de aluminio con $E = 10.3 \times 10^6$ lb/pul². Su longitud es 40 pul y su diámetro, $\frac{1}{2}$ pul. Hallar el alargamiento total de la varilla cuando se somete a una carga de tracción axial de 1000 lb, suponiendo que obedece la ley de Hooke.

4-8 Una columna de acero W 10 \times 30 de 4 m de longitud se somete a una carga de compresión axial de 600 KN. Hallar el acortamiento total de la columna.

4-9 Un poste de madera de sección transversal rectangular (200 mm \times 250 mm) y 3 m de longitud se somete a una carga de compresión axial de 1.5 MN. Hallar el acortamiento total del poste. Emplear $E = 12$ GPa.

4-10 En el problema 2-3, hallar el cambio en la longitud del elemento BD de la estructura representada, si está hecho de una varilla de acero de 5 mm de diámetro.

4-11 Hallar el cambio en longitud del cable AB del problema 2-24, si tiene un diámetro de $\frac{3}{8}$ pul y un valor efectivo $E = 24 \times 10^6$ lb/pul².

4-12 Hallar el cambio en longitud de la biela AB del problema 2-22, si está hecha de una aleación de acero con $E = 20 \times 10^6$ lb/pul², tiene un área de la sección transversal de 1,2 pul² y está en equilibrio bajo la acción de la fuerza F y un par $C = 100$ lb-pie.

4-13 La placa de acero rectangular delgada que se muestra tiene un espesor $t = 8$ mm, una longitud $l = 600$ mm y un ancho $w = 400$ mm. Está sometida a los esfuerzos normales $\sigma_x = 100$ MPa y $\sigma_y = -150$ MPa, con $\sigma_z = 0$. Hallar los cambios en la longitud, el ancho y el espesor de la placa.

4-14 Supóngase que la barra de sección cuadrada de 10 mm \times 10 mm que se representa en la figura está restringida de tal modo que no se puede dilatar en las direcciones y y z , pero se puede contraer libremente en la dirección x . Hallar el acortamiento de la barra cuando se somete a un esfuerzo uniforme $\sigma_x = -200$ MPa. Supóngase que la barra es de una aleación de aluminio con $E = 72$ GPa y $\nu = 0,33$ y que está esforzada por debajo del límite de proporcionalidad.

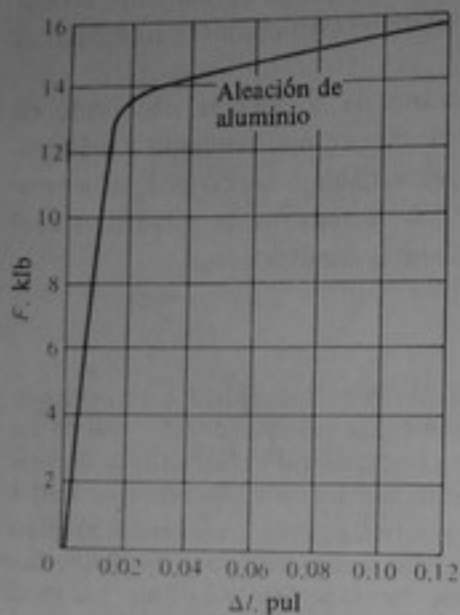


Figura P4-1

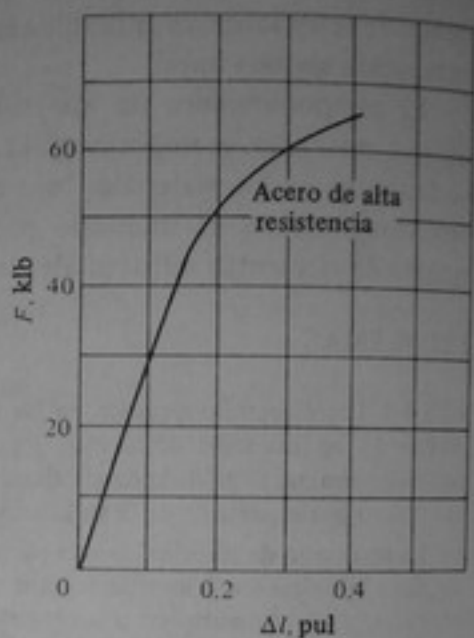


Figura P4-2

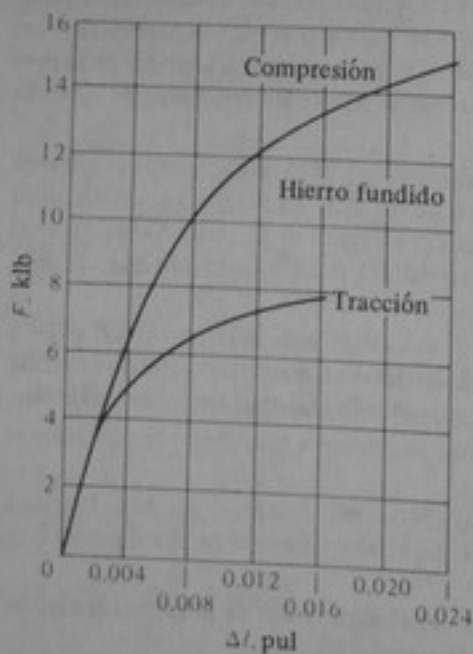


Figura P4-3

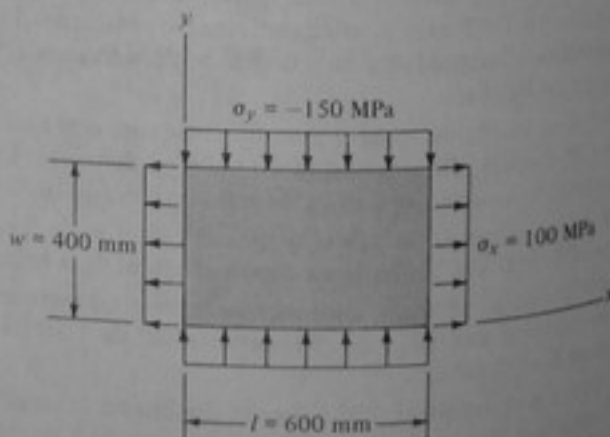


Figura P4-13

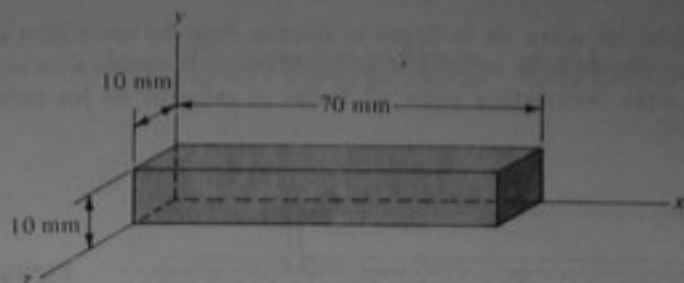


Figura P4-14

4-15 Supóngase que la placa del problema 4-13 está restringida de tal modo que no se puede dilatar libremente en la dirección y , pero sí se puede dilatar libremente en las direcciones x y z , y que en lugar de los esfuerzos σ_x y σ_y , soporta un esfuerzo $\sigma_z = -120$ MPa. Calcular los cambios en longitud y espesor y el esfuerzo σ_y debido al σ_z aplicado.

4-16 Supóngase que la placa cuadrada delgada que se muestra obedece la ley de Hooke, está sometida a los esfuerzos aplicados $\sigma_x = 200$ MPa y $\sigma_y = 100$ MPa y estos esfuerzos producen las deformaciones unitarias $\epsilon_x = 0.00242$ m/m y $\epsilon_y = 0.00049$ m/m. ¿Cuál es el módulo de elasticidad y la relación de Poisson para el material de la placa? Si se aplicara un esfuerzo cortante $\tau_{xy} = 80$ MPa a la placa, ¿cuál sería la deformación de corte γ_{xy} producida?

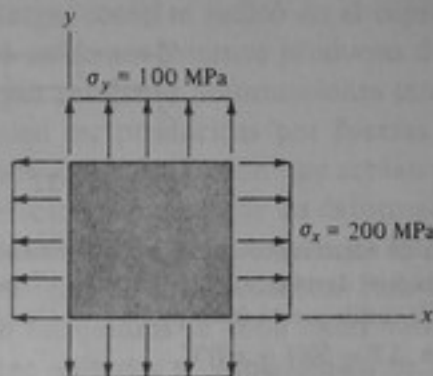


Figura P4-16

4-17 Supóngase una placa como la del problema 4-16, pero de diferente material, sometida a un esfuerzo normal desconocido, σ_x , que produce las deformaciones unitarias $\epsilon_x = 0.00450$ m/m y $\epsilon_y = -0.00144$ m/m, y al esfuerzo cortante $\tau_{xy} = 200$ MPa, que produce una deformación de corte $\gamma_{xy} = 0.00733$ rad. Hallar ν , G , ϵ_z , y el valor de σ_x para esta placa.

4-18 Si la placa del problema 4-17 se somete a los esfuerzos $\sigma_x = 150$ MPa y $\tau_{xy} = 90$ MPa, que producen las deformaciones $\epsilon_x = 0.725 \times 10^{-3}$ m/m y $\gamma_{xy} = 1.10 \times 10^{-3}$ rad, hallar E , G , ϵ_y , y ϵ_z para la placa.

4-19 Hallar el esfuerzo en la varilla de acero que se muestra cuando sufre un cambio de temperatura $\Delta T = 100^\circ\text{F}$, bajo las siguientes condiciones:

- La dilatación de la varilla se impide totalmente.
- La dilatación está parcialmente impedida de tal modo que la varilla se dilata una cantidad $\Delta l = 0.01$ pul.

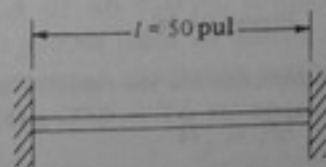


Figura P4-19

4-20 Supóngase que los rieles de acero de la figura se tienden dejando entre ellos espacios de $\delta = 6$ mm. Supóngase además que los rieles se pueden dilatar libremente debido a un cambio de temperatura, excepto cuando están restringidos entre sí. Hallar el esfuerzo en los rieles cuando (a) $\Delta T = 25^\circ\text{C}$ y (b) $\Delta T = 50^\circ\text{C}$.

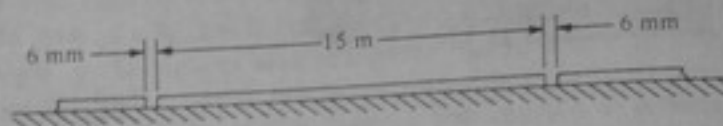


Figura P4-20

4-21 Se suspende una masa de 90 kg de un soporte inmóvil A mediante un alambre de aluminio de 4 mm de diámetro, quedando un espacio $\delta = 2\text{ mm}$ entre la masa y la base inmóvil B . Hallar el esfuerzo en el alambre si (a) $\Delta T = 25^\circ\text{C}$ y (b) $\Delta T = 50^\circ\text{C}$. Utilizar $E = 70\text{ GPa}$ y $\alpha = 24 \times 10^{-6}\text{ m/m}^\circ\text{C}$.

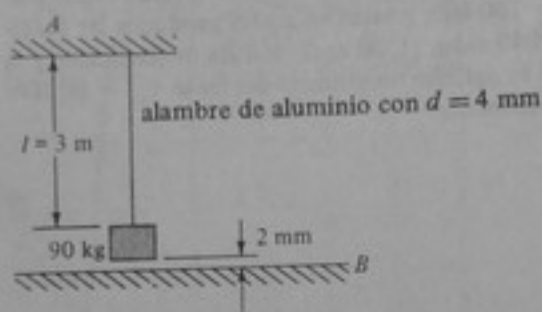


Figura P4-21



Figura P4-22

4-22 Los dos extremos de la varilla de acero representada en la figura están impedidos para moverse. Hallar el esfuerzo σ_x en la varilla y el desplazamiento u en $x = l/2$ producido por un cambio de temperatura que varía a lo largo de la varilla y está dado por $\Delta T = (50x/l)^\circ\text{C}$.

4-23 Resolver el problema 4-22 con $\Delta T = 50(1 - x/l)^\circ\text{C}$.

4-24 Resolver el problema 4-22 con $\Delta T = [-100(x/l)^2]^\circ\text{F}$.

4-25 Hallar los esfuerzos σ_x y σ_y en la placa cuadrada de titanio cuando sufre un cambio de temperatura $\Delta T = 200^\circ\text{F}$ si:

(a) La placa está completamente impedida para dilatarse.

(b) La placa está parcialmente impedida para dilatarse, de tal modo que $\epsilon_x = 5 \times 10^{-4}$ pul/pul y $\epsilon_y = 3 \times 10^{-4}$ pul/pul.

Emplear $E = 15 \times 10^6\text{ lb/pul}^2$, $\alpha = 5.3 \times 10^{-6}\text{ pul/pul}^\circ\text{F}$ y $\nu = 0.34$.

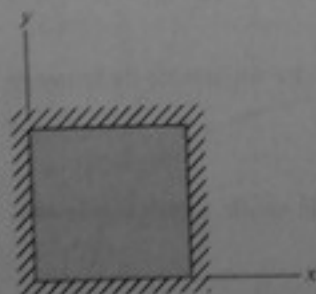


Figura P4-25

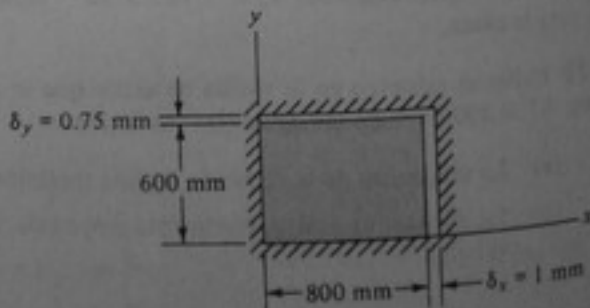


Figura P4-26

4-26 La placa de aluminio de la figura tiene inicialmente los espacios indicados hasta los soportes inmóviles. Hallar los esfuerzos en la placa cuando (a) $\Delta T = 40^\circ\text{C}$ y (b) $\Delta T = 80^\circ\text{C}$. Usar $E = 70\text{ GPa}$, $\alpha = 24 \times 10^{-6}\text{ pul/pul}^\circ\text{C}$ y $\nu = 0.33$.

4-27 Suponiendo que $\sigma_x = 0$ para la barra restringida del problema 4-14, hallar el cambio en la longitud de la barra debido a un cambio de temperatura $\Delta T = 30^\circ\text{C}$.

Capítulo 5

Conceptos sobre la energía

5-1 INTRODUCCION

Los principios de la energía son importantes para hallar directamente las fuerzas y desplazamientos desconocidos en elementos y para desarrollar algunos de los conceptos básicos necesarios en el análisis de sistemas estructurales. Cuando un sistema estructural está sometido a carga, como se indicó en el capítulo 2, se desarrollan acciones y esfuerzos internos. Los esfuerzos internos producen deformaciones unitarias internas (capítulo 4) que dan por resultado deformaciones internas (capítulo 3). Estas deformaciones internas pueden ser producidas por fuerzas axiales, fuerzas cortantes, momentos de flexión y momentos de torsión que actúan separadamente o en una combinación cualquiera. El efecto acumulado de las deformaciones internas en los elementos estructurales produce las deformaciones totales de éstos, las cuales a su vez ocasionan desplazamientos superficiales de los elementos. Para determinar las deformaciones y los desplazamientos de estructuras se debe hacer uso de las relaciones básicas entre esfuerzos, deformaciones unitarias y desplazamientos. Sin embargo, con frecuencia se pueden obtener resultados parecidos en forma más sencilla utilizando los principios de la energía. Además, los conceptos sobre la energía se pueden emplear con el fin de establecer ecuaciones adicionales para hallar las fuerzas y desplazamientos desconocidos si el número de ecuaciones de equilibrio estático disponibles no es adecuado, es decir, para el análisis de estructuras estáticamente indeterminadas.

En este capítulo solamente se desarrollan los conceptos más básicos sobre la energía y se aplican a problemas sencillos. El material introductorio de este capítulo constituye la base para el estudio de los métodos de análisis específicos basados en la energía, que se presentan en los siguientes capítulos.

5-2 TRABAJO, ENERGIA DE DEFORMACION Y DENSIDAD DE ENERGIA DE DEFORMACION

La *energía* se define como la capacidad para realizar trabajo. Si una fuerza de magnitud P actúa en un punto A de un cuerpo, como se indica en la fig. 5-1a, y la fuerza se mueve a lo largo de su propia línea de acción una distancia δ desde A hasta A' , mientras su magnitud P permanece constante, entonces el trabajo realizado por P es igual a

$$W_p = P\delta \quad (5-1)$$

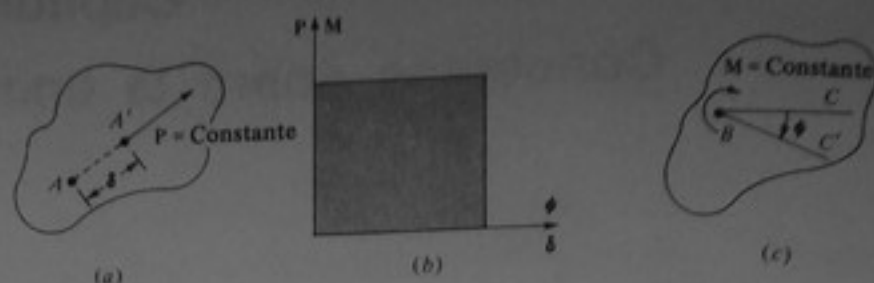


Figura 5-1 Trabajo realizado por una fuerza (o momento) que actúa a lo largo de un desplazamiento δ (o ϕ).

El trabajo está representado por el área rectangular bajo la curva $P-\delta$ en la fig. 5-1b.

De manera semejante, consideremos ahora un momento de magnitud M que actúa en un punto B del cuerpo que se representa en la fig. 5-1c. Si el cuerpo gira un ángulo ϕ en el sentido rotacional de M con respecto a un eje perpendicular al plano BCC' en el cual actúa M , mientras la magnitud de M permanezca constante, entonces el trabajo realizado por M es igual a

$$W_m = M\phi \quad (5-2)$$

El trabajo realizado se representa por el área rectangular bajo la curva $M-\phi$ en la fig. 5-1b. El trabajo y la energía se miden en unidades de fuerza multiplicadas por unidades de longitud. Las unidades de energía empleadas usualmente en el sistema inglés son la libra-pie, la libra-pulgada, la kilolibra-pulgada, etc. La unidad básica de energía en el sistema internacional es el joule (J), que es igual a un newton-metro (N.m). A menudo se utiliza el kilojoule (kJ), que es igual a un kilonewton-metro (kN.m).

Una aplicación más común es la situación en la cual un cuerpo está inicialmente descargado y una carga P aplicada en forma gradual produce un desplazamiento total Δ del punto de aplicación en la dirección de P . Si se supone comportamiento elástico lineal, entonces,

$$P = k\Delta \quad (5-3)$$

en donde k es una constante de proporcionalidad. El trabajo externo realizado por la fuerza externa, P , aplicada gradualmente, es igual a

$$W_e = \int_0^{\Delta} dW = \int_0^{\Delta} P d\Delta = \int_0^{\Delta} k\Delta d\Delta = \frac{1}{2}k\Delta^2 = \frac{1}{2}P\Delta \quad (5-4)$$

Para ver que esto es así, obsérvese que la fuerza inicial es cero y aumenta linealmente desde cero hasta su valor completo (fig. 5-2b). La fuerza promedio que actúa mientras tiene lugar el desplazamiento es $P/2$. Este valor promedio, multiplicado por la distancia Δ a lo largo de la cual actúa, representa el trabajo efectuado.

De forma parecida, si se aplica un momento M a un cuerpo elástico lineal, produciendo una rotación final Φ en el plano en el cual el momento está actuando sobre el punto de aplicación (fig. 5-2c), el trabajo externo realizado es igual a

$$W_e = \frac{1}{2}M\Phi \quad (5-5)$$

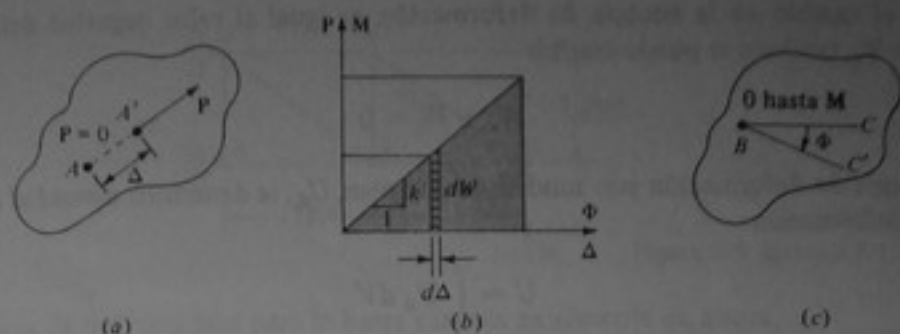


Figura 5-2 Trabajo realizado por una fuerza P que produce un desplazamiento Δ (o por un momento M que produce una rotación Φ), suponiendo comportamiento elástico lineal.

Vale la pena observar que el trabajo efectuado se representa por el área bajo la curva $P-\Delta$ o $M-\Phi$, como se muestra en la fig. 5-2b. Si se aplican gradualmente varias fuerzas y momentos a un cuerpo, el trabajo total realizado por estas fuerzas externas (P_1, P_2, \dots, P_n) y momentos externos (M_1, M_2, \dots, M_m), que actúan a lo largo de sus correspondientes desplazamientos ($\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$) y ($\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_m$), es igual a

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} P_i \Delta_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=m} M_i \Phi_i \quad (5-6)$$

Si se aplican acciones externas a un cuerpo deformable se producen fuerzas y deformaciones internas. De este modo, las acciones externas también producen un trabajo interno W_i que se puede expresar así

$$W_i = \frac{1}{2} \sum P_j \Delta_j \quad (5-7)$$

en donde las P_j son las fuerzas internas y las Δ_j son los desplazamientos en las direcciones de esas fuerzas en equilibrio, en los puntos j . El trabajo interno es un trabajo *negativo* (absorbido) debido a que los desplazamientos internos son opuestos a las fuerzas internas. El valor negativo del trabajo interno representa la energía almacenada en un cuerpo deformable como resultado de la aplicación de acciones externas y se define como su *energía de deformación*, U .

Cuando un sistema elástico, inicialmente sin esfuerzos, se carga con un conjunto de fuerzas externas, su comportamiento está gobernado por el *principio universal de la conservación de la energía*, el cual establece que la energía no puede ser creada ni destruida. Si no se agrega o se retira calor del sistema durante la carga, la primera ley de la termodinámica implica que el trabajo efectuado por las cargas aplicadas externamente se convierte por completo en energía asociada con el sistema. En un sistema elástico, el cambio de energía debido a la carga externa consta de cambios en la energía cinética y en la energía de deformación. Si el sistema se carga en forma gradual, la energía cinética se puede despreciar y

$$W_e = U \quad (5-8)$$

Como el cambio en la energía de deformación es igual al valor negativo del trabajo interno W_i , también se puede escribir

$$W_e + W_i = 0 \quad (5-9)$$

La energía de deformación por unidad de volumen, U_d , se denomina *densidad de energía de deformación*:

$$U = \int_V U_d dV \quad (5-10)$$

5-3 TIPOS DE ENERGIA DE DEFORMACION

Si se carga una barra en forma gradual con una carga P que actúa a lo largo del eje centroidal de la barra, como se indica en la fig. 5-3a, su densidad de energía de deformación se puede hallar igualando el trabajo realizado sobre un elemento de volumen unitario a su cambio en energía de deformación. Cuando la carga ha llegado a un cierto valor P que corresponde a un nivel de esfuerzo σ , la fuerza que actúa sobre un elemento de volumen unitario es igual a σ mientras que su alargamiento en la dirección x es

$$\epsilon dx = \epsilon \quad (5-11)$$

El trabajo efectuado por la fuerza externa P se iguala ahora al valor promedio de la fuerza que actúa sobre el elemento de volumen unitario, multiplicado por la distancia a lo largo de la cual actúa. Para comportamiento elástico lineal esta fuerza promedio es igual a $\sigma/2$ y el trabajo externo dW_e es

$$dW_e = \frac{1}{2}\sigma\epsilon \quad (5-12)$$

Por definición, el trabajo externo dW_e es igual a la densidad de energía de deformación de la barra. Por consiguiente,

$$U_d = \frac{1}{2}\sigma\epsilon \quad (5-13)$$

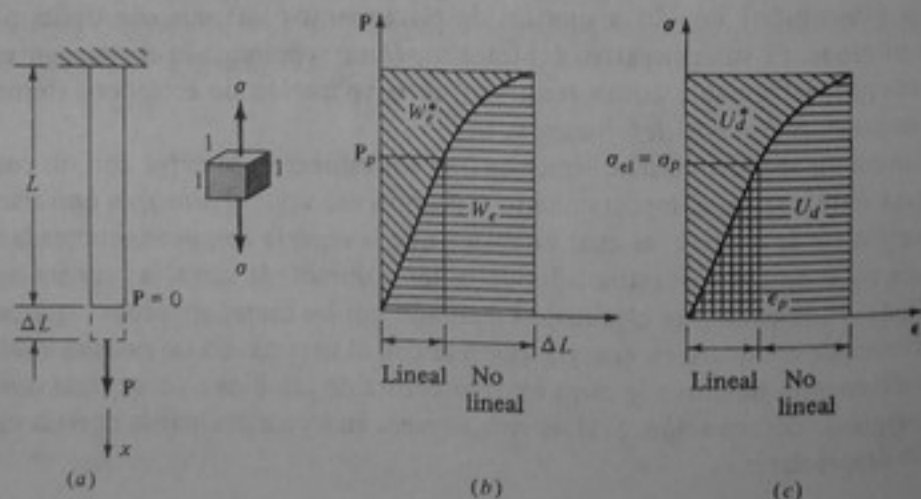


Figura 5-3 (a) Barra cargada axialmente. (b) Curva carga-desplazamiento. (c) Curva esfuerzo-deformación unitaria.

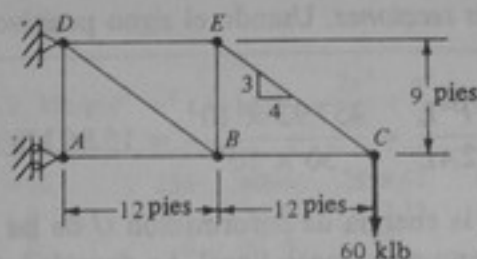


Figura 5-4 Ejemplo 5-1.

La energía de deformación para la barra cargada axialmente es, ahora,

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma \epsilon \, dV = \frac{1}{2} \int_0^L \sigma \epsilon A \, dL = \frac{1}{2} \sigma \epsilon AL \quad (5-14)$$

Si se hace

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad \text{y} \quad \epsilon = \frac{\Delta L}{L} \quad (5-15)$$

se obtiene

$$U = \frac{1}{2} \frac{P}{A} \frac{\Delta L}{L} AL = \frac{1}{2} P \Delta L = W_e \quad (5-16)$$

Asimismo, haciendo $\epsilon = \sigma/E = P/AE$ se obtiene

$$U = \int_0^L \frac{P^2 \, dL}{2AE} = \frac{P^2 L}{2AE} \quad (5-17)$$

Ejemplo 5-1 Para la armadura que se representa en la fig. 5-4, determinar la energía total de deformación. Todas las áreas de las secciones transversales son de 10 pul^2 y $E = 30 \times 10^3 \text{ klb/pul}^2$.

SOLUCION En la tabla 5-1 se calcula la energía de deformación en forma tabular. Las fuerzas en las barras, P , se dan en la segunda columna y se pueden calcular mediante cualquiera de los métodos corrientes de análisis, tales como el método de los

Tabla 5-1

Barra	P , klb	L , pul	$\frac{P^2 L}{2A} \times 10^{-3}$
AB	-160	144	184.32
BC	-80	144	46.08
AD	0	108	0
DB	+100	180	90.00
EB	-60	108	19.44
EC	+100	180	90.00
DE	+80	144	46.08

$$\sum \frac{P^2 L}{2A} = 475.92 \times 10^3$$

udos o el método de las secciones. Usando el signo positivo para las fuerzas de tensión se obtiene

$$U = \sum \frac{P^2 L}{2AE} = \frac{457.92 \times 10^3}{30 \times 10^3} = 15.86 \text{ klb} \cdot \text{pul} \quad \text{Resp.}$$

Las expresiones para la energía de deformación U de las ecuaciones (5-12) a (5-17) son válidas para comportamiento lineal. La densidad de energía de deformación en un nivel cualquiera de esfuerzo es el área bajo la porción lineal de la curva esfuerzo-deformación unitaria por debajo de ese nivel de esfuerzo. En el caso de comportamiento no lineal, la densidad de energía de deformación en un nivel de esfuerzo superior al límite de proporcionalidad (es decir, $\sigma > \sigma_p$) también es el área bajo la curva esfuerzo-deformación unitaria por debajo de ese nivel del esfuerzo (fig. 5-3c). La densidad de energía de deformación representada por el área total bajo la curva completa esfuerzo-deformación unitaria se relaciona con la densidad total de energía de deformación y

$$U_d = \int_0^{\epsilon} \sigma d\epsilon \quad (5-18)$$

Ejemplo 5-2 Repetir el ejemplo 5-1 para el caso de una relación no lineal esfuerzo-deformación unitaria, $\epsilon = (\sigma^2 + \sigma)10^6$, en donde σ está en kilolibras por pulgada cuadrada.

SOLUCION La densidad de energía de deformación para cualquier barra individual es [ecuación (5-18)]

$$U_d = \int_0^{\epsilon} \sigma d\epsilon$$

De la relación esfuerzo-deformación unitaria se sigue que

$$d\epsilon = 10^{-6}(2\sigma + 1) d\sigma$$

$$\text{y} \quad U_d = 10^{-6} \int_0^{\sigma} (2\sigma^2 + \sigma) d\sigma = 10^{-6} \left(\frac{2\sigma^3}{3} + \frac{\sigma^2}{2} \right)$$

$$\text{y} \quad U = 10^{-6} \left(\frac{2\sigma^3}{3} + \frac{\sigma^2}{2} \right) AL$$

El cálculo se lleva a cabo en la tabla 5-2. La energía de deformación total es ahora igual a

$$U = 794.76 \times 10^4 \times 10^{-6} = 7.95 \text{ klb} \cdot \text{pul} \quad \text{Resp.}$$

Si la energía de deformación que se almacena en un cuerpo deformable es recuperable, se denomina *energía de deformación elástica*. La energía de deformación elástica máxima se llama *módulo de resiliencia*, R (fig. 5-3c). Para comportamiento elástico lineal, el límite de proporcionalidad σ_p es igual al límite elástico σ_{e1} . Para la barra cargada uniaxialmente de la fig. 5-3a,

$$R = \int_0^{\sigma_p} \sigma_{e1} d\epsilon = \int_0^{\sigma_{e1}} \frac{\sigma}{E} d\sigma = \frac{\sigma_{e1}^2}{2E} \quad (5-19)$$

Tabla 5-2

Barra	P, klb	σ , klb/pul ²	σ^2	$ \sigma ^3$	$\frac{2\sigma^3}{3} + \frac{\sigma^2}{2}$	AL	$U \times 10^6$
AB	-160	-16	256	4096	2858.67	1440	411.65×10^6
BC	-80	-8	64	512	373.33	1440	53.76×10^6
AD	0	0	0	0	0		
DB	+100	+10	100	1000	716.67	1800	129.00×10^6
EB	-60	-6	36	216	162.00	1080	17.50×10^6
EC	+100	+10	100	1000	716.67	1800	129.00×10^6
DE	+80	+8	64	512	373.33	1440	53.76×10^6
$\sum U \times 10^6 = +794.67 \times 10^6$							

El área sobre la curva carga-deformación de la fig. 5-3b representa el *trabajo complementario*, W_e^* y, análogamente, el área sobre la curva esfuerzo-deformación unitaria de la fig. 5-3c representa la *densidad complementaria de energía de deformación*, U_d^* . Para comportamiento elástico lineal

$$W_e = W_e^* \quad (5-20a)$$

$$y \quad U_d = U_d^* \quad (5-20b)$$

Según el tipo de carga, fuera de la energía de deformación axial, una estructura puede tener energía de deformación de flexión, de corte o de torsión. Estos tipos de energía de deformación se estudian en los capítulos que tratan sobre cargas diferentes a la carga axial.

Para el estado de esfuerzo tridimensional más general, si se supone comportamiento elástico lineal, entonces

$$U_d = \frac{1}{2}\sigma_x \epsilon_x + \frac{1}{2}\sigma_y \epsilon_y + \frac{1}{2}\sigma_z \epsilon_z + \frac{1}{2}\tau_{xy} \gamma_{xy} + \frac{1}{2}\tau_{yz} \gamma_{yz} + \frac{1}{2}\tau_{zx} \gamma_{zx} \quad (5-21)$$

o, usando la ley generalizada de Hooke [ecuaciones (4-5)] se tiene

$$U_d = \frac{1}{2E}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\nu}{E}(\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x) + \frac{1}{2G}(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \quad (5-22)$$

Ejemplo 5-3 Para el bloque cargado que se muestra en la fig. 5-5, determinar la densidad de energía de deformación y la energía de deformación si $E = 200 \times 10^3$ MPa y $\nu = 0.30$.

SOLUCION Primero se calculan los esfuerzos:

$$\sigma_x = \frac{-100}{0.08 \times 0.10} = -12,500 \text{ kPa}$$

$$\sigma_y = \frac{60}{0.05 \times 0.08} = 15,000 \text{ kPa}$$

$$\sigma_z = 0$$

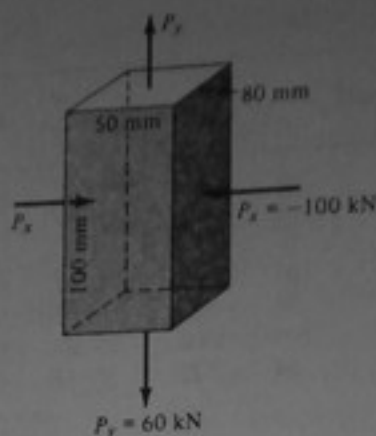


Figura 5-5 Ejemplo 5-3.

De acuerdo con la ecuación (5-22),

$$\begin{aligned}
 U_d &= \frac{1}{2 \times 200 \times 10^6} [(-12,500)^2 + (15,000)^2] - \frac{0.3}{200 \times 10^6} (-12,500 \times 15,000) \\
 &= 1.2344 \text{ kJ/m}^3
 \end{aligned}$$

Resp.

La energía de deformación es

$$U_d \times \text{volumen} = 1.2344 \times 0.05 \times 0.08 \times 0.10 = 0.494 \times 10^{-3} \text{ kJ} = 0.494 \text{ J}$$

Resp.

5-4 TEOREMAS DE CASTIGLIANO

Considérese la barra cargada uniaxialmente que se representó en la fig. 5-3a. Al incrementar la carga P en un valor δP , se produce un incremento del alargamiento $\delta \Delta$. Por consiguiente, también hay los correspondientes incrementos en el trabajo externo, δW_e y δW_e^* , como se indica en la fig. 5-6. Se puede ver que

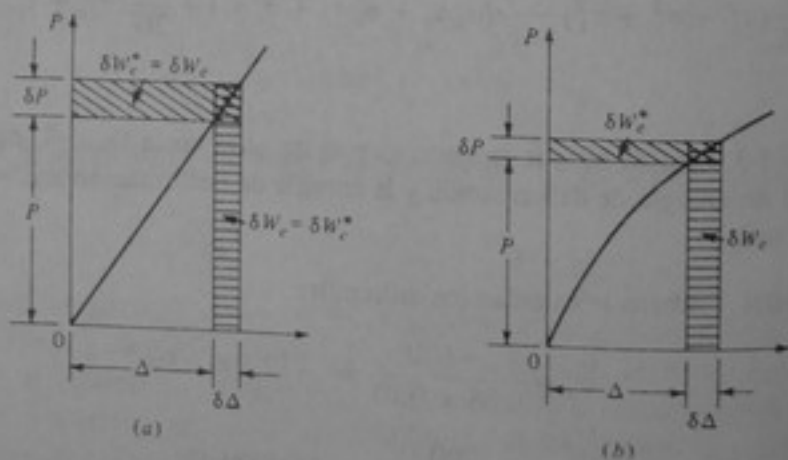


Figura 5-6 Curvas carga-alargamiento. (a) Comportamiento elástico lineal. (b) Comportamiento elástico no lineal.

$$\delta W_e = P \delta \Delta \quad (5-23a)$$

$$\delta W_e^* = \Delta \delta P \quad (5-23b)$$

Como $W_e = U$ y $W_e^* = U^*$, estas ecuaciones se pueden expresar en la forma

$$P = \frac{\delta W_e}{\delta \Delta} = \frac{\delta U}{\delta \Delta} \quad (5-24a)$$

$$\Delta = \frac{\delta W_e^*}{\delta P} = \frac{\delta U^*}{\delta P} \quad (5-24b)$$

En el caso general de un cuerpo elástico sometido a un conjunto de fuerzas externas ($P_1, P_2, \dots, P_k, \dots, P_n$) y/o momentos externos ($M_1, M_2, \dots, M_k, \dots, M_m$), la ecuación (5-24a) se convierte en†

$$P_k = \frac{\partial W_e}{\partial \Delta_k} = \frac{\partial U}{\partial \Delta_k}$$

$$\text{y} \quad M_k = \frac{\partial W_e}{\partial \Phi_k} = \frac{\partial U}{\partial \Phi_k} \quad (5-25)$$

Este es el *primer teorema de Castigliano*, el cual establece que "en un sistema elástico, la derivada parcial de la energía de deformación U con respecto a cualquier desplazamiento seleccionado, Δ_k o Φ_k , es igual a la fuerza P_k o al momento M_k asociado con este desplazamiento". El primer teorema de Castigliano se aplica tanto a materiales elásticos lineales como a los elásticos no lineales. De forma semejante, la ecuación (5-24b) conduce a

$$\Delta_k = \frac{\partial W_e^*}{\partial P_k} = \frac{\partial U^*}{\partial P_k}$$

$$\text{y} \quad \Phi_k = \frac{\partial W_e^*}{\partial M_k} = \frac{\partial U^*}{\partial M_k} \quad (5-26)$$

Este es el *segundo teorema de Castigliano*, el cual establece que "la derivada parcial de la energía complementaria de deformación, U^* , de un sistema elástico con respecto a cualquier fuerza P_k o momento M_k seleccionado es igual al desplazamiento Δ_k o Φ_k asociado con esa fuerza o ese momento." Para sistemas elásticos lineales la ecuación (5-26) se convierte en

$$\Delta_k = \frac{\partial W_e}{\partial P_k} = \frac{\partial U}{\partial P_k}$$

$$\text{y} \quad \Phi_k = \frac{\partial W_e}{\partial M_k} = \frac{\partial U}{\partial M_k} \quad (5-27)$$

† Si $U(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_k, \dots, \Delta_n)$ y el cuerpo sufre cambios infinitesimales en sus desplazamientos, $\delta \Delta_1, \delta \Delta_2, \dots, \delta \Delta_k, \dots, \delta \Delta_n$, entonces $\delta U = (\partial U / \partial \Delta_1) \delta \Delta_1 + (\partial U / \partial \Delta_2) \delta \Delta_2 + \dots + (\partial U / \partial \Delta_k) \delta \Delta_k + \dots + (\partial U / \partial \Delta_n) \delta \Delta_n = \delta U_1 + \delta U_2 + \dots + \delta U_k + \dots + \delta U_n$. Además ahora $\delta U_k = P_k \delta \Delta_k = (\partial U / \partial \Delta_k) \delta \Delta_k$, de donde $P_k = \partial U / \partial \Delta_k$.

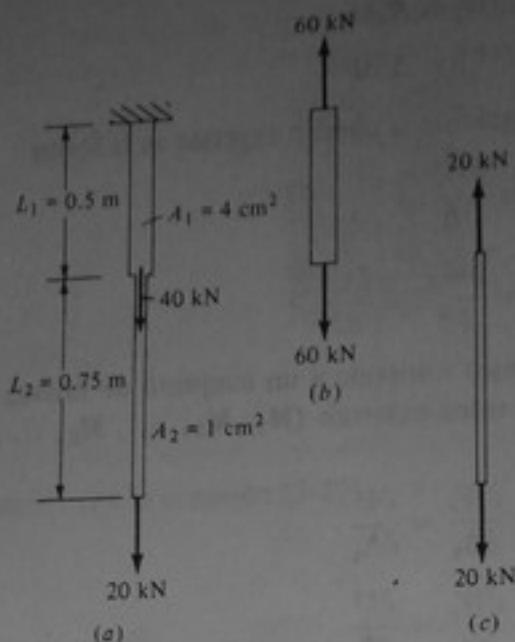


Figura 5-7 Ejemplos 5-5 y 5-7.

Ejemplo 5-4 Como un ejemplo del segundo teorema de Castigliano, considérese la barra que se muestra en la fig. 5-3a.

SOLUCION Para determinar el alargamiento total de la barra, que es el mismo desplazamiento del punto de aplicación de la carga P , supóngase un comportamiento elástico lineal. De acuerdo con la ecuación (5-17), la energía de deformación es

$$U = \frac{1}{2} \frac{P^2 L}{AE}$$

y

$$\Delta L = \frac{dU}{dP} = \frac{PL}{AE} \quad \text{Resp.}$$

Ejemplo 5-5 Como primer ejemplo de la aplicación del primer teorema de Castigliano, determinar el alargamiento total de la barra representada en la fig. 5-7a, si $E = 70 \times 10^3$ MPa.

SOLUCION La energía de deformación de una barra de sección transversal uniforme A y longitud L se puede expresar en función de su alargamiento Δ como

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma \epsilon dV = \frac{1}{2} \int_0^L \sigma \epsilon A dx$$

Haciendo $\sigma = \epsilon E$ y $\epsilon = \Delta/L$ se obtiene

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{\Delta^2 E}{L^2} A dx = \frac{EA}{2L} \Delta^2 \quad (1)$$

Para la barra de la ilustración, primero se considera un diagrama de cuerpo libre de la porción superior (fig. 5-7b). La carga axial es 60 kN y de acuerdo con el primer teorema de Castigliano,

$$\frac{dU}{d\Delta_1} = 60,000 \text{ N}$$

De la ecuación (1) se sigue que

$$\frac{dU}{d\Delta_1} = \frac{d}{d\Delta_1} \left(\frac{EA_1 \Delta_1^2}{2L_1} \right) = \frac{EA_1 \Delta_1}{L_1} = \frac{70 \times 10^9 \times 4 \times 10^{-4} \Delta_1}{0.50} = 60,000$$

de donde $\Delta_1 = 0.00107 \text{ m} = 1.07 \text{ mm}$. Análogamente, del diagrama de cuerpo libre de la porción inferior (fig. 5-7c),

$$20,000 = \frac{70 \times 10^9 \times 1 \times 10^{-4} \Delta_2}{0.75}$$

de donde $\Delta_2 = 0.00214 \text{ m} = 2.14 \text{ mm}$. El alargamiento total es

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 = 1.07 + 2.14 = 3.21 \text{ mm} \quad \text{Resp.}$$

Ejemplo 5-6 Como un segundo ejemplo del primer teorema de Castigliano, considérese la armadura de dos barras que se muestra en la fig. 5-8. Determinar los desplazamientos horizontal y vertical (h y v) del punto C .

SOLUCION De acuerdo con la ecuación (1) del ejemplo 5-5,

$$U = \frac{EA_1}{2L_1} \Delta_1^2 + \frac{EA_2}{2L_2} \Delta_2^2$$

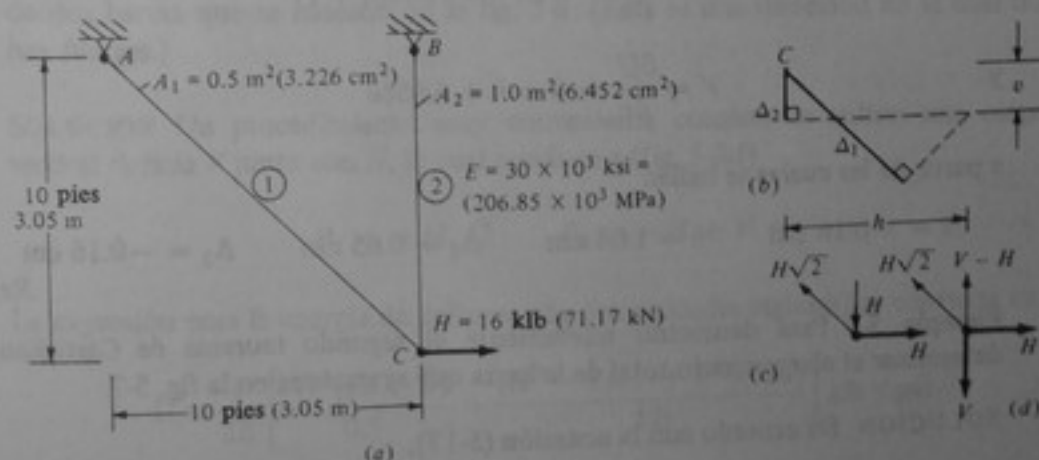


Figura 5-8 Armadura de dos barras para los ejemplos 5-6, 5-8 y 5-9.

Con base en la fig. 5-8b se puede observar que

$$\Delta_1 = \frac{h+v}{\sqrt{2}} \quad \text{y} \quad \Delta_2 = v$$

Entonces, en *unidades inglesas*,

$$U = \frac{E}{2} \left[\frac{0.5(h+v)^2}{2(120\sqrt{2})} + \frac{1.0v^2}{120} \right] \text{klb} \cdot \text{pul}$$

$$= 44.2(0.5h^2 + hv + 3.328v^2)$$

Ahora, de acuerdo con la ecuación (5-25),

$$H = \frac{\partial U}{\partial h} = 16 = 44.2(h+v)$$

y

$$V = \frac{\partial U}{\partial v} = 0 = h + 6.656v$$

a partir de las cuales se hallan

$$v = -0.064 \text{ pul} \quad h = 0.426 \text{ pul} \quad \Delta_1 = 0.256 \text{ pul} \quad \Delta_2 = -0.064 \text{ pul}$$

Resp.

En *unidades internacionales*,

$$U = \frac{E}{2} \left[\frac{3.226 \times 10^{-4}(h+v)^2}{2(3.05\sqrt{2})} + \frac{6.452 \times 10^{-4}v^2}{3.05} \right] \text{kJ}$$

$$= 7804(0.5h^2 + hv + 3.328v^2)$$

Ahora, de acuerdo con la ecuación (5-25),

$$H = \frac{\partial U}{\partial h} = 71.17 = 7804(h+v)$$

y

$$V = \frac{\partial U}{\partial v} = 0 = h + 6.656v$$

a partir de las cuales se hallan

$$v = -0.16 \text{ cm} \quad h = 1.08 \text{ cm} \quad \Delta_1 = 0.65 \text{ cm} \quad \Delta_2 = -0.16 \text{ cm}$$

Resp.

Ejemplo 5-7 Para demostrar nuevamente el segundo teorema de Castigliano, determinar el alargamiento total de la barra que se muestra en la fig. 5-7.

SOLUCION De acuerdo con la ecuación (5-17),

$$U = \frac{P_1^2 L_1}{2A_1 E} + \frac{P_2^2 L_2}{2A_2 E}$$

Utilizando el resultado del ejemplo 5-4 se tiene

$$\begin{aligned}\Delta &= \frac{\partial U}{\partial P_1} + \frac{\partial U}{\partial P_2} = \frac{P_1 L_1}{A_1 E} + \frac{P_2 L_2}{A_2 E} \\ &= \frac{60,000(0.50)}{4 \times 10^{-4} \times 70 \times 10^9} + \frac{20,000(0.75)}{1 \times 10^{-4} \times 70 \times 10^9} \\ &= 0.00321 \text{ m} = 3.21 \text{ mm}\end{aligned}$$

Resp.

Ejemplo 5-8 Determinar el desplazamiento horizontal del punto *C* de la armadura de dos barras que se muestra en la fig. 5.8, utilizando el segundo teorema de Castigliano.

SOLUCION Se puede expresar *U* en función de las fuerzas en las barras. De acuerdo con la ecuación (5-17),

$$U = \frac{P_1^2 L}{2EA_1} + \frac{P_2^2 L_2}{2EA_2}$$

Según la estática (fig. 5-8c), $P_1 = +H\sqrt{2}$ y $P_2 = -H$. Por tanto (en unidades inglesas),

$$U = \frac{1}{2E} \left[\frac{2H^2(120\sqrt{2})}{0.5} + \frac{H^2(120)}{1.0} \right] = \frac{120(4\sqrt{2} + 1)}{2E} H^2 = 0.0133H^2$$

De acuerdo con la ecuación (5-27),

$$h = \frac{\partial U}{\partial H} = 0.0266H = 0.426 \text{ pul (1.08 cm)} \quad \text{Resp.}$$

Ejemplo 5-9 Determinar el desplazamiento vertical *v* del punto *C* de la armadura de dos barras que se muestra en la fig. 5-8. (Esta es una dirección en la cual no hay fuerzas.)

SOLUCION Un procedimiento muy conveniente consiste en aplicar una carga vertical *ficticia* *V* junto con *H*, lo cual conduce a (fig. 5-8d)

$$P_1 = +H\sqrt{2} \quad P_2 = -H + V$$

La expresión para la energía de deformación (en unidades inglesas) se convierte en

$$\begin{aligned}U &= \frac{1}{2E} \left[\frac{2H^2(120\sqrt{2})}{0.5} + \frac{(H^2 - 2HV + V^2)(120)}{1.0} \right] \text{klb} \cdot \text{pul} \\ &= \frac{120}{2E} [(4\sqrt{2} + 1)H^2 - 2HV + V^2]\end{aligned}$$

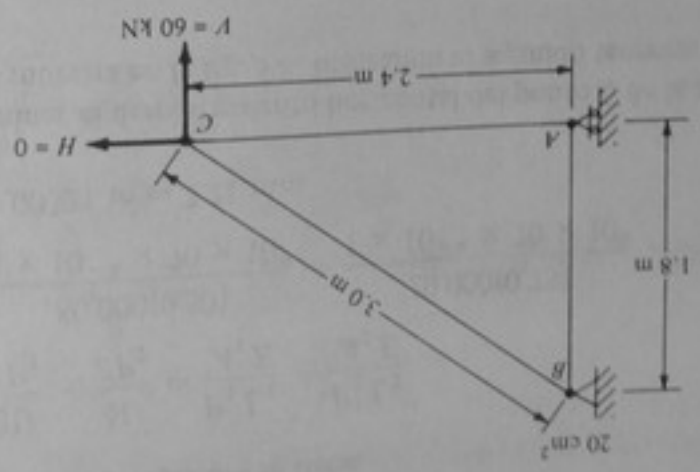


Figura 5-9 Ejemplo 5-10.

$$\frac{\partial U}{\partial H} = \frac{120}{2E} [2(4\sqrt{2} + 1)H - 2V] = h$$

$$\frac{\partial U}{\partial V} = \frac{120}{2E} (-2H + 2V) = v$$

En estas expresiones de h y de v , respectivamente, se sustituye H por su valor real de 16 klb y la carga ficticia V por un valor de cero. Así se obtiene

Resp. $h = 0.426 \text{ pul (1.08 cm)}$ $v = -0.064 \text{ pul (-0.16 cm)}$

Ejemplo 5-10 Para la armadura simple representada en la fig. 5-9, determinar los desplazamientos vertical y horizontal del punto C si $E = 20 \times 10^3 \text{ MPa}$ y todas las áreas transversales son de 20 cm^2 .

SOLUCION Primero se determinan las fuerzas debidas a V y a H en cada barra de la armadura y luego se calcula la energía de deformación para cada barra en la forma $U = \sum p^2 L / 2AE$. Esto se hace en la tabla 5-3.

$$U = \sum \frac{p^2 L}{2AE} = \frac{(12H^2 - 32HV + 6.3V^2) \times 10^3}{2E}$$

Barra	p , kN	L , m	$\frac{p^2 L}{2AE}$, kN/m $\times 10^{-3}$
AB	0	0.9×10^3	0
AC	$h - 4V/3$	1.2×10^3	$12H^2 - 32HV + 2.133V^2$
BC	$5V/3$	1.5×10^3	$4.167V^2$
Σ			$12H^2 - 32HV + 6.3V^2$

Tabla 5-3

$$\text{Ahora} \quad h = \frac{\partial U}{\partial H} = \frac{(2.4H - 3.2V) \times 10^3}{2E}$$

$$= \frac{[2.4(0) - 3.2(60)] \times 10^3}{40 \times 10^6} \text{ m}$$

$$= -0.0048 \text{ m (hacia la izquierda)}$$

Resp.

$$\text{Asimismo,} \quad v = \frac{\partial U}{\partial V} = \frac{(-3.2H + 12.6V) \times 10^3}{2E}$$

$$= \frac{[-3.2(0) + 12.6(60)] \times 10^3}{40 \times 10^6} \text{ m}$$

$$= 0.0189 \text{ m (hacia abajo)}$$

Resp.

5-5 TEOREMAS RECÍPROCOS

En un sistema elástico lineal, el desplazamiento Δ en la localización i debido a un conjunto de fuerzas externas se puede expresar como

$$\Delta_i = \delta_{i1} P_1 + \delta_{i2} P_2 + \cdots + \delta_{ij} P_j + \cdots + \delta_{in} P_n \quad (5-28)$$

en donde δ_{ik} representa el desplazamiento en i , en la dirección P_i , debido a un valor unitario de P_k . Análogamente,

$$\Delta_j = \delta_{j1} P_1 + \delta_{j2} P_2 + \cdots + \delta_{ji} P_i + \cdots + \delta_{jn} P_n \quad (5-29)$$

Si la energía de deformación del sistema es U , de acuerdo con el segundo teorema de Castigliano se puede escribir

$$\Delta_i = \frac{\partial U}{\partial P_i} \quad \text{y} \quad \Delta_j = \frac{\partial U}{\partial P_j} \quad (5-30)$$

Considerando las derivadas parciales de Δ_i y Δ_j con respecto a P_j y P_i , respectivamente, se obtiene

$$\frac{\partial \Delta_i}{\partial P_j} = \delta_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial P_i \partial P_j} \quad (5-31a)$$

$$\frac{\partial \Delta_j}{\partial P_i} = \delta_{ji} = \frac{\partial^2 U}{\partial P_i \partial P_j} \quad (5-31b)$$

Comparando las ecuaciones (5-31a) y (5-31b) se puede observar que

$$\delta_{ij} = \delta_{ji} \quad (5-32)$$

que es la *ley de Maxwell de los desplazamientos recíprocos*. Este resultado se puede enunciar en la siguiente forma: "el desplazamiento δ_{ij} en un punto cualquiera i debido a una fuerza unitaria aplicada en otro punto j es igual al desplazamiento δ_{ji} del punto j en la dirección de P_j debido a una fuerza unitaria aplicada en el punto i ".

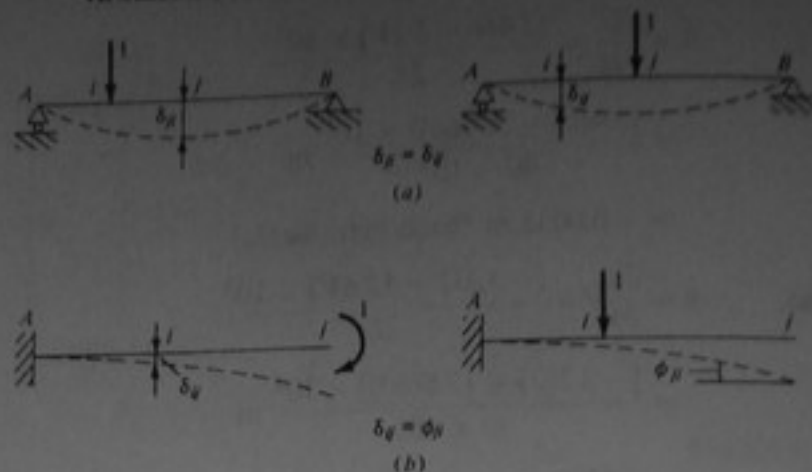


Figura 5-10 Teorema recíproco. (a) Viga simplemente apoyada con dos fuerzas. (b) Viga en voladizo con una fuerza y un momento.

Para demostrar este principio, considérense las vigas representadas en la fig. 5-10. El enunciado aparentemente incorrecto de la fig. 5-10b, en el sentido de que un desplazamiento es igual a una rotación, se puede ilustrar si se considera el hecho de que las ecuaciones (5-28) y (5-29) se convierten ahora en

$$\Delta_i = \delta_{ii} P_i + \delta_{ij} M_j$$

y

$$\phi_j = \phi_{ji} P_i + \phi_{jj} M_j$$

de donde se deduce que las dimensiones de δ_{ij} son

$$\frac{\text{longitud}}{\text{fuerza} \times \text{longitud}} = \text{fuerza}^{-1}$$

mientras que las de ϕ_{ij} son

$$\frac{\text{radianes}}{\text{fuerza}} = \text{fuerza}^{-1}$$

Ejemplo 5-11 Considérese nuevamente la armadura de dos barras que se representó en la fig. 5-8a. Determinar el desplazamiento vertical δ_{vh} del punto C debido a $H = 1$.

SOLUCION Del ejemplo 5-9 (véase la fig. 5-11a),

$$U = \frac{120}{2E} [(4\sqrt{2} + 1)(H^2) - 2HV + V^2]$$

δ_{vh} se obtiene tomando $\partial U / \partial V$ y haciendo $H = 1$ y $V = 0$, lo cual conduce a

$$\delta_{vh} = \frac{120}{2E} (-2) = \frac{-120}{E}$$

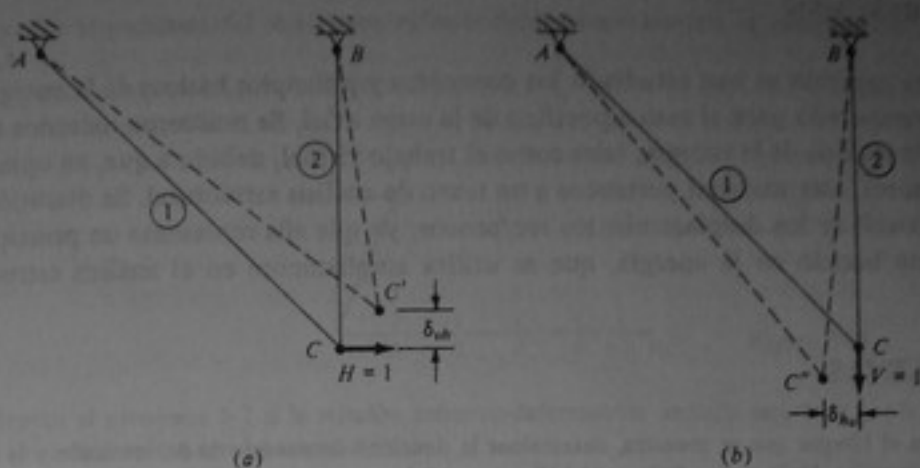


Figura 5-11 Armadura de dos barras para el ejemplo 5-11.

De forma análoga, para determinar δ_{hv} , el desplazamiento horizontal del punto C debido a $V = 1$, se determina $\partial U / \partial H$ y se hace $H = 0$ y $V = 1$, con lo cual

$$\delta_{hv} = \frac{120}{2E} (-2) = -\frac{120}{E}$$

y, en consecuencia,

$$\delta_{vh} = \delta_{hv} \quad \text{Resp.}$$

También se puede emplear la expresión establecida en el ejemplo 5-6 para la energía de deformación. Para $H = 1$ y $V = 0$,

$$H = \frac{\partial U}{\partial h} = 1 = 44.2(h + v)$$

$$V = \frac{\partial U}{\partial v} = 0 = h + 6.656v$$

y
$$v = \delta_{vh} = -0.004 \text{ pul}$$

Para $H = 0$ y $V = 1$,

$$H = \frac{\partial U}{\partial h} = 0 = 44.2(h + v)$$

$$V = \frac{\partial U}{\partial v} = 1 = 44.2(h + 6.656v)$$

y
$$h = \delta_{hv} = -0.004 \text{ pul}$$

de modo que
$$\delta_{vh} = \delta_{hv}$$

5-6 RESUMEN

En este capítulo se han estudiado los conceptos y principios básicos de la energía y se han demostrado para el caso específico de la carga axial. Se omitieron métodos específicos de análisis de la energía, tales como el trabajo virtual, debido a que, en opinión de los autores, este material pertenece a un texto de análisis estructural. Se discutió la ley de Maxwell de los desplazamientos recíprocos, ya que ella representa un principio importante basado en la energía, que se utiliza ampliamente en el análisis estructural.

PROBLEMAS

5-1 Para el bloque que se muestra, determinar la densidad de energía de deformación y la energía de deformación. Utilizar $E = 200 \times 10^3$ MPa y $\nu = 0.3$.

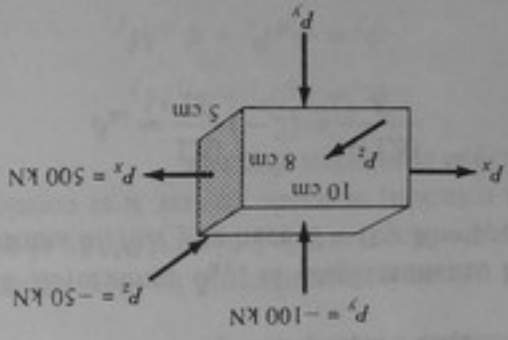


Figura P5-1

5-2 Para la placa que se representa en la figura, determinar el cambio en la energía de deformación cuando la carga P aumenta desde 40 kN hasta 100 kN. Emplear $E = 200 \times 10^3$ MPa.

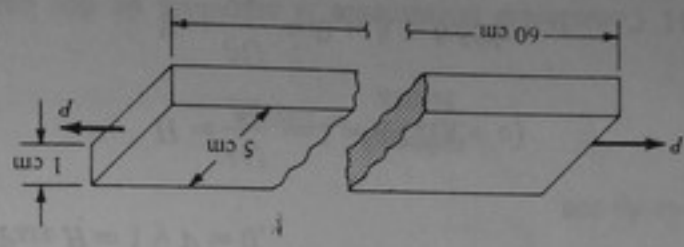


Figura P5-2

5-3 Para la armadura de la figura, determinar la energía total de deformación. Las áreas de las secciones transversales de los elementos son: ① 50 cm²; ② 100 cm²; ③ 120 cm²; ④ 100 cm²; ⑤ 50 cm². Tomar $E = 200 \times 10^3$ MPa.

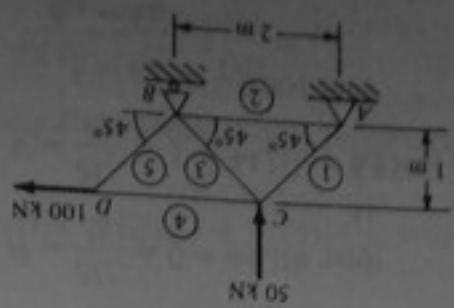


Figura P5-3

5-4 Repetir el problema 5-1 si la curva esfuerzo-deformación unitaria es como se muestra y si $\nu = 0.3$.

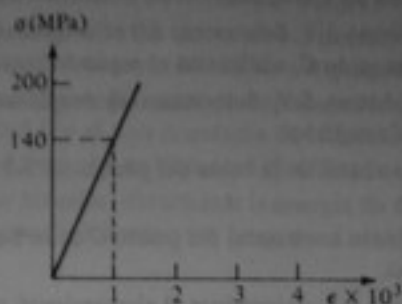


Figura P5-4

5-5 Repetir el problema 5-2 si la relación esfuerzo-deformación unitaria está dada por la ecuación $\sigma^2 = 10^7 \epsilon$, en donde σ está en megapascales.

5-6 Para la barra representada, determinar la energía total de deformación. Tomar $E = 10 \times 10^6$ klb/pul².

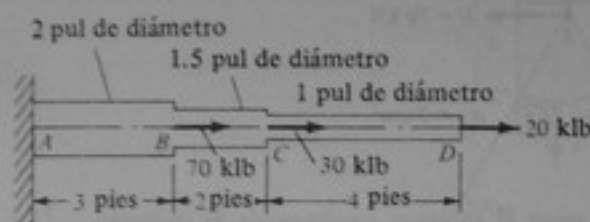


Figura P5-6

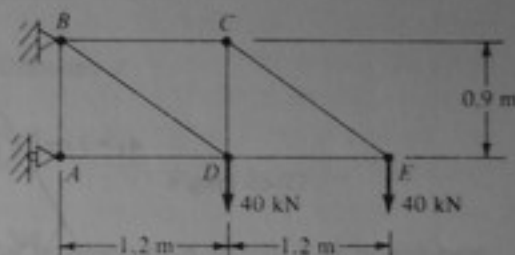


Figura P5-7

5-7 Para la armadura que se muestra, determinar la energía total de deformación si $E = 210 \times 10^3$ MPa.

5-8 Repetir el problema 5-7 si la curva esfuerzo-deformación unitaria es como se indica en la figura.

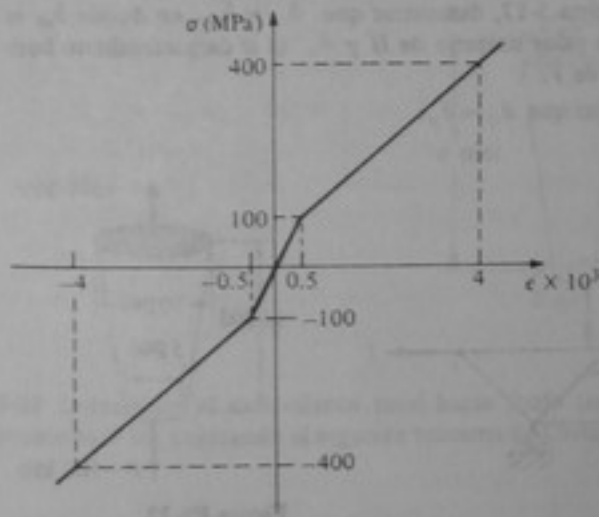


Figura P5-8

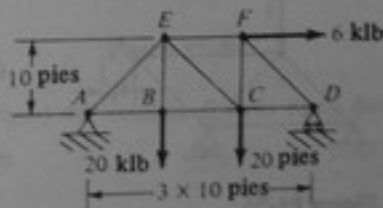


Figura P5-9

5-9 Para la armadura mostrada, determinar la energía total de deformación si $E = 30 \times 10^3$ klb/pul² y todas las áreas de las secciones transversales son de 2 pul².

5-10 Repetir el problema 5-9 si la relación esfuerzo-deformación unitaria está dada por $10^5 \epsilon = 0.5\sigma^2 + 10\sigma$, en donde las unidades de σ son kilolibras por pulgada cuadrada.

- 5-11 Para la armadura del problema 5-3, calcular los desplazamientos horizontal y vertical del nudo D utilizando el segundo teorema de Castigliano, si en D solo actúa la fuerza horizontal de 100 kN.
- 5-12 Para la armadura del problema 5-7, determinar (a) el desplazamiento vertical del nudo D y (b) el desplazamiento horizontal del nudo C , utilizando el segundo teorema de Castigliano.
- 5-13 Para la armadura del problema 5-9, determinar el desplazamiento horizontal del apoyo D usando el segundo teorema de Castigliano.
- 5-14 Determinar el alargamiento total de la barra del problema 5-2 utilizando el primer teorema de Castigliano para $P = 40$ kN.
- 5-15 Determinar el desplazamiento horizontal del punto C de la barra del problema 5-6, utilizando el primer teorema de Castigliano.
- 5-16 Para el bloque del problema 5-1, determinar el alargamiento total en la dirección x utilizando el segundo teorema de Castigliano.
- 5-17 Determinar los desplazamientos vertical y horizontal del punto B del sistema de dos barras que se muestra, utilizando el primer teorema de Castigliano y $E = 200 \times 10^3$ MPa.

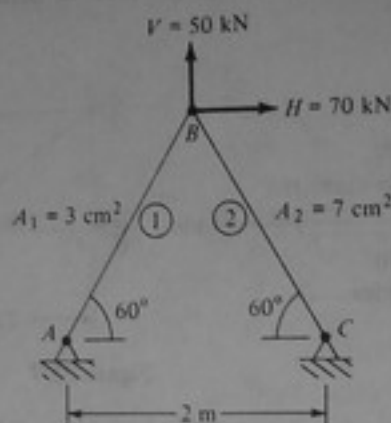


Figura P5-17

- 5-18 Repetir el problema 5-17 utilizando el segundo teorema de Castigliano.
- 5-19 Repetir el problema 5-14 utilizando el segundo teorema de Castigliano.
- 5-20 Para el sistema de dos barras del problema 5-17, demostrar que $\delta_{vb} = \delta_{hb}$, en donde δ_{vb} es la deflexión vertical del punto B debida a un valor unitario de H y δ_{hb} es el desplazamiento horizontal del punto B debido a un valor unitario de V .
- 5-21 Para la armadura del problema 5-3, probar que $\delta_{ij} = \delta_{ji}$.

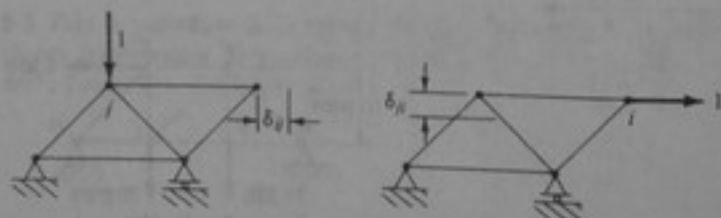


Figura P5-21

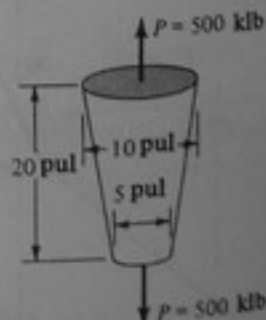


Figura P5-22

- 5-22 El cono truncado que se representa en la figura se somete a una fuerza de tracción de 500 klb. ¿Cuál es la energía total de deformación? Despreciar el peso del cono y usar $E = 30 \times 10^3$ klb/pul² y $\nu = 0.3$.
- 5-23 Utilizando el segundo teorema de Castigliano, determinar el alargamiento total del cono del problema 5-22.

- 5-24 Repetir el problema 5-22 si la relación esfuerzo-deformación unitaria está dada por $10^5 \epsilon = 0.5\sigma^2 + 10\sigma$, en donde las unidades de σ son kilolibras por pulgada cuadrada.
- 5-25 Repetir el problema 5-23 si la relación esfuerzo-deformación unitaria está dada por $10^5 \epsilon = 0.5\sigma^2 + 10\sigma$, en donde las unidades de σ son kilolibras por pulgada cuadrada.
- 5-26 Deducir una expresión para la energía total de deformación de una barra debida a su propio peso, si la barra tiene una longitud L y el área constante de la sección transversal es A . Suponer que el módulo de elasticidad es E y el peso por unidad de volúmenes γ .
- 5-27 Para la barra redonda que se muestra, determinar la energía de deformación elástica en función de d , P , L y E , despreciando el peso de la barra.

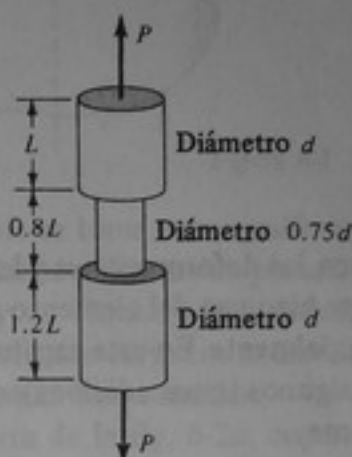


Figura P5-27

- 5-28 Determinar el alargamiento total de la barra del problema 5-26 debido a su propio peso, usando el segundo teorema de Castigliano.
- 5-29 Para la barra del problema 5-27, determinar el alargamiento total usando el segundo teorema de Castigliano.
- 5-30 Determinar la energía total de deformación (en joules) de la barra cónica hueca, debida a P , si $E = 30 \times 10^3$ klb/pul².

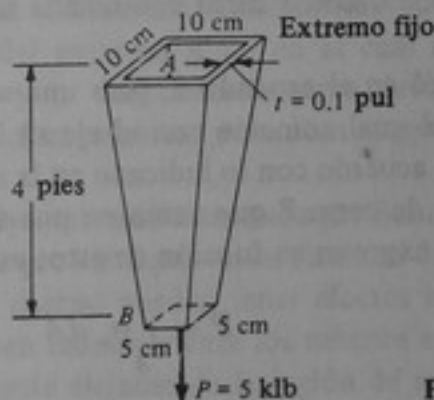


Figura P5-30

- 5-31 Determinar el movimiento total hacia abajo (en milímetros) del extremo B de la barra del problema 5-30, utilizando el segundo teorema de Castigliano.

Elementos cargados axialmente

6-1 INTRODUCCION

En el estudio de los esfuerzos, las deformaciones y la energía de deformación, realizado en los capítulos anteriores, se hizo uso del elemento cargado en la forma más simple, es decir, el elemento cargado axialmente. En este capítulo se hace un resumen del material ya tratado y se introducen algunos temas adicionales importantes, relacionados con los elementos cargados axialmente.

6-2 ELEMENTOS CARGADOS AXIALMENTE. PRINCIPIO DE SAINT-VENANT

Un elemento cargado axialmente se encuentra en estado de esfuerzo uniaxial, lo cual implica que la línea de acción de la carga axial P coincide con el eje centroidal longitudinal del elemento. Si éste no es el caso, el elemento está sometido a una carga combinada, axial y de flexión. Dicha carga combinada se estudiará más detalladamente en los capítulos 8 y 9.

Como se estableció en el capítulo 2, para una sección cortada normal al eje centroidal longitudinal (el cual coincide con el eje x), la fuerza axial interna representa una fuerza normal. De acuerdo con lo indicado en la sección 2-6, que también se puede observar en la fig. 6-1, la carga P que actúa en una sección normal al eje longitudinal del elemento se puede expresar en función de estos esfuerzos, así

$$P = \int_A \sigma_x dA \quad (6-1)$$

El esfuerzo promedio está dado por

$$\sigma_{av} = \frac{P}{A} \quad (6-2)$$

Si σ_x es constante en la ecuación (6-1), será igual al esfuerzo promedio en la ecuación (6-2) y la distribución de esfuerzos es uniforme. En general, la distribución de esfuerzos depende de la distribución de la deformación longitudinal y de la relación esfuerzo-deformación unitaria del material. Para los elementos cargados axialmente, la distri-

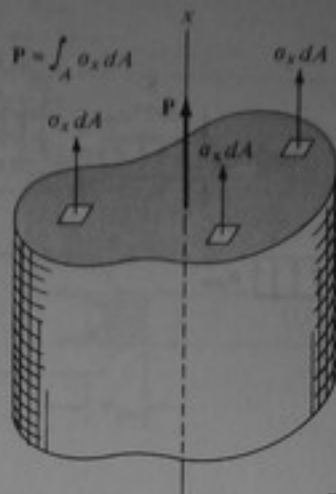


Figura 6-1 Elemento cargado axialmente.

bución de la deformación usualmente se toma como uniforme, con base en la hipótesis de que las secciones transversales planas permanecen planas. Entonces, si el esfuerzo es proporcional a la deformación (ley de Hooke), la distribución de esfuerzos también es uniforme. Esto es cierto para elementos cargados axialmente, excepto en la cercanía de los puntos de aplicación de las cargas concentradas.

Por ejemplo, considérese la barra de la fig. 6-2a, cuya mayor dimensión lateral es w y cuya longitud es mucho mayor que esta dimensión (es decir, $L \gg w$). En la fig. 6-2a se representan las distribuciones de esfuerzos a la mitad de la altura y a las distancias w , $w/2$ y $w/4$ del punto de aplicación de la carga. Se observa que a una distancia igual a la dimensión lateral w , la distribución de esfuerzos es prácticamente uniforme. Considérese ahora la distribución de esfuerzos en una barra de las mismas dimensiones, pero cargada con una carga uniformemente distribuida en su extremo libre, como se muestra en la fig. 6-2b. Obsérvese que la distribución de los esfuerzos internos es uniforme a lo largo de la barra. Las únicas diferencias significativas en el comportamiento son los efectos localizados cerca del extremo libre, en el cual se aplica la carga. Si bien la distribución de esfuerzos y la deformación cerca del punto de aplicación de la carga son muy diferentes, prácticamente no presentan ninguna diferencia hacia la mitad de la altura.

La idea demostrada con este ejemplo fue enunciada por Saint-Venant en 1855. El principio de Saint-Venant establece que "aunque varios sistemas de carga estáticamente equivalentes que actúan sobre un cuerpo pueden tener efectos localizados considerablemente diferentes, todos producen esencialmente los mismos esfuerzos en las partes del cuerpo que están suficientemente alejadas de la región de aplicación". Para fines prácticos, "suficientemente alejada" puede considerarse una distancia por lo menos igual a la mayor dimensión de la parte de la superficie sobre la cual se aplica la carga. En el caso de la barra de la fig. 6-2a, esta dimensión es w .

El principio de Saint-Venant también se aplica para cambios bruscos de la sección transversal, como se muestra en la fig. 6-3. Nuevamente se observa que la distribución de esfuerzos se hace uniforme en las secciones que están suficientemente alejadas de los cambios bruscos en la sección transversal. El mismo principio básico se aplica a otros tipos de carga, tales como en vigas, ejes, placas, resortes, etc. Como se indica en el capítulo 8, la distribución de esfuerzos en vigas, debida a un momento de flexión, varía linealmente. De acuerdo con la fig. 6-4, a distancias suficientemente grandes del

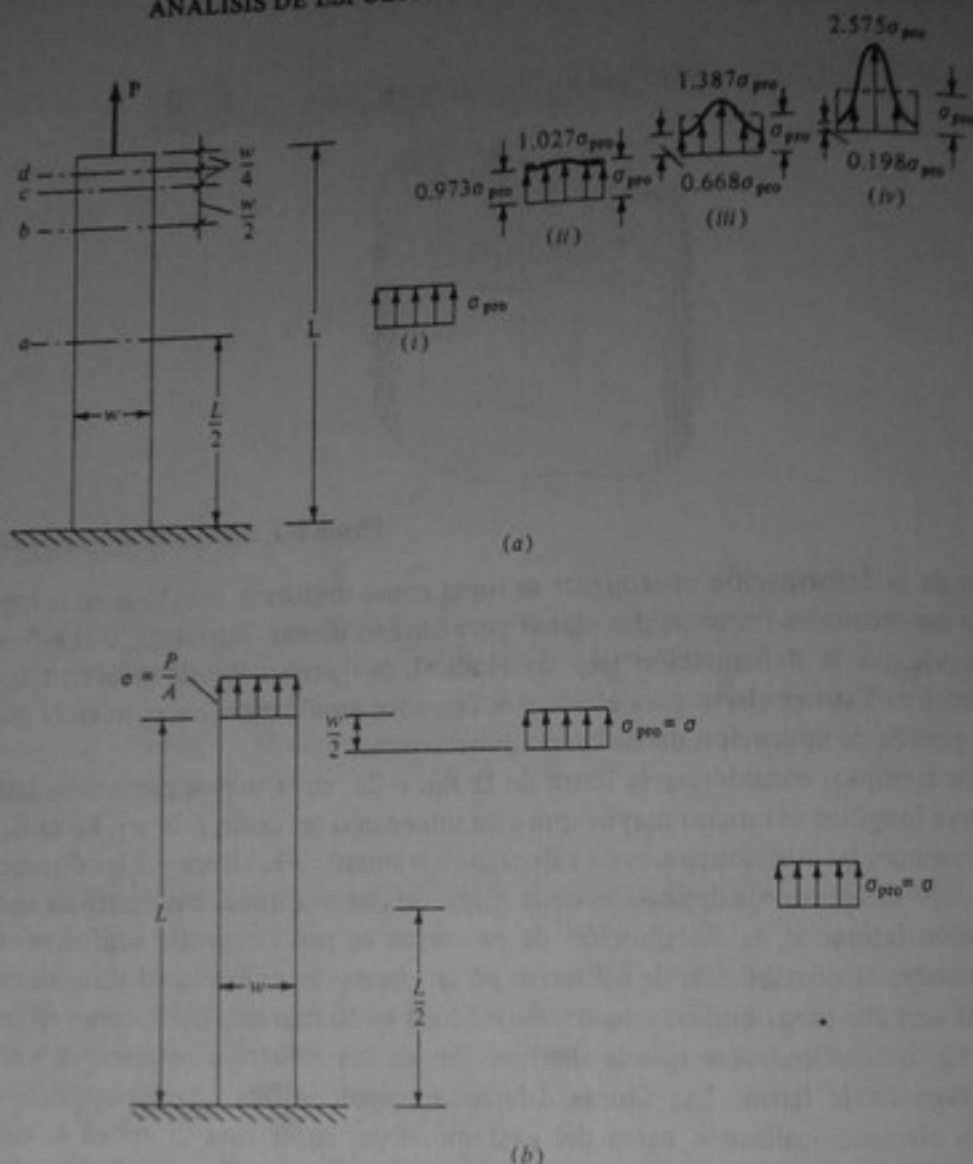


Figura 6-2 (a) Distribución de esfuerzos en la cercanía de una carga concentrada (i) a la mitad de la altura, (ii) a una distancia w de la carga, (iii) a $w/2$ de la carga, (iv) a $w/4$ de la carga. † (b) Distribución de esfuerzos debida a una carga uniforme en una sección cualquiera.

punto de aplicación de la carga, la distribución de esfuerzos varía linealmente, independientemente del tipo de carga que produce el momento de flexión.

En cada uno de estos casos, excepto cerca a los puntos de aplicación de las cargas, a los cambios bruscos de geometría o a las áreas de apoyo, la distribución de esfuerzos se puede basar en una distribución uniforme o lineal de la deformación.

Debe observarse que, aunque gran parte del material estudiado en la parte I de este texto hace uso de las distribuciones simplificadas de esfuerzos y deformaciones,

† S. Timoshenko y J. N. Goodier, *Theory of Elasticity*, 2a. ed., McGraw-Hill, Nueva York, 1951, pág. 52.

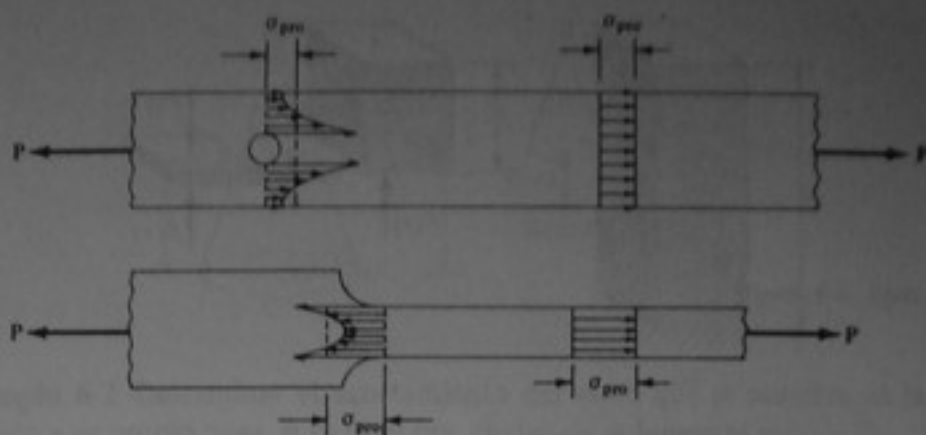


Figura 6-3 Esfuerzos altamente localizados debido a cambios bruscos en la geometría.

con frecuencia la falla estructural tiene lugar en regiones de alta concentración de esfuerzos, cerca a los puntos de aplicación de las cargas. En particular, la concentración de esfuerzos que resulta de cambios bruscos en la geometría puede contribuir a la ocurrencia de fallas estructurales prematuras en forma de fracturas frágiles o fatiga. Los efectos de la concentración de esfuerzos y los temas relacionados se tratan detalladamente en los capítulos 13 y 14.

6-3 DEFORMACION DE ELEMENTOS CARGADOS AXIALMENTE

De acuerdo con los capítulos 3 y 4, el alargamiento de un elemento de longitud dx , hecho de un material elástico lineal y sometido a una carga axial, se puede hallar a partir de la expresión

$$\Delta(dx) = \epsilon_x dx = \frac{\sigma_x}{E} dx = \frac{P dx}{EA}$$

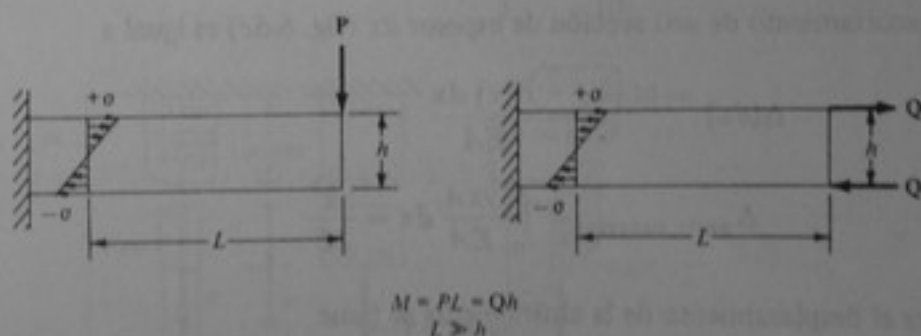


Figura 6-4 Distribución lineal de esfuerzos debida a un momento de flexión M .

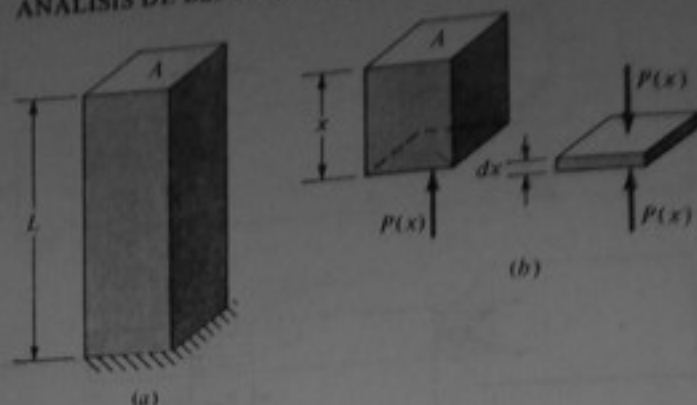


Figura 6-5 Ejemplo 6-1.

Entonces, el alargamiento de toda la barra es

$$\Delta = \int_0^L \Delta dx = \int_0^L \frac{P dx}{EA} \quad (6-3)$$

Para valores constantes de P y A esta ecuación se simplifica para convertirse en

$$\Delta = \frac{PL}{EA} \quad (6-4)$$

Ejemplo 6-1 Como primera demostración de la determinación de la deformación de un elemento cargado axialmente, considérese la barra representada en la fig. 6-5a. Calcular el desplazamiento en la mitad de la altura y en la parte superior de la barra debido al peso de la misma. Suponer que la barra es de sección transversal uniforme y tiene un módulo de elasticidad E y un peso por unidad de volumen, γ .

SOLUCION Primero tracemos el diagrama de cuerpo libre de una porción superior de la barra, de altura x (fig. 6-5b). Si $w(x)$ es el peso de esta porción, entonces $P(x)$, la carga axial interna en x , está dada por

$$P(x) = w(x) = \gamma x A$$

El acortamiento de una sección de espesor dx (fig. 6-5c) es igual a

$$\Delta(dx) = \frac{P(x) dx}{EA}$$

$$y \quad \Delta_{\text{parte superior}} = \int_0^h \frac{\gamma x A}{EA} dx = \frac{\gamma h^2}{2E} \quad \text{Resp.}$$

Para el desplazamiento de la altura media se tiene

$$\Delta_{h/2} = \int_0^{h/2} \frac{\gamma x A}{EA} dx = \frac{\gamma h^2}{8E} \quad \text{Resp.}$$

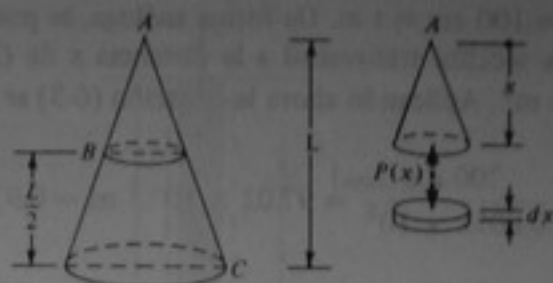


Figura 6-6 Ejemplo 6-2.

Ejemplo 6-2 Determinar el acortamiento del cono que se muestra en la fig. 6-6 debido a su propio peso, si su peso por unidad de volumen es γ .

SOLUCION En el diagrama de cuerpo libre de una parte superior del cono, de altura x , se puede observar que la fuerza vertical resultante que actúa en una sección situada a una distancia x del vértice es igual a

$$P(x) = \gamma \times \text{Vol}(x)$$

en donde $\text{Vol}(x) = \frac{1}{3} x A(x)$ y $A(x)$ es el área de la sección transversal. Entonces,

$$P(x) = \frac{1}{3} \gamma x A(x)$$

Aplicando la ecuación (6-3) se obtiene

$$\Delta = \int_0^L \frac{\frac{1}{3} \gamma x A(x) dx}{EA(x)} = \frac{\gamma}{3E} \int_0^L x dx = \frac{\gamma L^2}{6E} \quad \text{Resp.}$$

Ejemplo 6-3 Como un tercer ejemplo, considérese la barra ahusada de la fig. 6-7. Determinar el alargamiento debido a P si $E = 10^5$ MPa.

SOLUCION Primero se determina la localización del origen O , el cual se escoge por conveniencia en el vértice del cuerpo prolongado. Con base en triángulos semejantes se observa que

$$\frac{h}{5} = \frac{h + 100}{10}$$

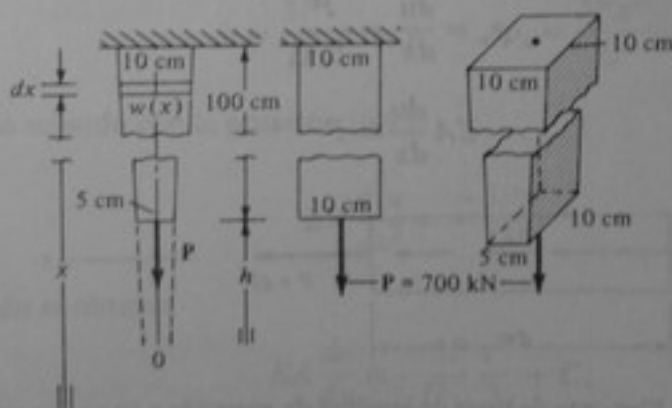


Figura 6-7 Ejemplo 6-3.

lo cual conduce a $h = 100 \text{ cm} = 1 \text{ m}$. De forma análoga, se puede ver que $w(x) = 0.05x$ y el área de la sección transversal a la distancia x de O es $A(x) = (0.05)(0.10) \times (x) = 0.005x \text{ m}^2$. Aplicando ahora la ecuación (6-3) se obtiene

$$\Delta = \int_1^2 \frac{700 \, dx}{0.005x \times 10^8} = 97.02 \times 10^{-5} \text{ m} = 0.97 \text{ mm} \quad \text{Resp.}$$

Para determinar el desplazamiento relativo de puntos de una barra cargada axialmente se utiliza la ecuación (3-4), a partir de la cual se obtiene

$$\Delta_{AB} = \int_{x_B}^{x_A} \frac{\partial u}{\partial x} dx = \int_{x_B}^{x_A} \epsilon_x dx \quad (6-5)$$

En el caso de comportamiento elástico lineal, la ecuación (6-5) se puede escribir

$$\Delta_{AB} = \int_{x_B}^{x_A} \frac{\sigma_x}{E} dx = \int_{x_B}^{x_A} \frac{P}{EA} dx \quad (6-6)$$

Ejemplo 6-2 (continuación) Considérese nuevamente el cono del ejemplo 6-2. Determinar el desplazamiento relativo entre la altura media B y la base C .

SOLUCION Aplicando la ecuación (6-6) se tiene

$$\Delta_{BC} = \int_{L/2}^L \frac{\frac{1}{3}\gamma x A(x) \, dx}{EA(x)} = \frac{\gamma}{3E} \left(\frac{x^2}{2} \right)_{L/2}^L = \frac{\gamma L^2}{8E} \quad \text{Resp.}$$

Si una carga axial distribuida de intensidad p_x por unidad de longitud actúa a lo largo de una barra, como se indica en la fig. 6-8, entonces, con base en la condición de equilibrio,

$$\begin{aligned} dP + p_x \, dx &= 0 \\ \text{o} \quad \frac{dP}{dx} &= -p_x \end{aligned} \quad (6-7)$$

Además, para EA_x constante,

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{du}{dx} = \frac{P}{EA} \\ \text{o} \quad EA \frac{du}{dx} &= P \end{aligned} \quad (6-8)$$

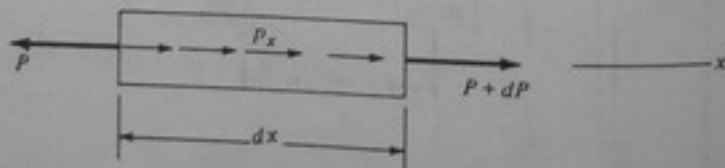


Figura 6-8 Elemento de barra de longitud dx sometido a una carga axial distribuida.

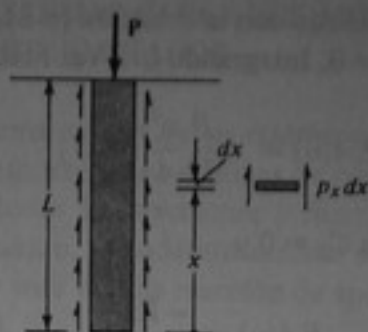


Figura 6-9 Ejemplo 6-4.

Derivando la ecuación (6-8) con respecto a x se obtiene

$$EA \frac{d^2u}{dx} = \frac{dP}{dx}$$

la cual, de acuerdo con la ecuación (6-7), conduce a

$$EA \frac{d^2u}{dx} = -p_x \quad (6-9)$$

Ejemplo 6-4 El pilote de cimentación que se muestra en la fig. 6-9a se carga con una fuerza vertical P que es soportada por una fuerza de rozamiento cuya intensidad varía cuadráticamente en la forma

$$p_x = bx^2$$

Determinar el acortamiento total del pilote.

SOLUCION Si se considera una sección de espesor dx (fig. 6-9b), entonces la fuerza de fricción externa que actúa sobre ella es igual a $P_x dx$. Por el equilibrio de fuerzas verticales,

$$P = \int_0^L bx^2 dx = \frac{bL^3}{3}$$

Por consiguiente,

$$b = \frac{3P}{L^3} \quad \text{y} \quad p_x = \frac{3Px^2}{L^3}$$

Ahora, de acuerdo con la ecuación (6-9),

$$EA \frac{d^2u}{dx^2} = -\frac{3Px^2}{L^3}$$

Integrando se obtiene

$$EA \frac{du}{dx} = -\frac{3Px^3}{L^3} + C_1$$

En $x = 0$, $P = 0$, lo cual de acuerdo con la ecuación (6-8), implica que $\frac{du}{dx(0)} = 0$. Esto, a su vez, conduce a $C_1 = 0$. Integrando una vez más,

$$EA(u) = -\frac{P x^4}{L^3} + C_2$$

Asimismo, $u(0) = 0$, de donde $C_2 = 0$ y

$$EA(u) = \frac{-Px^4}{4L^3}$$

de tal modo que

$$u_{\max} = u(L) = \frac{-PL}{4EA} \quad (\text{esto es, hacia abajo}) \quad \text{Resp.}$$

Para una barra cargada axialmente, compuesta de porciones que tienen valores constantes para P y A ,

$$\Delta = \sum_i \frac{P_i L_i}{EA_i} \quad (6-10)$$

Ejemplo 6-5 Determinar el alargamiento total de la barra AD de la fig. 6-10a, si $E = 10^5$ MPa.

SOLUCION En los diagramas de cuerpo libre de la fig. 6-10b se puede observar que las fuerzas que actúan sobre las diferentes porciones son $P_{DC} = +100$ KN, $P_{CB} = +100$ KN y $P_{BA} = +70$ KN. De acuerdo con la ecuación (6-10),

$$\begin{aligned} \Delta_{AD} &= \frac{100(1)}{(\pi/4)(1.5)^2(10^{-4})(10^8)} + \frac{100(1.2)}{(\pi/4)(3)^2(10^{-4})(10^8)} \\ &\quad + \frac{70(1.5)}{(\pi/4)(5)^2(10^{-4})(10^8)} \\ &= 0.0079 \text{ m} = 7.9 \text{ mm} \end{aligned} \quad \text{Resp.}$$

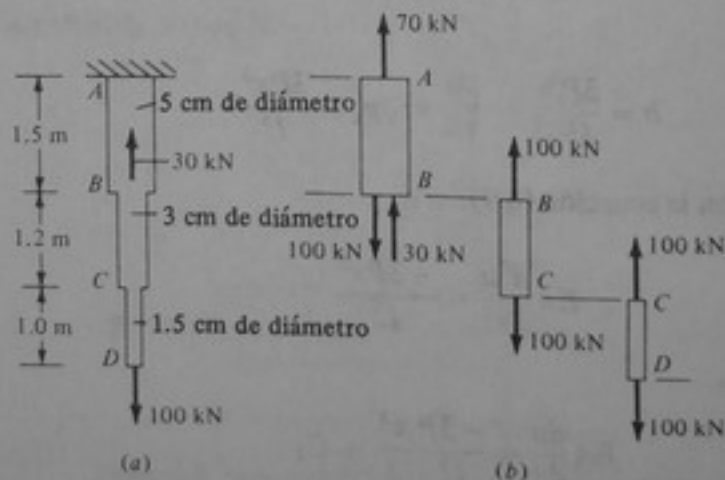


Figura 6-10 Ejemplo 6-5.

6-4 ELEMENTOS Y SISTEMAS CARGADOS AXIALMENTE, ESTÁTICAMENTE INDETERMINADOS

Se considera que un sistema estructural es *estáticamente indeterminado* si, bajo la aplicación de una carga, el número de ecuaciones de equilibrio estático disponibles es suficiente para determinar todas las reacciones y fuerzas internas. En el caso de un solo elemento cargado axialmente, la indeterminación estática generalmente es producida por el hecho de que hay más de una reacción de apoyo igual y opuesta a la carga axial total aplicada (fig. 6-11a).

Un sistema de dos o más barras cargadas axialmente es estáticamente indeterminado si tiene más reacciones o fuerzas internas en las barras que las que se pueden determinar a partir de las ecuaciones de equilibrio estático. Por ejemplo, el sistema de tres barras representado en la fig. 6-11b es estáticamente indeterminado en primer grado debido a que hay tres reacciones y solo dos ecuaciones de equilibrio disponibles ($\sum F_y = 0$ y $\sum M_z = 0$). Para armaduras y marcos se puede distinguir entre la indeterminación interna y la externa. La indeterminación *interna* indica la presencia de más elementos internos o uniones que los necesarios para que exista el equilibrio estático. La indeterminación *externa* se refiere a la existencia de más componentes de reacción externa que las necesarias para que haya equilibrio estático externo. Por ejemplo, la armadura que se muestra en la fig. 6-11f es estáticamente indeterminada en forma externa en

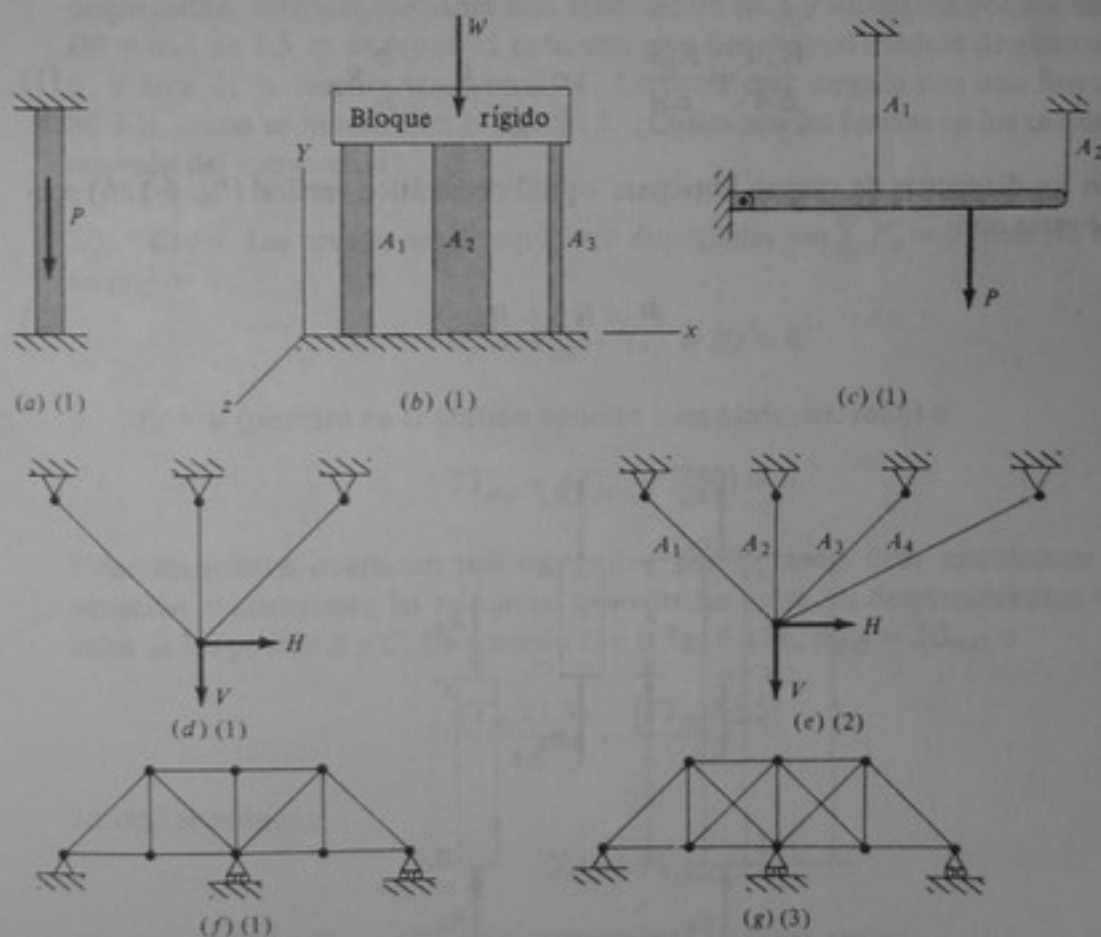


Figura 6-11 Ejemplos de elementos y sistemas cargados axialmente, estáticamente indeterminados (los números entre paréntesis representan el grado de indeterminación estática).

primer grado, mientras que la armadura de la fig. 6-11g es indeterminada externamente en primer grado e indeterminada internamente en segundo grado; su grado total de indeterminación es tres.

Además de los sistemas como los de la fig. 6-11, con frecuencia se presenta indeterminación estática en las barras cargadas axialmente, hechas de dos o más materiales diferentes. Estas barras se estudian en forma separada en la siguiente sección.

Para determinar las reacciones externas y/o las fuerzas internas en las barras de un sistema estáticamente indeterminado, es necesario aumentar el número de ecuaciones de equilibrio estático con las *ecuaciones geométricas de desplazamiento*. Estas ecuaciones generalmente expresan las condiciones de los desplazamientos comunes o sus relaciones geométricas para las diferentes partes o elementos que componen el sistema.

Ejemplo 6-6 Considérese la barra que se muestra en la fig. 6-12. Suponiendo comportamiento elástico lineal y EA constante a lo largo de la barra, determinar las reacciones R_A y R_B .

SOLUCION Se puede suponer que el punto C se mueve hacia abajo y, por consiguiente, el alargamiento de la porción AC debe ser igual al acortamiento de la porción CB . Así, $\Delta_{AC} = -\Delta_{CB}$, de modo que

$$\frac{R_A a}{EA} = \frac{R_B b}{EA} \quad \text{o} \quad R_A = \frac{b}{a} R_B \quad (1)$$

En los diagramas de cuerpo libre para equilibrio estático vertical (fig. 6-12b) puede verse que

$$P = R_A + R_B \quad (2)$$

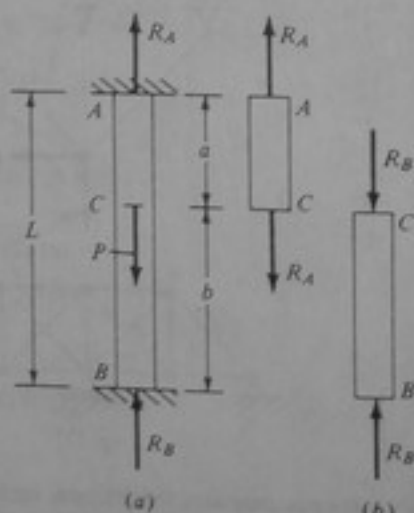


Figura 6-12 Ejemplo 6-6.

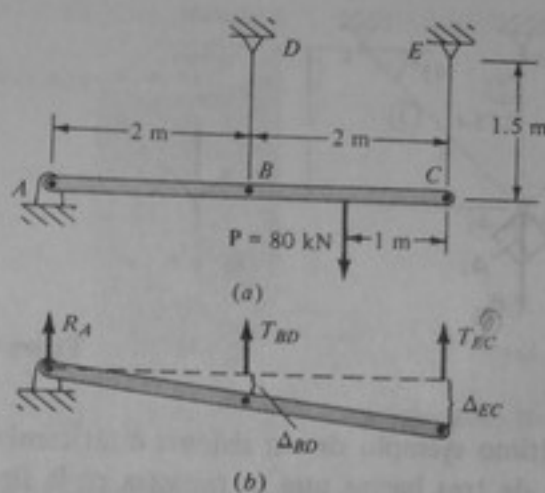


Figura 6-13 Ejemplo 6-7.

Se puede despejar R_A y R_B en las ecuaciones (1) y (2) para obtener

$$R_A = \frac{bP}{L} \quad \text{y} \quad R_B = \frac{aP}{L} \quad \text{Resp.}$$

Ejemplo 6-7 Considérese una barra rígida ABC cuya deformación por flexión es despreciable, apoyada mediante una articulación en A y soportada por dos cables, DB y EC , de 1.5 m de longitud cada uno, que tienen igual módulo de elasticidad, E , y área de la sección transversal, A . La barra está cargada con una fuerza de 80 kN, como se muestra en la fig. 6-13. ¿Cuáles son las fuerzas en los cables y la reacción del apoyo en A ?

SOLUCION Las ecuaciones de equilibrio disponibles son $\sum F_v = 0$ (positivo hacia arriba) o

$$R_A + T_{BD} + T_{EC} - 80 = 0 \quad (1)$$

y $M_A = 0$ (positivo en el sentido opuesto a las agujas del reloj) o

$$2T_{BD} + 4T_{EC} - 3(80) = 0 \quad (2)$$

Estas ecuaciones contienen tres incógnitas; por lo tanto, debe establecerse otra ecuación considerando las relaciones geométricas entre los desplazamientos verticales de los puntos B y C . De acuerdo con la fig. 6-13b, $\Delta_{EC} = 2\Delta_{BD}$ o

$$\frac{(T_{EC})(1.5)}{AE} = \frac{(2T_{BD})(1.5)}{AE}$$

La cual se reduce a

$$T_{EC} = 2T_{BD} \quad (3)$$

Despejando T_{EC} , T_{BD} y R en las ecuaciones (1) a (3) se obtiene

$$T_{BD} = 24 \text{ kN} \quad T_{EC} = 48 \text{ kN} \quad R_A = 8 \text{ kN} \quad \text{Resp.}$$

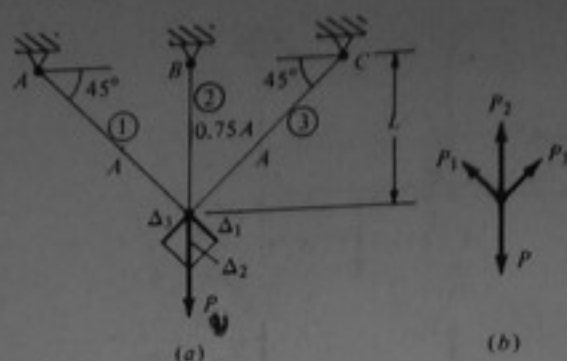


Figura 6-14 Ejemplo 6-8.

Ejemplo 6-8 Como último ejemplo de un sistema estáticamente indeterminado, considérese el sistema de tres barras que se muestra en la fig. 6-14a. Las barras tienen el mismo módulo de elasticidad E y las áreas transversales que se indican en la figura. Determinar las fuerzas en las barras.

SOLUCION Con base en la simetría se establece inmediatamente que

$$P_1 = P_3 \quad (1)$$

Este resultado también se puede hallar considerando el equilibrio de fuerzas horizontales del nudo D (fig. 6-14b). Ahora bien, como las barras ① y ③ tienen el mismo valor de E y un área de la sección transversal, A , entonces $\Delta_1 = \Delta_3$.

Con base en el equilibrio de fuerzas verticales, $\sum F_v$ (positivo hacia arriba) produce

$$\frac{2P_1}{\sqrt{2}} + P_2 - P = 0 \quad (2)$$

El desplazamiento común de las tres barras en el punto D establece que $\Delta_1\sqrt{2} = \Delta_2 = \Delta_3\sqrt{2}$ ó

$$\frac{P_1 L \sqrt{2}}{EA} \sqrt{2} = \frac{P_2 L}{0.75EA}$$

de donde

$$1.5P_1 = P_2 \quad (3)$$

Despejando P_1 , P_2 y P_3 en las ecuaciones (1) a (3) se obtiene

$$P_1 = P_3 = 0.343P \quad \text{y} \quad P_2 = 0.515P \quad \text{Resp.}$$

6-5 ELEMENTOS COMPUESTOS DE MATERIALES DIFERENTES

Considérese un elemento compuesto de dos o más materiales diferentes unidos, y supóngase que este elemento se somete a la acción de una fuerza axial producida bien sea por la aplicación de una carga externa o por restricciones térmicas longitudinales

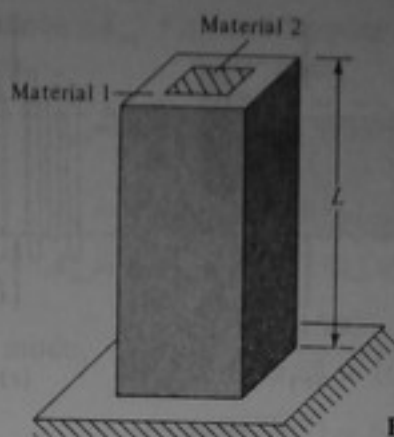


Figura 6-15 Barra compuesta de dos materiales.

internas. Entonces, dicho elemento es estáticamente indeterminado. En esta presentación únicamente se tratará de barras que consten de dos materiales diferentes. Los mismos principios y tipos de ecuaciones se aplican cuando existen tres o más materiales.

Por ejemplo, considérese la barra de la fig. 6-15, compuesta de un núcleo cuadrado de material 2 adherido a un tubo cuadrado de material 1. Supongamos que las secciones planas permanecen planas durante la carga. Esto es lo mismo que establecer que las deformaciones unitarias longitudinales de las dos partes son iguales. Entonces,

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \quad (6-11)$$

Suponiendo comportamiento elástico lineal para ambos materiales, se tiene

$$\frac{\sigma_1}{E_1} = \frac{\sigma_2}{E_2} \quad (6-12)$$

$$\sigma_1 = \frac{E_1}{E_2} \sigma_2 \quad (6-13)$$

Si para la barra de la fig. 6-15, $E_1 = 200 \times 10^3$ MPa y $E_2 = 100 \times 10^3$ MPa, entonces,

$$\sigma_1 = 2\sigma_2$$

Además,

$$\sigma_1 = \frac{P_1}{A_1} \quad \text{y} \quad \sigma_2 = \frac{P_2}{A_2}$$

las cuales, al sustituirlas en la ecuación (6-12) producen

$$\frac{P_1}{E_1 A_1} = \frac{P_2}{E_2 A_2} \quad (6-14)$$

$$P_1 = \frac{E_1 A_1}{E_2 A_2} P_2 \quad (6-15)$$

Haciendo E_1/E_2 igual a n se obtiene

$$\sigma_1 = n\sigma_2 \quad (6-16)$$

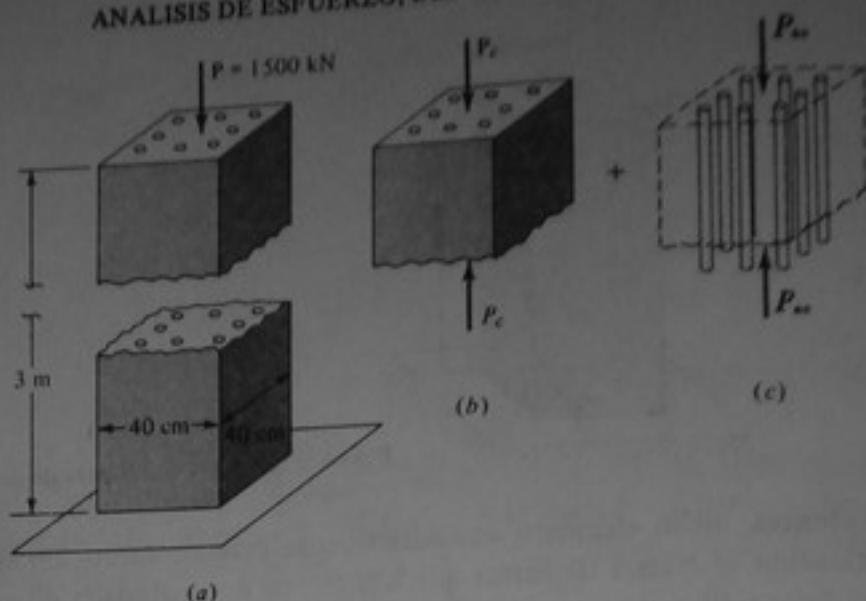


Figura 6-16 Ejemplo 6-9.

y

$$P_1 = n \frac{A_1}{A_2} P_2 \quad (6-17)$$

Estas ecuaciones de deformación, junto con las condiciones del equilibrio estático, se necesitan para el análisis de barras que constan de dos o más materiales.

Ejemplo 6-9 Considérese la columna corta de concreto reforzado que se muestra en la fig. 6-16. La columna está reforzada con ocho varillas de acero de 30 mm de diámetro y cargada con una fuerza axial externa de 1500 kN. Si $E_{ac} = 200 \times 10^3$ MPa y $E_c = 25 \times 10^3$ MPa,

- (a) ¿Cuáles son los esfuerzos en el concreto y en el acero?
 (b) ¿Cuánto se acorta la columna (despreciando el peso muerto)?

SOLUCION

- (a) Si P_c y P_{ac} son las fuerzas soportadas por el concreto y el acero, respectivamente (fig. 6-16b y c), entonces, para el equilibrio estático,

$$P = P_{ac} + P_c$$

Haciendo $P = \alpha A$ y utilizando la ecuación (6-16) se obtiene

$$P = A_{ac} \sigma_{ac} + A_c \sigma_c = \sigma_c (n A_{ac} + A_c)$$

en donde $n = E_{ac}/E_c = 8$. De este modo,

$$\sigma_c = \frac{P}{n A_{ac} + A_c} = \frac{P}{A_{tr}}$$

(la expresión $nA_{ac} + A_c$ se denomina el área transformada A_{tr} y

$$A_{ac} = 8 \frac{\pi}{4} (3)^2 = 56.55 \text{ cm}^2$$

$$A_c = 40(40) - 56.55 = 1543.45 \text{ cm}^2$$

$$A_{tr} = nA_{ac} + A_c = 1543.45 + 8(56.55) = 1955.85 \text{ cm}^2$$

De este modo, $\sigma_c = \frac{1500}{1955.85 \times 10^{-4}} = 7669 \text{ kPa}$ *Resp.*

$$\sigma_{ac} = 8(7669) = 61,352 \text{ kPa}$$
 Resp.

(b) El acortamiento de la columna es

$$\Delta = \epsilon_c L = \frac{\sigma_c L}{E_c} = \frac{7669(3)}{25 \times 10^6} = 0.92 \times 10^{-3} \text{ m} = 0.92 \text{ mm}$$
 Resp.

(Igualmente se habría podido tomar $\Delta = \sigma_{ac} L / E_{ac}$).

Ejemplo 6-10 La barra que se muestra en la fig. 6-17a consta de una varilla de latón adherida a un tubo de acero. Los coeficientes de dilatación térmica para el latón y el acero son $\alpha_{la} = 19 \times 10^{-6} \text{ m/m/}^\circ\text{C}$ y $\alpha_{ac} = 12 \times 10^{-6} \text{ m/m/}^\circ\text{C}$, respectivamente, mientras que $E_{la} = 105 \times 10^3 \text{ MPa}$ y $E_{ac} = 210 \times 10^3 \text{ MPa}$. ¿Cuáles son los esfuerzos si $\Delta T = 25^\circ\text{C}$?

SOLUCION En primer lugar considérese una sección de espesor dx (fig. 6-17b). Como no hay cargas externas en ninguna sección transversal, la fuerza interna P_{ac} en el acero es igual y opuesta a la fuerza interna, P_{la} , en el latón; esto es,

$$P_{ac} + P_{la} = 0 \quad \text{o} \quad P_{la} = -P_{ac} \quad (1)$$

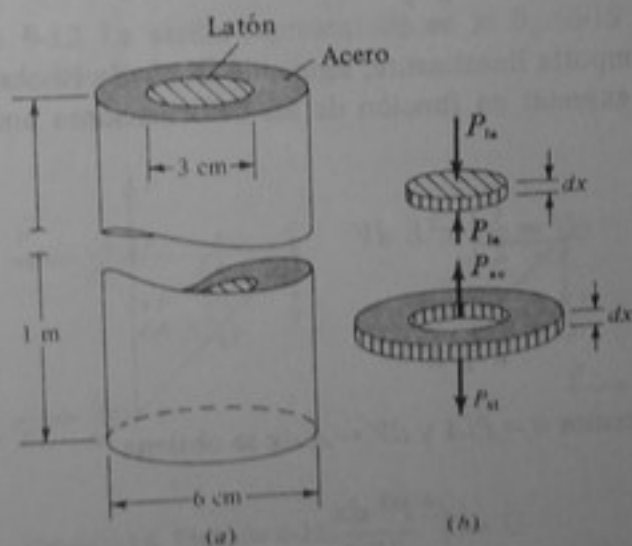


Figura 6-17 Ejemplo 6-10.

Asimismo, debido a la adherencia de las dos partes,

$$\Delta(dx)_{la} = \Delta(dx)_{ac} \quad \text{o} \quad \epsilon_{la} dx = \epsilon_{ac} dx \quad \text{o} \quad \epsilon_{la} = \epsilon_{ac}$$

de donde

$$\alpha_{la} \Delta T - \frac{P_{ac}}{A_{la} E_{la}} = \alpha_{ac} \Delta T + \frac{P_{ac}}{A_{ac} E_{ac}} \quad (2)$$

Reemplazando los valores apropiados se obtiene

$$\begin{aligned} 19 \times 10^{-6} \times 25 - \frac{P_{ac}}{(\pi/4)3^2 \times 10^{-4} \times 105 \times 10^6} \\ = 12 \times 10^{-6} \times 25 + \frac{P_{ac}}{(\pi/4)(6^2 - 3^2) \times 10^{-4} \times 210 \times 10^6} \end{aligned}$$

de donde $P_{ac} = 11.13 \text{ kN}$ y

$$\begin{aligned} \sigma_{ac} &= \frac{11.13}{(\pi/4)(6^2 - 3^2) \times 10^{-4}} = 5250 \text{ kPa} \\ &= 5.25 \text{ MPa} \quad \text{tracción} \quad \text{Resp.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{mientras que} \quad \sigma_{la} &= \frac{-11.13}{(\pi/4)3^2 \times 10^{-4}} = -15,750 \text{ kPa} \\ &= -15.75 \text{ MPa} \quad \text{compresión} \quad \text{Resp.} \end{aligned}$$

6-6 ENERGIA DE DEFORMACION AXIAL

Como se dedujo en el capítulo 5, la energía de deformación en una barra cargada axialmente, hecha de un material elástico, es

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma \epsilon dV \quad (6-18)$$

Si además el material se comporta linealmente, siguiendo la ley de Hooke $\epsilon = \sigma/E$, la ecuación (6-18) se puede expresar en función de las deformaciones unitarias o los esfuerzos en la forma

$$U = \frac{1}{2} \int_V \epsilon^2 E dV \quad (6-19a)$$

$$\text{o} \quad U = \frac{1}{2} \int_V \frac{\sigma^2}{E} dV \quad (6-19b)$$

Si en la ecuación (6-19a) hacemos $\sigma = P/A$ y $dV = A dx$ se obtiene

$$U = \int_0^L \frac{P^2 dx}{2EA} \quad (6-20)$$

Para valores constantes de P y A esta ecuación se reduce a la ecuación (5-17):

$$U = \frac{P^2 L}{2EA} \quad (6-21)$$

Si en la ecuación (6-19a) también se suponen constantes los valores de P y A , es decir, esfuerzos y deformación unitaria constantes, y se reemplaza ϵ por Δ/L , se obtiene, como en el ejemplo 5-5,

$$U = \frac{EA\Delta^2}{2L} \quad (6-22)$$

Para sistemas de barras y armaduras se sigue de las ecuaciones (6-21) y (6-22) que

$$U = \sum_i \frac{P_i^2 L_i}{2EA_i} \quad (6-23a)$$

$$U = \sum_i \frac{EA_i \Delta_i^2}{2L_i} \quad (6-23b)$$

Ejemplo 6-11 Para la armadura que se muestra en la fig. 6-18, determinar el desplazamiento vertical del punto C debido a la carga P .

SOLUCION En primer lugar se determinan las fuerzas en las barras. Se puede demostrar que estas fuerzas son $+P$ para las barras AB y BC y $-P\sqrt{2}$ para la barra AC . La energía total de deformación de acuerdo con la ecuación (6-23a) es

$$U = \sum \frac{P_i^2 L_i}{2EA} = 2 \frac{P^2 L}{2EA} + \frac{2P^2 L\sqrt{2}}{2EA} = \frac{2.414P^2 L}{EA}$$

De acuerdo con el segundo teorema de Castigliano,

$$\delta_{Cv} = \frac{dU}{dP} = \frac{4.828PL}{EA} \quad \text{Resp.}$$

Ejemplo 6-12 La varilla representada en la fig. 6-19 se somete a una carga de energía axial en A de 20 J.

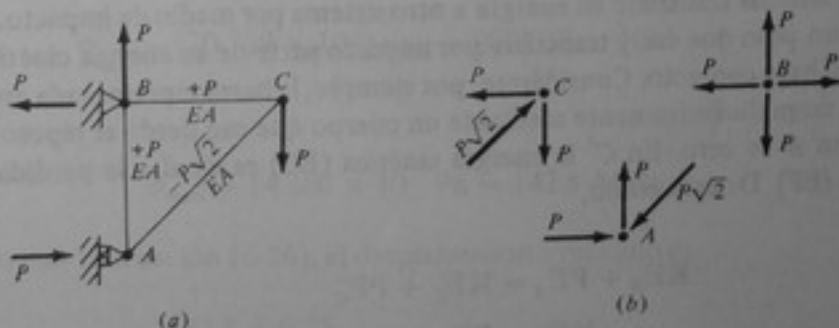


Figura 6-18 Ejemplo 6-11.

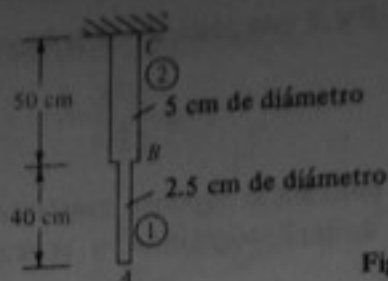


Figura 6-19 Ejemplo 6-12.

- (a) ¿Cuáles son los esfuerzos máximos en las porciones AB y BC?
 (b) ¿Cuáles son los desplazamientos máximos de los puntos A y B?
 Suponer comportamiento elástico lineal y $E = 200 \times 10^3$ MPa.

SOLUCION Suponiendo que la carga de energía es totalmente absorbida por el elemento como energía de deformación, la energía total de deformación en función de los esfuerzos σ_1 en AB y σ_2 en BC es

$$\frac{\sigma_1^2}{2E} \left[\frac{\pi}{4} (2.5)^2 (40) \right] \times 10^{-6} + \frac{\sigma_2^2}{2E} \left[\frac{\pi}{4} (5.0)^2 (50) \right] \times 10^{-6} = 20 \times 10^{-6} \quad (1)$$

Además, en todo momento, $P_1 = P_2$ y $\sigma_1 A_1 = \sigma_2 A_2$. Entonces $\sigma_1 = 4\sigma_2$. Reemplazando en la ecuación (1) se obtiene

$$\sigma_1 = 176.20 \text{ MPa} \quad \sigma_2 = 44.05 \text{ MPa} \quad \text{Resp.}$$

Luego
$$\Delta_1 = \frac{176.2 \times 0.40}{200 \times 10^3} = 0.35 \times 10^{-3} \text{ m} = 0.35 \text{ mm}$$

$$\Delta_2 = \frac{44.05 \times 0.50}{200 \times 10^3} = 0.11 \times 10^{-3} \text{ m} = 0.11 \text{ mm}$$

$$\Delta_1 + \Delta_2 = 0.46 \text{ mm}$$

de modo que $\Delta_A = 0.46 \text{ mm}$ y $\Delta_B = 0.11 \text{ mm}$ Resp.

Con frecuencia, la carga de energía es el resultado de una carga dinámica mediante la cual un sistema transfiere su energía a otro sistema por medio de impacto. Un ejemplo típico es un peso que cae y transfiere por impacto parte de su energía cinética al cuerpo con el cual hace contacto. Considérese, por ejemplo, la barra representada en la fig. 6-20, la cual se carga dinámicamente mediante un cuerpo que cae desde el reposo. La energía cinética en B es cero. En C' la energía cinética (EC) es igual a la pérdida de energía potencial (EP). De este modo,

$$KE_B + PE_B = KE_{C'} + PE_{C'}$$

o

$$KE_{C'} = PE_B - PE_{C'} = W(h + \Delta_{\max}) \quad (6-24)$$

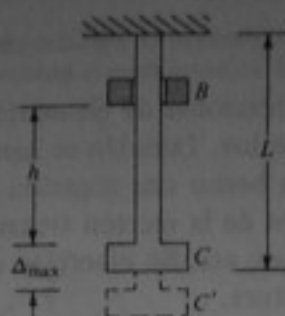


Figura 6-20 Barra axial cargada mediante un cuerpo que cae.

Si toda la energía cinética se transforma en deformación de la barra, es decir, no hay pérdida de energía, entonces, de acuerdo con las ecuaciones (6-19b) y (6-24)

$$U = \frac{\sigma_{\max}^2 V}{2E} = \frac{\sigma_{\max}^2 AL}{2E} = W(h + \Delta_{\max}) \quad (6-25)$$

$$y \quad \Delta_{\max} = \frac{\sigma_{\max} L}{E} \quad (6-26)$$

Mediante estas dos últimas ecuaciones se puede determinar σ_{\max} y Δ_{\max} .

Ejemplo 6-13 Considérese una barra como la de la fig. 6-20, para la cual $A = 13 \text{ cm}^2$, $W = 135 \text{ N}$, $L = 75 \text{ cm}$, $h = 35 \text{ cm}$ y $E = 210 \times 10^3 \text{ MPa}$. ¿Cuáles son el esfuerzo y el desplazamiento máximos?

SOLUCION Utilizando la ecuación (6-25) y reemplazando Δ_{\max} por $\sigma_{\max} L/E$ se tiene

$$\frac{\sigma_{\max}^2 AL}{2E} = Wh + W \frac{\sigma_{\max} L}{E}$$

$$o \quad \sigma_{\max}^2 - \frac{2W}{A} \sigma_{\max} - \frac{2EWh}{AL} = 0$$

Sustituyendo los valores de W , A , h , L y E se obtiene

$$\sigma_{\max}^2 - (20.769 \times 10^4) \sigma_{\max} - 2035.38 \times 10^{13} = 0$$

de donde

$$\sigma_{\max} = 14.280 \times 10^7 \text{ Pa} = 142.8 \text{ MPa} \quad \text{Resp.}$$

De acuerdo con la ecuación (6-26), el desplazamiento máximo es

$$\Delta_{\max} = \frac{142.8 \times 0.75}{210 \times 10^3} = 0.51 \times 10^{-3} \text{ m} = 0.51 \text{ mm} \quad \text{Resp.}$$

6-7 RESUMEN

En este capítulo se han tratado los esfuerzos y deformaciones de elementos cargados axialmente, estáticamente determinados e indeterminados. También se han estudiado las barras compuestas de varios materiales. Solo se ha hecho una mención breve de la concentración de esfuerzos debida a cambios bruscos de la sección transversal, tales como la producida por agujeros, cortes, imperfecciones, etc. Su efecto se considerará más detalladamente en el capítulo 13, que trata la fractura.

Debe señalarse que, en realidad, muy pocos elementos se someten a carga axial pura, aunque se diseñen para tal fin. Las uniones excéntricas en los extremos, la falta de rectitud de los elementos y las cargas secundarias, como el peso, son algunos de los efectos que a veces se desprecian por considerarlos secundarios, pero que deben ser tenidos en cuenta.

Los elementos axiales sometidos a compresión, o sea, las columnas, se excluyeron debido a que, con excepción de las columnas muy cortas, la estabilidad al pandeo es la que controla su diseño. Asimismo, los llamados efectos secundarios que se mencionaron anteriormente con frecuencia exigen mayores factores de diseño. El comportamiento de las columnas se trata detalladamente en el capítulo 13.

PROBLEMAS

6-1 Para la cimentación (fundación) de concreto que se muestra, determinar el desplazamiento vertical máximo debido a una carga superpuesta p de intensidad 3 klb/pie² y al peso de la fundación, si $\gamma = 0.15$ klb/pie³ y $E_c = 3 \times 10^3$ klb/pul².

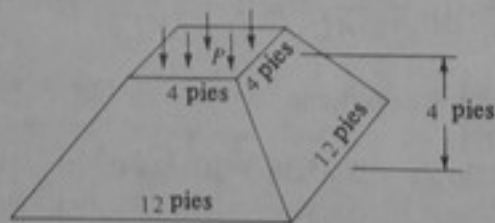


Figura P6-1

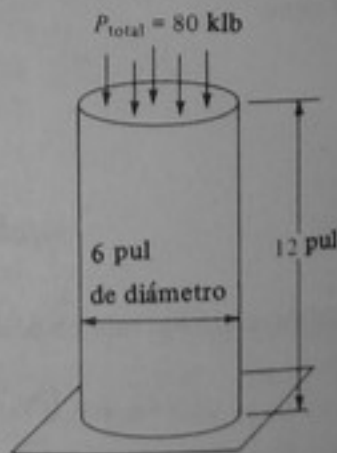


Figura P6-2

6-2 Un cilindro normal de concreto para ensayo se somete a una fuerza de compresión de 80 klb.

- ¿Cuál es el acortamiento vertical, si no se tiene en cuenta el efecto del peso del cilindro?
- Si el peso unitario del concreto es 0.15 klb/pie³, ¿qué porcentaje del acortamiento se agregaría al tener en cuenta el peso del cilindro? Utilizar $E_c = 3 \times 10^3$ klb/pul².

6-3 Para la cimentación de concreto representada en la figura, determinar el desplazamiento vertical total (despreciando el peso muerto). Utilizar $E_c = 4 \times 10^3$ klb/pul².

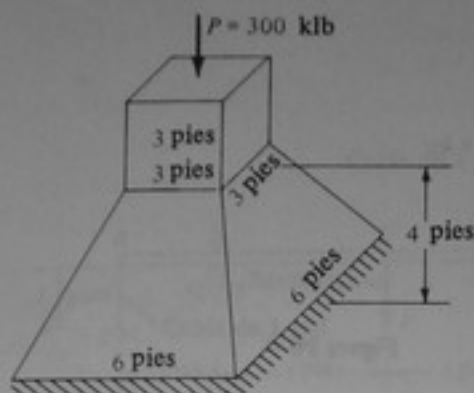


Figura P6-3

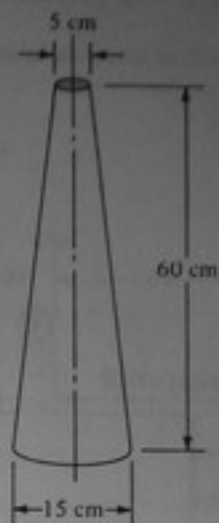


Figura P6-4

6-4 Para el cono circular que se muestra, determinar el desplazamiento de la parte superior debido al peso del cono si la densidad es γ N/m³ y el módulo de elasticidad es E Pa.

6-5 Repetir el problema 6-4 si el cono es hueco y el espesor de la pared es 2 mm.

6-6 Repetir el problema 6-5 si se distribuye uniformemente una fuerza de compresión de 5 N sobre el área superior y se desprecia el peso del cono.

6-7 La pirámide invertida de la figura está soportada en su parte superior.

- Determinar el alargamiento debido al peso de la pirámide si $\gamma = 76$ kN/m³ y $E = 100 \times 10^3$ MPa.
- Si el esfuerzo de fluencia es 250 MPa, ¿cuál es la máxima fuerza de tracción, P , que la pirámide puede soportar?
- Determinar el alargamiento inmediatamente antes de la fluencia.

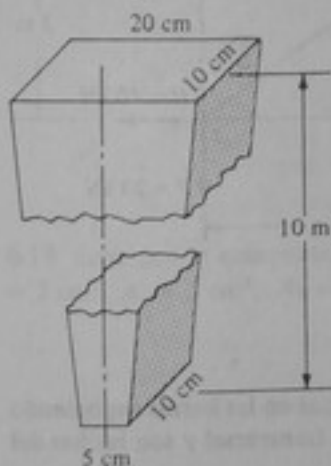


Figura P6-7

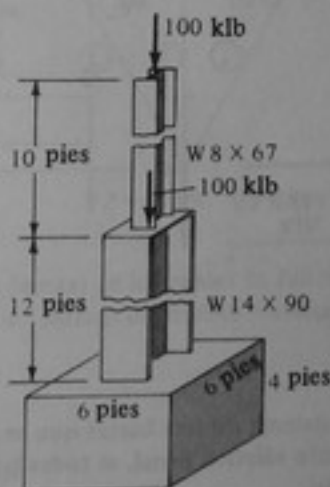


Figura P6-8

6-8 Una columna de dos pisos descansa sobre una fundación de concreto, como se muestra en la figura. Supóngase $E_{ac} = 30 \times 10^3$ klb/pul² y $E_c = 3 \times 10^3$ klb/pul².

- ¿Cuál es el desplazamiento de cada porción de la columna (despreciando el peso de la misma)?
- ¿Cuál es el desplazamiento total, suponiendo que la base de la fundación no se asienta?

6-9 Un pilote de cimentación desarrolla una resistencia de rozamiento, $f(y)$ kN/m, que varía linealmente. El pilote se carga con una fuerza de 200 kN en su parte superior y no hay resistencia en la punta (es decir, $R = 0$). ¿Cuánto se acorta el pilote si $E = 10^4$ MPa y $A = 50$ cm²?

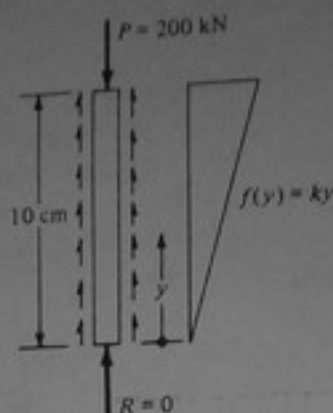


Figura P6-9

6-10 Repetir el problema 6-9 si la resistencia de rozamiento por unidad de longitud varía cúbicamente, es decir, $f(y) = ky^3$.

6-11 Repetir el problema 6-9 si la resistencia en la punta, R , es igual a 100 kN.

6-12 El material del sistema de tres barras representado en la figura se comporta en forma elasto-plástica ideal y $\sigma_{flu} = 70$ MPa. ¿Cuáles son los valores de:

- La carga al empezar la fluencia, P_{flu} ?
- La carga final, P_{fin} , si $A_1 = A_3 = 2.5$ cm² y $A_2 = 3.0$ cm²?
- El desplazamiento vertical de D al empezar la fluencia y exactamente antes de la falla?

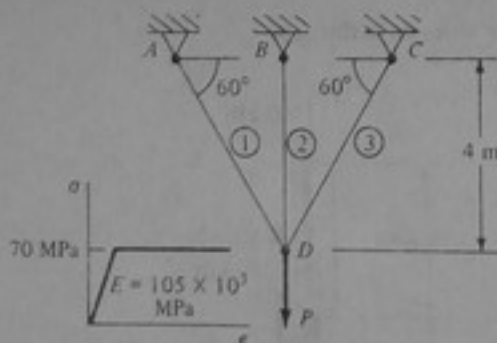


Figura P6-12

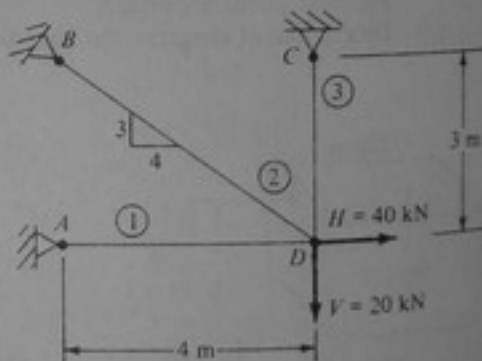


Figura P6-13

6-13 Para el sistema de tres barras que se muestra, determinar las fuerzas en las barras suponiendo comportamiento elástico lineal, si todas las barras tienen la misma área transversal y son hechas del mismo material.

6-14 En el problema 6-13, supóngase que el material se comporta en forma elasto-plástica ideal y que $E = 200 \times 10^3$ MPa y $\sigma_{flu} = 200$ MPa. ¿Cuáles son los valores de (a) la carga de falla y (b) los desplazamientos horizontal y vertical del punto D exactamente antes de la falla? Tomar $A = 5$ cm², y suponer que H y V aumentan inicialmente en forma proporcional (es decir que, $H = 2V$) hasta que falla la primera barra, después de la cual ambos pueden llegar a sus máximos valores posibles.

6-15 La barra rígida que se muestra está sujeta por dos cables de 1 pul de diámetro que tienen un esfuerzo de influencia de $\sigma_{flu} = 36 \text{ klb/pul}^2$. Tomar $E_{cable} = 30 \times 10^3 \text{ klb/pul}^2$.

- ¿Cuál es la carga al empezar la fluencia, P_{flu} ?
- ¿Cuál es la carga final, P_{fin} ?
- ¿Cuáles son los alargamientos en cada uno de los cables al empezar la fluencia y exactamente antes de la falla?

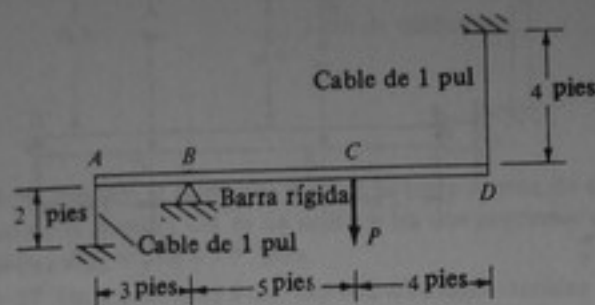


Figura P6-15

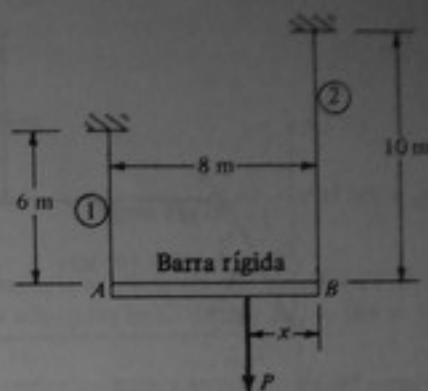


Figura P6-16

6-16 Una barra rígida AB está suspendida por dos alambres. Los alambres tienen un diámetro de 20 mm y sus módulos de elasticidad son $E_1 = 50 \times 10^3 \text{ MPa}$ y $E_2 = 150 \times 10^3 \text{ MPa}$.

- ¿Cuál debe ser el valor de x para que la barra permanezca horizontal?
- ¿Cuál es el valor máximo de P si los dos materiales son perfectamente elastoplásticos, $\sigma_{flu1} = 75 \text{ MPa}$ y $\sigma_{flu2} = 150 \text{ MPa}$?
- ¿Cuál es el desplazamiento total para P_{max} ?

6-17 Determinar la fuerza de tracción en cada uno de los cables si estos tienen los mismos valores de E y A y se comportan elásticamente.

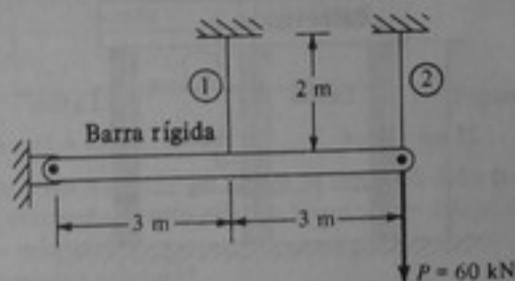


Figura P6-17

6-18 Suponiendo comportamiento elástico, expresar las fuerzas en los cables de función de P si $A_1 = 2 \text{ cm}^2$, $A_2 = 3 \text{ cm}^2$, $A_3 = 2.4 \text{ cm}^2$, y todos los cables se fabrican del mismo material.

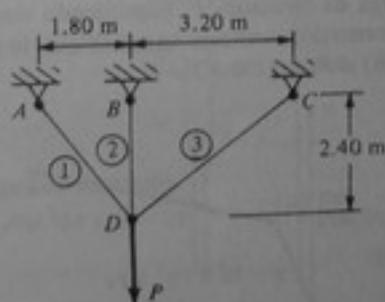


Figura P6-18

6-19 Para el sistema del problema 6-18, supóngase que la curva esfuerzo-deformación unitaria es como se indica. ¿Cuáles son los valores de:

- La carga al empezar la fluencia, P_{flu} ?
 - La carga final, P_{fin} ?
 - Los desplazamientos vertical y horizontal al empezar la fluencia y para la carga final?
- Tomar $E = 200 \times 10^3$ MPa y observar que la falla por fluencia de dos cables se considera final.

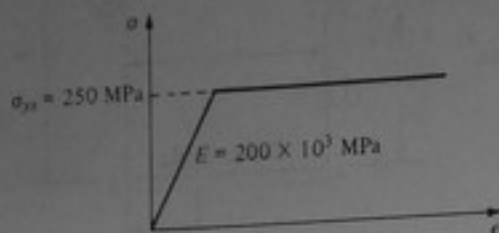


Figura P6-19

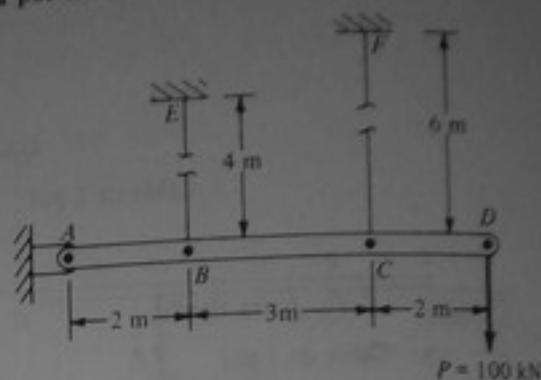


Figura P6-20

6-20 Si las áreas de las secciones transversales de los cables EB y FC son 5.0 cm^2 y 6.0 cm^2 , respectivamente, y la barra $ABCD$ se considera rígida, ¿cuál es el esfuerzo en cada cable?

6-21 Repetir el problema 6-20 si $\alpha = 12 \times 10^{-6} \text{ mm/m/}^\circ\text{C}$ para los cables y, además de conservarse la carga P , la temperatura de los cables se aumenta en 20°C . Utilizar $E = 200 \times 10^3$ MPa.

6-22 Si el área de la sección transversal de cada una de las barras que se muestran es de 25 cm^2 , ¿cuál será el valor de la carga P , de tal modo que todas las barras queden igualmente esforzadas? Supóngase que todas las barras trabajan en el intervalo elástico, $E_{ac} = 210 \times 10^3$ MPa y $E_{la} = 105 \times 10^3$ MPa.

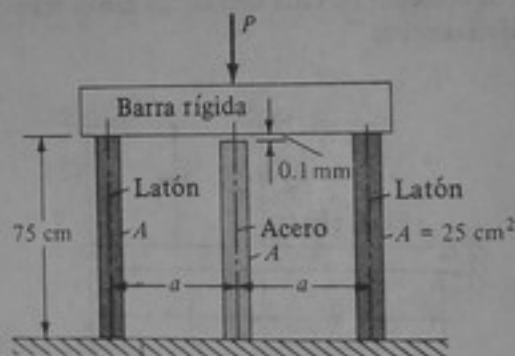


Figura P6-22

6-23 Para el sistema de apoyo del problema 6-22, supóngase un comportamiento elastoplástico ideal, $\sigma_{flu,la} = 70$ MPa y $\sigma_{flu,ac} = 250$ MPa.

- ¿Qué cargas causarán la iniciación de la fluencia y la falla?
- ¿Cuáles son los desplazamientos?

6-24 Una barra de un metro de longitud y sección transversal rectangular ($10 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$) se carga en su dirección axial con una carga de tracción, P . Suponiendo una distribución uniforme de esfuerzos y una curva esfuerzo-deformación unitaria como la que se muestra, determinar el alargamiento total (α) si $P = 500$ KN y (b) si $P = 1200$ KN.

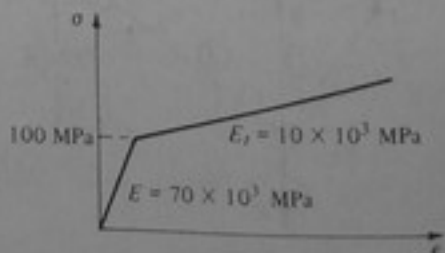


Figura P6-24

6-25 Para la barra de acero que se muestra, ¿cuáles son las reacciones en A y en B ? ¿Cuál es el desplazamiento vertical del punto C ? Tomar $E_{ac} = 210 \times 10^3$ MPa y suponer comportamiento elástico.

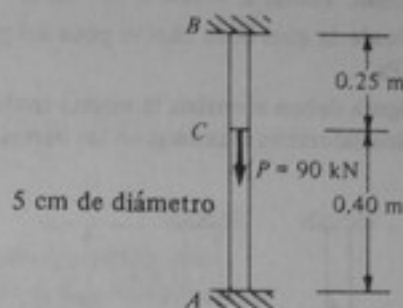


Figura P6-25

6-26 Repetir el problema 6-25 si la barra consta de dos materiales elásticos. La porción BC es de latón, la porción CA es de acero y las dos porciones están adheridas en C . Tomar $E_{la} = 105 \times 10^3$ MPa y $E_{ac} = 210 \times 10^3$ MPa.

6-27 En el problema 6-26, suponer que los materiales son perfectamente elastoplásticos.

(a) ¿Qué carga P_{flu} producirá la fluencia?

(b) ¿Cuáles son las reacciones y cuál es el desplazamiento vertical del punto C cuando se aplica la carga de fluencia si $\sigma_{flu,la} = 150$ MPa y $\sigma_{flu,ac} = 250$ MPa?

6-28 En el problema 6-27, ¿cuál es la carga final si los materiales se comportan igual en compresión que en tracción? ¿Cuál es el desplazamiento del punto C en la falla?

6-29 Si los coeficientes de dilatación térmica para los dos materiales son $\alpha_{ac} = 12 \times 10^{-6}$ m/m/°C y $\alpha_{la} = 19 \times 10^{-6}$ m/m/°C, ¿cuáles son los esfuerzos en el acero y en el latón cuando la temperatura de la barra aumenta 20°C? Utilizar $E_{ac} = 210 \times 10^3$ MPa y $E_{la} = 105 \times 10^3$ MPa. Las dos porciones de la barra tienen la misma área en la sección transversal, A .

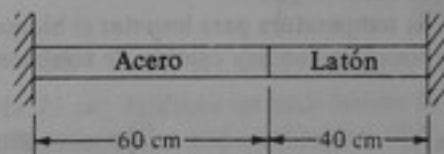


Figura P6-29

6-30 Una barra cuadrada de 5 cm \times 5 cm y un metro de longitud debe resistir una carga de energía axial de 10 J. Supóngase un comportamiento elástico lineal y $E = 200 \times 10^3$ MPa.

(a) ¿Cuál es el esfuerzo máximo?

(b) ¿Cuál es el desplazamiento máximo?

6-31 La barra que se muestra se somete a una carga de energía axial de 40 lb \cdot pie en A . ¿Cuáles son los desplazamientos máximos de los puntos A y B ? Supóngase un comportamiento elástico lineal y $E = 36 \times 10^3$ klb/pul².

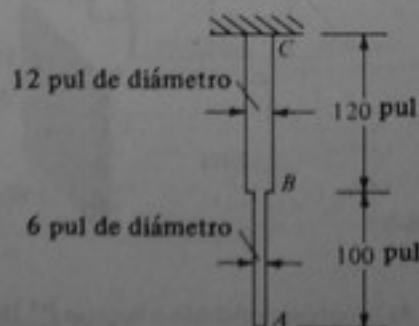


Figura P6-31

6-32 Una barra vertical de acero de 8 m de longitud y 4 cm de diámetro se soporta en su extremo superior. La barra tiene un peso de 10 kg y se deja caer un peso de 15 kg desde una altura de 50 cm, el cual golpea un tope situado en el extremo inferior de la barra. Determinar (a) el esfuerzo máximo en la barra y (b) su alargamiento máximo. Tomar $E = 200 \times 10^3$ MPa.

6-33 Determinar la altura máxima desde la cual debe caer el peso del problema 6-32 para que produzca un esfuerzo máximo de 200 MPa.

6-34 Las dos barras elásticas de la figura deben absorber la misma cantidad de energía de deformación axial. ¿Cuál es la relación entre los esfuerzos máximos en las barras?

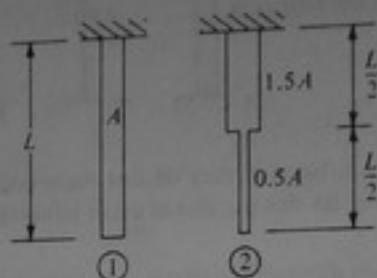


Figura P6-34

6-35 Una barra de acero de 4 cm de diámetro y 1 m de longitud se somete a una carga de energía axial de tracción de 40 J. Determinar (a) el esfuerzo de tracción máximo y (b) el desplazamiento máximo. Emplear $E = 200 \times 10^3$ MPa.

6-36 En el problema 6-35, ¿cuál debe ser el límite proporcional del acero si debe soportar la carga de energía con un factor de seguridad de 2.5?

6-37 La varilla de acero representada en la figura no soporta carga a la temperatura a la cual fue hecha la instalación, es decir, que el piso soporta todo el peso. Tomar $\alpha_{1a} = 19 \times 10^{-6}$ m/m/°C y $E_{1a} = 105 \times 10^3$ MPa. Si la temperatura de la varilla disminuye 18°C,

(a) ¿Qué carga ejercerá el bloque sobre el piso?

(b) ¿En cuánto debe disminuir la temperatura para levantar el bloque 5 mm?

(Despreciar el peso de la varilla y suponer que no hay cambio de temperatura en el bloque).

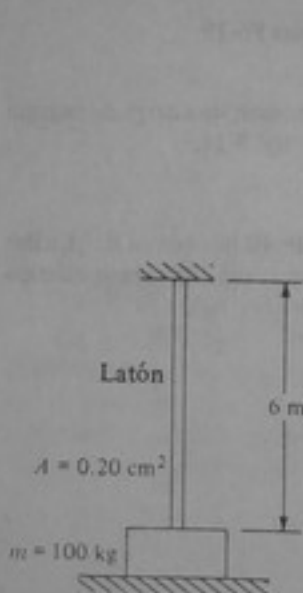


Figura P6-37

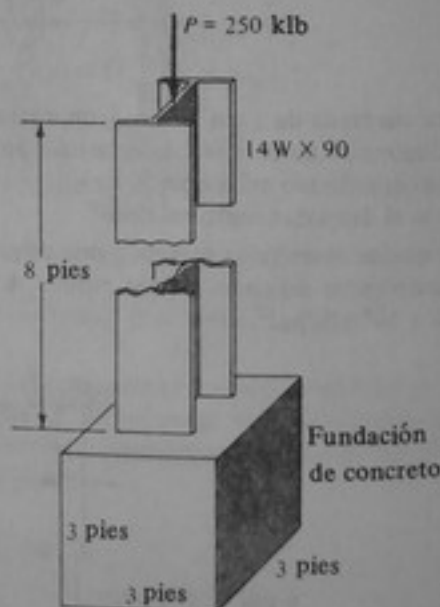


Figura P6-38

6-38 ¿Cuál es el desplazamiento total de la columna debido a la carga P ? Despreciar la carga muerta y utilizar $E_{ac} = 29 \times 10^3$ klb/pul² y $E_c = 3 \times 10^3$ klb/pul².

6-39 La columna de concreto reforzado de la ilustración se somete a una carga de compresión de 150 klb. Determinar los acortamientos y los esfuerzos en el acero y el concreto, suponiendo comportamiento elástico de ambos materiales y adherencia perfecta. $E_{ac} = 30 \times 10^3$ klb/pul² y $E_c = 4 \times 10^3$ klb/pul².

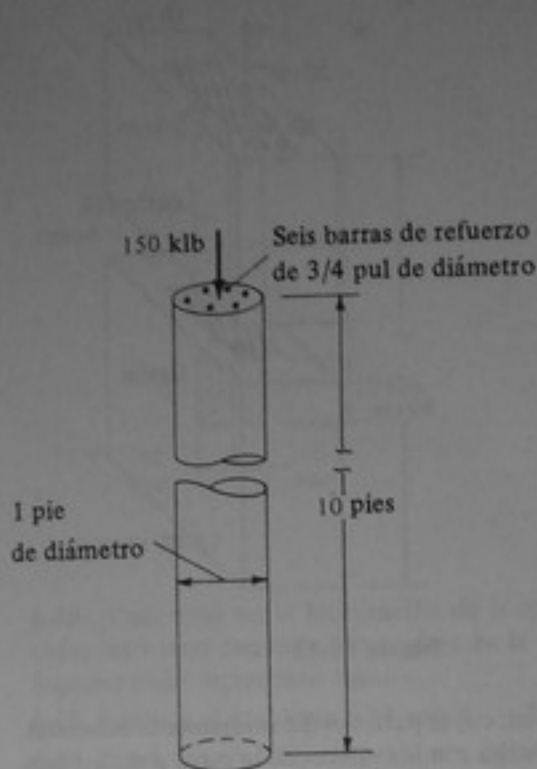


Figura P6-39

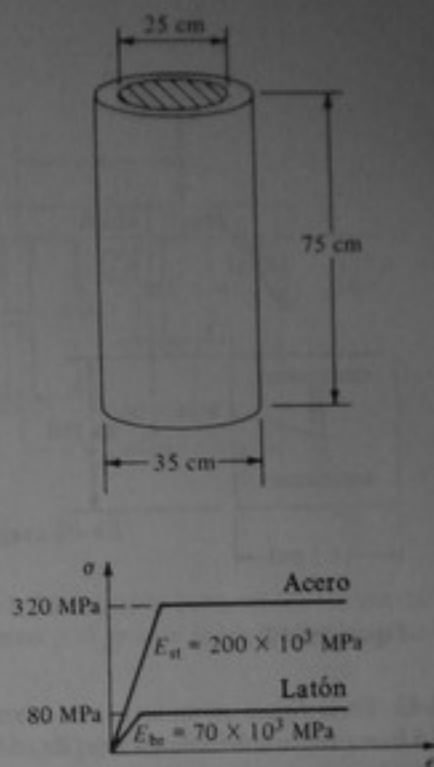


Figura P6-40

6-40 Una barra de latón de 25 cm de diámetro está dentro de un tubo de acero que tiene 35 cm de diámetro exterior. Los dos materiales están adheridos. Si $E_{ac} = 200 \times 10^3$ MPa y $E_{la} = 70 \times 10^3$ MPa, los dos materiales tienen comportamiento elastoplástico ideal y sus esfuerzos de fluencia son $\sigma_{flu,ac} = 320$ MPa y $\sigma_{flu,la} = 80$ MPa, determinar (a) el alargamiento si $P = 10$ MN y (b) el alargamiento si $P = 18$ MN.

6-41 La placa representada se somete a una carga de rozamiento uniformemente distribuida de 100 kN/m en ambas caras. Tomar $E = 200 \times 10^3$ MPa y $\nu = 0.25$. Determinar:

- El esfuerzo longitudinal en I-I.
- El alargamiento total si la placa se sujeta en AB.
- El cambio en la dimensión transversal (200 mm) en I-I.

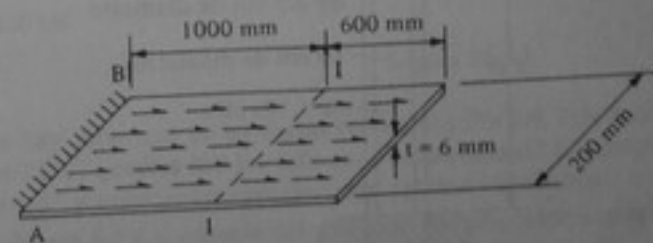


Figura P6-41

6-42 A una columna hecha de un perfil W14 x 90, de 10 pies de longitud, se adhiere una capa de concreto con el fin de que pueda soportar un incendio durante 4 horas. ¿Cuál es el desplazamiento debido a una fuerza de 600 klb? (Despreciar la deformación debida al peso de la columna y utilizar $E_{ac} = 30 \times 10^3$ klb/pul² y $E_c = 3 \times 10^3$ klb/pul²).

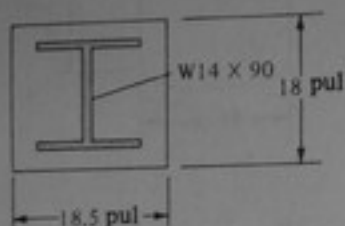


Figura P6-42

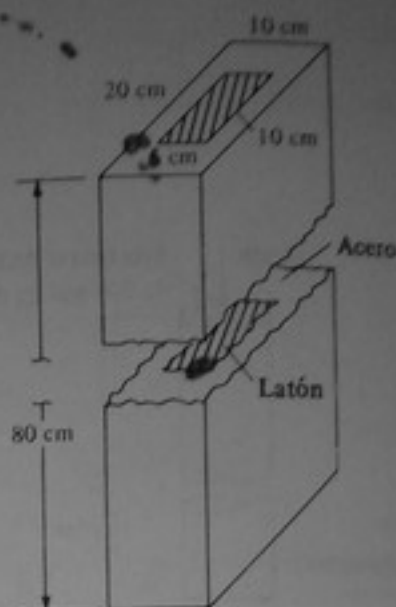


Figura P6-43

6-43 En la figura se muestra una barra de acero y latón, cuyas partes están fuertemente adheridas. La barra soporta una carga axial de compresión, P . ¿Cuáles son los valores de la carga y el desplazamiento (a) al empezar la fluencia y (b) al momento de la falla? Supóngase un comportamiento elastoplástico ideal, $E_{ac} = 210 \times 10^3$ MPa, $\sigma_{flu,ac} = 250$ MPa, $E_{la} = 105 \times 10^3$ MPa, y $\sigma_{flu,la} = 70$ MPa.

6-44 La barra del problema 6-43 se somete a una carga axial de compresión de 500 kN y la temperatura aumenta 30°C . Determinar el alargamiento si $\alpha_{la} = 19 \times 10^{-6}$ m/m/ $^\circ\text{C}$ y $\alpha_{ac} = 12 \times 10^{-6}$ m/m/ $^\circ\text{C}$.

6-45 La barra redonda de acero se comprime apretando las tuercas de ocho varillas de acero de alta resistencia una distancia de 10 mm. Supóngase un comportamiento elástico, $\sigma_{flu,varillas} = 500$ MPa y $E = 210 \times 10^3$ MPa y hallar:

- La disminución en longitud de la barra central.
- Los esfuerzos en las varillas y en la barra central.



Figura P6-45

6-46 Repetir el problema 6-45 si las varillas se aprietan 20 mm.

6-47 (a) ¿Cuál debe ser la localización de la carga P , de tal modo que la placa rígida de la parte superior permanezca horizontal? Utilizar $E_{ac} = 200 \times 10^3$ MPa y $E_{al} = 70 \times 10^3$ MPa.

(b) ¿Cuál es la relación entre los esfuerzos en el acero y en el aluminio?

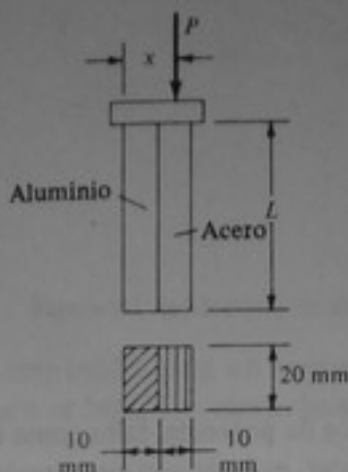


Figura P6-47

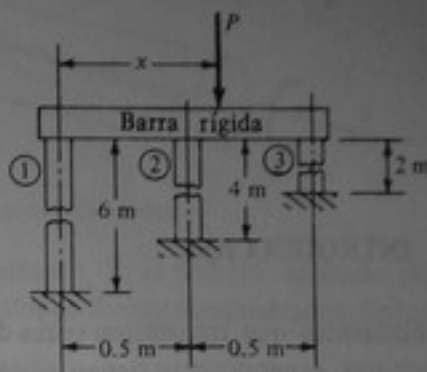


Figura P6-48

6-48 ¿Cuál debe ser la localización de la carga P para que la barra rígida permanezca horizontal si todas las barras tienen la misma área en la sección transversal y el mismo módulo de elasticidad? Suponer comportamiento elástico.

6-49 Resolver el problema 6-48 con $A_1 = 2A_2 = 2A_3$.

6-50 Resolver el problema 6-48 con $E_1 = 200 \times 10^3$ MPa, $E_2 = 70 \times 10^3$ MPa y $E_3 = 100 \times 10^3$ MPa.

6-51 Resolver el problema 6-48 con $A_1 = 6 \text{ cm}^2$, $A_2 = A_3 = 3 \text{ cm}^2$, $E_1 = 200 \times 10^3$ MPa, $E_2 = 70 \times 10^3$ MPa y $E_3 = 100 \times 10^3$ MPa.

6-52 Para el sistema de la figura, la barra rígida AB es horizontal en la posición descargada. Después de aplicar la carga P en forma centrada, ¿cuál debe ser el aumento o disminución de la temperatura ΔT para que la barra permanezca en posición horizontal? Suponer $E_{ac} = 210 \times 10^3$ MPa, $E_{la} = 105 \times 10^3$ MPa, $\alpha_{ac} = 12 \times 10^{-6} \text{ m/m/}^\circ\text{C}$ y $\alpha_{la} = 19 \times 10^{-6} \text{ m/m/}^\circ\text{C}$.

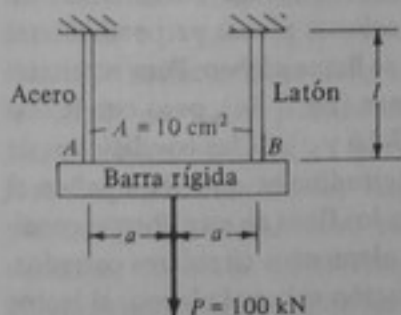


Figura P6-52

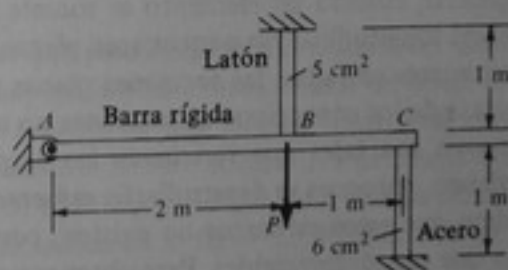


Figura P6-53

6-53 Inicialmente no hay esfuerzos en las barras verticales y $P = \text{kN}$. Si la varilla de latón y la varilla de acero se calientan 25°C , ¿cuáles son los esfuerzos desarrollados? Emplear los datos para los materiales del problema 6-52 y suponer comportamiento totalmente elástico.

6-54 Resolver el problema 6-53 si además del aumento de temperatura se aplica una carga vertical hacia abajo de $P = 48 \text{ kN}$ en el punto B .

Capítulo 7

Torsión

7-1 INTRODUCCION

Los elementos que transmiten pares de torsión en equipos de potencia, tales como ejes de motores, generalmente tienen sección transversal circular, es decir, son ejes circulares sólidos o tubulares. Aunque la torsión casi nunca es factor de control, la consideración de su efecto en elementos estructurales delgados o en elementos curvos hace parte del procedimiento normal de diseño. La primera parte de este capítulo trata sobre el comportamiento de elementos circulares sometidos a torsión. Más adelante se hace una breve discusión del comportamiento a la torsión de las secciones rectangulares de pared delgada, abiertas y cerradas.

7-2 SUPOSICIONES BASICAS

En este capítulo únicamente se consideran los esfuerzos debidos a la torsión "pura". De acuerdo con la sección 2-3, en el caso de torsión, el único vector de par resultante es un momento de torsión interno T que actúa respecto al eje x . Para un elemento estructural, el eje longitudinal del elemento generalmente se escoge como eje x . En general, cuando un elemento se somete a torsión, las secciones planas perpendiculares al eje longitudinal *no* permanecen planas. Este fenómeno se llama *alabeo*. Para secciones circulares cerradas, las secciones planas permanecen planas (fig. 7-1a), pero con la mayoría de los otros tipos de secciones no sucede así (figs. 7-1b y c). Si las condiciones de apoyo son tales que restringen los desplazamientos longitudinales que acompañan el alabeo, entonces se desarrollarán *esfuerzos de alabeo*. Para los fines de este libro se considera que estos esfuerzos no existen, como en el caso de elementos circulares cerrados, o que son despreciables. Para obtener una mayor información sobre el alabeo, el lector debe consultar libros más avanzados de resistencia de materiales, elasticidad o diseño estructural.

Para determinar el momento de torsión que actúa sobre un eje giratorio utilizado para la transmisión de potencia, hay que expresar el momento de torsión en función de caballos de fuerza. Un caballo de fuerza es igual a 745.7 J/s, o sea 745.7 W. Si la velocidad de rotación se expresa en hertz (Hz), es decir, en revoluciones por segundo, entonces el ángulo que gira el eje por segundo es de $2\pi f$ rad si la frecuencia del eje es f Hz.

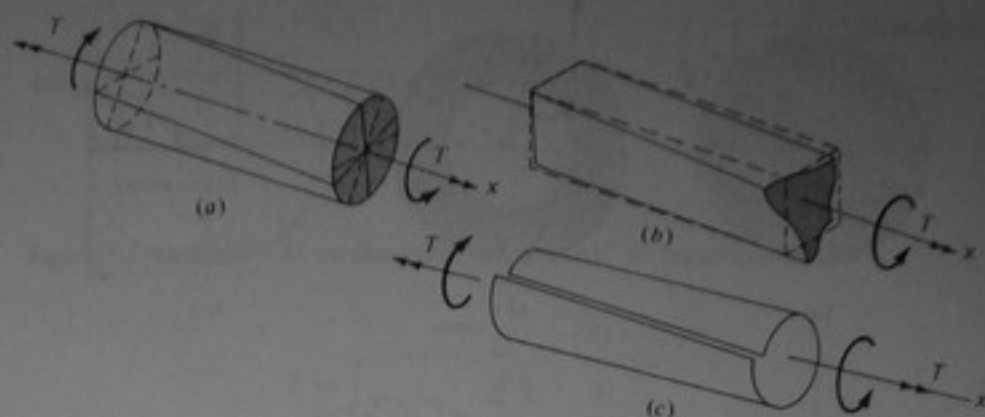


Figura 7-1 (a) Sección no alabeada. (b) y (c) Secciones alabeadas.

De este modo, para un momento de torsión constante, T , el trabajo realizado por segundo es $2\pi f T J/s$, que es igual al número de caballos de fuerza suministrados. Entonces,

$$745.7 \text{ hp} = 2\pi f T$$

$$T = \frac{118.7 \text{ hp}}{f} \text{ N} \cdot \text{m} \quad (7-1)$$

en donde f es la frecuencia del eje giratorio (es decir, el número de revoluciones por segundo) y hp es el número de caballos de fuerza transmitidos. La expresión correspondiente en unidades inglesas es

$$T = \frac{63,000 \text{ hp}}{N} \text{ lb} \cdot \text{pul} \quad (7-2)$$

en donde n es el número de revoluciones por minuto (rpm).

7-3 TORSION DE ELEMENTOS CIRCULARES

Como se indicó en la sección anterior, se supone que para elementos circulares cerrados las secciones planas permanecen planas. Una suposición adicional, basada en observaciones experimentales, es que las líneas rectas radiales en una sección transversal permanecen radiales y rectas después de que el elemento ha sido sometido a deformación torsional, como se muestra en las figs. 7-2a y b. Esta suposición implica que las deformaciones de corte varían linealmente, como se indica en la fig. 7-2c. Para comportamiento elástico lineal se aplica la ley de Hooke y

$$\gamma = \frac{\tau}{G} \quad (7-3)$$

En consecuencia, los esfuerzos cortantes también variarán linealmente, como se muestra en las figs. 7-2d a f. Para comportamiento diferente al lineal todavía se supone que las deformaciones varían linealmente, pero es evidente que los esfuerzos no. El comportamiento no lineal y el comportamiento inelástico se tratan en la sección 7-6.

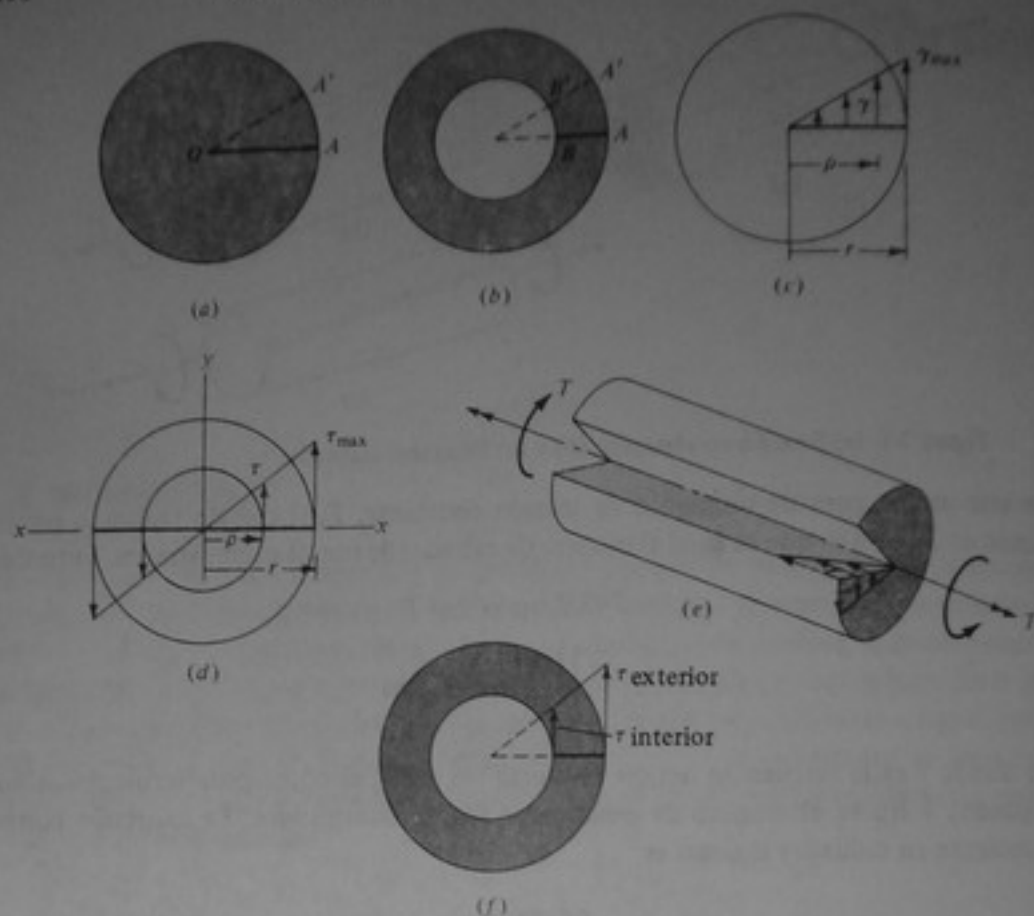


Figura 7-2 Suposiciones de deformación y esfuerzo para secciones circulares cerradas.

Como se puede ver en la fig. 7-2c,

$$\gamma = \frac{\rho \gamma_{\max}}{r} \quad (7.4)$$

mientras que para comportamiento elástico lineal,

$$\tau = \frac{\rho \tau_{\max}}{r} \quad (7.5)$$

De acuerdo con la fig. 7-2e, los esfuerzos cortantes radiales van acompañados de esfuerzos cortantes longitudinales. Por ejemplo, considérese el área curva "rectangular" *abcd* sobre la superficie exterior del eje circular representado en la fig. 7-3a. Después de la deformación torsional esta área se convertirá en un elemento curvo en forma de paralelogramo (fig. 7-3b).

Si consideramos nuevamente el eje circular de las figs. 7-2a, c y d, el equilibrio de momentos de torsión requiere que el momento de torsión externo sea igual al interno. Los esfuerzos internos multiplicados por las áreas sobre las cuales actúan producen fuerzas tangenciales, las cuales, a su vez, multiplicadas por el brazo de momento, deben ser iguales a *T*. De este modo, si consideramos el hecho de que los esfuerzos cortantes actúan tangencialmente, la ecuación (2.5) se puede expresar en la forma

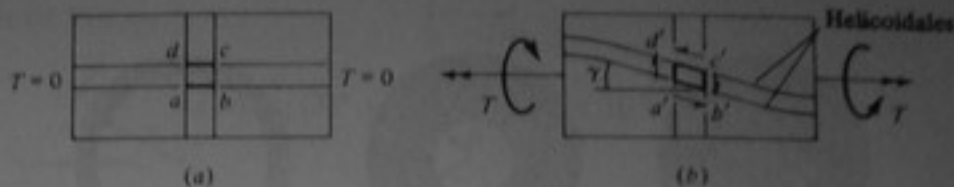


Figura 7-3 Distorsión de un elemento "rectangular" de superficie.

$$T = \int_A \frac{\overbrace{\tau}^{\text{fuerza}}}{\underbrace{dA}_{\text{área}}} \frac{\rho}{\underbrace{r}_{\text{ brazo}}} \quad (7-6)$$

De acuerdo con la ecuación (7-5), para comportamiento elástico lineal esta ecuación se puede escribir así:

$$T = \int_0^r \frac{\tau_{\max}}{r} \rho^2 dA = \frac{\tau_{\max}}{r} \int_A \rho^2 dA$$

Por definición, la expresión $\int_A \rho^2 dA$ es igual al momento polar de inercia, designado a veces como I_p , pero generalmente en el caso de análisis torsional, como J . Entonces

$$T = \frac{\tau_{\max} J}{r} \quad (7-7)$$

$$\tau_{\max} = \frac{Tr}{J} \quad (7-8)$$

El esfuerzo τ a una distancia ρ del centroide es igual a

$$\tau = \frac{T\rho}{J} \quad (7-9)$$

En estos casos, el momento polar de inercia, J , se puede expresar en la forma

$$\begin{aligned} J &= \int_A \rho^2 dA = \int_A (y^2 + x^2) dA = \int_A y^2 dA + \int_A x^2 dA \\ &= I_x + I_y \end{aligned} \quad (7-10)$$

Para ejes circulares sólidos de radio r (fig. 7-4a), el momento polar de inercia es

$$J = \int_0^r \rho^2 (2\pi\rho) d\rho = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32} \quad (7-11)$$

en donde d es el diámetro. Para ejes huecos (fig. 7-4b),

$$J = \frac{\pi}{2} (r_o^4 - r_i^4) = \frac{\pi}{32} (d_o^4 - d_i^4) \quad (7-12)$$

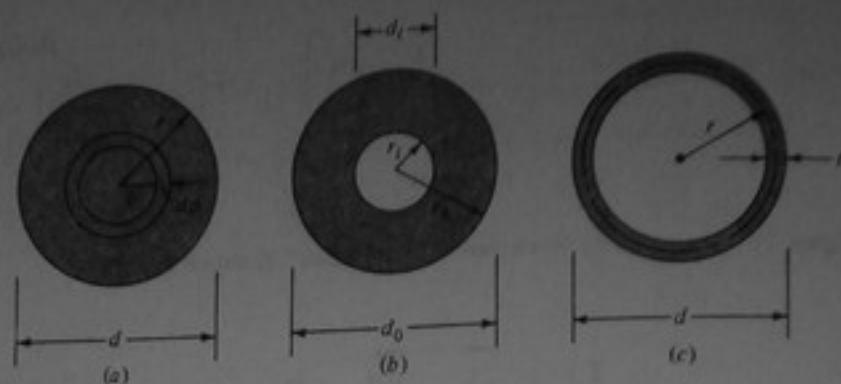


Figura 7-4 Momentos polares de inercia para secciones transversales circulares.

Para tubos de pared delgada (fig. 7-4c), la expresión para J se puede aproximar mediante

$$J = 2\pi r^3 t = \frac{\pi d^3 t}{4} \quad (7-13)$$

en donde r es el radio promedio. El símbolo J también se emplea para elementos no circulares, pero en este caso no representa el momento polar de inercia †. Generalmente se refiere a la *constante de torsión* de la sección transversal.

La dimensión de J es (longitud)⁴ y se expresa usualmente en metros⁴ o pulgadas⁴. Los valores de J se pueden consultar en la tabla A-9.

Ejemplo 7-1 El eje que se muestra en la fig. 7-5 se somete a los momentos de torsión T_1 ($50 \text{ N}\cdot\text{m}$) y T_2 ($-250 \text{ N}\cdot\text{m}$). Determinar los esfuerzos cortantes en el interior y en el exterior de la porción hueca BC y en el exterior de la porción sólida AB .

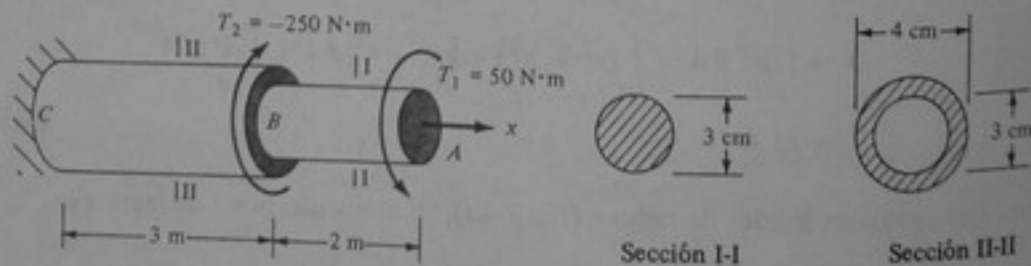


Figura 7-5 Ejemplo 7-1.

† La constante de torsión J no se debe confundir con el Joule (J), que es la unidad de energía en el sistema SI.

SOLUCION

$$J_I = \frac{\pi}{32} (3)^4 \times 10^{-8} = 7.95 \times 10^{-8} \text{ m}^4$$

$$J_{II} = \frac{\pi}{32} (4^4 - 3^4) \times 10^{-8} = 17.18 \times 10^{-8} \text{ m}^4$$

$$T_{AB} = 50 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$T_{BC} = -250 + 50 = -200 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\tau_{AB} = \frac{50(1.5) \times 10^{-2}}{7.95 \times 10^{-8}} = 9.434 \times 10^6 \text{ Pa} = 9.434 \text{ MPa} \quad \text{Resp.}$$

$$\tau_{BC(\text{exterior})} = \frac{-200(2) \times 10^{-2}}{17.18 \times 10^{-8}} = 23.283 \times 10^6 \text{ Pa} = 23.283 \text{ MPa} \quad \text{Resp.}$$

$$\tau_{BC(\text{interior})} = \frac{-200(1.5) \times 10^{-2}}{17.18 \times 10^{-8}} = 17.462 \times 10^6 \text{ Pa} = 17.462 \text{ MPa} \quad \text{Resp.}$$

7-4 DEFORMACIONES POR TORSION

Considérese una porción corta, de longitud dx , de un eje circular (fig. 7-6) sometido a un momento de torsión T . Si se impide la rotación del eje en x , entonces la rotación por unidad de longitud es $d\phi/dx$. Por definición, el ángulo γ representa la deformación de corte. Se observa que para relacionar $d\phi$ con γ_{\max} , de acuerdo con la fig. 7-6,

$$B'B'' = r d\phi \simeq \gamma_{\max} dx$$

$$\text{O} \quad \frac{d\phi}{dx} = \frac{\gamma_{\max}}{r} = \frac{\gamma}{\rho} \quad (7-14)$$

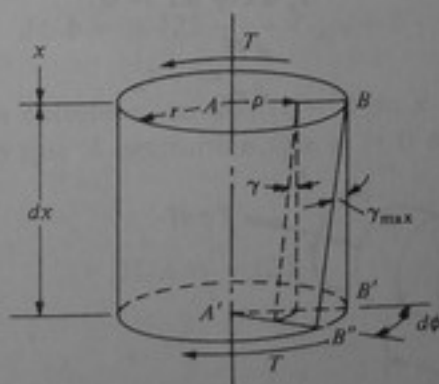


Figura 7-6 Deformación por torsión de un eje circular.

Para comportamiento elástico lineal, γ_{\max} es igual a τ_{\max}/G . Empleando la ecuación (7-8) se obtiene

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{T}{JG} \quad (7-15)$$

La rotación total ϕ_{AB} entre los puntos A y B es

$$\phi_{AB} = \int_A^B \frac{T dx}{JG} \quad (7-16)$$

Si T y J son constantes entre los puntos A y B , los cuales están separados por una distancia L , entonces,

$$\phi_{AB} = \frac{TL}{JG} \quad (7-17)$$

Ejemplo 7-2 Considérese el eje del ejemplo 7-1. Determinar ϕ_{AC} si $G = 85 \times 10^3$ MPa.

SOLUCION

$$\phi_{AB} = \frac{T_{AB} \overline{AB}}{J_1 G} = \frac{50(2)}{7.95 \times 10^{-8} \times 85 \times 10^9} = +0.0148 \text{ rad}$$

$$\phi_{BC} = \frac{T_{BC} \overline{BC}}{J_2 G} = \frac{(-200)3}{17.18 \times 10^{-8} \times 85 \times 10^9} = -0.0411 \text{ rad}$$

$$\phi_{AC} = \phi_{AB} + \phi_{BC} = -0.0263 \text{ rad} = -1.5^\circ \quad \text{Resp.}$$

Para ejes sometidos a un momento de torsión distribuido, t_x por unidad de longitud (fig. 7-7), la ecuación de equilibrio es

$$t_x dx + dT = 0 \quad (7-18)$$

$$\frac{dT}{dx} = -t_x \quad (7-19)$$

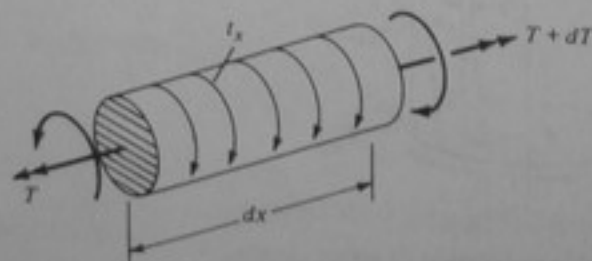


Figura 7-7 Elemento de eje sometido a un momento de torsión distribuido.

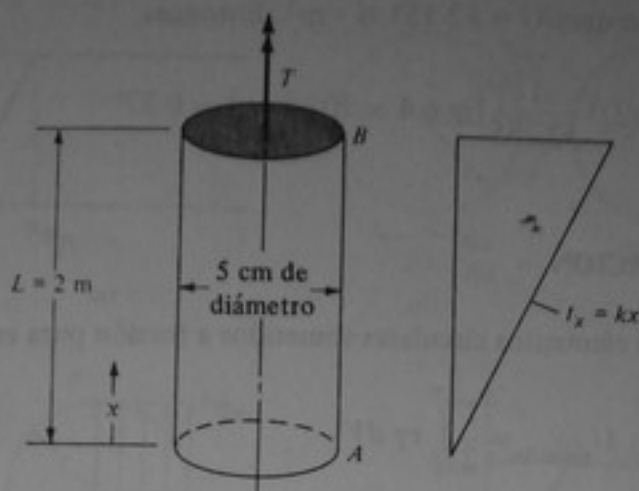


Figura 7-8 Ejemplo 7-3.

Si J y G son constantes, se puede escribir

$$\frac{dT}{dx} = JG \frac{d^2\phi}{dx^2} = -t_x \quad (7-20)$$

Esta ecuación permite la determinación de ϕ , usando doble integración.

Ejemplo 7-3 Considérese un eje circular sólido, de 5 cm de diámetro, sometido a una resistencia de torsión que varía linealmente, $t_x = kx$ (fig. 7-8). Si $T = 500\text{ N} \cdot \text{m}$, determinar ϕ_{AB} (suponer $G = 85 \times 10^3\text{ MPa}$).

SOLUCION Como $T = \int^2 kx\ dx = 2k = 500\text{ N} \cdot \text{m}$, tenemos $k = 250\text{ N/m}$ y $t_x = -250x$. De acuerdo con la ecuación (7-20),

$$JG \frac{d^2\phi}{dx^2} = +250x$$

$$JG \frac{d\phi}{dx} = +250 \frac{x^2}{2} + C_1$$

$$JG\phi = +125 \frac{x^3}{3} + C_1x + C_2$$

Las condiciones en los extremos son $d\phi/dx = 0$ en $x = 0$, lo cual implica que $C_1 = 0$ y, suponiendo que A permanece fijo, $\phi = 0$ en $x = 0$, lo cual implica que $C_2 = 0$. Entonces,

$$JG\phi = +125 \frac{x^3}{3}$$

Ahora bien,

$$J = \frac{\pi}{32} (5^4) \times 10^{-8} = 61.36 \times 10^{-8}\text{ m}^4$$

y $G = 85 \times 10^9$ Pa, de modo que $JG = 52\,155 \text{ N} \cdot \text{m}^2$. Entonces,

$$\phi_{AB} = \frac{125}{3} (2)^3 \frac{1}{52,155} = 6.4 \times 10^{-3} \text{ rad} = 0.37^\circ \quad \text{Resp.}$$

7-5 ENERGÍA DE DEFORMACION

La energía de deformación para elementos circulares sometidos a torsión pura es

$$U_{\text{torsión}} = \frac{1}{2} \int_V \tau \gamma \, dV \quad (7-21)$$

La ley de Hooke da

$$U = \frac{1}{2} \int_V \frac{\tau^2 \, dV}{G} \quad (7-22)$$

Si se utiliza la ecuación (7-9), que relaciona el momento de torsión T con el esfuerzo τ , se obtiene

$$U = \frac{1}{2} \int_V \frac{T^2 \rho^2}{J^2 G} \, dV = \frac{1}{2} \int_x \int_A \frac{T^2 \rho^2 \, dA \, dx}{J^2 G} \quad (7-23)$$

y el uso de $J = \int_A \rho^2 \, dA$ produce

$$U = \int \frac{T^2 \, dx}{2JG} \quad (7-24)$$

7-6 COMPORTAMIENTO NO LINEAL E INELÁSTICO

Las fórmulas deducidas anteriormente son válidas para materiales que exhiben un comportamiento elástico lineal, de acuerdo con la ley de Hooke. Según se indicó en la sección 4-2, las curvas esfuerzo-deformación no siempre son lineales (caracterizadas por una línea recta) o elásticas (caracterizadas por curvas esfuerzo-deformación idénticas para la carga y la descarga). Si por ejemplo, suponemos un comportamiento elasto-plástico ideal, como se indica en la fig. 7-9a, las ecuaciones deducidas antes son válidas siempre que el esfuerzo cortante no sobrepase en ninguna parte a τ_{flu} . Sin embargo, si éste es el caso y se supone, como antes, que las líneas rectas radiales permanecen rectas y radiales, cuando el esfuerzo cortante máximo alcanza el valor de τ_{flu} (véase la fig. 7-9c), la relación lineal esfuerzo-deformación de corte ($\tau - \gamma$) todavía es válida. Entonces, de acuerdo con la ecuación (7-8), el momento de torsión al empezar la fluencia es

$$T_{flu} = \frac{J \tau_{ys}}{r} \quad (7-25)$$

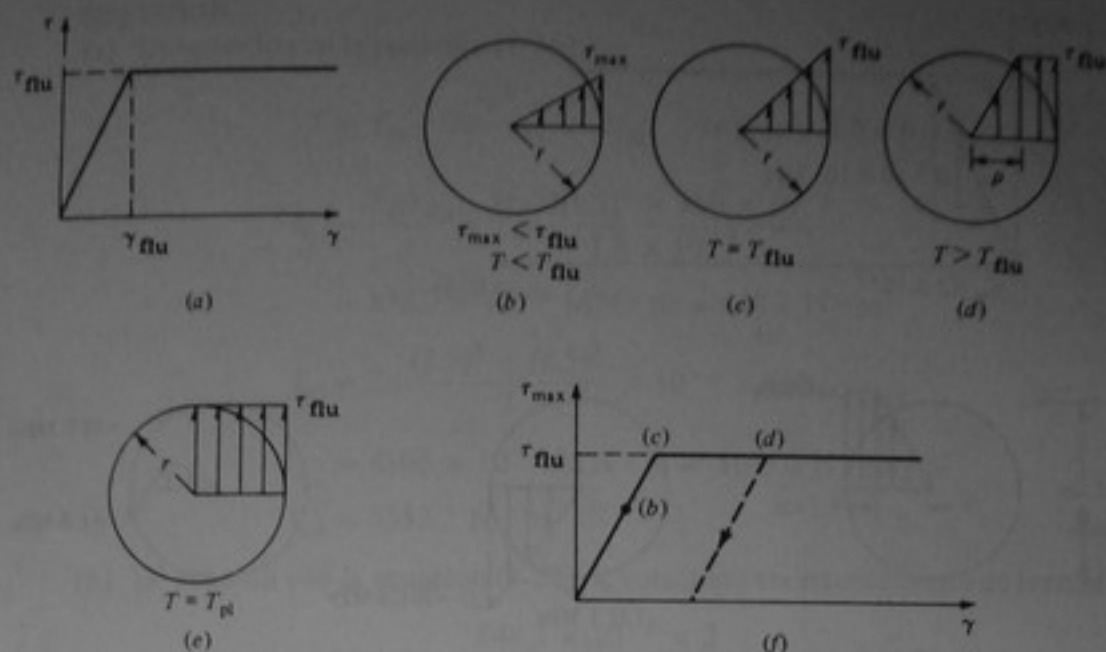


Figura 7-9 Fluencia de un eje con comportamiento elastoplástico ideal.

Si el momento de torsión se aumenta aún más, entonces para comportamiento elastoplástico ideal y variación lineal de la deformación de corte,

$$T = \frac{J_{el} \tau_{flu}}{\rho} + \int_{\rho}^r \underbrace{\tau_{flu}}_{\text{fuerza}} \underbrace{2\pi\rho d\rho}_{\text{área}} \underbrace{\left(\frac{r}{\rho}\right)}_{\text{brazo}}$$

o

$$T = T_{el} + T_{pl} = T_{el} + 2\pi \frac{r^3 - \rho^3}{3} \tau_{flu} \quad (7-26)$$

La rotación del eje está determinada por la rotación de su núcleo elástico, que es igual a

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{T_{el}}{J_{el}G} \quad (7-27)$$

Para determinar la deformación de corte máxima se puede escribir

$$\gamma_{max} = \frac{r}{\rho} \frac{d\phi}{dx} = \frac{r}{\rho} \gamma_{flu} \quad (7-28)$$

Por ejemplo, si $\rho = r/2$, entonces $\gamma_{max} = 2\gamma_{flu}$.

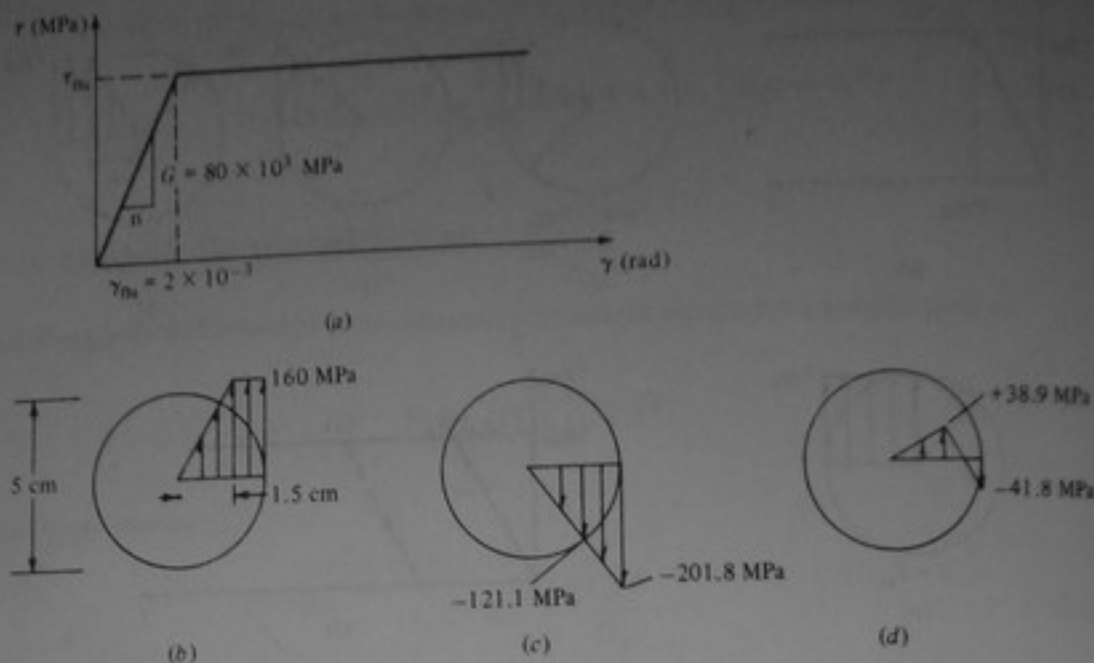


Figura 7-10 Ejemplo 7-4.

Para fluencia plástica completa, el núcleo no permanece elástico y

$$T_{pl} = \frac{2\pi r^3}{3} \tau_{flu} \quad (7-29)$$

Utilizando la ecuación (7-25) y haciendo $J = \pi r^4/2$ se puede ver que la relación entre el momento de torsión en fluencia completa y el momento de torsión al empezar la fluencia es

$$\frac{T_{pl}}{T_{flu}} = 1.333 \quad (7-30)$$

Teóricamente, en fluencia plástica total, γ_{max} es igual a infinito, de acuerdo con la ecuación (7-28), y el diagrama de deformación de corte de la fig. 7-9e indica para T_{pl} una aproximación asintótica.

Para comportamiento elastoplástico ideal se supone que el rebote sigue la ley de Hooke. En consecuencia, una vez que una parte de un eje ha alcanzado la fluencia, se presentan esfuerzos cortantes residuales y deformación rotacional permanente, como se ilustra en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 7-4 Considérese un eje circular de 5 cm de diámetro y 2 m de longitud, sometido a un momento de torsión. Si su diagrama esfuerzo-deformación de corte ($\tau - \gamma$) es como el de la fig. 7-10a:

- Determinar el momento de torsión necesario para que la fluencia en el eje alcance una profundidad de 1 cm a partir de la superficie exterior (fig. 7-10b).
- Determinar la rotación y el esfuerzo cortante máximo en ese momento.
- ¿Qué esfuerzos residuales y rotación quedan cuando se descarga el eje?

SOLUCION

(a) De acuerdo con la ecuación (7-26),

$$T = T_{el} + 2\pi \frac{r^3 - \rho^3}{3} \tau_{flu} \quad \text{con } \rho = 1.5 \text{ cm}$$

$$T_{el} = \frac{J_{el} \tau_{flu}}{\rho} = \frac{(\pi/2)(1.5)^4 \times 160 \times 10^{-8}}{1.5 \times 10^{-2}}$$

$$= 848.2 \times 10^{-6} \text{ MN} \cdot \text{m} = 848.2 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$T_{pl} = 2\pi \frac{(2.5)^3 - (1.5)^3}{3} \times 10^{-6} \times 160$$

$$= 4105 \times 10^{-6} \text{ MN} \cdot \text{m} = 4105.0 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$T_{tot} = 4953.2 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Resp.

(b) De acuerdo con la ecuación (7-27), la rotación para este momento de torsión es

$$\phi = \frac{848.2 \times 10^{-6} \times 2}{(\pi/2)(1.5)^4 \times 10^{-8} \times 80 \times 10^3} = 0.267 \text{ rad} \quad \text{Resp.}$$

$$\gamma_{max} = \frac{2.5}{1.5} 2 \times 10^{-3} = 3.33 \times 10^{-3} \text{ rad} \quad \text{Resp.}$$

(c) La reducción máxima de esfuerzo en la descarga es

$$\tau_{max} = \frac{-Tr}{J} = \frac{-4953.2 \times 10^{-6} \times 2.5 \times 10^{-2}}{(\pi/2)(2.5)^4 \times 10^{-8}} = -201.8 \text{ MPa}$$

$$\text{En } \bar{\rho} = 1.5,$$

$$\tau = \frac{1.5}{2.5} (-201.8) = 121.1 \text{ MPa}$$

Los esfuerzos finales son los indicados en la fig. 7-10d. La rotación residual se halla calculando primero el rebote elástico mediante

$$\phi_{res} = \frac{-4953.2 \times 10^{-6} \times 2}{(\pi/2)(2.5)^4 \times 10^{-8} \times 80 \times 10^3} = -0.202 \text{ rad}$$

y la rotación residual es $0.267 - 0.202 = 0.065 \text{ rad}$.

Para diagramas esfuerzo-deformación de corte diferentes al elastoplástico ideal, tales como el que se muestra en la fig. 7-11b, la distribución del esfuerzo cortante se puede deducir a partir de las deformaciones de corte, si éstas varían linealmente con la distancia desde el centroide (véase la fig. 7-11a). Después de determinar el esfuerzo τ_ρ , a partir de la relación o el diagrama esfuerzo-deformación de corte, el momento total de torsión se puede calcular mediante la ecuación general

$$T = \int_0^r \underbrace{\tau_\rho}_{\text{esfuerzo}} \underbrace{2\pi\rho d\rho}_{\text{área}} \underbrace{\rho}_{\text{torzo}} \quad (7-31)$$

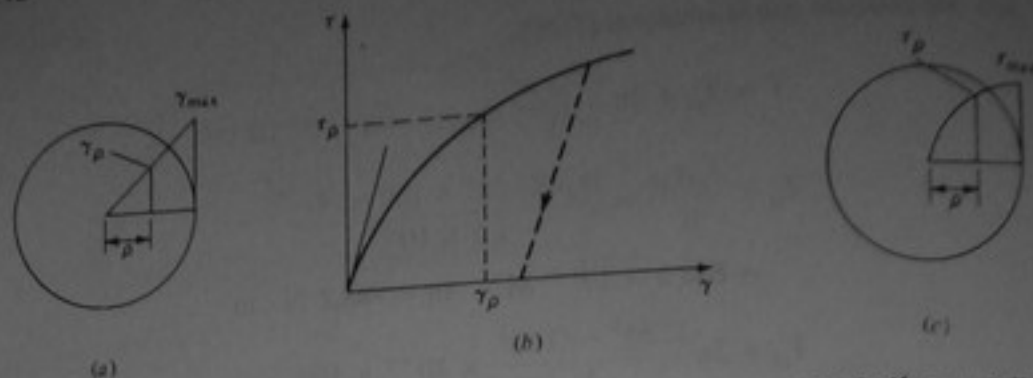


Figura 7-11 Esfuerzos y deformaciones de corte en ejes circulares para una relación τ - γ no lineal.

Ejemplo 7-5 Para el eje hueco de la fig. 7-12, la relación τ - γ está dada por

$$\tau = 80 \times 10^3 \gamma - 10^7 \gamma^2 \text{ MPa}$$

y $\gamma_{\max} = 4 \times 10^{-3}$. Determinar (a) la capacidad de momento final, T_{fin} , y la correspondiente distribución de esfuerzos y (b) la distribución de esfuerzos y la rotación en $\frac{1}{2} T_{\text{fin}}$.

SOLUCION Para la parte a,

$$\gamma_{\rho} = \frac{\rho}{2.5 \times 10^{-2}} \gamma_{\max} = 0.4 \times 10^2 \rho \times 4 \times 10^{-3} = 0.16\rho$$

en donde ρ está en metros, y

$$\tau_{\rho} = 80 \times 10^3 (0.16\rho) - 10^7 (0.16)^2 \rho^2 = 12,800\rho - 256,000\rho^2 \text{ MPa}$$

Aplicando la ecuación (7-31) se obtiene

$$\begin{aligned} T_{\text{fin}} &= \int_{1.5 \times 10^{-2}}^{2.5 \times 10^{-2}} 2\pi\rho^2 (12,800\rho - 256,000\rho^2) d\rho \\ &= 3938.8 \times 10^{-6} \text{ MN} \cdot \text{m} = 3938.8 \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

Resp.

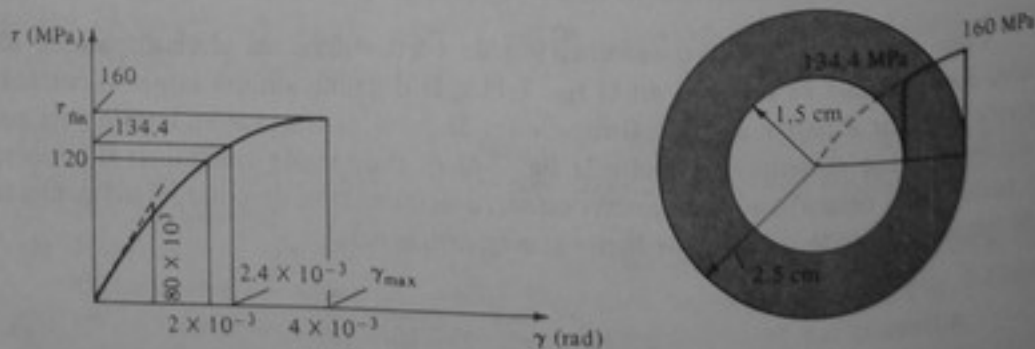


Figura 7-12 Ejemplo 7-5.

Para determinar la distribución de esfuerzos primero se determina la deformación de corte en $\rho = 1.5$ cm, que es

$$\gamma_{1.5} = \frac{1.5}{2.5} 4 \times 10^{-3} = 2.4 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

y

$$\tau_{1.5} = 80 \times 10^3 \times 2.4 \times 10^{-3} - 10^7 \times 5.76 \times 10^{-6} = 134.4 \text{ MPa} \quad \text{Resp.}$$

mientras que

$$\tau_{2.5} = 160 \text{ MPa} \quad \text{Resp.}$$

Para la parte b, $T = 3928.8/2 = 1969.4 \text{ N} \cdot \text{m}$, y

$$1969.4 = 10^6 \int_{1.5 \times 10^{-2}}^{2.5 \times 10^{-2}} 2\pi(80 \times 10^3 \gamma - 10^7 \gamma^2) \rho^2 d\rho$$

La deformación de corte γ_ρ a una distancia ρ del centroide es igual a

$$\gamma_\rho = \frac{\rho \gamma_0}{2.5 \times 10^{-2}}$$

en donde γ_0 representa la deformación de corte exterior. Así,

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{80 \times 10^3 \rho}{2.5 \times 10^{-2}} \gamma_0 - 10^7 \frac{\rho^2}{(2.5)^2 \times 10^{-4}} \gamma_0^2 \\ &= 32 \times 10^5 \rho \gamma_0 - 1.6 \times 10^{10} \rho^2 \gamma_0^2 \text{ MPa} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1969.4 &= \int_{1.5 \times 10^{-2}}^{2.5 \times 10^{-2}} 10^6 \times 2\pi \rho^2 (32 \times 10^5 \rho \gamma_0 - 1.6 \times 10^{10} \rho^2 \gamma_0^2) d\rho \\ &= 2\pi(32 \times 10^3 \times 8.5 \gamma_0 - 1.6 \times 10^6 \times 4.0833 \gamma_0^2) \end{aligned}$$

que se convierte en la siguiente ecuación cuadrática para γ_0 :

$$4.08333(1.6 \times 10^6) \gamma_0^2 - 32 \times 10^3 \times 8.5 \gamma_0 + 313.44 = 0$$

Resolviendo esta ecuación se obtiene

$$\gamma_0 = 1.186 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

El esfuerzo exterior en $\frac{1}{2} T_{\text{fin}}$ es

$$\tau_0 = 80 \times 10^3 \times 1.186 \times 10^{-3} - 10^7 (1.186)^2 \times 10^{-6} = 80.8 \text{ MPa} \quad \text{Resp.}$$

La deformación de corte en el interior es

$$\frac{1.5}{2.5} 1.186 \times 10^{-3} = 0.7116 \times 10^{-3}$$

y

$$\tau_i = 80 \times 10^3 \times 0.7116 \times 10^{-3} - 10^7(0.7116)^2 \times 10^{-6} = 51.9 \text{ MPa Resp.}$$

La rotación en $\frac{1}{2} T_{\text{fin}}$ es igual a

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{\gamma_0}{r} = \frac{1.186 \times 10^{-3}}{2.5 \times 10^{-2}} = 0.047 \text{ rad/m Resp.}$$

7-7 SECCIONES RECTANGULARES SOLIDAS

Las suposiciones básicas para elementos con secciones transversales circulares no se aplican a otros tipos de secciones. El alabeo generalmente se produce cuando las deformaciones de corte ya no varían linealmente con la distancia desde el eje centroidal. Para secciones rectangulares, si no se impide el alabeo, la distribución del esfuerzo cortante es como se indica en la fig. 7-13. Excepto en la vecindad de las esquinas, el esfuerzo es aproximadamente constante a lo largo de los bordes y máximo en el punto medio del lado mayor, con un valor

$$\tau_{\max} = \frac{T\chi t}{J} \quad (7-32)$$

en donde

$$J = \frac{bt^3}{3} - 2\psi t^4 \quad (7-33)$$

y χ y ψ son constantes numéricas adimensionales que dependen de la relación b/t y se enumeran en la tabla A-10. Cuando b/t tiende a 4.0, las expresiones para τ_{\max} y J tienen

$$\tau_{\max} = \frac{Tt}{J} \quad (7-34)$$

y

$$J = \frac{bt^3}{3} - 0.21t^4 \quad (7-35)$$

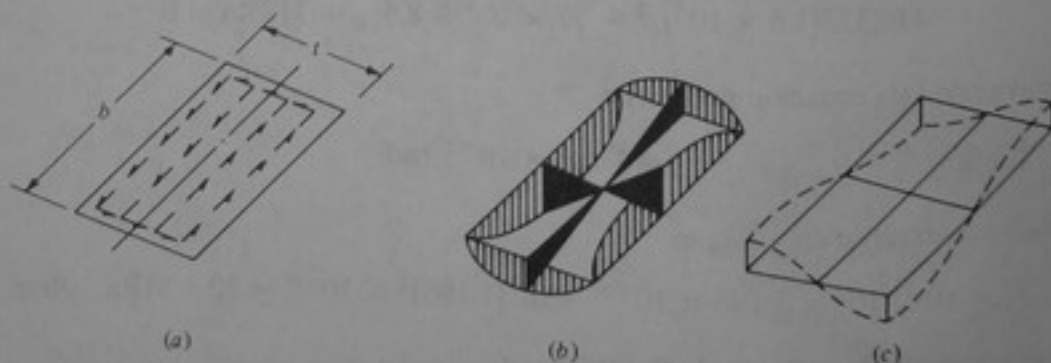


Figura 7-13 Dirección, sentido y distribución de esfuerzos de torsión en una barra rectangular. (a) Dirección y sentido de los esfuerzos cortantes. (b) Distribución de los esfuerzos cortantes. (c) Alabeo.

Para rectángulos delgados, la última ecuación para J se convierte en

$$J = \frac{bt^3}{3} \quad (7-36)$$

Para valores constantes de J y T , el ángulo de torsión por unidad de longitud de una barra es igual a

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{T}{\xi bt^3 G} \quad (7-37)$$

Los valores de ξ en función de la relación b/t también se enumeran en la tabla A-10.

Ejemplo 7-6 Una barra rectangular de 1 cm X 2 cm y 0.50 m de longitud se somete a un momento de torsión de 10 N · m. Determinar su esfuerzo cortante máximo y el ángulo de rotación entre los dos extremos si $G = 85 \times 10^3$ MPa.

SOLUCION De acuerdo con la tabla A-10, para una relación b/t de 2,

$$2\psi = 0.2093 \quad \chi = 0.9300 \quad \xi = 0.229$$

Para esta sección transversal de acuerdo con la ecuación (7-33),

$$J = \frac{bt^3}{3} - 2\psi t^4 = \frac{2}{3} - 0.2093 = 0.457 \text{ cm}^4$$

De acuerdo con la ecuación (7-32), el esfuerzo cortante máximo que ocurre en el punto medio del lado mayor es

$$\tau_{\max} = \frac{(10)(0.93)(1 \times 10^{-2})}{0.457 \times 10^{-8}} = 20.35 \times 10^6 \text{ Pa} = 20.35 \text{ MPa} \quad \text{Resp.}$$

Con base en la ecuación (7-37), el ángulo de torsión es

$$\phi = \int d\phi = \frac{TL}{\xi bt^3 G} = \frac{10(0.50)}{0.229(0.257 \times 10^{-8})(85 \times 10^9)} = 0.0128 \text{ rad} = 0.736^\circ \quad \text{Resp.}$$

7-8 SECCIONES ABIERTAS DE PARED DELGADA

Las secciones abiertas, como las de la fig. 7-14, se comportan como una serie de elementos rectangulares y

$$J = \sum_i \frac{b_i t_i^3}{3} \quad (7-38)$$

El esfuerzo cortante máximo en un perfil abierto se puede aproximar a

$$\tau_{\max} = \frac{T\eta t_f}{J} \quad (7-39)$$

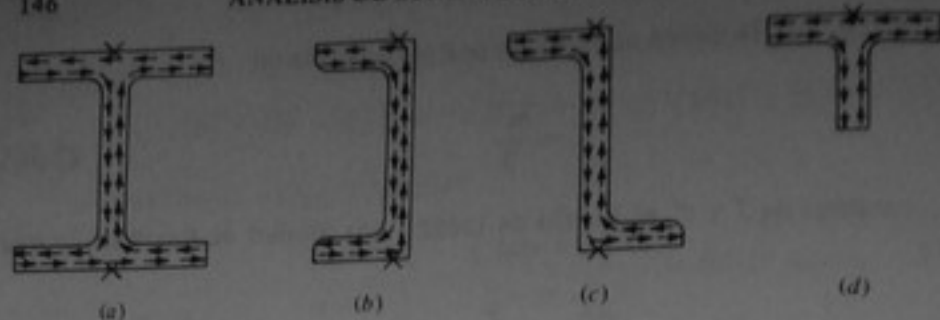


Figura 7-14 Perfiles estructurales abiertos. (a) Sección I. (b) Canal. (c) Sección Z. (d) Sección T. La "x" indica una localización del esfuerzo cortante máximo.

en donde t_f es el espesor del ala y η es un factor numérico que depende de las relaciones t_w/t_f y r/t_f (t_w es el espesor del alma y r el radio de filete). Los valores de η se pueden establecer utilizando las figs. B-1 y B-2 del apéndice B.

Para otros tipos de secciones abiertas, como las que se representan en la fig. 7-15, se pueden emplear las ecuaciones (7-32 a 7-38), tomando como b la longitud de la línea media y t el espesor correspondiente.



Figura 7-15 Otros perfiles estructurales abiertos.

Para secciones delgadas, ξ se toma como $\frac{1}{3}$ y la ecuación (7-37) se puede aproximar a

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{T}{JG} \quad (7-40)$$

que es la misma ecuación (7-15).

Ejemplo 7-7 El tubo que se muestra en la fig. 7-16 se somete a un momento de torsión pura de $50 \text{ kN} \cdot \text{m}$. Calcular el esfuerzo cortante máximo y la relación de torsión si $G = 85 \times 10^3 \text{ MPa}$.

SOLUCION De acuerdo con la ecuación (7-38), la constante de torsión es

$$J = \frac{1}{3}\pi(0.212)(0.012)^3 = 383.63 \times 10^{-9} \text{ m}^4$$

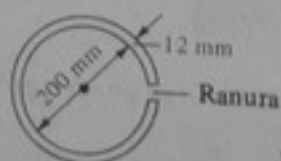


Figura 7-16 Ejemplo 7-7.

El esfuerzo cortante máximo es igual a [ecuación (7-34)]

$$\tau = \frac{50 \times 10^3 \times 12 \times 10^{-3}}{383.63 \times 10^{-9}} 10^{-6} \text{ MPa} = 1564 \text{ MPa} \quad \text{Resp.}$$

De acuerdo con la ecuación (7-40), la relación de torsión es

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{50 \times 10^3}{383.63 \times 10^{-9} \times 85 \times 10^9} = 1.533 \text{ rad/m} \quad \text{Resp.}$$

7-9 SECCIONES CERRADAS DE PARED DELGADA

Para una sección tubular cerrada de pared delgada (véase la fig. 7-17), un elemento $ABCD$ (fig. 7-17b) debe estar en equilibrio. Entonces,

$$F_{CB} = F_{AD} \quad (7-41)$$

$$F_{AB} = F_{CD}$$

Asimismo, $F_{CB} = \tau_B t_2 dx$ $F_{AD} = \tau_A t_1 dx$

Por lo tanto,

$$\tau_B t_2 = \tau_A t_1 \quad (7-42)$$

o, en general,

$$\tau_s t_s = \text{constante} \quad (7-43)$$

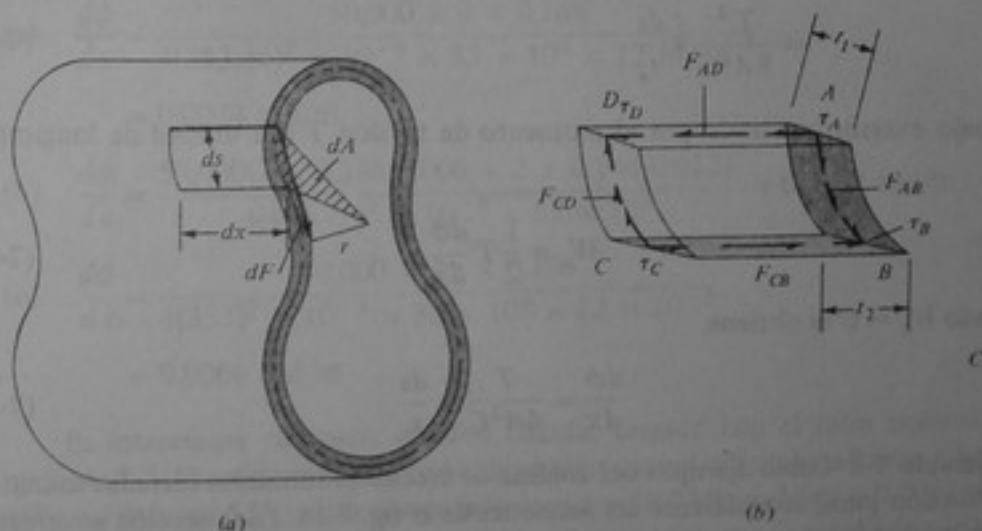


Figura 7-17 Sección tubular cerrada de pared delgada y espesor variable.

Este producto se define como el flujo de corte, q , y representa una fuerza por unidad de longitud. Para una longitud ds la fuerza es

$$dF = q ds \quad (7-44)$$

Si se considera un punto arbitrario O (como se indica en la fig. 7-17a), el momento producido por la fuerza dF con respecto a este punto es

$$r dF \quad (7-45)$$

en donde r es la distancia perpendicular desde O hasta la línea de acción de dF . El momento de torsión total que se transfiere por la sección es igual a

$$T = \oint r q ds \quad (7-46)$$

en donde la integración se efectúa a lo largo de la línea media del perímetro. Como el área del triángulo dA que se muestra en la fig. 7-17a es igual a $r ds/2$, la ecuación (7-46) se puede expresar en la forma

$$T = 2Aq \quad (7-47)$$

en donde A es el área limitada por la línea media del perímetro. De acuerdo con las ecuaciones (7-42) y (7-47), el esfuerzo cortante en un punto s es igual a

$$\tau_s = \frac{q}{t_s} = \frac{T}{2At_s} \quad (7-48)$$

en donde t_s es el espesor de la pared en el punto s .

Para calcular el ángulo de torsión por unidad de longitud se considera la energía de deformación de corte del tubo. De acuerdo con la ecuación (7-22), esta energía es

$$\begin{aligned} U &= \int_V \frac{\tau^2 d(\text{Vol})}{2G} = \oint \frac{\tau^2 t_s ds}{2G} = \oint \frac{T^2 t_s}{4A^2 t_s^2 (2G)} ds \\ &= \frac{T^2}{8A^2 G} \oint \frac{ds}{t_s} \end{aligned} \quad (7-49)$$

El trabajo externo realizado por el momento de torsión T por unidad de longitud es igual a

$$W_e = \frac{1}{2} T \frac{d\phi}{dx} \quad (7-50)$$

Haciendo $W_e = U$ se obtiene

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{T}{4A^2 G} \oint \frac{ds}{t_s} \quad (7-51)$$

Ejemplo 7-8 Como ejemplo del análisis de secciones tubulares cerradas sometidas a torsión pura, considérense las secciones de la fig. 7-18. Cada sección se somete a un momento de torsión de $50 \text{ kN} \cdot \text{m}$. Calcular para cada caso el esfuerzo cortante y la relación de torsión si $G = 85 \times 10^3 \text{ MPa}$.

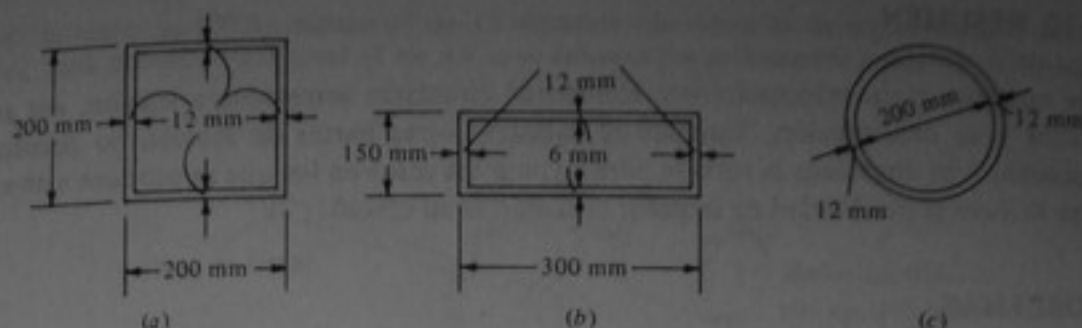


Figura 7-18 Ejemplo 7-8. Secciones tubulares cerradas. (a) Cuadrada. (b) Rectangular. (c) Circular.

SOLUCION Las áreas son:

$$(a) \quad A = 0.188^2 = 353.44 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$(b) \quad A = 0.288 \times 0.144 = 414.72 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$(c) \quad A = \pi(0.106)^2 = 353 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

De acuerdo con la ecuación (7-48), los esfuerzos cortantes son:

$$(a) \quad \tau = \frac{50,000}{2 \times 353.44 \times 10^{-4} \times 12 \times 10^{-3}} \times 10^{-6} = 58.9 \text{ MPa} \quad \text{Resp.}$$

$$(b) \quad \tau = \frac{50,000}{2 \times 414.72 \times 10^{-4} \times 6 \times 10^{-3}} \times 10^{-6} \\ = 100.5 \text{ MPa} \quad (\text{lado mayor}) \quad \text{Resp.}$$

$$(c) \quad \tau = \frac{50,000}{2 \times 353 \times 10^{-4} \times 12 \times 10^{-3}} \times 10^{-6} = 59.0 \text{ MPa} \quad \text{Resp.}$$

Las relaciones de torsión, de acuerdo con la ecuación (7-51), son:

$$(a) \quad \frac{d\phi}{dx} = \frac{50,000 \times 4 \times 0.188}{4(353.44)^2 \times 10^{-8} \times 85 \times 10^9 \times 12 \times 10^{-3}} \\ = 0.0074 \text{ rad/m} \quad \text{Resp.}$$

$$(b) \quad \frac{d\phi}{dx} = \frac{50,000(2 \times 0.288/0.006 + 2 \times 0.144/0.012)}{4(414.72)^2 \times 10^{-8} \times 85 \times 10^9} = 0.0102 \text{ rad/m} \quad \text{Resp.}$$

$$(c) \quad \frac{d\phi}{dx} = \frac{50,000 \times 2\pi \times 0.106}{4(353)^2 \times 10^{-8} \times 85 \times 10^9 \times 12 \times 10^{-3}} \\ = 0.0066 \text{ rad/m} \quad \text{Resp.}$$

Es interesante comparar el tubo circular cerrado con el tubo ranurado del ejemplo 7-7. El esfuerzo y la relación de torsión para el tubo ranurado son $\tau = 1564$ MPa y $d\phi/dx = 1.533$ rad/m comparados con $\tau = 59.0$ MPa y $d\phi/dx = 0.0066$ rad/m. No sólo el esfuerzo es considerablemente más alto, sino que el ángulo de torsión se hace excesivo cuando hay una ranura presente.

7-10 RESUMEN

Este capítulo trata principalmente elementos circulares sometidos a torsión, sus esfuerzos y su deformación. También se estudian otras barras de sección no circular. Únicamente se considera la torsión *pura*, y para los casos en los que se produce alabeo, no se incluye la posibilidad de impedir el alabeo ni su efecto.

PROBLEMAS

7-1 El eje circular se somete a los momentos de torsión indicados. Tomar $E = 200 \times 10^3 \text{ MPa}$ y $\nu = 0.25$.

- (a) ¿Dónde se presenta el esfuerzo cortante máximo y cuál es su valor?
 (b) ¿Cuál es la rotación relativa entre los puntos A y E ?

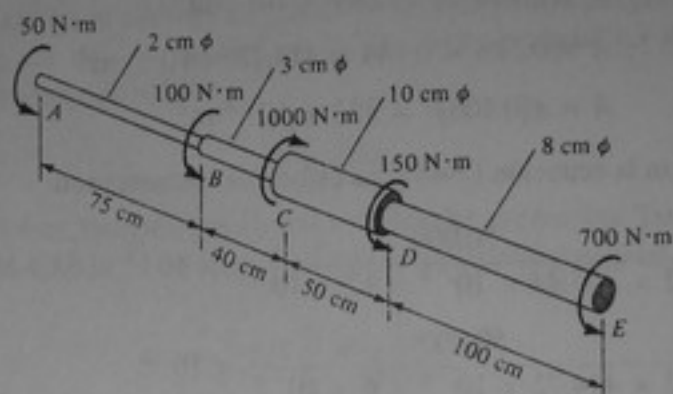


Figura P7-1

7-2 Repetir el problema 7-1 para el eje de la figura.

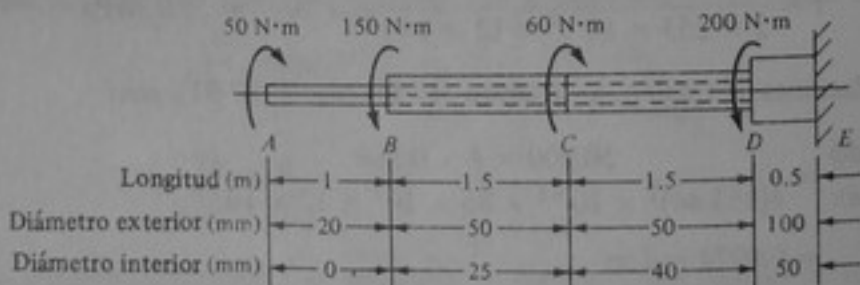


Figura P7-2

7-3 Repetir el problema 7-1 para el eje que se muestra si $E = 30 \times 10^3 \text{ klb/pul}^2$ y $\nu = 0.30$.

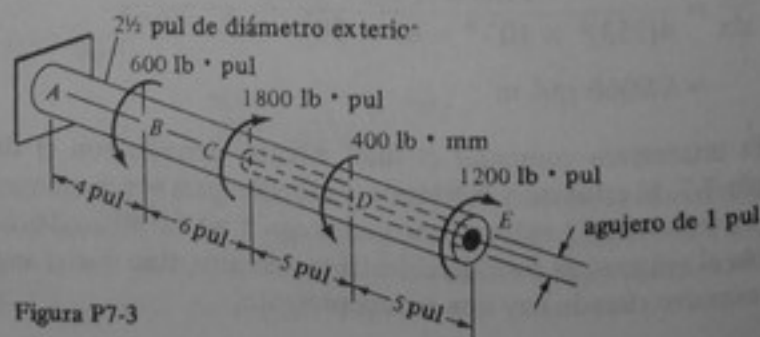


Figura P7-3

7-4 Un motor de 100 hp impulsa un eje AB mediante una reducción de engranajes. Si $N = 2000$ rpm, ¿qué diámetro debe tener el eje AB si su esfuerzo cortante admisible máximo es 50 MPa?

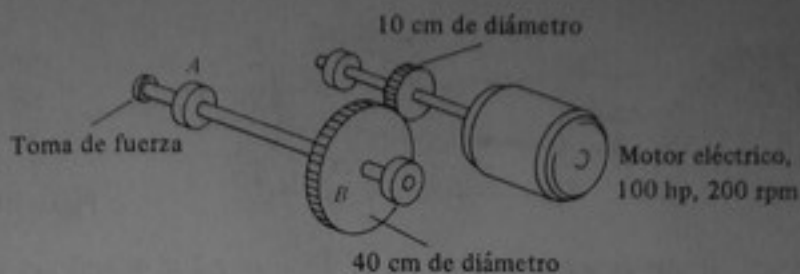


Figura P7-4

7-5 Un motor de 5 hp impulsa un eje de $\frac{3}{4}$ pul de diámetro a 1750 rpm mediante un engranaje de reducción, como se muestra.

- ¿Cuál es el valor de T_1 ?
- ¿Cuál es el momento de torsión en el eje de $1\frac{1}{2}$ pul de diámetro si la toma de fuerza es en B y cuál es su velocidad en revoluciones por minuto?
- Determinar los esfuerzos en las fibras extremas para ambos ejes.

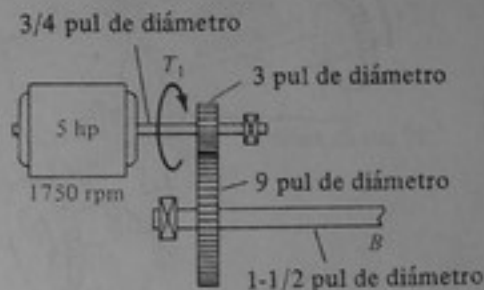


Figura P7-5

7-6 Si se aplica un momento de torsión $T = 100 \text{ N}\cdot\text{m}$ en el punto A :

- ¿Cuál es la rotación torsional de A , suponiendo que los engranajes no se deforman y que $G = 80 \times 10^3 \text{ MPa}$?
- ¿Cuáles son los esfuerzos cortantes en D ?

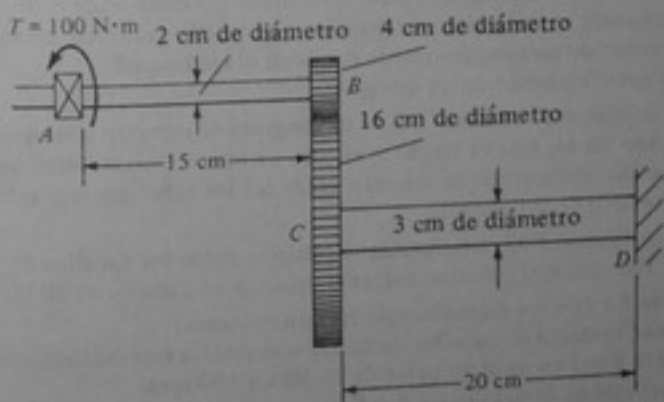


Figura P7-6

7-7 Si τ_{\max} es 10 klb/pul:

- (a) ¿Cuál es el valor admisible máximo de T ?
 (b) ¿Cuál es la rotación torsional del extremo libre A si $G = 12 \times 10^3$ klb/pul²?

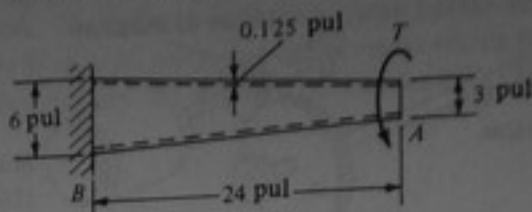


Figura P7-7

7-8 Un eje sólido circular de acero, de 100 mm de diámetro y 2 m de longitud, se utiliza para transmitir potencia. Si el esfuerzo cortante admisible máximo es 50 MPa y $G = 80 \times 10^3$ MPa, determinar:

- (a) Los caballos de fuerza transmitidos a 100 rpm y a 300 rpm.
 (b) El ángulo de torsión de un extremo con respecto al otro para cada una de las dos velocidades indicadas en la parte (a).

7-9 ¿Cuántos caballos de fuerza se pueden transmitir entre A y D si el eje AB gira a 300 rpm y el esfuerzo cortante no debe pasar de 50 MPa en ninguna parte de los ejes?

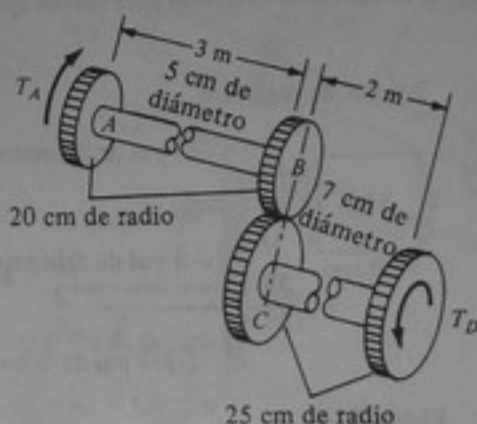


Figura P7-9

7-10 ¿Cuál es el momento de torsión máximo que puede transmitir un eje de 50 mm de diámetro y 1 m de longitud si el esfuerzo cortante no debe pasar de 40 MPa y la rotación relativa de los dos extremos no debe pasar de $\frac{1}{2}^\circ$? Tomar $G = 80 \times 10^3$ MPa.

7-11 Un eje circular sólido de 2 m de longitud se somete a un momento de torsión, T , que produce un esfuerzo cortante máximo de 15 MPa y una rotación de 1° . Determinar el diámetro del eje si $G = 80 \times 10^3$ MPa.

7-12 Un eje hueco tiene un diámetro exterior de 12 cm y un diámetro interior de 8 cm.

(a) ¿Cuál es la relación entre el momento de torsión que puede conducir un eje sólido de 10 cm de diámetro y el momento de torsión que puede conducir el eje hueco?

(b) ¿Cuál es la relación entre los pesos de los dos ejes?

7-13 Dos ejes de 100 mm de diámetro exterior y 1 m de longitud se someten a sendos momentos de torsión de 5 kN · m. Si uno de los ejes es sólido y el otro es hueco, con la mitad del área de la sección transversal del eje sólido, determinar la relación entre (a) los esfuerzos cortantes máximos y (b) los ángulos totales de torsión de los dos ejes.

7-14 Para los dos ejes del problema 7-13, determinar la relación entre los caballos de fuerza que pueden transmitir los ejes a 300 rpm si el esfuerzo cortante máximo en cada eje es 70 MPa.

7-15 Para el eje del problema 7-1 (sin los momentos de torsión externos):

(a) Determinar el número máximo de caballos de fuerza que podría transmitir desde A hasta E si el esfuerzo cortante no debe pasar en ninguna parte de 80 MPa a 600 rpm.

(b) ¿Cuál será el ángulo total de torsión entre A y E ?

7-16 a 7-21 Para la distribución de esfuerzos indicada, expresar el momento de torsión T en función de r , τ_{\max} y n .

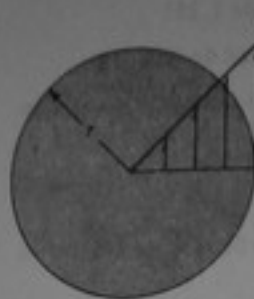


Figura P7-16

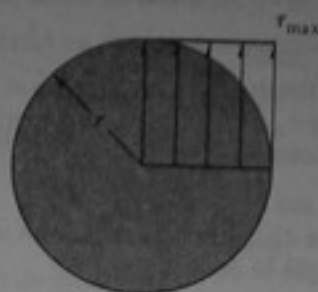


Figura P7-17

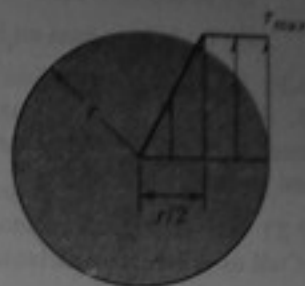
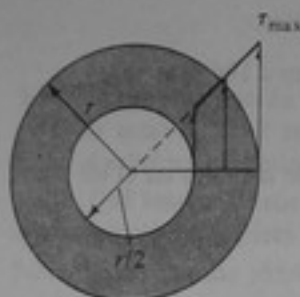
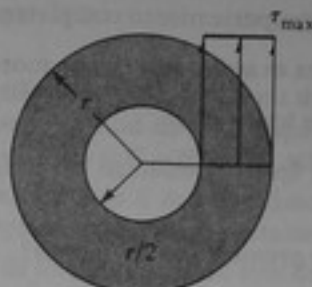


Figura P7-18



Hueco

Figura P7-19



Hueco

Figura P7-20

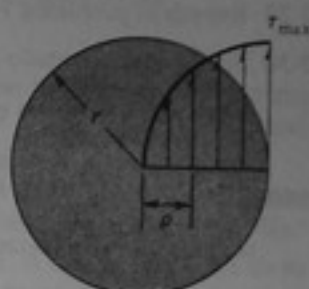


Figura P7-21

7-22 a 7-24 Si las curvas esfuerzo-deformación de corte de los materiales disponibles para un eje sólido circular de 1 cm de radio son como se indica, determinar los momentos de torsión admisibles si la deformación de corte no debe pasar de un valor de 10^{-3} . Suponer que la deformación de corte varía linealmente desde cero, en el centro, hasta 10^{-3} en la superficie exterior. Utilizar $G = 82 \times 10^3$ MPa.

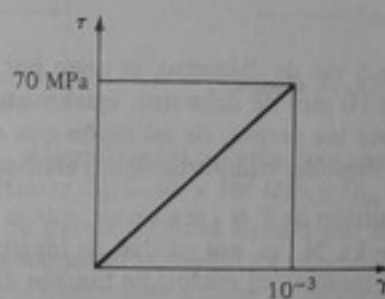


Figura P7-22

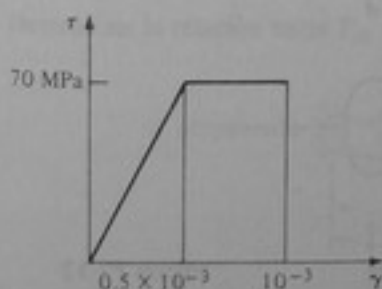


Figura P7-23

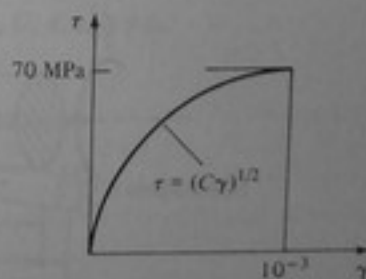


Figura P7-24

7-25 El eje sólido circular del problema 7-24 trabaja a 300 rpm. ¿Cuál es el máximo número de caballos de fuerza que puede transmitir el eje si:

- (a) El esfuerzo admisible máximo es 40 MPa, con un factor de seguridad de 1.25?
 (b) La falla se basa en la rotura completa del eje, con un factor de seguridad de 2.0?

7-26 Un eje circular sólido de 1 m de longitud y 2 cm de radio se somete a un momento de torsión T . Si el radio se aumentara a 5 cm y $\tau_{\max} = 70$ MPa, ¿cuál sería el aumento en la capacidad de carga si el eje se comportara (a) elásticamente, como en la fig. P7-22 y (b) elastoplásticamente, como en la fig. P7-23?

7-27 Un eje circular sólido de 2 cm de diámetro se somete a un momento de torsión de $150 \text{ N} \cdot \text{m}$. ¿Cuál es el esfuerzo cortante máximo que se desarrolla?

7-28 ¿Cuál es la resistencia a la tracción de un eje sólido reducido mediante un agujero axial, si el área del agujero es el 60 por ciento del área original del eje? Suponer comportamiento elástico.

7-29 Repetir el problema 7-28 para comportamiento completamente plástico.

7-30 Si el eje representado en la figura es accionado por un motor de 50 hp a 100 rpm:

- (a) ¿Cuál es la fuerza cortante en los pernos?
 (b) ¿Cuál sería el diámetro del eje si el esfuerzo cortante admisible máximo en el eje fuera $600 \text{ lb}/\text{pul}^2$?
 (c) ¿Cuál es el esfuerzo cortante promedio en los pernos?

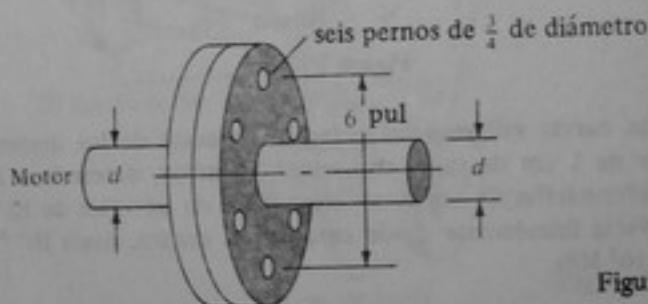


Figura P7-30

7-31 Dos ejes sólidos de acero, de 5 cm de diámetro, se unen por medio de un acoplamiento de bridas que tiene cuatro pernos de 10 mm de diámetro, igualmente espaciados. ¿Cuál debe ser el diámetro d del círculo formado por los pernos, de tal modo que el acoplamiento y los ejes sean igualmente resistentes a la torsión? Suponer comportamiento elástico y $\tau_{\text{adm}} = 60$ MPa.

7-32 Si se aplica un momento de torsión de $T \text{ N} \cdot \text{m}$ a un eje, que es soportado por un momento de torsión que varía linealmente, $t_x = kx \text{ N} \cdot \text{m}$ por unidad de longitud, ¿cuáles son (a) el esfuerzo cortante máximo y (b) el ángulo de torsión (en grados) en función de J , G , L y d ?

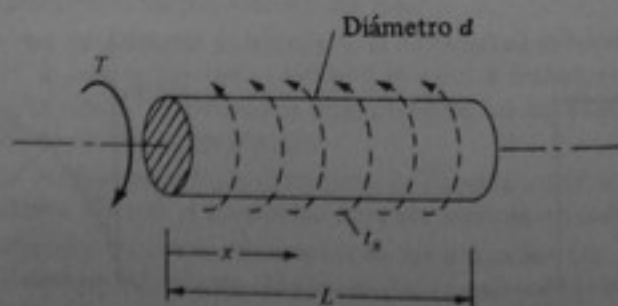


Figura P7-32

7-34 Un eje de acero
 rotación total de θ
 hallar el esfuerzo co

7-35 ¿Qué longitud
 una revolución con

7-36 Un eje circular
 longitud se encuen
 utiliza para accion

Determinar (a) el e
 b. Emplear $G = 8$

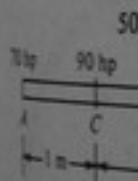


Figura P7-36

7-37 Para el eje qu
 (a) el ángulo total θ

7-38 Un eje circular
 metro interior, y se

un material frágil qu
 Para un factor de

transmitir el eje?

7-39 Determinar la

7-33 Si $T = 0.02 \text{ kN} \cdot \text{m}$, ¿cuál es el ángulo de rotación en D , en grados, si $G = 80 \times 10^3 \text{ MPa}$?

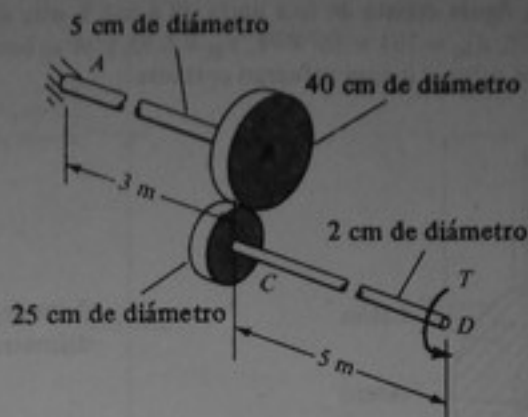


Figura P7-33

7-34 Un eje de acero de 5 cm de diámetro se somete a un momento de torsión que produce una rotación total de 0.10 rad sobre una longitud de 4 m . Suponiendo un comportamiento elástico, hallar el esfuerzo cortante máximo en el eje si $G = 80 \times 10^3 \text{ MPa}$.

7-35 ¿Qué longitud debe tener una varilla de 8 mm de diámetro, de tal modo que se pueda torcer una revolución completa sin sobrepasar un esfuerzo cortante de 100 MPa , si $G = 80 \times 10^3 \text{ MPa}$?

7-36 Un eje circular sólido de 3 m de longitud tiene 50 mm de diámetro. A una tercera parte de su longitud se encuentra un engranaje que gira a 300 rpm y transmite 90 hp al eje. Esta potencia se utiliza para accionar dos piezas de un equipo, una de las cuales consume 70 hp y la otra, 20 hp . Determinar (a) el esfuerzo cortante máximo en el eje y (b) el ángulo de torsión relativo entre A y B . Emplear $G = 80 \times 10^3 \text{ MPa}$.

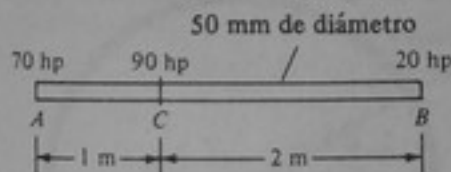


Figura P7-36

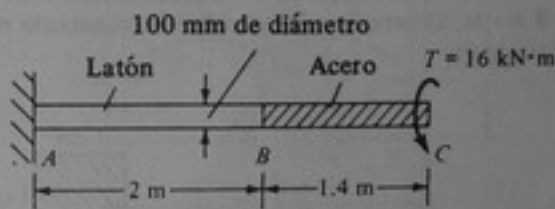


Figura P7-37

7-37 Para el eje que se muestra, determinar (a) los esfuerzos cortantes máximos en cada material y (b) el ángulo total de torsión. Utilizar $G_{ac} = 80 \times 10^3 \text{ MPa}$ y $G_{la} = 40 \times 10^3 \text{ MPa}$.

7-38 Un eje circular hueco de 50 pul de longitud tiene 3 pul de diámetro exterior y 2 pul de diámetro interior, y se utiliza para transmitir potencia. La velocidad del eje es 30 rpm y está hecho de un material frágil que se comporta linealmente y tiene un esfuerzo final en corte de $30,000 \text{ lb/pul}^2$. Para un factor de seguridad de 3, ¿cuál es la cantidad máxima de caballos de fuerza que puede transmitir el eje?

7-39 Determinar la relación entre T_A y T_B en función de T , G , d , a , b y L .

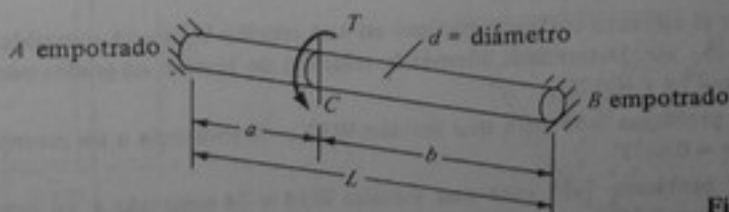


Figura P7-39

7-40 Repetir el problema 7-39 si la porción AC es de acero y la porción BC de latón, con $G_{ac} = 80 \times 10^3$ MPa y $G_{la} = 40 \times 10^3$ MPa.

7-41 El eje circular de la figura consta de una parte de acero y otra de latón, adheridas. Si $E_{ac} = 207 \times 10^3$ MPa, $\nu_{ac} = 0.27$, $E_{la} = 103 \times 10^3$ MPa, $\nu_{la} = 0.35$, y se aplica un momento de torsión T , ¿cuál de los dos materiales sufre el mayor esfuerzo cortante?

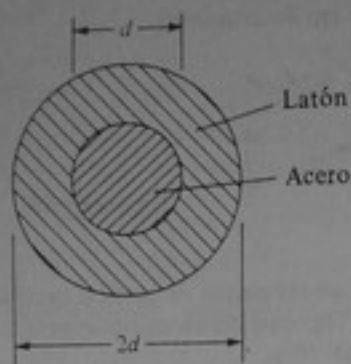


Figura P7-41

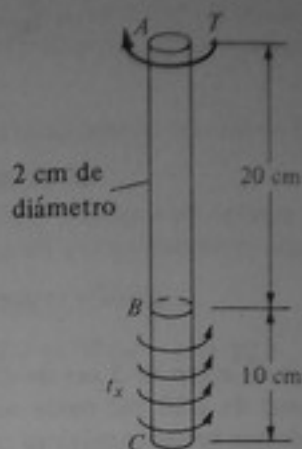


Figura P7-42

7-42 La barra representada se somete a una torsión constante por fricción de t_x m/m sobre la longitud de la punta y el esfuerzo cortante admisible máximo es $\tau_{max} = 70$ MPa.

(a) ¿Cuál es el valor máximo de T que puede admitirse?

(b) ¿Cuál es la torsión total si $G = 80 \times 10^3$ MPa?

7-43 La barra cuadrada de 1 m de longitud que se muestra se somete a un momento de torsión de $8 \text{ N} \cdot \text{m}$. Determinar (a) el esfuerzo constante máximo y (b) el ángulo total de torsión si $G = 80 \times 10^3$ MPa.

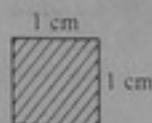


Figura P7-43

7-44 Repetir el problema 7-43 para una barra de 50 cm de longitud que tiene la sección transversal indicada en la figura.

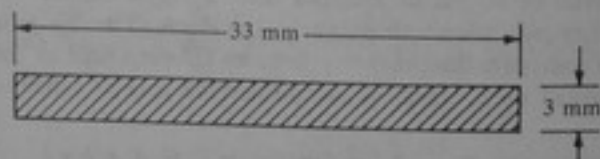


Figura P7-44

7-45 Determinar el esfuerzo cortante máximo en una sección $W24 \times 94$ sometida a un momento de torsión de $3500 \text{ lb} \cdot \text{pie}$. Determinar además la relación de torsión en grados por pie de longitud si $G = 12 \times 10^6 \text{ lb/pul}^2$ y $r = 0.75^\circ$.

7-46 Repetir el problema 7-45 para una sección $W12 \times 79$ sometida a un momento de torsión de $4500 \text{ lb} \cdot \text{pie}$ y $r = 0.6875^\circ$.

7-47 Repetir el problema 7-45 para una sección $W14 \times 74$ sometida a un momento de torsión de $3000 \text{ lb} \cdot \text{pie}$ y $r = 0.75^\circ$.

7-48 Determinar el esfuerzo cortante máximo en la sección que se muestra, cuando se somete a un momento de torsión de $20 \text{ N} \cdot \text{m}$. Determinar también la relación de torsión en grados por metro, si $G = 80 \times 10^3 \text{ MPa}$.

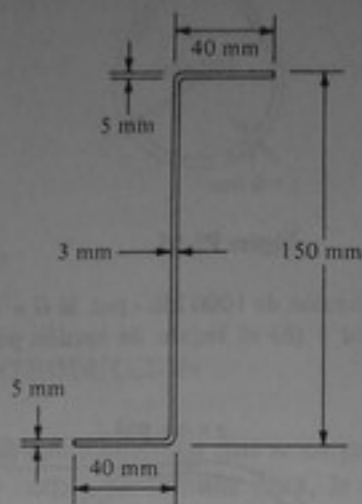


Figura P7-48

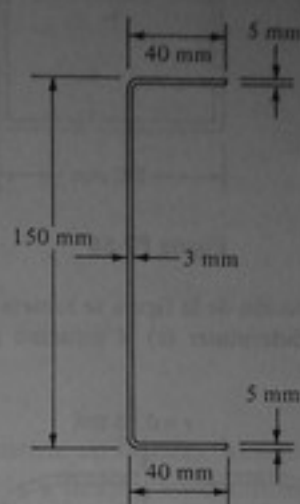


Figura P7-49

7-49 Repetir el problema 7-48 para la sección mostrada.

7-50 Repetir el problema 7-48 para la sección mostrada.



Figura P7-50

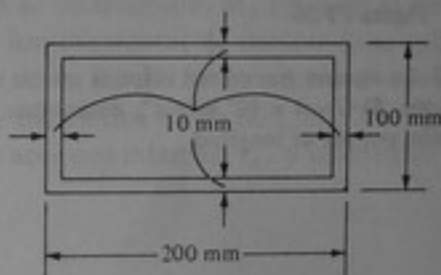


Figura P7-51

7-51 La sección extruida de aluminio que se muestra en la figura se somete a un momento de torsión de $20 \text{ kN} \cdot \text{m}$. Determinar el esfuerzo cortante máximo y la relación de torsión en grados por metro (tómese el valor de G en la Tabla A-2).

7-52 a 7-55 Repetir el problema 7-51 para las secciones mostradas.

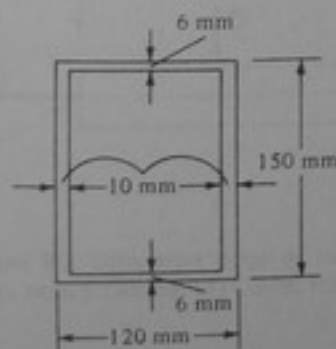


Figura P7-52

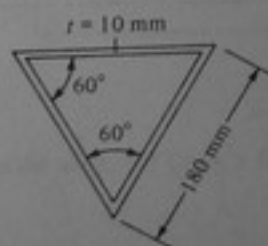


Figura P7-53

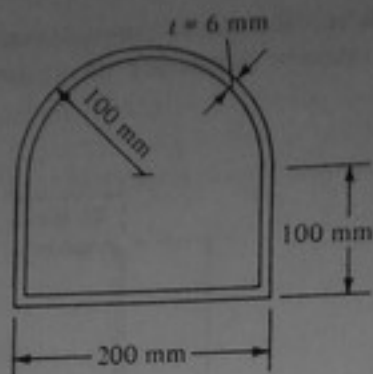


Figura P7-54

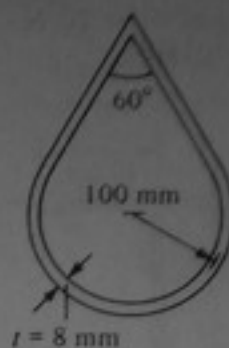


Figura P7-55

7-56 La sección de la figura se somete a un momento de torsión de $1000 \text{ klb} \cdot \text{pul}$. Si $G = 12 \times 10^3 \text{ klb/pul}^2$, determinar (a) el esfuerzo cortante en la pared y (b) el ángulo de torsión por pie de longitud.

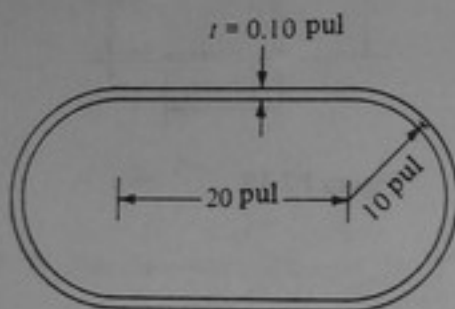


Figura P7-56

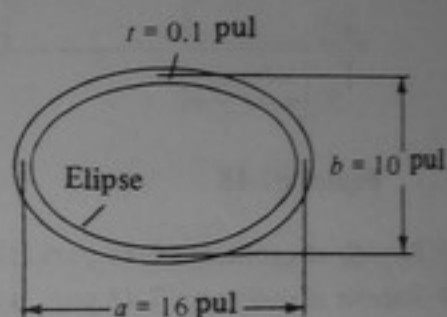


Figura P7-57

7-57 La sección transversal elíptica que se muestra se somete a un momento de torsión de $15.000 \text{ lb} \cdot \text{pie}$. Si $G = 4 \times 10^6 \text{ lb/pul}^2$, determinar (a) el esfuerzo cortante en la pared y (b) el ángulo de torsión por pie de longitud.

Capítulo 8

Análisis de vigas

8-1 INTRODUCCION

Las vigas son elementos que se cargan predominantemente en flexión. Aunque algunas vigas se cargan en flexión pura, la mayoría se somete a flexión en combinación con cargas cortantes, axiales y de torsión. En la fig. 8-1 se presentan ejemplos de los diferentes tipos de cargas.

En el caso de flexión pura (fig. 8-1a), la carga externa que actúa sobre el elemento consiste en un momento de flexión. Si la línea que pasa por el centroide de todas las secciones transversales del elemento se escoge como eje x , la flexión puede consistir en un momento M_z respecto al eje z o en un momento M_y respecto al eje y . Las acciones internas correspondientes también son momentos de flexión. Si se aplica una carga vertical externa, P_y , como se indica en la fig. 8-1b, las acciones internas resultantes son fuerzas cortantes internas, V_y , y momentos de flexión, M_x . De modo análogo, una carga cortante externa, P_x , produce acciones internas, V_x , y momentos de

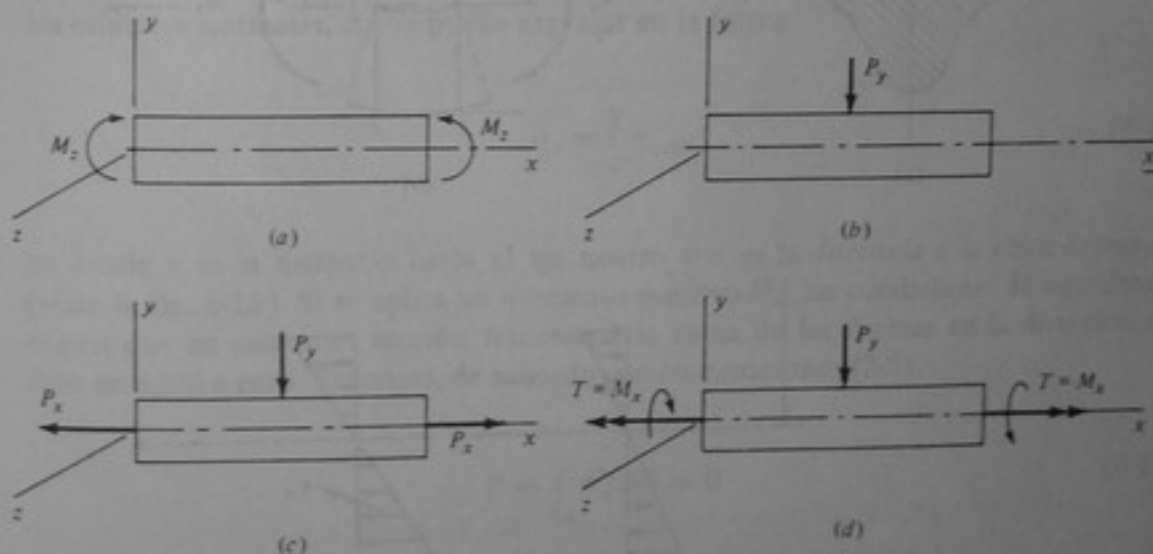


Figura 8-1 Diferentes tipos de cargas de vigas. (a) Flexión pura. (b) Corte y flexión. (c) Corte, carga axial y flexión. (d) Corte, torsión y flexión.

flexión, M_y . Se pueden hacer enunciados parecidos para los otros dos tipos de carga que se muestran en las figs. 8-1c y d.

Cuando los elementos sometidos predominantemente a carga axial, es decir, las columnas, se someten también a momentos de flexión, se denominan *vigas columnas*.

El análisis de vigas realizado en este capítulo incluye vigas compuestas de dos o más materiales y vigas curvas. Se supone que las deformaciones por flexión son predominantes y, en consecuencia, los demás tipos de deformación se consideran despreciables.

8-2 SUPOSICIONES BASICAS

En esta sección se tratará la teoría "clásica" de las vigas, tal como se aplica a las vigas rectas con el área de la sección transversal constante. En esta teoría se supone que los momentos de flexión aplicados actúan en un plano de simetría que, para los fines de nuestro estudio, se considera vertical, como se indica en la fig. 8-2a.

La suposición básica de la teoría clásica de las vigas es que *los planos perpendiculares al eje longitudinal permanecen perpendiculares, y planos cuando la viga se somete a flexión*. Así, los planos AC y BD en la fig. 8-2b pueden rotar, uno con respecto al otro, pero permanecen perpendiculares al eje longitudinal curvo. Como las deformaciones unitarias están relacionadas directamente con las deformaciones totales (capítulo 3), esta suposición implica que la deformación unitaria longitudinal ϵ_x varía linealmente con la profundidad de la viga desde un extremo negativo o valor mínimo en CD hasta un valor positivo máximo en AB , como se indica en la fig. 8-2c. Las fibras EF , para las cuales la deformación unitaria es cero, están situadas en la llamada super-

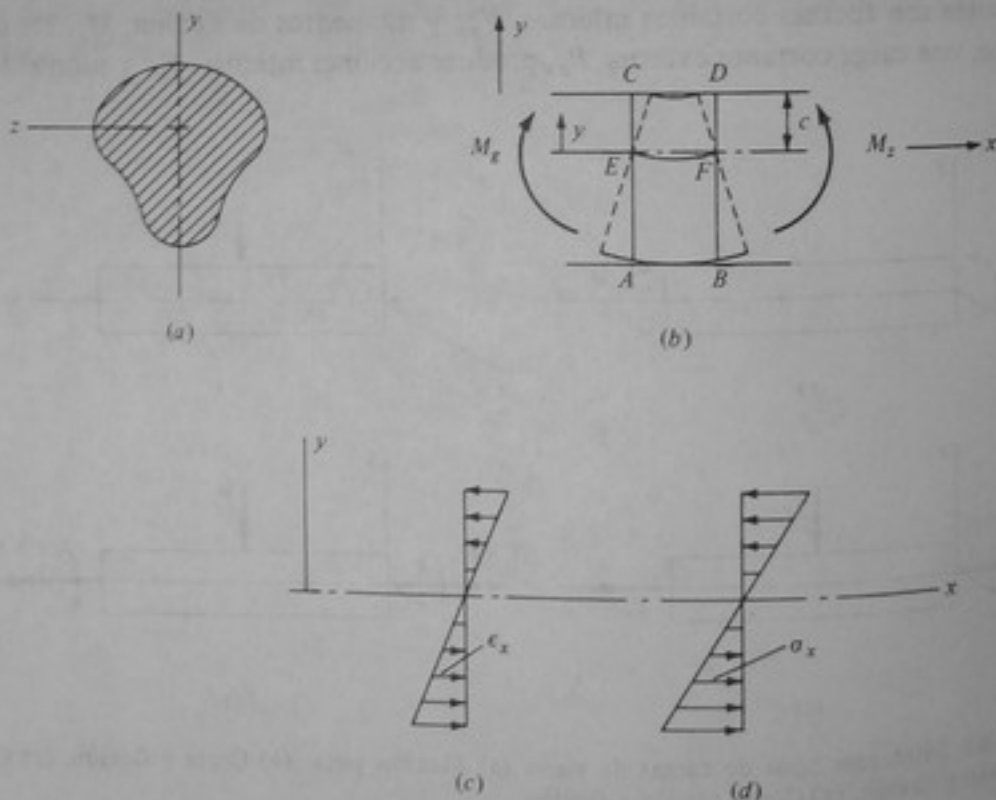


Figura 8-2 Flexión pura de vigas.

ficie neutra de la viga. La intersección de esta superficie neutra con un plano vertical de flexión se llama el *eje neutro*. Esta suposición también implica que los únicos esfuerzos producidos por los momentos de flexión M_x que actúan en el plano $x-y$ son los esfuerzos normales, σ_x . Debido al efecto de Poisson, las deformaciones unitarias en las direcciones y y z son $-\nu\sigma_x/E$. Debido a este mismo efecto, la superficie neutra se curva en dos direcciones, pero se supone curva únicamente en el plano $x-y$ y plana en la dirección z .

La segunda suposición básica de la teoría clásica de las vigas es que *el material de la viga se comporta linealmente*, es decir que los esfuerzos son directamente proporcionales a las deformaciones unitarias, de acuerdo con la ley de Hooke. Según el capítulo 4, esto significa que los esfuerzos normales σ_x varían linealmente con la profundidad de la viga, como se indica en la fig. 8-2d. Aunque estas suposiciones se refieren solamente a momentos de flexión que actúan en un plano de simetría, como se verá en la sección 8-3, la limitación se puede tomar en forma menos rigurosa con el fin de incluir los llamados *planos principales*.

Las suposiciones básicas para flexión pura no son estrictamente aplicables a los casos en que se presenta corte simultáneamente con la flexión. No obstante, para los elementos clasificados como vigas, las deformaciones por corte generalmente son despreciables comparadas con las producidas por flexión. Únicamente en casos excepcionales tales como las vigas cortas de gran profundidad sometidas a altas cargas de corte, la deformación por corte desempeña un papel significativo. Sin embargo, para la gran mayoría de vigas, las deformaciones por corte (no los esfuerzos cortantes) son despreciables. Esto también es cierto para las vigas sometidas a carga axial, con tal que esta última carga no sea predominante.

8-3 FORMULA DE LA FLEXION ELASTICA

Con base en las suposiciones establecidas en la sección anterior, una variación lineal de los esfuerzos normales, σ_x , se puede expresar en la forma

$$\sigma_x = \frac{y}{c} \sigma_{\text{ext}} \quad (8-1)$$

en donde y es la distancia hasta el eje neutro y c es la *distancia a la fibra extrema* (véase la fig. 8-2b). Si se aplica un momento positivo M_x , las condiciones de equilibrio exigen que en cualquier sección transversal la suma de las fuerzas en la dirección x debe ser igual a cero. Entonces, de acuerdo con las ecuaciones (2-5),

$$P = \int_A \sigma_x dA = 0 \quad (8-2)$$

$$\frac{\sigma_{\text{ext}}}{c} \int_A y dA = 0$$

Para valores diferentes a cero de σ_{extr} y c ,

$$\int_A y \, dA = 0 \quad (8-3)$$

Esto implica que *el eje neutro coincide con el eje centroidal del elemento.*

Además del equilibrio de fuerzas horizontales se debe satisfacer el equilibrio de momentos; de acuerdo con la última de las ecuaciones (2-5), esto exige que

$$M_z = - \int_A \underbrace{\frac{y\sigma_{\text{extr}}}{c}}_{\substack{\text{fuerza} \\ \text{esfuerzo} \times \text{área} \times \text{brazo}}} \, dA = - \frac{\sigma_{\text{extr}}}{c} \int_A y^2 \, dA \quad (8-4)$$

Por definición, el término $\int_A y^2 \, dA$ es el *momento de inercia* del área de la sección transversal con respecto al eje z y se designa mediante I_z o, sencillamente, I . Reemplazando M_z por M se obtiene

$$M = \frac{-\sigma_{\text{extr}} I}{c} \quad (8-5)$$

$$\sigma_{\text{extr}} = \frac{-Mc}{I} \quad (8-6)$$

I tiene la dimensión de longitud a la cuarta potencia (ésta es, metros⁴ o pulgadas⁴). De acuerdo con la ecuación (8-1), para esfuerzos dentro de la viga,

$$\sigma_x = \frac{-My}{I} \quad (8-7)$$

Ahora definimos

$$S = \frac{I}{c} \quad (8-8)$$

en donde S es el *módulo de la sección* de la sección transversal. Algunas veces S también se denomina *módulo elástico*, en contraste con el módulo plástico, que se introducirá en la sección 8-5. La ecuación (8-6) se puede volver a escribir en la forma

$$\sigma_{\text{extr}} = \frac{M}{S} \quad (8-9)$$

en donde el signo del esfuerzo se determina por inspección. En general, los valores de c para las fibras extremas superior e inferior son diferentes, en cuyo caso se puede distinguir entre un *módulo de la sección superior*, $S_{\text{sup}} = I/c_t$ y un *módulo de la sección inferior*, $S_{\text{inf}} = I/c_b$ (fig. 8-3). La dimensión del módulo de la sección, S , es longitud a la tercera potencia.

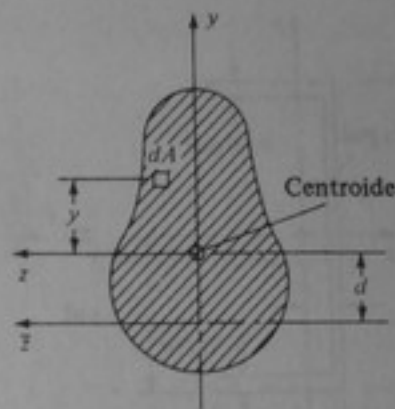
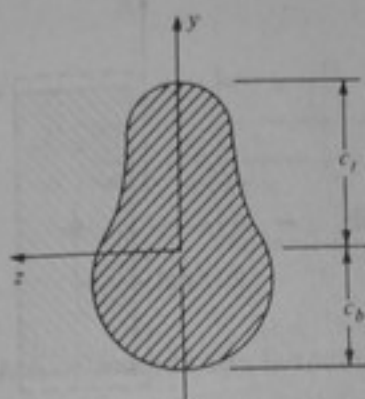


Figura 8-3 Módulos de la sección, superior e inferior. Figura 8-4 Teorema de los ejes paralelos.

En la anterior ecuación, el momento de inercia se define con respecto a un eje centroidal z . Para determinar el momento de inercia respecto a un eje \bar{z} , paralelo al eje centroidal z y localizado a una distancia d de éste (fig. 8-4), se tiene

$$I_{\bar{z}} = \int_A (y + d)^2 dA = \int_A y^2 dA + 2d \int_A y dA + d^2 \int_A dA = I_z + 0 + Ad^2$$

o $I_{\bar{z}} = I_z + Ad^2$ (8-10)

Esta ecuación se conoce como la *fórmula de transferencia* y expresa el principio denominado *teorema de los ejes paralelos*. De la ecuación (8-10) resulta obvio que I_z tiene un valor mínimo cuando d es cero, es decir, para un eje centroidal. Este teorema permite determinar los momentos de inercia de diferentes tipos de secciones transversales.

Para una sección rectangular (fig. 8-5), el momento de inercia se puede calcular mediante

$$I = \int_A y^2 dA = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 \frac{b dy}{dA} = \frac{bh^3}{12}$$
 (8-11)

En las tablas A-3 a A-7 se dan los momentos de inercia para diferentes tipos de secciones transversales. Aunque la mayoría de lectores deben estar familiarizados con la determinación de momentos de inercia debido a sus estudios de estática y dinámica, se presenta un ejemplo sencillo.

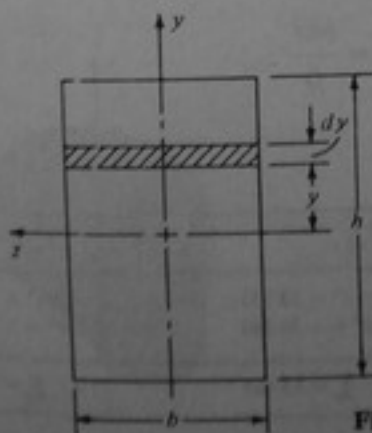


Figura 8-5 Momento de inercia para una sección rectangular.

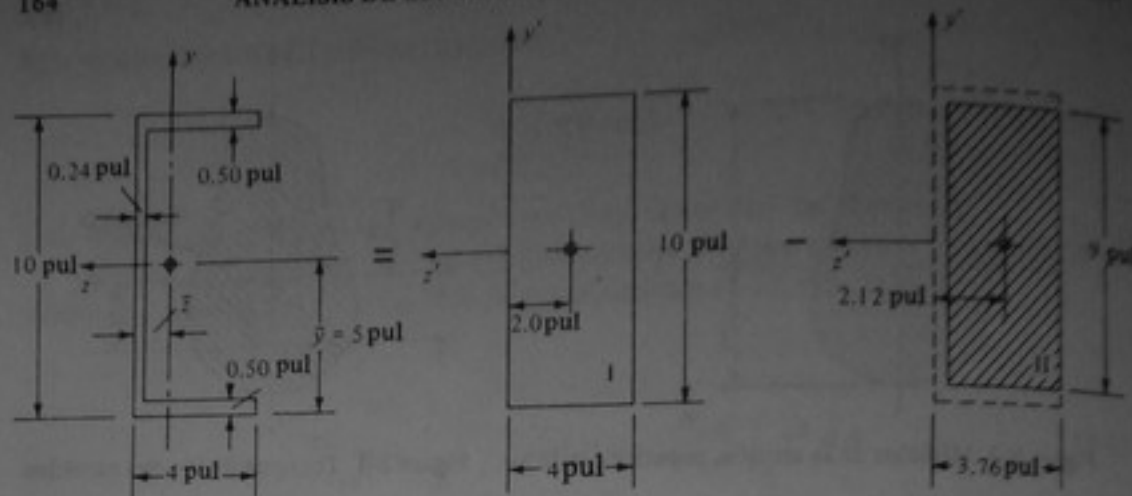


Figura 8-6 Ejemplo 8-1.

Ejemplo 8-1 Para la sección representada en la fig. 8-6, determinar I_x e I_y .

SOLUCION Los cálculos se hacen más fácilmente en forma de tabla y los de la tabla 8-1 se explican por sí mismos.

$$\bar{z} = \frac{8.26}{6.16} = 1.341 \text{ pul}$$

$$I_y = 13.465 + 7.910 = 21.375 \text{ pul}^4$$

$$I_y = I_y - A\bar{z}^2 = 21.375 - 6.16(1.341)^2 = 10.30 \text{ pul}^4 \quad \text{Resp.}$$

$$I_x = 104.91 \text{ pul}^4 \quad \text{Resp.}$$

Ejemplo 8-2 Una viga de madera se carga como se muestra en la fig. 8-7. Determinar los esfuerzos en los puntos A , B y C .

SOLUCION Los momentos en las diferentes secciones son $M_{I-I} = M_{III-III} = 10 \text{ kN} \cdot \text{m}$ y $M_{II-II} = 20 \text{ kN} \cdot \text{m}$. Para una viga rectangular de altura h y ancho b ,

$$S = \frac{I}{h/2} = \frac{bh^3/12}{h/2} = \frac{bh^2}{6}$$

Tabla 8-1

Area	A	z'	Az'	Az'^2	I_y	I_x
I	40.00	2.00	80.00	160.000	$\frac{1}{12} \times 10 \times 4^3 = 53.333$	$\frac{1}{12} \times 4 \times (10)^3 = 333.33$
II	-33.84	2.12	-71.74	-152.090	$-\frac{1}{12} \times 9 \times (3.76)^3 = -39.868$	$-\frac{1}{12} \times 3.76 \times 9^3 = -228.42$
	$\Sigma = 6.16$	$\Sigma = 8.26$	$\Sigma = 7.910$		$\Sigma = 13.465$	$\Sigma = 104.91$

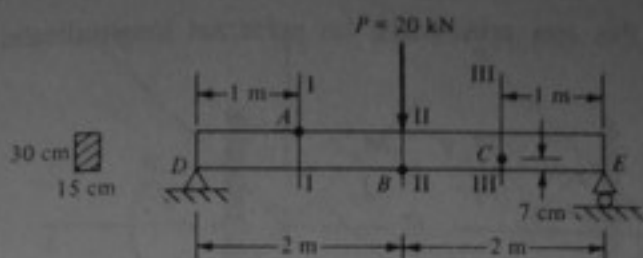


Figura 8-7 Ejemplo 8-2.

Así, de acuerdo con la ecuación (8-9)

$$\sigma_A = \frac{10}{(15/6)(30)^2 \times 10^{-6}} = -4444.4 \text{ kPa} \quad \text{compresión} \quad \text{Resp.}$$

Análogamente,

$$\sigma_B = \frac{20}{(15/6)(30)^2 \times 10^{-6}} = +8888.8 \text{ kPa} \quad \text{tracción} \quad \text{Resp.}$$

Para el punto C, situado en la sección III-III, utilizando la ecuación (8-6) se obtiene

$$\sigma_C = \frac{-10(-8) \times 10^{-2}}{(15/12)(30)^3 \times 10^{-8}} = +2370.4 \text{ kPa} \quad \text{tracción} \quad \text{Resp.}$$

Las fórmulas de flexión expresadas mediante las ecuaciones (8-6), (8-7) y (8-9) son para un momento de flexión que actúa en un plano de simetría. Se puede demostrar que estas fórmulas también son válidas para momentos que actúan en un plano principal. Los planos principales pasan por los ejes principales de la sección transversal de la viga. Cada sección transversal tiene dos de estos ejes, los cuales siempre son mutuamente perpendiculares. Los momentos de inercia respecto a estos ejes son un máximo o un mínimo, mientras que el valor $\int_A yz \, dA$, denominado *producto de inercia*, I_{yz} , desaparece para estos ejes (fig. 8-8). Si una sección transversal tiene un eje de simetría, dicho eje de simetría siempre es un eje principal.

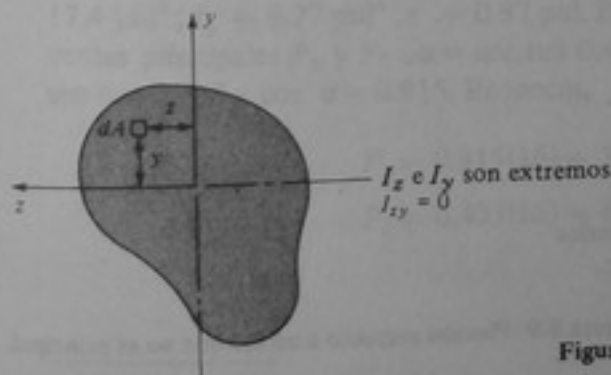


Figura 8-8 Flexión respecto a los ejes principales.

Para flexión respecto a dos ejes principales, los esfuerzos longitudinales están dados por

$$\sigma_x = -\frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y} \quad (8-12)$$

8-4 FLEXIÓN DE VIGAS RESPECTO A EJES ARBITRARIOS

De la sección anterior se concluye que las fórmulas de flexión deducidas anteriormente son válidas únicamente para flexión respecto a ejes principales. Para flexión respecto a un eje que no es principal, es decir, un eje arbitrario, se puede utilizar una fórmula que contenga el producto de inercia o se puede descomponer el momento en sus componentes principales. Este tipo de flexión se suele llamar flexión *asimétrica* u *oblicua*. Para la flexión respecto a dos ejes arbitrarios que se representa en la fig. 8-9, se puede demostrar que

$$\sigma_x = -\frac{M_z I_y - M_y I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} y + \frac{M_y I_z - M_z I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} z \quad (8-13)$$

Para flexión respecto a los ejes principales, I_{yz} es igual a cero y la ecuación (8-13) se convierte nuevamente en la ecuación (8-12).

El procedimiento más común consiste en descomponer el momento o los momentos aplicados en sus componentes a lo largo de los ejes principales. Se supone que el estudiante está familiarizado con la determinación de las direcciones principales y los correspondientes momentos de inercia principales. Aunque éste no sea el caso, existe información disponible en tablas y manuales para la mayoría de las secciones estructurales asimétricas (véase, por ejemplo, la tabla A-7). Para demostrar este procedimiento estudiaremos la flexión de un ángulo respecto al eje z .

Ejemplo 8-3 El ángulo que se muestra en la fig. 8-10 se somete a un momento M_z . Sus componentes de momento a lo largo de los ejes principales, M_x y M_y , son iguales a $M_z/\sqrt{2}$. Los esfuerzos en un punto A son:

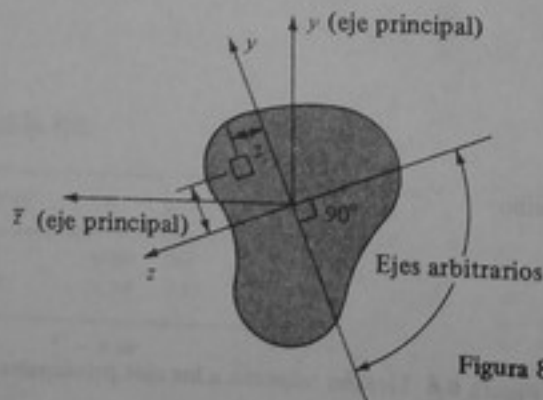


Figura 8-9 Flexión respecto a un eje que no es principal

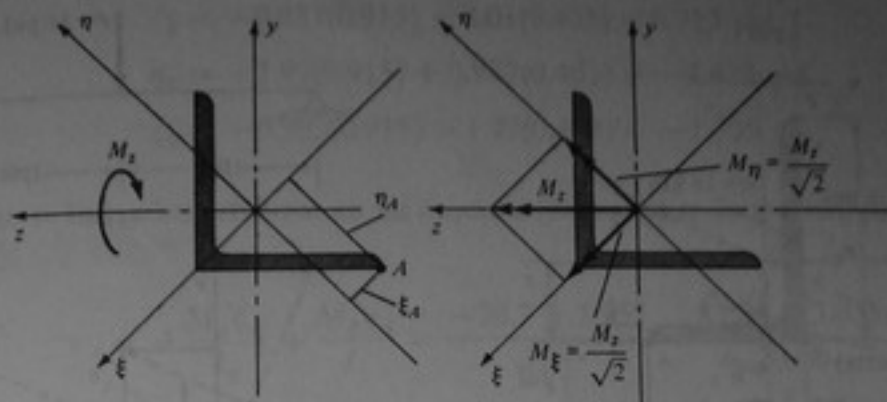


Figura 8-10 Ejemplo 8-3.

$$\sigma_A = \frac{-M_z \eta_A}{I_z} + \frac{M_z \xi_A}{I_\eta} = \frac{-M_z \eta_A}{\sqrt{2} I_z} + \frac{M_z \xi_A}{\sqrt{2} I_\eta} \quad (8-14)$$

en donde η_A y ξ_A son negativos.†

Cuando la flexión asimétrica de una viga es producida por la aplicación de cargas transversales, a menudo resulta conveniente descomponer primero la carga o cargas aplicadas en las componentes que actúan en forma paralela a los ejes principales de la sección transversal. Luego se utilizan estas componentes para determinar los momentos de flexión producidos por ellas respecto a los ejes principales.

Como se estudiará detalladamente en la sección 8-9, los momentos aplicados en forma transversal deben pasar por el llamado *centro de corte* de una sección para evitar esfuerzos de torsión. Como ejemplo de este caso, se consideran los esfuerzos en un ángulo de lados desiguales.

Ejemplo 8-4 Un ángulo $6 \times 4 \times \frac{1}{2}$ pul se carga con una fuerza vertical que actúa a través de su centro de corte, S , como se muestra en la fig. 8-11a. Determinar los esfuerzos de flexión máximos en las esquinas A , B y C .

SOLUCION En la tabla A-7 se hallan los siguientes datos (se intercambian x y z , así como z y η): $A = 4.75 \text{ pul}^2$; $y = 1.99 \text{ pul}$; $z = 0.987 \text{ pul}$; $\tan \alpha = 0.44$; $I_x = 17.4 \text{ pul}^4$; $I_y = 6.27 \text{ pul}^4$; $r = 0.87 \text{ pul}$. Primero se descompone P en las componentes principales P_η y P_ξ . $\alpha = \arctan 0.44$ conduce a $\alpha = 23.75^\circ$, de modo que $\sin \alpha = 0.403$ y $\cos \alpha = 0.915$. Entonces,

$$P_\eta = 0.915(16) = 14.64 \text{ klb}$$

$$P_\xi = 0.403(16) = 6.45 \text{ klb}$$

† Se puede demostrar que $I_x + I_y = I_z + I_\eta$.

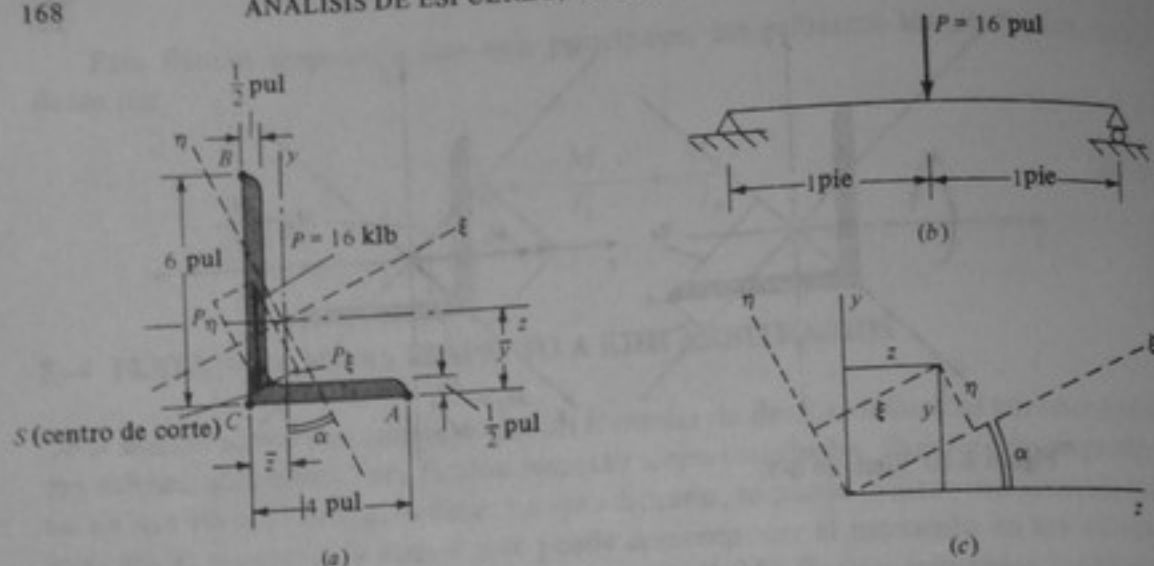


Figura 8-11 Ejemplo 8-4.

Asimismo, los momentos resultantes son:

$$M_{\xi} = \frac{1}{2} P_{\eta} L = \frac{1}{2} (14.64)(24) = 87.84 \text{ klb} \cdot \text{pul}$$

$$M_{\eta} = \frac{1}{2} P_{\xi} L = \frac{1}{2} (6.45)(24) = 38.7 \text{ klb} \cdot \text{pul}$$

(Como P pasa por el centro de corte S , no se produce torsión). En seguida hay que determinar los momentos principales de inercia. Se tiene

$$I_{\eta} = r_{\eta}^2 A = (0.87)^2 (4.75) = 3.59 \text{ pul}^4$$

Para calcular I_{ξ} se hace uso de la relación

$$I_{\eta} + I_{\xi} = I_z + I_y$$

$$I_{\xi} = 17.4 + 6.27 - 3.59 = 20.08 \text{ pul}^4$$

Con base en la fig. 8-11c se concluye que para determinar las distancias a las fibras se pueden emplear las ecuaciones generales de transformación

$$\eta = y \cos \alpha - z \sin \alpha \quad (1)$$

$$\xi = z \cos \alpha + y \sin \alpha \quad (2)$$

Las coordenadas en el sistema de coordenadas y - z son:

$$A(-1.99, 3.013) \quad B(4.01, -0.987) \quad C(-1.99, -0.987)$$

Remplazando estos valores, así como $\sin \alpha = 0.403$ y $\cos \alpha = 0.915$, en las ecuaciones (1) y (2), se obtiene

$$\eta_A = -1.99(0.915) - 3.013(0.403) = -3.035 \text{ pul}$$

$$\xi_A = 3.013(0.915) - 1.99(0.403) = +1.955 \text{ pul}$$

$$\eta_B = 4.01(0.915) + 0.987(0.403) = 4.067 \text{ pul}$$

$$\xi_B = -0.987(0.915) + 4.01(0.403) = 0.713 \text{ pul}$$

$$\eta_C = -1.99(0.915) + 0.987(0.403) = -1.423 \text{ pul}$$

$$\xi_C = -0.987(0.915) - 1.99(0.403) = -1.705 \text{ pul}$$

Luego se hallan los esfuerzos en las esquinas (los signos se determinan por inspección):

$$\sigma_A = -\frac{M_\eta \xi_A}{I_\eta} + \frac{M_\xi \eta_A}{I_\xi} = \frac{-38.7 \times 1.955}{3.59} + \frac{87.84 \times 3.035}{20.08}$$

$$= -7.8 \text{ klb/pul}^2$$

Resp.

$$\sigma_B = \frac{-M_\eta \xi_B}{I_\eta} - \frac{M_\xi \eta_B}{I_\xi} = -\frac{38.7 \times 0.713}{3.59} - \frac{87.84 \times 4.067}{20.08}$$

$$= -25.5 \text{ klb/pul}^2$$

Resp.

$$\sigma_C = +\frac{M_\eta \xi_C}{I_\eta} + \frac{M_\xi \eta_C}{I_\xi} = +\frac{38.7 \times 1.705}{3.59} + \frac{87.84 \times 1.423}{20.08}$$

$$= +24.6 \text{ klb/pul}^2$$

Resp.

8-5 FLEXIÓN INELÁSTICA DE VIGAS

Cuando el material de una viga se comporta elásticamente en la descarga, retorna a su forma original (fig. 8-12a). Sin embargo, si la carga es tal que causa comportamiento inelástico en la descarga, la viga no retornará a su forma original, sino que conservará una configuración flexionada en forma permanente (fig. 8-12b). En esta sección se estudia la flexión inelástica de vigas únicamente para vigas hechas de materiales que exhiben comportamiento elastoplástico idealizado, como se indica en la fig. 8-13. (Véase también la sección 4-5). El análisis de este tipo de vigas se denomina *análisis plástico*.

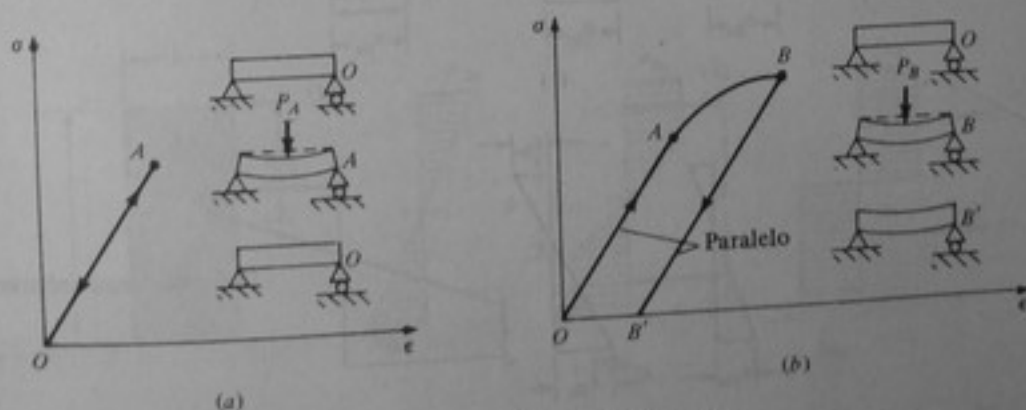


Figura 8-12 Carga y descarga de vigas. (a) Elástica. (b) Inelástica.

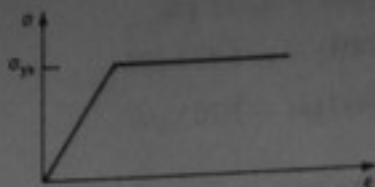


Figura 8-13 Comportamiento elastoplástico perfecto idealizado.

Si una viga se flexiona debido a la aplicación de una carga, entonces la fluencia ocurrirá primero en las fibras extremas sometidas al momento creciente. El momento M_{flu} asociado con la iniciación de la fluencia se llama *momento de fluencia*. A medida que aumenta el momento, la fluencia avanza hacia el interior de la viga, hasta que la fluencia en la sección es completa (fig. 8-14d). En este punto la fuerza interna resultante de compresión, C , y la fuerza interna de tensión, T , son iguales a

$$C = \sigma_{ys} A_c \quad \text{y} \quad T = \sigma_{ys} A_t$$

en donde A_c y A_t son las áreas de compresión y de tensión, respectivamente. Si sólo actúa un momento de flexión, C debe ser igual a T y, en consecuencia,

$$A_c = A_t \quad (8-15)$$

El momento M_{pl} asociado con la fluencia en toda la profundidad de la viga se llama *momento plástico*. La relación entre el momento plástico, M_{pl} , y el momento de fluencia, M_{flu} , se llama el *factor de forma* f y

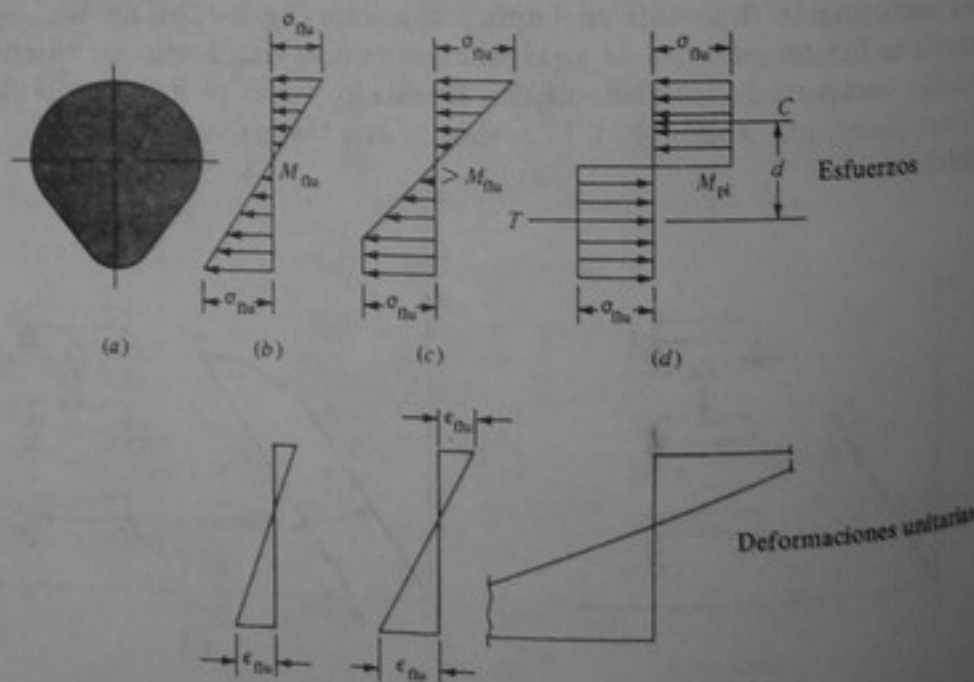


Figura 8-14 Esfuerzos y deformaciones unitarias de flexión debidos a momentos crecientes.

$$f = \frac{M_{pl}}{M_{flu}} \quad (8-16)$$

Con base en la ecuación (8-9) se ve que

$$M_{flu} = S\sigma_{flu} \quad (8-17)$$

Hagamos el momento plástico igual a

$$M_{pl} = Z\sigma_{flu} \quad (8-18)$$

en donde Z se define como *módulo plástico*. Sus dimensiones son longitud a la tercera potencia. Entonces, el factor de forma se puede expresar como

$$f = \frac{Z}{S} \quad (8-19)$$

Ejemplo 8-5 Una viga de sección transversal rectangular se somete a un momento de flexión positivo (fig. 8-15). Determinar (a) la profundidad de la zona plástica para un momento "parcialmente plástico", $M = 1.25 M_{flu}$ y (b) el factor de forma.

SOLUCION

(a) Para una zona plástica de profundidad $2y_{pl}$ el momento resistente interno es

$$M = M_{el, núcleo} + M_{pl} = S_{núcleo}\sigma_{flu} + C_1 d_1$$

en donde

$$S_{núcleo} = \frac{1}{6}b\bar{h}^2 \quad C_1 = \frac{(h - \bar{h})b\sigma_{flu}}{2} \quad d_1 = \bar{h} + \frac{h - \bar{h}}{2} = \frac{\bar{h} + h}{2}$$

de modo que

$$C_1 d_1 = \frac{h^2 - \bar{h}^2}{4} b\sigma_{flu}$$

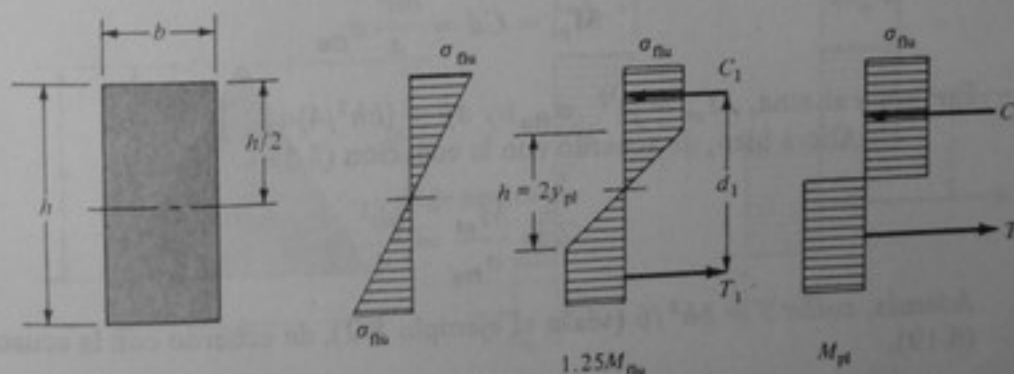


Figura 8-15 Ejemplo 8-5.

$$y \quad M = \left(\frac{\bar{h}^2}{6} + \frac{h^2 - \bar{h}^2}{4} \right) b \sigma_{flu} = \frac{3h^2 - \bar{h}^2}{12} b \sigma_{flu}$$

Un procedimiento alternativo, más general, consiste en escribir la expresión básica para la distribución de esfuerzos e integrarla respecto a la profundidad para obtener el momento "parcialmente plástico" en función de h , \bar{h} , b y σ_{flu} . De este modo, se puede escribir

$$\begin{aligned} M &= M_{el, \text{núcleo}} + M_{pl} \\ &= 2 \int_0^{\bar{h}/2} \frac{2y}{\bar{h}} \sigma_{flu} b y \, dy + 2 \int_{\bar{h}/2}^{h/2} \sigma_{flu} b y \, dy = \frac{3h^2 - \bar{h}^2}{12} b \sigma_{flu} \end{aligned}$$

Ahora bien, al empezar la fluencia el momento es igual a

$$M_{flu} = \frac{bh^2}{6} \sigma_{flu}$$

Por consiguiente,

$$1.25 M_{fp} = \frac{1.25bh^2}{6} \sigma_{flu}$$

Entonces, se puede escribir

$$\frac{1.25bh^2}{6} \sigma_{flu} = \frac{(3h^2 - \bar{h}^2)b}{12} \sigma_{flu}$$

$$o \quad \frac{1.25}{6} h^2 = \frac{h^2}{4} - \frac{\bar{h}^2}{12}$$

de donde

$$\bar{h} = \frac{1}{\sqrt{2}} h = 0.707h \quad \text{Resp.}$$

(b) Para fluencia plástica completa, $C = \frac{1}{2} b y \sigma_{flu}$ y $d = h/2$, de modo que

$$M_{pl} = Cd = \frac{bh^2}{4} \sigma_{flu}$$

En forma alterna, $M_{pl} = \int_0^{h/2} \sigma_{flu} b y \, dy = (bh^2/4) \sigma_{flu}$.
Ahora bien, de acuerdo con la ecuación (8-18),

$$Z = \frac{M_{pl}}{\sigma_{flu}} = \frac{bh^2}{4}$$

Además, como $S = bh^2/6$ (véase el ejemplo 8-2), de acuerdo con la ecuación (8-19),

$$f = \frac{Z}{S} = 1.5 \quad \text{Resp.}$$

Aunque los valores del módulo plástico se pueden calcular fácilmente, los valores de Z para secciones comunes se hallan en tablas públicas en diferentes manuales.

Ejemplo 8-6 Para una viga con sección transversal triangular, como se indica en la fig. 8-16, determinar (a) la posición del eje neutro en la fluencia y (b) el factor de forma.

SOLUCION En la iniciación de la fluencia (fig. 8-16b) el eje neutro pasa por el centroide, que está localizado a una distancia $h/3$ por encima de la base. Para determinar S se puede escribir

$$I_x = \int_0^h y'^2 \frac{y'}{h} b dy' = \frac{bh^3}{4}$$

$$I_z = \frac{bh^3}{4} - \frac{bh}{2} \left(\frac{2h}{3}\right)^2 = \frac{bh^3}{36}$$

$$S_{sup} = \frac{bh^3/36}{2h/3} = \frac{bh^2}{24}$$

$$S_{inf} = \frac{bh^3/36}{h/3} = \frac{bh^2}{12}$$

$$M_{flu} = \sigma_{flu} \frac{bh^2}{24}$$

Para fluencia plástica completa, $A_t = A_c = \frac{1}{2} A = bh/4$. Si se supone el eje neutro en h_0 , tenemos

$$\frac{h_0 b}{h} \frac{h_0}{2} = \frac{hb}{2} - \frac{h_0^2 b}{2h}$$

lo cual implica que

$$h_0 = \frac{h}{\sqrt{2}} \quad y \quad b_0 = \frac{b}{\sqrt{2}}$$

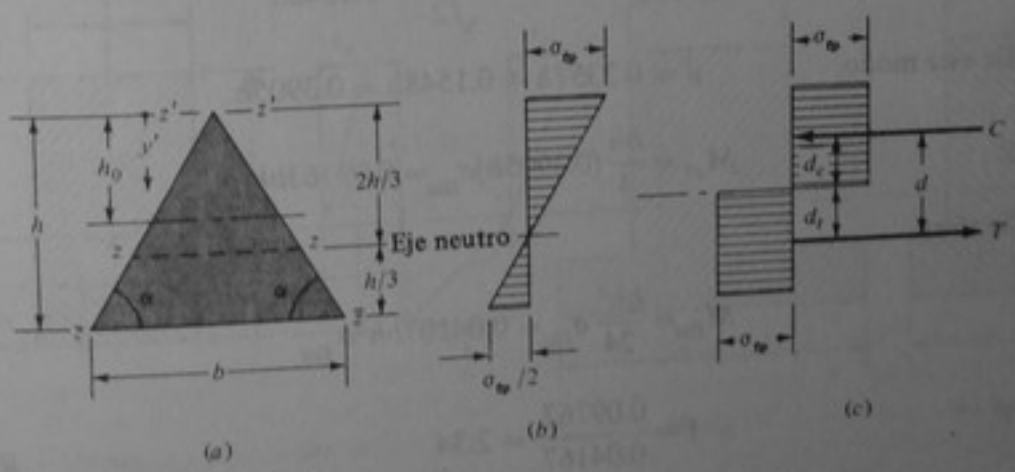


Figura 8-16 Ejemplo 8-6.

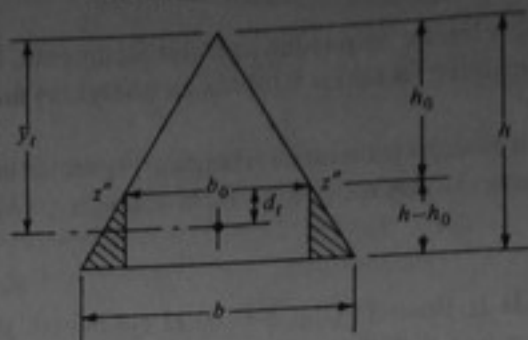


Figura 8-17 Ejemplo 8-6.

La fuerza de compresión, C , es igual a $A_t \sigma_{flu}$, o sea que

$$C = \frac{bh}{4} \sigma_{flu} = T$$

Asimismo,

$$d = d_c + d_t = \frac{h_0}{3} + d_t = 0.2357h + d_t$$

Para determinar d_t simplemente se debe calcular y_t (fig. 8-17). Para esto se debe tomar el momento de primer orden del área respecto al eje que pasa por el punto superior y escribir

$$\bar{y}_t = \frac{\int_{h_0}^h y b_y dy}{bh/4}$$

Ahora bien, $b_y = yb/h$ y $h_0 = h/\sqrt{2}$, de donde

$$\bar{y}_t = \frac{(b/h) \int_{h/\sqrt{2}}^h y^2 dy}{bh/4} = 0.8619h$$

$$y \quad d_t = 0.8619h - \frac{h}{\sqrt{2}} = 0.1548h$$

$$\text{De este modo,} \quad d = 0.2357h + 0.1548h = 0.3905h$$

$$y \quad M_{pl} = \frac{bh}{4} (0.3905h) \sigma_{flu} = 0.09763bh^2 \sigma_{flu}$$

Se tiene

$$M_{flu} = \frac{bh^2}{24} \sigma_{flu} = 0.04107bh^2 \sigma_{flu}$$

$$y \quad f = \frac{0.09763}{0.04167} = 2.34$$

Resp.

8-6 VIGAS DE DOS MATERIALES (VIGAS COMPUESTAS)

Con frecuencia las vigas se hacen con diferentes materiales a la vez. En esta sección únicamente se estudian las vigas hechas con *dos* materiales diferentes.

Considérese la viga rectangular que se muestra en la fig. 8-18, que consta de los materiales, 1 y 2, adheridos uno al otro. Si los materiales tienen diferentes módulos de elasticidad, la relación entre los dos módulos se puede definir como

$$n = \frac{E_2}{E_1} \quad (8-20)$$

Como antes, se supone que las secciones planas, perpendiculares al eje longitudinal de la viga, permanecen planas. Esto quiere decir que las deformaciones unitarias varían linealmente a partir del eje neutro, como se indica en la fig. 8-18b. En la sección *a-a*, las deformaciones unitarias de los dos materiales deben ser iguales (fig. 8-18b) y

$$\epsilon_1 = \epsilon_2 \quad (8-21)$$

Para materiales elástico-lineales esto significa que en la sección *a-a*

$$\frac{\sigma_1}{E_1} = \frac{\sigma_2}{E_2} \quad (8-22)$$

que, de acuerdo con la ecuación (8-20) en *a-a*, conduce a

$$\sigma_2 = n\sigma_1 \quad (8-23)$$

En la figura 8-18c se muestra la distribución de los esfuerzos elásticos, sobre la base de que *n* es mayor que 1. Para determinar los esfuerzos es conveniente emplear el mismo concepto de *área transformada* que se introdujo en el capítulo 6. Nuevamente, para localizar el eje neutro de una sección transversal es necesario considerar el equilibrio de las fuerzas horizontales. Como para el equilibrio de fuerzas horizontales únicamente son significativas las magnitudes correctas de las fuerzas resistentes internas, se transforma uno de los dos materiales en el otro en tal forma que la fuerza resistente

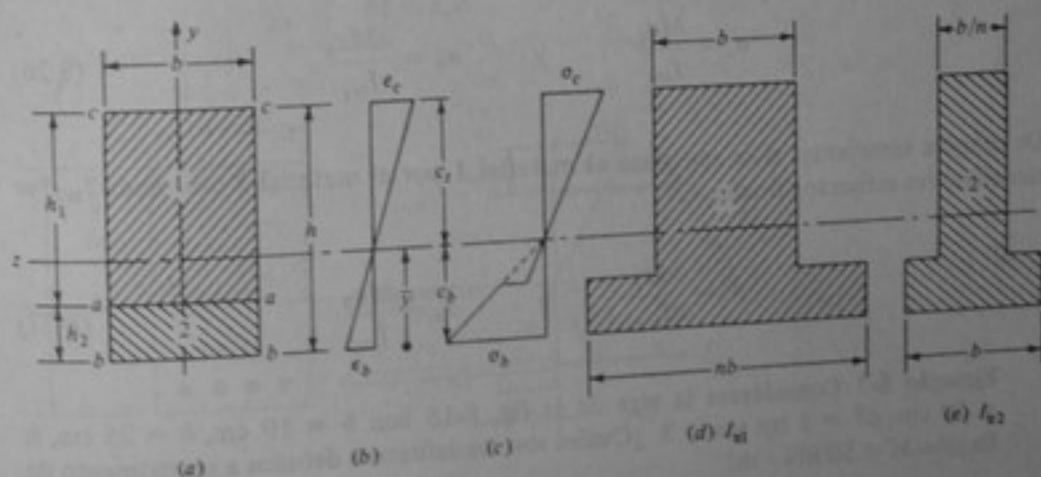


Figura 8-18 Viga de dos materiales.

interna resultante neta permanezca igual en magnitud. Para esto se hace uso del hecho de que en la transformación basada en la ecuación (8-23), los esfuerzos serán aumentados o disminuidos. Por ejemplo, si la relación entre los módulos de elasticidad, n , dada por la ecuación (8-20), es mayor que 1, cuando se reemplaza el material 2 por el material 1 se deben reducir los esfuerzos en un factor de n . Como la fuerza es el producto del esfuerzo por el área, se debe multiplicar el área por un factor n para tener la misma fuerza resistente neta que actúe en la sección transformada. Se puede reemplazar el material 2 por el material 1 (fig. 8-18b) o bien, el material 1 por el material 2 (fig. 8-18e).

Como se está tratando con momentos de flexión, las localizaciones y , por consiguiente, las distancias de las fuerzas resultantes desde el eje neutro también deben permanecer iguales. En consecuencia, cuando se hace la transformación de un material a otro, se puede aumentar o disminuir el área únicamente en la dirección perpendicular al plano de flexión, es decir, en la dirección z . En la fig. 8-18d todo el material 2 es reemplazado por material 1, mientras que en la fig. 8-18e todo el material 1 es reemplazado con material 2. Para satisfacer el equilibrio de momentos se puede escribir para la sección transformada, al igual que en la ecuación (8-4),

$$M_z = - \int_A \frac{y\sigma_{\text{extr}}}{c} dA \quad y = - \frac{\sigma_{\text{extr}}}{c} \int_A y^2 dA \quad (8-24)$$

en donde $\int_A y^2 dA$ representa el momento de inercia de la sección transformada. Designando los momentos de inercia de la sección transformada mediante $I_{\text{tr}1}$ e $I_{\text{tr}2}$, respectivamente, los esfuerzos en la sección transformada se pueden calcular en la forma

$$\sigma_{c1} = \frac{Mc_t}{I_{\text{tr}1}} \quad y \quad \sigma_{b1} = \frac{Mc_b}{I_{\text{tr}1}} \quad (8-25)$$

Sin embargo, de acuerdo con la ecuación (8-23), al transformar el material 2 de la sección inferior, los esfuerzos se multiplican por un factor n . Por supuesto, los esfuerzos en el material 1 permanecen iguales. Entonces, los esfuerzos finales son

$$\sigma_c = \frac{Mc_t}{I_{\text{tr}1}} \quad y \quad \sigma_b = \frac{nMc_b}{I_{\text{tr}1}} \quad (8-26)$$

De manera semejante, si se reemplaza el material 1 por el material 2 utilizando $I_{\text{tr}2}$, se tienen como esfuerzos finales

$$\sigma_c = \frac{Mc_t}{nI_{\text{tr}2}} \quad y \quad \sigma_b = \frac{Mc_b}{I_{\text{tr}2}} \quad (8-27)$$

Ejemplo 8-7 Considérese la viga de la fig. 8-18 con $b = 10$ cm, $h = 25$ cm, $h = 20$ cm, $h^2 = 5$ cm y $n = 3$. ¿Cuáles son los esfuerzos debidos a un momento de flexión $M = 50$ kN · m?

Tabla 8-2

	A_{oi}	y	Ay	Ay^2	I_o
1	200	15	3000	45000	$\frac{1}{12} \times 10 \times 20^3 = 6666.7$
2	150	2.5	375	937.5	$\frac{1}{12} \times 30 \times 5^3 = 312.5$
	$\Sigma = 350$		$\Sigma = 3375$	$\Sigma = 45937.5$	$\Sigma = 6979.2$

SOLUCION Para determinar los esfuerzos, primero se debe localizar el eje neutro y calcular I . Esto se hace consultando la tabla 8-2.

$$\bar{y} = \frac{3375}{350} = 9.643 \text{ cm}$$

$$I = 45937.5 + 6979.2 - 350(9.643)^2 = 20,371 \text{ cm}^4$$

$$\sigma_{c1} = \frac{50(25 - 9.643) \times 10^{-2}}{20,371 \times 10^{-8}} = 37,693 \text{ kPa} = 36.7 \text{ MPa} \quad \text{Resp.}$$

$$\sigma_{b2} = \frac{9.643}{(25 - 9.643)} 37,693 \times 3 = 71,005 \text{ kPa} = 71.0 \text{ MPa} \quad \text{Resp.}$$

Como una aplicación especial de las vigas compuestas se estudiará la capacidad de flexión de una viga de concreto reforzado. Considérese la viga de concreto reforzado que se muestra en la fig. 8-19, la cual se somete a un momento de flexión positivo, M . Como el concreto tiene muy poca resistencia a la tensión, se acostumbra suponer que el concreto se agrieta por debajo del eje neutro y no desarrolla esfuerzos de tracción. Entonces, se considera que solo el acero soporta las fuerzas de tensión producidas por el momento de flexión, M . Si C y T son las fuerzas resultantes de compresión y tensión, respectivamente, entonces

$$M = Ca \quad \text{o} \quad M = Ta \quad (8-28)$$

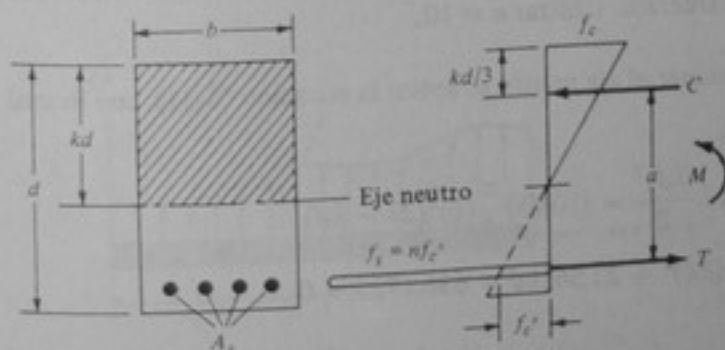


Figura 8-19 Viga de concreto reforzado.

$$\text{Ahora bien,} \quad C = \frac{1}{2} f_c b k d \quad (8-29)$$

$$\text{y} \quad T = f_{ac} A_{ac} \quad (8-30)$$

Para localizar el eje neutro hay que determinar el eje que pasa por el centroide de la sección transformada. Se sabe que el momento de primer orden respecto al eje neutro del área de concreto situada por encima de este eje debe ser igual al momento del área transformada del acero, bajo el mismo eje. Entonces,

$$b k d \frac{k d}{2} = n A_{ac} (d - k d) \quad (8-31)$$

La cual conduce a una ecuación cuadrática en $k d$. Una vez determinada $k d$, la distancia entre las fuerzas resultantes de compresión y tensión, C y T , se puede hallar mediante

$$a = \frac{2}{3} k d + (1 - k) d = \left(1 - \frac{k}{3}\right) d \quad (8-32)$$

De acuerdo con las ecuaciones (8-28) y (8-29)

$$\frac{1}{2} f_c b k d a = M \quad (8-33)$$

$$\text{o} \quad f_c = \frac{2M}{a b k d} \quad (8-34)$$

Con base en el diagrama de esfuerzos de la fig. 8-18c se observa que

$$f_{ac} = \frac{1 - k}{k} n f_c \quad (8-35)$$

En forma alterna, se pueden utilizar las ecuaciones (8-28) y (8-30) para obtener

$$f_{ac} = \frac{M}{a A_{ac}} \quad (8-36)$$

Ejemplo 8-8 Considerar una viga de concreto reforzado semejante a la que se representa en la fig. 8-19, con dimensiones $b = 12$ pul y $d = 27$ pul. El refuerzo de acero consiste en tres barras de 1 pul de diámetro. Para un momento de 100.000 lb · pie, determinar los esfuerzos. Utilizar $n = 10$.

SOLUCION Para determinar el eje neutro se aplica la ecuación (8-31), con lo cual se obtiene

$$12 \frac{(k d)^2}{2} = (10)(3) \frac{\pi}{4} (1)^2 (27 - k d)$$

$$\text{o} \quad 6(k d)^2 + 23.562 k d - 636.1725 = 0$$

de donde

$$k d = 8.52 \text{ pul} \quad \text{y} \quad d - k d = 18.48 \text{ pul}$$

Asimismo

$$a = \left(1 - \frac{k}{3}\right)d = 27 - 2.84 = 24.16 \text{ pul}$$

Entonces, de acuerdo con la ecuación (8-34),

$$f_c = \frac{2(100,000)(12)}{12(8.52)(24.16)} = 972 \text{ lb/pul}^2 \quad \text{Resp.}$$

y de acuerdo con la ecuación (8-36),

$$f_{ac} = \frac{100,000(12)}{24.16(3)(\pi/4)(1)^2} = 21,080 \text{ lb/pul}^2 \quad \text{Resp.}$$

8-7 RELACIONES ENTRE CARGA, FUERZA CORTANTE Y MOMENTO DE FLEXIÓN

Considérese la viga que se muestra en la fig. 8-20, sometida a una carga distribuida variable, p . La relación entre esta carga y la fuerza cortante V en una sección x se puede hallar considerando el equilibrio de fuerzas verticales de un elemento de longitud dx :

$$V + dV - V + p dx = 0$$

$$\text{o} \quad \frac{dV}{dx} = -p \quad (8-37)$$

De igual manera, para el equilibrio de momentos respecto al punto A ,

$$M + dM - M + (V + dV) dx + p dx \frac{dx}{2} = 0$$

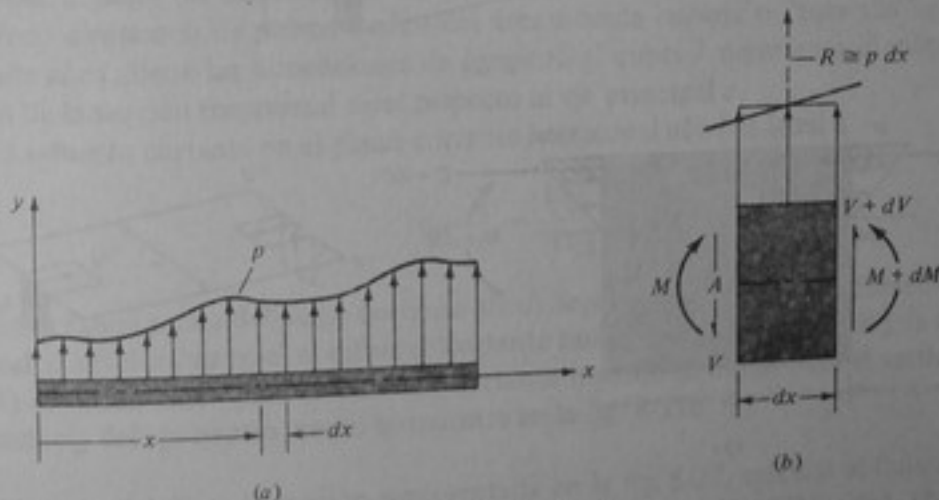


Figura 8-20 Viga sometida a una carga distribuida p .

Despreciando los términos de mayor orden se obtiene

$$dM + V dx = 0$$

o

$$\frac{dM}{dx} = -V \quad (8-38)$$

Los signos de las ecuaciones (8-37) y (8-38) se basan en los valores positivos de p , V y M , es decir, la carga p hacia arriba y el sentido de las fuerzas cortantes y los momentos de flexión tal como se indica en la fig. 8-20b.

8-8 FORMULA DE LA FUERZA CORTANTE

De acuerdo con la ecuación (8-38), la fuerza cortante vertical en una viga es igual al valor negativo del gradiente del momento. En otras palabras, la fuerza cortante en una viga está asociada con un momento de flexión variable. Para determinar el esfuerzo cortante vertical en una viga se considera un elemento de viga de longitud dx sometido a un momento M en x y $M + dM$ en $x + dx$, como se muestra en la fig. 8-21. De acuerdo con la ecuación (8-38), la fuerza cortante en esta porción es igual a $-dM/dx$. Debido al incremento en el momento, los esfuerzos normales aumentan en la distancia dx desde α hasta $\alpha + d\alpha$ (fig. 8-21b), en donde

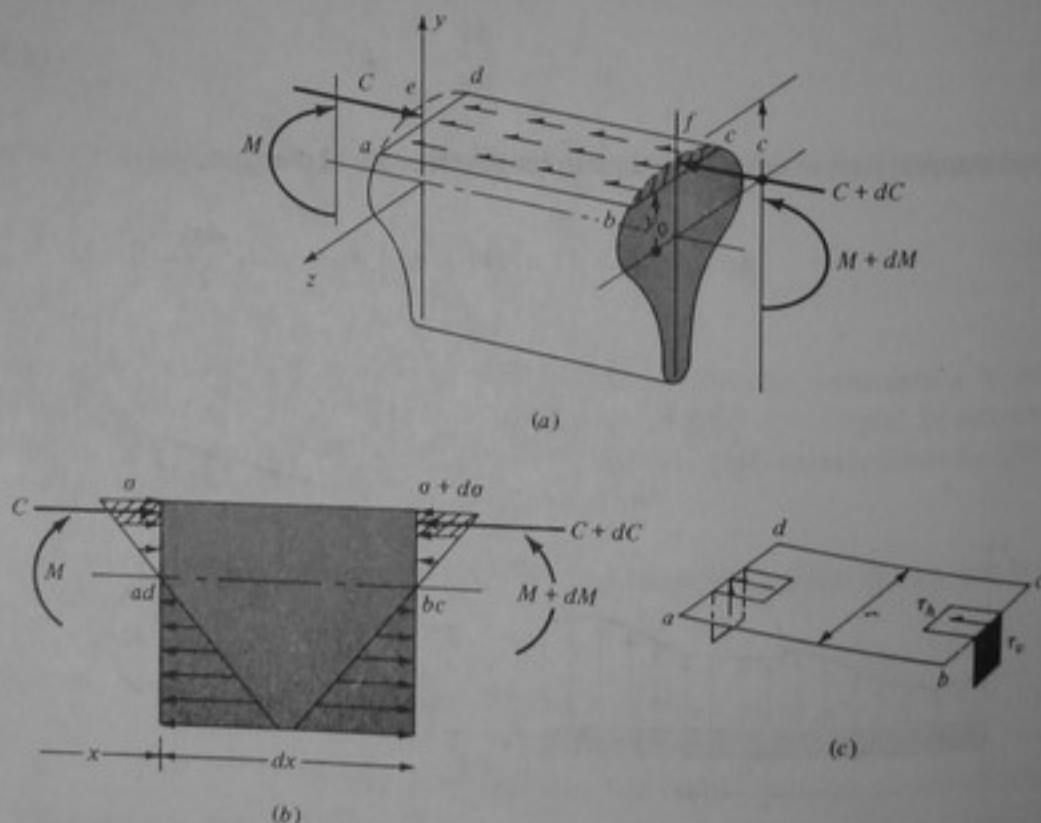


Figura 8-21 Esfuerzo cortante horizontal en una viga sometida a un momento de flexión variable.

$$\sigma = \frac{-My}{I} \quad \text{y} \quad \sigma + d\sigma = \frac{-(M + dM)y}{I} \quad (8-39)$$

Si se consideran ahora las áreas aed y bfc (fig. 8-21a) se observa que las fuerzas de compresión resultantes en estas áreas son

$$C = \sigma A_{aed} \quad \text{y} \quad C + dC = (\sigma + d\sigma)A_{bfc} \quad (8-40)$$

La fuerza cortante horizontal neta que actúa sobre el plano interior $abcd$ localizado a una distancia y_o por encima del eje neutro es igual a

$$dC = d\sigma A_{aed} = \frac{-dMy}{I} A_{aed}$$

Si la fuerza cortante horizontal por unidad de longitud se define como el *flujo de corte* q , entonces

$$q = \frac{dC}{dx} = \frac{-dM}{I dx} y A_{aed} = \frac{-dM}{I dx} \int_{y_o}^c y dA \quad (8-41)$$

Ahora definamos el *momento de primer orden* del área comprendida entre las fibras extremas y el plano $abcd$ mediante

$$Q = \int_{y_o}^c y dA \quad (8-42)$$

o, en general,

$$Q = \sum A_i y_i \quad (8-43)$$

De acuerdo con la ecuación (8-38) se puede remplazar $-dM/dx$ por V ; de este modo,

$$q = \frac{VQ}{I} \quad (8-44)$$

en donde a tiene las dimensiones de fuerza por unidad de longitud. Q , representa el *momento estático* o *de primer orden* del área situada *encima* o "más allá" del plano cortante $abcd$; tiene las dimensiones de longitud al cubo. I representa el momento de inercia de la sección transversal *total* respecto al eje principal z .

El esfuerzo cortante en el plano cortante horizontal $abcd$ es igual a

$$\tau = \frac{q}{t} = \frac{VQ}{It} \quad (8-45)$$

en donde t es el ancho del plano cortante $abcd$. Según el capítulo 2, el esfuerzo cortante vertical al nivel y_o es igual al esfuerzo cortante horizontal al mismo nivel y la ecuación (8-45) es válida tanto para el esfuerzo cortante horizontal como para el vertical a una distancia y_o del eje neutro, como se muestra en la fig. 8-21c.

Ejemplo 8-9 Para la sección representada en la fig. 8-22, calcular el flujo de corte y el esfuerzo en los niveles 1, 2, 3, 4 y 5, si $V = 400$ kN (0.4 MN).

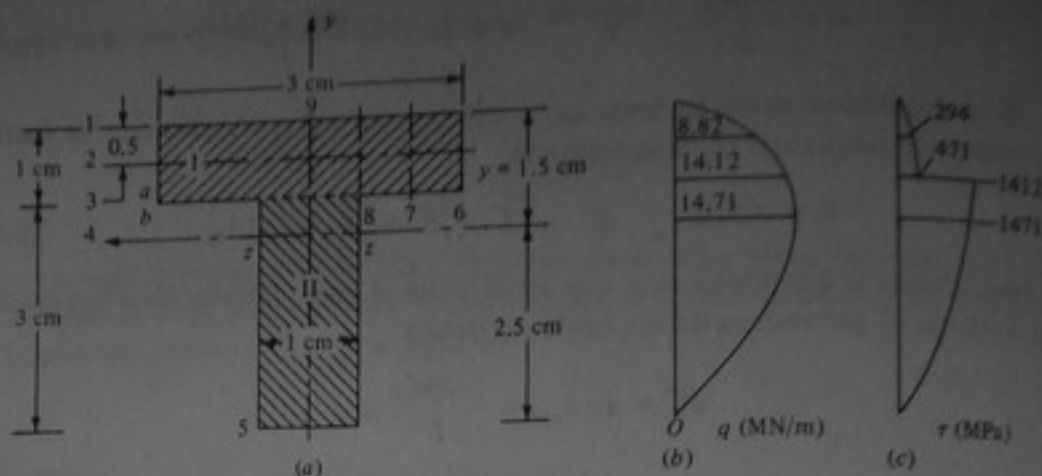


Figura 8-22 Ejemplo 8-9.

Tabla 8-3

	A	\bar{y}	$A\bar{y}$	$A\bar{y}^2$	I_o
I	3	0.5	1.5	0.75	$\frac{1}{12} \times 3 \times 1^3 = 0.25$
II	3	2.5	7.5	18.75	$\frac{1}{12} \times 1 \times 3^3 = 2.25$
	$\Sigma = 6$		$\Sigma = 9$	$\Sigma = 19.50$	$\Sigma = 2.50$

Tabla 8-4

Nivel	$Q(A, y), \text{cm}^3$	$q = \frac{VQ}{I}, \text{MN/m}$	τ, MPa
1	$0 \times 1.5 = 0$	0	0
2	$1.5 \times 1.25 = 1.875$	$\frac{0.4 \times 1.875}{8.5 \times 10^{-2}} = 8.82$	$\frac{8.82}{0.03} = 294$
3a	$3 \times 1.0 = 3.0$	$\frac{0.4 \times 3}{8.5 \times 10^{-2}} = 14.12$	$\frac{14.12}{0.03} = 471$
3b	$3 \times 1.0 = 3.0$	$\frac{0.4 \times 3}{8.5 \times 10^{-2}} = 14.12$	$\frac{14.12}{0.01} = 1412$
4	$3 \times 1.0 + 0.5 \times 0.25 = 3.125$	$\frac{0.4 \times 3.125}{8.5 \times 10^{-2}} = 14.71$	$\frac{14.71}{0.01} = 1471$
5	$0 \times 1.25 = 0$	0	0

SOLUCION Primero se determina la localización del eje neutro y el valor de I . Esto se hace en la tabla 8-3.

$$\bar{y} = \frac{9}{6} = 1.5 \text{ cm}$$

$$I_x = 19.50 + 2.50 - 6(1.5)^2 = 8.5 \text{ cm}^4$$

Para determinar Q , q y τ también se emplea una forma tabular (Tabla 8-4).

Considérese una sección rectangular de ancho b y altura h (fig. 8-23). Se puede demostrar fácilmente que el esfuerzo cortante (horizontal y vertical) alcanza su valor máximo en el eje neutro y es igual a

$$\tau_{\max} = \frac{1.5V}{bh} \quad (8-46)$$

Si se define el esfuerzo promedio como

$$\tau_{\text{pro}} = \frac{V}{A} = \frac{V}{bh} \quad (8-47)$$

entonces,

$$\tau_{\max} = 1.5\tau_{\text{pro}}$$

También se puede demostrar que el esfuerzo cortante varía cuadráticamente con la profundidad de la viga (fig. 8-23).

A veces es conveniente determinar el flujo de corte horizontal y el esfuerzo horizontal en un plano no horizontal. Por ejemplo, considérese nuevamente la viga de la fig. 8-22. El flujo de corte se puede calcular en los planos verticales 6, 7 y 8 considerando el momento de primer orden de las áreas situadas más allá (a la derecha) de los planos cortantes verticales en estas secciones. Así, $q_7 = VQ_7/I$, en donde Q_7 es el momento de primer orden del área $abcd$ con respecto al eje neutro (fig. 8-24a). El esfuerzo cortante horizontal en el plano $afed$ es igual a un esfuerzo cortante horizontal en el ala (fig. 8-24b). Si se hace una gráfica del flujo de corte se observa que $q_3 = 2q_2$ (fig. 8-24c). Empezando en cero, en forma horizontal, desde la parte exterior de las alas, se puede dibujar el esfuerzo cortante que fluye desde los dos lados del ala hacia el centro y luego verticalmente en el alma, como se indica en la fig. 8-24b. Se puede esta-

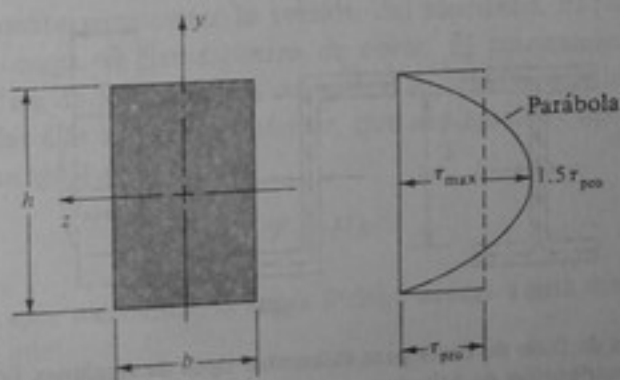


Figura 8-23 Distribución del esfuerzo cortante en una sección transversal rectangular.

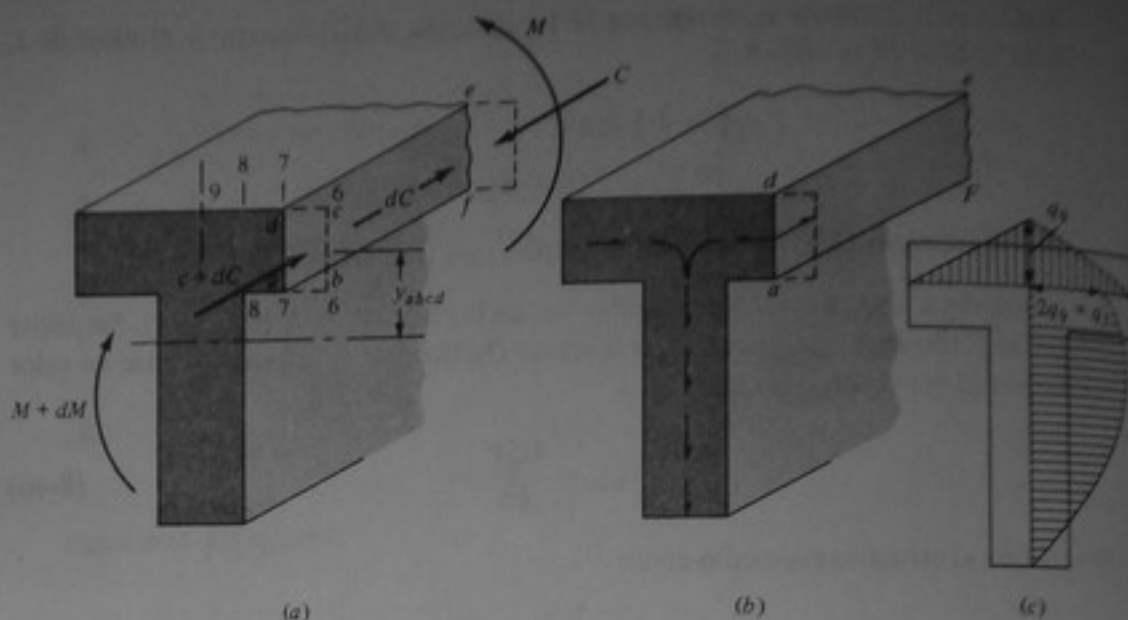


Figura 8-24 Flujo de corte en una sección T.

blecer, de modo semejante, patrones de flujo de corte para otros tipos de secciones transversales (fig. 8-25).

Los diagramas de esfuerzos cortantes verticales para canales y secciones *T*, *I* y *Z* son de la forma general que se muestra en la fig. 8-25*d*. En esta figura resulta obvio que los esfuerzos cortantes verticales en las alas son considerablemente menores que en el alma. Para fines prácticos de diseño se acostumbra a aproximar el esfuerzo cortante máximo para estos tipos de secciones mediante

$$\tau = \frac{V}{A_w} \quad (8-48)$$

en donde A_w es el área del alma, que se toma a menudo igual a $d \times t_w$. Se obtiene una mayor aproximación utilizando la altura real del alma, d_w , en lugar de la altura total de la sección, d .

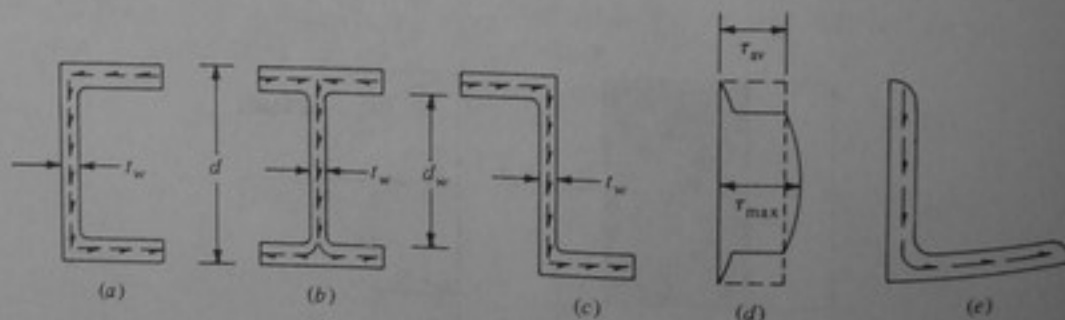


Figura 8-25 Patrones de flujo de corte para diferentes tipos de secciones. (a) Canal. (b) Sección *I*. (c) Sección *Z*. (d) Distribución de esfuerzos cortantes horizontales para (a), (b) y (c). (e) Angulo.

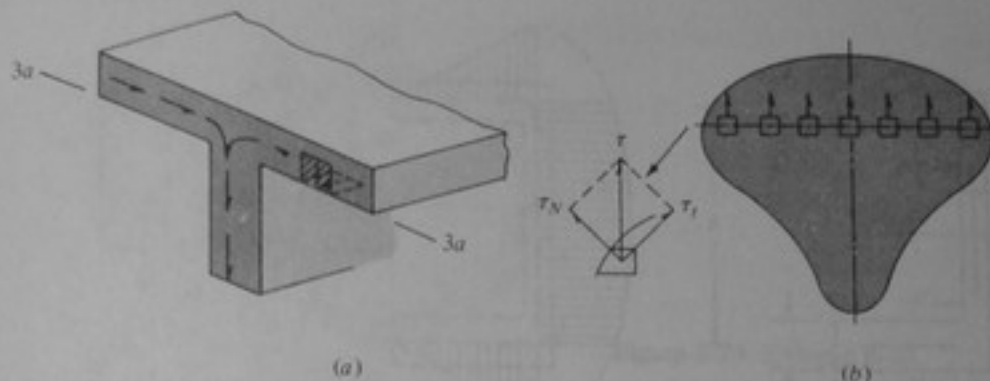


Figura 8-26 Esfuerzos cortantes cerca de los contornos.

El cálculo del esfuerzo cortante horizontal en un ala, demostrado en el ejemplo 8-9, se basa en la fórmula de flexión desarrollada en la sección 8-3. Sin embargo, la aplicación directa de la ecuación (8-45) conduce a inconsistencias en cuanto se refiere a los esfuerzos cortantes cerca de los contornos. Por ejemplo, considérense los esfuerzos cortantes horizontal y vertical en un bloque situado en la parte inferior del ala de una sección I o T, como se muestra en la fig. 8-26a. De acuerdo con la ecuación (8-45), el esfuerzo cortante vertical tiene un valor definido. Esto significa que también hay un esfuerzo cortante horizontal que actúa en la superficie inferior externa del ala. Obviamente esto es incorrecto, pues no hay fuerza diferencial dC que pueda actuar allí. En lugar de esto, el esfuerzo se transfiere de las puntas exteriores de las alas hacia el alma por los planos verticales, como se indica en el patrón de flujo de corte. De igual modo, para una superficie exterior inclinada, como la que se muestra en la fig. 8-26b, los esfuerzos cortantes a lo largo del contorno deben ser tangenciales al mismo, puesto que las componentes perpendiculares al contorno deben aparearse automáticamente con esfuerzos cortantes iguales que actúen en la superficie exterior, lo cual es incorrecto. Afortunadamente, estas inconsistencias no afectan los valores de los mayores esfuerzos cortantes en el alma. Estos últimos esfuerzos, calculados con las ecuaciones (8-45) u (8-46), son suficientemente exactos para fines prácticos de diseño.

8-9 CENTRO DE CORTE

Si se carga verticalmente una canal, como se indica en la fig. 8-27, la carga se debe aplicar excéntricamente para evitar la torsión del elemento. El punto S , a través del cual debe pasar la carga, se llama *centro de corte*. El razonamiento es el siguiente: si se hace una gráfica de los esfuerzos cortantes, se observa que las fuerzas cortantes resultantes, H , en las alas superior e inferior, que son iguales y opuestas, producen un momento de torsión igual a

$$T = Hh \quad (8-49)$$

Para contrarrestar este momento, la carga P debe actuar a una distancia e del centro del alma, de modo que

$$Pe = Hh \quad (8-50)$$

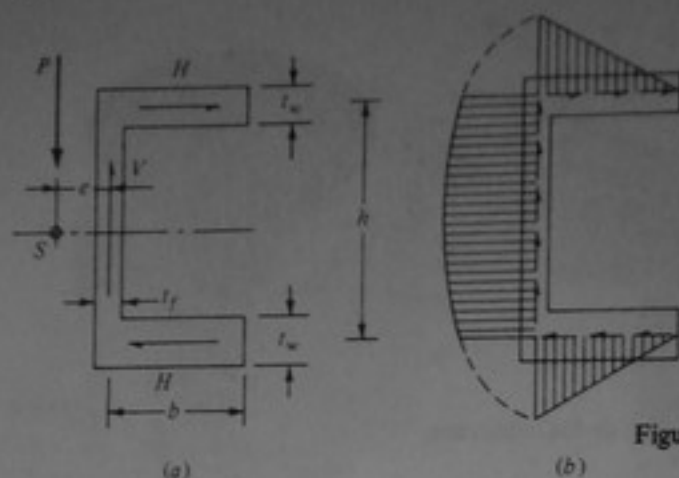


Figura 8-27 Canal cargada excéntricamente.

Las fuerzas resultantes H son iguales al esfuerzo cortante promedio en el ala multiplicado por el área del ala. El esfuerzo cortante promedio es igual a la mitad del esfuerzo máximo τ_{\max} que actúa en el ala, el cual se puede calcular a partir de la ecuación (8-45). Así,

$$Pe = \frac{1}{2} \tau_{\max} b t_f h = \frac{1}{2} \frac{V b t_f h / 2}{I t_f} b t_f h = \frac{V b^2 h^2 t_f}{4I}$$

Como P es igual a V , se obtiene

$$e = \frac{b^2 h^2 t_f}{4I} \quad (8-51)$$

La carga en la dirección z debería tener lugar en el plano horizontal de simetría que pasa por el eje z . La intersección entre este plano y el plano paralelo al eje y a una distancia e de la línea media del alma es el eje longitudinal por el cual debe pasar la carga cortante de la viga para no producir torsión. Los centros de corte de las secciones siempre están localizados sobre ejes de simetría. En la fig. 8-28 se indica la localización de los centros de corte de algunas secciones.

Se puede demostrar que si se tuerce un elemento, entonces el eje longitudinal que pasa por el centro de corte es el eje respecto al cual tiene lugar la torsión. Por esta razón, a veces se llama *eje de torsión*.

Ejemplo 8-10 Determinar el centro de corte de un tubo delgado y abierto de radio r (fig. 8-29).

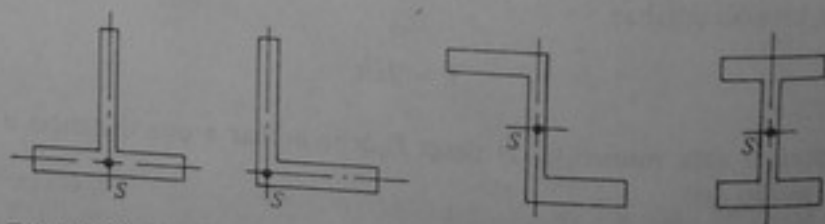


Figura 8-28 Localización de los centros de corte.

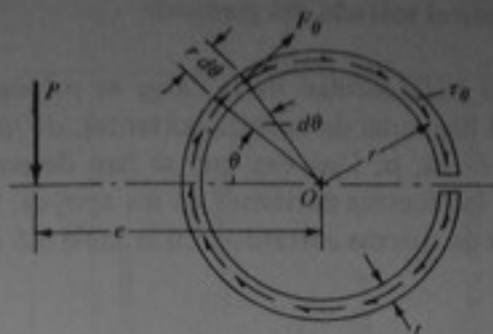


Figura 8-29 Ejemplo 8-10.

SOLUCION Se puede determinar que el esfuerzo cortante en cualquier porción θ es

$$\tau_{\theta} = \frac{PQ_{\theta}}{It}$$

$$Q_{\theta} = t \int_{\theta}^{\pi} r \, d\theta \, r \, \sin \theta = r^2 t \int_{\theta}^{\pi} \sin \theta \, d\theta = r^2 (\cos \theta + 1) t$$

$$I = 2t \int_0^{\pi} r \, d\theta \, r^2 \, \sin^2 \theta = 2r^3 t \int_0^{\pi} \sin^2 \theta \, d\theta = r^3 \pi t$$

$$\tau_{\theta} = \frac{Pr^2 (\cos \theta + 1) t}{r^3 \pi t^2} = \frac{P (\cos \theta + 1)}{rt \pi}$$

$$F_{\theta} = \tau_{\theta} t r \, d\theta$$

El momento de torsión respecto a O es igual a

$$T = r F_{\theta} = tr^2 \int_{-\pi}^{\pi} \tau_{\theta} \, d\theta = 2 \frac{Pr^2 t}{rt \pi} \int_0^{\pi} (\cos \theta + 1) \, d\theta = 2PR$$

La excentricidad necesaria para equilibrar este momento de torsión se determina haciendo

$$Pe = 2Pr$$

de donde

$$e = 2r$$

Resp.

8-10 DIAGRAMAS DE FUERZAS CORTANTES Y MOMENTOS PARA VIGAS

Con frecuencia se desea representar gráficamente la forma como los valores de la fuerza cortante y del momento varían a lo largo de la viga. Las curvas continuas de estas fuerzas internas se llaman *diagramas de fuerzas cortantes y de momentos*.

Diagramas de fuerzas cortantes utilizando el método del gradiente

De acuerdo con la ecuación (8-37), si la intensidad de la carga es p (positiva hacia arriba), el gradiente o la pendiente del diagrama de fuerzas cortantes, dV/dx , es igual al valor negativo de la intensidad de carga, p . Una vez que se han determinado las reacciones en los apoyos, se conocen las fuerzas cortantes en los apoyos. Utilizando este principio es fácil trazar el diagrama de fuerzas cortantes. En la tabla 8-5 se muestra un resumen de algunos casos generales.

Diagramas de momentos utilizando el método del gradiente

Con base en la ecuación (8-38) se puede observar que el gradiente o la pendiente del diagrama de momentos, dM/dx , es igual al valor negativo de la fuerza cortante. Es obvio que el momento alcanza un valor extremo para V igual a cero. Para apoyos externos simples (articulados o de rodillos), el momento es igual a cero. Lo mismo es cierto para las articulaciones internas. La fuerza cortante no cambia a través de una articulación interna y, por tanto, la pendiente del diagrama de momentos es continua, a menos que actúe una carga concentrada en la articulación. En la tabla 8-5 se muestra la configuración de los diagramas de momentos para diferentes tipos de carga.

Curvatura y deformación de una viga

Considérese un elemento de viga de longitud dx flexionado respecto a un eje principal z debido a la acción de un momento de flexión positivo, M , como se muestra en la fig. 8-30a. Si se designa el radio de curvatura AB mediante ρ y se traza la línea CD paralela a la línea AB , entonces, como ABC y CDE son triángulos semejantes,

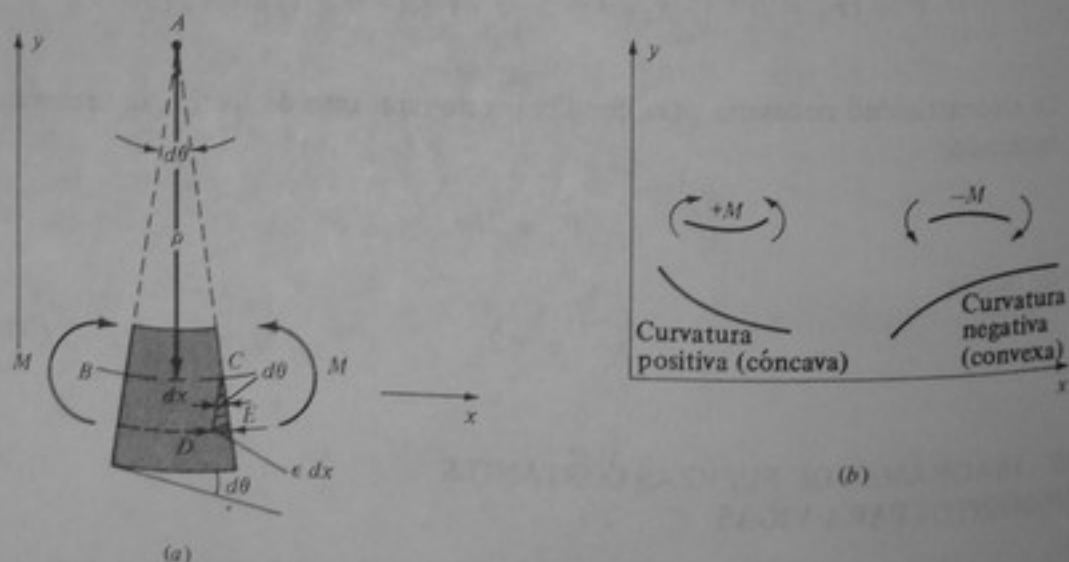




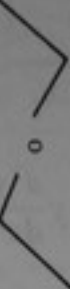
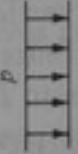
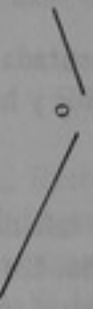
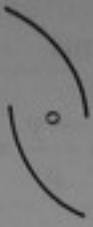

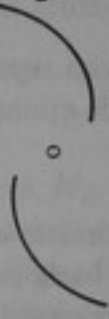






Figura 8-30 Relación entre curvatura y deformación unitaria para un elemento de viga sometido a flexión.

Tabla 8-5 Relaciones generales entre carga, fuerza cortante y momento.

Condición	Fuerza cortante	Momento
Carga cero		 Constante
Carga concentrada 	 Salto vertical	 Con doblez
Carga uniforme 	 Línea inclinada	 Parábola
Carga distribuida que varía linealmente 	 Curva de segundo grado	 Curva de tercer grado
Apoyo externo simple 		Cero
Articulación interna 	Generalmente diferente de cero	Cero y continuo

$$\frac{\epsilon_x dx}{dx} = \frac{-y}{\rho}$$

$$\epsilon_x = \frac{-y}{\rho} \quad (8-52)$$

Para pequeñas deflexiones,

$$\frac{1}{\rho} \approx \frac{d^2y}{dx^2}$$

y la ecuación (8-52) se puede escribir en la forma

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{-My}{EI} = \frac{-y}{\rho} = -y \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$\frac{M}{EI} = \frac{d^2y}{dx^2} \quad (8-53)$$

Esta ecuación es útil cuando se considera la deformación y la curvatura de una viga. Momentos positivos aplicados sobre la viga implican una curvatura positiva, es decir, una configuración *cóncava*, siempre que el sentido del eje y sea el indicado en la fig. 8-30b. De igual modo, una curvatura negativa implica momentos negativos y una configuración *convexa*.

Ejemplo 8-11 Considérese la viga representada en la fig. 8-31. Construir los diagramas de fuerzas cortantes y de momentos y hacer un esquema del estado flexionado.

SOLUCION El primer paso consiste en calcular las reacciones, $R_A = 50$ kN y $R_B = 70$ kN, ambas dirigidas hacia arriba. En seguida se puede construir el diagrama de fuerzas cortantes, empezando en A o en B , o desde ambos extremos a la vez. En A , la fuerza cortante es negativa e igual a -50 kN. Entre A y C la fuerza cortante permanece constante ($p = 0$ y, por consiguiente, $dV/dx = 0$). En C la carga concentrada produce un salto vertical, en el sentido positivo, de 40 kN y la fuerza cortante neta es de -10 kN. Entre C y D , nuevamente $dV/dx = 0$ y la fuerza cortante vale -10 kN hasta el punto D . Entre D y B , $p = -20$ kN/m, es decir, $dV/dx = +20$ kN (una pendiente positiva de 20:1), produciéndose una fuerza cortante positiva de $+70$ kN en B , lo cual está de acuerdo con la magnitud y el sentido de R_B . Los valores en el diagrama de fuerzas cortantes pueden verificarse en cualquier lugar a lo largo de la viga, utilizando el método de las secciones.

Ahora construyamos el diagrama de momentos. Se sabe que el momento es cero en A y en B (apoyos simples) y tiene un valor extremo en E , puesto que en este punto V es igual a cero, es decir que dM/dx es cero. En A el momento es cero y varía linealmente desde A hasta C con una pendiente positiva de 50:1, mientras que $V = -50$ kN. Análogamente, la pendiente entre C y D es 10:1. El valor del momento en C se puede determinar por el método de las secciones,

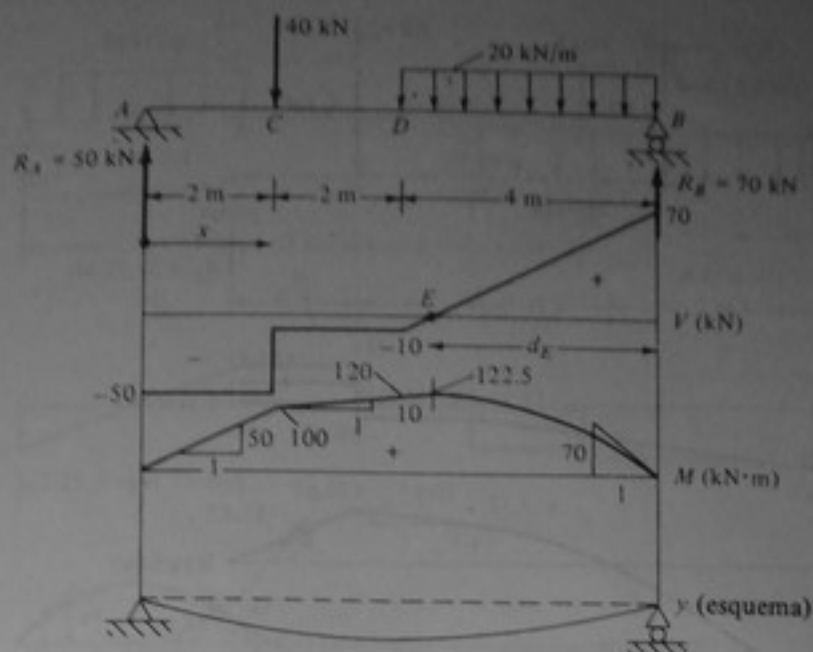


Figura 8-31 Ejemplo 8-11. Diagramas de fuerzas cortantes y de momentos y estado flexionado de la viga.

mediante el cual se obtiene $M_C = +100 \text{ kN} \cdot \text{m}$. De manera parecida se determina que en D el momento vale $+120 \text{ kN} \cdot \text{m}$. Entre D y B el diagrama de momentos varía parabólicamente con una pendiente que vale $+10:1$ en D , 0 en E y $-70:1$ en B . Para determinar el valor máximo de M en E primero hay que establecer la localización del punto E . Con base en la semejanza de triángulos se puede ver que

$$\frac{d_E}{70} = \frac{4 - d_E}{10}$$

de donde resulta $d_E = 3.5 \text{ m}$. Entonces, $M_E = 70(3.5) - \frac{1}{2}(20)(3.5)^2 = 122.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$. De nuevo, como en el diagrama de fuerzas cortantes, los valores reales del diagrama de momentos se determinan utilizando el método de las porciones. Como el momento es positivo en toda la longitud de la viga, la curvatura es positiva y la configuración es cóncava.

Ejemplo 8-12 Como un segundo ejemplo, considérese la viga de la fig. 8-32. Construir los diagramas de fuerzas cortantes y de momentos y hacer un esquema del estado flexionado.

SOLUCION En primer lugar se calculan las reacciones:

$$\sum F_y = 0 \quad (\text{positivo hacia arriba}):$$

$$R_A - 48 + R_B - 96 = 0 \quad (1)$$

$$\sum M_A = 0 \quad (\text{positivo en el sentido opuesto a las agujas del reloj})$$

$$M_A + 10R_B - 48(8) - 96(3) = 0 \quad (2)$$

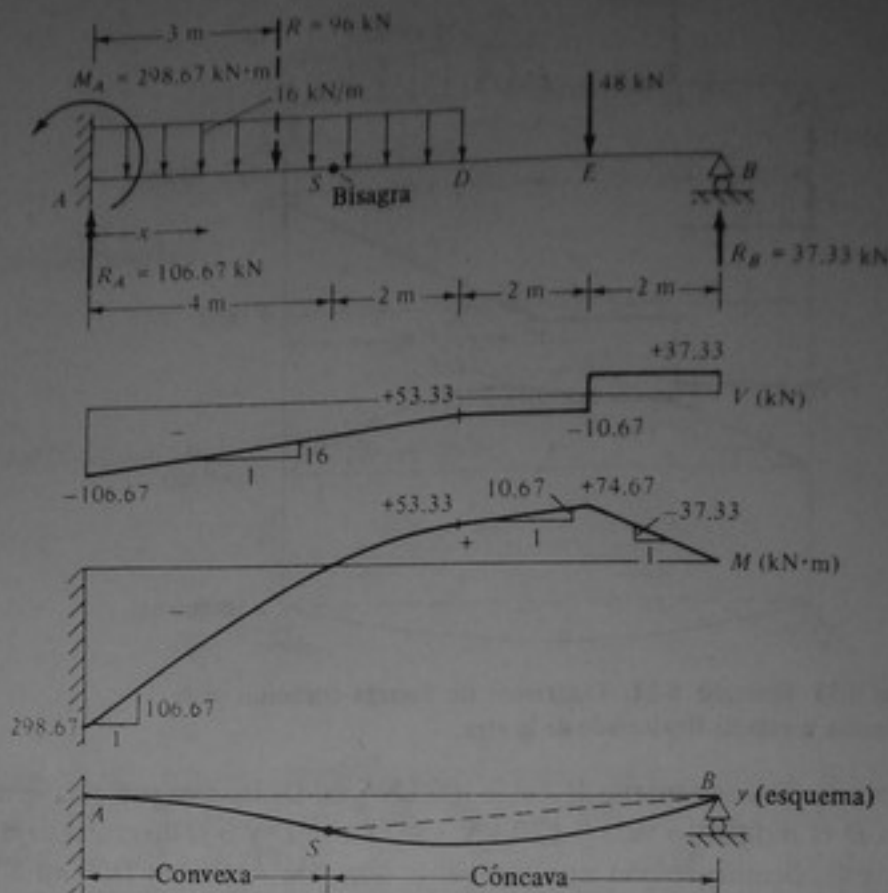


Figura 8-32 Ejemplo 8-12.

Fuera de estas ecuaciones se puede establecer una ecuación adicional con base en la condición de que el momento en la articulación interna S debe ser cero. Se puede considerar el momento de las fuerzas, bien sea a la derecha o a la izquierda de S . Así,

$$\sum M_{SR} = 0 \quad (\text{positivo en el sentido opuesto a las agujas del reloj})$$

$$6R_B - 48(4) - 2(16)(1) = 0 \quad (3)$$

$$R_B = 37.33 \text{ kN}$$

Sustituyendo este valor en las ecuaciones (1) y (2) se obtiene $R_A = 106.67 \text{ kN}$ y $M_A = 298.67 \text{ kN} \cdot \text{m}$.

Ahora se puede construir el diagrama de fuerzas cortantes, empezando con B . La fuerza cortante en B es igual a $+37.33 \text{ kN}$. Este valor permanece constante hasta E , en donde cambia a 10.67 kN y conserva este valor hasta D . Desde D hasta A la fuerza cortante cambia a razón de 16 kN/m , produciéndose en A una fuerza cortante de $-10.67 - 16(6) = -106.67 \text{ kN} \cdot \text{m}$.

Los momentos en B y en S son cero. Empezando desde cero en B , la pendiente del diagrama de momentos es $-37.33:1$ y $M_E = 37.33(2) = 74.67 \text{ kN} \cdot \text{m}$. La

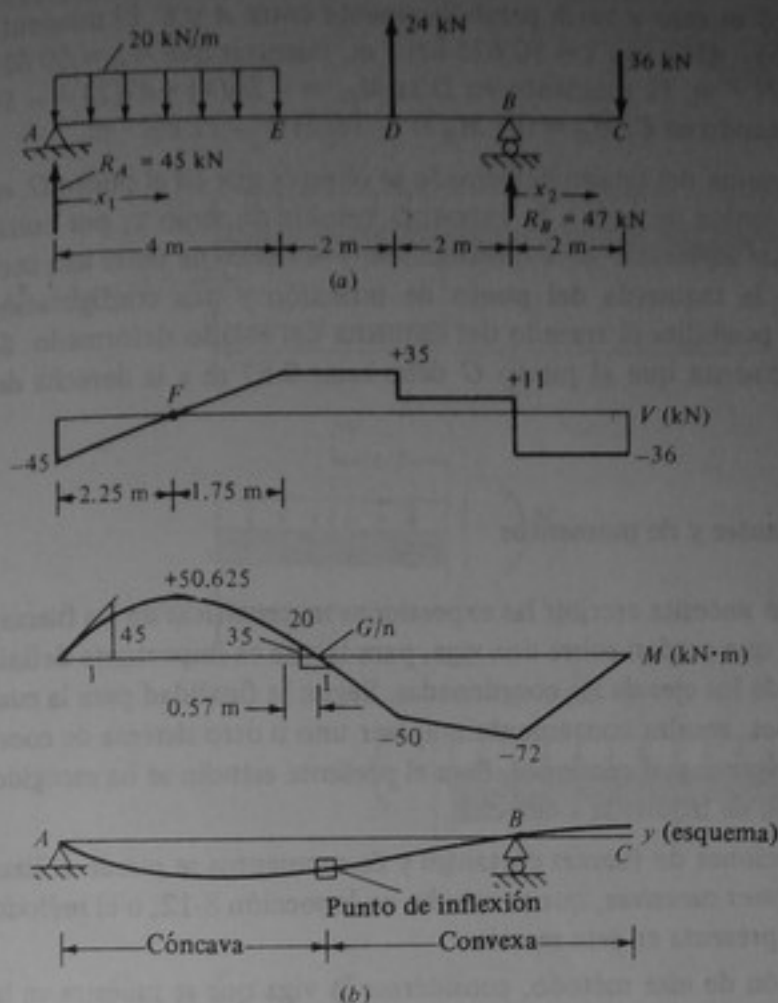


Figura 8-33 Ejemplo 8-13.

pendiente entre E y D es $10.67: 1$ y $M_D = 37.33(4) - 48(2) = 53.33 \text{ kN} \cdot \text{m}$. La pendiente varía desde $10.67: 1$ en D hasta $106.67: 1$ en A . El momento varía cuadráticamente y es igual a cero en S y a $-106.67 \text{ kN} \cdot \text{m}$ en A . La parábola es tangente en D al segmento de recta que une a D con E .

Para hacer el esquema del estado deformado se observa, con base en el diagrama de momentos, que entre A y S la forma es convexa con pendiente cero en A . Entre S y B la forma es cóncava y, en general, habrá una discontinuidad de la pendiente (doblez) en S .

Ejemplo 8-13 Como último ejemplo, considérese la viga en voladizo que se muestra en la fig. 8-33. Determinar los diagramas de fuerzas cortantes y de momentos, así como el estado flexionado de la viga.

SOLUCION Las reacciones son $R_A = 45 \text{ kN}$ hacia arriba y $R_B = 47 \text{ kN}$ hacia arriba. (El lector debería verificar estos valores). Con base en los valores de las reacciones se puede trazar fácilmente el diagrama de fuerzas cortantes. El punto F de fuerza cortante cero está localizado 2.25 m a la derecha del punto A (verifíquese esto, también).

El momento en A es cero y varía parabólicamente entre A y E . El momento en F es $M_F = 45(2.25) - 45(2.25)/2 = 50.625 \text{ kN} \cdot \text{m}$, mientras que $M_E = 50.625 - 35(1.75)/2 = 20 \text{ kN} \cdot \text{m}$. El momento en D es $M_D = -36(4) + 47(2) = -50 \text{ kN} \cdot \text{m}$. Ahora, empezando en C , $M_C = 0$ y $M_B = -36(2) = -72 \text{ kN} \cdot \text{m}$.

Para hacer el esquema del estado deformado se observa que en el punto G , en donde el momento cambia de signo, la curvatura cambia de signo y, por consiguiente, es un *punto de inflexión*. Esta información, y el hecho de tener una configuración cóncava a la izquierda del punto de inflexión y una configuración convexa a la derecha posibilita el trazado del esquema del estado deformado. Se puede demostrar fácilmente que el punto G debe estar 0.57 m a la derecha del punto E .

Ecuaciones de fuerzas cortantes y de momentos

Con frecuencia el ingeniero necesita escribir las expresiones matemáticas de las fuerzas cortantes y los momentos que actúan sobre una viga, para la que es importante definir el origen y las direcciones de los ejes de las coordenadas. Según la finalidad para la cual se establecen las expresiones, resulta conveniente emplear uno u otro sistema de coordenadas, con diferentes orígenes y direcciones. Para el presente estudio se ha escogido el eje x horizontal y dirigido de izquierda a derecha.

Para expresar las ecuaciones de fuerzas cortantes y de momentos se puede utilizar el *método de las integraciones sucesivas*, que se estudia en la sección 8-12, o el *método de las porciones*, el cual se presenta en esta sección.

Como una demostración de este método, considérese la viga que se muestra en la fig. 8-34a. Primero se calcula cada una de las reacciones, que vale $pL/2$ y actúa hacia arriba. Para hallar la fuerza cortante en una sección x se dibuja el diagrama de cuerpo libre de la porción izquierda o derecha de la viga (figs. 8-34b y c) y se determina $V_x = -p(L/2 - x)$ considerando el equilibrio de fuerzas verticales. De forma análoga, se puede calcular $M_x = p(Lx/2) = p(x^2/2)$, estableciendo una ecuación de equilibrio de momentos. A menudo se puede usar una variante más conveniente del método de las porciones teniendo en cuenta que *las fuerzas internas necesarias para mantener una porción de una viga en equilibrio son iguales a las fuerzas ejercidas por la porción adyacente de la viga sobre la primera porción*. Por ejemplo, para hallar la fuerza cortante y el momento necesarios para mantener la porción derecha de la viga en equilibrio, se observa, con base en la fig. 8-34d, que la porción izquierda ejerce sobre la derecha una fuerza hacia arriba igual a $p(L/2 - x)$. Igualmente, el momento en x es $M_x = (pL/2)x - px^2/2$. Este momento actúa en el sentido de las agujas del reloj sobre una *cara negativa* y, por consiguiente, es positivo. De una manera parecida se pueden determinar los valores de V_x y M_x , considerando las fuerzas ejercidas por la porción derecha de la viga sobre la izquierda, como se indica en la fig. 8-34e. Para determinar el signo hay que observar que la fuerza cortante y el momento actúan sobre una *cara positiva*. Es obvio que los valores son idénticos cuando se consideran las fuerzas ejercidas sobre la porción izquierda.

Para ilustrar con ejemplos adicionales la forma de expresar las ecuaciones de las fuerzas cortantes y los momentos, considérese nuevamente la viga de la fig. 8-31.

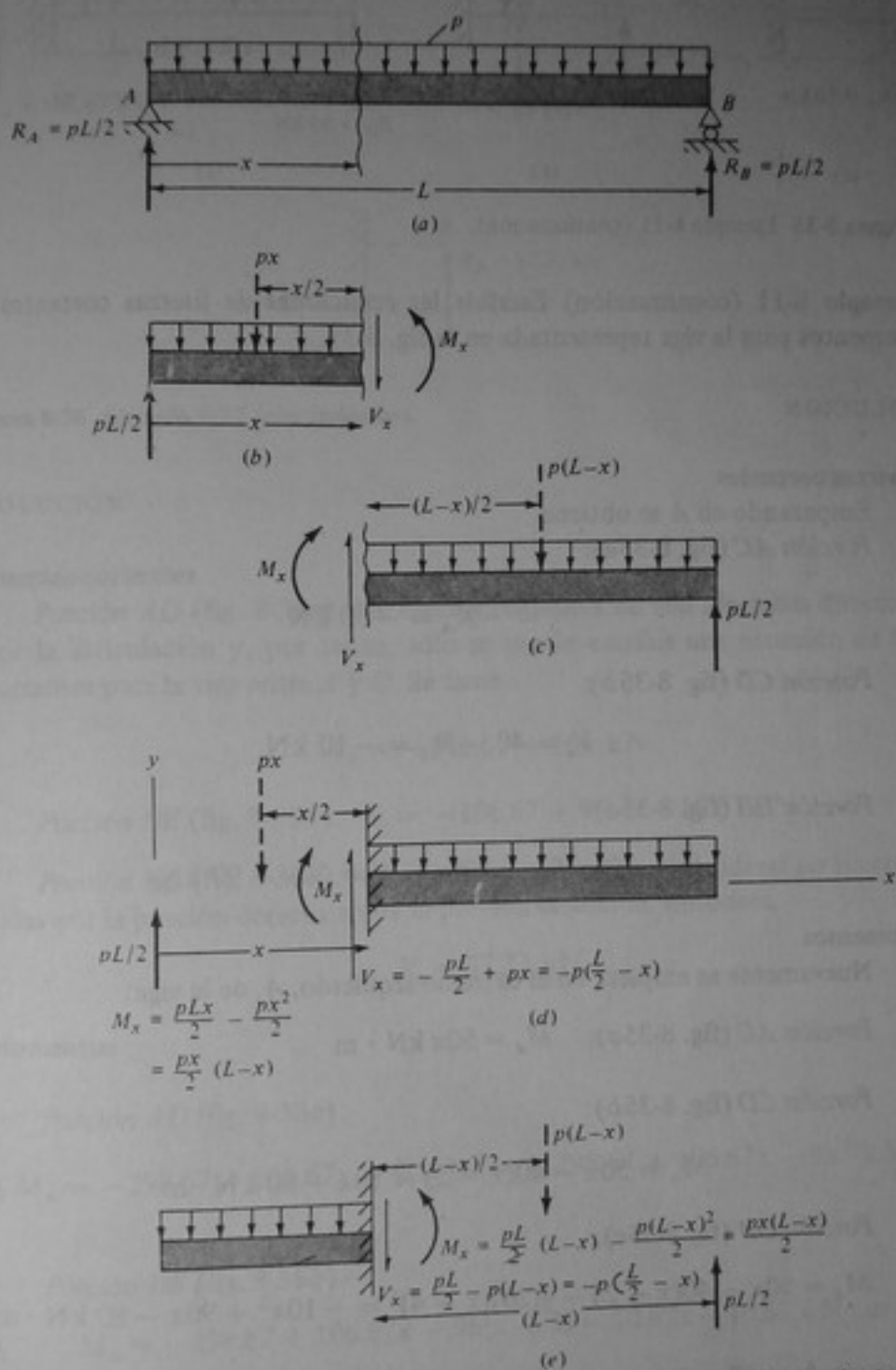


Figura 8-34 Determinación de fuerzas cortantes y momentos, utilizando el método de las porciones.

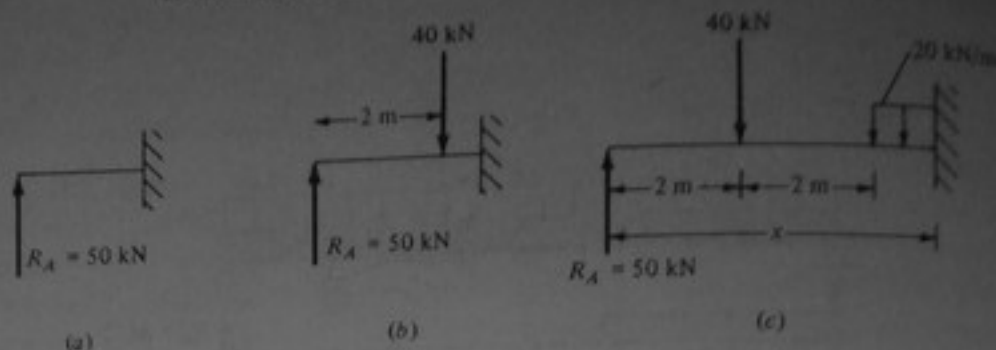


Figura 8-35 Ejemplo 8-11 (continuación).

Ejemplo 8-11 (continuación) Escribir las ecuaciones de fuerzas cortantes y de momentos para la viga representada en la fig. 8-31.

SOLUCION

Fuerzas cortantes

Empezando en A se obtiene

Porción AC (fig. 8-35a):

$$V_x = -R_A = -50 \text{ kN} \quad \text{Resp.}$$

Porción CD (fig. 8-35b):

$$V_x = 40 - R_A = -10 \text{ kN} \quad \text{Resp.}$$

Porción DB (fig. 8-35c):

$$V_x = 40 - R_A + 20(x - 4) = 20x - 90 \text{ kN} \quad \text{Resp.}$$

Momentos

Nuevamente se empieza en el extremo izquierdo, A , de la viga:

Porción AC (fig. 8-35a): $M_x = 50x \text{ kN} \cdot \text{m}$

Porción CD (fig. 8-35b):

$$M_x = 50x - 40(x - 2) = 10x + 80 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{Resp.}$$

Porción DB (fig. 8-35c):

$$M_x = 50x - 40(x - 2) - \frac{1}{2}(20)(x - 4)^2 = -10x^2 + 90x - 80 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{Resp.}$$

A modo de verificación, se hace $x = 8 \text{ m}$ para el apoyo B y se obtiene

$$M_B = -10(64) + 90(8) - 80 = 0 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{Resp.}$$

Ejemplo 8-12 (continuación) Escribir las ecuaciones de fuerzas cortantes y de momentos para la viga que se muestra en la fig. 8-32.

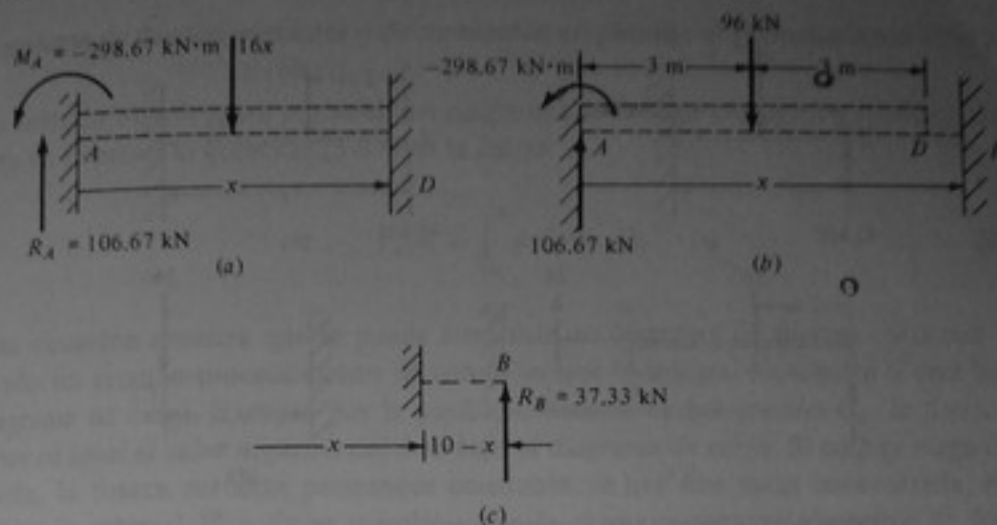


Figura 8-36 Ejemplo 8-12 (continuación).

SOLUCION

Fuerzas cortantes

Porción AD (fig. 8-36a): las fuerzas cortantes no son afectadas directamente por la articulación y, por tanto, sólo se puede escribir una ecuación de fuerzas cortantes para la viga entre A y D. Se tiene

$$V_x = -106.67 + 16x \text{ kN} \quad \text{Resp.}$$

Porción DE (fig. 8-36b): $V_x = -106.67 + 96 = -10.67 \text{ kN}$ Resp.

Porción EB (fig. 8-36c): Ahora es más conveniente considerar las fuerzas ejercidas por la porción derecha sobre la porción izquierda. Entonces,

$$V_x = 37.33 \text{ kN} \quad \text{Resp.}$$

Momentos

Porción AD (fig. 8-36a):

$$M_x = -298.67 + 106.67x - \frac{1}{2}(16)x^2 = -298.67 + 106.67x - 8x^2 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{Resp.}$$

Porción DE (fig. 8-36b):

$$M_x = -298.67 + 106.67x - 96(x - 3) = 10.67x - 10.67 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{Resp.}$$

Porción EB (fig. 8-36c):

$$M_x = 37.33(10 - x) = 373.3 - 37.33x \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{Resp.}$$

Ejemplo 8-13 (continuación) Escribir las ecuaciones de fuerzas cortantes y de momentos para la viga que se muestra en la fig. 8-33.

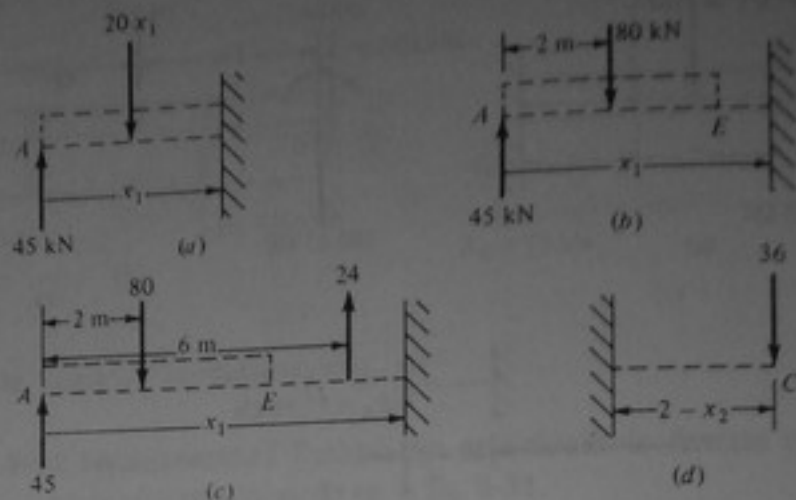


Figura 8-37 Ejemplo 8-13 (continuación).

SOLUCION En este caso se utilizan dos orígenes diferentes, A y B , como se ve en la fig. 8-33a.

Fuerzas cortantes

Porción AE : $V_x = -45 + 20x_1$ kN Resp.

Porción ED : $V_x = -45 + 20(4) = +35$ kN Resp.

Porción DB : $V_x = 35 - 24 = +11$ kN Resp.

Porción BC : $V_x = -36$ kN Resp.

Momentos

Porción AE (fig. 8-37a):

$$M_x = 45x_1 - \frac{1}{2}(20)x_1^2 = 45x_1 - 10x_1^2 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{Resp.}$$

Porción ED (fig. 8-37b):

$$M_x = 45x_1 - 80(x_1 - 2) = 160 - 35x_1 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{Resp.}$$

Porción DB (fig. 8-37c):

$$M_x = 45x_1 - 80(x_1 - 2) + 24(x_1 - 6) = 16 - 11x_1 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{Resp.}$$

Porción BC (fig. 8-37d):

$$M_x = -36(2 - x_2) = 36x_2 - 72 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{Resp.}$$

Diagramas de fuerzas cortantes y de momentos empleando el procedimiento de la suma

Un método alternativo para construir los diagramas de fuerzas cortantes y momentos consiste en expresar la ecuación (8-37) en la forma

$$V_x = - \int_0^x p \, dx + C_1 \quad (8-54)$$

Esta ecuación muestra que se puede construir un diagrama de fuerzas cortantes utilizando un sencillo procedimiento de suma, ya que la integral representa el área bajo el diagrama de carga. Excepto por la posible constante de integración C_1 , la fuerza cortante es igual al valor negativo del área bajo el diagrama de carga. Si no hay carga distribuida, la fuerza cortante permanece constante. Si hay una carga concentrada, obviamente la integral $\int_0^x p \, dx$ se reemplaza por la carga misma y el diagrama de fuerzas cortantes exhibe un "salto" vertical.

De modo análogo, la ecuación (8-38) se puede escribir en la forma

$$M_x = - \int_0^x V_x \, dx + C_2 \quad (8-55)$$

que permite la construcción del diagrama de momentos directamente a partir del diagrama de fuerzas cortantes, utilizando la suma. Excepto por la constante de integración C_2 , el momento es igual al valor negativo del área bajo el diagrama de fuerzas cortantes. Para demostrar la técnica de la suma se vuelven a resolver los ejemplos 8-11 y 8-13.

Ejemplo 8-11 (continuación) Véase la fig. 8-31. Construir los diagramas de fuerzas cortantes y de momentos utilizando el procedimiento de la suma.

SOLUCION

Fuerzas cortantes

Suponiendo que las reacciones ya han sido calculadas, se parte de A con una fuerza cortante negativa de -50 kN. Entre A y C , $p = 0$ y, en consecuencia, la fuerza cortante permanece constante. Después del punto C , la carga hacia abajo de 40 kN representa un salto vertical positivo (hacia arriba), de modo que la fuerza cortante cambia de -50 kN a -10 kN. Del punto D hacia E ,

$$V_x = - \int_0^x -20 \, dx + C_1$$

en donde x es la distancia horizontal desde D y $C = -10$; por consiguiente,

$$V_x = 20x - 10$$

Resp.

de donde resulta que en A , $V_A = 80 - 10 = 70$ kN, lo cual está de acuerdo con el valor de R_A .

Momentos

Empezando en A se halla que $M_x = 0$ y C_2 en la ecuación (8-55) es cero. Entre A y C se tiene

$$M_x = -\int_0^x -50 dx + 0 = 50x \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{Resp.}$$

de donde resulta un valor de $100 \text{ kN} \cdot \text{m}$ en el punto C . En lugar de integrar, simplemente se puede tomar el valor negativo del área bajo el diagrama de fuerzas cortantes, entre A y C , esto es, $(-50)(2) = 100 \text{ kN} \cdot \text{m}$.

Entre C y D se tiene

$$M_x = -\int_2^x -10 dx + 100 = 10x + 80 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{Resp.}$$

La diferencia de momentos entre C y D es nuevamente el valor negativo del área bajo el diagrama de fuerzas cortantes entre estos puntos, es decir, $-(-10) \times (2) = 20 \text{ kN} \cdot \text{m}$ y $M_D = M_C + 20 = 120 \text{ kN} \cdot \text{m}$.

Entre D y B la ecuación de momentos se convierte en

$$M_x = -\int_0^4 (-10 + 20x) dx + 120 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{Resp.}$$

en donde x se mide desde D . De aquí resulta

$$M_B = 40 - 20 \frac{4^2}{2} + 120 = 0 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{Resp.}$$

De manera alterna, el valor negativo del área bajo el diagrama de fuerzas cortantes entre D y B es igual a

$$-(-10 \times 0.25 + 70 \times 1.75) = -120$$

$$y \quad M_A = M_D - 120 = 120 - 120 = 0 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{Resp.}$$

En seguida se demuestra la técnica de la suma, resolviendo nuevamente el ejemplo 8-13.

Ejemplo 8-13 (continuación) Véase la fig. 8-33. Construir los diagramas de fuerzas cortantes y momentos utilizando el procedimiento de la suma.

SOLUCION Suponiendo de nuevo que las reacciones han sido determinadas, se puede proceder a construir los diagramas de fuerzas cortantes y momentos, de la siguiente manera:

Fuerzas cortantes

Empezando en A con una fuerza cortante negativa de -45 kN , se puede calcular la fuerza cortante en E mediante

$$V_E = -\int_0^4 -20 dx - 45 = 35 \text{ kN} \quad \text{Resp.}$$

Entre E y D la fuerza cortante permanece constante debido a que p es cero. En D la fuerza cortante cambia 24 kN en forma negativa hasta

$$35 - 24 = 11 \text{ kN}$$

Resp.

Nuevamente, la fuerza cortante permanece constante en 11 kN entre D y B . En B se agrega una fuerza cortante negativa de 47 kN, produciéndose a la derecha de B una fuerza cortante de $11 - 47 = -36$ kN. Finalmente, debido a una carga hacia abajo de 36 kN, en C la fuerza cortante cambia 36 kN y se hace cero:

$$36 - 36 = 0 \text{ kN}$$

*Resp.***Momentos**

El momento en A es igual a cero y se puede expresar como

$$M_x = - \int_0^x (20x - 45) dx = 45x - 10x^2$$

El momento alcanza un valor máximo en el punto F , el cual se halla localizado 2.25 m a la derecha del apoyo A , según se había determinado anteriormente. El momento en F es

$$M_x = 45(2.25) - 10(2.25)^2 = 50.625 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{Resp.}$$

o simplemente el valor negativo del área bajo la línea de fuerzas cortantes, que es

$$\frac{1}{2}(45)(2.25) = 50.625 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{Resp.}$$

De manera semejante, la fuerza cortante en E es

$$50.625 - \frac{1}{2}(35)(1.75) = 20 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{Resp.}$$

El momento en D se puede escribir

$$M_D = M_E - \int_0^2 V_x dx = 20 - (35x)_0^2 = -50 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{Resp.}$$

Análogamente,

$$M_B = M_D - \int_0^2 V_x dx = -50 - (11x)_0^2 = -72 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{Resp.}$$

De B a C ,

$$M_C = M_B - \int_0^2 -36 dx = -72 + 72 = 0 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{Resp.}$$

8-11 ENERGÍA DE DEFORMACION EN VIGAS

Como se estableció en el capítulo 5, la expresión general para la energía de deformación interna es

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma \epsilon dV \quad (8-56)$$

Para deformación por flexión se puede escribir

$$U = \frac{1}{2} \int_V \frac{\sigma^2}{E} dV = \frac{1}{2} \int_x \int_A \frac{M^2 y^2}{EI^2} dA dx$$

Como $I = \int_A y^2 dA$, se obtiene

$$U = \int_x \frac{M^2 dx}{2EI} \quad (8-57)$$

Para una viga de longitud L , la ecuación (8-57) se convierte en

$$U = \int_0^L \frac{M^2 dx}{2EI} \quad (8-58)$$

8-12 DEFORMACIONES DE VIGAS

Integraciones sucesivas

Para determinar con mayor exactitud las deflexiones de una viga se puede expresar la ecuación (8-37) en la forma

$$p = \frac{-dV}{dx} = + \frac{d}{dx} \left(\frac{dM}{dx} \right) = \frac{d^2 M}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 y}{dx^2} \right) = EI \frac{d^4 y}{dx^4}$$

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = p \quad (8-59)$$

De manera semejante,

$$EI \frac{d^3 y}{dx^3} = -V \quad (8-60)$$

Anteriormente se determinó que

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = M \quad (8-61)$$

La ecuación (8-59) o la ecuación (8-61) se pueden utilizar para determinar la deflexión vertical, y , y la pendiente, dy/dx , por integraciones sucesivas. Para cargas distribuidas continuas, probablemente sea más fácil empezar con la ecuación (8-59). Al integrar cuatro veces se produce un número igual de constantes de integración, las cuales se pueden determinar aplicando las llamadas *condiciones de contorno y de apoyo*, que en el caso de la ecuación diferencial de cuarto orden deben incluir *todos* los tipos de condiciones de contorno. Se puede distinguir entre condiciones de contorno *geométricas*, las cuales relacionan la deflexión y con la pendiente dy/dx y condiciones de contorno *de fuerza*, las cuales relacionan los momentos $EI d^2 y/dx^2$ con las fuerzas cortantes $-EI d^3 y/dx^3$. En muchos casos hay una carga concentrada o la carga distribuida es discontinua; entonces, es más conveniente empezar con la ecuación (8-61) y utilizar las

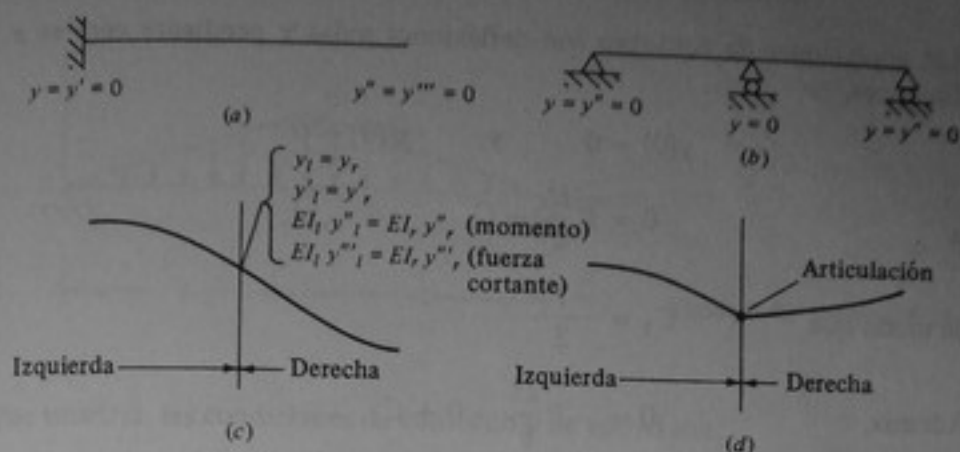


Figura 8-38 Condiciones de apoyo, de contorno y de continuidad de una viga.

condiciones de contorno geométricas *únicamente* para determinar las dos constantes de integración.

Si hay porciones con diferentes expresiones algebraicas para el momento, se debe escribir una ecuación diferencial separada para cada porción. Las porciones adyacentes se aparean utilizando las llamadas *condiciones de continuidad*, que consisten en hacer iguales las deflexiones y las pendientes de las porciones en la junta común (véase la fig. 8-38c).

Ejemplo 8-14 Para la viga que se muestra en la fig. 8-39, determinar la deflexión y la pendiente (rotación) en B .

SOLUCION Es muy importante establecer claramente los ejes de las coordenadas y su origen. En este caso se empieza con la ecuación (8-61) y

$$M = -P(L - x) = EI \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$EI \frac{dy}{dx} = -P \int_0^L (L - x) dx = +P \frac{(L - x)^2}{2} + C_1 \quad (1)$$

Integrando una vez más, se obtiene

$$EIy = -P \frac{(L - x)^3}{6} + C_1 x + C_2 \quad (2)$$

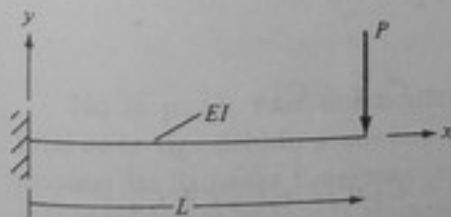


Figura 8-39 Ejemplo 8-14.

Las condiciones de contorno son deflexiones nulas y pendiente cero en $x = 0$. Entonces,

$$y(0) = 0 \quad \text{y} \quad y'(0) = 0$$

o

$$0 = P \frac{L^2}{2} + C_1$$

de modo que

$$C_1 = -\frac{PL^2}{2}$$

Además,

$$0 = -P \frac{L^3}{6} - 0 + C_2$$

de modo que

$$C_2 = \frac{PL^3}{6}$$

$$Ely = -\frac{P(L-x)^3}{6} - \frac{PL^2}{2}x + \frac{PL^3}{6}$$

y

$$EI \frac{dy}{dx} = P \frac{(L-x)^2}{2} - \frac{PL^2}{2}$$

En B , $x = L$; así que

$$y_B = \frac{1}{EI} \left(-\frac{PL^3}{2} + \frac{PL^3}{6} \right) = \frac{-PL^3}{3EI} \quad \text{hacia abajo} \quad \text{Resp.}$$

Asimismo, la pendiente en B es

$$EI \frac{dy_B}{dx} = 0 - \frac{PL^2}{2} \quad \text{o} \quad y'_B = \frac{-PL^2}{2EI} \quad \text{en el sentido de las agujas del reloj} \quad \text{Resp.}$$

Ejemplo 8-15 Para la viga representada en la fig. 8-40, calcular la rotación (pendiente) en A , la deflexión en el punto medio del tramo, y el momento en B .

SOLUCION Se empieza con la ecuación (8-59) para la viga AB . Así,

$$EIy^{iv} = -\frac{w_0 x}{L}$$

$$EIy''' = -\frac{w_0 x^2}{2L} + C_1$$

$$EIy'' = -\frac{w_0 x^3}{6L} + C_1 x + C_2$$

$$EIy' = -\frac{w_0 x^4}{24L} + C_1 x^2/2 + C_2 x + C_3$$

$$EIy = -\frac{w_0 x^5}{120L} + C_1 x^3/6 + C_2 x^2/2 + C_3 x + C_4$$

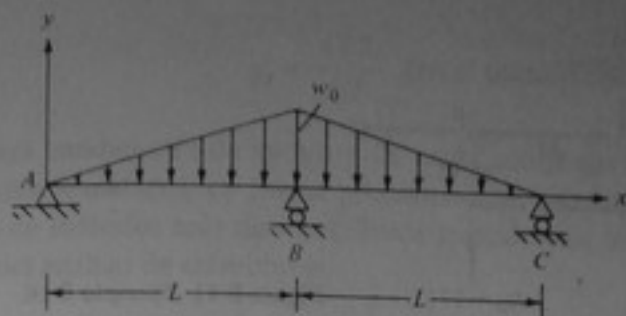


Figura 8-40 Ejemplo 8-15.

Por simetría, las condiciones de contorno y de apoyo son:

$$y(0) = 0 \quad y(L) = 0 \quad y'(L) = 0 \quad y''(0) = 0$$

Remplazando con base en estas condiciones se obtiene

$$EIy''(0) = 0 = C_2 \quad \text{o} \quad C_2 = 0$$

$$EIy(0) = 0 = C_4 \quad \text{o} \quad C_4 = 0$$

$$EIy'(L) = 0 = -\frac{w_0 L^3}{24} + \frac{C_1 L^2}{2} + C_3$$

$$EIy(L) = 0 = -\frac{w_0 L^4}{120} + \frac{C_1 L^3}{6} + C_3 L$$

De las últimas dos ecuaciones,

$$C_1 = \frac{w_0 L}{10} \quad \text{y} \quad C_3 = -\frac{w_0 L^3}{120}$$

Además,
$$y = \frac{1}{EI} \left(-\frac{w_0 x^5}{120L} + \frac{w_0 Lx^3}{60} - \frac{w_0 L^3 x}{120} \right)$$

$$y' = \frac{1}{EI} \left(-\frac{w_0 x^4}{24L} + \frac{w_0 Lx^2}{20} - \frac{w_0 L^3}{120} \right)$$

De este modo,
$$y\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{w_0 L^4}{1920} + \frac{w_0 L^4}{480} - \frac{w_0 L^4}{240} \right) = \frac{-wL^4}{384EI} \quad \text{hacia abajo} \quad \text{Resp.}$$

Asimismo,
$$y'(0) = \frac{-w_0 L^3}{120EI} \quad \text{en el sentido de las agujas del reloj} \quad \text{Resp.}$$

El momento en B es

$$M_B = EIy''(L) = -\frac{w_0 L^2}{6} + \frac{w_0 L^2}{10} = -\frac{w_0 L^2}{15} \quad \text{Resp.}$$

No se puede usar una ecuación diferencial de cuarto grado para la longitud total de la viga debido a que hay una carga concentrada (reacción) en B. Se pueden emplear las llamadas funciones de singularidad pero, en general, para este caso es más conveniente utilizar la ecuación diferencial de segundo orden (8-61).

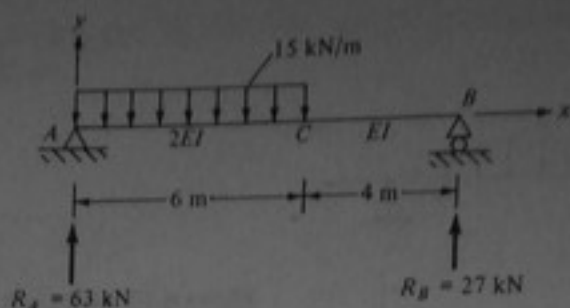


Figura 8-41 Ejemplo 8-16.

Ejemplo 8-16 Calcular la deflexión y la rotación en el punto C de la viga que se muestra en la fig. 8-41.

SOLUCION Comenzando con la ecuación (8-59), se pueden escribir las siguientes ecuaciones para las dos porciones de la viga:

$$\begin{aligned} \text{Porción AC:} \quad 2EIy'' &= 63x - 7.5x^2 \\ 2EIy' &= \frac{63x^2}{2} - \frac{7.5x^3}{3} + C_1 \\ 2EIy &= \frac{63x^3}{6} - \frac{7.5x^4}{12} + C_1x + C_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Porción CB:} \quad EI\bar{y}'' &= 27(10 - x) = 270 - 27x \\ EI\bar{y}' &= 270x - \frac{27x^2}{2} + \bar{C}_1 \\ EI\bar{y} &= \frac{270x^2}{2} - \frac{27x^3}{6} + \bar{C}_1x + \bar{C}_2 \end{aligned}$$

Las condiciones de contorno son

$$y(0) = \bar{y}(10) = 0$$

y las condiciones de continuidad son:

$$y(6) = \bar{y}(6)$$

$$y'(6) = \bar{y}'(6)$$

Sustituyendo estas condiciones se obtiene

$$C_1 = 587.7 \quad C_2 = 0 \quad \bar{C}_1 = -1086.3 \quad \bar{C}_2 = 1863$$

$$\text{Entonces, } EI\bar{y}(6) = 270(18) - 27(36) - 1086.3(6) + 1863$$

$$\text{o} \quad y_c = -\frac{766.8}{EI} \quad \text{hacia abajo}$$

Resp

$$\text{Asimismo, } EIy'(6) = 270(6) - 27(18) - 1086.3 = 47.7$$

$$o \quad y'_c = \frac{47.7}{EI} \quad (\text{en el sentido opuesto a las agujas del reloj}) \text{ Resp.}$$

Para condiciones de apoyo y de carga complejas y para otros tipos de estructuras que estén sometidos, en forma predominante, a deformación por flexión, es preferible el uso de métodos más directos. Estos métodos no se tratan en este texto, pues hacen parte del análisis de estructuras.

Método de la energía

Hay otro método para determinar la deformación de vigas que hace uso del segundo teorema de Castigliano, el cual fue estudiado detalladamente en el capítulo 5, y que establece que

$$\frac{\partial U}{\partial P_k} = \Delta_k \quad (8-62)$$

en donde Δ_k es el desplazamiento asociado en P_k o

$$\frac{\partial U}{\partial M_k} = \Phi_k \quad (8-63)$$

en donde Φ_k es la rotación asociada con M_k . El procedimiento consiste en escribir la expresión para la energía de deformación de la viga en función de una fuerza P_k o un momento M_k para determinar la correspondiente deflexión Δ_k o rotación Φ_k . Si no hay carga ni momento en un punto donde se requiere el desplazamiento o la rotación, se introduce una carga o momento *ficticios*; después se toma la derivada con respecto a la carga o al momento y su valor se hace igual a cero.

Utilizando la ecuación (8-58) junto con las ecuaciones (8-62) y (8-63) se obtiene

$$\Delta_k = \int_0^L \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P_k} dx \quad (8-64)$$

$$\Phi_k = \int_0^L \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial M_k} dx \quad (8-65)$$

A continuación se resuelven de nuevo algunos de los ejemplos anteriores con el fin de demostrar este uso del segundo teorema de Castigliano.

Ejemplo 8-17 Repetir el ejemplo (8-14) utilizando el segundo teorema de Castigliano (véase la fig. 8-39).

SOLUCION Como se dedujo anteriormente, la ecuación para el momento es

$$M = -P(L - x)$$

y a partir de la ecuación (8-63) se obtiene

$$\begin{aligned}
 y_B = \Delta_k &= \int_0^L \frac{-P(L-x)[- (L-x)]}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_0^L P(L-x)^2 dx \\
 &= \frac{-1}{EI} \int_0^L P(L-x)^2 d(L-x) = \frac{-P(L-x)^3}{3EI} \Big|_0^L \\
 &= \frac{+PL^3}{3EI} \quad \text{en el sentido de } P, \text{ es decir, hacia abajo} \quad \text{Resp.}
 \end{aligned}$$

Para determinar la rotación en el punto B se aplica un momento ficticio en el sentido de las agujas del reloj, M_k , con lo cual se obtiene la siguiente expresión para M :

$$M = -P(L-x) + M_k$$

$\partial M / \partial M_k = 1$ y, de acuerdo con la ecuación (8-65),

$$\begin{aligned}
 y'_B = \Phi_k &= \int_0^L \frac{[-P(L-x) + M_k] dx}{EI} = \frac{P(L-x)^2}{2EI} \Big|_0^L \\
 &= \frac{PL^2}{2EI} \quad \text{en el sentido de } M_k, \text{ es decir, en el sentido de} \\
 &\quad \text{las agujas del reloj} \quad \text{Resp.}
 \end{aligned}$$

Ejemplo 8-18 Repetir el ejemplo 8-16 utilizando el segundo teorema de Castigliano (véase la fig. 8-42).

SOLUCION Para hallar la deflexión y la rotación en C es necesario aplicar una carga ficticia P_c y un momento ficticio M_c , respectivamente. Por sencillez, las expresiones para el momento debido a la carga distribuida real y a la carga distribuida ficticia se escriben en función de dos sistemas de coordenadas diferentes:

$$M_{AC} = (63 + 0.4P_c)x - 7.5x^2$$

$$\frac{\partial M_{AC}}{\partial P_c} = 0.4x$$

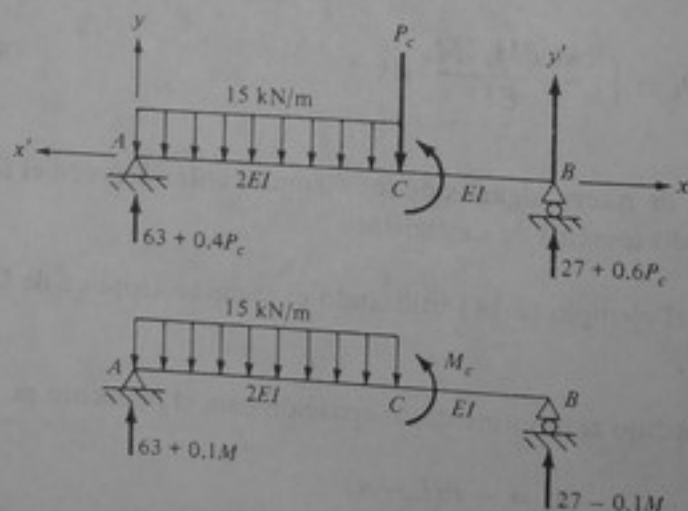


Figura 8-42 Ejemplo 8-18.

con P_c igual a cero:

$$M_{AC} \frac{\partial M_{AC}}{\partial P_c} = (63x - 7.5x^2)(0.4x)$$

$$M_{BC} = (27 + 0.6P_c)x'$$

$$\frac{\partial M_{BC}}{\partial P_c} = 0.6x'$$

con P_c igual a cero:

$$M_{BC} \frac{\partial M_{BC}}{\partial P_c} = (27x')(0.6x')$$

$$\text{Ahora bien, } y_c = \Delta_c = \frac{\partial U_{AC}}{\partial P_c} + \frac{\partial U_{BC}}{\partial P_c} = \int_0^6 \frac{(63x - 7.5x^2)(0.4x)}{2EI} dx$$

$$+ \int_0^4 \frac{27x'(0.6x')}{EI} dx = \frac{766.8}{EI} \quad \text{hacia abajo} \quad \text{Resp.}$$

Las expresiones para el momento debido a la carga distribuida real y a un momento ficticio M_c son:

$$M_{AC} = (63 + 0.1M_c)x - 7.5x^2 \quad \frac{\partial M_{AC}}{\partial M_c} = 0.1x$$

$$M_{BC} = (27 - 0.1M_c)x' \quad \frac{\partial M_{BC}}{\partial M_c} = -0.1x'$$

De este modo,

$$y'_c = \theta_c = \frac{\partial U_{AC}}{\partial M_c} + \frac{\partial U_{BC}}{\partial M_c}$$

Haciendo $M_c = 0$ se obtiene

$$y'_c = \int_0^6 \frac{6.3x^2 - 0.75x^3}{2EI} dx + \int_0^4 \frac{-2.7x'^2}{EI} dx' = \frac{47.7}{EI} \quad \text{en el sentido opuesto a las agujas del reloj}$$

Resp.

8-13 VIGAS ESTATICAMENTE INDETERMINADAS

Integraciones sucesivas

Una viga es *estáticamente indeterminada* si el número de reacciones desconocidas es mayor que el número de ecuaciones de equilibrio estático disponibles. El *grado* de indeterminación estática, D , es igual a la diferencia entre el número de reacciones desconocidas, R , y el número de ecuaciones de equilibrio estático, N_{Eq} :

$$D = R - N_{Eq} \quad (8-66)$$

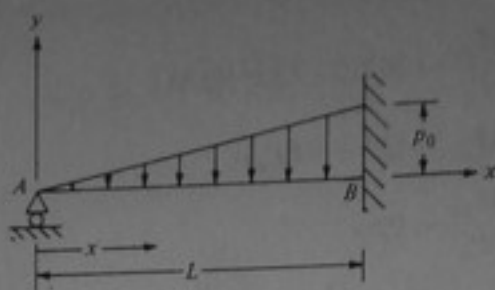


Figura 8-43 Ejemplo 8-19.

Para analizar las vigas estáticamente indeterminadas se puede hacer uso de la ecuación de equilibrio de cuarto orden (8-59) o de la ecuación de momentos de segundo orden (8-61). Si se emplea la ecuación de cuarto orden, se puede determinar la deflexión y y todas sus derivadas utilizando las condiciones geométricas así como las condiciones de contorno de fuerza y las condiciones de continuidad. Considérese el siguiente problema como un ejemplo de este procedimiento.

Ejemplo 8-19 Para la viga representada en la fig. 8-43, determinar la expresión para la deflexión (zona elástica), el ángulo de rotación en A y las reacciones en A y B .

SOLUCION Empezando con la ecuación (8-59) se tiene

$$EIy^{iv} = p = -\frac{x}{L}p_0 \quad (1)$$

e integrando,

$$EIy''' = -\frac{p_0 x^2}{L} + C_1 \quad (2)$$

$$EIy'' = -\frac{p_0 x^3}{L} + C_1 x + C_2 \quad (3)$$

$$EIy' = -\frac{p_0 x^4}{L} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3 \quad (4)$$

$$EIy = -\frac{p_0 x^5}{L} + C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4 \quad (5)$$

Las condiciones de contorno son:

$$y(0) = 0 \quad y(L) = 0$$

$$y''(0) = 0 \quad y'(L) = 0$$

Así, la condición $y(0) = 0$ implica que $C_4 = 0$ y $y''(0) = 0$ implica que $C_2 = 0$.

De las dos últimas condiciones,

$$0 = -\frac{p_0 L^3}{24} + C_1 \frac{L^2}{2} + C_3$$

$$y \quad 0 = -\frac{p_0 L^4}{120} + C_1 \frac{L^3}{6} + C_3 L$$

de donde

$$C_1 = \frac{p_0 L}{10} \quad y \quad C_3 = \frac{-p_0 L^3}{120}$$

Así,

$$y = -\frac{p_0 x^5}{120LEI} + \frac{p_0 Lx^3}{60EI} - \frac{p_0 L^3 x}{120EI} = -\frac{p_0 x}{120EI} \left(\frac{x^4}{L} - 2Lx^2 + L^3 \right)$$

$$\theta_A = y'(A) = \frac{-p_0 L^3}{120EI} \quad \text{Resp.}$$

$$R_A = -V_A = +EIy''(0) = \frac{p_0 L}{10} \quad \text{hacia arriba} \quad \text{Resp.}$$

$$R_B = V_B = -EIy''(L) = \frac{+p_0 L}{2} - \frac{p_0 L}{10} = \frac{2p_0 L}{5} \quad \text{hacia arriba} \quad \text{Resp.}$$

$$M_B = EIy''(L) = \frac{-p_0 L^2}{6} + \frac{p_0 L^2}{10} = \frac{-p_0 L^2}{15} \quad \text{en el sentido de las agujas del reloj} \quad \text{Resp.}$$

El otro procedimiento para resolver un problema estáticamente indeterminado consiste en utilizar la ecuación de curvatura de momentos de segundo orden, introducir las reacciones redundantes como incógnitas y luego aplicar las condiciones de contorno geométricas. Para demostrar este método se volverá a resolver el problema anterior.

Ejemplo 8-20 Repetir el ejemplo 8-19 utilizando la ecuación de curvatura de momentos de segundo orden.

SOLUCIÓN Se introduce la reacción en el apoyo A como una redundante desconocida. Entonces,

$$EIy'' = R_A x - \frac{p_0 x^3}{6L}$$

$$EIy' = R_A \frac{x^2}{2} - \frac{p_0 x^4}{24L} + C_1$$

$$EIy = R_A \frac{x^3}{6} - \frac{p_0 x^5}{120L} + C_1 x + C_2$$

Las condiciones de contorno son

$$y(0) = 0 \quad y(L) = 0 \quad y'(L) = 0$$

de donde resulta

$$C_2 = 0 \quad 0 = \frac{R_A L^3}{6} - \frac{p_0 L^4}{120} + C_1 L \quad 0 = \frac{R_A L^2}{2} - \frac{p_0 L^3}{24} + C_1$$

De las dos últimas ecuaciones,

$$C_1 = \frac{-p_0 L^3}{120} \quad y \quad R_A = \frac{p_0 L}{10} \quad \text{Resp.}$$

$$y = \frac{-p_0 x}{120EI} \left(\frac{x^4}{L} - 2Lx^2 + L^3 \right)$$

como antes. Para determinar θ_A , R_B y M_B primero se escriben las expresiones

$$EIy' = \frac{-p_0 x^4}{24L} + \frac{p_0 Lx^2}{20} - \frac{p_0 L^3}{120}$$

la cual implica que

$$y'(A) = \theta_A = \frac{-p_0 L^3}{120EI} \quad \text{en el sentido de las agujas del reloj} \quad \text{Resp.}$$

$$EIy'' = \frac{-p_0 x^3}{6L} + \frac{p_0 Lx}{10}$$

$$EIy''' = -\frac{p_0 x^2}{2L} + \frac{p_0 L}{10}$$

$$\text{Ahora bien, } R_B = V_B = -EIy'''(L) = \frac{+p_0 L}{2} - \frac{p_0 L}{10} = \frac{2p_0 L}{5} \quad \text{hacia arriba} \quad \text{Resp.}$$

$$y \quad M_B = EIy''(L) = \frac{-p_0 L^2}{6} + \frac{p_0 L^2}{10} = -\frac{p_0 L^2}{15} \quad \text{en el sentido de las agujas del reloj} \quad \text{Resp.}$$

Los problemas más complicados se pueden manejar de una forma parecida; sin embargo, se prefieren los métodos más directos del análisis estructural (que no se estudian aquí).

Procedimiento de la energía

En este procedimiento, la energía de deformación se expresa en función de una reacción redundante, y el desplazamiento asociado se hace igual a cero. De este modo, si se tiene una redundante R , de acuerdo con las ecuaciones (8-62) u (8-63) se puede escribir

$$\Delta_r \quad \text{o} \quad \Phi_r = \frac{\partial U}{\partial R} = 0 \quad (8-67)$$

de donde resulta

$$\int_0^L \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial R} dx = 0 \quad (8-68)$$

Si se tiene más de una redundante, digamos R_1, R_2, \dots, R_r , se puede demostrar que si la energía de deformación se expresa en función de estas redundantes en la forma $U(R_1, R_2, \dots, R_r)$, entonces

$$\frac{\partial U}{\partial R_1} = \frac{\partial U}{\partial R_2} = \dots = \frac{\partial U}{\partial R_r} = 0 \quad (8-69)$$

Este procedimiento se demuestra resolviendo nuevamente el ejemplo anterior.

Ejemplo 8-21 Para la viga de los ejemplos 8-19 y 8-20, determinar las reacciones en los apoyos utilizando el procedimiento de la energía.

SOLUCION El momento en función de R_a y de la carga es

$$M = R_A x - \frac{p_0 x^3}{6L}$$

y

$$\frac{\partial M}{\partial R_A} = x$$

De acuerdo con la ecuación (8-68) se obtiene

$$\frac{1}{EI} \int_0^L \left(R_A x^2 - \frac{p_0 x^4}{6L} \right) dx = 0$$

$$R_A = \frac{\int_0^L (p_0 x^4 / 6L) dx}{\int_0^L x^2 dx} = \frac{p_0 L^4 / 30}{L^3 / 3} = \frac{p_0 L}{10} \quad \text{hacia arriba} \quad \text{Resp.}$$

Una vez conocida esta información se puede calcular la otra reacción considerando el equilibrio estático de la viga, que conduce nuevamente a

$$R_B = \frac{2p_0 L}{5} \quad (\text{hacia arriba}) \quad \text{y} \quad M_B = \frac{-p_0 L^2}{15} \quad \text{en el sentido de las agujas del reloj} \quad \text{Resp.}$$

No es posible obtener una expresión general para la deflexión y sus derivadas mediante este método. Por ejemplo, si se desea calcular la rotación en A , después de determinar A se puede introducir un *momento ficticio* en A y utilizar la ecuación (8-65) para determinar θ_A .

Ejemplo 8-22 Para la viga de la fig. 8-44a, determinar las reacciones en los apoyos y construir los diagramas de fuerzas cortantes y de momentos.

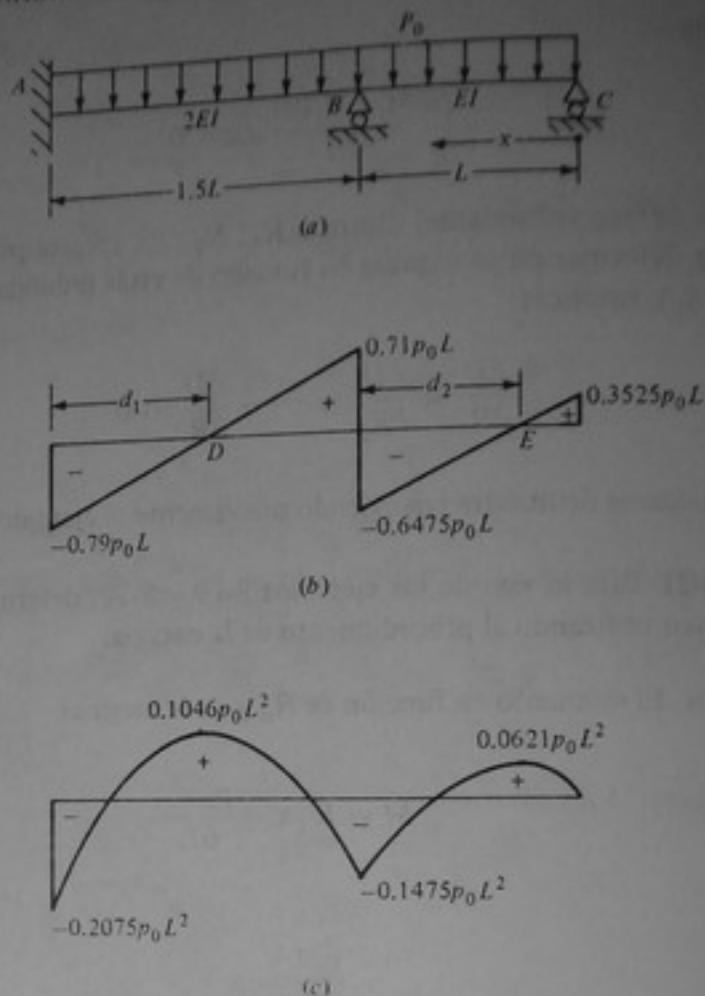


Figura 8-44 Ejemplo 8-22.

SOLUCION La viga es estáticamente indeterminada en segundo grado. Se pueden hacer varias elecciones para las dos redundantes. Tómense las reacciones verticales en B y en C, R_B y R_C . Seleccionando el origen del sistema de coordenadas en C, como se muestra en la fig. 8-44a, se pueden escribir las expresiones para los momentos de flexión:

$$M_{CB} = -\frac{1}{2}p_0x^2 + R_Cx$$

$$M_{BA} = -\frac{1}{2}p_0x^2 + R_Cx + R_B(x - L)$$

Enseguida se escribe la expresión para la energía de deformación por flexión:

$$U = \int_0^L \frac{M_{CB}^2}{EI} dx + \int_L^{2.5L} \frac{M_{BA}^2}{2EI} dx$$

Ahora, de acuerdo con la ecuación (8-69) se tiene

$$\frac{\partial U}{\partial R_C} = 0 = \int_0^L \frac{M_{CB}(\partial M_{CB}/\partial R_C)}{EI} dx + \int_L^{2.5L} \frac{M_{BA}(\partial M_{BA}/\partial R_C)}{2EI} dx$$

$$o \int_0^L \frac{(-\frac{1}{2}p_0 x^2 + R_C x)x dx}{EI} + \int_L^{2.5L} \frac{[-\frac{1}{2}p_0 x^2 + R_C x + R_B(x-L)]x dx}{2EI} = 0$$

Después de integrar se obtiene

$$-5.0078p_0 L + 5.5417R_C + 2.25R_B = 0 \quad (1)$$

De forma análoga,

$$\frac{\partial U}{\partial R_B} = 0 = \int_0^L \frac{M_{CB}(\partial M_{CB}/\partial R_B) dx}{EI} + \int_L^{2.5L} \frac{M_{BA}(\partial M_{BA}/\partial R_B) dx}{2EI}$$

$$o \int_L^{2.5L} \frac{[-\frac{1}{2}p_0 x^2 + R_C x + R_B(x-L)](x-L) dx}{2EI} = 0 \quad \frac{\partial M_{CB}}{\partial R_B} = 0$$

Después de integrar se obtiene

$$-2.3203p_0 L + 2.2500R_C + 1.1250R_B = 0 \quad (2)$$

Despejando R_B y R_C de las ecuaciones (1) y (2) se encuentra

$$R_C = 0.3525p_0 L \quad y \quad R_B = 1.3575p_0 L \quad \text{Resp.}$$

Del equilibrio de fuerzas verticales se sigue que

$$\sum F_y = 0:$$

$$R_A - 2.5p_0 L + 1.3575p_0 L + 0.3525p_0 L = 0 \quad \text{Resp.}$$

de donde

$$R_A = 0.79p_0 L \quad \text{Resp.}$$

Para determinar el momento en A se remplazan los valores de R_B y R_C y se hace $x = 2.5L$ en la expresión deducida anteriormente para M_{BA} . De este modo,

$$M_A = -\frac{1}{2}p_0(2.5L)^2 + 0.3525p_0 L(2.5L) + 1.3575p_0 L(1.5L)$$

$$= -0.2075p_0 L \quad (\text{en el sentido opuesto al de las agujas del reloj}) \quad \text{Resp.}$$

El diagrama de fuerzas cortantes se muestra en la fig. 8-44b. Para construir el diagrama de momentos se calcula el momento en B , haciendo $R_C = 0.3525p_0 L$ y $x = L$ en la ecuación para M_{CB} . De esto resulta

$$M_B = -\frac{1}{2}p_0 L^2 + 0.3525p_0 L(L) = -0.1475p_0 L^2 \quad \text{Resp.}$$

Los momentos máximos se presentan en los puntos de fuerza cortante cero (puntos D y E en la fig. 8-44b). Para determinar las localizaciones de estos puntos se puede escribir

$$\frac{0.79p_0 L}{d_1} = \frac{1.5p_0 L}{1.5L}$$

de donde resulta

$$d_1 = 0.79L \quad y \quad x_D = (2.5 - 0.79)L = 1.71L \quad \text{Resp.}$$

Análogamente,
$$\frac{0.6475 p_0 L}{d_2} = \frac{p_0 L}{L}$$

de donde resulta

$$d_2 = 0.6475L \quad \text{y} \quad x_E = 0.3525L \quad \text{Resp.}$$

Ahora se hallan los momentos máximos, sustituyendo los valores de x_E y x_D en la expresión del momento para las porciones CD y BA , respectivamente:

$$M_E = -\frac{1}{2} p_0 (0.3525L)^2 + 0.3525 p_0 L (0.3525L) = 0.0621 p_0 L^2 \quad \text{Resp.}$$

$$\text{y} \quad M_D = -\frac{1}{2} p_0 L (1.71L)^2 + 0.3525 p_0 L (1.71L) + 1.3575 p_0 L (0.71L) = 0.1046 p_0 L^2 \quad \text{Resp.}$$

El diagrama de momentos completo se muestra en la fig. 8-44c.

8-14 VIGAS CURVAS

Esfuerzos

Cuando las vigas curvas se someten a momentos de flexión, las ecuaciones corrientes para esfuerzos longitudinales no son aplicables. Esto se debe a que la longitud y la deformación unitaria de las fibras paralelas al eje centroidal dependen no sólo de su distancia hasta el eje, sino también de la curvatura. En consecuencia, el eje centroidal y el eje neutro no coinciden (fig. 8-45).

Como en las vigas rectas, se supone que las secciones perpendiculares al eje centroidal permanecen planas. Para determinar la localización del eje neutro (supuesto a una distancia r_n de O) se considera una fibra EF a una distancia y por debajo del eje neutro y a una distancia r del centro de curvatura (fig. 8-45b).

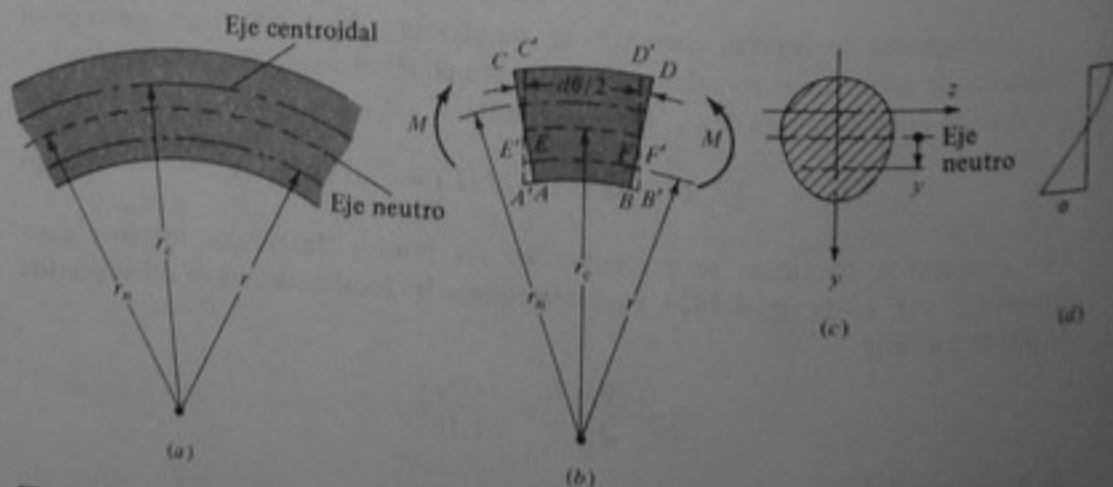


Figura 8-45 Viga curva.

Su alargamiento $E^2E + FF$ es igual a $(r_n - r) d\theta$ y la deformación unitaria es

$$\varepsilon = \frac{(r_n - r) d\theta}{r\theta} \quad (8-70)$$

Para comportamiento elástico lineal el esfuerzo es

$$\sigma = \varepsilon E = \frac{E(r_n - r) d\theta}{r\theta} \quad (8-71)$$

Para el equilibrio de fuerzas en la dirección tangencial (normal al elemento),

$$\sum F_t = 0$$

o

$$\int_A \sigma dA = \int_A \frac{E(r_n - r) d\theta}{r\theta} dA = \frac{E d\theta}{\theta} \int_A \frac{r_n - r}{r} dA = \frac{E d\theta}{\theta} \left(r_n \int_A \frac{dA}{r} - \int_A dA \right) = 0 \quad (8-72)$$

a partir de la cual se determina la localización del eje neutro:

$$r_n = \frac{A}{\int_A (dA/r)} \quad (8-73)$$

Una vez determinada la localización del eje neutro, se halla la distribución de esfuerzos considerando el equilibrio de momentos respecto al eje z :

$$\sum M_z = \int_A \sigma dAy = \int_A \sigma dA(r_n - r) = 0$$

De la ecuación (8-71) se sigue que

$$\int_A \frac{E(r_n - r)^2 d\theta}{r\theta} dA = \frac{E d\theta}{\theta} \int_A \frac{(r_n - r)^2}{r} dA \quad (8-74)$$

De la ecuación (8-71) también se deduce que

$$\frac{E d\theta}{\theta} = \frac{r\sigma}{r_n - r}$$

Sustituyendo esta última en la ecuación (8-74) se obtiene

$$M_z = \frac{\sigma r}{r_n - r} \int_A \frac{(r_n - r)^2}{r} dA = \frac{\sigma r}{r_n - r} \left(r_n^2 \int_A \frac{dA}{r} - r_n \int_A dA - r_n \int_A dA + \int_A r dA \right)$$

De acuerdo con la ecuación (8-71), los primeros dos términos desaparecen. Asimismo, $\int_A dA = A$, mientras que

$$\int_A r dA = r_c A$$

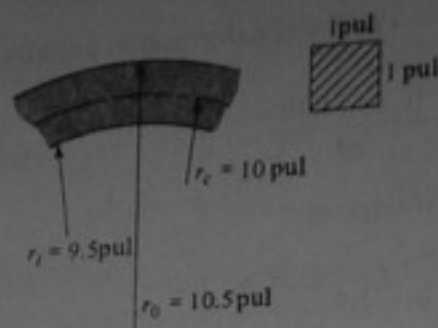


Figura 8-46 Ejemplo 8-23.

en donde r_c es la distancia desde el centroide hasta el centro de curvatura, O . Así,

$$M_z = \frac{\sigma r A}{r_n - r} (r_c - r_n) \quad \text{o} \quad \sigma = \frac{M_z (r_n - r)}{r A (r_c - r_n)} \quad (8-75)$$

Con base en esta ecuación se puede observar que la distribución de esfuerzos varía cuadráticamente (fig. 8-45d).

Ejemplo 8-23 Para una sección cuadrada de dimensiones 1 pul \times 1 pul (fig. 8-46), determinar los esfuerzos para $r_c = 10$ pul debidos a un momento de flexión de 2.5 klb \cdot pul.

SOLUCION El eje neutro se halla aplicando la ecuación (8-73), a partir de la cual se obtiene

$$r_n = \frac{A}{\int_A (dA/r)} = \frac{1}{\int_{9.5}^{10.5} (dr/r)} = \frac{1}{\ln(10.5/9.5)} = 9.99166 \text{ pul}$$

Utilizando la ecuación (8-75) se encuentra

$$\sigma_i = \frac{2.5(9.99166 - 9.50)}{9.5(1)(10 - 9.99166)} = 15.514 \text{ klb/pul}^2 \quad \text{Resp.}$$

$$\sigma_o = \frac{2.5(9.99166 - 10.5)}{10.5(1)(10 - 9.99166)} = -14.512 \text{ klb/pul}^2 \quad \text{Resp.}$$

Para $r_c = \infty$,

$$\sigma_i = \frac{2.5}{1/6} = 15 \text{ klb} \quad \text{y} \quad \sigma_o = -15 \text{ klb/pul}^2 \quad \text{Resp.}$$

Como se puede observar en el ejemplo anterior, si se utiliza la fórmula de la viga recta, el error no es excesivo (3.4 por ciento). Sin embargo, a medida que r_c disminuye, el error se hace más significativo. Por ejemplo, cuando se usa la fórmula de la viga recta, un r_c de 2.5 produciría un error de 15.3 por ciento.

Ejemplo 8-24 Encontrar los esfuerzos en una sección transversal circular sólida de $\frac{1}{2}$ pul de radio, si $M = 2.5$ klb \cdot pul (véase la fig. 8-47).

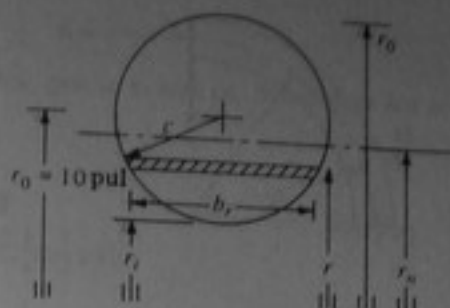


Figura 8-47 Ejemplo 8-24.

SOLUCION Primero se determina r_n :

$$r_n = \frac{A}{\int_A (dA/r)} = \frac{\pi c^2}{\int_{r_i}^{r_o} [2\sqrt{c^2 - (r_c - r)^2} dr/r]}$$

de la cual resulta, según se puede demostrar†,

$$r_n = \frac{r_c + \sqrt{r_c^2 - c^2}}{2} \quad (8-76)$$

Para $r_c = 10$ pul se obtiene

$$r_n = \frac{10 + \sqrt{10^2 - (\frac{1}{2})^2}}{2} = 9.993746$$

$$\text{De este modo, } \sigma_i = \frac{(2.5)(9.993746 - 9.50)}{(9.5)(1)(10 - 9.993746)(\pi/4)} = 26.45 \text{ klb/pul}^2 \quad \text{Resp.}$$

$$\sigma_o = \frac{(2.5)(9.993746 - 10.50)}{(10.5)(1)(10 - 9.993746)(\pi/4)} = -24.54 \text{ klb/pul}^2 \quad \text{Resp.}$$

Para $r_c = \infty$

$$\sigma_i = \frac{2.5(0.5)}{\pi(0.5)^4/4} = 25.46 \text{ klb/pul}^2 = -\sigma_o \quad \text{Resp.}$$

$$\text{y } \sigma_o = -25.46 \text{ klb/pul}^2 \quad \text{Resp.}$$

Deformaciones

Para determinar deformaciones en vigas curvas, generalmente es conveniente utilizar el segundo teorema de Castigliano. Este método se demuestra con un ejemplo.

Ejemplo 8-25 Despreciando la energía de deformación debida a la carga axial y de corte, calcular los desplazamientos vertical y horizontal de P , en la fig. 8-48.

† R.J. Roark y W.C. Young, *Formulas for Stress and Strain*, 5a. ed., McGraw-Hill, Nueva York, 1975, pág. 210, tabla 16.

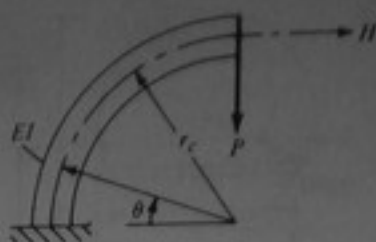


Figura 8-48 Ejemplo 8-25.

SOLUCION

$$U = \int_s \frac{M^2 ds}{2EI} = \int_0^{\pi/2} \frac{M^2 r_c d\theta}{2EI}$$

$$M = Pr_c \cos \theta$$

$$\frac{\partial M}{\partial P} = r_c \cos \theta$$

$$M \frac{\partial M}{\partial P} = Pr_c^2 \cos^2 \theta$$

y de acuerdo con la ecuación (8-64) se puede escribir

$$\Delta_v = \frac{\partial U}{\partial P} = \int_0^{\pi/2} \frac{Pr_c^3 \cos^2 \theta}{EI} d\theta = \frac{Pr_c^3 \pi}{4EI} \quad \text{hacia abajo} \quad \text{Resp.}$$

Para determinar el desplazamiento horizontal se introduce una fuerza ficticia H . La expresión para el momento se convierte en $M = Pr_c \cos \theta + Hr_c(1 - \sin \theta)$, y $\partial M / \partial H = r_c(1 - \sin \theta)$. Haciendo $H = 0$ y $M \partial M / \partial H = Pr_c^2(1 - \sin \theta) \cos \theta$ se obtiene

$$\Delta_h = \frac{\partial U}{\partial H} = \int_0^{\pi/2} \frac{Pr_c^3(1 - \sin \theta) \cos \theta d\theta}{EI} = \frac{Pr_c^3}{2EI} \quad \text{hacia la derecha} \quad \text{Resp.}$$

8-15 RESUMEN

En este capítulo se estudia detalladamente el análisis de vigas. El material que se presenta capacita al lector para comprender el comportamiento de vigas sometidas a flexión o a flexión combinada con otros tipos de carga. A la determinación de los esfuerzos producidos por flexión pura así como los debidos a carga lateral siguió un estudio detallado de la deformación de vigas. El capítulo incluye una introducción al comportamiento de vigas compuestas de dos materiales, el análisis elastoplástico y el análisis de vigas curvas.

Los métodos planteados para la determinación de deformaciones son los "clásicos". Otros métodos utilizados en el análisis estructural, tales como los de pendiente-deflexión y áreas de momentos, no se incluyen en este texto puesto que, en opinión de los autores, dicho material pertenece a cursos que tratan específicamente el análisis estructural.

PROBLEMAS

8-1 a 8-6 Para las secciones que se muestran, determinar los momentos de inercia I_x e I_y y los módulos de la sección.

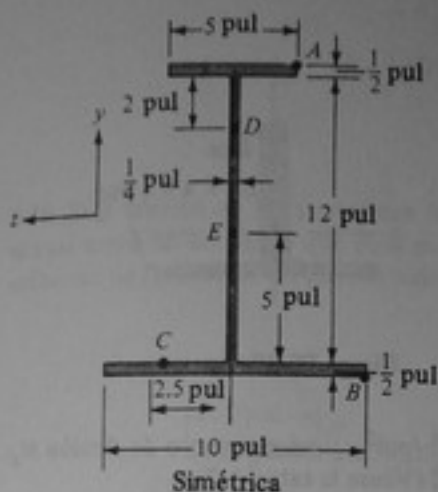


Figura P8-1

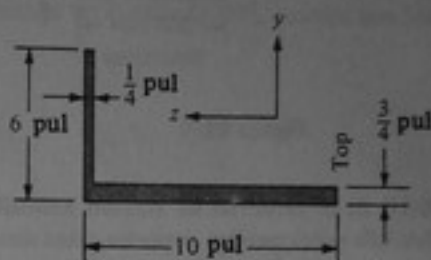


Figura P8-2

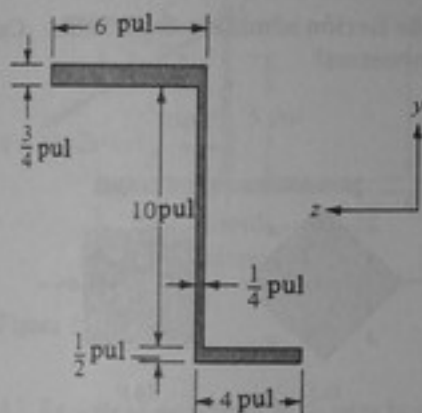


Figura P8-3

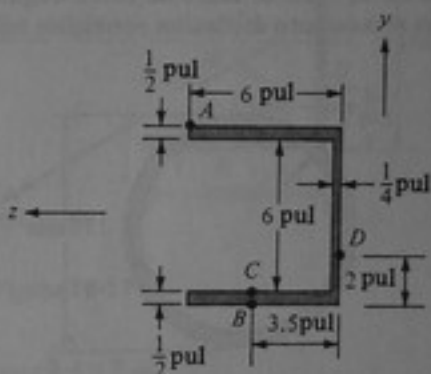


Figura P8-4

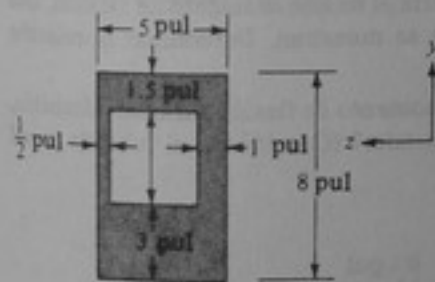


Figura P8-5

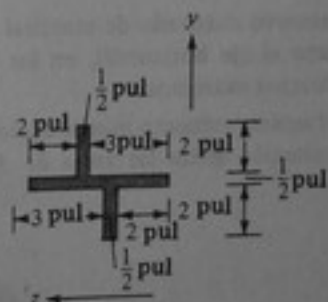


Figura P8-6

8-7 a 8-8 Determinar el esfuerzo de flexión en los puntos indicados para un momento de flexión de 50 $\text{klb}\cdot\text{pie}$ que actúa con respecto al eje y y al eje z , para las secciones de los problemas 8-1 y 8-4, respectivamente.

8-9 Para la sección transversal representada, determinar los esfuerzos (en megapascuales) en las fibras extremas, debidos a un momento de 40 kN que actúa respecto al eje z .

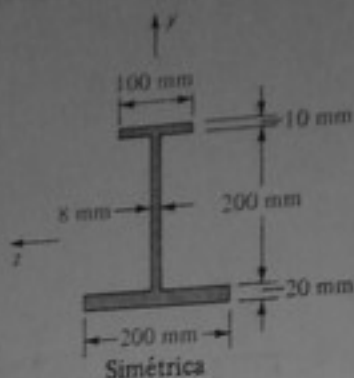


Figura P8-9

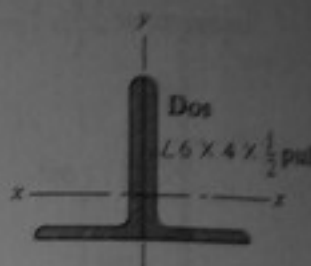


Figura P8-10

8-10 Si el esfuerzo de flexión admisible máximo es 20 klb/pul², ¿qué momento de flexión M_x (en klb · pie) pueden soportar estos dos ángulos combinados? (Véase la tabla A-7).

8-11 Una viga W18 × 65 soporta un momento de flexión $M_x = 160$ klb · pie (véase la tabla A-4).

(a) ¿Cuáles son los esfuerzos máximos de flexión?

(b) ¿Cuáles son los esfuerzos de flexión a una profundidad de un cuarto?

8-12 El tubo de acero de pared delgada tiene un esfuerzo de flexión admisible de 130 MPa. ¿Cuál es el momento de flexión permisible máximo, en kilonewton-metros?

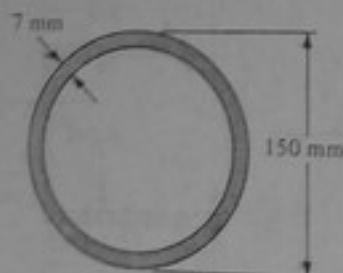


Figura P8-12

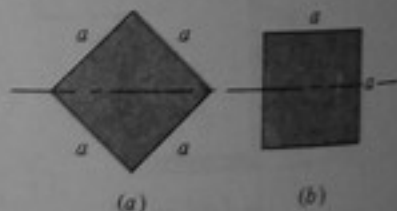


Figura P8-13

8-13 Un elemento cuadrado de material elástico lineal soporta el mismo momento de flexión, que actúa respecto al eje horizontal, en las dos posiciones que se muestran. Determinar la relación entre los esfuerzos extremos.

8-14 Para el mismo esfuerzo máximo admisible y el mismo momento de flexión máximo admisible, ¿cuál es la relación entre las áreas de las secciones transversales? (Considérese el tubo de pared delgada.)

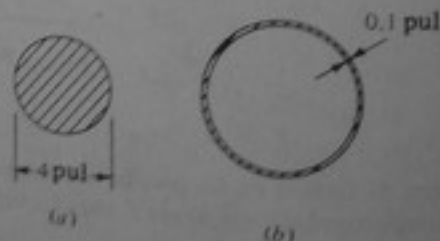


Figura P8-14

8-15 Para el mismo esfuerzo máximo admisible y el mismo momento de flexión máximo admisible, ¿cuál es la relación entre las áreas de las secciones transversales?

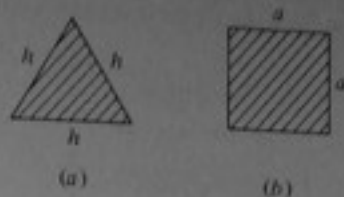


Figura P8-15

8-16 Si la sección de los problemas 8-1 y 8-7 se somete a un momento de flexión de $70 \text{ klb} \cdot \text{pie}$, el cual actúa en un plano que pasa por el centroide y está girado un ángulo de 30° , ¿cuáles son los esfuerzos de flexión en los puntos indicados?

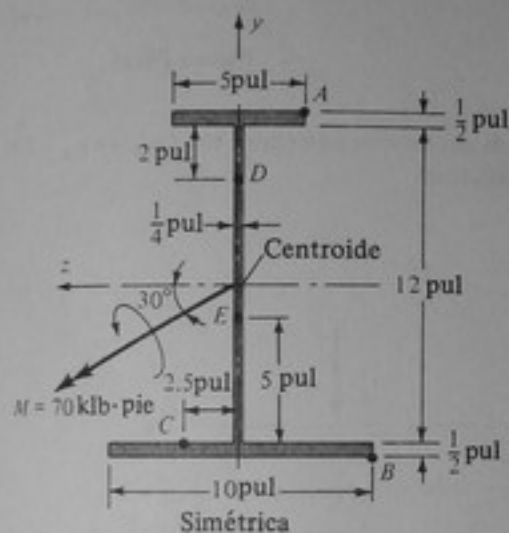


Figura P8-16

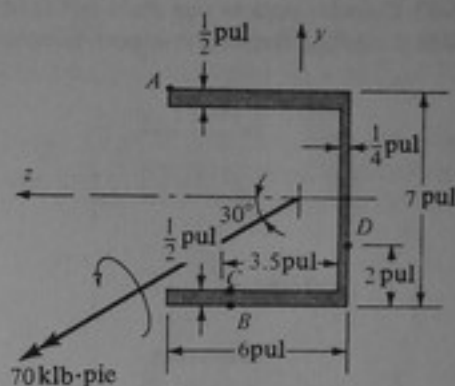


Figura P8-17

8-17 Repetir el problema 8-16 para la sección de los problemas 8-4 y 8-8.

8-18 Un ángulo de $3\frac{1}{2} \times 2\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ pul se somete a una carga que actúa a través de su centroide y produce un momento de $\text{klb} \cdot \text{pul}$ respecto al eje $x-x$. ¿Cuáles son los esfuerzos de flexión en los puntos indicados? (Véase la tabla A-7).

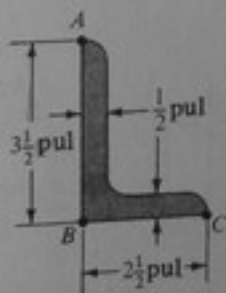


Figura P8-18

8-18 a 8-21 Para las secciones de los problemas 8-1, 8-9 y 8-10, determinar (a) la localización del eje neutro para flexión en fluencia completa respecto al eje horizontal y (b) el factor de forma para flexión respecto al mismo eje.

8-22 Para la sección del problema 8-4, determinar (a) la localización del eje neutro para flexión en fluencia completa respecto al eje vertical y (b) el factor de forma para flexión respecto al mismo eje.

8-23 Determinar el factor de forma para la sección transversal de la fig. P8-14a.

8-24 a 8-26 Para las secciones transversales que se muestran, determinar (a) la localización del eje neutro y (b) el factor de forma para flexión respecto al eje horizontal.

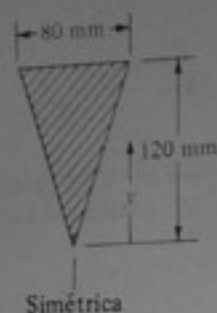


Figura P8-24

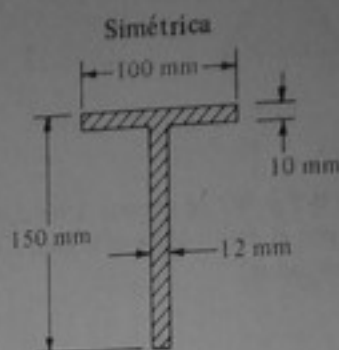


Figura P8-25

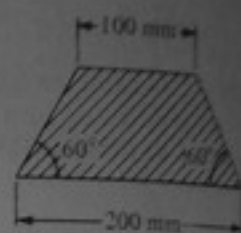


Figura P8-26

8-27 Calcular para la viga de la figura (a) los esfuerzos de flexión extremos, (b) P_{flu} si $\sigma_{flu} = 200$ MPa y (c) P_{fin} . Suponer comportamiento elastoplástico ideal.

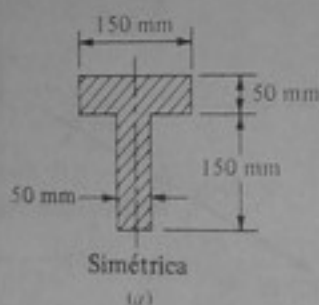
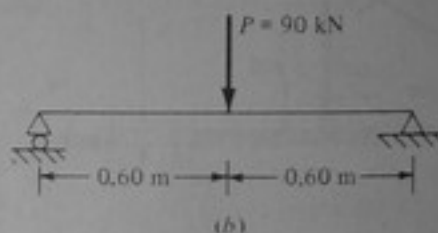


Figura P8-27



8-28 En la viga de la figura los dos materiales están adheridos y sometidos a flexión. Tomar $E_{ac} = 30 \times 10^3$ klb/pul² y $E_{al} = 10 \times 10^3$ klb/pul². Determinar

(a) Los esfuerzos en los puntos 1 y 2 (en ambos materiales) para un momento de flexión M_x de 30 klb · pie.

(b) Los esfuerzos en los puntos 3 y 4 para un momento de flexión M_y de 30 klb · pie.

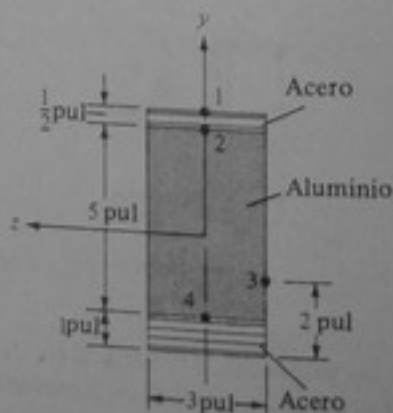


Figura P8-28

8-29 En la viga de la figura los dos materiales están adheridos y sometidos a flexión. Determinar (a) los esfuerzos en los puntos 1 y 2 (en ambos materiales) para un momento de flexión $M_x = 20$ $\text{klb} \cdot \text{pie}$ y (b) los esfuerzos en los puntos 3 y 4 (en ambos materiales) para un momento de flexión $M_y = 3$ $\text{klb} \cdot \text{pie}$. Utilizar $E_{ac} = 30 \times 10^3$ klb/pul^2 y $E_m = 1.5 \times 10^3$ klb/pul^2 .

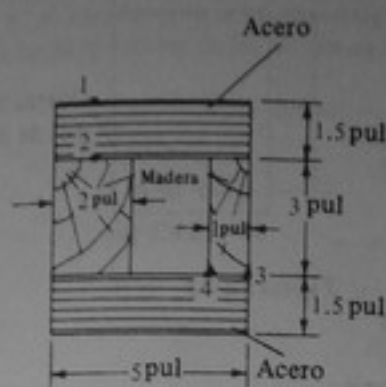


Figura P8-29

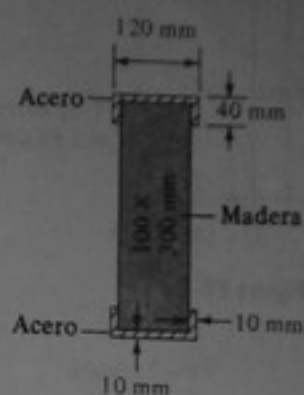


Figura P8-30

8-30 Determinar los esfuerzos en los puntos indicados, debidos a un momento de flexión de 80 $\text{kN} \cdot \text{m}$ respecto al eje z , para una viga con la sección transversal que se muestra. Utilizar $E_{ac} = 200 \times 10^3$ MPa y $E_m = 10 \times 10^3$ MPa .

8-31 Para una viga con la sección transversal representada en la figura, ¿cuál es el momento al empezar la fluencia si $\sigma_{flu,ac} = 210$ MPa y $\sigma_{flu,la} = 105$ MPa y se puede suponer comportamiento elastoplástico ideal para ambos materiales? Utilizar $E_{ac} = 207 \times 10^3$ MPa y $E_{la} = 103.5 \times 10^3$ MPa .

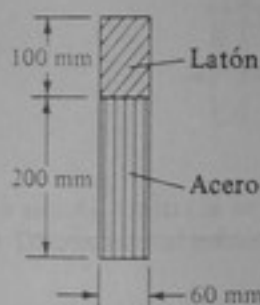


Figura P8-31

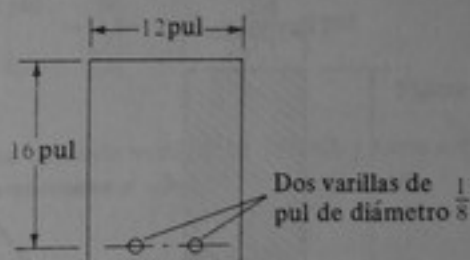


Figura P8-32

8-32 La viga de concreto reforzado que se muestra debe resistir un momento de flexión de 50.0 $\text{klb} \cdot \text{pie}$. Si $E_{ac} = 30 \times 10^6$ lb/pul^2 y $E_c = 3 \times 10^6$ lb/pul^2 , calcular los esfuerzos extremos en el concreto y en el acero.

8-33 Determinar los esfuerzos de flexión en el acero y el concreto, debidos a un momento de flexión de 50 $\text{klb} \cdot \text{pie}$, si $E_{ac} = 80 \times 10^6$ klb/pul y $E_c = 3.33 \times 10^6$ klb/pul .

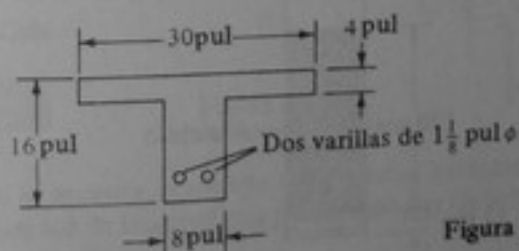


Figura P8-33

8-34 a 8-36 Repetir el problema 8-32 para las secciones que se muestran.

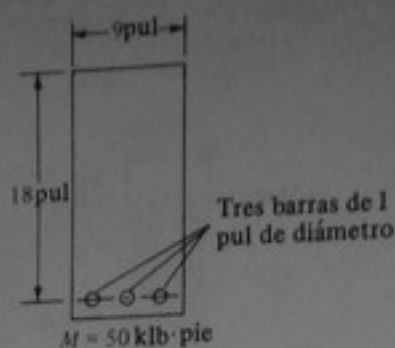


Figura P8-34

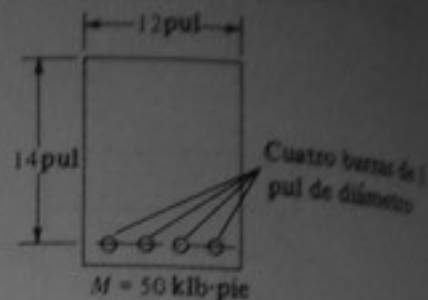


Figura P8-35

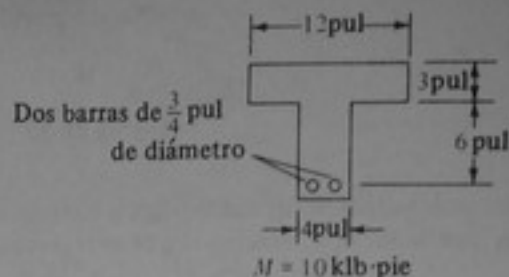


Figura P8-36

8-37 La viga de la figura se somete a un momento de flexión positivo de $200 \text{ kN}\cdot\text{m}$. El material de la viga tiene una curva esfuerzo-deformación unitaria como se indica. Suponiendo un comportamiento elástico tanto en tracción como en compresión, determinar los esfuerzos en las fibras extremas de la viga.

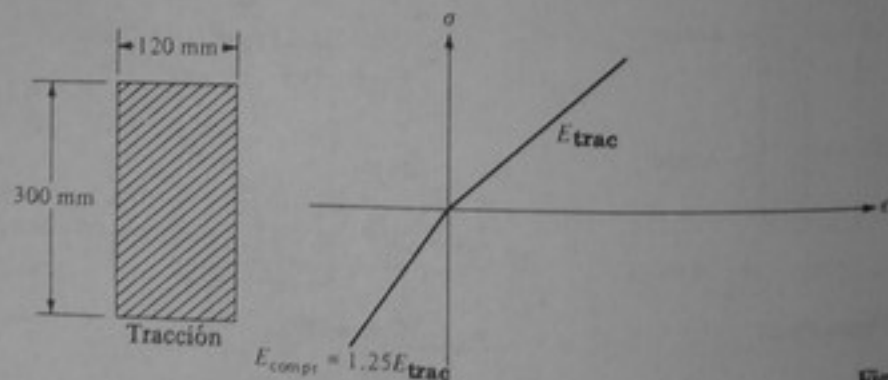


Figura P8-37

8-38 Si $\sigma_{\text{flu,ac}} = 200 \text{ MPa}$ y $\sigma_{\text{flu,al}} = 80 \text{ MPa}$ y se supone que ambos materiales tienen comportamiento elastoplástico ideal, ¿cuál es el valor de M_{flu} ? Utilizar $E_{\text{ac}} = 210 \times 10^3 \text{ MPa}$ y $E_{\text{al}} = 70 \times 10^3 \text{ MPa}$.

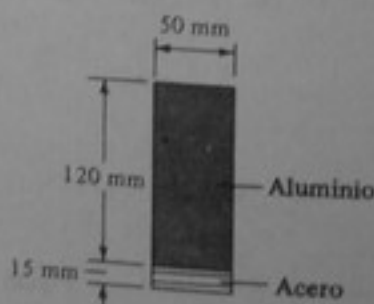


Figura P8-38

8-39 Si la viga del problema 8-25 se somete a una fuerza cortante vertical de 200 kN, determinar el flujo de corte y el esfuerzo cortante (a) en la unión del alma y el ala y (b) en el eje neutro.

8-40 Si una viga W14×90 se somete a una fuerza cortante vertical de 100 klb:

(a) Calcular el flujo de corte, q , en los planos horizontales a y b y en los planos verticales del ala, d , e y f .

(b) Trazar los diagramas del flujo de corte y del esfuerzo cortante en los planos horizontales a , b , c , b' , c' y en los planos verticales del ala, d , e y f .

(Véanse las propiedades de las secciones en la tabla A-5).

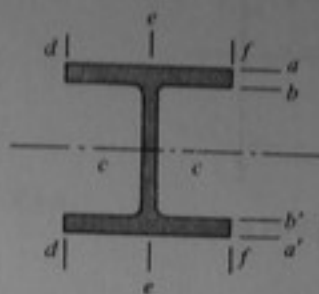


Figura P8-40

8-41 Para la viga del problema 8-28, calcular el esfuerzo cortante en las uniones entre el acero y el aluminio para una carga cortante de 300 klb.

8-42 Para la viga del problema 8-29, calcular el esfuerzo cortante en las uniones entre la madera y el acero para una carga cortante de 50 klb.

8-43 Las secciones representadas están construidas de madera y empernadas, como se indica en la figura. ¿Qué fuerza cortante vertical puede soportar cada viga si la fuerza cortante admisible por perno es 500 lb y el espaciado es 4 pul?

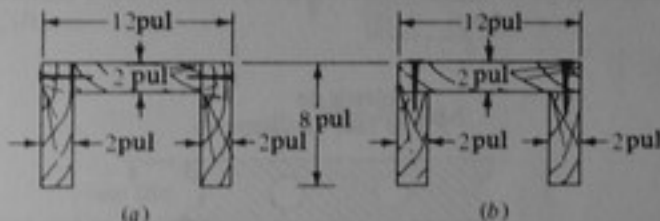


Figura P8-43

8-44 La sección mostrada se somete a una fuerza cortante vertical de 100 klb y tiene uniones encoladas. Determinar los esfuerzos cortantes en las uniones a - a y b - b .

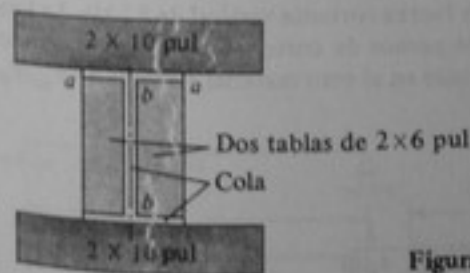


Figura P8-44

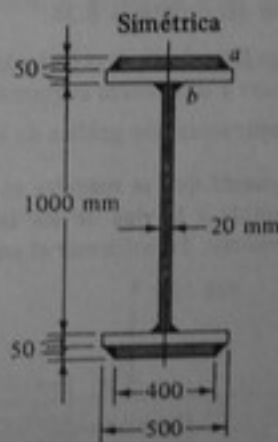


Figura P8-45

8-45 La sección que se muestra se somete a una fuerza cortante vertical de 1 MN. Determinar la fuerza cortante por unidad de longitud que deben soportar las soldaduras a y b .

8-46 Si en el problema 8-45 las placas de cubierta se fijan con dos pernos y la fuerza cortante por perno es 20 kN, ¿cuál es el espaciamiento mínimo entre pernos?

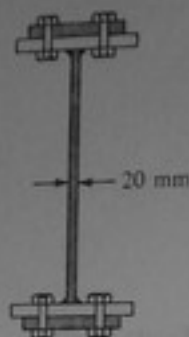


Figura P8-46

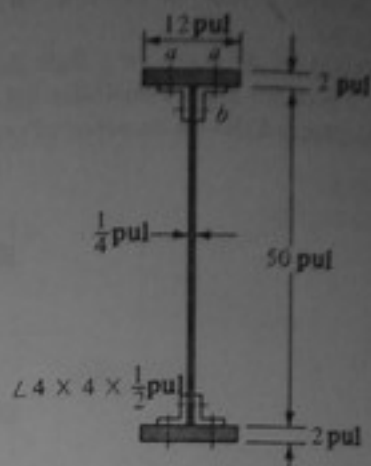


Figura P8-47

8-47 Si se hace una viga compuesta como la de la figura, ¿cuál debe ser el espaciamiento entre pernos, si la fuerza cortante por perno en corte simple (perno a) es 3.3 klb y en corte doble, 6.6 klb (perno b), y la fuerza cortante vertical es 75 klb?

8-48 Si la sección de piso que se muestra en la figura se somete a una carga cortante vertical de V kN por metro de anchura, ¿cuál es el esfuerzo cortante máximo en la losa de piso en función de V ?

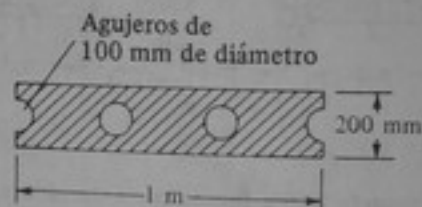


Figura P8-48

8-49 Para la sección del problema 8-24:

(a) Expresar en función de y el flujo de corte y el esfuerzo cortante en los planos horizontales, si la sección se somete a una fuerza cortante vertical de 1 MN.

(b) Hacer la representación gráfica de los flujos de corte y los esfuerzos cortantes.

8-50 La viga compuesta que se muestra se somete a una fuerza cortante vertical de 80 klb. La losa de concreto está unida a la viga de ala ancha mediante pernos de corte. ¿Cuánto debe soportar cada perno? (Sugerencia: Transformar el concreto o el acero en el otro material.) Tomar $n = E_{ac}/E_c = 7.5$.

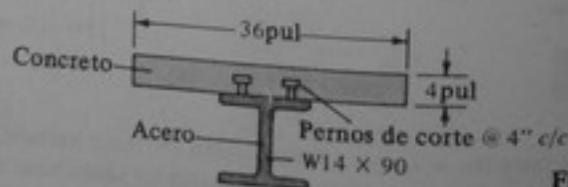


Figura P8-50

8-51 a 8-55 Determinar el centro de corte para cada una de las secciones mostradas, cargadas con fuerzas cortantes, como se indica.

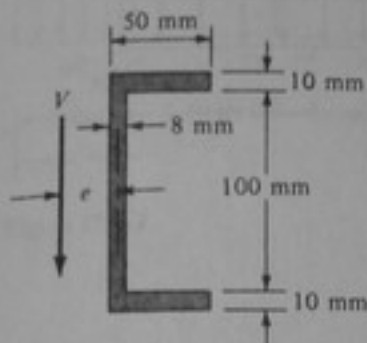


Figura P8-51

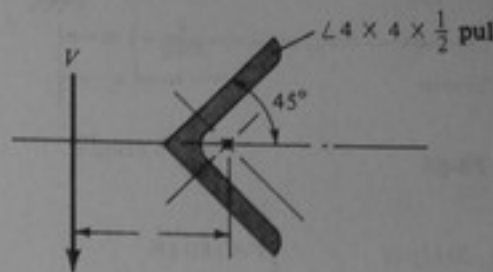


Figura P8-52

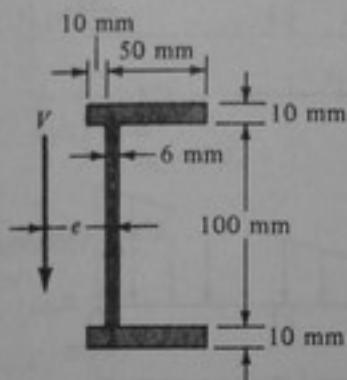


Figura P8-53

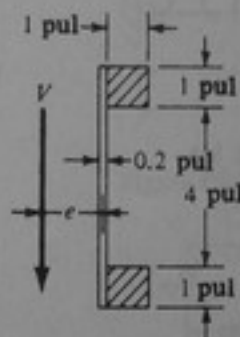


Figura P8-54

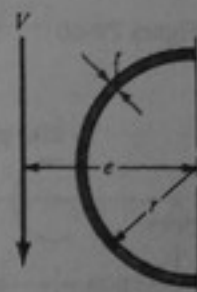


Figura P8-55

8-56 a 8-82 Para las vigas que se muestran

- Determinar las reacciones.
- Determinar el diagrama de fuerzas cortantes, utilizando el método del gradiente.
- Determinar el diagrama de momentos (incluyendo signos y valores extremos).
- Hallar las localizaciones de los puntos de momentos extremos y las localizaciones de los puntos de inflexión, cuando existan.
- Escribir las expresiones analíticas de las fuerzas cortantes y los momentos para cada porción de la viga.
- Hacer un esquema del estado deformado.

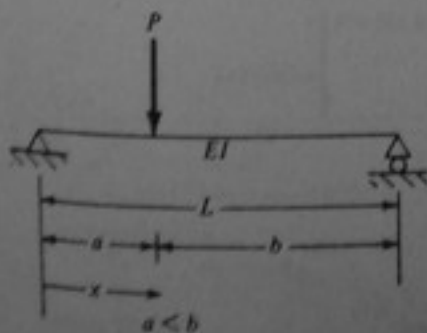


Figura P8-56

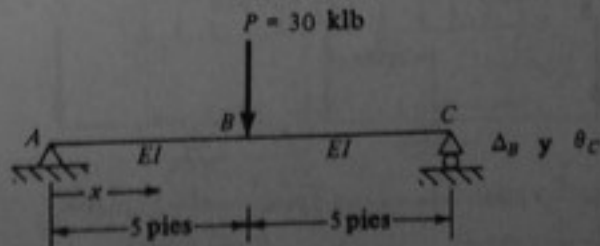


Figura P8-57

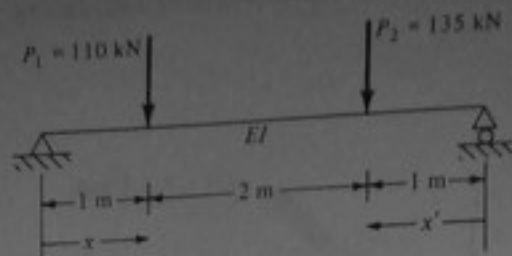


Figura P8-58

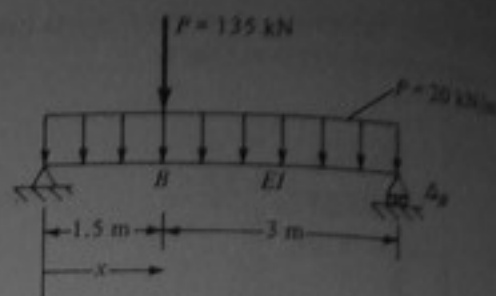


Figura P8-59

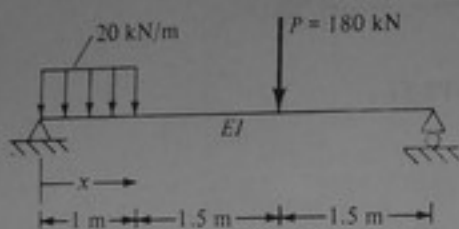


Figura P8-60

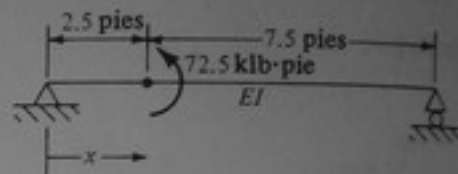


Figura P8-61

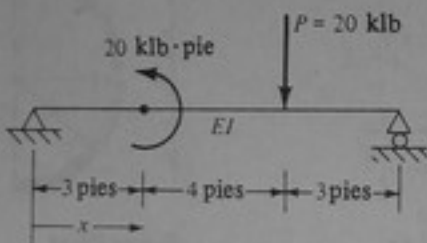


Figura P8-62

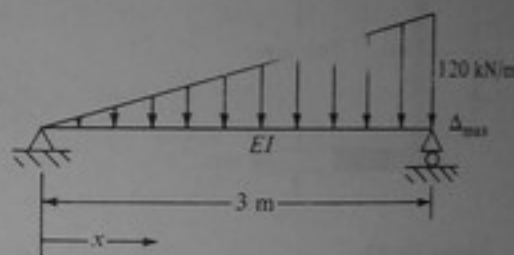


Figura P8-63

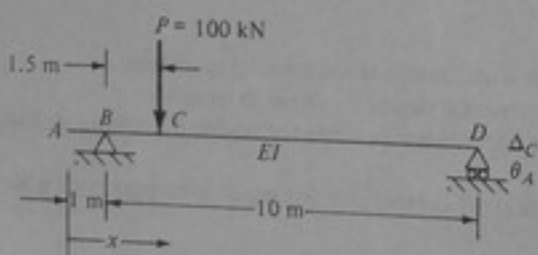


Figura P8-64

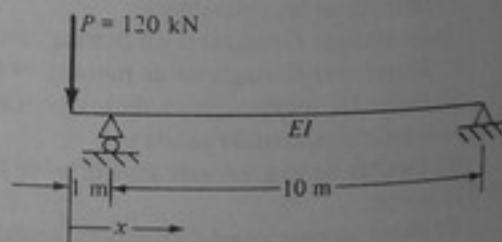


Figura P8-65

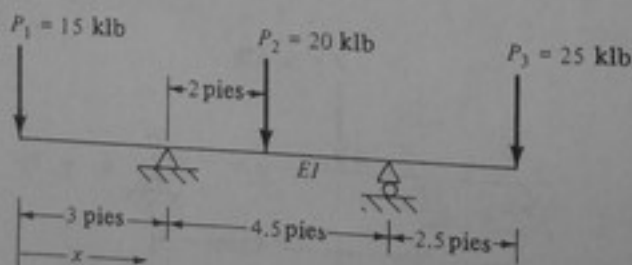


Figura P8-66

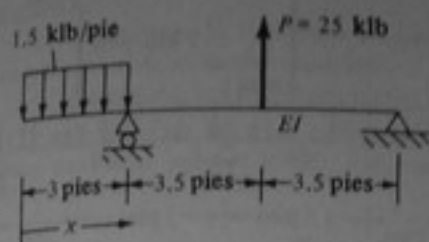


Figura P8-67

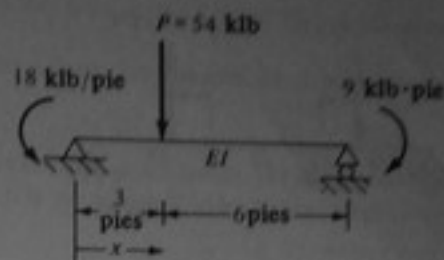


Figura P8-68

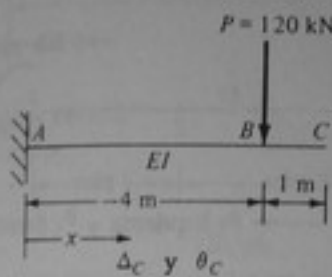


Figura P8-69

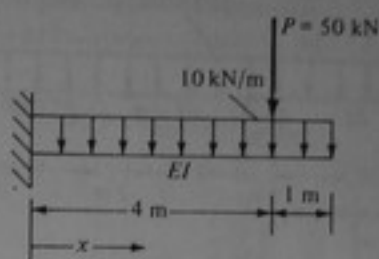


Figura P8-70

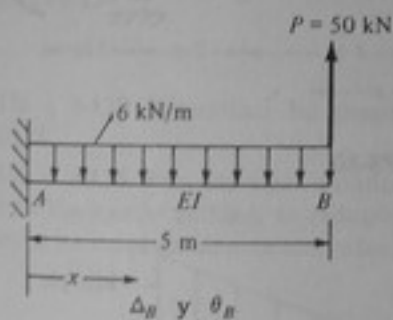


Figura P8-71

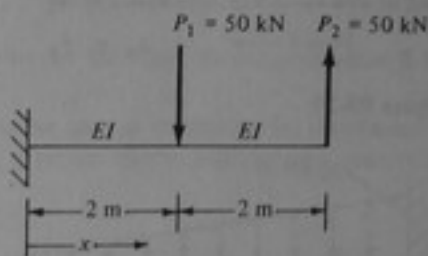


Figura P8-72

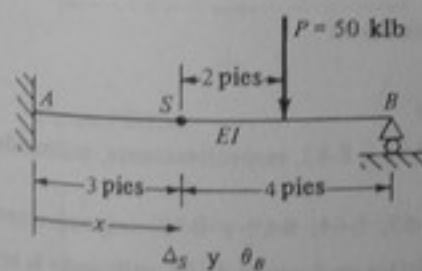


Figura P8-73

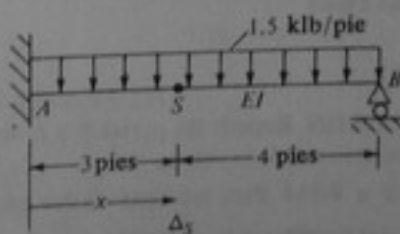


Figura P8-74

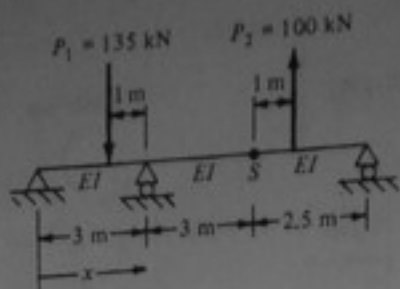


Figura P8-75

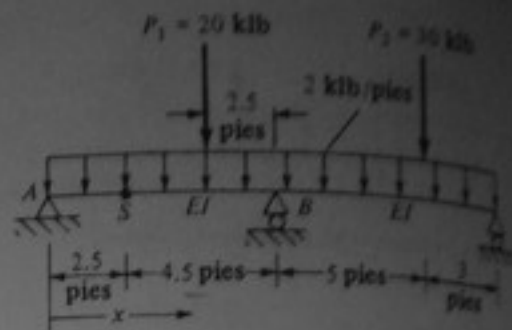


Figura P8-76

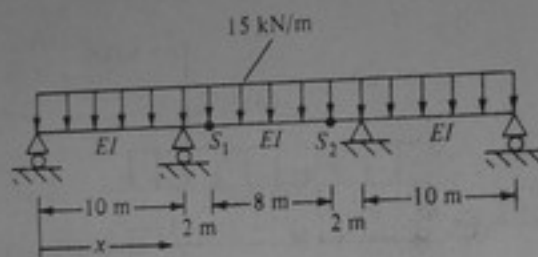


Figura P8-77

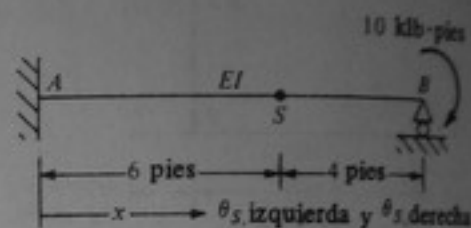


Figura P8-78

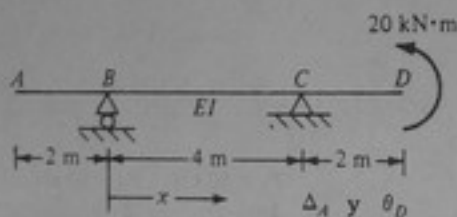


Figura P8-79

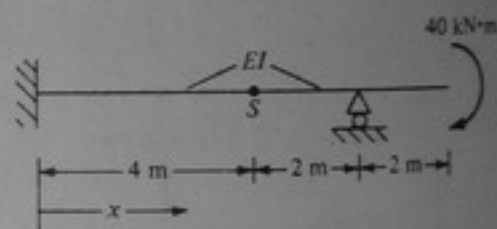


Figura P8-80

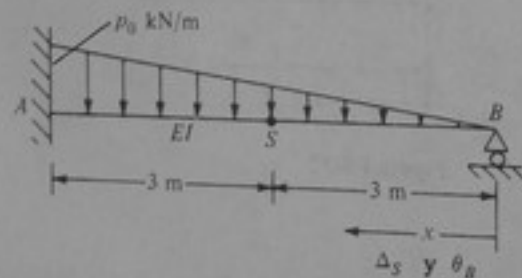


Figura P8-81

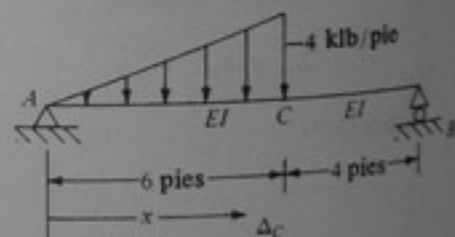


Figura P8-82

8-83 a 8-109 Repetir las partes b y c de los problemas 8-56 a 8-82, respectivamente, utilizando el procedimiento de la suma.

8-110 a 8-114 Para las vigas de los problemas 8-57, 8-59, 8-64, 8-69 y 8-73, respectivamente.

(a) Establecer la expresión analítica para la línea elástica en función de EI , utilizando la ecuación diferencial de segundo orden.

(b) Determinar los desplazamientos indicados.

8-115 a 8-121 Para las vigas de los problemas 8-63, 8-71, 8-74, 8-78, 8-79, 8-81 y 8-82, respectivamente.

(a) Determinar la expresión analítica para la línea elástica en función de EI , utilizando la ecuación diferencial de cuarto orden.

(b) Determinar los desplazamientos indicados.

8-122 a 8-125 Para las vigas estáticamente indeterminadas que se muestran, establecer las expresiones analíticas para el estado deformado, utilizando la ecuación diferencial de cuarto orden.

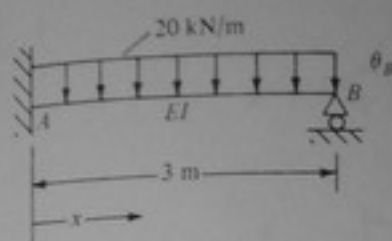


Figura P8-122

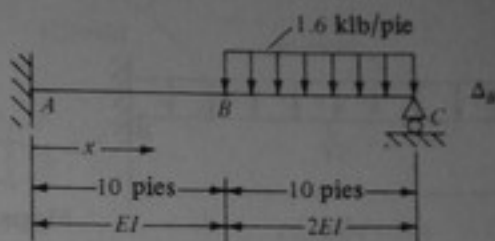


Figura P8-123

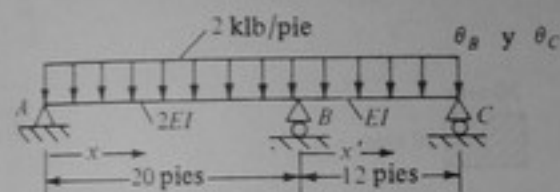


Figura P8-124

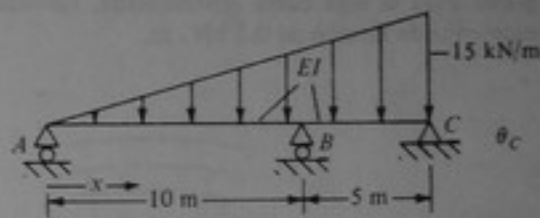


Figura P8-125

8-126 a 8-129 Determinar los desplazamientos indicados en las vigas de los problemas 8-122 a 8-125.

8-130 a 8-135 Para las vigas estáticamente indeterminadas que se muestran, (a) determinar el estado flexionado (utilizar la redundante que se desee, a menos que se indique otra cosa) y (b) calcular los desplazamientos indicados.

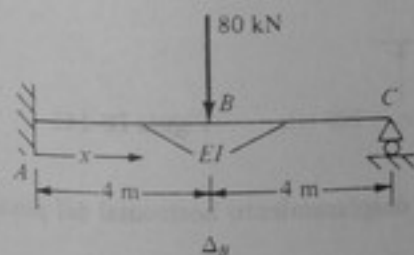


Figura P8-130

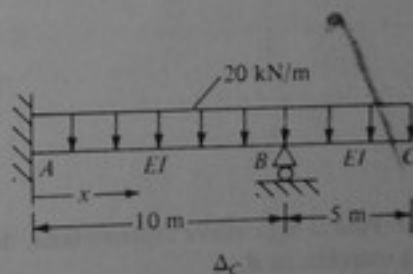


Figura P8-131

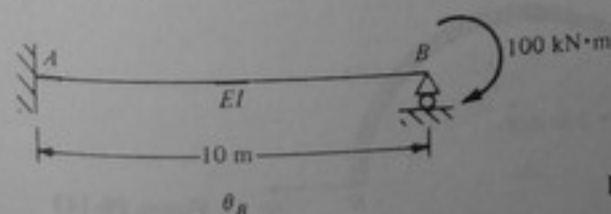


Figura P8-132

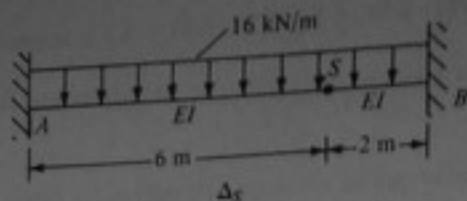


Figura P8-133

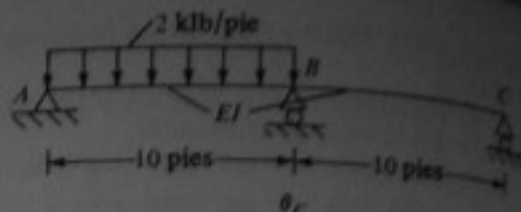


Figura P8-134

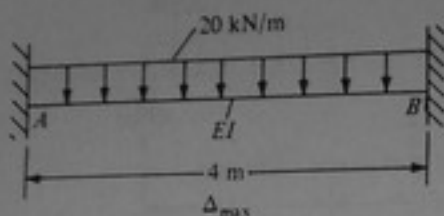


Figura P8-135

8-136 a 8-139 Hallar todas las reacciones en los problemas 8-122, 8-125, 8-130 y 8-132, utilizando el método de la energía.

8-140 Para la viga curva representada, calcular los esfuerzos en las fibras extremas debidos a un momento de flexión de $0.2 \text{ kN} \cdot \text{m}$.

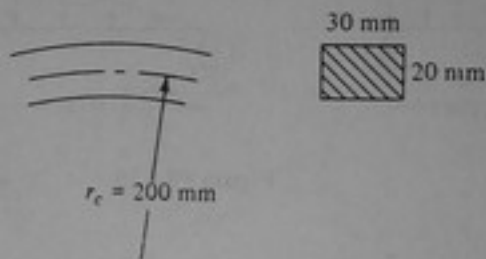


Figura P8-140

8-141 Repetir el problema 8-140 para una sección transversal circular de 25 mm de diámetro, con $r_c = 200 \text{ mm}$.

8-142 Repetir el problema 8-140 para una sección transversal de forma triangular equilátera.

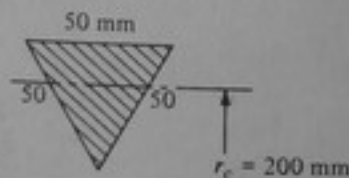


Figura P8-142

8-143 Para la viga curva representada, determinar (a) el desplazamiento horizontal del punto B y (b) la rotación en B.

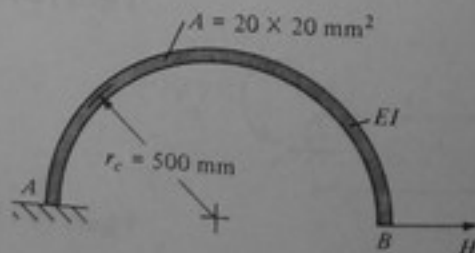


Figura P8-143

8-144 Determinar el desplazamiento vertical del empino del arco representado en la figura.

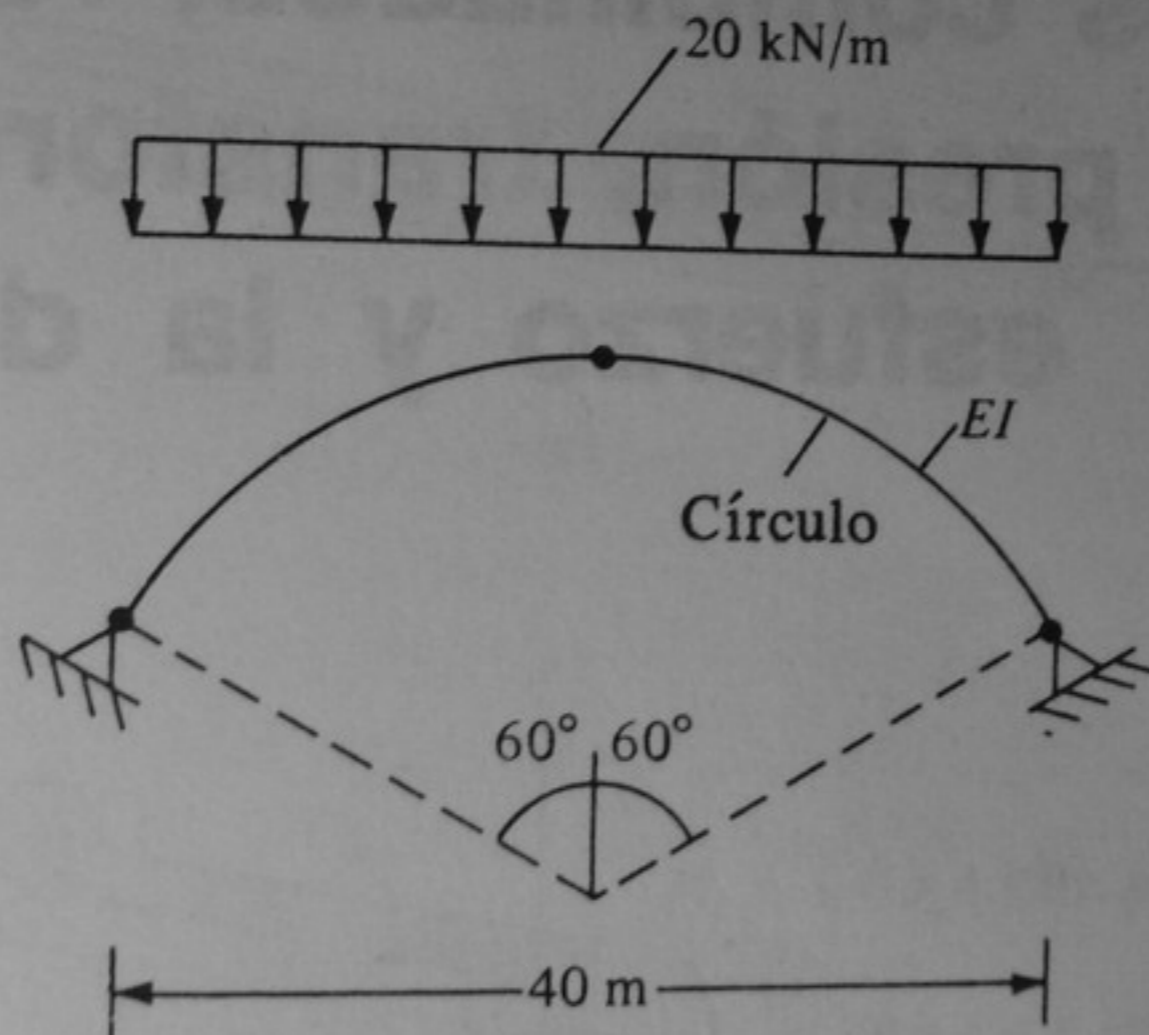


Figura P8-144

Esfuerzos combinados, recipientes a presión, transformación del esfuerzo y la deformación

9-1 INTRODUCCION

En este capítulo se tratan los esfuerzos combinados, los esfuerzos de membrana en recipientes de pared delgada sometidos a presión, la transformación del esfuerzo y la deformación en un punto, y los temas asociados con la transformación del esfuerzo y la deformación.

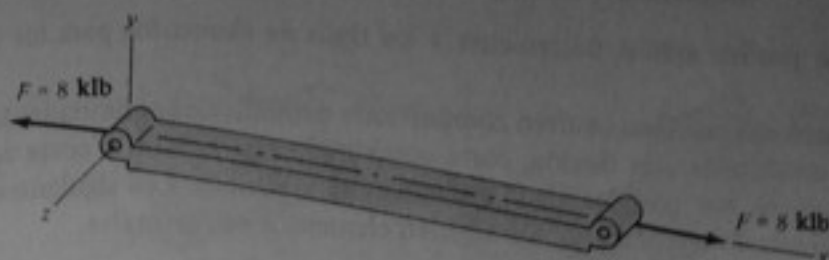
Esfuerzos combinados son aquellos que actúan en una sección de un elemento cuando existe una combinación de dos o más de las acciones internas descritas en el capítulo 2. Los esfuerzos combinados son importantes en muchos casos prácticos.

Esfuerzos de membrana en recipientes de pared delgada sometidos a presión son los esfuerzos que aparecen en las paredes de los recipientes cilíndricos, esféricos o de cualquier otra forma, debido a presiones internas o externas. Estos esfuerzos proporcionan ejemplos de un estado de esfuerzos más general que cualquiera de los que se consideraron anteriormente y se conocen como esfuerzos *biaxiales*. Además, los recipientes a presión son importantes por sí mismos, desde un punto de vista práctico.

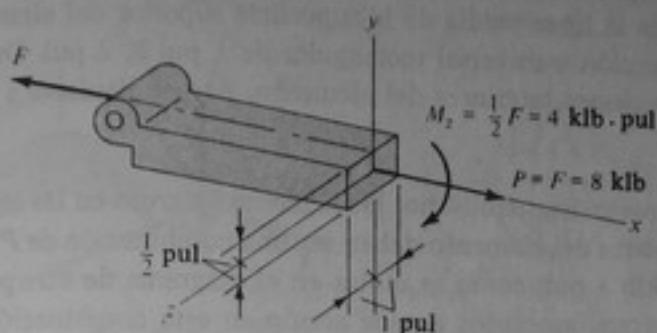
La *transformación del esfuerzo y la deformación* significa la variación, con la dirección de las componentes de esfuerzo y de deformación en un punto. El estudio de este tema se refiere principalmente a casos bidimensionales, pero también se dan algunos resultados importantes para estados de esfuerzo tridimensionales. Este tema es importante en la determinación de los esfuerzos máximos y las deformaciones máximas en un punto de un elemento y en la determinación de las combinaciones de esfuerzos que producen la falla de un elemento, como se verá en el capítulo 10.

9-2 ESFUERZOS COMBINADOS

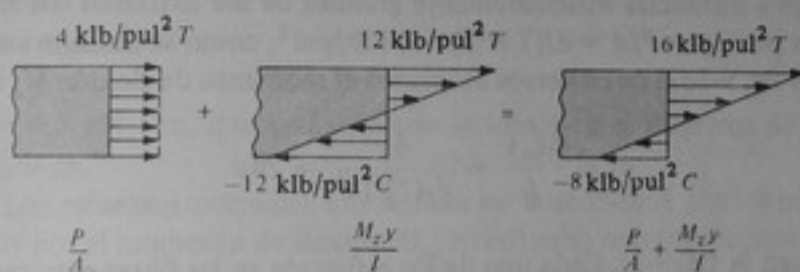
En una sección de un elemento puede actuar una combinación de dos o más de las seis acciones internas, P , V_y , V_z , T , M_y y M_z , que se describieron en el capítulo 2. Cuando se presenta este caso, generalmente los esfuerzos en la sección se pueden obtener sumando las distribuciones de esfuerzos asociadas con cada una de las acciones en la combinación. Para calcular los esfuerzos debidos a las acciones separadas se utilizan las fórmulas dadas en los capítulos anteriores para elementos cargados axialmente, elementos sometidos a torsión, y vigas. El esfuerzo normal y cortante, total o combinado,



(a)



(b)



(c)

Figura 9-1 Ejemplo 9-1.

en cada punto de la sección se halla mediante suma vectorial de los esfuerzos normal y cortante calculados separadamente para cada acción. Los esfuerzos normales separados siempre están en la misma dirección, con sentidos iguales u opuestos, y, por consiguiente, se suman como escalares, mientras que los esfuerzos cortantes separados pueden tener diferentes direcciones en el plano de la sección cortada y se suman vectorialmente.

Como se explica en los textos avanzados de análisis teórico de esfuerzos, † una limitación de este método es que los esfuerzos combinados en todos los puntos de una sección deben estar en la región elástica-lineal del material, de tal modo que se aplique el principio de superposición. Además, las fórmulas de esfuerzo para acciones

† Por ejemplo, véase Timoshenko y Goodier, *Theory of Elasticity*, 3a. ed., McGraw-Hill, Nueva York, 1969.

separadas se pueden aplicar únicamente a los tipos de elementos para los cuales son aplicables.

En situaciones prácticas ocurren comúnmente combinaciones limitadas tales como carga axial combinada con flexión, corte combinado con flexión y corte combinado con torsión, pero son posibles algunas otras combinaciones. Los siguientes ejemplos ilustran el cálculo de esfuerzos combinados en elementos estructurales.

Ejemplo 9-1 El elemento estructural que se muestra en la fig. 9-1a está cargado en las conexiones de los extremos de tal modo que las fuerzas colineales $F = 8$ klb actúan a lo largo de la línea media de la superficie superior del elemento. El elemento tiene una sección transversal rectangular de 1 pul \times 2 pul. Determinar los esfuerzos en las secciones interiores del elemento, perpendiculares a su eje longitudinal.

SOLUCION Para que exista equilibrio, las acciones internas en las secciones interiores y perpendiculares del elemento deben ser una combinación de $P = F = 8$ klb y $M_x = \frac{1}{2} F = 4$ klb \cdot pul, como se indica en el diagrama de cuerpo libre de la fig. 9-1b. Los esfuerzos asociados a cada acción en esta combinación se pueden calcular utilizando las fórmulas deducidas anteriormente. Los esfuerzos asociados con la fuerza axial P que actúa en el centroide son uniformes sobre las secciones transversales a distancias suficientemente grandes de los extremos del elemento y están dados por $\sigma_A = P/A = 8/(1 \times 2) = 4$ klb/pul², como se muestra en una vista lateral de la fig. 9-1c. Los esfuerzos asociados al momento de flexión M_x son como

$$\sigma_b = \frac{M_x y}{I} = \frac{4y}{\frac{1}{12}(2)(1)^3} = 24y$$

se muestra en la fig. 9-1c. Cada uno de los esfuerzos en las fibras extremas es igual a $24(\frac{1}{2}) = 12$ klb/pul².

Los esfuerzos combinados en la sección son iguales a la suma de los esfuerzos debidos a cada acción separada, como se indica en la fig. 9-1c, que muestra las vistas a lo largo del eje z . La superposición del esfuerzo axial uniforme y el esfuerzo de flexión que varía linealmente produce otra distribución del esfuerzo que varía linealmente, como se puede observar. Como cada uno de los esfuerzos separados es uniforme en la dirección z , y su combinación también lo es. El esfuerzo combinado máximo es un esfuerzo de tensión en las fibras superiores y vale $4 + 12 = 16$ klb/pul². Como el esfuerzo máximo de flexión es mayor que el esfuerzo axial, en las fibras inferiores actúa un esfuerzo de compresión de $4 - 12 = -8$ klb/pul².

Ejemplo 9-2 El elemento estructural acodado de sección circular que se muestra en la fig. 9-2 tiene un diámetro de 3 cm, está fijo en un extremo y libre en el otro, y está cargado con una fuerza $F_y = 5$ kN en el extremo libre. Hallar los esfuerzos máximos, normal y cortante, que actúan en la sección A perpendicular al eje x y en la localización indicada.

SOLUCION Para que haya equilibrio, las acciones internas en la sección A deben ser una combinación de $V_y = F_y = 5$ kN, $T = 0.12 F_y = 0.6$ kN \cdot m y $M_x = 0.10$

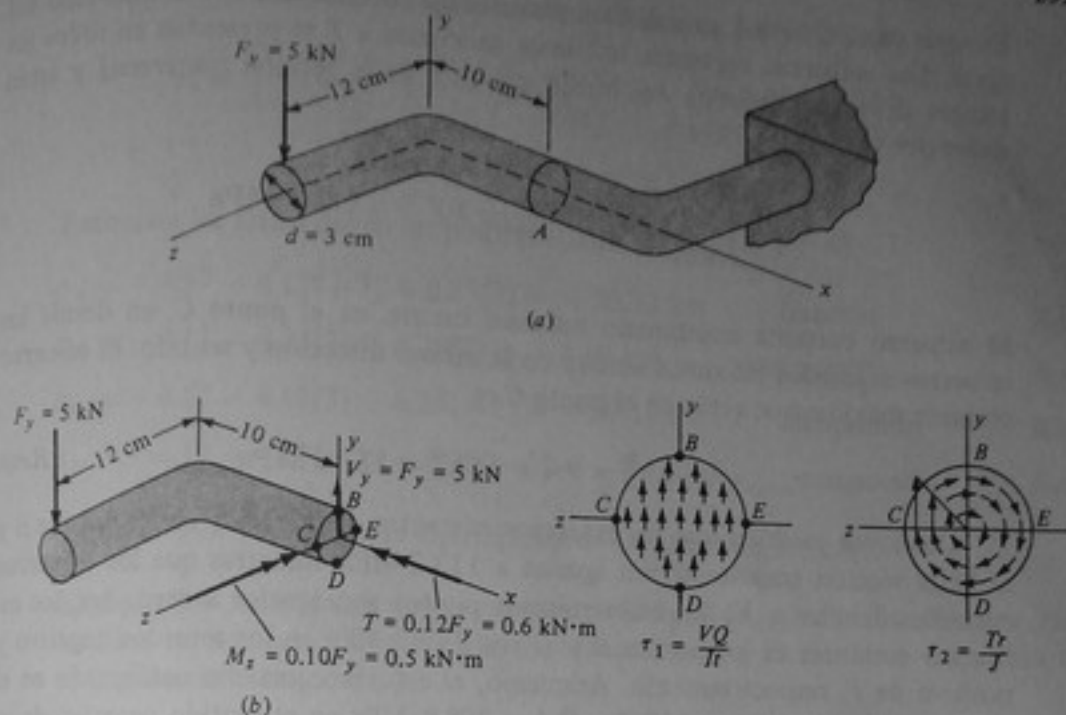


Figura 9-2 Ejemplo 9-2.

$F_y = 0.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$, que actúan como se indica en el diagrama de cuerpo libre de la fig. 9-2b.

Los esfuerzos normales que actúan en la sección A son los producidos únicamente por el momento de flexión M_z . El esfuerzo normal máximo es

$$\sigma_x = \left(\frac{M_z y}{I} \right)_{y = \pm d/2}$$

De este modo,

$$(\sigma_x)_{\max} = \frac{0.5(0.015)10^{-3}}{\pi(0.015)^4/4} = 188.6 \text{ MPa}$$

que actúa en tracción en el punto B y en compresión en el punto D de la sección transversal.

Los esfuerzos cortantes totales que actúan en la sección A son los producidos por las acciones separadas T y V_y . Los esfuerzos asociados con cada una de las acciones actúan como se indica en la fig. 9-2c, la cual muestra dos vistas de la sección transversal a lo largo del eje x . Los esfuerzos máximos asociados con V_y ocurren en todos los puntos a lo largo del eje z y están dados por

$$\tau_1 = \frac{V}{I} \left(\frac{Q}{t} \right)_{\max} = \frac{5(4 \times 0.015/3\pi)(\pi \times 0.015^2/2)10^{-3}}{[\pi(0.015)^4/4](0.03)} = 9.4 \text{ MPa}$$

En este caso, $Q = yA$ para el área semicircular localizada a uno u otro lado del eje z . Los esfuerzos cortantes máximos asociados a T se presentan en todos los puntos situados alrededor del borde exterior de la sección transversal y están dados por

$$\tau_2 = \left(\frac{T_c}{J} \right)_{c=d/2} = \frac{0.6(0.015)}{\pi(0.015)^4/2} 10^{-3} = 113.2 \text{ MPa}$$

El esfuerzo cortante combinado máximo ocurre en el punto C , en donde los esfuerzos separados máximos actúan en la misma dirección y sentido. El esfuerzo cortante máximo que actúa en el punto C es

$$\tau_{\max} = \tau_1 + \tau_2 = 9.4 + 113.2 = 122.6 \text{ MPa} \quad \text{Resp.}$$

Obsérvese también que los esfuerzos cortantes debidos a T en los puntos B y D de la sección transversal son iguales a 113.2 MPa, mientras que los esfuerzos cortantes debidos a V_y en estos mismos puntos son iguales a cero. Así, los esfuerzos cortantes en los puntos B y D son 113.2 MPa en los sentidos negativo y positivo de z , respectivamente. Asimismo, el esfuerzo cortante combinado en el punto E de la sección es $113.2 - 9.4 = 103.8$ MPa en el sentido negativo de y . El esfuerzo cortante combinado en cualquier otro punto de la sección transversal es una suma vectorial de los esfuerzos separados debidos a las acciones T y V_y .

Ejemplo 9-3 Determinar los esfuerzos normales combinados en los puntos A , B , C , y D de la sección de la base de la columna representada en la fig. 9-3a.

SOLUCIÓN En la figura 9-3b se indican las acciones internas en la sección. Los momentos de flexión dados no incluyen el efecto de la flexión de la columna en los brazos de momento de la fuerza F . Esto es aceptable siempre que la longitud l no sea muy grande comparada con la dimensión más pequeña de la sección transversal.

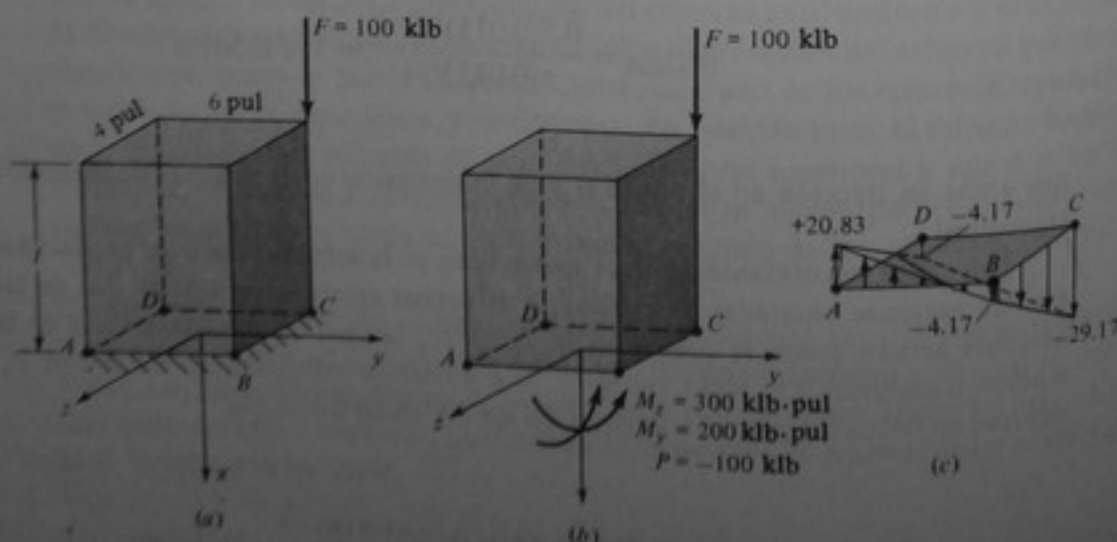


Figura 9-3 Ejemplo 9-3.

El esfuerzo normal combinado en cualquier punto y, z de la sección es

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{P}{A} - \frac{M_x y}{I_x} + \frac{M_y z}{I_y} = \frac{-100}{6(4)} - \frac{300y}{\frac{1}{12}(4)(6)^3} + \frac{200z}{\frac{1}{12}(6)(4)^3} \\ &= -4.17 - 4.17y + 6.25z\end{aligned}$$

Entonces, los esfuerzos en los puntos A, B, C y D son:

$$\sigma_A = -4.17 - 4.17(-3) + 6.25(2) = +20.83 \text{ ksi} \quad \text{tracción} \quad \text{Resp.}$$

$$\sigma_B = -4.17 - 4.17(3) + 6.25(2) = -4.17 \text{ ksi} \quad \text{compresión} \quad \text{Resp.}$$

$$\sigma_C = -4.17 - 4.17(3) + 6.25(-2) = -29.17 \text{ ksi} \quad \text{compresión} \quad \text{Resp.}$$

$$\sigma_D = -4.17 - 4.17(-3) + 6.25(-2) = -4.17 \text{ ksi} \quad \text{compresión} \quad \text{Resp.}$$

La figura 9-3c representa la distribución de esfuerzos en la base.

Ejemplo 9-4 Para la viga que se muestra en la fig. 9-4a, calcular los esfuerzos combinados en una sección perpendicular exactamente a la izquierda del punto de aplicación de la carga, C_L .

SOLUCION Las acciones internas en la sección son $P = -15 \text{ klb}$, $M_x = 720 \text{ klb} \cdot \text{pul}$ y $V_y = -10 \text{ klb}$. Con base en la tabla A-4, para una viga $W10 \times 39$, $I_x = 210 \text{ pul}^4$ y $A = 11.5 \text{ pul}^2$. Entonces, el esfuerzo normal combinado en la sección es

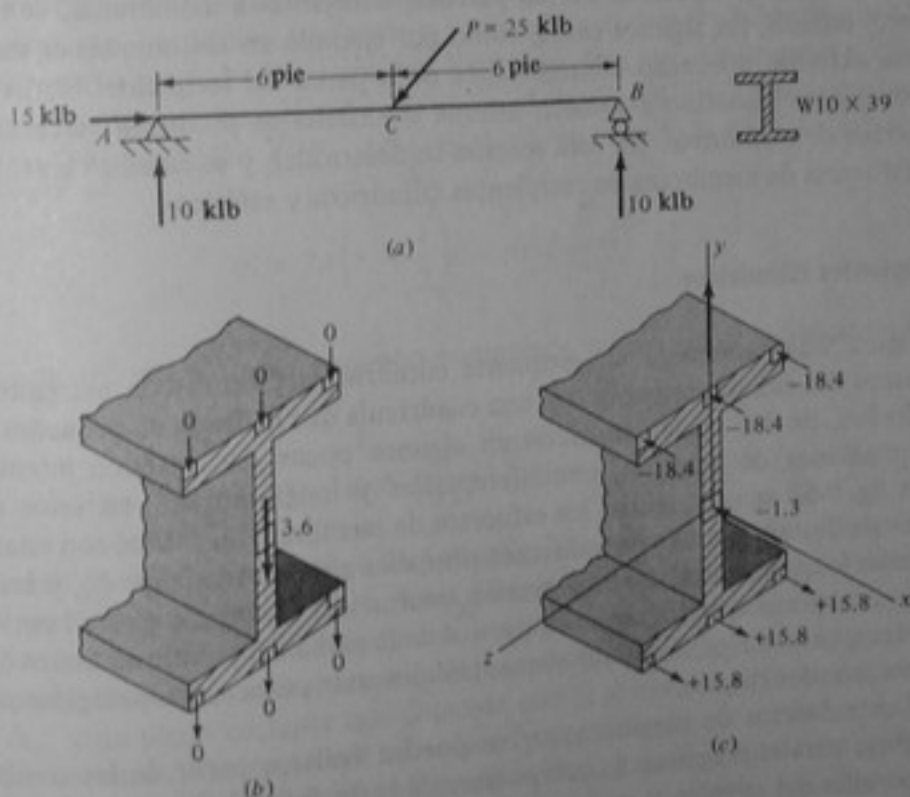


Figura 9-4 Ejemplo 9-4.

$$\sigma = \frac{P}{A} - \frac{M_z y}{I_z} = -\frac{15}{11.5} - \frac{720y}{210} = -1.30 - 3.43y \text{ klb/pul}^2 \text{ y en pulgadas}$$

Los esfuerzos cortantes en la sección son solamente los producidos por V_y . Estos se distribuyen como se explica en el capítulo 8. El valor máximo del esfuerzo cortante en el eje neutro es

$$\frac{V_y}{d_w t_w} = \frac{10}{[9.92 - 2(0.53)](0.315)} = 3.6 \text{ klb/pul}^2$$

En las figuras 9-4b y c se muestran los esfuerzos cortantes y los esfuerzos normales combinados en las fibras extremas y en el eje neutro.

9-3 ESFUERZOS DE MEMBRANA EN RECIPIENTES DE PARED DELGADA SOMETIDOS A PRESIÓN

Las calderas de vapor, los tanques de almacenamiento de líquidos o gases a presión, los tanques de agua, los tanques de almacenamiento de granos y las tuberías, son algunos ejemplos de recipientes de pared delgada sometidos a presión. Aunque hay recipientes a presión en una amplia variedad de formas, aquí únicamente se consideran los recipientes cilíndricos y esféricos en los que el espesor de la pared es pequeño comparado con el radio.

El contenido de un recipiente a presión ejerce una presión que produce pequeñas deformaciones de estiramiento en las paredes del recipiente, parecidas a las mayores deformaciones que ocurren en las paredes, semejantes a membranas, de un globo de juguete inflado. En algunos casos, como por ejemplo en los tanques de vacío, las presiones externas producen contracciones de la pared del recipiente. En las paredes de un recipiente sometido a presión interna o externa se producen esfuerzos llamados *esfuerzos de membrana*. En esta sección se desarrollan y se estudian las fórmulas para los esfuerzos de membrana en recipientes cilíndricos y esféricos.

Recipientes cilíndricos

La figura 9-5a representa un recipiente cilíndrico a presión con extremos cerrados. La pared del cilindro se cubre con una cuadrícula que la divide en pequeños elementos cuadrados, de los cuales se muestran algunos pocos. Una presión interna produce deformaciones de tracción, circunferenciales y longitudinales, en estos elementos. En la fig. 9-5b se representan los esfuerzos de membrana asociados con estas deformaciones de los elementos: los esfuerzos normales circunferenciales, σ_h , y los esfuerzos normales longitudinales, σ_l . Si la presión interna y el espesor de la pared son uniformes, se puede suponer que todos los elementos de la pared del recipiente tienen los mismos esfuerzos, con excepción de los elementos que están cerca a, y restringidos por, los extremos cerrados (tapas).

Los esfuerzos de membrana σ_l se pueden hallar a partir de las condiciones de equilibrio para el diagrama de cuerpo libre de la fig. 9-5c. Este cuerpo libre consiste en una porción del cilindro y su contenido a un lado de un plano cortante perpendicular

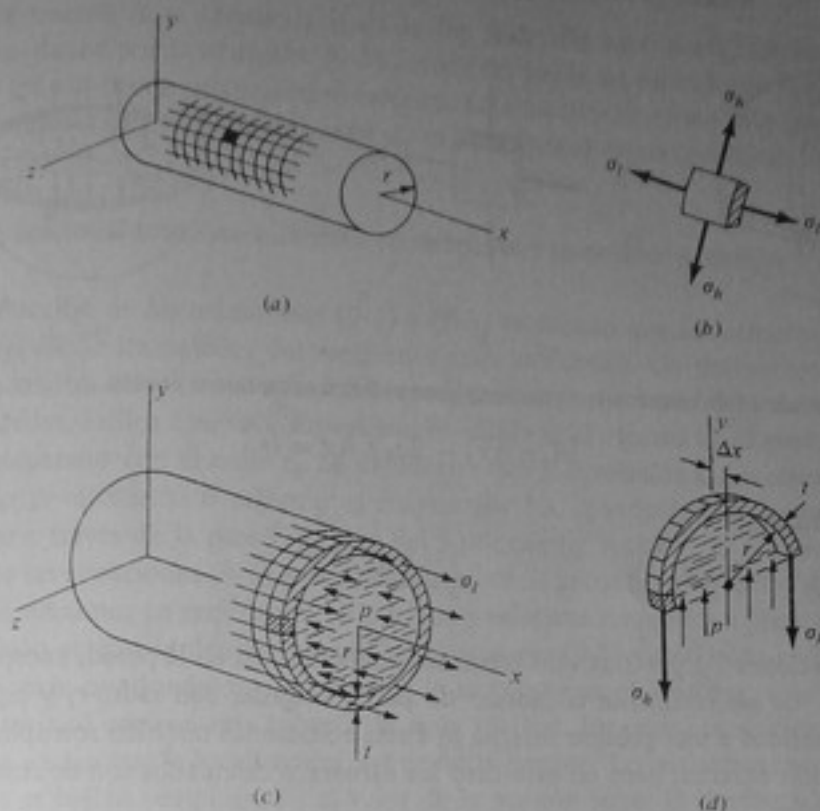


Figura 9-5 Esfuerzos de membrana en un recipiente cilíndrico sometido a presión.

al eje x . Los esfuerzos σ_l indicados se suponen uniformes a través del espesor t de la pared del recipiente. La presión uniforme p actúa sobre el área de la sección que está en contacto con el contenido del recipiente. Esta es un área circular de radio r_i igual al radio interno del cilindro. Suponiendo que $t \ll r_i$ al calcular el área sobre la cual actúa σ_l y escribiendo la condición $\sum F_x = 0$ para el cuerpo libre de la fig. 9-5c, se obtiene

$$\sigma_l \times 2\pi \left(r_i + \frac{t}{2} \right) t - p\pi r_i^2 = 0$$

Si se desprecia $t/2$ por ser muy pequeño comparado con r_i , la ecuación anterior se reduce a

$$\sigma_l = \frac{pr_i}{2t} \quad (9-1)$$

El esfuerzo de membrana σ_h se puede hallar a partir de las condiciones de equilibrio para el cuerpo libre de la fig. 9-5d. Este cuerpo libre consiste en un anillo semicilíndrico, formado por elementos de pared del cilindro, y una porción de contenido del recipiente; está aislado por dos planos cortantes paralelos, perpendiculares al eje x y separados una distancia Δx , y un plano cortante que coincide con el plano $x-y$. En este diagrama de cuerpo libre únicamente se muestran los esfuerzos y presiones que actúan en la dirección y . Si los esfuerzos σ_h son uniformes a través de la pared, la condición $\sum F_y = 0$ para este cuerpo libre da

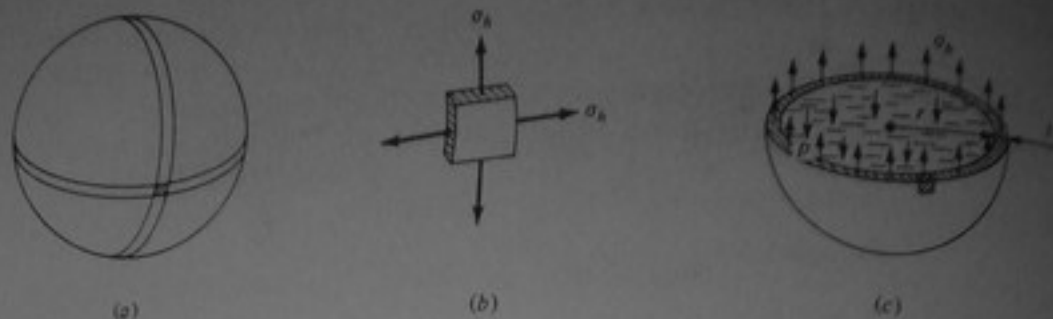


Figura 9-6 Esfuerzos de membrana en un recipiente esférico sometido a presión.

$$p(2r_i \Delta x) - 2\sigma_h t \Delta x = 0$$

la cual se reduce a

$$\sigma_h = \frac{pr_i}{t} \quad (9-2)$$

Las ecuaciones 9-1 y 9-2 dan los esfuerzos de membrana en la pared, excepto cerca de las tapas, de un recipiente cilíndrico de pared delgada, con radio r_i y espesor de pared t , sometidos a una presión interna p . Estas ecuaciones también son aplicables al caso de presión externa, pero en este caso los esfuerzos calculados son de compresión y no de tracción.

Recipientes esféricos

La figura 9-6a muestra un recipiente esférico de pared delgada sometido a presión. En la fig. 9-6b se representa un elemento de la pared de este recipiente, formado por dos pares de planos cortantes diametrales, mutuamente perpendiculares, como se indica en la fig. 9-6a. Los esfuerzos σ_h , que se muestran en la fig. 9-6b, representan los esfuerzos de membrana en el recipiente esférico. Como se explicó anteriormente, en todas las direcciones de un recipiente esférico actúan esfuerzos de membrana iguales.

Los esfuerzos σ_h se pueden calcular a partir de un diagrama de cuerpo libre, como el de la fig. 9-6c, el cual consiste en una porción hemisférica del recipiente y su contenido. Los esfuerzos σ_h se suponen uniformes sobre el espesor t de la pared del recipiente. La condición $\sum F_n = 0$, en donde n es la dirección normal al plano cortante, da

$$\sigma_h \times 2\pi \left(r_i + \frac{t}{2} \right) - p\pi r_i^2 = 0$$

Para el cálculo del área sobre la cual actúa σ_h , se supone nuevamente que $t \ll r_i$. Se desprecia $t/2$ al compararlo con r_i y la ecuación anterior se reduce a

$$\sigma_h = \frac{pr_i}{2t} \quad (9-3)$$

Esta misma ecuación se puede obtener para los esfuerzos en *cualquier* plano cortante diametral que atravesase un recipiente esférico, ya que todos estos planos producen dia-

gramas de cuerpo libre idénticos al de la fig. 9-6c. De este modo, los esfuerzos de membrana dados por la ecuación (9-3) actúan en todas las direcciones tangenciales y en todos los puntos de un recipiente esférico. La ecuación (9-3) también es aplicable al caso de presión externa, pero entonces σ_h es un esfuerzo de compresión.

Discusión adicional sobre los esfuerzos en recipientes sometidos a presión

En la deducción de las ecuaciones (9-1) a (9-3) se supuso que los esfuerzos de membrana a través de las paredes del recipiente eran uniformes. Un análisis más riguroso, que se encuentra en textos avanzados y que considera la variación del esfuerzo a través de las paredes, indica que esta suposición es válida si el espesor de la pared, t , es pequeño comparado con el radio r_i . Se demuestra que si la relación radio-espesor, r_i/t , de un recipiente cilíndrico o esférico es mayor que 10, la variación de los esfuerzos de membrana a través de la pared no pasa del 5 por ciento. Además, se demuestra que en tales casos las ecuaciones (9-1) a (9-3) dan una buena aproximación de los esfuerzos de membrana máximos en recipientes cilíndricos y esféricos sometidos a presión.

También se puede demostrar que las ecuaciones (9-1) a (9-3) son aplicables si la presión p varía continuamente, siempre que se mantenga el equilibrio total. Por ejemplo, éste sería el caso en una tubería de agua vertical. En estos casos, los esfuerzos de membrana varían con la localización, así como la presión. Los esfuerzos en un elemento cualquiera se hallan remplazando el valor de la presión sobre el elemento de las ecuaciones (9-1), (9-2) o (9-3), en la forma adecuada. Además, las ecuaciones (9-1) a (9-3) son aplicables a recipientes hechos de cualquier material homogéneo, siempre que las deformaciones del material sean pequeñas.

Aparte de los esfuerzos de membrana, existen esfuerzos normales, perpendiculares a las paredes del recipiente tanto en los recipientes cilíndricos como en los esféricos. Estos esfuerzos tienen un valor máximo igual a la presión p , bien sea en la superficie interior o en la exterior, dependiendo de que la presión sea interna o externa. Estos esfuerzos normales máximos no valen más de una quinta parte de los esfuerzos de membrana más bajos si $r_i/t < 10$, como lo demuestran las ecuaciones (9-1) a (9-3).

Los recipientes cilíndricos y esféricos de pared delgada sometidos a presión, proporcionan ejemplos en los que existen esfuerzos significativos en dos planos cortantes mutuamente perpendiculares que pasan por un punto. Estos estados de esfuerzos se denominan *esfuerzos biaxiales*.

En las paredes de los recipientes a presión también pueden aparecer otros esfuerzos, además de los esfuerzos de membrana. Se pueden producir esfuerzos debidos a las cargas concentradas o a las reacciones localizadas en los puntos de apoyo del recipiente. También pueden surgir esfuerzos adicionales en las paredes de los recipientes, cerca de la entrada o salida de tubos o boquillas. Se pueden producir esfuerzos adicionales cerca a las tapas que cierran los extremos de un cilindro o en el contorno de un recipiente esférico que consiste sólo en una porción de una esfera completa. La determinación de estos esfuerzos adicionales en recipientes sometidos a presión sobrepasa el alcance de este libro.

No obstante, en algunos casos se producen esfuerzos adicionales que se pueden hallar utilizando fórmulas ya establecidas en este texto. Por ejemplo, en el caso de recipientes cilíndricos, largos y esbeltos, sometidos a presión, se pueden presentar esfuerzos

normales adicionales debidos a carga axial o a flexión y esfuerzos cortantes debidos a corte transversal o a torsión.

En localizaciones lejanas de cargas concentradas o reacciones de apoyos, se pueden utilizar las fórmulas establecidas anteriormente para elementos cargados axialmente, vigas y elementos sometidos a torsión con el fin de calcular estos esfuerzos adicionales. Estos esfuerzos se pueden combinar con los esfuerzos de membrana debidos a la presión, para hallar los esfuerzos totales en la pared del recipiente. Los siguientes ejemplos ilustran el cálculo de esfuerzos en recipientes a presión.

Ejemplo 9-5 Un recipiente esférico de acero que contiene aire comprimido tiene un espesor de pared, $t = \frac{1}{8}$ pul y un diámetro $d = 48$ pul. Hallar los esfuerzos de membrana en el recipiente debidos a una presión interna $p = 100$ lb/pul².

SOLUCION No es necesario hacer distinción entre los radios interior y exterior, puesto que difieren en una cantidad despreciable. Utilizando la ecuación (9-3) se hallan los esfuerzos

$$\sigma_h = \frac{pr_i}{2t} = \frac{100(24)}{2(\frac{1}{8})} = 9,600 \text{ lb/pul}^2 \quad \text{Resp.}$$

Ejemplo 9-6 Un recipiente cilíndrico a presión de 20 pies de longitud y 4 pies de diámetro, con un espesor de pared, $t = \frac{1}{8}$ pul, está simplemente apoyado en los dos extremos, como se muestra en la fig. 9-7a. El recipiente y su contenido pesan 900 lb por pie de longitud y el contenido ejerce una presión interna uniforme de 300 lb/pul² sobre el recipiente. Determinar los esfuerzos biaxiales en los elementos A y B de la pared del recipiente, localizados como se indica en la fig. 9-7a.

SOLUCION Las acciones internas en la sección 1-1 debidas al peso del recipiente y su contenido se hallan con base en las condiciones de equilibrio del diagrama de cuerpo libre de la fig. 9-7b. Estas acciones son $V_y = 3600$ lb y $M_z = 37,800$ pie · lb. Utilizando las ecuaciones de la teoría elemental de vigas, se establece que el esfuerzo normal en el punto A es cero y el esfuerzo cortante en el punto A es

$$\tau_{xy} = \frac{V_y Q}{It} = \frac{3600(\pi r t)(2r/\pi)}{\pi r^3 t(2t)} = 382 \text{ lb/pul}^2$$

Asimismo, el esfuerzo normal en el punto B es

$$\sigma_x = \frac{M_z y}{I_z} = \frac{(37,800)(12)(r)}{\pi r^3 t} = 2000 \text{ lb/pul}^2$$

y el esfuerzo cortante es cero.

Los esfuerzos de membrana

$$\sigma_h = \frac{pr_i}{t} = \frac{30(24)}{\frac{1}{8}} = 5760 \text{ lb/pul}^2 \quad \text{y} \quad \sigma_l = \frac{pr_i}{2t} = 2880 \text{ lb/pul}^2$$

actúan en los puntos A y B , debido a la presión interna. Los esfuerzos biaxiales en los elementos A y B se obtienen combinando los esfuerzos asociados a V_y y M_z con los esfuerzos de membrana. Los resultados se muestran en la fig. 9-7c para cada elemento.

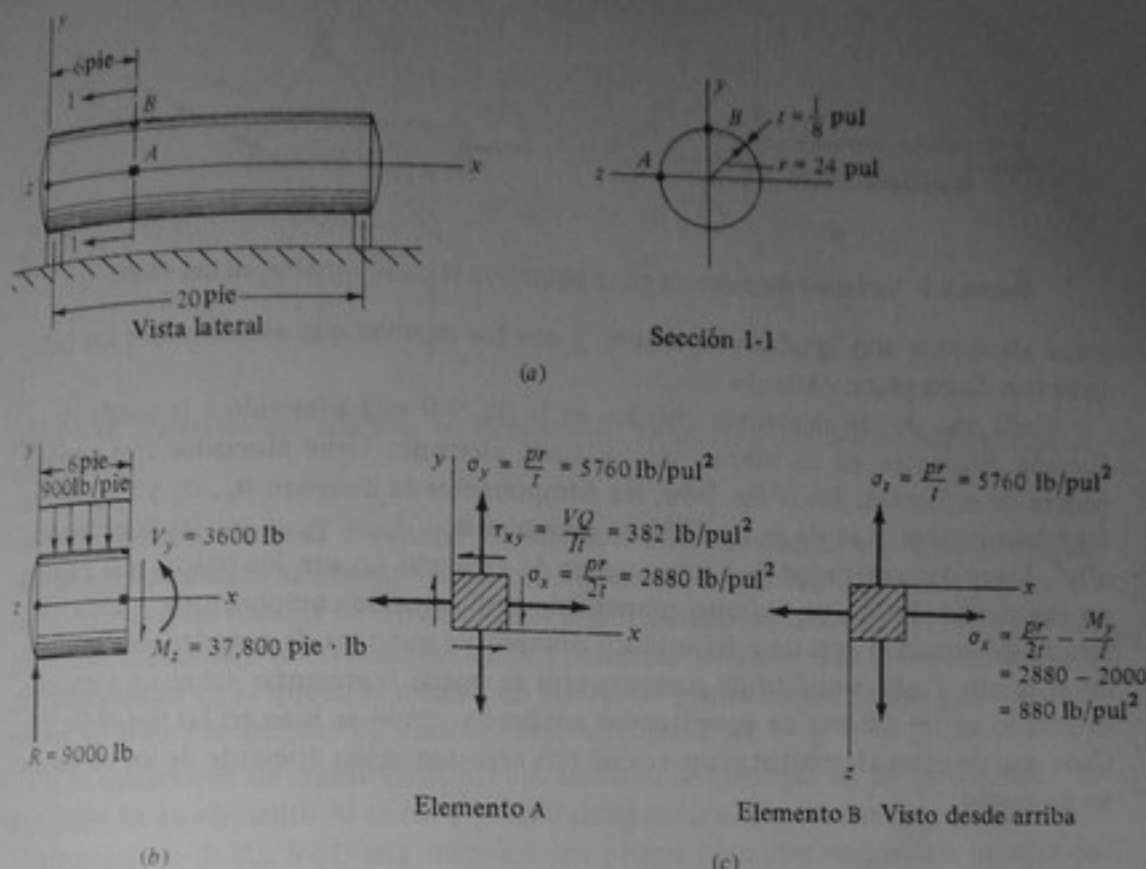


Figura 9-7 Ejemplo 9-6.

9-4 TRANSFORMACION DEL ESFUERZO EN UN PUNTO

Las fórmulas para esfuerzos establecidas hasta aquí a lo largo del texto dan los esfuerzos únicamente en ciertos planos cortantes que pasan por los puntos de un cuerpo. Por ejemplo, la fórmula $\sigma = P/A$ para varillas cargadas axialmente da el esfuerzo normal en una varilla únicamente en planos cortantes perpendiculares al eje longitudinal de la varilla, como se muestra en la fig. 9-8a. Los esfuerzos en planos cortantes orientados de distinta manera (fig. 9-8b) son diferentes.

En el caso general, lo mismo que en este ejemplo, los esfuerzos en un punto de un cuerpo son diferentes en planos cortantes diferentes. En algunos planos cortantes pueden actuar esfuerzos significativamente mayores que en otros. El siguiente estudio se refiere a esta variación del esfuerzo en un punto y trata principalmente el caso del esfuerzo biaxial, en dos dimensiones. En primer lugar se consideran diferentes representaciones de los esfuerzos en el mismo punto de un cuerpo bidimensional.

Las figuras 9-9a y b muestran dos elementos diferentes de tamaño infinitesimal, correspondientes al mismo punto del cuerpo cargado. La fig. 9-9a representa un elemento aislado por dos pares de planos cortantes infinitamente cercanos y mutuamente perpendiculares que son normales a los ejes de las coordenadas x - y . La fig. 9-9b muestra un elemento aislado de manera semejante por planos cortantes normales a los ejes orientados de manera diferente, x' - y' . Los esfuerzos en las caras opuestas de cada uno de

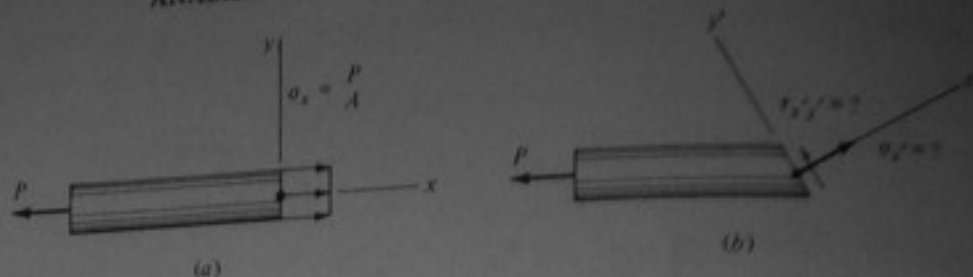


Figura 9-8 Variación del esfuerzo en un punto con el plano cortante, en una varilla.

estos elementos son iguales y opuestos, y son los mismos que actúan sobre los lados opuestos de un plano cortante único.

Cada uno de los elementos aislados en la fig. 9-9 está sometido a la acción de esfuerzos diferentes en el mismo punto. Cada elemento tiene asociados tres componentes de esfuerzos. En la fig. 9-9a, las componentes se designan σ_x , σ_y y τ_{xy} en las coordenadas $x-y$. Las de la fig. 9-9b se designan $\sigma_{x'}$, $\sigma_{y'}$ y $\tau_{x'y'}$ en las coordenadas $x'-y'$. Estos dos conjuntos de componentes de esfuerzo no son los únicos que existen en ese punto. Existe un infinito número de conjuntos de componentes, y cada conjunto está asociado con uno del infinito número de sistemas de coordenadas posibles en el punto. Cada conjunto de componentes se puede representar sobre un elemento orientado en un sistema de coordenadas adecuado, como se hizo en las figs. 9-9a y b. Cada uno de estos elementos proporciona una representación diferente de los esfuerzos en un punto.

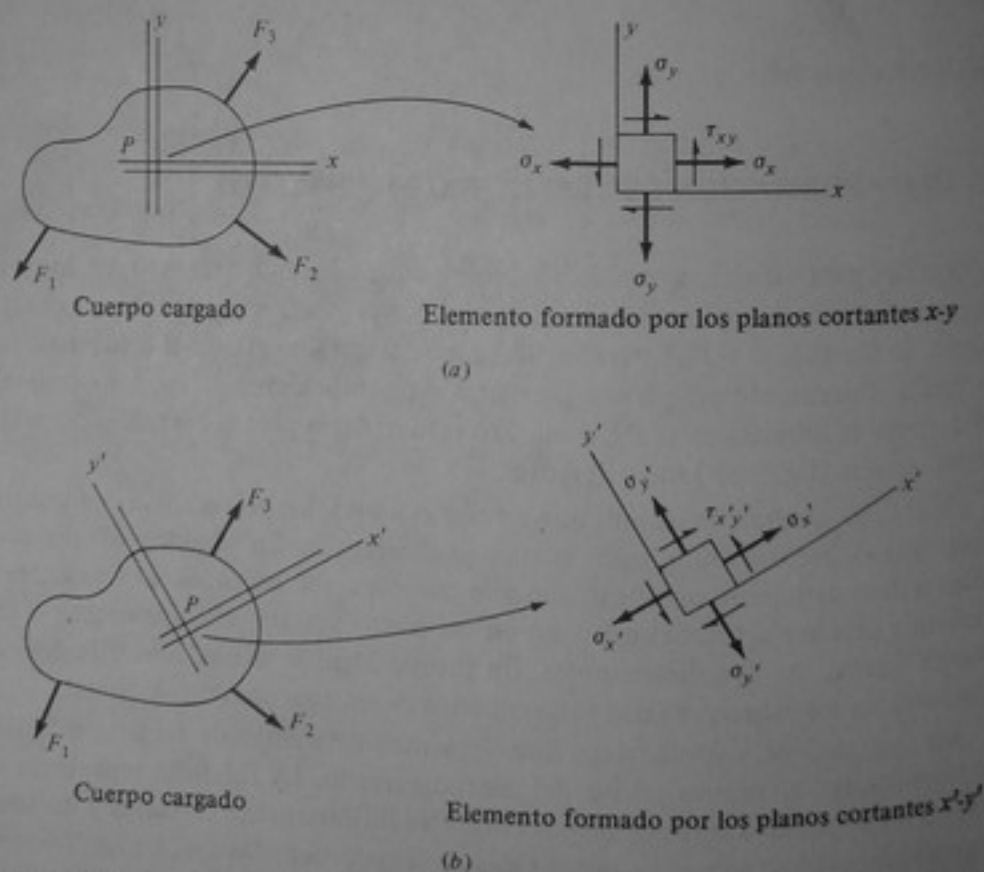


Figura 9-9 (a) Componentes de esfuerzo en un punto respecto al sistema de coordenadas $x-y$. (b) Componentes de esfuerzo en el mismo punto respecto al sistema de coordenadas $x'-y'$.

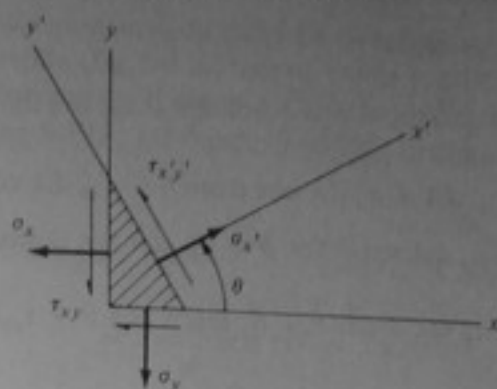


Figura 9-10 Elementos que relaciona las componentes de esfuerzo x - y con las componentes de esfuerzo x' - y' .

El infinito número de conjuntos de componentes de esfuerzo que se describió, no son independientes. Las componentes en un sistema arbitrario de coordenadas x' - y' están relacionadas con las de un sistema de coordenadas x - y , como se explica más adelante. Las ecuaciones que relacionan las componentes de esfuerzo en diferentes sistemas de coordenadas o, lo que es lo mismo, en diferentes planos cortantes que pasan por un punto, se llaman *ecuaciones de transformación del esfuerzo*.

Las ecuaciones de transformación del esfuerzo se obtienen de las condiciones de equilibrio de un elemento de tamaño infinitesimal como el que se muestra en la fig. 9-10. El elemento de la fig. 9-10 está formado por planos cortantes normales a los ejes de referencia x - y y por un tercer plano cortante normal a un eje inclinado x' que forma un ángulo arbitrario θ con el eje x . Los esfuerzos en la cara inclinada son las dos componentes $\sigma_{x'}$ y $\tau_{x'y'}$, asociados a las coordenadas x' - y' . Se consideran cantidades positivas si tienen los sentidos indicados y negativas si tienen los sentidos opuestos.

Si un elemento como el de la fig. 9-10 se aísla de un cuerpo que está en equilibrio, el elemento también debe estar en equilibrio. Las condiciones $\sum F_{x'} = 0$ y $\sum F_{y'} = 0$ para el elemento de la fig. 9-10 producen las expresiones para los esfuerzos $\sigma_{x'}$ y $\tau_{x'y'}$, que se dan más adelante. A partir de estas ecuaciones de equilibrio se obtienen las fuerzas en el elemento efectuando los productos de cada esfuerzo por el área de la cara sobre la cual actúa. Se supone que el elemento de la fig. 9-10 tiene un espesor unitario normal al plano x - y y el área de la cara inclinada se designa por dA . Entonces, la cara opuesta y la cara adyacente al ángulo θ tienen áreas $dA \sin \theta$ y $dA \cos \theta$, respectivamente. También se hace uso de las identidades trigonométricas

$$\sum F_{x'} = 0: \quad 0 = \sigma_{x'} dA - \sigma_x dA \cos \theta \cos \theta - \tau_{xy} dA \cos \theta \sin \theta \\ - \sigma_y dA \sin \theta \sin \theta - \tau_{xy} dA \sin \theta \cos \theta$$

$$\sigma_{x'} = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta$$

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x(1 + \cos 2\theta)}{2} + \frac{\sigma_y(1 - \cos 2\theta)}{2} + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

o, finalmente,

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (9-4)$$

$$\sum F_{y'} = 0: \quad 0 = \tau_{x'y'} dA + \sigma_x dA \cos \theta \sin \theta - \tau_{xy} dA \cos \theta \cos \theta - \sigma_y dA \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} dA \sin \theta \sin \theta$$

$$\tau_{x'y'} = -\sigma_x \sin \theta \cos \theta + \sigma_y \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

o, finalmente,

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \quad (9-5)$$

Las ecuaciones (9-4) y (9-5) son las ecuaciones de transformación del esfuerzo para el caso bidimensional y dan los valores de $\sigma_{x'}$ y $\tau_{x'y'}$ para cualquier ángulo θ en función de σ_x , σ_y y τ_{xy} . La componente de esfuerzo, $\sigma_{y'}$, está dada por la ecuación (9-4), aumentando el ángulo θ en 90° . Estas ecuaciones dan los esfuerzos en uno cualquiera del infinito número de planos cortantes que pueden pasar por un punto de un cuerpo, en función de un conjunto arbitrario de componentes de esfuerzo x - y . Así, uno solo del infinito número de conjuntos de componentes de esfuerzo en un punto, utilizado como conjunto de referencia junto con las ecuaciones de transformación de esfuerzo, es suficiente para describir completamente los esfuerzos en un punto.

Se puede demostrar que las ecuaciones (9-4) y (9-5) también son aplicables si el elemento de la fig. 9-10 tiene una aceleración. De este modo, las ecuaciones (9-4) y (9-5) son aplicables bajo las condiciones estáticas y bajo las condiciones dinámicas de un cuerpo. Los dos ejemplos que siguen ilustran el uso de las ecuaciones (9-4) y (9-5) para calcular esfuerzos en diferentes planos cortantes.

Ejemplo 9-7 Calcular los esfuerzos en el plano cortante 1-1, el cual forma un ángulo de 60° con el eje longitudinal de una barra cargada axialmente, como se indica en la fig. 9-11a. El área de la sección transversal de la barra es 0.02 m^2 y la carga es $F = 80 \text{ N}$.

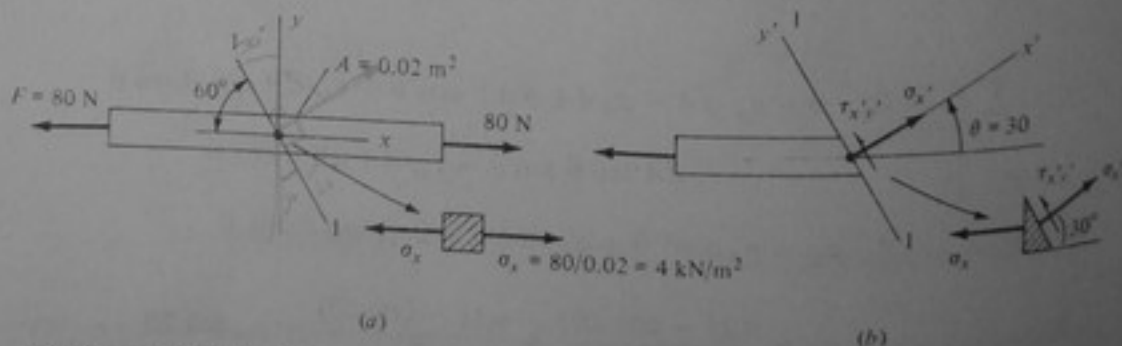


Figura 9-11 Ejemplo 9-7.

SOLUCION Las componentes de esfuerzo de referencia x - y , en un punto interior cualquiera de la varilla (fig. 9-11a) son $\sigma_x = P/A = 80/0.02 = 4 \text{ kN/m}^2$; $\sigma_y = 0$ y $\tau_{xy} = 0$. Los esfuerzos en el plano 1-1 son las mismas componentes x' - y' que se muestran en la fig. 9-11b, en donde $\theta = 30^\circ$. Utilizando las ecuaciones (9-4) y (9-5) se obtiene

$$\begin{aligned}\sigma_{x'} &= \frac{4 + 0}{2} + \frac{4 - 0}{2} \cos(2 \times 30) + 0 \\ &= 2 + 2 \cos 60^\circ = 3 \text{ kN/m}^2 \quad \text{Resp.}\end{aligned}$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{4 - 0}{2} \sin(2 \times 30) + 0 = -1.73 \text{ kN/m}^2 \quad \text{Resp.}$$

De acuerdo con los signos de estos resultados, el esfuerzo normal es en el sentido indicado en la fig. 9-11b, o sea de tensión, y el esfuerzo cortante tiene sentido opuesto al que se indica en la fig. 9-11b. Los esfuerzos son iguales en todos los puntos del plano 1-1, ya que los esfuerzos de referencia son los mismos en todos estos puntos.

Ejemplo 9-8 Calcular los esfuerzos en un plano cortante a 45° que pasa por el punto A , en el ejemplo 9-6. Este plano cortante se representa en la fig. 9-12.

SOLUCION Los esfuerzos calculados en el ejemplo 9-6 se pueden emplear como esfuerzos de referencia en el punto A . Es decir, $\sigma_x = 2880 \text{ lb/pul}^2$, $\sigma_y = 5760 \text{ lb/pul}^2$ y $\tau_{xy} = -382 \text{ lb/pul}^2$ se pueden utilizar como esfuerzos de referencia. Luego, utilizando las ecuaciones (9-4) y (9-5) con $\theta = 45^\circ$ se hallan los esfuerzos en el plano cortante que pasa por el punto A , en la fig. 9-12:

$$\begin{aligned}\sigma_{x'} &= \frac{2880 + 5760}{2} + \frac{2880 - 5760}{2} \cos 90^\circ - 382 \sin 90^\circ \\ &= 3938 \text{ lb/pul}^2 \quad \text{Resp.}\end{aligned}$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{2880 - 5760}{2} \sin 90^\circ - 382 \cos 90^\circ = 1440 \text{ lb/pul}^2 \quad \text{Resp.}$$

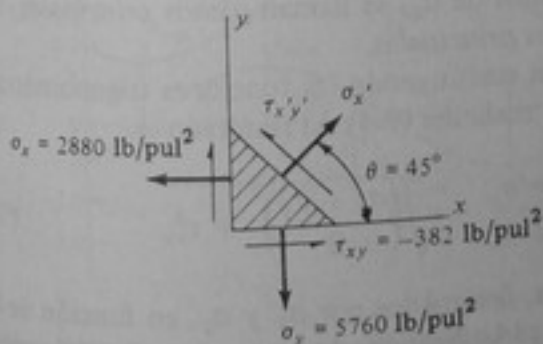


Figura 9-12 Ejemplo 9-8.

9-5 ESFUERZOS PRINCIPALES Y ESFUERZOS CORTANTES MÁXIMOS

Los esfuerzos $\sigma_{x'}$ y $\tau_{x'y'}$ en las ecuaciones (9-4) y (9-5) varían con el ángulo θ . Estas variaciones de $\sigma_{x'}$ y $\tau_{x'y'}$ se ilustran en la fig. 9-13 con ejemplos numéricos. Los ejemplos se dan para tres conjuntos diferentes de esfuerzos de referencia, σ_x , σ_y y τ_{xy} , en las figs. 9-13a, b y c. Los resultados de $\sigma_{x'}$ y $\tau_{x'y'}$ contra θ se representan gráficamente en los tres casos para $0 \leq \theta \leq 180^\circ$. Este intervalo de θ incluye todos los planos cortantes posibles, normales al plano $x-y$.

Las gráficas de $\sigma_{x'}$ y $\tau_{x'y'}$ contra θ en la fig. 9-13 son diferentes para cada conjunto de componentes de referencia. Para cada conjunto, $\sigma_{x'}$ y $\tau_{x'y'}$ asumen valores extremos (máximo y mínimo) para diferentes valores de θ . La fig. 9-13 ilustra el resultado general de que $\sigma_{x'}$ y $\tau_{x'y'}$ siempre asumen valores extremos para determinados ángulos θ en el intervalo $0 \leq \theta \leq 180^\circ$. Los valores extremos y los ángulos a los cuales ocurren dependen de las componentes de referencia σ_x , σ_y y τ_{xy} . En seguida se deducen las expresiones generales para los valores extremos, y los ángulos θ correspondientes a los valores extremos.

En primer lugar se toma la derivada de $\sigma_{x'}$ con respecto a θ , a partir de la ecuación (9-4), y se iguala a cero:

$$\frac{d\sigma_{x'}}{d\theta} = -2 \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + 2\tau_{xy} \cos 2\theta = 0$$

de donde

$$\tan 2\theta = \frac{\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)/2} \quad (9-6)$$

Para cualquier conjunto de componentes de referencia en la ecuación (9-6), existen dos valores de 2θ , designados mediante $2\theta_1$ y $2\theta_2$, que satisfacen la ecuación (9-6). Estos dos valores representan dos planos cortantes diferentes, sobre los cuales actúan los valores extremos de $\sigma_{x'}$.

Los valores de $2\theta_1$ y $2\theta_2$ se representan gráficamente en la fig. 9-14. Como se indica allí, estos valores siempre difieren en 180° . Por tanto, los valores de θ_1 y θ_2 siempre difieren en 90° . Este resultado general significa que los valores extremos de $\sigma_{x'}$ siempre actúan sobre planos cortantes mutuamente perpendiculares que pasan por un punto. En forma equivalente se puede decir que los valores extremos de $\sigma_{x'}$ siempre actúan sobre las caras adyacentes de un elemento cuyos ejes $x'-y'$ forman ángulos θ_1 y θ_2 con los ejes de referencia $x-y$. Los planos cortantes mutuamente perpendiculares sobre los cuales actúan los valores extremos de $\sigma_{x'}$ se llaman *planos principales*. Los valores extremos de $\sigma_{x'}$ se llaman *esfuerzos principales*.

Los esfuerzos principales se obtienen sustituyendo las funciones trigonométricas de $2\theta_1$ y $2\theta_2$, dadas en la fig. 9-14, en la ecuación (9-4). El resultado es

$$\sigma_{\max} = \sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (9-7)$$

Este resultado da los esfuerzos principales, designados por σ_1 y σ_2 , en función de las componentes de referencia, σ_x , σ_y y τ_{xy} . Utilizando el signo más antes del radical en la ecuación (9-7) se obtiene $\sigma_1 = \sigma_{\max}$ y utilizando el signo menos se obtiene

$\sigma_2 = \sigma_{\min}$. Los esfuerzos principales siempre representan los valores mayor y menor de σ_x , en un punto.

Los valores extremos de $\tau_{x'y'}$, y sus correspondientes ángulos se obtienen en forma parecida. Tomando la derivada de $\tau_{x'y'}$, con respecto a θ , con base en la ecuación (9-5), e igualándola a cero se obtiene

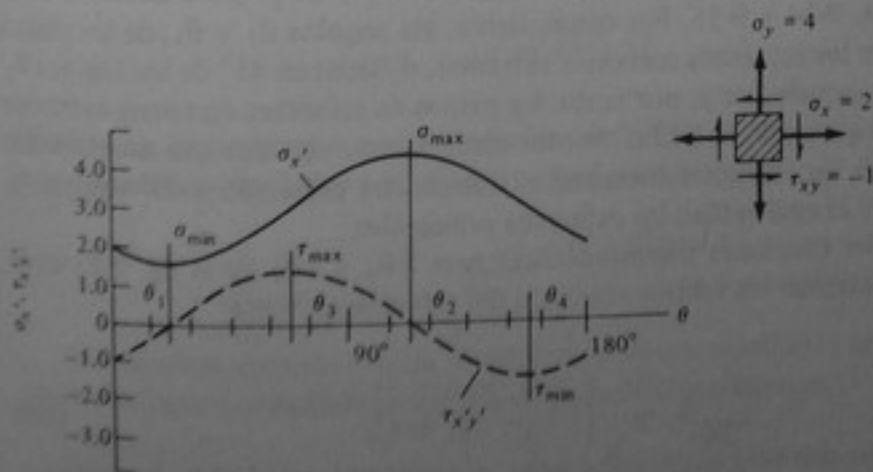
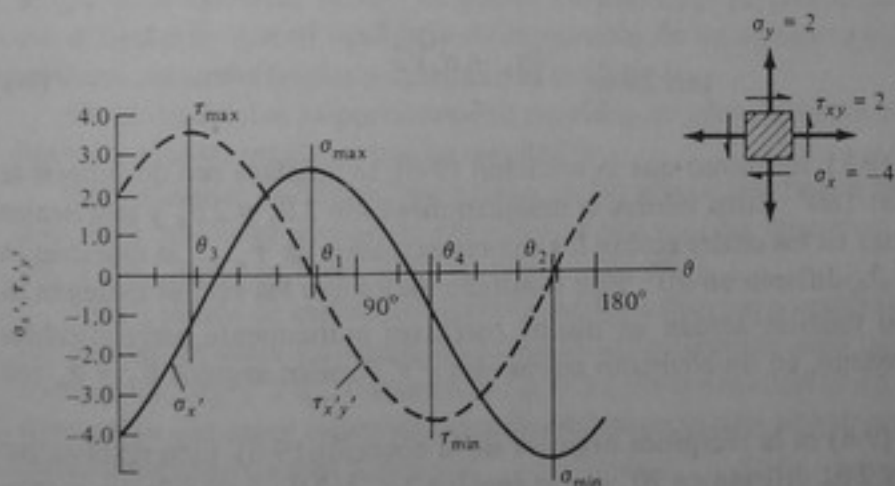
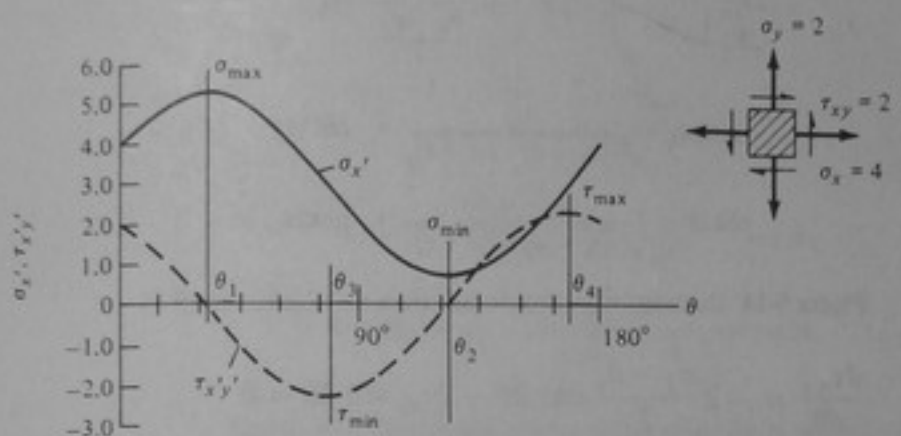
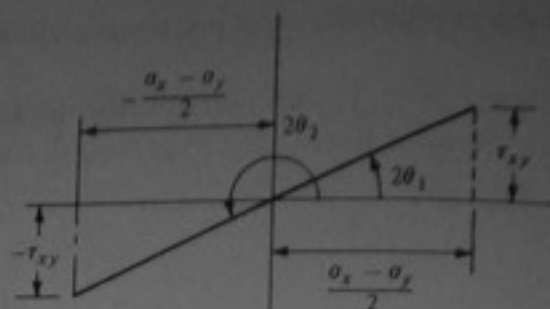


Figura 9-13 Ejemplos numéricos de la variación de $\sigma_{x'}$ y $\tau_{x'y'}$, con θ para diferentes esfuerzos de referencia σ_x , σ_y y τ_{xy} .



$$\operatorname{sen} 2\theta_1 = \frac{\tau_{xy}}{\sqrt{[(\sigma_x - \sigma_y)/2]^2 + \tau_{xy}^2}} = -\operatorname{sen} 2\theta_2$$

$$\operatorname{cos} 2\theta_1 = \frac{(\sigma_x - \sigma_y)/2}{\sqrt{[(\sigma_x - \sigma_y)/2]^2 + \tau_{xy}^2}} = -\operatorname{cos} 2\theta_2$$

Figura 9-14 Ilustración gráfica de las raíces de la ecuación (9-6).

$$\frac{d\tau_{x'y'}}{d\theta} = -2 \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \operatorname{cos} 2\theta - 2\tau_{xy} \operatorname{sen} 2\theta = 0$$

de donde

$$\tan 2\theta = -\frac{(\sigma_x - \sigma_y)/2}{\tau_{xy}} \quad (9-8)$$

La ecuación (9-8), lo mismo que la ecuación (9-6), se satisface con dos valores de 2θ que difieren en 180° . Estos valores se designan mediante $2\theta_3$ y $2\theta_4$ y representan los planos cortantes en los cuales actúan los valores extremos de $\tau_{x'y'}$; se muestran en la fig. 9-15. θ_3 y θ_4 difieren en 90° . Este resultado indica que los valores extremos de $\tau_{x'y'}$ en un punto también actúan en planos cortantes mutuamente perpendiculares o, lo que es lo mismo, en un elemento cuyos ejes $x'y'$ forman ángulos θ_3 y θ_4 con los ejes $x-y$.

La ecuación (9-8) es la recíproca negativa de la ecuación (9-6). Esto significa que los ángulos $2\theta_3$ y $2\theta_4$ difieren en 90° de los ángulos $2\theta_1$ y $2\theta_2$, como ilustra la comparación de las figs. 9-14 y 9-15. Por consiguiente, los ángulos θ_3 y θ_4 , de los planos en los cuales actúan los esfuerzos cortantes extremos, difieren en 45° de los ángulos θ_1 y θ_2 de los planos principales y, por tanto, los planos de esfuerzos cortantes extremos bisectan los planos principales. Dicho de otra manera, esto significa que un elemento sobre el cual actúan los esfuerzos cortantes extremos está orientado a 45° respecto a otro elemento sobre el cual actúan los esfuerzos principales.

Sustituyendo las funciones trigonométricas para $2\theta_3$ y $2\theta_4$ de la fig. 9-15 en la ecuación (9-5) se obtienen los valores extremos del esfuerzo cortante:

$$\tau_{\max} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (9-9)$$

Los dos valores de los esfuerzos cortantes extremos dados por la ecuación (9-9) son los valores positivo y negativo de la misma magnitud. Este resultado, junto con el hecho

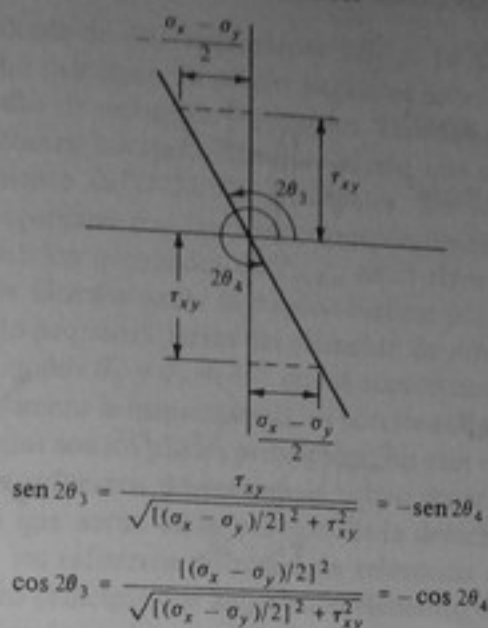


Figura 9-15 Ilustración gráfica de las raíces de la ecuación (9-8).

de que estos esfuerzos actúan en planos mutuamente perpendiculares, es consecuente con el hecho de que el equilibrio de momentos de un elemento infinitesimal requiere esfuerzos cortantes iguales y opuestos en sus bordes.

Otros resultados importantes relacionados con los esfuerzos principales y los esfuerzos cortantes máximos son los siguientes:

Los esfuerzos cortantes que actúan en los planos principales siempre son iguales a cero. Este resultado general se obtiene sustituyendo las funciones trigonométricas de $2\theta_1$ y $2\theta_2$, dadas en la fig. 9-14, en la ecuación (9-5).

En los planos de esfuerzos máximos actúan esfuerzos normales σ' diferentes a cero. Los valores de estos esfuerzos normales se hallan sustituyendo las funciones trigonométricas de $2\theta_3$ y $2\theta_4$, dadas en la fig. 9-15, en la ecuación (9-4). Estas sustituciones demuestran que estos esfuerzos normales deben ser iguales en los dos planos de esfuerzo cortante máximo y están dados por

$$\sigma' = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \quad (9-10)$$

Finalmente, la comparación de las ecuaciones (9-7) y (9-9) muestra que τ_{\max} se puede expresar en función de los esfuerzos principales en la forma

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad (9-11)$$

El siguiente ejemplo ilustra la aplicación de los resultados anteriores en relación con los esfuerzos principales y los esfuerzos cortantes máximos:

Ejemplo 9-9 Hallar los esfuerzos principales y los esfuerzos cortantes máximos en estado biaxial en los puntos *A* y *B* del recipiente cilíndrico del ejemplo 9-6 y representarlos en elementos orientados adecuadamente.

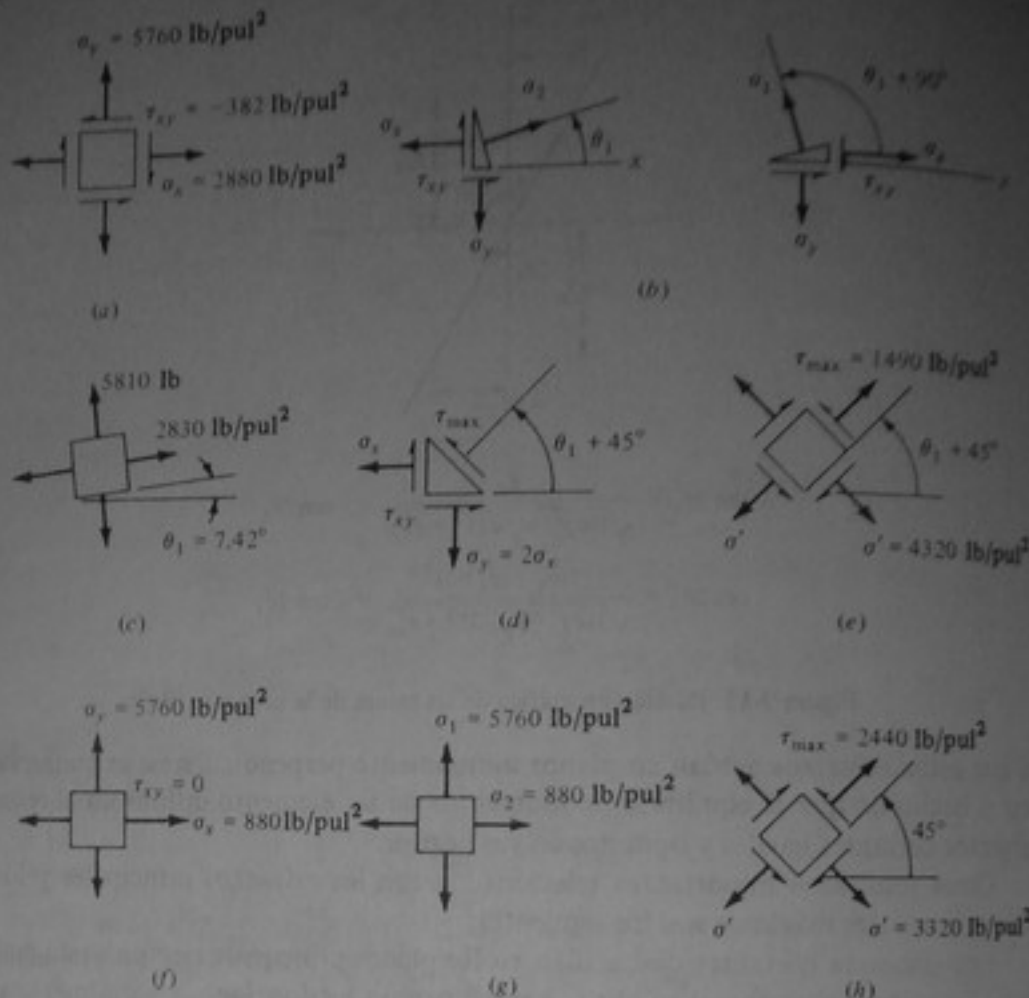


Figura 9-16 Elementos para el ejemplo 9-9.

SOLUCION Primero considérese el punto A . Los esfuerzos calculados en el ejemplo 9-6 para el punto A se pueden utilizar como esfuerzos de referencia, como se indica en la fig. 9-16a. Estos son $\sigma_x = 2880 \text{ lb/pul}^2$, $\sigma_y = 5760 \text{ lb/pul}^2$ y $\tau_{xy} = -382 \text{ lb/pul}^2$. Por medio de la ecuación (9-7) se hallan los esfuerzos principales para estos esfuerzos de referencia:

$$\begin{aligned}\sigma_{1,2} &= \frac{2880 + 5760}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2880 - 5760}{2}\right)^2 + (-382)^2} \\ &= 4320 \pm 1490 = 5810 \text{ y } 2830 \text{ lb/pul}^2 \quad \text{Resp.}\end{aligned}$$

Los esfuerzos cortantes máximos se pueden hallar con base en la ecuación (9-9), o bien, comparando las ecuaciones (9-7) y (9-9), se puede ver que el radical de la ecuación (9-7) siempre representa τ_{\max} . Así, utilizando el cálculo anterior de este radical se obtiene

$$\tau_{\max} = 1490 \text{ lb/pul}^2 \quad \text{Resp.}$$

De acuerdo con la ecuación (9-6), los planos principales están dados por

$$\tan 2\theta = \frac{-382}{(2880 - 5760)/2} = 0.265 \quad \text{Resp.}$$

Una raíz cuadrada de esta ecuación es $2\theta_1 = 14.84^\circ$. Entonces, $\theta_1 = 7.42^\circ$ representa un plano principal. Este solo ángulo es suficiente para orientar adecuadamente el elemento de esfuerzos principales. También es suficiente para orientar el elemento de esfuerzo cortante máximo, puesto que este elemento siempre está a 45° con el elemento de esfuerzos principales. Sin embargo, los dos esfuerzos principales deben aparearse con las caras correspondientes del elemento y se deben determinar los sentidos adecuados de τ_{\max} en el elemento de esfuerzo cortante máximo. Estos dos últimos pasos se pueden realizar por inspección de los cuerpos libres adecuados de pequeñas partes del elemento de referencia en consideración o sustituyendo los ángulos θ_1 y $\theta_1 + 45^\circ$ en las ecuaciones (9-4) y (9-5).

Considérese primero la inspección de las porciones del elemento de la fig. 9-16b, cuyas caras inclinadas son los planos principales. En este caso, la inspección muestra que todos los tres esfuerzos de referencia deben tener componentes opuestas al esfuerzo principal que actúa en la porción de la derecha, como se muestra en la fig. 9-16b, y sólo los esfuerzos normales de referencia deben tener componentes opuestas al esfuerzo principal que actúa en el elemento de la izquierda. Esto indica que el mayor de los dos esfuerzos principales actúa sobre la porción derecha. Entonces, los esfuerzos principales que actúan en el punto *A* sobre un elemento orientado adecuadamente se aparean con las caras del elemento, como se indica en la fig. 9-16c.

La inspección del elemento de la fig. 9-16d indica los sentidos adecuados de los esfuerzos cortantes máximos. El equilibrio del elemento de la fig. 9-16d, cuya cara inclinada es un plano de esfuerzo cortante máximo, indica que τ_{\max} debe tener el sentido indicado, puesto que $\sigma_y = 2\sigma_x$. Entonces, se concluye que los esfuerzos cortantes máximos que actúan sobre un elemento orientado adecuadamente en el punto *A* tienen los sentidos que se muestran en la fig. 9-16e.

Estos resultados también se pueden obtener sustituyendo los ángulos apropiados en las ecuaciones (9-4) y (9-5). La sustitución en la ecuación (9-4) da

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{2880 + 5760}{2} + \frac{2880 - 5760}{2} \cos(2 \times 7.42) - 382 \sin(2 \times 7.42) \\ &= 4320 - 1392 - 98 = 2830 \text{ lb/pul}^2\end{aligned}$$

De este modo, el esfuerzo principal de 2830 lb/pul^2 actúa sobre la cara x' del elemento definido por $\theta_1 = 7.42^\circ$ y, en consecuencia, los esfuerzos principales deben aparearse con las caras del elemento como se indica en la fig. 9-16c.

La sustitución de $\theta_3 = 7.42^\circ + 45^\circ = 52.42^\circ$ en la ecuación (9-5) da

$$\begin{aligned}\tau_{x'y'} &= -\frac{2880 - 5760}{2} \sin(2 \times 52.42) - 382 \cos(2 \times 52.42) \\ &= 1392 + 98 = +1490 \text{ lb/pul}^2\end{aligned}$$

Por tanto, el esfuerzo cortante en la cara correspondiente a $\theta_3 = 52.42^\circ$ del elemento de esfuerzo cortante máximo es positivo y los sentidos de los demás esfuerzos cortantes sobre el elemento se hallan con base en la convención establecida para esfuerzos cortantes en elementos. Los esfuerzos normales sobre los planos de esfuerzo cortante máximo se determinan utilizando la ecuación (9-10) y son:

$\sigma' = (2880 + 5760)/2 = 4320 \text{ lb/pul}^2$. Entonces, los esfuerzos en un elemento de esfuerzo cortante máximo, orientado adecuadamente, son los que se ilustran en la fig. 9-16e.

Considérese ahora el punto B. Los esfuerzos de referencia son $\sigma_x = 880 \text{ lb/pul}^2$, $\sigma_y = 5760 \text{ lb/pul}^2$ y $\tau_{xy} = 0$, como se muestra en la fig. 9-16f. En este caso, el elemento de referencia también es el elemento de esfuerzos principales, de acuerdo con la fig. 9-16g. El elemento de referencia se reconoce inmediatamente como el elemento de esfuerzos principales, puesto que los esfuerzos cortantes en él son cero. Los planos de esfuerzo cortante cero siempre son planos principales.

Conociendo los esfuerzos principales, se puede utilizar la ecuación (9-11) para calcular τ_{\max} . Así se obtiene $\tau_{\max} = (5760 - 880)/2 = 2440 \text{ lb/pul}^2$. De acuerdo con lo ya explicado, mediante inspección se determina que τ_{\max} está dirigido como se indica en la fig. 9-16h, actuando sobre un elemento a 45° con el elemento de esfuerzos principales. Los esfuerzos normales en el elemento de τ_{\max} son

$$\sigma' = \frac{5760 + 880}{2} = 3320 \text{ lb/pul}^2$$

9-6 CÍRCULO DE MOHR PARA ESFUERZO

En el año 1895 fue presentada en Alemania por Otto Mohr una representación gráfica útil de las ecuaciones de transformación del esfuerzo. Esta representación gráfica, conocida con el nombre de *círculo de Mohr*, se basa en el hecho de que las ecuaciones (9-4) y (9-5) son ecuaciones paramétricas de un círculo.

Las ecuaciones (9-4) y (9-5) se pueden escribir en la forma

$$\sigma_x - a = b \cos 2\theta + c \sin 2\theta$$

$$\text{y} \quad \tau_{xy} = -b \sin 2\theta + c \cos 2\theta$$

$$\text{en donde} \quad a = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \quad b = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \quad c = \tau_{xy}$$

Elevando al cuadrado cada una de estas ecuaciones, sumándolas, simplificando los resultados y utilizando la notación $b^2 + c^2 = R^2$ se obtiene

$$(\sigma_x - a)^2 + \tau_{xy}^2 = R^2 \quad (9-12)$$

La ecuación (9-12) es de la forma $(x - a)^2 + y^2 = R^2$, la cual representa un círculo de radio R con centro en $x - a$, en un sistema de coordenadas $x-y$. Así, la ecuación (9-12) demuestra que las ecuaciones (9-4) y (9-5) son ecuaciones paramétricas de un círculo llamado círculo de Mohr, en un sistema de coordenadas $\sigma-\tau$, como se indica en la fig. 9-17. El parámetro es el ángulo θ . Los esfuerzos variables σ_x y τ_{xy} , en la ecuación (9-12) son las coordenadas de diferentes puntos sobre el círculo de Mohr en el sistema de coordenadas $\sigma-\tau$. Entonces, el círculo de Mohr proporciona una representación gráfica de la variación de los esfuerzos normales y cortantes con los planos cortantes en un punto de un cuerpo. La localización del centro y el radio del círculo de

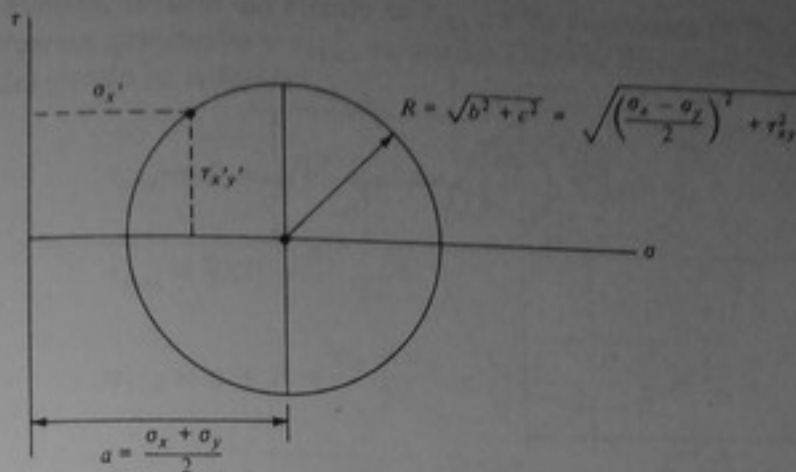


Figura 9-17 Círculo de Mohr para esfuerzo.

Mohr dependen de los esfuerzos de referencia σ_x , σ_y y τ_{xy} . Por tanto, diferentes círculo de Mohr están asociados con diferentes estados de esfuerzo en un punto.

Para relacionar los esfuerzos representados por puntos separados sobre un círculo de Mohr con los planos cortantes sobre los cuales actúan, el ángulo 2θ que aparece en las ecuaciones (9-4) y (9-5) se debe relacionar con la geometría del círculo. Esto se hace de la siguiente manera (véase la fig. 9-18): se supone que el punto A sobre el círculo de la fig. 9-18 representa los esfuerzos en el plano cortante por $\theta = 0$. Estos son los esfuerzos de referencia σ_x y τ_{xy} . La posición angular entre el punto A y otro punto arbitrario B situado sobre el círculo se designa mediante 2β y la posición angular entre el punto A y un eje positivo σ se designa mediante 2α , como se indica en la fig. 9-18. Los esfuerzos σ_B y τ_B , que son las coordenadas del punto B en el círculo, se pueden expresar en función de los esfuerzos σ_x y τ_{xy} del punto A , utilizando la geometría del círculo. La expresión para σ_B es

$$\begin{aligned} \sigma_B &= a + R \cos (2\alpha - 2\beta) \\ &= a + R \cos 2\alpha \cos 2\beta + R \sin 2\alpha \sin 2\beta \\ &= a + b \cos 2\beta + c \sin 2\beta \\ \sigma_B &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\beta + \tau_{xy} \sin 2\beta \end{aligned} \quad (9-13)$$

La expresión para τ_B es

$$\begin{aligned} \tau_B &= R \sin (2\alpha - 2\beta) = -R \cos 2\alpha \sin 2\beta + R \sin 2\alpha \cos 2\beta \\ &= -b \sin 2\beta + c \cos 2\beta \\ \tau_B &= -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\beta + \tau_{xy} \cos 2\beta \end{aligned} \quad (9-14)$$

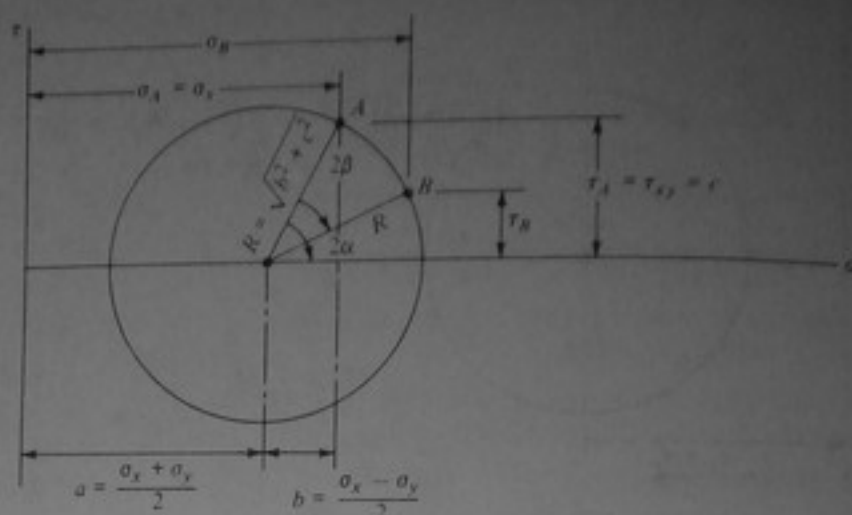


Figura 9-18 Posiciones angulares en el círculo de Mohr.

Los miembros de la derecha de las ecuaciones (9-13) y (9-14) son idénticos a las ecuaciones (9-4) y (9-5), si $2\beta = 2\theta$. Por tanto, si $2\beta = 2\theta$, $\sigma_B = \sigma_x$ y $\tau_B = \tau_{x'y'}$. Este resultado demuestra que el ángulo entre el punto A , que representa σ_x y τ_{xy} , y otro punto cualquiera B , que representa σ_x y $\tau_{x'y'}$, es el ángulo 2θ que aparece en las ecuaciones de transformación del esfuerzo. Obsérvese el hecho importante de que el ángulo θ entre los ejes x y x' de la fig. 9-10 es positivo en el sentido opuesto al de las agujas del reloj, mientras que en el círculo de Mohr el ángulo 2θ es positivo en el sentido de las agujas del reloj.

Los siguientes aspectos adicionales relacionados con el círculo de Mohr son importantes. Si en la fig. 9-19, el punto A representa los esfuerzos σ_x y τ_{xy} sobre un elemento de referencia en un punto de un cuerpo, entonces el punto C , que está diametralmente opuesto al punto A , en $2\theta = 180^\circ$, representa los esfuerzos σ_y y $-\tau_{xy}$ sobre el elemento de referencia. De manera semejante, los esfuerzos representados por dos puntos cualesquiera, diametralmente opuestos en el círculo, son los que actúan sobre las caras adyacentes de un elemento con una orientación particular.

Los puntos D y E sobre el círculo de la fig. 9-19 representan los esfuerzos principales σ_1 y σ_2 , y los puntos F y G representan τ_{\max} y τ_{\min} y los esfuerzos normales

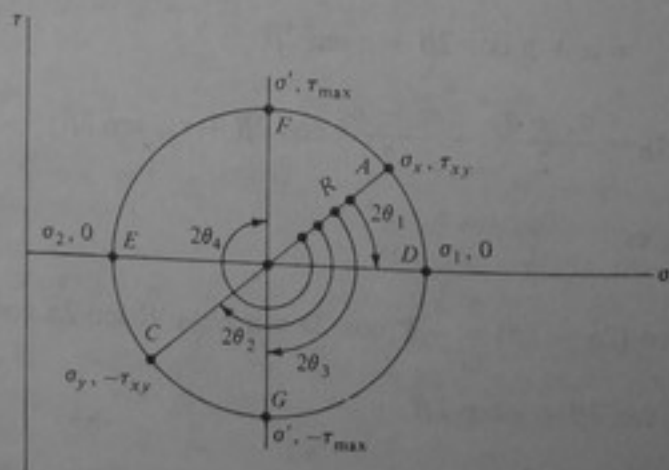


Figura 9-19 Puntos y ángulos importantes en el círculo de Mohr.

asociados. Además, el radio del círculo es τ_{\max} y las ecuaciones (9.7), (9.9) y (9.11) para los esfuerzos principales y τ_{\max} se pueden expresar directamente a partir de la geometría del círculo en la forma

$$\tau_{\max} = R = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}ED = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

$$\sigma_{1,2} = a \pm R = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Los ángulos $2\theta_1, \dots, 2\theta_4$, que definen los planos principales y los planos de τ_{\max} respecto al plano σ_x - τ_{xy} son los que se indican en la fig. 9-19.

El círculo de Mohr es muy conveniente para calcular en forma numérica los esfuerzos principales y/o los esfuerzos cortantes máximos en un punto y para determinar las orientaciones de los elementos correspondientes. Para un conjunto dado de componentes de referencia, σ_x , σ_y , τ_{xy} , solo se puede trazar un círculo de Mohr. Una vez trazado el círculo, se pueden determinar los esfuerzos principales, los esfuerzos cortantes máximos y los ángulos correspondientes a partir de la geometría del trazado. Los siguientes ejemplos ilustran la construcción y el uso del círculo de Mohr.

Ejemplo 9-10 Para el estado de esfuerzo $\sigma_x = 9$ Pa, $\sigma_y = 3$ Pa y $\tau_{xy} = 4$ Pa (fig. 9-20a), (a) trazar el círculo de Mohr, y (b) hallar los esfuerzos principales y los esfuerzos cortantes máximos en el punto y mostrarlos en elementos adecuadamente orientados.

SOLUCION

- (a) En la figura 9-20b se muestra el círculo de Mohr para el estado de esfuerzo dado. Para trazar el círculo, primero se localizan los puntos A y B con las coordenadas $\sigma_x = 9$, $\tau_{xy} = 4$ y $\sigma_y = 3$, $-\tau_{xy} = -4$, respectivamente. Luego se traza una línea entre estos dos puntos, localizando el centro O del círculo. La distancia a hasta el punto O es el valor promedio de las coordenadas σ de los puntos A y B . En este problema, $a = (9 + 3)/2 = 6$ Pa. Esto es lo mismo que usar $a = (\sigma_x + \sigma_y)/2$. En seguida se halla la distancia b sobre el círculo, $b = (9 - 3)/2 = 3$ Pa [$b = (\sigma_x - \sigma_y)/2$]. Luego, utilizando el triángulo AOC , se determina el radio del círculo, $R = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ Pa ($R = \sqrt{b^2 + c^2}$). Finalmente, habiendo establecido ya la localización del centro y el radio, se traza el círculo de Mohr para el problema. El resultado se muestra en la fig. 9-20b.
- (b) Una vez establecido el círculo de Mohr, se determinan los resultados deseados con base en la geometría del círculo. Los esfuerzos principales son $\sigma_1 = a + R = 6 + 5 = 11$ Pa y $\sigma_2 = a - R = 6 - 5 = 1$ Pa. El esfuerzo cortante máximo es $\tau_{\max} = R = 5$ Pa.

El ángulo formado sobre el círculo entre el punto σ_x , τ_{xy} y el punto σ_1 es $2\theta_1 = \tan^{-1}(4/3) = 53.1^\circ$ en el sentido de las agujas del reloj. Entonces, el ángulo θ_1 entre el eje x y un eje x' normal al plano principal sobre el cual actúa σ_1 es θ_1

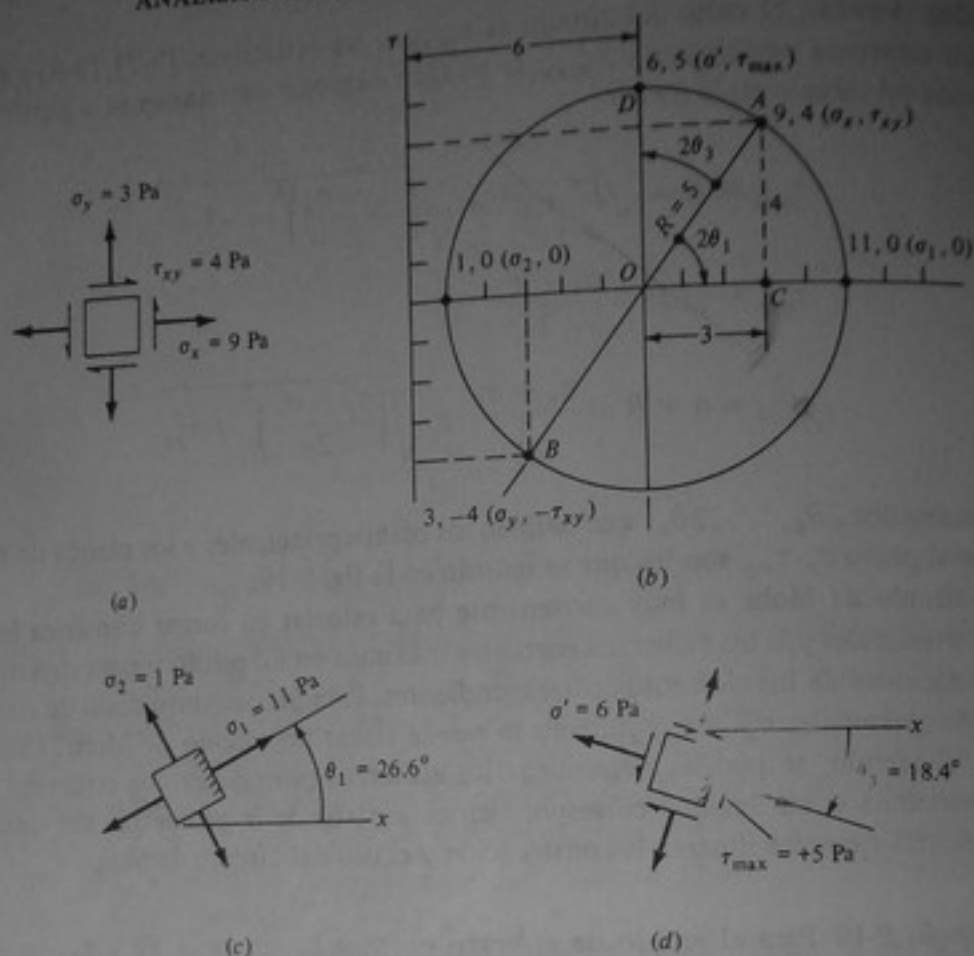


Figura 9-20 Ejemplo 9-10.

$= 26.6^\circ$ en el sentido opuesto al de las agujas del reloj. En la fig. 9-20c se representa un elemento, orientado adecuadamente, sometido a los esfuerzos principales.

El ángulo formado sobre el círculo entre el punto σ_x, τ_{xy} y el punto de τ_{\max} positivo, punto D, es $2\theta_3 = \tan^{-1}(3/4) = 36.9^\circ$ en el sentido opuesto al de las agujas del reloj. Por consiguiente, el ángulo entre el eje x y un eje x' normal al plano sobre el cual actúa $+\tau_{\max}$ es $\theta_3 = 18.4^\circ$ en el sentido de las agujas del reloj. En la fig. 9-20d se muestra un elemento de esfuerzo cortante máximo, orientado en forma adecuada. De nuevo, con base en la geometría del círculo, se determina que los esfuerzos normales en el elemento de τ_{\max} son $\sigma' = 6$ Pa. Obsérvese que el elemento de esfuerzo cortante máximo y el elemento de esfuerzos principales están a 45° , tal como debe ser.

Ejemplo 9-11 Repetir el ejemplo 9-10 para el estado de esfuerzo indicado en la fig. 9-21a.

SOLUCION Procediendo como en el ejemplo 9-10, se determina que en este caso el círculo de Mohr es como se muestra en la fig. 9-21b. Por inspección del círculo de Mohr se determinan los esfuerzos principales y los esfuerzos cortantes máximos, $\sigma_1 = -3 + 3\sqrt{2} = 1.24$ Pa, $\sigma_2 = -3 - 3\sqrt{2} = -7.24$ Pa y $\tau_{\max} = 3\sqrt{2} = 4.24$

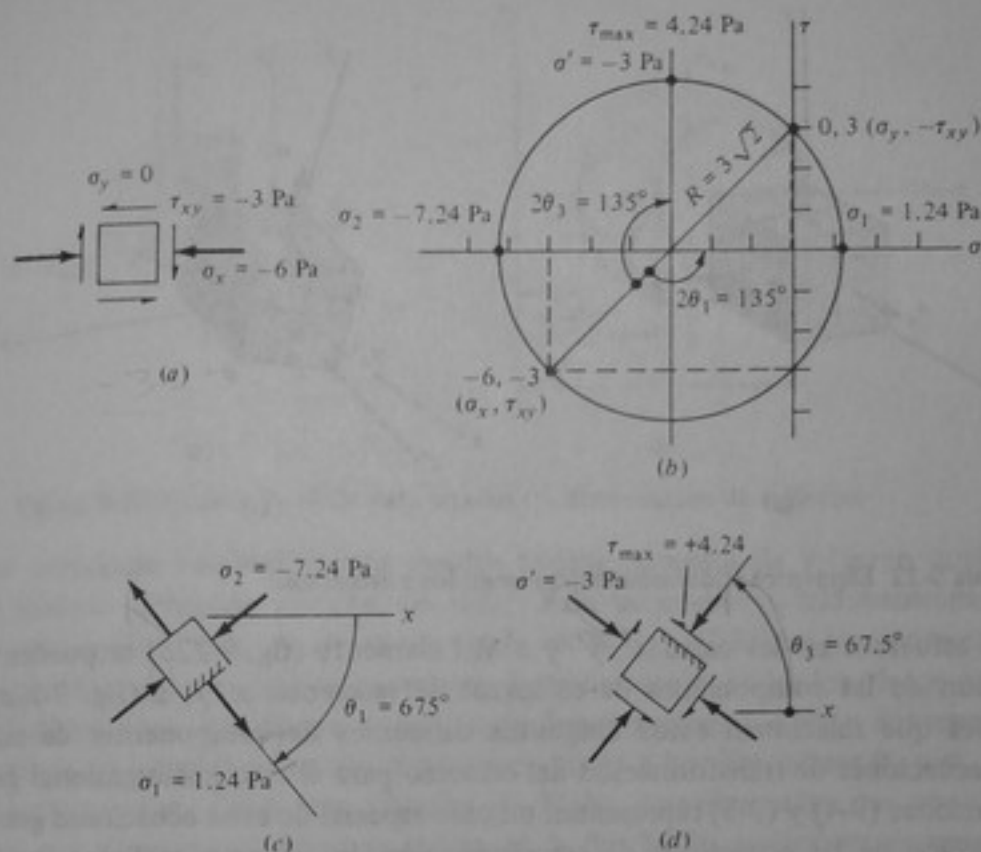


Figura 9-21 Ejemplo 9-11.

Pa. En el círculo de Mohr también se obtienen los ángulos $2\theta_1 = 45^\circ + 90^\circ = 135^\circ$ en el sentido opuesto al de las agujas del reloj y $2\theta_3 = 45^\circ + 90^\circ = 135^\circ$ en el sentido de las agujas del reloj. Entonces, los elementos de esfuerzos principales y de esfuerzo cortante máximo son como se ilustra en las figs. 9-21c y d.

9-7 ESTADOS TRIDIMENSIONALES DE ESFUERZO

Los conceptos de transformación del esfuerzo de las secciones 9-4 y 9-5 se pueden ampliar al caso general tridimensional. En seguida se dan algunos resultados concisos para el caso tridimensional.

En el caso general tridimensional se aíslan elementos cúbicos de material de tamaño infinitesimal, correspondientes a puntos de un cuerpo cargado, mediante planos cortantes paralelos a los planos coordenados de un sistema de coordenadas rectangulares, x, y, z . En la fig. 9-22a se representa uno de estos elementos, sobre el cual actúan seis componentes de esfuerzo diferentes, de acuerdo con lo que se expuso en el capítulo 2. Estas componentes son los tres esfuerzos normales, σ_x, σ_y y σ_z , y los tres esfuerzos cortantes, τ_{xy}, τ_{xz} y τ_{yz} , como se muestra en la fig. 9-22a.

En la figura 9-22b se muestra un elemento parecido, en el mismo punto del cuerpo, aislado por planos cortantes perpendiculares a otros ejes coordenados x', y', z' . Las componentes de esfuerzo para este elemento se designan mediante $\sigma_{x'}, \sigma_{y'}, \sigma_{z'}, \tau_{x'y'}, \tau_{x'z'}$ y $\tau_{y'z'}$.

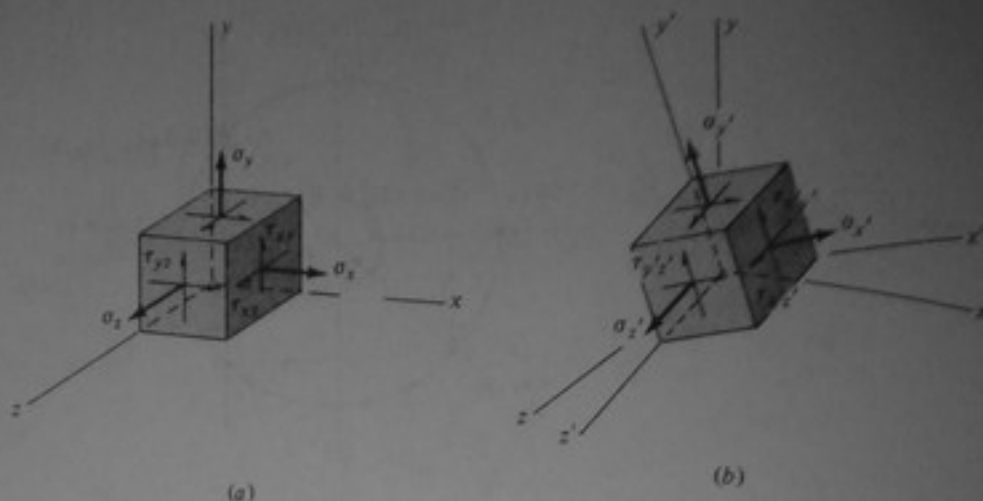


Figura 9-22 Elementos tridimensionales sometidos a esfuerzos.

Los esfuerzos en las caras x' , y' y z' del elemento (fig. 9-22b) se pueden hallar en función de las componentes de esfuerzos de referencia x , y , z (fig. 9-22a). Las ecuaciones que relacionan estos conjuntos diferentes de componentes de esfuerzo son las ecuaciones de transformación del esfuerzo para el caso tridimensional general. Las ecuaciones (9-4) y (9-5) representan un caso especial de estas ecuaciones generales. La deducción de las ecuaciones de transformación de esfuerzos tridimensionales así como las ecuaciones mismas son mucho más complejas que las deducciones y las ecuaciones para el caso de esfuerzo plano y no se dan aquí. Unas y otras se pueden hallar en varias referencias.† No obstante, se describen algunos resultados importantes de análisis de estados tridimensionales de esfuerzo, basados en las ecuaciones generales de transformación.

Para el caso tridimensional general existe un conjunto de ejes, x' , y' , z' , en un punto de un cuerpo cargado para el cual desaparecen todas las componentes de esfuerzo cortante $\tau_{x'y'}$, $\tau_{x'z'}$ y $\tau_{y'z'}$. Los planos cortantes normales a este conjunto de ejes x' , y' , z' son los planos principales, y los esfuerzos normales que actúan sobre estos planos cortantes son los esfuerzos principales, designados por σ_1 , σ_2 y σ_3 , en donde $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. Esta situación es análoga a la de los esfuerzos principales en un estado de esfuerzo plano. El esfuerzo principal σ_1 es el mayor algebraicamente entre el conjunto de todas las componentes de esfuerzo normal que actúan sobre los diferentes planos cortantes que pasan por el punto, y σ_3 es el menor algebraicamente entre todos los esfuerzos normales de ese mismo conjunto.

Para el caso tridimensional, el mayor esfuerzo cortante en un punto actúa sobre un plano que bisecta los planos de σ_1 y σ_3 y está dado por

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (9-15)$$

† Véase, por ejemplo, C.T. Wang, *Applied Elasticity*, McGraw-Hill, Nueva York, 1953.

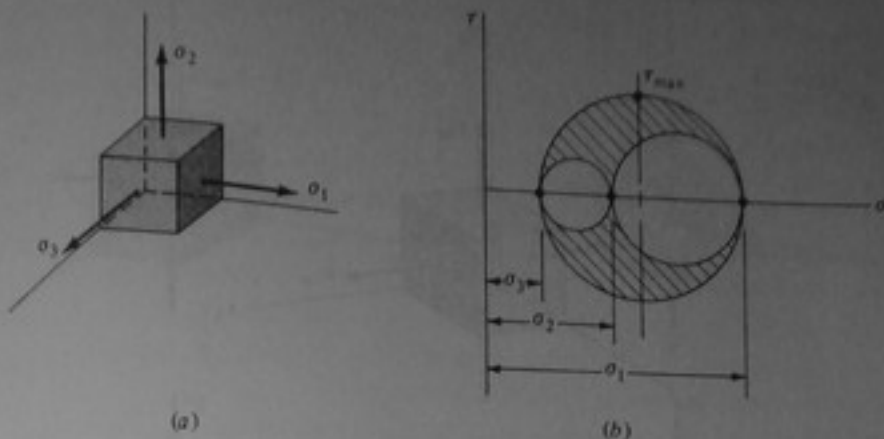


Figura 9-23 Círculo de Mohr para estados tridimensionales de esfuerzo.

Los anteriores resultados para estados tridimensionales de esfuerzo también se pueden ilustrar utilizando círculos de Mohr. Para un elemento tridimensional de esfuerzos principales como el que se muestra en la fig. 9-23a, se pueden trazar tres círculos de Mohr diferentes. Uno representa los esfuerzos en todos los planos cortantes perpendiculares a las direcciones σ_1 y σ_2 y; de forma análoga, los otros dos representan los esfuerzos en los planos cortantes perpendiculares a las direcciones σ_1 y σ_3 , y σ_2 y σ_3 , respectivamente. Estos tres círculos de Mohr, trazados sobre las coordenadas comunes σ y τ , aparecen como se indica en la fig. 9-23b, tocándose siempre en los puntos que representan σ_1 , σ_2 y σ_3 .

Se puede demostrar que las coordenadas de los puntos situados en el área sombreada de la fig. 9-23b representan pares de esfuerzos, normal y cortante, que actúan en todos los posibles planos cortantes que pasan por un elemento tridimensional. Con base en este hecho se puede ver que, como se expresó anteriormente, σ_1 y σ_3 son el mayor y el menor esfuerzo normal, algebraicamente, entre el conjunto de todas las componentes de esfuerzo normal posibles en un punto, y que τ_{max} está dado por la ecuación (9-15) y actúa en un plano que bisecta los planos de σ_1 y σ_3 .

El último resultado tiene significado en el caso de esfuerzo plano, para el esfuerzo cortante máximo en un punto. El esfuerzo $\tau_{max} = (\sigma_1 - \sigma_2)/2$, dado por la ecuación (9-11) para el caso de esfuerzo plano, representa únicamente el mayor esfuerzo cortante entre los que actúan en planos cortantes perpendiculares al plano de esfuerzo plano, $x-y$. Este esfuerzo cortante puede ser o no el esfuerzo cortante máximo absoluto entre todos los planos cortantes posibles que pasan por un elemento de esfuerzo plano, de acuerdo con la ecuación (9-15). La fig. 9-24 muestra una vista tridimensional de un elemento de esfuerzos principales para un caso de esfuerzo plano en el cual $\sigma_z = 0$. Los esfuerzos principales en un plano, dados por la ecuación (9-7), se designan mediante σ_{1p} y σ_{2p} actúan a lo largo de los ejes x_1 y x_2 . El tercer esfuerzo principal para este elemento es $\sigma_z = 0$. Estos tres esfuerzos normales se pueden reconocer como los esfuerzos principales en tres dimensiones, puesto que los planos sobre los cuales actúan no tienen esfuerzos cortantes. El esfuerzo cortante máximo absoluto para el elemento de la fig. 9-24, dado por la ecuación (9-15), es la mitad de la diferencia entre el mayor y el menor, algebraicamente, de los tres esfuerzos principales σ_{1p} , σ_{2p} y $\sigma_z = 0$, y actúa sobre los planos que bisectan los planos en los cuales actúan el mayor y el menor de estos esfuerzos principales. El siguiente ejemplo ilustra este concepto.

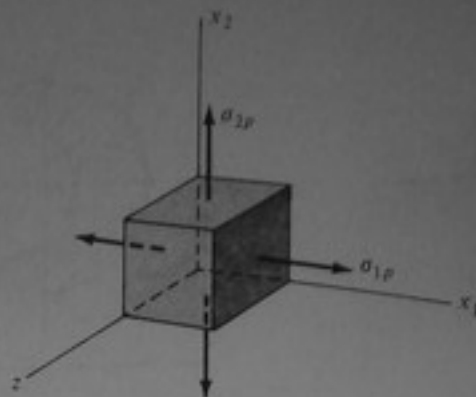


Figura 9-24 Elemento de esfuerzos principales planos en tres dimensiones.

Ejemplo 9-12 Calcular los esfuerzos cortantes máximos absolutos para cada uno de los tres elementos de esfuerzos principales en un plano que se muestra en la fig. 9-25. En cada caso, el esfuerzo principal $\sigma_z = 0$.

SOLUCION

- (a) En este caso, los esfuerzos principales mayor y menor son $\sigma_{1p} = 4$ MPa y $\sigma_{2p} = -2$ MPa. De este modo, $\tau_{\max} = [4 - (-2)]/2 = 3$ MPa y actúa en el plano que bisecta los planos $\sigma_{1p} = 4$ MPa y $\sigma_{2p} = 2$ MPa, como se indica en la fig. 9-25a. Este mismo esfuerzo cortante máximo podría actuar en un plano normal al plano representado en la fig. 9-25a y al plano x - y .
- (b) En este caso, $\tau_{\max} = (\sigma_{\max} - \sigma_{\min})/2 = (4 - 0)/2 = 2$ MPa y actúa en el plano mostrado o en uno perpendicular, como en el caso a.
- (c) En este caso, $\tau_{\max} = [0 - (-4)]/2 = 2$ MPa y actúa en el plano mostrado o en uno perpendicular, como en el caso a.

9-8 TRANSFORMACION DE LA DEFORMACION EN UN PUNTO

La deformación unitaria y la deformación de corte en un punto de un cuerpo deformado se definieron en el capítulo 3. Las componentes de la deformación en un punto varían con la dirección, como sucede con las componentes del esfuerzo. Considérese un elemento de material plano y de tamaño infinitesimal, el cual se muestra sin deformación en el fig. 9-26a y deformado en la fig. 9-26b. Durante la deformación se presentan las deformaciones unitarias ϵ_x y ϵ_y y la deformación de corte γ_{xy} . Durante esta deformación también se presentan las deformaciones unitarias $\epsilon_{x'}$ y $\epsilon_{y'}$, y la deformación de corte $\gamma_{x'y'}$, en y dentro de las líneas de trazos, las cuales se extienden en las direcciones de las coordenadas arbitrarias x' - y' . Las deformaciones ϵ_x , ϵ_y y γ_{xy} representan las componentes de deformación en las direcciones de las coordenadas x - y , y las deformaciones $\epsilon_{x'}$, $\epsilon_{y'}$ y $\gamma_{x'y'}$, representan las componentes en las direcciones de las coordenadas x' - y' . En un punto cualquiera de un cuerpo deformado existe un infinito número de conjuntos de componentes de deformación, cada uno de ellos asociado con uno del infinito número de pares de coordenadas x' - y' que se pueden establecer en el punto. La deformación en un punto, aunque diferente físicamente, es análoga al esfuerzo en este aspecto.

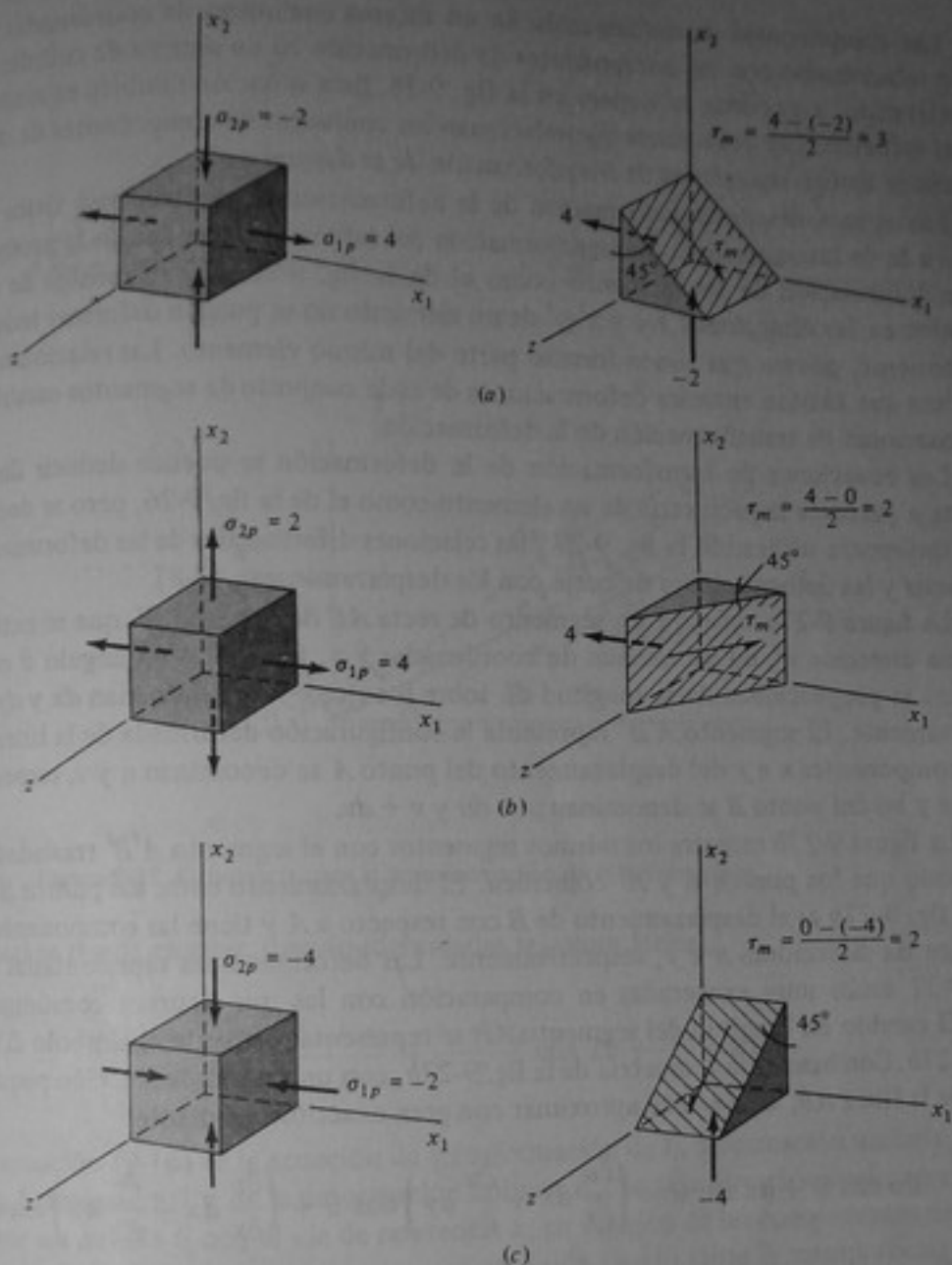


Figura 9-25 Ejemplo 9-12.

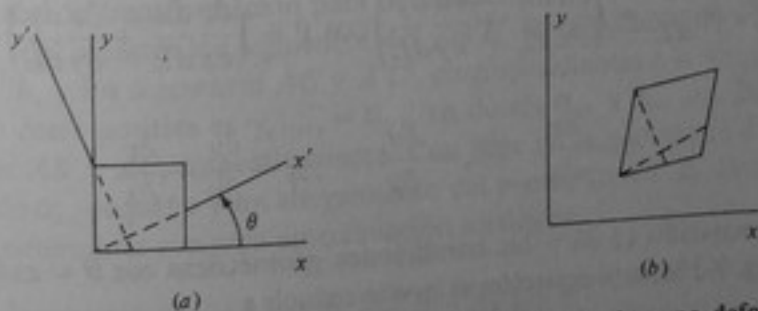


Figura 9-26 Deformaciones en un elemento plano. (a) Elemento plano no deformado. (b) Elemento plano deformado.

Las componentes de deformación en un sistema cualquiera de coordenadas $x'-y'$ están relacionadas con las componentes de deformación en un sistema de coordenadas de referencia, $x-y$, como se sugiere en la fig. 9-26. Esta situación también es análoga a la del esfuerzo. Las ecuaciones que relacionan los conjuntos de componentes de deformación se llaman *ecuaciones de transformación de la deformación*.

Las ecuaciones de transformación de la deformación tienen una base física diferente a la de las ecuaciones de transformación del esfuerzo: dependen de la geometría de la deformación de un elemento como el de la fig. 9-26. Los segmentos de recta trazados en las direcciones $x-y$ y $x'-y'$ de un elemento no se pueden deformar independientemente, puesto que todos forman parte del mismo elemento. Las relaciones geométricas que existen entre las deformaciones de cada conjunto de segmentos establecen las ecuaciones de transformación de la deformación.

Las ecuaciones de transformación de la deformación se pueden deducir directamente a partir de la geometría de un elemento como el de la fig. 9-26, pero se deducen más fácilmente utilizando la fig. 9-27 y las relaciones diferenciales de las deformaciones unitarias y las deformaciones de corte con los desplazamientos, (3-8).

La figura 9-27a muestra un segmento de recta AB de longitud dL que se extiende en una dirección x' , en un sistema de coordenadas $x-y$, formando un ángulo θ con el eje x . Las proyecciones de la longitud dL sobre los ejes $x-y$ se denominan dx y dy , respectivamente. El segmento $A'B'$ representa la configuración deformada de la línea AB . Las componentes x e y del desplazamiento del punto A se denominan u y v , respectivamente y las del punto B se denominan $u + du$ y $v + dv$.

La figura 9-27b muestra los mismos segmentos con el segmento $A'B'$ trasladado de tal modo que los puntos A y A' coinciden. El desplazamiento entre los puntos B y B' en la fig. 9-27b es el desplazamiento de B con respecto a A y tiene las componentes du y dv en las direcciones x e y , respectivamente. Las deformaciones representadas en la fig. 9-27 están muy exageradas en comparación con las que ocurren comúnmente.

El cambio en longitud del segmento AB se representa mediante el símbolo Δ en la fig. 9-27b. Con base en la geometría de la fig. 9-27b, con un ángulo de rotación pequeño, $\alpha_{x'}$, de la línea AB , Δ se puede aproximar con gran exactitud mediante

$$\Delta = du \cos \theta + dv \sin \theta = \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right) \cos \theta + \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) \sin \theta$$

La deformación unitaria en el segmento ds es la deformación unitaria $\epsilon_{x'}$, y está dada por

$$\epsilon_{x'} = \frac{\Delta}{dL} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dL} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dL} \right) \cos \theta + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{dx}{dL} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{dy}{dL} \right) \sin \theta$$

Utilizando

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \epsilon_y = \frac{\partial u}{\partial y} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

dadas por la ecuación (3-8) y las condiciones geométricas $\cos \theta = dx/dL$ y $\sin \theta = dy/dL$ de la fig. 9-27a, esta ecuación se puede reducir a

$$\epsilon_{x'} = \epsilon_x \cos^2 \theta + \epsilon_y \sin^2 \theta + \gamma_{xy} \sin \theta \cos \theta$$

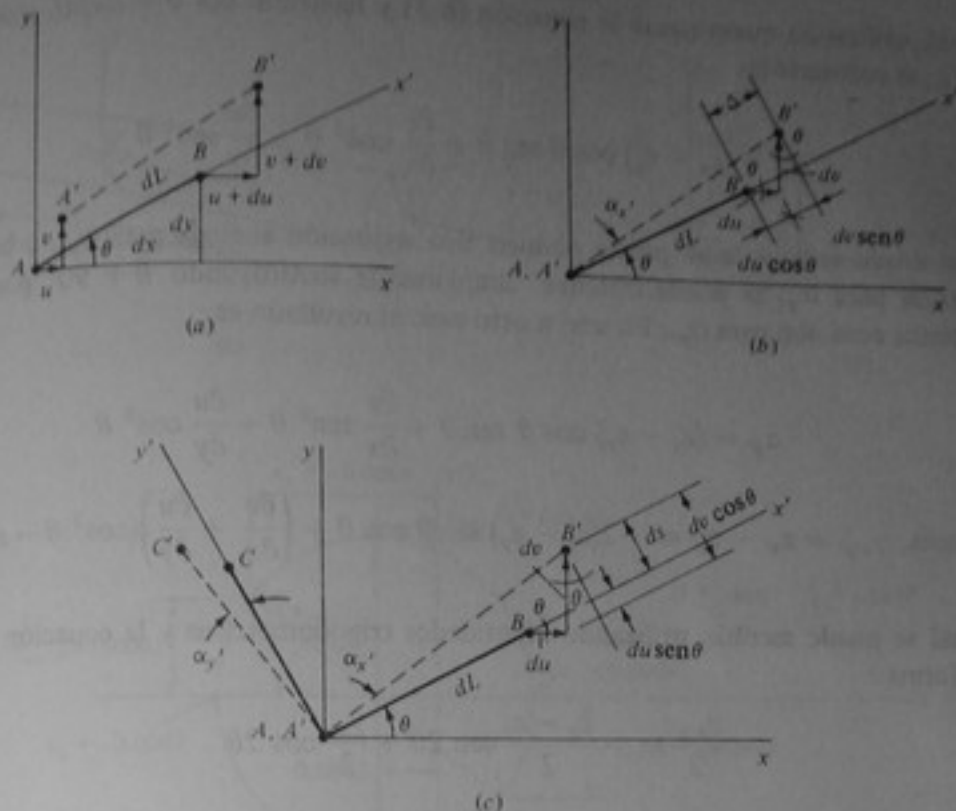


Figura 9-27 Geometría para la transformación de la deformación.

la cual se puede escribir, usando identidades trigonométricas,

$$\epsilon_{x'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta \quad (9-16)$$

La ecuación (9-16) es la ecuación de transformación de la deformación unitaria para el caso bidimensional y da la deformación unitaria $\epsilon_{x'}$, en una dirección cualquiera x' que forme un ángulo θ con el eje de referencia x , en función de las componentes de deformación de referencia ϵ_x , ϵ_y y γ_{xy} . La ecuación (9-16) tiene la misma forma que la ecuación de transformación para esfuerzo normal, (9-4), excepto por el factor $\frac{1}{2}$ que aparece en el último término del miembro derecho.

La ecuación de transformación para deformación de corte se deduce utilizando la fig. 9-27c, la cual muestra los segmentos AB y $A'B'$ correspondientes a la dirección x' , fig. 9-27b, y los segmentos AC y $A'C'$, correspondientes a la dirección y' . La deformación de corte positiva es $\gamma_{x'y'} = \alpha_{y'}$, en donde α_x y α_y son las rotaciones de los segmentos AB y AC , respectivamente. Con base en la geometría de la fig. 9-27c, para un ángulo α_x , pequeño y un alargamiento del segmento AB , Δ , también pequeño, α_x se puede determinar con gran aproximación mediante

$$\alpha_x = \frac{ds}{dL} = \frac{dv \cos \theta - du \sin \theta}{dL}$$

la cual, utilizando nuevamente la ecuación (8-3) y haciendo $\cos \theta = dx/dL$ y $\sin \theta = dy/dL$, se convierte en

$$\alpha_{y'} = (\epsilon_x - \epsilon_y) \cos \theta \sin \theta + \frac{\partial v}{\partial x} \cos^2 \theta - \frac{\partial u}{\partial y} \sin^2 \theta$$

De un modo semejante se puede deducir una expresión análoga para $\alpha_{x'}$, o bien, la expresión para $\alpha_{y'}$ se puede obtener simplemente sustituyendo $\theta + 90^\circ$ por θ en la anterior ecuación para $\alpha_{y'}$. En uno u otro caso el resultado es

$$\alpha_{x'} = (\epsilon_x - \epsilon_y) \cos \theta \sin \theta + \frac{\partial v}{\partial x} \sin^2 \theta - \frac{\partial u}{\partial y} \cos^2 \theta$$

$$\text{Entonces, } \gamma_{x'y'} = \alpha_{x'} - \alpha_{y'} = -2(\epsilon_x - \epsilon_y) \sin \theta \cos \theta + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

La cual se puede escribir, utilizando identidades trigonométricas y la ecuación (3-8), en la forma

$$\frac{\gamma_{x'y'}}{2} = -\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \sin 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cos 2\theta \quad (9-17)$$

La ecuación (9-17) es la ecuación de transformación para deformación de corte en deformación plana. Obsérvese que esta ecuación tiene la misma forma que la ecuación (9-5) para transformación de esfuerzo cortante, con la diferencia de que aparecen $\gamma_{x'y'}/2$ y $\gamma_{xy}/2$ en lugar de $\tau_{x'y'}$ y τ_{xy} .

Como las ecuaciones (9-16) y (9-17) para transformación de la deformación y las ecuaciones (9-4) y (9-5) para la transformación del esfuerzo tienen la misma forma, todos los resultados anteriores referentes a los esfuerzos principales y a los esfuerzos cortantes máximos son aplicables a las deformaciones. Así, en un punto cualquiera de un cuerpo deformado existen ejes principales de deformación con las correspondientes deformaciones unitarias principales y deformación de corte igual a cero, así como las deformaciones de corte máximas para ejes orientados a 45° respecto a los ejes principales de deformación. Las ecuaciones (9-4) a (9-11), que fueron establecidas para esfuerzos, se pueden utilizar para deformaciones siempre que, en cada caso, los esfuerzos normales se sustituyan por las deformaciones unitarias correspondientes y los esfuerzos cortantes se sustituyan por las deformaciones de corte divididas por dos.

De igual manera, se puede trazar y emplear un círculo de Mohr de deformación, lo mismo que un círculo de Mohr de esfuerzo, utilizando las coordenadas $\epsilon - \gamma/2$ en lugar de las coordenadas $\sigma - \tau$ y siendo ϵ_x y $\gamma_{x'y'}$ las coordenadas de los puntos localizados sobre el círculo en lugar de $\sigma_{x'}$ y $\tau_{x'y'}$.

Ejemplo 9-13 La barra redonda representada en la fig. 9-28a tiene una longitud $L = 100$ mm y un diámetro $d = 25$ mm. La barra está empotrada en su extremo izquierdo y sometida a una carga axial P combinada con un momento de torsión T en su extremo libre. Estas cargas hacen que la longitud de la barra se acorte en una cantidad $\Delta L = 0.60$ mm y su diámetro aumente una cantidad $\Delta d = 0.005$

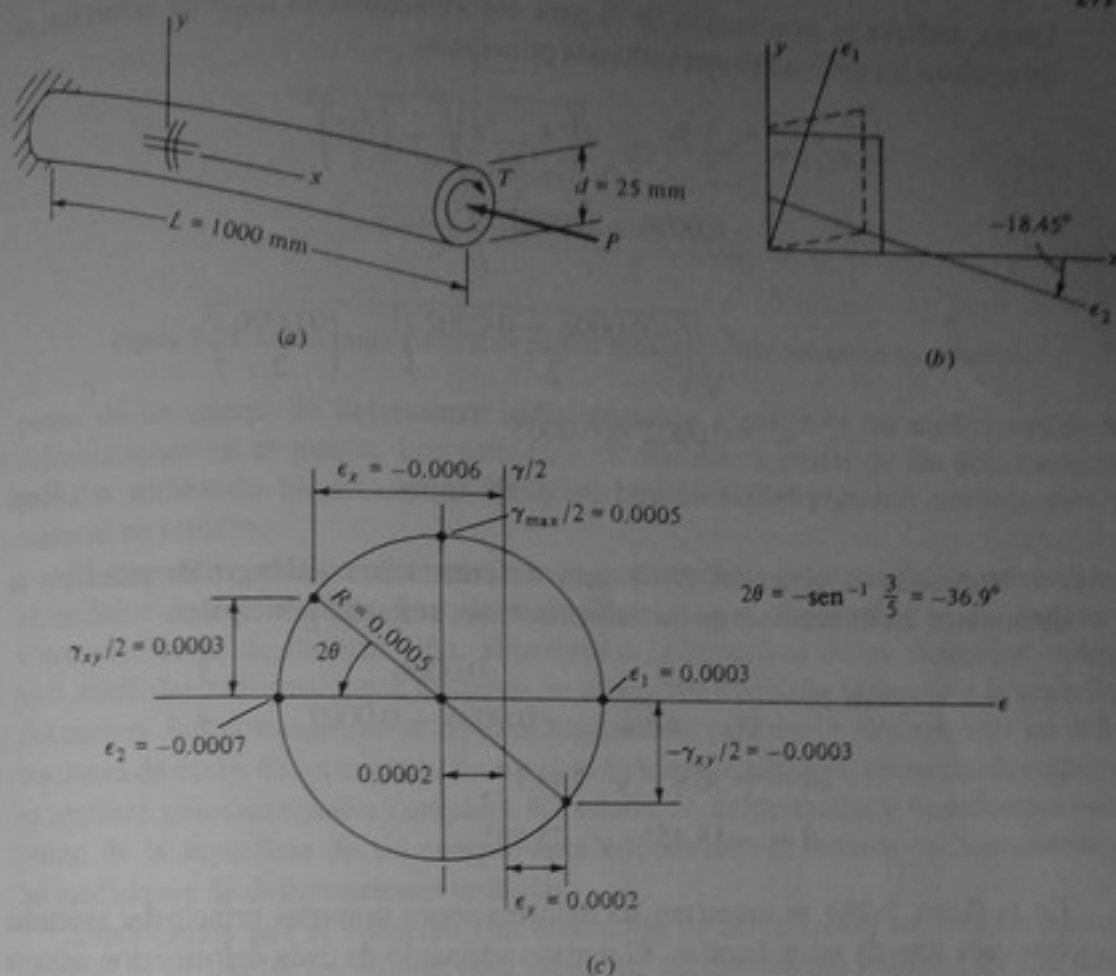


Figura 9-28 Ejemplo 9-13.

mm y además que el extremo libre rote un ángulo $\theta = 2.75^\circ$. Para estas condiciones, hallar las deformaciones unitarias principales y la deformación de corte máxima en puntos aislados sobre la superficie de la barra.

SOLUCION En primer lugar, las deformaciones de referencia en un punto respecto al sistema de coordenadas x - y que se muestra en la fig. 9-28a se pueden calcular a partir de la información dada. Estas deformaciones son:

$$\epsilon_x = \frac{\Delta L}{L} = -\frac{0.60}{1000} = -0.0006 \text{ m/m}$$

$$\epsilon_y = \frac{\Delta \text{circ}}{\text{circ}} = \frac{\pi(d + \Delta d) - \pi d}{\pi d} = \frac{\Delta d}{d} = \frac{0.005}{25} = 0.0002 \text{ m/m}$$

$$\gamma_{xy} = \beta \frac{d}{2L} = \frac{2.75(\pi/180)(25)}{2(1000)} = 0.0006 \text{ rad}$$

Luego, utilizando la ecuación (9.7) para deformaciones en lugar de esfuerzos, se determinan las deformaciones unitarias principales:

$$\begin{aligned}\epsilon_{1,2} &= \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \\ &= \frac{-0.0006 + 0.0002}{2} \\ &\quad \pm \sqrt{\left(\frac{-0.0006 - 0.0002}{2}\right)^2 + \left(\frac{0.0006}{2}\right)^2} \\ &= -0.0002 \pm 0.0005\end{aligned}$$

o $\epsilon_{1,2} = 0.0003$ and -0.0007 m/m

Resp.

Utilizando la ecuación (9.6) para deformaciones en lugar de esfuerzos se determinan las direcciones de las deformaciones unitarias principales:

$$\tan 2\theta = \frac{\gamma_{xy}/2}{(\epsilon_x - \epsilon_y)/2} = \frac{0.0006}{-0.0006 - 0.0002} = -\frac{3}{4}$$

o $2\theta = -36.9^\circ$ y 143.1°

o $\theta = -18.45^\circ$ y 71.55°

En la figura 9-28b se muestran las deformaciones unitarias principales asociadas con cada uno de estos ángulos. El sentido adecuado de cada deformación unitaria principal se determina por inspección del elemento deformado. La deformación de corte máxima está dada por

$$\frac{\gamma_{\max}}{2} = \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

o $\gamma_{\max} = 2(0.0005) = 0.0010$ rad

Resp.

y se presenta en ángulos que bisectan las direcciones de las deformaciones unitarias principales.

Este problema también se puede resolver utilizando el círculo de Mohr de deformación. Con base en las deformaciones de referencia calculadas anteriormente, el círculo de Mohr para este problema es el que se representa en la fig. 9-28c. Los resultados para las deformaciones unitarias principales y las deformaciones de corte máximas también se pueden determinar a partir de la geometría de este círculo.

9-9 MEDICION DE LA DEFORMACION PLANA; ROSETAS DE DEFORMACION

El análisis experimental de esfuerzos se utiliza a menudo en el análisis o diseño de estructuras y máquinas. En el análisis experimental de esfuerzos, los esfuerzos en un

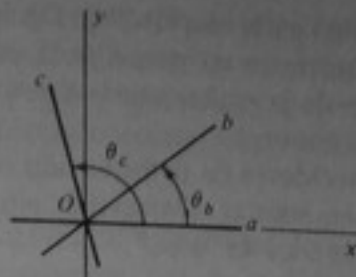


Figura 9-29 Direcciones arbitrarias para la medición de la deformación superficial.

punto de un cuerpo se determinan indirectamente a partir de las mediciones de las deformaciones en el punto. Los esfuerzos se calculan a partir de las deformaciones medidas utilizando las relaciones apropiadas esfuerzo-deformación unitaria para el material en estudio.

El dispositivo más comúnmente usado para medir la deformación de un cuerpo es el medidor de deformación de resistencia eléctrica, que se describió en el capítulo 4. Estos medidores de deformación, adheridos a la superficie de un cuerpo, se utilizan para medir las deformaciones unitarias en cualquier dirección tangente a la superficie del cuerpo. Sin embargo, no se utilizan dispositivos para medir directamente las deformaciones de corte de un cuerpo. En un caso típico de análisis experimental de esfuerzos se requiere una descripción completa del estado de deformación y de esfuerzos en un punto de la superficie de un cuerpo. Esta información se obtiene exclusivamente de las mediciones de deformaciones unitarias.

Supongamos que se adhieren tres medidores de deformación cerca de un punto O sobre la superficie de un cuerpo para medir las deformaciones unitarias en tres direcciones arbitrarias Oa , Ob y Oc , como se indica en la fig. 9-29. Siempre es posible orientar un sistema de coordenadas $x-y$ de tal modo que uno de los ejes coincida con una de las direcciones seleccionadas, digamos Oa . Entonces la deformación unitaria ϵ_a , medida a lo largo de Oa , puede identificarse como la deformación unitaria ϵ_x en el sistema de coordenadas $x-y$. Utilizando la ecuación de transformación de la deformación, (9-16), con $\epsilon_x = \epsilon_a$, se pueden expresar las deformaciones unitarias ϵ_b y ϵ_c en las direcciones Ob y Oc , respectivamente, las cuales forman ángulos θ_b y θ_c con el eje x , mediante

$$\epsilon_b = \frac{\epsilon_a + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_a - \epsilon_y}{2} \cos 2\theta_b + \frac{\gamma_{xy}}{2} \operatorname{sen} 2\theta_b \quad (9-18a)$$

$$y \quad \epsilon_c = \frac{\epsilon_a + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_a - \epsilon_y}{2} \cos 2\theta_c + \frac{\gamma_{xy}}{2} \operatorname{sen} 2\theta_c \quad (9-18b)$$

En cualquier caso específico, al reemplazar los valores conocidos de θ_b y θ_c y los valores medidos de las deformaciones unitarias ϵ_a , ϵ_b y ϵ_c en las ecuaciones (9-18), estas ecuaciones representan dos ecuaciones algebraicas simultáneas que contienen las dos incógnitas ϵ_y y γ_{xy} . Las soluciones de estas ecuaciones dan los valores de ϵ_y y γ_{xy} para el punto en el cual se midieron las deformaciones unitarias ϵ_a , ϵ_b y ϵ_c .

Mediante el anterior proceso se obtienen las tres componentes de deformación de referencia, ϵ_x , ϵ_y y γ_{xy} . Una vez establecidas estas tres componentes de referencia pueden determinar las deformaciones unitarias y de corte en cualesquiera otras direcciones en un punto, y/o las deformaciones unitarias principales y las deformaciones de

corte máximas, como se explicó en la sección 9-8. De este modo, la medición de tres deformaciones unitarias cualquiera en un punto de la superficie de un cuerpo proporcionan la información a partir de la cual se puede determinar el estado completo de la deformación superficial en ese punto.

Los conjuntos de tres medidores de deformación orientados en diferentes direcciones en un punto se llaman *rosetas*. Comercialmente se encuentran rosetas con medidores de deformación separados 45° a 60° .

Como los medidores de deformación tienen longitudes finitas, aunque pequeñas, las deformaciones unitarias que se miden con los medidores de deformación de una roseta no son realmente las deformaciones unitarias en un punto, sino los valores promedios de las deformaciones unitarias alrededor de un punto, sobre las longitudes ocupadas por los medidores de deformación. Sin embargo, se obtienen valores exactos de las deformaciones unitarias "puntuales" si los medidores de deformación utilizados en un determinado caso son tan pequeños que no hay variaciones significativas de la deformación unitaria sobre el área ocupada por los medidores de deformación.

Una vez medidas las deformaciones unitarias en un punto de un cuerpo se pueden calcular los esfuerzos en el mismo punto utilizando la ley de Hooke, con tal que el material del cuerpo obedezca la ley de Hooke y se conozca su constante elástica. Si el esfuerzo σ_z , normal a la superficie del cuerpo en el punto en que se miden las deformaciones unitarias, es cero, lo cual ocurre siempre que no haya cargas normales a la superficie en el punto, las dos primeras ecuaciones (4-4) se reducen a

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E}$$

$$y \quad \epsilon_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E}$$

Estas ecuaciones se pueden invertir para obtener los esfuerzos en función de las deformaciones. El resultado es

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon_x + \nu \epsilon_y) \quad (9-19a)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon_y + \nu \epsilon_x) \quad (9-19b)$$

La cuarta de las ecuaciones (4-4) se puede invertir y utilizando $G = E/2(1 + \nu)$, dado por la ecuación (4-6), se puede escribir

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \gamma_{xy} \quad (9-19c)$$

Después de determinar las deformaciones de referencia ϵ_x , ϵ_y y γ_{xy} a partir de las mediciones indicadas, se pueden utilizar las ecuaciones (9-19) para determinar los esfuerzos de referencia correspondientes, σ_x , σ_y y τ_{xy} . Luego se pueden hallar los esfuerzos en cualquier otra dirección, los esfuerzos principales o los esfuerzos cortantes máximos, como se explicó en las secciones 9-4 a 9-6.

Ejemplo 9-14 Se miden las deformaciones unitarias en un punto de la superficie de un elemento estructural de aluminio usando una roseta de medidores de defor-

mación con ángulos θ_b y θ_c (fig. 9-29) de 45° y 95° , respectivamente. Las deformaciones unitarias medidas, utilizando la notación de la fig. 9-29, son $\epsilon_a = 400 \mu\text{m/m}$, $\epsilon_b = 300 \mu\text{m/m}$ y $\epsilon_c = -200 \mu\text{m/m}$. Determinar los esfuerzos principales correspondientes y el esfuerzo cortante máximo en este punto. Para el aluminio, $E = 70 \times 10^3 \text{ MPa}$ y $\mu = 0.3$.

SOLUCION Con esta disposición de los medidores de deformación, ϵ_x y ϵ_y son iguales a ϵ_a y ϵ_c , respectivamente. Así, $\epsilon_x = 400 \mu\text{m/m}$ y $\epsilon_y = -200 \mu\text{m/m}$. Entonces, para este caso la ecuación (9-18a) se convierte en

$$\epsilon_b = 300 = \frac{400 - 200}{2} + \frac{400 + 200}{2} \cos 90^\circ + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 90^\circ$$

de donde $\gamma_{xy} = 400 \text{ rad}$. Empleando las ecuaciones (9-19) se hallan las componentes de esfuerzo correspondientes:

$$\sigma_x = \frac{70 \times 10^3}{1 - (0.3)^2} [400 + 0.3(-200)] 10^{-6} = 26.15 \text{ MPa} \quad \text{tracción} \quad \text{Resp.}$$

$$\sigma_y = \frac{70 \times 10^3}{1 - (0.3)^2} [-200 + 0.3(400)] 10^{-6} = -6.15 \text{ MPa} \quad \text{compresión} \quad \text{Resp.}$$

$$\tau_{xy} = \frac{70 \times 10^3}{2(1 + 0.3)} (400 \times 10^{-6}) = 10.77 \text{ MPa} \quad \text{Resp.}$$

Luego, utilizando las ecuaciones (9-7) y (9-9) o bien el círculo de Mohr, se pueden determinar los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante máximo en el punto:

$$\sigma_1 = 29.4 \text{ MPa} \quad \sigma_2 = -9.42 \text{ MPa} \quad \tau_{\max} = 19.41 \text{ MPa}$$

Estos resultados también se pueden obtener hallando primero las deformaciones unitarias principales ϵ_1 y ϵ_2 y la deformación de corte máxima γ_{\max} a partir de las deformaciones de referencia ϵ_x , ϵ_y y γ_{xy} , utilizando las ecuaciones de transformación de la deformación o el círculo de Mohr, y luego calculando los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante máximo, usando las ecuaciones (9-19). Las ecuaciones (9-19) son aplicables en cualquier conjunto de coordenadas x - y en un punto y, por consiguiente, se pueden emplear para calcular los esfuerzos principales a partir de las deformaciones unitarias principales y el esfuerzo cortante máximo a partir de la deformación de corte máxima.

9-10 RELACION ENTRE E , ν Y G

En el capítulo 4 se estableció que la constante elástica G que relaciona los esfuerzos cortantes y las deformaciones unitarias en la ley de Hooke no es independiente de las constantes E y ν que relacionan los esfuerzos y las deformaciones unitarias normales. Ahora se puede explicar la relación entre G , E y ν [ecuación (4-6)].

Considérese un estado de referencia de esfuerzo plano en un punto que involucre solo un esfuerzo cortante $\tau_{xy} = \tau_0$, con $\sigma_x = \sigma_y = 0$, como se muestra en la fig. 9-30a.

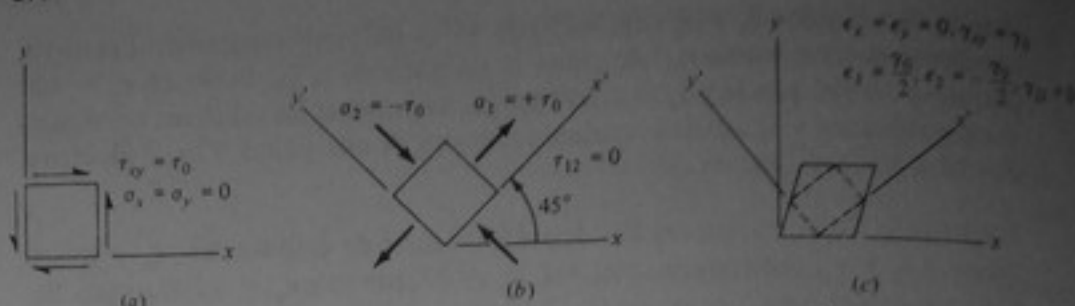


Figura 9-30 Relaciones entre las componentes de esfuerzo y de deformación unitaria que demuestran que $E = G/2(1 + \nu)$. (a) Esfuerzos de referencia en corte puro. (b) Elemento de esfuerzos principales para elemento de referencia en corte puro. (c) Deformaciones unitarias para los elementos de referencia y de esfuerzos principales.

Utilizando las ecuaciones (9-6) y (9-7) o el círculo de Mohr, se puede determinar que el elemento de esfuerzos principales para este estado de referencia de corte puro está a 45° con el elemento de referencia y que los esfuerzos principales son $\sigma_1 = +\tau_0$ y $\sigma_2 = -\tau_0$, como se indica en la fig. 9-30b.

Las deformaciones unitarias para el elemento de referencia que se muestra serían $\gamma_{xy} = \gamma_0$ y $\epsilon_x = \epsilon_y = 0$. Usando la ecuación (9-7) modificada para deformaciones unitarias en lugar de esfuerzos se halla que las deformaciones unitarias para el elemento principal son $\epsilon_1 = +\gamma_0/2$ y $\epsilon_2 = -\gamma_0/2$; usando la ecuación (9-17) con $\theta = 45^\circ$ se encuentra que la deformación de corte γ_{12} para el elemento principal es cero. Los elementos de referencia deformado y de esfuerzos principales se representan superpuestos en la fig. 9-30c con el fin de ilustrar las relaciones entre las deformaciones unitarias para estos elementos.

Las relaciones ilustradas en la fig. 9-30, es decir, la que existe entre el esfuerzo cortante para el elemento de referencia de corte puro y los esfuerzos normales para el elemento de esfuerzos normales principales, y la que existe entre la deformación de corte y las deformaciones unitarias para estos mismos elementos exigen que las ecuaciones de esfuerzo-deformación para los elementos de corte puro y de esfuerzo normal puro estén relacionadas. Para el elemento de referencia de corte puro, la ley de Hooke para esfuerzo cortante y deformación de corte es $\gamma_0 = \tau_0/G$. Para el elemento de esfuerzos normales principales, la ley de Hooke, con $\sigma_z = 0$, es $\epsilon_1 = \sigma_1/E - \nu\sigma_2/E$. Sustituyendo $\gamma_0/2$ por ϵ_1 en la primera de estas relaciones esfuerzo-deformación, se obtiene

$$\epsilon_1 = \frac{\tau_0}{2G} \quad (9-20)$$

y sustituyendo σ_1 por τ_0 y σ_2 por $-\tau_0$ en la segunda relación se tiene

$$\epsilon_1 = \frac{1 + \nu}{E} \tau_0 \quad (9-21)$$

Igualando las ecuaciones (9-20) y (9-21) se llega a la relación $G = E/2(1 + \nu)$, que es la ecuación (4-6).

9-11 RESUMEN

Los esfuerzos debidos a una combinación de acciones internas en una sección se pueden determinar, con las restricciones indicadas en la sección 9-2, sumando los esfuerzos

calculados para cada acción separada mediante las fórmulas deducidas anteriormente para carga axial, torsión, flexión y corte transversal.

Los esfuerzos de membrana en recipientes sometidos a presión son de importancia práctica y constituyen un ejemplo de esfuerzos biaxiales. Se han presentado las fórmulas para recipientes cilíndricos y esféricos. Los esfuerzos combinados mencionados anteriormente se pueden presentar simultáneamente con los esfuerzos de membrana, y se pueden combinar con ellos.

Los conceptos de transformación del esfuerzo y de la deformación son de una importancia básica. Las ecuaciones de transformación permiten calcular las componentes de esfuerzo y de deformación para cualquier sistema de coordenadas en un punto en función del conjunto de componentes de referencia, x y y . Asimismo, existen los esfuerzos normales principales, las deformaciones unitarias principales y las deformaciones de corte máximas, y se pueden determinar con base en las ecuaciones establecidas. El círculo de Mohr, que es una representación gráfica de la transformación del esfuerzo o la deformación, también se puede utilizar para la resolución de problemas.

Se describieron algunos aspectos importantes de la transformación del esfuerzo en tres dimensiones, incluyendo el concepto de variación de las componentes de esfuerzo con las direcciones de las coordenadas y la existencia de los esfuerzos normales principales y los esfuerzos cortantes máximos en tres dimensiones. También se describieron las rosetas de deformación y las relaciones entre E , ν y G , con la ayuda de las ecuaciones de transformación de esfuerzo y de deformación.

PROBLEMAS

9-1 La viga de acero $W8 \times 31$ que se muestra está cargada excéntricamente con dos fuerzas $F = 60$ klb que actúan 8 pul por encima del centroide de la sección transversal de la viga. Hallar el esfuerzo normal máximo en secciones transversales tales como la sección $a-a$.

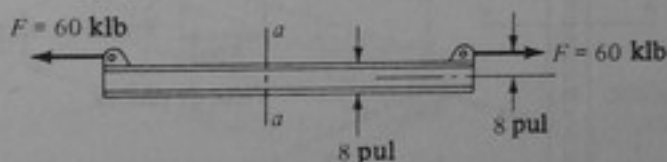


Figura P9-1

9-2 La barra semicircular de la figura tiene una sección circular de 50 mm de diámetro. Hallar el esfuerzo normal máximo en la sección $a-a$ debido a las cargas $F = 5$ kN que actúan en los centroides de las secciones extremas de la barra.

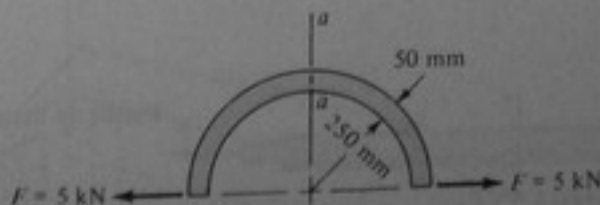


Figura P9-2

9-3 Hallar el esfuerzo normal máximo en la sección $b-b$ de la columna de soporte del tanque del problema 2-15 si esta columna es un tubo cilíndrico con un espesor de pared de 8 mm.

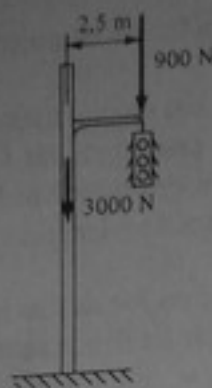


Figura P9-4

9-4 El semáforo y el poste pesan 900 N y 3000 N, respectivamente. Hallar el esfuerzo normal máximo en el poste si éste es un tubo cilíndrico con 200 mm de diámetro exterior y 6 mm de espesor de pared.

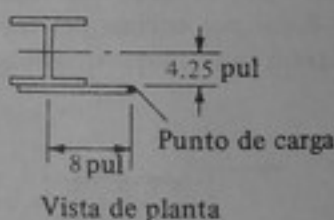
9-5 Hallar las fuerzas de agarre F que producen un esfuerzo normal máximo de 20 klb/pul en la sección $a-a$ de la grapa que se muestra. ¿Cuál es el esfuerzo normal mínimo correspondiente en la sección $a-a$?

9-6 Para el problema 2-2, hallar el esfuerzo normal máximo en una sección perpendicular al elemento EB , exactamente debajo del pasador D , si el elemento EB tiene una sección transversal rectangular de 6 pul de ancho por 2 pul de profundidad en dirección normal a la página.

9-7 La columna $W8 \times 31$ está cargada excéntricamente con una fuerza F aplicada a una cartela, como se indica. Hallar la fuerza F que produce un esfuerzo normal máximo de 120 MPa en secciones como la $a-a$.



Elevación



Vista de planta

Figura P9-7

9-8 La sección angular de $4 \times 4 \times \frac{1}{4}$ pul se carga con una fuerza F aplicada en tracción excéntrica a la cartela, como se indica. Hallar la fuerza F que produce un esfuerzo normal máximo de 150 MPa en secciones como la $a-a$. Las propiedades de la sección angular son $I_y = 1.23 \text{ pul}^4$ e $I_z = 4.85 \text{ pul}^4$.

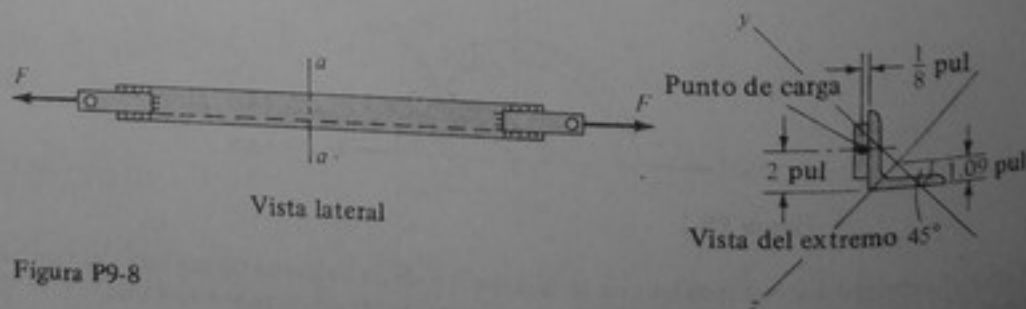


Figura P9-8

9-9 La barra cuadrada doblada que se representa en la figura tiene una sección transversal de $200 \text{ mm} \times 200 \text{ mm}$ y está cargada con una fuerza F , paralela al eje y . El origen de las coordenadas se localiza en el centroide de la sección transversal, en el extremo fijo de la barra. Hallar la fuerza F que produce un esfuerzo normal máximo de 10.000 lb/pul^2 en el extremo fijo de la barra.

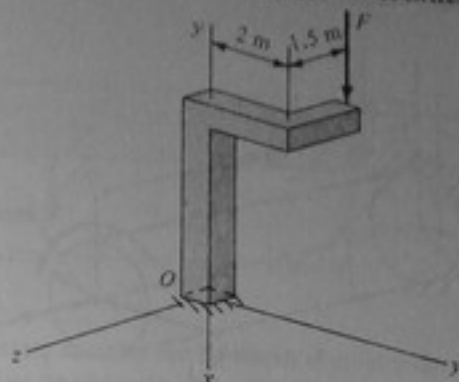


Figura P9-9

9-10 En el problema 2-25, hallar el esfuerzo cortante máximo en la sección transversal del extremo A de la barra si ésta tiene un diámetro de 100 mm .

9-11 En el problema 2-26, hallar el esfuerzo cortante máximo en la sección a si el tubo tiene un diámetro exterior de 20 mm y el espesor de la pared es 4 mm .

9-12 En el problema 2-27, hallar el esfuerzo cortante máximo en la sección a , si esa sección es circular y tiene un diámetro de $\frac{3}{8} \text{ pul}$.

9-13 La viga en voladizo de sección transversal rectangular de $4 \text{ pul} \times 6 \text{ pul}$ se somete a las cargas indicadas, las cuales actúan a través del centroide de la sección transversal en el extremo libre de la viga. Hallar los esfuerzos normal y cortante que actúan en el centroide de la sección transversal en el extremo empotrado de la viga. Hallar, además, el esfuerzo normal máximo en esta sección transversal.

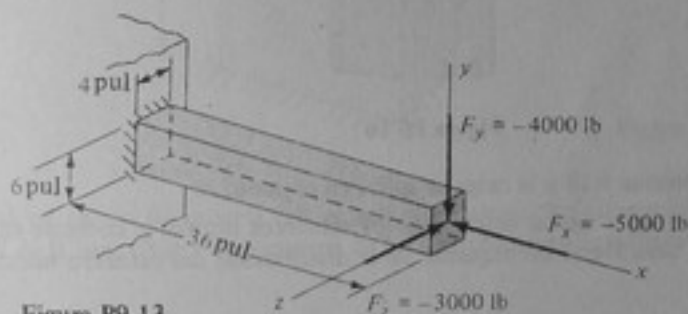


Figura P9-13

9-14 La barra redonda sólida que se muestra está fija en un extremo y libre en el otro. Hallar los esfuerzos normal y cortante en el punto A , sobre la sección transversal en el extremo fijo, debidos a la fuerza $F_y = -100 \text{ kN}$ y al momento de torsión $T = 2.0 \text{ kN} \cdot \text{m}$, aplicados en el extremo libre de la barra. Hallar, además, el esfuerzo cortante máximo en esta sección transversal.

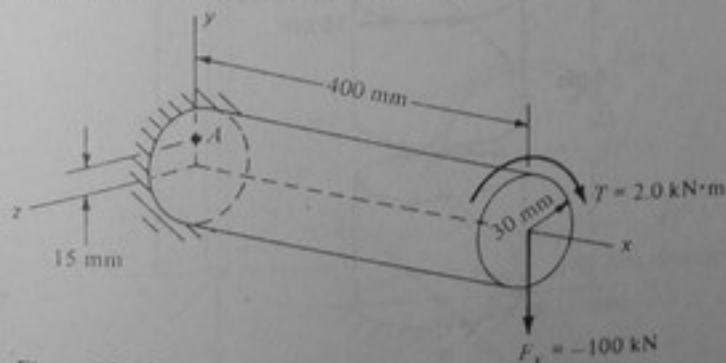


Figura P9-14

9-15 La barra redonda sólida está fija en un extremo y libre en el otro. Hallar los esfuerzos normal y cortante en el punto A , sobre la sección transversal en el extremo fijo, debidos a las fuerzas $F_x = 200$ kN y $F_z = -90$ kN y al momento de torsión $T = 1.75$ kN·m, aplicados en el extremo libre de la barra, como se indica. Hallar, además, los esfuerzos máximos, normal y cortante, en esta sección transversal.

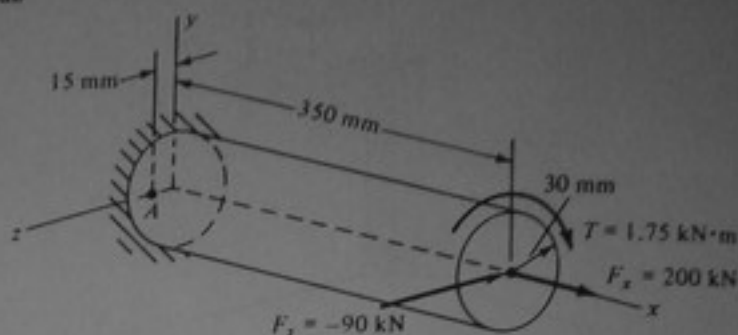


Figura P9-15

9-16 Para la sección de ala ancha, fija en un extremo y cargada en su extremo libre, como se indica, determinar los esfuerzos normales en los puntos A , B , C y D en una sección que esté lejos del extremo libre.

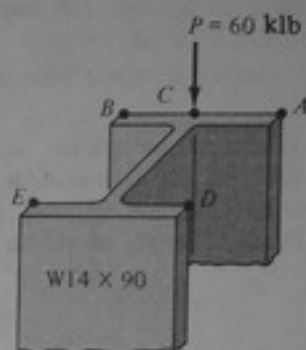


Figura P9-16

9-17 Repetir el problema 9-16 si la carga se aplica en el punto A .

9-18 Para el cilindro de la figura, determinar los esfuerzos normal y cortante en los puntos A y B de la sección en la base. Hacer un esquema de la distribución del esfuerzo normal en esa sección.

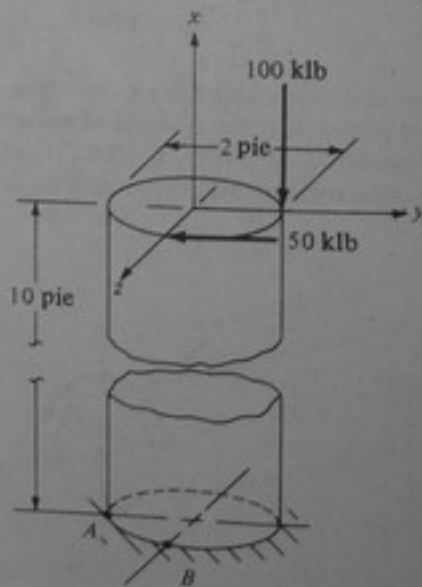


Figura P9-18

9.19 Para la viga de la figura, calcular los esfuerzos normal y cortante en los puntos A y B de la sección indicada. Hacer un esquema de las distribuciones de esfuerzos en la sección.

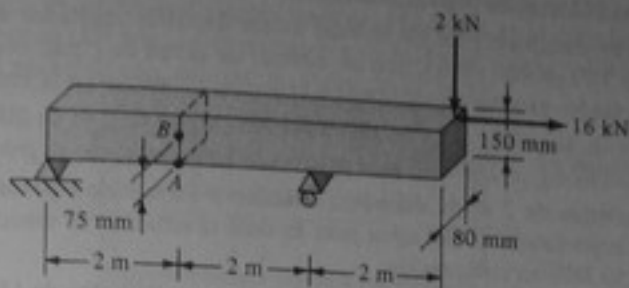


Figura P9-19

9.20 Para la viga que se muestra, calcular los esfuerzos normal y cortante en los puntos A , B , C y D de la sección en la base. Hacer un esquema de las distribuciones de esfuerzos.

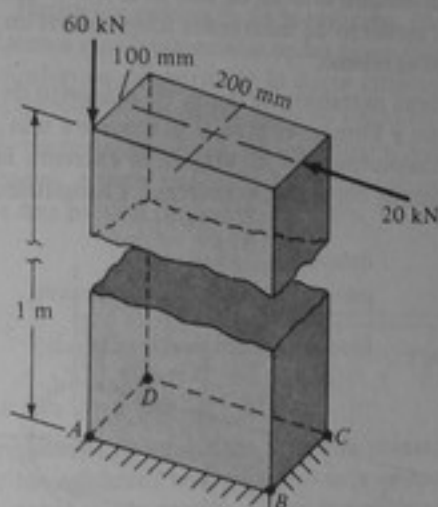


Figura P9-20

9.21 Para el sistema de apoyo de tubería que se muestra, calcular los esfuerzos normal y cortante en los puntos A y B de la base. Hacer un esquema de las distribuciones de esfuerzos.

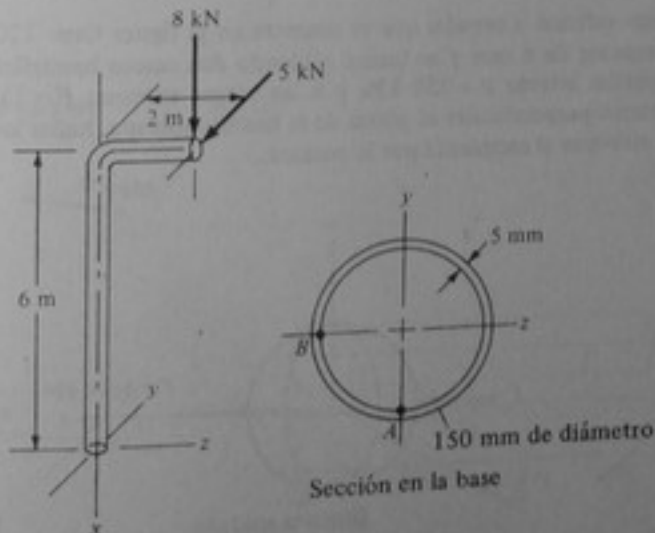


Figura P9-21

- 9-22 Hallar la presión de agua que produciría un esfuerzo de tracción circunferencial de 40 MPa en una tubería de cobre sin costura de 25 mm de diámetro exterior y 0.80 mm de espesor de pared.
- 9-23 Hallar la presión de vapor que produciría un esfuerzo de tracción circunferencial de 120 MPa en un tubo de acero de 100 mm de diámetro interior y 4 mm de espesor de pared.
- 9-24 Hallar el esfuerzo circunferencial en la base de un depósito regulador de agua cilíndrico de 12 pies de diámetro y 100 pies de altura, con un espesor de pared de $\frac{1}{2}$ pul, cuando el depósito está lleno de agua. Despreciar los efectos de cualquier restricción de apoyo en la base.
- 9-25 Hallar el espesor de la pared, t , de un globo meteorológico de 3 m de diámetro para el cual el esfuerzo circunferencial es $\sigma_h = 750$ kPa, si la presión interna del globo es $p = 600$ kPa.
- 9-26 Un recipiente esférico de 2 m de diámetro exterior y 50 mm de espesor de pared se sumerge en agua. Determinar la profundidad del agua para la cual el esfuerzo de membrana circunferencial en el recipiente es de 50 MPa en compresión.
- 9-27 Un recipiente esférico de aluminio para presión tiene un diámetro de 15 pies y un espesor de pared $t = 0.30$ pul. Hallar la presión interna que produciría un esfuerzo de membrana circunferencial de 15 klb/pul².
- 9-28 Un recipiente cilíndrico a presión, con extremos cerrados, tiene un radio de 750 mm, un espesor de pared de 6 mm y una presión interna de 800 kPa. Determinar la carga axial externa sobre el recipiente que produciría un esfuerzo de membrana longitudinal en el recipiente igual al esfuerzo de membrana circunferencial en el mismo.
- 9-29 El cilindro de la figura tiene extremos cerrados, un diámetro de 24 pul y un espesor de pared de $\frac{1}{8}$ pul. Está fijo en un extremo y libre en el otro, y se somete a una presión interna $p = 50$ lb/pul² y a una carga aplicada tangencialmente, $F = 25$ klb, en el extremo libre. Hallar los esfuerzos normales de membrana y los esfuerzos cortantes, transversal y longitudinal, en el punto A de la superficie exterior del cilindro.

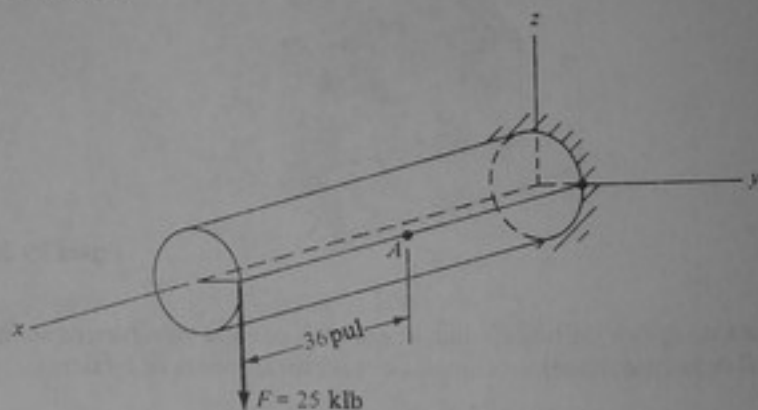


Figura P9-29

- 9-30 El recipiente esférico a presión que se muestra en la figura tiene 1200 mm de diámetro, su pared tiene un espesor de 6 mm y se forma soldando dos cascos hemisféricos. Si el recipiente se somete a una presión interna $p = 250$ kPa y a las cargas externas $F = 1500$ kN que actúan a lo largo de un diámetro perpendicular al plano de la costura soldada, hallar los esfuerzos normales en una sección que atraviese el recipiente por la costura.

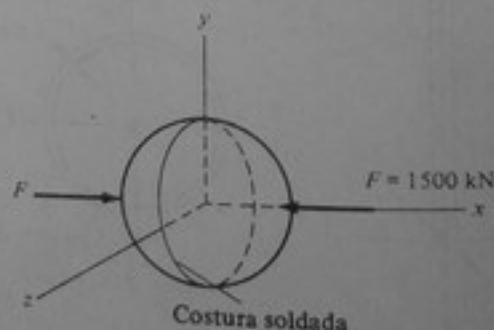


Figura P9-30

9-31 La figura muestra un corte longitudinal de un recipiente cilíndrico a presión, cuyos extremos se fijan por medio de bridas soldadas a las cuales se fijan sendas tapas planas mediante 24 pernos igualmente espaciados. Para una presión interna en el recipiente, $p = 500 \text{ lb/pul}^2$, hallar los esfuerzos de membrana, circunferencial y longitudinal, en la pared del recipiente y la fuerza axial en cada uno de los pernos de las tapas. Calcular, además, el cambio en el diámetro del cilindro debido a una presión p . Despreciar los efectos de restricción en los extremos en todos los cálculos y suponer que el recipiente está hecho de una aleación de aluminio 2024-T4.

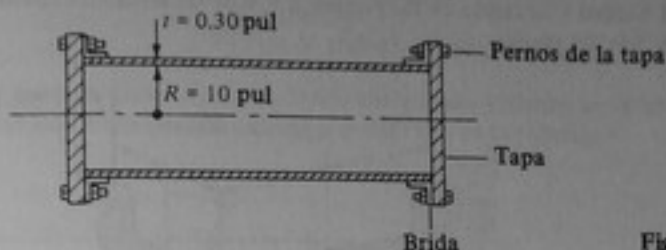


Figura P9-31

9-32 Un recipiente cilíndrico de acero para presión, de 1.5 m de diámetro, tiene sus extremos cerrados con tapas hemisféricas de acero soldadas. Tanto la parte cilíndrica como las tapas tienen un espesor de pared, $t = 10 \text{ mm}$. Hallar los esfuerzos de membrana, circunferencial y longitudinal, en la porción cilíndrica y los esfuerzos circunferenciales en las tapas debidos a una presión interna $p = 300 \text{ kPa}$. Hallar, además, el cambio en diámetro de la parte cilíndrica y de las tapas debido a esta presión. Despreciar los efectos de restricción de las tapas en todos los cálculos.

9-33 La figura representa un corte longitudinal de un cilindro hidráulico y un pistón de acero. Hallar los esfuerzos de membrana, circunferencial y longitudinal, en el cilindro y el cambio en el diámetro del cilindro debido a una presión interna $p = 10 \text{ MPa}$.

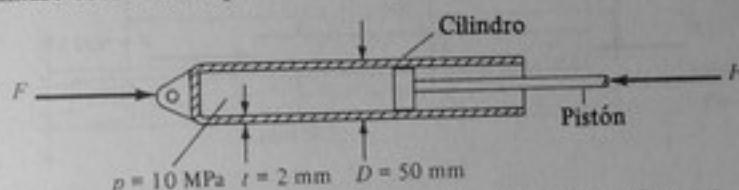


Figura P9-33

9-34 Un depósito cilíndrico regulador de agua tiene 9 pies de diámetro, $\frac{1}{16}$ pul de espesor de pared y 120 pies de altura. Calcular los esfuerzos normal y cortante en los puntos A y B de las secciones circunferencial y longitudinal, debidos a la presión del agua cuando el tanque está lleno y debidos a una carga de viento de 18 lb/pie^2 que actúa sobre el área proyectada del tanque en la dirección y, como se indica. Despreciar el peso del tanque y los efectos de restricción en el extremo inferior.

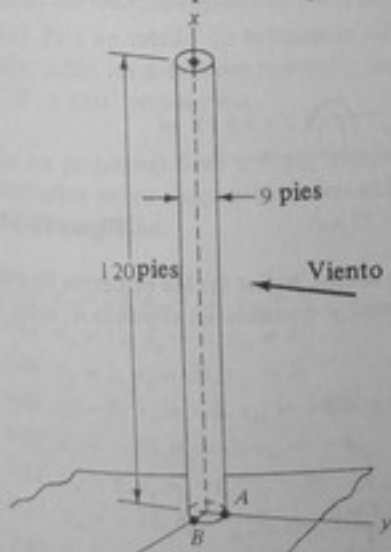


Figura P9-34

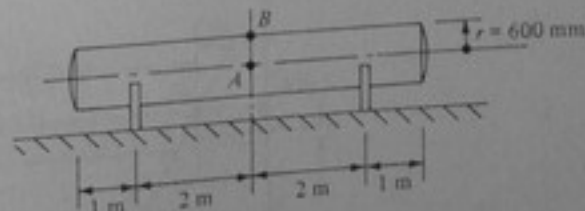


Figura P9-35

- 9-35 El tanque cilíndrico horizontal, apoyado en el piso, tiene un espesor de pared, $t = 4$ mm, y almacena un líquido a presión. El tanque y su contenido pesan 14 kN por metro de longitud y el tanque está sometido a una presión interna $p = 210$ kPa. Calcular los esfuerzos normal y cortante en los puntos A y B de las secciones circunferencial y longitudinal, sobre la superficie del tanque.
- 9-36 Se puede suponer que el tubo mostrado tiene extremos cerrados y está fijo en un extremo y libre en el otro, donde se aplica una fuerza $F_y = -300$ N. El tubo tiene un diámetro exterior de 100 mm, un espesor de pared de 5 mm y está sometido a una presión interna $p = 8$ MPa. Calcular los esfuerzos normal y cortante en los puntos A y B de las secciones circunferencial y longitudinal, sobre la superficie del tanque.

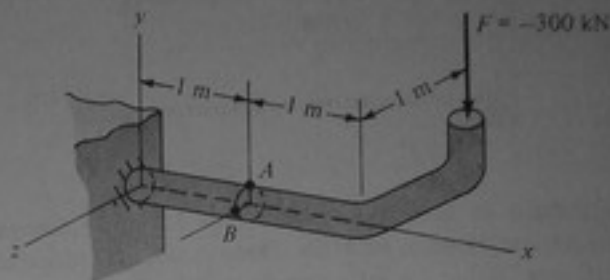


Figura P9-36

- 9-37 Para la barra de 250 mm de anchura y 50 mm de espesor que se muestra, hallar (a) los esfuerzos de referencia σ_x , σ_y y τ_{xy} en el punto A y (b) los esfuerzos normal y cortante en el punto A , situado en el plano $a-a$.

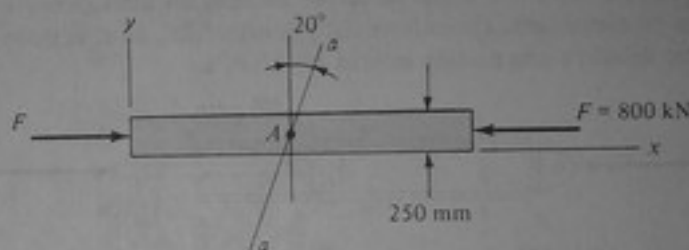


Figura P9-37

- 9-38 Para el elemento sólido de 75 mm de diámetro, sometido a torsión, hallar (a) los esfuerzos de referencia σ_x , σ_y y τ_{xy} en el punto A situado sobre la superficie del elemento y (b) los esfuerzos normal y cortante en el punto A situado sobre un plano que forma un ángulo de 45° con la normal a la superficie del elemento.

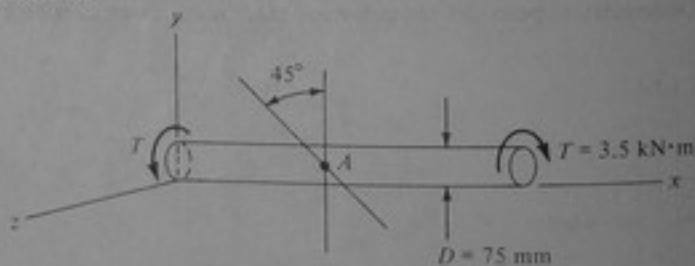


Figura P9-38

- 9-39 Para la viga en voladizo de 10 pul de altura y 2 pul de ancho, hallar (a) los esfuerzos de referencia σ_x , σ_y y τ_{xy} en el punto A y (b) los esfuerzos normal y cortante en el punto A , sobre el plano $a-a$.

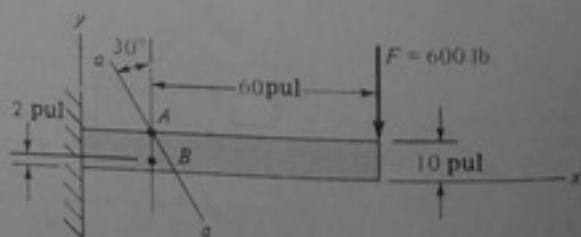


Figura P9-39

940 Dos piezas de madera se pegan para formar un elemento, el cual se somete a tracción. Calcular los esfuerzos normal y cortante en la junta pegada.

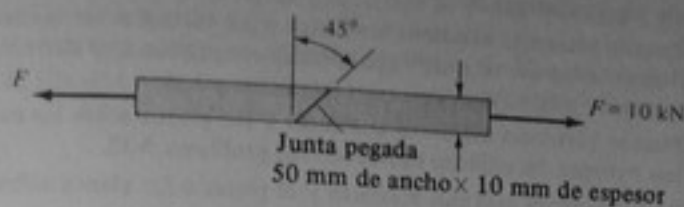


Figura P9-40

941 La tubería que se muestra tiene la costura helicoidal soldada. Calcular los esfuerzos normal y cortante en la costura debidos a una presión interna $p = 100$ kPa en la tubería.

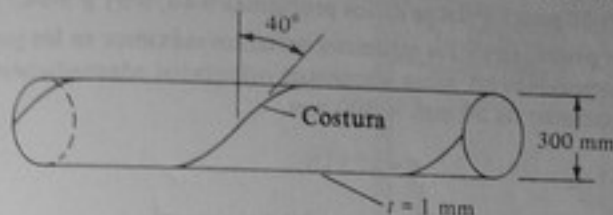


Figura P9-41

942 La viga en voladizo de la figura es de madera y tiene 4 pul de ancho y 12 pul de altura. En el punto A la fibra de la madera forma un ángulo de 20° con la horizontal. Calcular los esfuerzos normal y cortante en el punto A sobre un plano paralelo a la fibra de la madera.

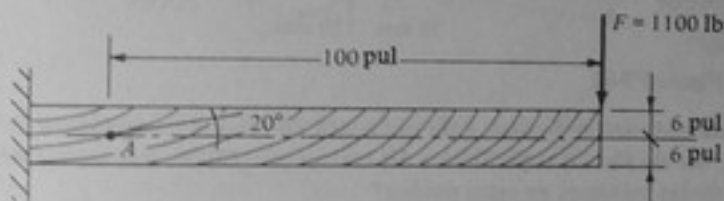


Figura P9-42

943 Para un estado de referencia con los esfuerzos $\sigma_x = 20$ MPa, $\sigma_y = 5$ MPa y $\tau_{xy} = 8$ MPa, hallar los esfuerzos normal y cortante en planos cortantes que formen ángulos de 30° , 60° , 120° y 150° con el eje x.

944 En el problema 9-39, hallar los esfuerzos normal y cortante en el punto B, sobre planos cortantes que formen ángulos de 30° , 60° , 120° y 150° con el eje x.

945 Para un estado de referencia con los esfuerzos $\sigma_x = -5$ MPa, $\sigma_y = 10$ MPa y $\tau_{xy} = -6$ MPa, hallar los esfuerzos normal y cortante en planos cortantes que formen ángulos de 30° , 60° , 120° , y 150° con el eje x.

En los problemas 9-46 a 9-54, hallar los esfuerzos principales y los esfuerzos cortantes máximos e indicarlos sobre elementos orientados adecuadamente, para los estados de referencia de esfuerzo plano que se dan.

946 $\sigma_x = 20$, $\sigma_y = 12$, $\tau_{xy} = 5$.

947 $\sigma_x = 12$, $\sigma_y = 4$, $\tau_{xy} = 4$.

948 $\sigma_x = 2$, $\sigma_y = 26$, $\tau_{xy} = 5$.

949 $\sigma_x = 8$, $\sigma_y = -8$, $\tau_{xy} = -6$.

950 $\sigma_x = -10$, $\sigma_y = 2$, $\tau_{xy} = -8$.

951 $\sigma_x = 4$, $\sigma_y = -6$, $\tau_{xy} = 4$.

952 $\sigma_x = -12$, $\sigma_y = -4$, $\tau_{xy} = -3$.

953 $\sigma_x = -6$, $\sigma_y = -12$, $\tau_{xy} = 4$.

954 $\sigma_x = -18$, $\sigma_y = -4$, $\tau_{xy} = -7$.

- 9-55 Hallar los esfuerzos cortantes máximos absolutos y los planos sobre los cuales actúan, en un punto de la superficie exterior de un recipiente esférico a presión que tiene una relación radio/espesor de 100 y una presión interna p .
- 9-56 Hallar los esfuerzos cortantes máximos absolutos y los planos sobre los cuales actúan, en un punto de la superficie exterior de un recipiente cilíndrico a presión que tiene una relación radio/espesor de 50 y una presión interna p .
- 9-57 Hallar los esfuerzos cortantes máximos absolutos y los planos sobre los cuales actúan, en un punto de la superficie exterior del cilindro hidráulico del problema 9-33.
- 9-58 Hallar el esfuerzo cortante máximo absoluto y el plano o los planos sobre los cuales actúa, para los datos de los problemas 9-46, 9-49 y 9-52, suponiendo en cada caso que $\sigma_x = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$.
- 9-59 Repetir el problema 9-58 para los datos de los problemas 9-47, 9-50 y 9-53.
- 9-60 Repetir el problema 9-58 para los datos de los problemas 9-48, 9-51 y 9-54.
- 9-61 Calcular los esfuerzos principales y los esfuerzos cortantes máximos en los puntos A , B y C de la viga que se muestra y representarlos sobre elementos orientados adecuadamente. La viga tiene una sección transversal rectangular de $50 \text{ mm} \times 300 \text{ mm}$.

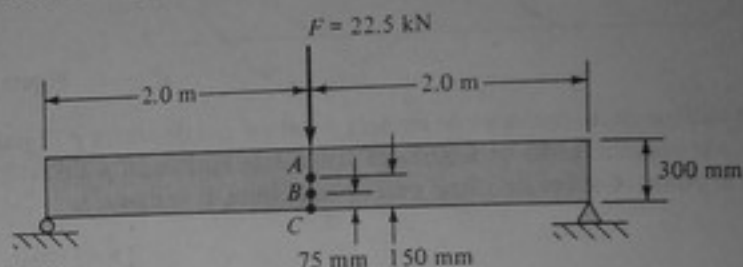


Figura P9-61

- 9-62 Un elemento redondo se somete a un momento de torsión que produce esfuerzos cortantes por torsión, τ_0 , en los puntos superficiales del elemento. ¿Cuáles son los esfuerzos principales y los esfuerzos cortantes máximos en estos puntos?
- 9-63 Un elemento cargado axialmente se somete a una carga concéntrica que produce esfuerzos axiales uniformes, σ_0 , en el elemento. ¿Cuáles son los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante máximo en el elemento?
- 9-64 Determinar los esfuerzos principales y los esfuerzos cortantes máximos, así como los planos sobre los cuales actúan, en los puntos A y B del problema 9-34.
- 9-65 Determinar los esfuerzos principales y los esfuerzos cortantes máximos, así como los planos sobre los cuales actúan, en los puntos A y B del problema 9-35.
- 9-66 Determinar los esfuerzos principales y los esfuerzos cortantes máximos, así como los planos sobre los cuales actúan, en los puntos A y B del problema 9-36.
- 9-67 Hallar los esfuerzos principales y los esfuerzos cortantes máximos en el punto A , situado sobre la superficie del eje que se muestra.

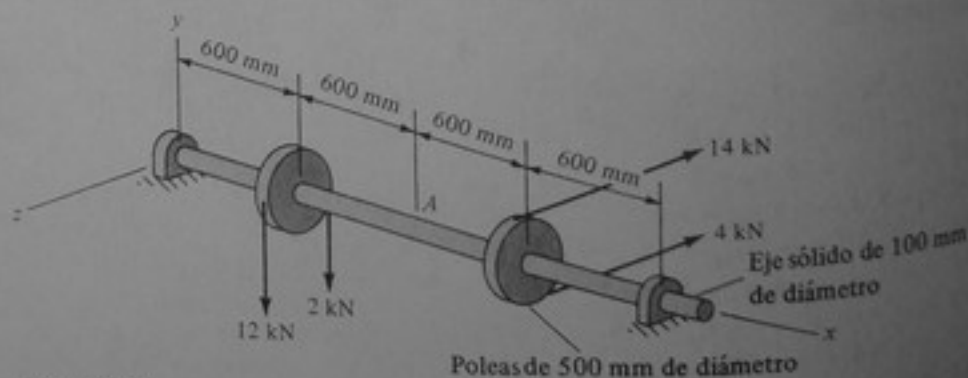


Figura P9-67

9-68 Hallar los esfuerzos principales y los esfuerzos cortantes máximos en el punto A , situado sobre la superficie del cilindro del problema 9-29.

9-69 La señal que se muestra en la figura pesa 2,000 lb y está sometida a presiones del viento de 30 lb/pul^2 que actúan en el sentido negativo de z . El tubo de soporte tiene un diámetro de 12 pul y un espesor de pared de $\frac{1}{4}$ pul. Hallar los esfuerzos principales y los esfuerzos cortantes máximos en los puntos A y B , situados en la superficie del tubo de apoyo, sobre los ejes z e y , respectivamente.



Figura P9-69

9-70 Resolver el problema 3-16 y determinar el cambio en las longitudes de las diagonales AD y CB utilizando las ecuaciones de transformación de la deformación o el círculo de Mohr de deformación.

9-71 Resolver el problema 3-17 y hallar las deformaciones unitarias en las diagonales AD y CB utilizando las ecuaciones de transformación de la deformación o el círculo de Mohr de deformación.

9-72 Resolver el problema 3-18 y hallar las deformaciones unitarias en las aristas AB y CD utilizando las ecuaciones de transformación de la deformación o el círculo de Mohr de deformación.

9-73 Hallar las deformaciones unitarias principales en la placa del problema 3-14 suponiendo que la deformación de la placa es uniforme.

9-74 Hallar las deformaciones unitarias principales para los elementos situados sobre la superficie del tubo del problema 3-15.

9-75 ¿Cuál es la deformación de corte máxima en la placa del problema 3-16? Suponer que la deformación de la placa es uniforme.

En los problemas 9-76 a 9-78, hallar las deformaciones unitarias principales y la deformación de corte máxima, así como las direcciones y sentidos correspondientes, para los estados de referencia de deformación plana.

9-76 $\epsilon_x = 0.001$, $\epsilon_y = 0.001$, $\gamma_{xy} = 0$.

9-77 $\epsilon_x = 0.001$, $\epsilon_y = -0.001$, $\gamma_{xy} = 0.002$.

9-78 $\epsilon_x = 0$, $\epsilon_y = -0.002$, $\gamma_{xy} = 0.001$.

Los datos que se dan en los problemas 9-79 a 9-81 fueron medidos con rosetas de medidores de deformación. Determinar los valores, las direcciones y los sentidos de las deformaciones unitarias principales y las deformaciones de corte máximas. Todos los valores dados están en micrómetros por metro.

9-79 $\epsilon_a = 1250$, $\epsilon_b = -800$, $\epsilon_c = -250$.

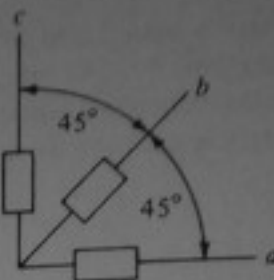


Figura P9-79

9-80 $\epsilon_a = 600$, $\epsilon_b = 2000$, $\epsilon_c = 3000$.

9-81 $\epsilon_a = -800$, $\epsilon_b = 600$, $\epsilon_c = -2200$.

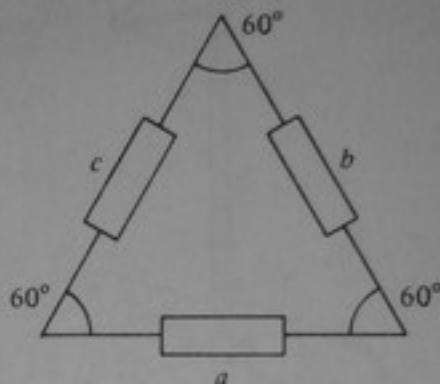


Figura P9-81

9-82 Una roseta de medidor de deformación se fija a la superficie de una pieza de un avión, hecha de aluminio 2024-TA, y registra los siguientes datos: $\epsilon_a = 200 \mu\text{m/m}$, $\epsilon_b = -1050 \mu\text{m/m}$ y $\epsilon_c = -425 \mu\text{m/m}$. Hallar los esfuerzos principales en el punto de aplicación de la roseta.

9-83 Una roseta de medidor de deformación se fija a la superficie de una pieza de acero de una máquina y se obtienen las deformaciones unitarias $\epsilon_a = -450 \mu\text{m/m}$, $\epsilon_b = -125 \mu\text{m/m}$ y $\epsilon_c = -700 \mu\text{m/m}$. Hallar los esfuerzos principales en el punto de aplicación de la roseta.

9-84 Repetir el problema 9-83 si las deformaciones unitarias medidas son $\epsilon_a = -500 \mu\text{m/m}$, $\epsilon_b = 370 \mu\text{m/m}$ y $\epsilon_c = -1365 \mu\text{m/m}$.

PARTE II

**Resistencia y comportamiento de
componentes estructurales**

Capítulo 10

Criterios de diseño

10-1 INTRODUCCION

Una estructura es técnicamente aceptable si satisface todos los requerimientos de seguridad y de funcionamiento. La seguridad exige que las cargas de diseño sean soportadas adecuadamente durante la vida proyectada de la estructura. Las cargas de diseño pueden establecerse mediante códigos y especificaciones o con base en cargas reales de servicio ya conocidas. El diseño final, así como el procedimiento utilizado para llevarlo a cabo, están muy determinados por la carga. Por ejemplo, un análisis se basa en el comportamiento estático o en el comportamiento dinámico, según la carga. La vida útil de una estructura específica se termina cuando las condiciones de servicio cambian de tal modo que la estructura se vuelve antieconómica o insegura, o, cuando ocurre una falla. Las fallas se pueden clasificar con referencia a la capacidad de servicio o a la resistencia. La falla por capacidad de servicio se relaciona con los criterios que rigen el uso normal respecto a deformaciones, desplazamientos, vibraciones o esfuerzos inaceptables o cualquier otro daño indeseable. La falla por resistencia está asociada con el derrumbamiento o las deformaciones inelásticas de magnitudes inaceptables. Según las condiciones de carga y el tipo de estructura, son posibles diferentes tipos de falla por resistencia. En muchos casos los criterios y los procedimientos de diseño dependen del tipo de falla que se espera que pueda ocurrir. Generalmente son posibles varios tipos diferentes de fallas. En consecuencia, hay necesidad de considerar simultáneamente varios criterios de diseño.

En las siguientes secciones se estudia la necesidad de los márgenes de seguridad y varios criterios de diseño.

10-2 MARGENES DE SEGURIDAD

Usualmente las cargas de trabajo se establecen mediante códigos o especificaciones o son cargas de servicio determinadas. Por lo general estas cargas representan una idealización de las condiciones reales de carga.

La condición que establece que una estructura debe diseñarse de tal modo que su resistencia (o capacidad) mínima calculada sea mayor que la carga de diseño máxima estimada es común entre todos los criterios clásicos de diseño. Por esta razón se intro-

duce un *factor de seguridad* o *factor de carga* mayor que la unidad. Los dos factores se seleccionan sin tener un conocimiento preciso de los valores verdaderos de la carga y la seguridad, y con frecuencia representan factores de ignorancia.

En el método del *esfuerzo admisible* o *diseño elástico* el margen de seguridad contra la fluencia local o completa se determina permitiendo esfuerzos que sean iguales al esfuerzo de fluencia dividido por un factor de seguridad (FS). Así,

$$\sigma_{adm} = \frac{\sigma_{flu}}{FS} \quad (10-1)$$

En términos más generales, el factor de seguridad se puede expresar en la forma

$$FS = \frac{\sigma_{crit}}{\sigma_{adm}} \quad (10-2)$$

En el método del *diseño elástico* generalmente se toma el esfuerzo de fluencia, σ_{flu} , como esfuerzo crítico. Para materiales más frágiles se emplea el esfuerzo final, σ_{fin} , a menudo en combinación con un factor mayor de seguridad.

En el método del *diseño plástico*, la seguridad contra el colapso se establece multiplicando las cargas de trabajo L_w por un factor de carga FC. Entonces, la carga de colapso o carga final L_f se puede expresar mediante

$$L_f = FC \times L_w \quad (10-3)$$

La introducción de un margen de seguridad, ya sea como factor de seguridad o como factor de carga, exige un examen adicional. La idea de que los márgenes de seguridad sólo sirven para proteger una estructura contra sobrecarga representa una simplificación de la acción combinada de varios factores que pueden poner en peligro la seguridad de la estructura. A continuación presentamos más detalladamente estos factores.

Métodos de análisis

Por razones prácticas, en la mayoría de casos los métodos de análisis y de diseño son más bien aproximados y limitados. Este hecho introduce la posibilidad de desviaciones de los esfuerzos de diseño calculados o de las cargas admisibles.

Propiedades de los materiales

Las propiedades supuestas para un material cualquiera siempre representan idealizaciones simplificantes. Por ejemplo, se supone que el acero es un material homogéneo e isotrópico y su comportamiento es, idealmente, elástico lineal o perfectamente elástico-plástico. El conocimiento de la estructura básica de un acero cualquiera pone en evidencia que todas estas suposiciones son aproximaciones. Las propiedades físicas de cualquier tipo de material, tales como el esfuerzo de fluencia y la resistencia a la tracción, varían considerablemente. En consecuencia, las normas requeridas por las especificaciones generalmente representan valores extremos (máximos o mínimos) más que valores promedios. Por tanto, las idealizaciones del material y las variaciones en las propiedades físicas exigen un margen de seguridad adicional para garantizar que un diseño sea seguro.

Dimensiones de las secciones

Debido a las variaciones inherentes a los procesos de manufactura, las dimensiones de la sección transversal de un elemento pueden ser menores o mayores que las especificadas. La mayoría de las especificaciones permite tolerancias máximas. Aunque se mantengan las tolerancias mediante una manufactura cuidadosa o controles de aceptación, los esfuerzos pueden sobrepasar a los calculados con base en una sección "verdadera".

Calidad

La fabricación con calidad deficiente puede dar por resultado secciones de tamaño menor al normal, producción de esfuerzos altos y esfuerzos encerrados, particularmente en secciones armadas.

Esfuerzos residuales

Debido a los procesos de manufactura, algunos materiales manufacturados, tales como el acero, poseen *esfuerzos residuales*. Las desigualdades en la velocidad de enfriamiento producen esfuerzos residuales de compresión en las partes de la sección transversal que se enfrían primero. En un perfil I estas áreas generalmente están localizadas en los extremos del ala y en la región media del alma. La intensidad de los esfuerzos residuales puede variar mucho; para aceros de estructura normal son muy corrientes esfuerzos residuales de compresión de aproximadamente 13 klb/pul² (90 MPa).

En las secciones soldadas se pueden desarrollar patrones de esfuerzos residuales muy altos, además de los esfuerzos residuales ya presentes en los elementos componentes. Según la técnica de soldadura y la secuencia empleada, dichos patrones pueden ser bien diferentes de los que se observan comúnmente en vigas laminadas.

Aunque las fuerzas internas producidas por los esfuerzos residuales en una sección están en equilibrio, los esfuerzos producidos por la carga externa actúan junto con los esfuerzos residuales ya presentes en la sección. El patrón de esfuerzo resultante puede diferir tanto del que existiría sin esfuerzos residuales que es necesario introducir consideraciones especiales de diseño.

Variaciones de longitud

Especialmente en sistemas estructurales que exhiben redundancia interna, pueden producirse esfuerzos por falta o exceso en la longitud, debido a las variaciones en la fabricación o a mano de obra deficiente. Estas variaciones en la longitud pueden producir esfuerzos de "ajuste", además de los esfuerzos inducidos por las cargas.

Condiciones de servicio

El uso previsto de una estructura, si es temporal o permanente, para uso público o privado, así como la duración y la frecuencia de las cargas que se esperan, influyen sobre la magnitud del margen de seguridad necesario. Las condiciones ambientales, tales como las temperaturas extremas, la humedad y la presencia de agentes corrosivos también

pueden exigir un aumento en el margen de seguridad, debido a la posibilidad de reducción de las áreas de las secciones transversales, la creación de fracturas frágiles y los esfuerzos por temperatura excesiva.

Tipo de falla

Aun en el diseño por esfuerzo admisible, se ha reconocido que la severidad de una posible falla debe tener influencia sobre la magnitud del factor de seguridad. Por ejemplo, el factor de seguridad contra inestabilidad es mayor que para la mayoría de los otros tipos de falla.

10-3 MODOS DE FALLA

La mayor parte de materiales estructurales fallan en forma *dúctil* o en forma *frágil*. Tal como se indicó en el capítulo 4, los materiales dúctiles exhiben fluencia plástica cuando se ensayan en tracción a la temperatura del ambiente y a velocidad normal de deformación. La *falla* dúctil se caracteriza por la fluencia que resulta del deslizamiento a lo largo de planos orientados críticamente, y por lo común está acompañada por grandes deformaciones. Por otra parte, la falla frágil se caracteriza por la separación o partición de las fibras. Aunque, en general, cualquier tipo de falla es indeseable, desde un punto de vista de ingeniería una falla de tipo frágil es *altamente* indeseable, debido a que con frecuencia hay muy poca o ninguna advertencia de una falla inminente y el posible colapso. La falla debida a la fluencia, que generalmente es más gradual y va acompañada por grandes deformaciones, es menos catastrófica.

También se puede hacer una distinción entre diferentes tipos de falla, tales como *falla local*, *falla de la sección* y *fallas de la estructura total* (falla estructural, para abreviar). La falla local en un elemento o conexión particular puede producir o no una falla de la sección. De manera análoga, una o más fallas de secciones pueden producir la inestabilidad o el colapso de toda la estructura.

10-4 CRITERIO DE FLUENCIA

Uno de los métodos más antiguos de diseño se basa en el criterio de que una estructura ha fallado si se han alcanzado los esfuerzos nominales de fluencia en cualquier localización de la estructura. En este método el alcanzarse el esfuerzo de fluencia en esa localización se considera crítico para la estructura. Entonces, con base en un comportamiento elástico-lineal ideal acorde con la ley de Hooke, el diseño se basa en la suposición de que los esfuerzos no deben sobrepasar un esfuerzo de trabajo admisible dado en ningún lugar de la estructura. La determinación de los esfuerzos de trabajo admisibles se basa en experiencias anteriores con las debidas tolerancias para las variaciones en el material y en las propiedades de la sección, la posible variación de la carga de trabajo, los esfuerzos secundarios, los esfuerzos residuales, etc. La mayoría de los códigos y especificaciones establecen esfuerzos admisibles máximos dividiendo el esfuerzo de fluencia por un "factor de seguridad" adecuado [ecuación (10-1)]. Este método de diseño se conoce comúnmente como el método de diseño elástico, pero

sería más adecuado llamarlo método de diseño del esfuerzo admisible o del esfuerzo de trabajo. Debe observarse que la *fluencia local* ocurre en casi todas las estructuras debido a la concentración de esfuerzos, a los esfuerzos residuales y al hecho de que los materiales realmente no son homogéneos. El criterio de fluencia se refiere a la fluencia producida por las cargas reales aplicadas. Por esta razón, es aconsejable emplear materiales con suficiente ductilidad para tolerar la fluencia local que se presenta siempre en las estructuras.

El criterio de fluencia sólo es aplicable a materiales que tienen, en general, un comportamiento dúctil. Como se verá en la sección 10-7, bajo ciertas condiciones de servicio dichos materiales se pueden comportar en forma frágil, en cuyo caso el criterio de fluencia no es aplicable.

Además de los materiales que tienen en general un comportamiento dúctil, hay varios materiales estructurales que se comportan en forma frágil. Ejemplos de tales materiales son el concreto, algunos aceros de alta resistencia y algunas aleaciones de aluminio. Para este tipo de materiales es inapropiado el uso del criterio de fluencia y en su lugar se debe utilizar la resistencia final como esfuerzo crítico, junto con un factor de seguridad mayor.

10-5 CRITERIO DE PLASTICIDAD

El método del diseño plástico se basa en el hecho de que llegar hasta el esfuerzo de fluencia en una determinada localización de una estructura no implica necesariamente que el elemento o la unión estructural falle totalmente. La fluencia local en un punto no produce automáticamente un flujo plástico incontrolado ni la falla de la sección en ese punto. Además, las restricciones de la estructura total y las condiciones de apoyo pueden ser tales que, aún si ocurre la falla en la sección, no se presente falla o colapso de la estructura. De este modo, hay tres tipos diferentes de *fenómenos de acción concertada* que se pueden presentar separadamente, simultánea o consecutivamente antes de que el colapso estructural, las deformaciones excesivas o la inestabilidad conduzcan a una falla estructural. Estos tres fenómenos de acción concertada son:

1. El primer fenómeno que ocurre cuando se emplea acero como material estructural es el ajuste o adaptación de los esfuerzos dentro de una sección transversal o en todo un elemento. Esta igualación de esfuerzos antes de que tenga lugar la falla en una sección ha sido reconocida por los ingenieros y se acepta como una base de trabajo para el diseño elástico. Las suposiciones de distribución uniforme de esfuerzos en elementos cargados axialmente, iguales cargas por perno en las juntas de pernos y el no tomar en cuenta las concentraciones de esfuerzos y los esfuerzos residuales, son simplificaciones que se utilizan comúnmente en el diseño por esfuerzo admisible, con base en la igualación de los esfuerzos como resultado de la fluencia plástica localizada. En el caso de una barra cargada axialmente que tiene un agujero redondo, se sabe que la suposición de una distribución uniforme de los esfuerzos (fig. 10-1) a través de la sección neta es incorrecta. Sin embargo, un diseño por esfuerzo admisible basado en una distribución uniforme del esfuerzo de trabajo se justifica en el sentido de que la sección fallará únicamente cuando el esfuerzo de fluencia alcance toda la sección. Esta última distribución de esfuerzos es uniforme

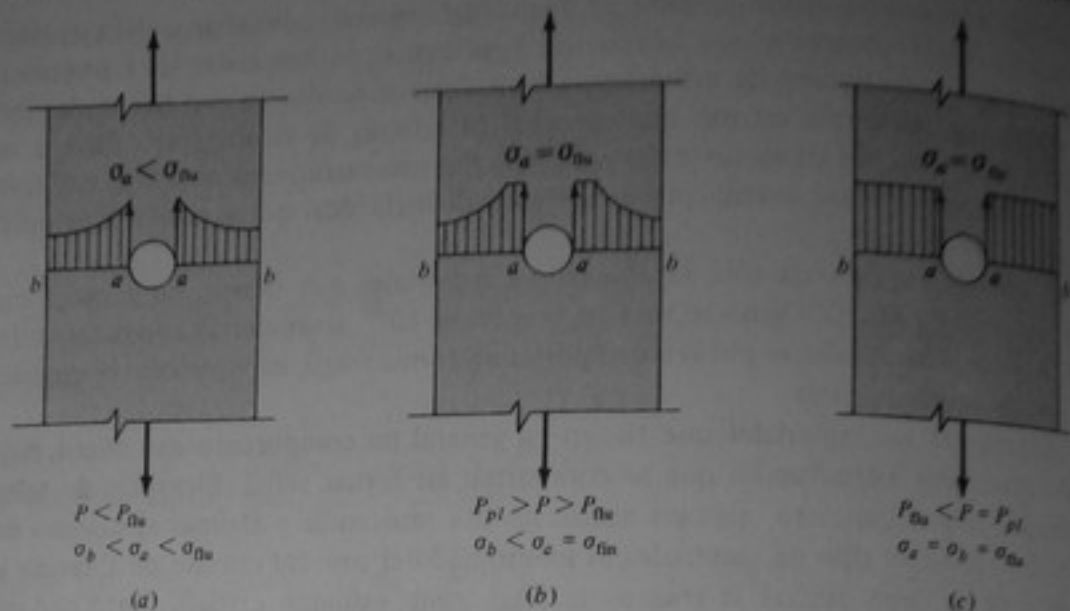


Figura 10-1 Igualación o adaptación de los esfuerzos en una sección transversal.

y, por esta razón, se aplica un factor de seguridad a la carga final. En la carga de trabajo puede tener lugar la fluencia, no obstante la suposición hecha en el diseño por esfuerzo admisible en el sentido de que la primera fluencia representa falla. El ejemplo de una barra cargada axialmente también demuestra que no resulta ninguna ganancia económica al considerar el concepto más correcto de carga final, con tal que se tomen iguales el factor de seguridad y el factor de carga. La igualación de esfuerzos en secciones sometidas a flexión pura, que conduce a la formación de articulaciones plásticas, representa una ampliación lógica de este fenómeno (fig. 10-2). El ejemplo de una sección sometida a flexión, en contraste con el ejemplo anterior para una barra cargada axialmente, demuestra que se pueden utilizar secciones más económicas considerando la capacidad de momento plástico, M_{pl} , en lugar del momento al empezar la fluencia, M_{flu} . La capacidad adicional de momento de flexión que se obtiene teniendo en cuenta la plastificación total de una sección sometida a flexión se denomina a menudo *capacidad de la primera reserva* y se expresa en función del *factor de forma* $f = M_{pl}/M_{flu}$.

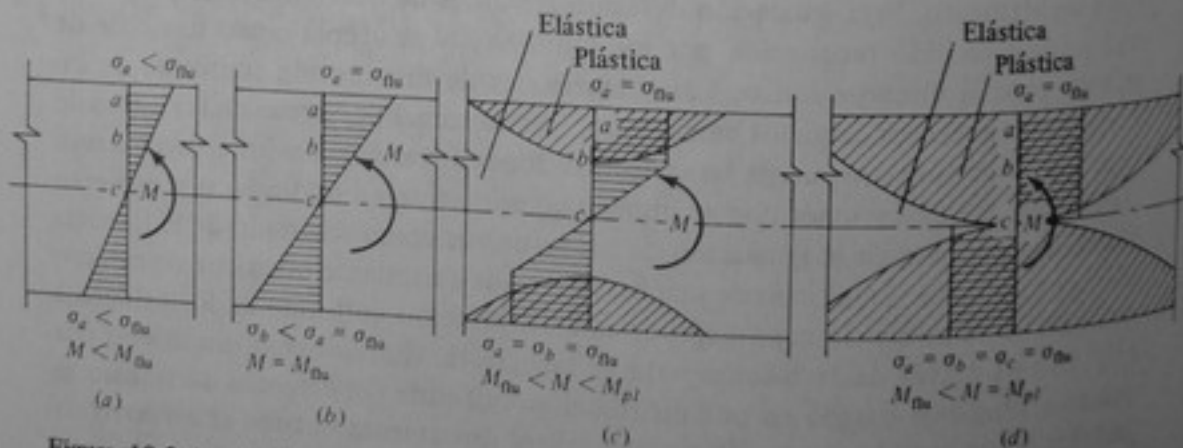


Figura 10-2 Igualación de esfuerzos en una sección transversal de una viga sometida a flexión.
(a) Elástica. (b) Elástica. (c) Elastoplástica. (d) Articulación plástica.

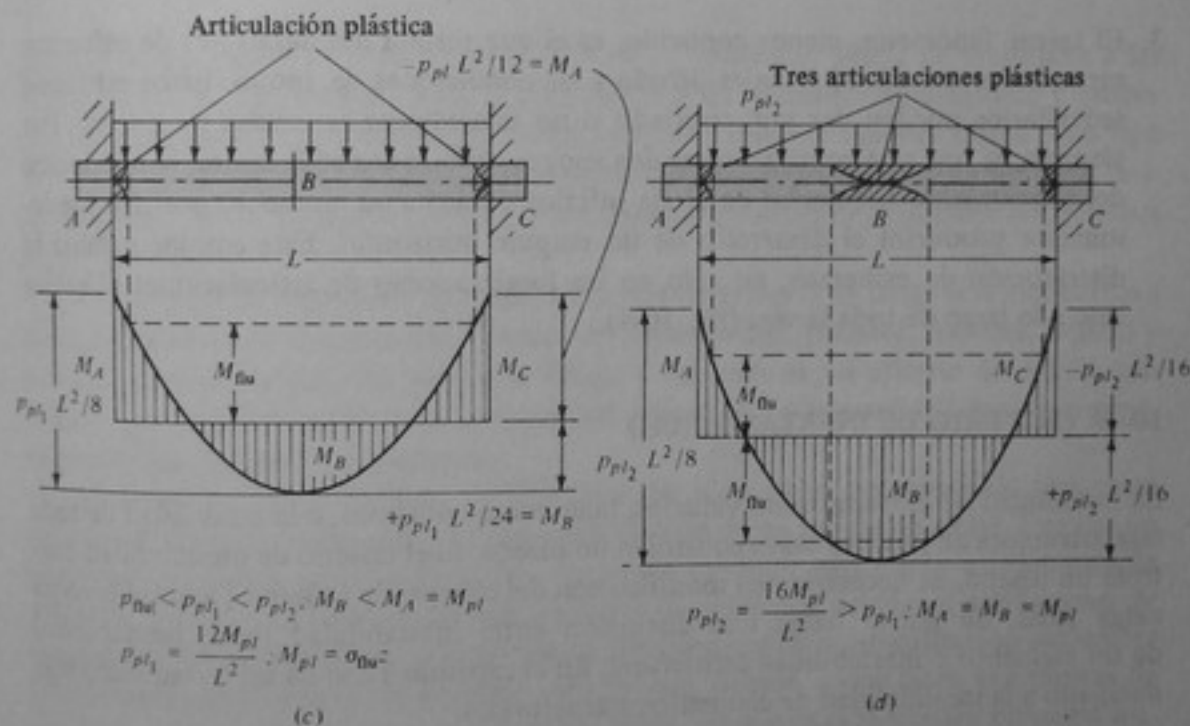
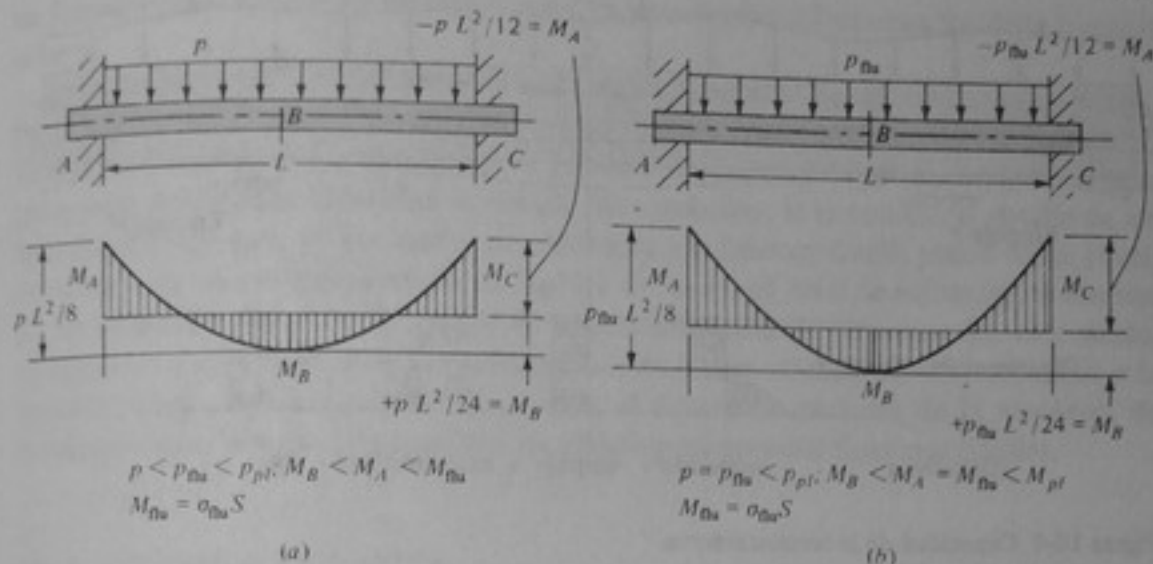


Figura 10-3 Vigas empotradas de sección uniforme sometidas a diferentes cargas.

- Un segundo fenómeno que puede ocurrir en una estructura de acero debido a la falla en una sección es la redistribución de las fuerzas internas. En las vigas continuas y las armaduras, este fenómeno se conoce como la *redistribución de momentos*. Si una estructura es redundante, la falla en una sección hará que otras secciones empiecen a soportar las cargas adicionales que se les imponen, produciéndose fallas adicionales en otras secciones (*articulaciones plásticas*, fig. 10-3). Sólo cuando la estructura ha perdido toda su redundancia debido a la formación de una o más articulaciones plásticas, la falla de una sección adicional producirá colapso o inestabilidad. Esta capacidad adicional de carga que puede existir en una estructura redundante por encima y por debajo de la capacidad alcanzada en el momento de la primera falla de una sección se llama su *segunda capacidad de reserva*.

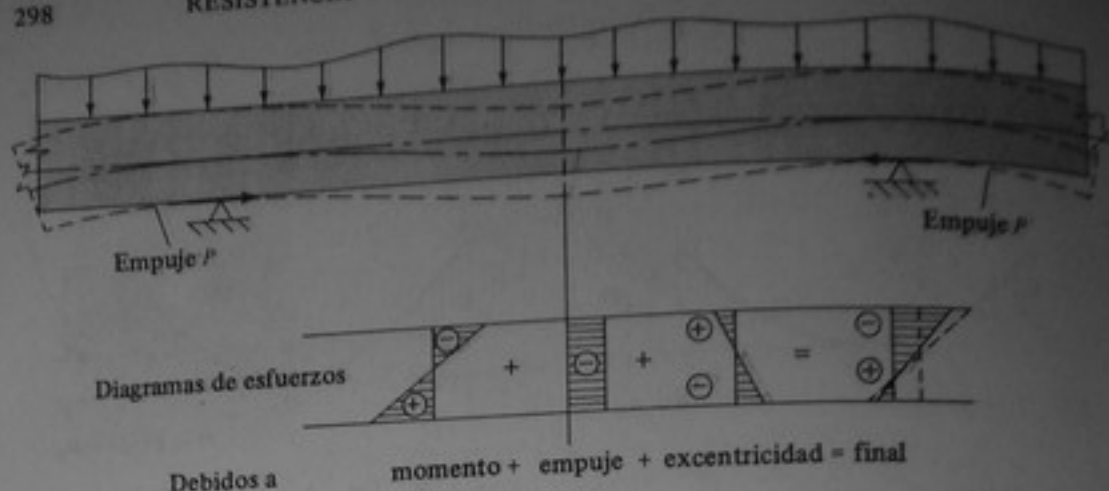


Figura 10-4 Capacidad de la tercera reserva.

3. El tercer fenómeno, menos conocido, es el que resulta del desarrollo de esfuerzos secundarios axiales adicionales debido a las condiciones de apoyo. Estos esfuerzos secundarios pueden dar por resultado o no una *tercera capacidad de reserva*. Por ejemplo, si una viga continua tiene dos apoyos articulados adyacentes, la restricción del alargamiento horizontal en el ala inferior debida a un momento positivo predominante producirá el desarrollo de un empuje horizontal. Este empuje cambia la distribución de esfuerzos, no sólo en las localizaciones de articulaciones plásticas sino a lo largo de toda la viga (fig. 10-4).

10-6 CRITERIO DE INESTABILIDAD

La estabilidad de elementos individuales, tales como columnas, o la estabilidad de toda una estructura en muchos casos controlan un diseño. Si el criterio de inestabilidad controla un diseño, es necesaria una modificación del criterio de esfuerzos admisibles o de carga final. Se puede hacer una distinción entre inestabilidad local, inestabilidad de un elemento e inestabilidad estructural. En el capítulo 12 se da un tratamiento más detallado a la inestabilidad de elementos estructurales.

10-7 CRITERIO DE FRACTURA

La mayoría de los materiales estructurales se comportan de una manera dúctil, aún en presencia de concentraciones de esfuerzos. Sin embargo, para ciertas condiciones de servicio, tales como bajas temperaturas, cargas de impacto en elementos con discontinuidades severas y para condiciones de alta restricción, como las que se pueden hallar en placas gruesas, estos mismos materiales estructurales se pueden comportar de manera frágil. Cada una de estas condiciones limita la capacidad de un material para fluir localmente y, por tanto, pueden conducir a una *fractura frágil*.

La fractura frágil es un tipo de falla catastrófica de los materiales estructurales que ocurre comúnmente sin fluencia previa y a velocidades extremadamente altas [hasta 700 pies/s (220 m/s) en aceros]. Generalmente la fractura se caracteriza por una superficie

de fractura plana (*clivaje*) y niveles promedios de esfuerzo inferiores a los de la fluencia general.

La resistencia de un material a la fractura frágil se mide por su *tenacidad al entalle*, así como la resistencia a la fluencia se mide por su capacidad de soportar fluencia. Entonces, una forma de diseñar para prevenir la fractura frágil consiste en utilizar materiales con buena tenacidad al entalle. Sin embargo, la tenacidad al entalle de un material determinado (y por tanto, su resistencia a la fractura frágil) puede variar considerablemente con la temperatura, la rapidez de carga, el nivel de esfuerzos, el tamaño de las imperfecciones y la severidad de la concentración de esfuerzos. De este modo, el ingeniero puede influir significativamente sobre la resistencia de una estructura a la fractura frágil. En el capítulo 13 se trata el desarrollo reciente de la mecánica de la fractura como un método analítico de diseño para prevenir fracturas frágiles.

10-8 CRITERIOS DE FATIGA

Aunque inicialmente se debe hacer énfasis en la resistencia básica de materiales a las cargas estáticas o de un solo ciclo, la gran mayoría de elementos de máquinas y estructurales están realmente sometidos a cargas repetidas durante muchos ciclos. Este tipo de carga y el método de análisis correspondiente se denominan *fatiga*. Por tanto, la fatiga se define como el estudio completo del comportamiento de materiales sometidos a cargas repetidas.

Los ejemplos de elementos sometidos a cargas repetidas o de fatiga son numerosos e incluyen piezas de maquinarias, piezas de automóviles, puentes, aviones, barcos y equipos de perforación. De hecho, la fatiga a menudo es un criterio de diseño más crítico que cualquier otro para la seguridad estructural y la confiabilidad de componentes de maquinarias y estructuras.

La carga de fatiga consiste en la aplicación y el retiro continuos de una carga durante muchas veces, en algunos casos mucho más de un millón de ciclos. Cuando un elemento se somete a carga de fatiga, se puede producir una grieta en el punto de esfuerzo máximo. Las concentraciones severas de esfuerzos debidas a *productores de esfuerzos* (discontinuidades) estructurales o metalúrgicos en una localización cualquiera generalmente son puntos de iniciación de grietas, debido a que éstos son puntos de esfuerzo máximo. Si se excluye la fractura frágil, estas grietas se pueden propagar lentamente por la acción de cargas repetidas adicionales. El uso creciente de la soldadura ha producido con frecuencia agrietamientos por fatiga, prematuros o inesperados, debido a los defectos de la soldadura que eventualmente pueden actuar como productores severos de esfuerzos. Para el ingeniero moderno resulta esencial la comprensión completa del agrietamiento por fatiga y la subsiguiente propagación de la grieta.

Hay dos procedimientos principales de diseño por fatiga. Uno se basa en el concepto de *duración de seguridad* y el otro en el de *límite de falla*. El primer procedimiento requiere que no se produzcan grietas por fatiga durante la duración total esperada de la estructura, y es esencialmente un estudio del comportamiento de iniciación de la fatiga. Esto implica que se puede predecir la duración de una estructura y antes de finalizar esta duración se puede reparar, remplazar o retirar la estructura. Para realizar diseños satisfactorios con base en la duración de seguridad se deben considerar adecuadamente varios elementos de la matriz de diseño, tales como:

1. Los modos y frecuencias de aplicación de las cargas de trabajo durante toda la duración de operación de la estructura.
2. La configuración y dimensionamiento de todos los componentes y sus uniones, los cuales se deben planear con suficiente reserva de resistencia a la fatiga comparada con la carga real.
3. Ensayos sistemáticos de fatiga en grupos estructurales, que se deben realizar para determinar experimentalmente la vida segura.
4. Mediciones adicionales de los efectos ambientales sobre la resistencia a la fatiga.

El método de diseño del límite de falla o por tolerancia de daños supone, de una manera práctica, que la protección total contra todas las grietas es imposible, y es esencialmente un estudio del comportamiento de la propagación de las grietas producidas por fatiga que utiliza conceptos de la mecánica de la fractura. El diseño debe garantizar que la propagación de las grietas no conducirá a una falla estructural completa, ya sea por fluencia general o por fractura frágil. Existen varias formas para hacer ésto, tales como:

1. Realizar oportunamente inspecciones para detectar grietas de un tamaño mínimo predeterminado, de tal modo que su propagación sea lenta.
2. Detener las grietas antes de que se puedan propagar completamente a través de una pieza estructural que afecte la duración.
3. Disponer trayectorias adicionales para el esfuerzo, previniendo de este modo contra el daño debido a la falla de un elemento estructural, proveyendo redundancia estructural.

En el capítulo 14 se da un tratamiento más detallado a la fatiga.

10-9 CRITERIO DE DEFORMACION

El desarrollo reciente de materiales de alta resistencia ha dado por resultado elementos más fuertes que poseen menos rigidez que los elementos de baja resistencia. Actualmente se encuentra que muchas de estas situaciones producen deflexiones y deformaciones que son inconvenientes y como tales constituyen un criterio de control del diseño.

Fuera de las deformaciones elásticas, que son recuperables, algunas estructuras sufren deformaciones de flujo debido a cargas aplicadas por períodos largos. Si estas deformaciones son significativas, los efectos del flujo deben considerarse como parte del diseño.

10-10 OTROS CRITERIOS

Además de los criterios establecidos hay otros que pueden adquirir importancia. Entre estos están la respuesta dinámica, la corrosión y los esfuerzos secundarios debidos a cambios de temperatura.

Es importante que el ingeniero reconozca los criterios de diseño aplicables para un problema determinado. A veces resulta obvio cuál de los diferentes criterios es el que controla, pero en muchos casos hay necesidad de efectuar varios análisis para garantizar que un diseño propuesto sea seguro y económico.

10-11 RESUMEN

Se explicó la necesidad de los márgenes de seguridad y los diferentes modos de falla, desde el punto de vista del comportamiento del material y desde el punto de vista estructural total. Luego se estudiaron los diferentes criterios que pueden controlar un diseño. Uno de los principales fines de este capítulo es enterar al lector de que la resistencia no es el único criterio con el cual se diseñan estructuras. Además de la deformación, hay otros criterios que pueden controlar o exigir la modificación de un diseño particular.

Capítulo 11

Teorías fundamentales sobre falla de materiales

11-1 INTRODUCCION

De acuerdo con lo que se describió en el capítulo 10, la falla de una pieza de una máquina o estructura ocurre cuando la pieza no soporta las cargas a las cuales está sometida o de algún modo no cumple su cometido. La falla estructural puede estar relacionada con causas tales como deformación elástica excesiva de una pieza, que produce desalineamientos inaceptables o cambios de forma en la estructura, o inestabilidad y el subsecuente colapso repentino de una estructura bajo determinadas cargas críticas. No obstante, con mayor frecuencia la falla de una pieza implica estados de esfuerzo en un punto que sobrepasan la capacidad resistiva inherente del material en las condiciones de carga y/o ambientales que prevalecen. Las teorías fundamentales de falla que se presentan en este capítulo se refieren a esta falla del material para ciertas condiciones limitadas.

A pesar de las numerosas investigaciones pasadas, actualmente no se conoce la naturaleza exacta de la falla de un material. Aunque se sabe que los niveles de esfuerzo, las rapidezces de carga, la temperatura, los defectos del material y otros factores que difieren para los diversos materiales, pueden tener influencia sobre la falla del material, no existen teorías que tengan en cuenta en forma adecuada todas estas influencias. Las teorías fundamentales presentadas aquí consideran únicamente la falla del material en un punto sometido a condiciones estáticas y a temperaturas ambientales normales, en materiales homogéneos o isotrópicos en un grado comparable con la mayoría de los metales. La finalidad de estas teorías fundamentales de falla es proporcionar un medio para identificar las composiciones de esfuerzos, en un estado general de esfuerzo bajo estas condiciones limitadas, que producen falla del material en una pieza de una estructura o máquina.

En los elementos estructurales en los que el estado de esfuerzo en puntos críticos es esfuerzo uniaxial simple, como por ejemplo en el caso de elementos cargados axialmente o vigas en flexión, las condiciones de falla del material pueden corresponder simplemente al esfuerzo uniaxial máximo en el elemento, igualándolo al esfuerzo de fluencia o al esfuerzo final del material. En los casos en que aparecen estados de esfuerzo más generales, en donde existe más de una componente de esfuerzo de referencia diferente de cero, como puede ocurrir, por ejemplo, en situaciones de esfuerzo combinado y en recipientes sometidos a presión, la identificación de la combinación de

las componentes de esfuerzo para las cuales ocurre la falla del material en un punto es un asunto más complicado.

En las teorías fundamentales de falla, la falla del material en un punto generalmente se clasifica como dúctil o como frágil. La falla dúctil de un material implica fluencia y el comienzo de deformaciones inelásticas en un punto. Esta condición no representa necesariamente la falla total de una pieza. Sin embargo, es importante la identificación de los estados de esfuerzos que producen el comienzo de la fluencia en un punto, y las teorías de falla por fluencia se incluyen entre las teorías fundamentales de falla. La falla frágil de un material en un punto implica una fractura o separación del material, no precedida por deformaciones inelásticas. Generalmente, estas fracturas se propagan a través de una pieza estructural, produciendo su falla. También se presentan comúnmente fallas de piezas estructurales que implican la fractura en un punto después de la fluencia inicial, pero este tipo de fallas no se tiene en cuenta en las teorías fundamentales de fallas.

El objetivo de este capítulo es explicar las teorías fundamentales de falla de materiales que existen, e indicar sus áreas de aplicación.

11-2 TEORIAS FUNDAMENTALES DE FALLA

En diferentes épocas se han propuesto teorías de falla que han ganado amplio reconocimiento. Entre éstas se incluyen:

1. La teoría del *esfuerzo normal máximo*, propuesta por Rankine (1802-1872).
2. La teoría de la *deformación unitaria máxima*, propuesta por Saint-Venant (1797-1866).
3. La teoría del *esfuerzo cortante máximo*, propuesta por Coulomb en 1773 y por Tresca en 1868.
4. La teoría de la *fricción interna*, establecida por Mohr (1835-1918) y Coulomb (1736-1806).
5. La teoría de la *energía máxima de deformación*, propuesta por Beltrami en 1885.
6. La teoría de la *energía máxima de distorsión*, establecida por Huber en 1904, Von Mises en 1913 y Hencky en 1925.
7. La teoría del *esfuerzo cortante octaédrico* de Von Mises y Hencky.

Cada una de estas teorías propone un criterio, indicado por su nombre, como causa de la falla del material y luego utiliza el criterio para relacionar la falla de un material determinado, en estados de esfuerzo combinado, con el esfuerzo de falla σ_{falla} en un ensayo uniaxial del material. El esfuerzo de falla σ_{falla} puede corresponder al esfuerzo de fluencia o al esfuerzo final del material, según la falla sea por fluencia o por fractura.

Cualquier conjunto de componentes de esfuerzo define completamente el estado de esfuerzo en un punto y, por tanto, los esfuerzos principales en un punto, que conforman uno de tales conjuntos, definen completamente el estado de esfuerzos en ese punto. Por consiguiente, los diferentes criterios de falla para un estado general de esfuerzo se pueden expresar en función de los esfuerzos principales en un punto, y esto será precisamente lo que se hará.

Los experimentos realizados más recientemente han demostrado que de la anterior lista de teorías de falla, las que tienen más aplicación práctica son las teorías 1 y 3, por una parte, y las teorías 6 ó 7, que son equivalentes. Estas teorías se estudian a continuación; las demás tienen principalmente interés histórico y no se tratarán en lo sucesivo.

Teoría del esfuerzo normal máximo

La teoría del esfuerzo normal máximo establece que la falla del material ocurre para un estado cualquiera de esfuerzos cuando el esfuerzo principal de mayor magnitud de ese estado de esfuerzo, que es $\sigma_{max} = \sigma_1$ o bien $\sigma_{max} = |\sigma_3|$, alcanza un valor crítico. El valor crítico del esfuerzo de falla σ_{falla} medido en un ensayo uniaxial simple del material. Entonces, el criterio de falla del esfuerzo normal máximo es

$$\sigma_{max} = \sigma_{falla} \quad (11-1)$$

Los experimentos que se mencionarán más adelante demuestran que esta teoría no es válida para predecir fallas por fluencia, pero puede predecir razonablemente bien fallas por tracción para materiales frágiles tales como vidrio y hierro fundido, con el esfuerzo de falla, σ_{falla} , igual al esfuerzo final, σ_{fin} , del material. La explicación aparente de su éxito en la predicción de fallas frágiles en tales materiales es la presencia de imperfecciones microscópicas orientadas al azar, pero distribuidas uniformemente, en una determinada dirección con respecto a la imperfección. Como las imperfecciones están orientadas al azar y distribuidas uniformemente, siempre hay una orientada de tal modo que la fractura se inicia en un punto que tiene el mayor esfuerzo normal en la dirección de ese esfuerzo.

Este criterio de falla por fractura es aplicable a elementos estructurales hechos de materiales que se comportan comúnmente en una forma frágil. El criterio para la falla por fractura frágil de máquinas o elementos estructurales fabricados con materiales normalmente dúctiles, como el acero estructural, que puede ocurrir bajo determinadas condiciones, es más complicado. Este tipo de falla se trata en el capítulo 13. La fractura por fatiga, que ocurre bajo condiciones de carga dinámica, se trata en el capítulo 14.

Teoría del esfuerzo cortante máximo

La teoría del esfuerzo cortante máximo establece que la falla del material por fluencia ocurre para un estado cualquiera de esfuerzo cuando el esfuerzo cortante máximo absoluto para ese estado de esfuerzo alcanza un valor crítico. El valor crítico del esfuerzo cortante máximo comienza la fluencia.

Mediante las ecuaciones (9-8) y (9-9) o el círculo de Mohr y el concepto de esfuerzo cortante máximo absoluto establecido en la sección 9-7, se determina que el esfuerzo cortante máximo absoluto en una probeta a tracción, en fluencia, actúa sobre un plano cortante que forma un ángulo de 45° con el eje longitudinal de la probeta y está dado por $\tau_{in} = \sigma_{in}/2$, en donde σ_{in} es el esfuerzo de fluencia en tracción.

del material. Para un estado general de esfuerzo, como el indicado en la sección 9-7, el esfuerzo cortante máximo absoluto está dado por $(\sigma_1 - \sigma_3)/2$, en donde σ_1 y σ_3 son el mayor y el menor esfuerzos principales para el estado de esfuerzo. Entonces, el criterio del esfuerzo cortante máximo se puede expresar en la forma

$$\tau_{abs\ max} = \tau_{flu} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

(11-2)

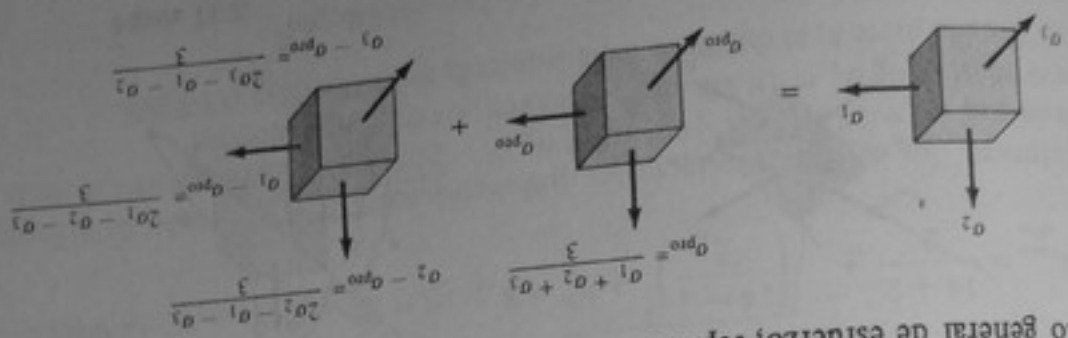
$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_{flu}$$

Los experimentos indican que el esfuerzo cortante máximo absoluto al empezar la fluencia en materiales normalmente dúctiles, en estados de esfuerzos combinados, es ligeramente mayor que τ_{flu} . Así, la teoría del esfuerzo cortante máximo es aproximadamente correcta para predecir la fluencia en materiales dúctiles, con una ligera desviación hacia el lado conservativo. Esta teoría se usa con frecuencia en aplicaciones de diseño práctico debido a su tendencia conservativa y también a que es relativamente fácil de aplicar.

Una base para la teoría del esfuerzo cortante máximo son los experimentos realizados con probetas para tracción en forma de barras planas, que demuestran que la fluencia va acompañada por deslizamiento cortante del material a uno u otro lado de ciertos planos que atraviesan las probetas. Otra base consiste en otros experimentos que demuestran que los materiales sometidos a estados de esfuerzo que consisten en componentes de compresión normales e iguales en todas las direcciones (llamados *esfuerzos hidrostáticos*), pueden soportar esfuerzos muy altos sin que haya fluencia. Es significativo el hecho de que los esfuerzos cortantes son iguales a cero en todos los planos cortantes que pasan por un punto sometido a esfuerzos hidrostáticos, como se puede demostrar con las ecuaciones de transformación de esfuerzos tridimensionales. La ausencia de esfuerzos cortantes y de fluencia en el estado de esfuerzos hidrostáticos apoya la teoría del esfuerzo cortante máximo.

Teoría de la energía máxima de distorsión

Esta teoría establece que la falla por fluencia está asociada con valores críticos de una determinada porción de la energía de deformación por unidad de volumen del material en un punto. La teoría se puede explicar con base en la fig. 11-1, la cual muestra un estado general de esfuerzo, representado por tres esfuerzos principales, σ_1 , σ_2 y σ_3 .



dividido en tres partes. La primera parte consta de tres esfuerzos iguales, cada uno de los cuales está dado por $\sigma_{pro} = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$. La segunda parte consta de esfuerzos tales que, sumados a σ_{pro} en cada cara, dan los esfuerzos σ_1 , σ_2 y σ_3 . Los tres esfuerzos iguales σ_{pro} representan la parte hidrostática (o contracción) uniforme del elemento del estado de esfuerzo produce distorsión del elemento cúbico en otro cubo. La segunda parte del estado de esfuerzo produce distorsión de elemento cúbico en un paralelepípedo rectangular.

La teoría de la energía máxima de distorsión supone que la parte hidrostática de un estado de esfuerzo, sea de tracción o de compresión, no afecta la fluencia y que la fluencia ocurre cuando la energía de deformación por unidad de volumen asociada con la parte del estado de esfuerzo que causa distorsión alcanza un valor crítico. El valor crítico corresponde a la energía de distorsión por unidad de volumen que existe en una probeta para ensayo de tracción en estado de fluencia.

Con base en la ecuación (5-22), la energía de deformación que produce distorsión por unidad de volumen, en un estado general de esfuerzo, es, en función de los esfuerzos principales,

$$U_{diss} = \frac{1}{1+\nu} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right] \frac{6E}{1+\nu}$$

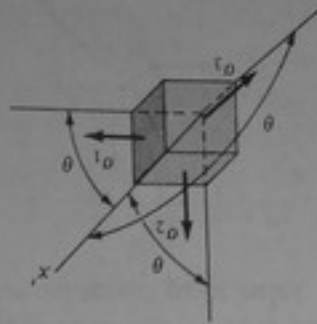
Haciendo esta expresión igual a la energía de distorsión por unidad de volumen en un ensayo de tracción, en donde $\sigma_1 = \sigma_{flu}$ y $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, se obtiene el criterio de la energía máxima de distorsión para falla por fluencia:

$$(11-3) \quad (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_{flu}^2$$

Los experimentos en los que ocurre falla por fluencia en materiales dúctiles muestran una buena correlación con el criterio de la energía máxima de distorsión. Este criterio se acepta como el más utilizable para predecir la iniciación de la fluencia en materiales dúctiles sometidos a estados generales de esfuerzo.

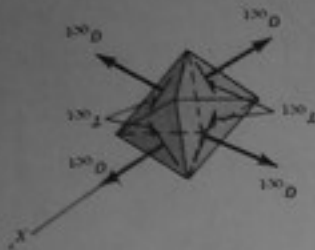
Teoría del esfuerzo cortante octaédrico

Esta teoría conduce exactamente al mismo criterio de falla que la teoría de la energía de distorsión, pero se basa en el llamado esfuerzo cortante octaédrico, que alcanza un valor crítico. La fig. 11-2a ilustra un elemento de esfuerzos principales situado en



(a)

Figura 11-2.



(b)

un punto, y un eje x' que forma ángulos iguales a θ con cada uno de los ejes principales. Obsérvese que existen cuatro de estos ejes, llamados *ejes octaédricos*, que se extienden a través de ocho octantes diferentes formados por los planos principales. Un elemento octaédrico de material situado en el punto representado por el elemento de esfuerzos principales de la fig. 11-2a se puede aislar, como se indica en la fig. 11-2b, mediante pares de planos cortantes perpendiculares a estos ejes octaédricos. Por medio de las ecuaciones de transformación de esfuerzos tridimensionales se puede demostrar que los esfuerzos normales son iguales en cada una de las caras del elemento octaédrico e iguales a $\sigma_{oct} = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$; de igual modo, los esfuerzos cortantes sobre todas las caras de elemento octaédrico son iguales a

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]^{1/2}$$

La teoría del esfuerzo cortante octaédrico supone que únicamente los esfuerzos cortantes en un elemento octaédrico como el de la fig. 11-2b influyen sobre la fluencia del material en un punto, y que la fluencia empieza en un estado general de esfuerzo cuando τ_{oct} para el estado alcanza el valor de τ_{oct} en una probeta ensayada a tracción, cuando empieza la fluencia. El criterio resultante es idéntico al criterio de la energía de distorsión. Esto se debe a que la energía de deformación por unidad de volumen en el elemento octaédrico de la fig. 11-2b, debida únicamente a los esfuerzos cortantes octaédricos, es proporcional a la energía de distorsión por unidad de volumen en el elemento de esfuerzos principales de la fig. 11-2a.

Los siguientes ejemplos ilustran la aplicación de las teorías fundamentales de falla de materiales.

- Ejemplo 11-1** Los esfuerzos de referencia en un punto de un elemento cargado estáticamente en un estado biaxial de esfuerzo son $\sigma_x = 14 \text{ klb/pul}^2$, $\sigma_y = 2 \text{ klb/pul}^2$ y $\tau_{xy} = 8 \text{ klb/pul}^2$. Determinar si ocurre o no falla del material en este punto:
- De acuerdo con la teoría del esfuerzo normal máximo, si el elemento está hecho de un material frágil con $\sigma_{fin} = 16 \text{ klb/pul}^2$.
 - De acuerdo con la teoría del esfuerzo cortante máximo, si el elemento está hecho de un material dúctil con $\sigma_{flu} = 20 \text{ klb/pul}^2$.
 - De acuerdo con la teoría de la energía de distorsión, para el mismo material de la parte b.

SOLUCION Primero se pueden calcular los esfuerzos principales biaxiales para el estado de esfuerzo dado, con base en la ecuación (9-7):

$$\sigma_{\max/\min} = \frac{14 + 2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{14 - 2}{2}\right)^2 + 8^2} = 8 \pm 10 = 18 \quad \text{y} \quad -2 \text{ klb/pul}^2$$

Entonces, los esfuerzos principales tridimensionales para el estado de esfuerzo dado son $\sigma_1 = 18 \text{ klb/pul}^2$, $\sigma_2 = 0$ y $\sigma_3 = -2 \text{ klb/pul}^2$. La respuesta a la parte a es sí puesto que $\sigma_1 = 18 \text{ klb/pul}^2$ es mayor que $\sigma_{fin} = 16 \text{ klb/pul}^2$.

Para la parte b, el miembro de la izquierda de la ecuación (11-2) es

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 18 - (-2) = 20 \text{ klb/pul}^2$$

Este resultado es exactamente igual al esfuerzo de fluencia dado, de modo que la fluencia sería inminente para el estado de esfuerzo dado, de acuerdo con la teoría del esfuerzo cortante máximo.

El miembro de la izquierda de la ecuación (11-3) para la parte *c* es

$$(18 - 0)^2 + [0 - (-2)]^2 + [18 - (-2)]^2 = 728$$

y el miembro de la derecha es $2(20)^2 = 800$. Entonces, de acuerdo con la teoría de la energía de distorsión, para el estado de esfuerzo dado no se presenta falla.

Ejemplo 11-2 Se debe construir un recipiente cilíndrico de pared delgada para presión con un material dúctil que tiene un esfuerzo de fluencia, $\sigma_{flu} = 200$ Pa. El radio del recipiente debe ser $r = 1.25$ m y el recipiente debe soportar una presión interna, $p = 0.70$ Pa. Determinar el espesor de pared necesario, t , utilizando un factor de seguridad de 2, con base en (a) la teoría del esfuerzo cortante máximo y (b) la teoría de la energía de distorsión.

SOLUCION Los esfuerzos principales biaxiales en la pared del recipiente son

$$\sigma_{max} = \frac{pr}{t} = \frac{0.7(1.25)}{t} = \frac{0.875}{t} \quad \text{y} \quad \sigma_{min} = \frac{pr_i}{2t} = \frac{0.4375}{t}$$

Entonces, despreciando la presión normal a la pared del recipiente, los esfuerzos principales tridimensionales son

$$\sigma_1 = \frac{0.875}{t} \quad \sigma_2 = \frac{0.4375}{t} \quad \sigma_3 = 0$$

Para la parte *a*, utilizando el criterio del esfuerzo cortante máximo e incorporando un factor de seguridad de 2 se tiene $\sigma_1 = \sigma_3 = \sigma_{flu}/2$ o

$$\frac{0.875}{t} = \frac{200}{2}$$

de donde resulta que el espesor requerido es $t = 8.75$ mm.

Para la parte *b*, utilizando el criterio de la energía de distorsión e incorporando un factor de seguridad de 2, se tiene

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 = 2\left(\frac{\sigma_{flu}}{2}\right)^2$$

$$\text{o} \quad \left(\frac{0.875}{t} - \frac{0.4375}{t}\right)^2 + \left(\frac{0.4375}{t}\right)^2 + \left(\frac{0.875}{t}\right)^2 = 2\left(\frac{200}{2}\right)^2$$

de donde resulta que el espesor requerido es $t = 7.58$ mm.

Obsérvese que la teoría conservativa del esfuerzo cortante máximo da por resultado un espesor de pared mayor que la teoría de la energía de distorsión, más exacta.

11-3 VERIFICACION EXPERIMENTAL Y COMPARACION DE LAS TEORIAS FUNDAMENTALES DE FALLA

La mayoría de los experimentos para probar la validez de las teorías fundamentales de falla se han hecho utilizando tubos cilíndricos de pared delgada, sometidos simultáneamente a presión interna, carga uniaxial en los extremos y torsión. Los esfuerzos en las paredes delgadas de estos tubos se aproximan mucho a estados de esfuerzo biaxiales combinados que constan de esfuerzos normales, longitudinales y circunferenciales, debidos a la presión interna, esfuerzos normales longitudinales debidos a la carga axial y esfuerzos cortantes sobre los planos cortantes, transversal y longitudinal, debidos al momento de torsión. Estos esfuerzos normales y cortantes representan las componentes de referencia σ_x , σ_y y τ_{xy} para un estado biaxial de esfuerzo. El esfuerzo normal σ_z en las paredes del recipiente es muy pequeño comparado con σ_x y σ_y , siempre que la pared del recipiente sea suficientemente delgada.

Haciendo los ajustes necesarios en la presión interna, la carga en los extremos y el momento de torsión aplicado al tubo, se puede aplicar cualquier combinación de esfuerzos de referencia a la probeta de ensayo. Se pueden observar varias combinaciones de estos esfuerzos de referencia aplicados o de sus correspondientes esfuerzos principales, que producen la falla del material.

Se pueden comparar los resultados experimentales de ensayos sobre estos tubos con las teorías de falla en el caso de esfuerzo biaxial, utilizando una representación gráfica como la de la fig. 11-3. Esta figura también proporciona un medio para comparar las diferentes teorías de falla. Los ejes horizontal y vertical en la fig. 11-3 representan las relaciones entre los esfuerzos principales biaxiales, σ_1 y σ_2 , y el esfuerzo de falla, σ_{falla} . Las curvas representan las teorías del esfuerzo normal máximo, del esfuerzo cortante máximo y de la energía máxima de distorsión.

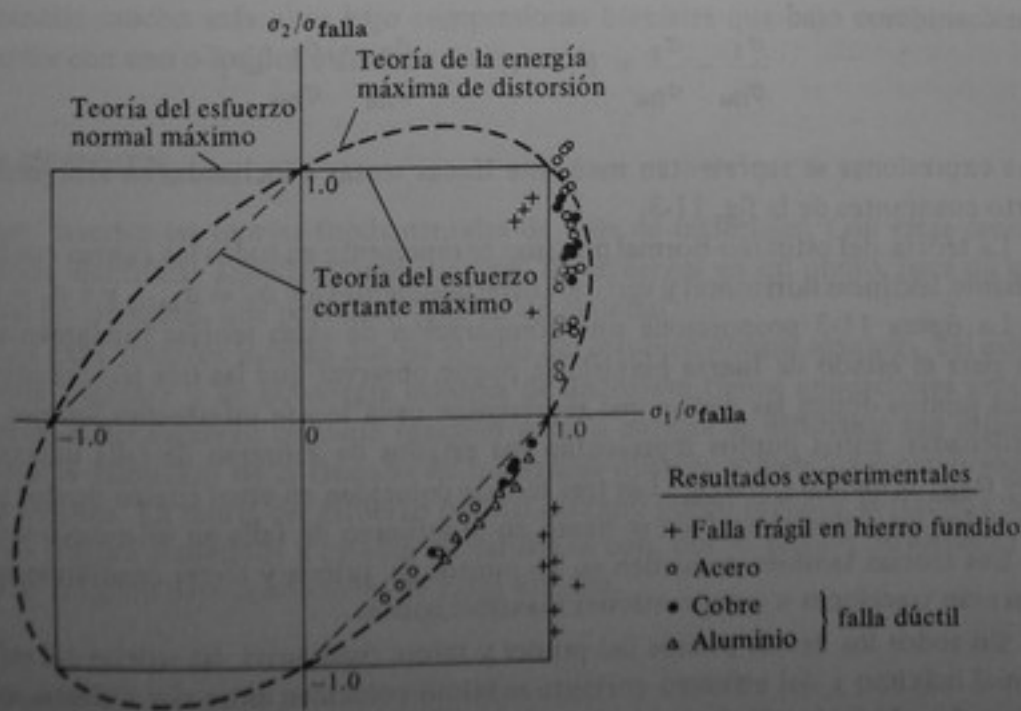


Figura 11-3.

Considérese primero la curva para la teoría de la energía de distorsión. Para esfuerzos biaxiales, como $\sigma_3 = 0$, la ecuación (11-3) se convierte en

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \sigma_2^2 + \sigma_1^2 = 2\sigma_{flu}^2$$

que se puede escribir en la forma

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_{flu}}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_{flu}}\right)\frac{\sigma_2}{\sigma_{flu}} + \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_{flu}}\right)^2 = 1$$

En el sistema de coordenadas $\sigma_1/\sigma_{falla} - \sigma_2/\sigma_{falla}$ de la fig. 11-3, con $\sigma_{falla} = \sigma_{flu}$ para esta teoría, la expresión anterior representa una elipse, como se indica. Las coordenadas de puntos cualesquiera, situados dentro de la elipse, representan estados de esfuerzo para los cuales no se presenta fluencia, de acuerdo con la teoría de la energía de distorsión. Los puntos situados sobre la elipse representan estados de esfuerzo en los cuales se debe iniciar la fluencia y los puntos exteriores a la elipse representan estados de esfuerzo para los cuales ya ha ocurrido la fluencia.

De forma análoga se representan en la fig. 11-3 las teorías de esfuerzo cortante máximo y del esfuerzo normal máximo. La teoría del esfuerzo cortante máximo, en el primer y tercer cuadrante de la fig. 11-3, se representa por las líneas horizontal y vertical correspondientes a $\pm \sigma_2 = \sigma_{flu}$ y $\pm \sigma_1 = \sigma_{flu}$, respectivamente (0 a $\pm \sigma_2/\sigma_{falla} = 1$ y $\pm \sigma_1/\sigma_{falla} = 1$). Esto se debe a que, con σ_1 y σ_2 de igual signo, $\sigma_3 = 0$ es el mayor o el menor esfuerzo principal, y la magnitud del esfuerzo cortante máximo absoluto es, entonces, $|\sigma_1/2|$ ó $|\sigma_2/2|$; el criterio del esfuerzo cortante máximo [ecuación (11-2)] se reduce, entonces, a $\pm \sigma_1 = \sigma_{flu}$ ó $\pm \sigma_2 = \sigma_{flu}$. En el segundo y cuarto cuadrantes, los esfuerzos principales biaxiales son de diferente signo y representan los esfuerzos principales, mayor y menor. La mitad de su diferencia es el esfuerzo cortante máximo absoluto, y el criterio del esfuerzo cortante máximo se convierte en

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_{flu}} - \frac{\sigma_2}{\sigma_{flu}} = 1 \quad \text{o} \quad \frac{\sigma_2}{\sigma_{flu}} - \frac{\sigma_1}{\sigma_{flu}} = 1$$

Estas expresiones se representan mediante líneas rectas e inclinadas en el segundo y el cuarto cuadrantes de la fig. 11-3.

La teoría del esfuerzo normal máximo se representa en todos los cuatro cuadrantes mediante las líneas horizontal y vertical correspondientes a $\pm \sigma_1 = \sigma_{falla}$ y $\pm \sigma_2 = \sigma_{falla}$.

La figura 11-3 proporciona una comparación de estas teorías fundamentales de falla para el estado de fuerza biaxial. Se puede observar que las tres teorías coinciden en los puntos donde las curvas que representan cada teoría intersectan los ejes de las coordenadas. Estos puntos representan los estados de esfuerzo de falla uniaxial con $\sigma_1 = \sigma_{falla}$ o bien, $\sigma_2 = \sigma_{falla}$. Las tres teorías coinciden en estos cuatro puntos puesto que todos los criterios de falla se basan en el esfuerzo de falla en un ensayo uniaxial. Las tres teorías también coinciden en los puntos del primer y tercer cuadrantes que representan tracciones u compresiones biaxiales iguales.

En todos los demás puntos del primer y tercer cuadrantes, las teorías del esfuerzo normal máximo y del esfuerzo cortante máximo coinciden entre sí y difieren, aunque no mucho, de la teoría de la energía de distorsión. La mayor discrepancia entre las teorías de falla se presenta en el segundo y cuarto cuadrantes. En estos cuadrantes,

las teorías del esfuerzo cortante máximo y de la energía de distorsión no difieren mucho entre sí pero difieren considerablemente de la teoría del esfuerzo normal máximo.

En la figura 11-3 también se compara la teoría con los experimentos. Los puntos marcados allí corresponden a pares de esfuerzos principales biaxiales que producen fallas en experimentos con tubos, como se describió anteriormente. Se dan puntos que representan ensayos en acero, aluminio y cobre, los cuales fallan por fluencia, y en hierro fundido, que falla por fractura. † Si los experimentos coinciden con una cualquiera de las teorías de falla, los puntos experimentales deben estar en la curva que representa esa teoría.

La figura 11-3 muestra que los puntos que representan fallas por fluencia están más de acuerdo con la teoría de la energía de distorsión. Estos puntos no se alejan mucho, pero están fuera de las curvas que representan la teoría de esfuerzo cortante máximo. Estos puntos experimentales son la base para los enunciados que establecen que la teoría de la energía de distorsión predice mejor la iniciación de la fluencia, y que la teoría del esfuerzo cortante máximo es aproximadamente correcta y ligeramente conservativa. La figura también muestra una buena aproximación entre los puntos experimentales para el material frágil, hierro fundido, y la teoría del esfuerzo normal máximo.

Los puntos experimentales de la fig. 11-3 representan únicamente combinaciones de dos esfuerzos principales de tracción o un esfuerzo de tracción y uno de compresión. No se representan combinaciones de dos esfuerzos de compresión. Las combinaciones de este tipo, que producen falla del material, son difíciles de llevar a cabo en ensayos con tubos. Se sabe, sin embargo, que los ensayos que implican falla por fluencia de metales con ambos esfuerzos principales de compresión también coinciden con la teoría de la energía de distorsión. Otros tipos de ensayos en materiales frágiles, como hierro fundido o concreto, con compresiones biaxiales no coinciden con la teoría del esfuerzo normal representada en la fig. 11-3. Generalmente, estos materiales tienen resistencias mucho más altas bajo compresiones biaxiales que bajo combinaciones de esfuerzos con uno o los dos esfuerzos de tracción.

11-4 RESUMEN

Se han descrito las teorías fundamentales de falla de materiales. Con estas teorías se pretende identificar aquellas combinaciones de esfuerzos en un punto, para un estado general de esfuerzos, que producen falla en un material.

Los experimentos indican que las teorías del esfuerzo normal máximo, del esfuerzo cortante máximo y de la energía máxima de distorsión tienen aplicaciones prácticas. Las teorías del esfuerzo cortante máximo y de la energía de distorsión son útiles para predecir la iniciación de la fluencia en materiales dúctiles sometidos a condiciones de carga estática. La teoría del esfuerzo normal máximo puede predecir la fractura de materiales frágiles sometidos a estados de esfuerzos con, por lo menos, un esfuerzo principal de tracción bajo condiciones de carga estática.

† Los puntos marcados fueron tomados de G. Murphy, *Advanced Mechanics of Materials*, McGraw-Hill, Nueva York, 1946.

PROBLEMAS

En los problemas 11-1 a 11-6 determinar, para los estados de esfuerzo dados, si ocurre o no falla del material:

- (a) De acuerdo con la teoría del esfuerzo normal máximo, si el material es frágil y tiene un $\sigma_{fin} = 300$ MPa.
 (b) De acuerdo con la teoría del esfuerzo cortante máximo, si el material es dúctil y tiene un $\sigma_{flu} = 300$ MPa.
 (c) De acuerdo con la teoría de la energía de distorsión, si el material es el mismo de la parte b.

11-1 $\sigma_x = 212$ MPa, $\sigma_y = -212$ MPa, $\sigma_z = 0$; $\tau_{xy} = 212$ MPa, $\tau_{xz} = 0$, $\tau_{yz} = 0$.

11-2 $\sigma_x = 227$ MPa, $\sigma_y = 227$ MPa, $\sigma_z = 0$; $\tau_{xy} = 77$ MPa, $\tau_{xz} = 0$, $\tau_{yz} = 0$.

11-3 $\sigma_x = 128$ MPa, $\sigma_y = -58$ MPa, $\sigma_z = 0$; $\tau_{xy} = 160$ MPa, $\tau_{xz} = 0$, $\tau_{yz} = 0$.

11-4 $\sigma_x = 0$, $\sigma_y = 0$, $\sigma_z = -150$ MPa; $\tau_{xy} = -150$ MPa, $\tau_{xz} = 0$, $\tau_{yz} = 0$.

11-5 $\sigma_x = 300$ MPa, $\sigma_y = 300$ MPa, $\sigma_z = 300$ MPa; $\tau_{xy} = 0$, $\tau_{xz} = 0$, $\tau_{yz} = 0$.

11-6 $\sigma_x = 87$ MPa, $\sigma_y = -87$ MPa, $\sigma_z = 200$ MPa; $\tau_{xy} = 50$ MPa, $\tau_{xz} = 0$, $\tau_{yz} = 0$.

11-7 Hallar la presión interna p que produciría fluencia en las paredes de un recipiente esférico a presión, hecho de aluminio con $\sigma_{flu} = 300$ MPa y que tiene un radio $r_i = 900$ mm y un espesor de pared $t = 6$ mm, de acuerdo con (a) la teoría del esfuerzo cortante máximo, y (b) la teoría de la energía de distorsión.

11-8 Hallar la presión interna p que produciría fluencia en las paredes de un recipiente cilíndrico a presión, hecho de acero con $\sigma_{flu} = 36$ klb/pul² y que tiene un radio $r_i = 60$ pul y un espesor de pared, $t = \frac{1}{2}$ pul, de acuerdo con (a) la teoría del esfuerzo cortante máximo, y (b) la teoría de la energía de distorsión.

11-9 Hallar la presión interna p que produciría fluencia en las paredes de un cilindro hidráulico ($\sigma_L = 0$) hecho de acero con $\sigma_{flu} = 500$ MPa y que tiene un radio $r_i = 30$ mm y un espesor de pared $t = 2$ mm, de acuerdo con (a) la teoría del esfuerzo cortante máximo, y (b) la teoría de la energía de distorsión.

11-10 Un recipiente esférico para presión de radio $r_i = 1.5$ m debe soportar con seguridad una presión interna $p = 200$ kPa. Determinar el espesor requerido de la pared, t , si el recipientes es hecho de acero con $\sigma_{flu} = 250$ MPa, de acuerdo con (a) la teoría del esfuerzo cortante máximo, y (b) la teoría de la energía de distorsión. Utilizar un factor de seguridad de 2.

11-11 Un recipiente cilíndrico para presión de radio $r_i = 800$ mm debe soportar con seguridad una presión interna $p = 500$ kPa. Determinar el espesor requerido de la pared, t , si el recipiente es hecho de aluminio con $\sigma_{flu} = 240$ MPa, de acuerdo con (a) la teoría del esfuerzo cortante máximo, y (b) la teoría de la energía de distorsión. Utilizar un factor de seguridad de 2.

11-12 Un recipiente cilíndrico para presión de radio $r_i = 6$ pul debe soportar con seguridad una presión interna $p = 750$ lb/pul² junto con una carga de compresión, concéntrica y axial, de 110 klb/pul². Determinar el espesor requerido de la pared, t , si el recipiente es hecho de latón con $\sigma_{flu} = 60$ klb/pul², de acuerdo con (a) la teoría del esfuerzo cortante máximo, y (b) la teoría de la energía de distorsión. Utilizar un factor de seguridad de 2.

11-13 Un elemento de torsión hecho de hierro fundido tiene un diámetro de 40 mm y se somete a un momento de torsión $T = 4$ kN · m. Hallar la carga de tracción, axial y concéntrica, adicional que causaría la falla de acuerdo con la teoría del esfuerzo normal máximo si $\sigma_{fin} = 500$ MPa.

11-14 Una barra redonda de 1 pul de diámetro se somete a una carga axial de tracción, $P = 20$ klb/pul². Hallar el momento de torsión T que, aplicado junto con la carga axial, produciría falla de acuerdo con la teoría de la energía de distorsión. Utilizar $\sigma_{flu} = 36$ klb/pul².

11-15 Un elemento tubular para torsión, de 25 mm de diámetro exterior y 20 mm de diámetro interior, se somete a una carga axial de tracción, $P = 20$ kN, junto con un momento de torsión $T = 225$ N · m. ¿Es esta carga segura, con base en la teoría del esfuerzo cortante máximo y un factor de seguridad de 2.2? Utilizar $\sigma_{flu} = 320$ MPa.

- 11-16 Una barra redonda sólida se somete a un momento de torsión $T = 250 \text{ N} \cdot \text{m}$ combinado con un momento de flexión $M = 600 \text{ N} \cdot \text{m}$. Determinar el diámetro que debe tener la barra, con base en la teoría del esfuerzo cortante máximo y un factor de seguridad de 2, si la barra está hecha de acero con $\sigma_{fu} = 520 \text{ MPa}$.
- 11-17 Una barra redonda sólida se somete a un momento de torsión T combinado con un momento de flexión $M = 2T$. Si la barra tiene un diámetro de 2 pul, determinar el valor seguro de T con base en la teoría del esfuerzo normal máximo, con un factor de seguridad de 3. Utilizar $\sigma_{fin} = 24 \text{ klb/pul}^2$.
- 11-18 Un elemento tubular para torsión de 30 mm de diámetro exterior y 24 mm de diámetro interior se somete a un momento de torsión, $T = 300 \text{ N} \cdot \text{m}$. Determinar el momento de flexión M que aplicado en combinación con este momento de torsión, causaría la falla del elemento, de acuerdo con la teoría de la energía de distorsión. Utilizar $\sigma_{fu} = 360 \text{ MPa}$.
- 11-19 Hallar la fuerza F que produciría falla en la sección $a-a$ del problema 9-2, de acuerdo con (a) la teoría del esfuerzo normal máximo, (b) la teoría del esfuerzo cortante máximo, y (c) la teoría de la energía de distorsión. En cada caso, expresar la respuesta en función de σ_{falla} .
- 11-20 Repetir el problema 11-19 para la grapa C del problema 9-5.
- 11-21 Repetir el problema 11-19 para la columna del problema 9-7.
- 11-22 Hallar la fuerza segura, F , que se podría aplicar al cilindro hidráulico y al pistón del problema 9-33, con base en la fluencia del cilindro. Utilizar la teoría de la energía de distorsión con un factor de seguridad de 2 y $\sigma_{fu} = 500 \text{ MPa}$.
- 11-23 Hallar el factor de seguridad contra fluencia en el punto A del cilindro del problema 9-29. Utilizar la teoría del esfuerzo cortante máximo, con $\sigma_{fu} = 50 \text{ klb/pul}^2$.
- 11-24 Hallar el factor de seguridad contra fluencia en el punto A del eje del problema 9-67. Utilizar la teoría de la energía de distorsión y $\sigma_{fu} = 300 \text{ MPa}$.

12-1 INTRODUCCION

Muchas estructuras o elementos estructurales fallan debido a inestabilidad bajo la acción de la carga. Una configuración en equilibrio puede ser *estable*, *neutra* o *inestable*, como se indica en la fig. 12-1. Si se altera el equilibrio de una estructura mediante una fuerza o un impacto por un período de tiempo corto, se desarrollarán pequeñas vibraciones alrededor de la posición original de equilibrio. Debido a la amortiguación, el sistema dejará de vibrar pronto y retornará a su posición original, siempre que la configuración sea *estable* y la perturbación sea pequeña (fig. 12-1a). Si existe, entre ciertos límites, insensibilidad respecto a los cambios en la posición de equilibrio, esta situación representa una configuración de equilibrio *precario* o *neutro* (fig. 12-1b). Si el sistema se aparta más de su posición original, la configuración es *inestable* (fig. 12-1c).

12-2 TIPOS DE INESTABILIDAD

La falta de estabilidad puede ser producida por insuficiencia de apoyo, como se muestra en la fig. 12-2a, o debido a la *esbeltez* o *delgadez* de una estructura, como se indica en las figs. 12-2b y c, casos en los que se denomina "inestabilidad por deformación". Si se supone que hay estabilidad de apoyo, la inestabilidad por deformación debida a la esbeltez o delgadez de una estructura es de la mayor importancia para el ingeniero. Por ejemplo, si se considera una barra esbelta de una yarda de longitud, sometida a una carga axial soportada como se muestra en la fig. 12-3a, aun bajo la acción de una carga axial bastante pequeña, P , la barra se volverá inestable por *pandeo*

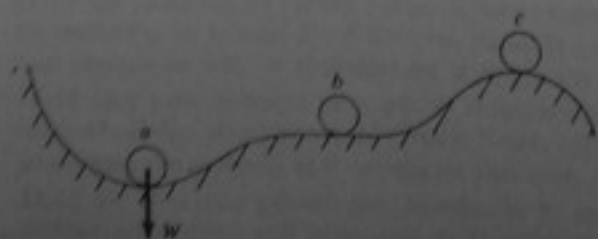


Figura 12-1 Configuraciones de equilibrio. (a) Estable. (b) Neutro. (c) Inestable.

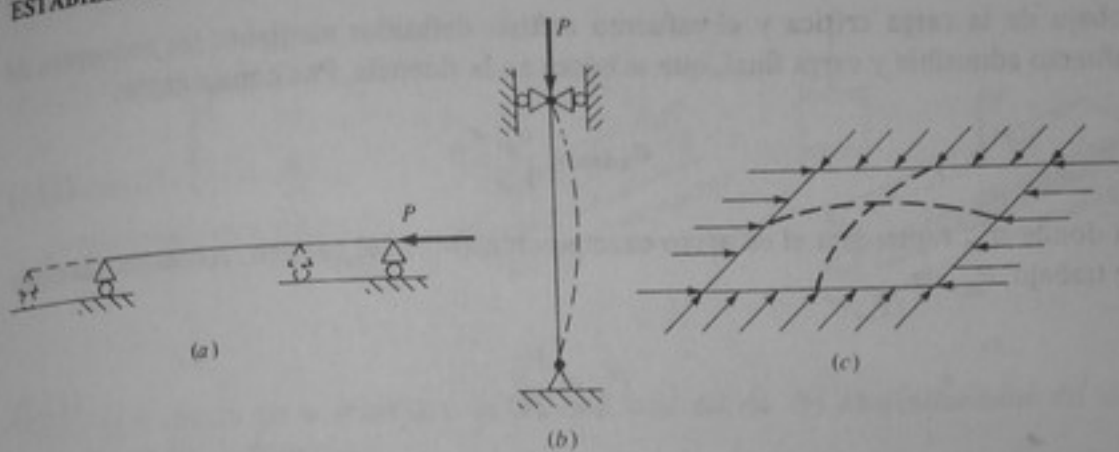


Figura 12-2 Inestabilidad debida a (a) apoyos insuficientes en una viga; (b) esbeltez de uná columna; (c) delgadez de una placa cargada a lo largo de sus bordes, en el plano de la placa.

lateral de una forma parecida a la que se representa en la fig. 12-2b. Desde el punto de vista de la ingeniería, la barra habrá fallado. Sin embargo, si se hubiera usado una barra mucho más corta, digamos de sólo 4 pul de longitud, con la misma sección transversal (fig. 12-3b), la falla debida a inestabilidad no sería problema; más bien, debería esperarse una falla por resistencia a una carga mucho mayor, P_2 . Aunque los dos tipos de falla son muy diferentes, ambas barras hubieran fallado —la barra larga por pandeo lateral con una carga axial considerablemente menor que la aplicada a la barra corta, la cual falla por aplastamiento.

Tal como se ha descrito, el pandeo es un modo de falla producido por inestabilidad estructural debido a la acción de compresión sobre un elemento de la estructura. Por lo general, el pandeo tiene lugar en forma repentina y a menudo es espectacular y catastrófico.

La carga a la cual ocurre inestabilidad y el esfuerzo correspondiente se denominan *carga crítica*, P_{cr} , y *esfuerzo crítico*, σ_{cr} . Estos valores críticos pueden estar muy por

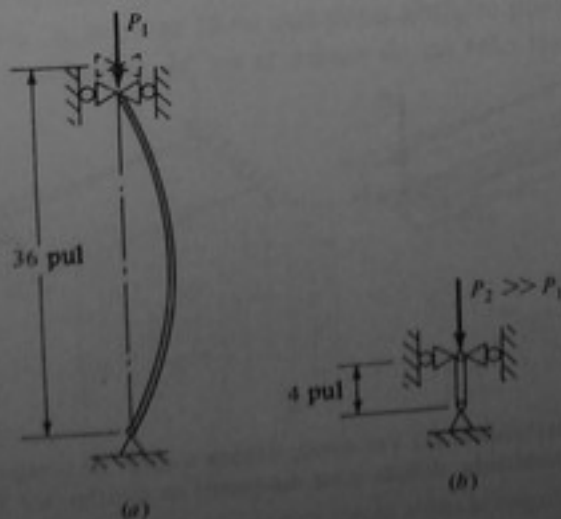


Figura 12-3

debajo de la carga crítica y el esfuerzo crítico definidos mediante los conceptos de esfuerzo admisible y carga final, que se basan en la fluencia. Por consiguiente,

$$\sigma_{adm} = \frac{\sigma_{cr}}{FS} \quad (12-1)$$

en donde σ_{cr} representa el esfuerzo exactamente antes del pandeo. Asimismo, la carga de trabajo, P_w , es

$$P_w = \frac{P_{cr}}{FC} \quad (12-2)$$

en donde P_{cr} representa la carga a la cual tiene lugar la inestabilidad, y FC es el factor de carga.

La mayor parte de los tipos de inestabilidad se producen por cargas de compresión, como en el caso de columnas y placas cargadas en su plano y la deformación resultante por flexión. Algunas veces, bajo ciertos tipos de cargas de compresión o de torsión, ocurre deformación de torsión, sola o en combinación con deformación de flexión. En la fig. 12-4 se muestran algunos ejemplos. La columna bajo compresión de la fig. 12-4a exhibe una inestabilidad que produce deformación torsional. La viga en voladizo sometida a un momento de flexión en la fig. 12-4b sufre flexión lateral y deformación torsional. La placa que se muestra en la fig. 12-4c está sometida a carga en su plano y exhibe inestabilidad torsional.

Se puede hacer otra distinción entre inestabilidad *local*, de un elemento, e inestabilidad *estructural*. Por ejemplo, considérese la viga de la fig. 12-5, sometida a una carga concentrada en el centro. Debido a la fuerza de compresión en el ala superior, puede haber pandeo local del ala si la relación entre la mitad de la anchura del ala y su espesor es grande, lo que produce formación de ondas en el borde libre del ala (fig. 12-5a). Asimismo, si la carga es comparativamente grande, puede haber abarquillamiento local del alma (fig. 12-5b). Estas inestabilidades *locales* no disminuyen necesariamente la estabilidad total ni la capacidad de carga de la viga. Sin embargo, si toda el ala superior

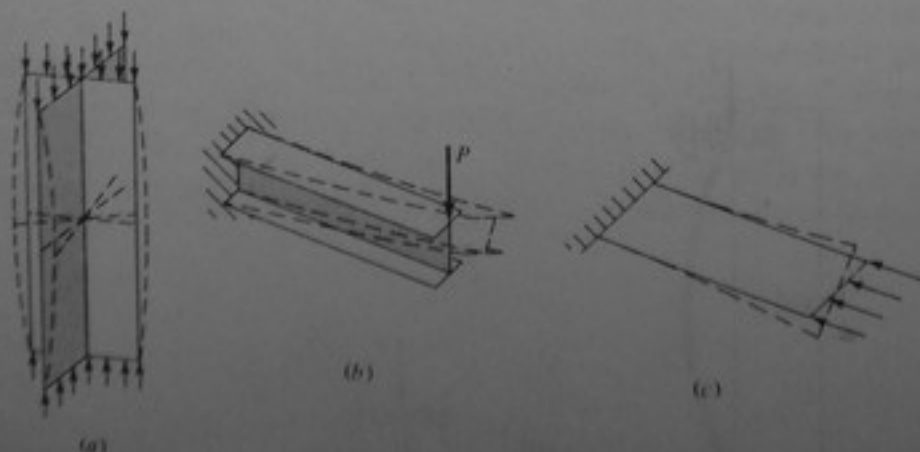


Figura 12-4 Tipos de inestabilidad. (a) Torsional, debida a carga de compresión. (b) Deformación torsional y de flexión, combinada, debida a un momento de flexión. (c) Torsional, debida a una carga de compresión.

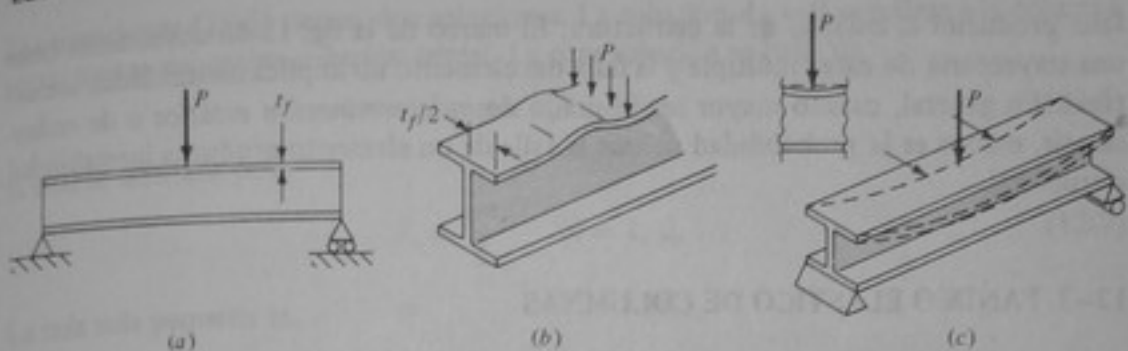


Figura 12-5 Grados de inestabilidad. (a) Pandeo local del ala. (b) Abarquillamiento del alma. (c) Inestabilidad del elemento.

se pandea lateralmente a la vez que se tuerce, como se indica en la fig. 12-5c, se tiene inestabilidad del *elemento*. Si la estructura consta únicamente de este elemento, su inestabilidad implica automáticamente inestabilidad *estructural*. Según lo esencial que sea un elemento para la estabilidad total de la estructura, la inestabilidad del elemento puede causar inestabilidad estructural y aun el colapso repentino de la estructura. Si debido a la inestabilidad de un elemento se produce inestabilidad externa (en los apoyos) o interna, se puede esperar que haya inestabilidad y colapso de la estructura.

A modo de ejemplo, considérese un marco de un tramo y varios pisos, como el de la fig. 12-6a. Si por alguna razón (sobrecarga o diseño deficiente) la columna inferior izquierda se hace inestable y se pandea, es evidente que la estructura se derrumbará. Por otra parte, si la columna *BE* del edificio de varios tramos y varios pisos que se muestra en la fig. 12-6b falla por pandeo, necesariamente no se produce inestabilidad ni colapso de la estructura. Es decir, aunque la falla de una columna produzca una carga adicional en los otros elementos y vigas, la estructura no se hace inestable por insuficiencia de apoyos.

Como ejemplo de inestabilidad interna, considérese la armadura representada en la fig. 12-6c. Si el elemento *GE* falla por pandeo, la armadura se derrumbará. Por otra parte, si falla el elemento *GE* en la armadura de doble diagonal que se muestra en la fig. 12-6d, la falla de la armadura es automática puesto que la armadura aún es internamente estable. Otra forma de expresar esta independencia entre la inestabilidad del elemento y de la estructura es considerar si una estructura tiene una *trayectoria de carga única o múltiple*. Si la carga tiene que pasar siempre por un elemento particular, como en el caso de la columna *AC* en el marco de un solo tramo de la fig. 12-6a, su

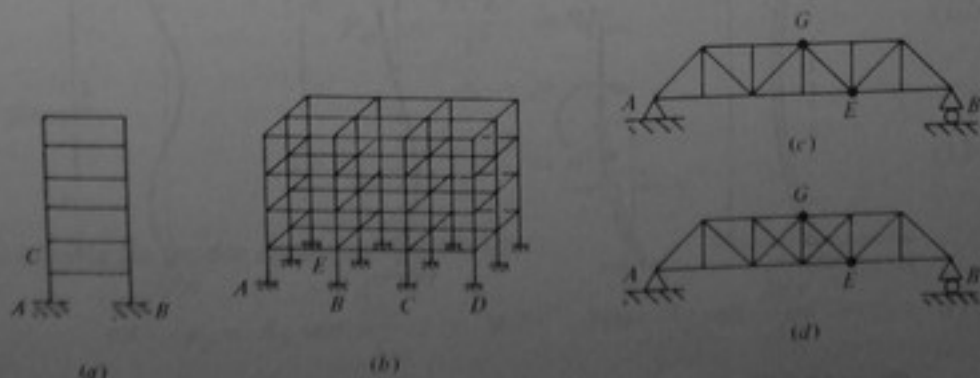


Figura 12-6 Inestabilidad del elemento y su efecto sobre la inestabilidad estructural.

falla producirá el colapso de la estructura. El marco de la fig. 12-6b obviamente tiene una trayectoria de carga múltiple y la falla del elemento no implica inestabilidad estructural. En general, cuanto mayor sea el grado de *indeterminación estática* o de *redundancia*, menor es la probabilidad de que la falla de un elemento produzca inestabilidad estructural.

12-3 PANDEO ELASTICO DE COLUMNAS

Considérese la ecuación de equilibrio de momentos para una columna de extremos articulados con pasadores y la posibilidad de una configuración de equilibrio doblada. Con base en el diagrama de cuerpo libre de la fig. 12-7b se tiene que

$$M_x = EIy'' = -Py \quad (12-3)$$

$$EIy'' + Py = 0$$

Haciendo $P/EI = \lambda_n^2$ se halla la solución de esta ecuación diferencial ordinaria de segundo grado:

$$y = A_n \operatorname{sen} \lambda_n x + B_n \operatorname{cos} \lambda_n x \quad (12-4)$$

en donde A_n y B_n son constantes arbitrarias que se deben determinar según las condiciones de apoyo o de contorno. Para la columna de extremos articulados con pasadores de la fig. 12-7a se tienen las siguientes condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} y(0) = 0 &= B_n & \text{o} & \quad B_n = 0 \\ y(L) = 0 &= A_n \operatorname{sen} \lambda_n L \end{aligned} \quad (12-5)$$

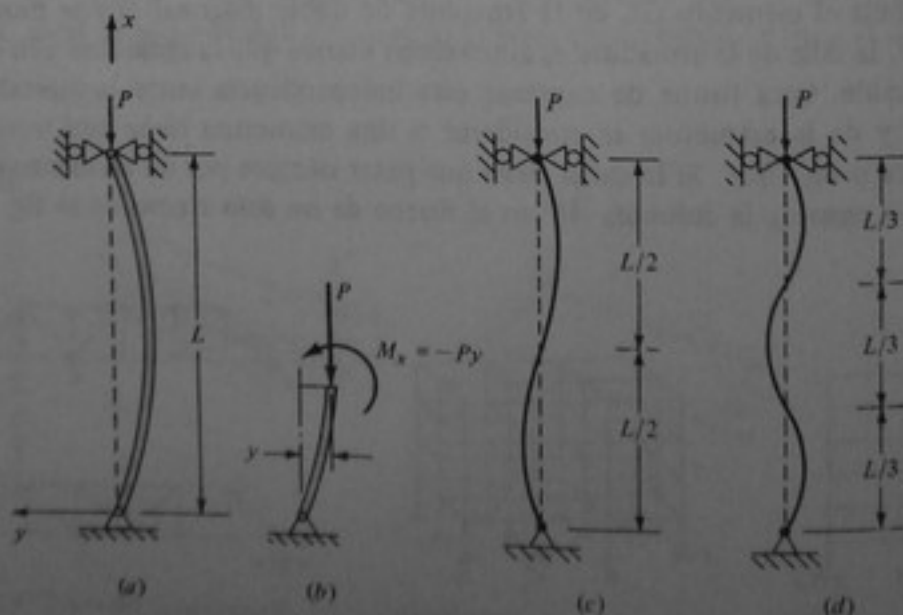


Figura 12-7 Modos de pandeo de una columna de extremos articulados con pasadores.

Las ecuaciones (12-5) tienen dos soluciones. La solución $A_n = 0$ se refiere a la columna recta; ésta se denomina *solución trivial*. La otra solución se halla de

$$\text{sen } \lambda_n L = 0 \quad (12-6)$$

la cual se satisface para

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{L} \quad n = 1, 2, \dots \quad (12-7)$$

La raíz más pequeña es

$$\lambda_1 = \frac{\pi}{L} \quad (12-8)$$

a partir de la cual se determina la *carga crítica de la columna*, conocida a menudo como *carga de Euler*:

$$P_{cr1} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (12-9)$$

El *esfuerzo de Euler o crítico* se puede hallar haciendo $\sigma_{cr} = P_{cr}/A$:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2} \quad (12-10)$$

en donde r es el *radio de giro*, definido por

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}} \quad (12-11)$$

La forma de la columna pandeada está dada por

$$y_1 = A_1 \text{sen } \frac{\pi x}{L} \quad (12-12)$$

que representa media onda sinusoidal, como se muestra en la fig. 12-7a. Con n igual a 2 y a 3 en la ecuación (12-7) se obtienen la segunda y tercera cargas de pandeo:

$$P_{cr2} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2} = 4P_{cr1} \quad (12-13a)$$

$$P_{cr3} = \frac{9\pi^2 EI}{L^2} = 9P_{cr1} \quad (12-13b)$$

o, en general,

$$P_{crn} = \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2} = n^2 P_{cr1} \quad (12-13c)$$

Las formas de los *modos* correspondientes son

$$y_2 = A_2 \text{sen } \frac{2\pi x}{L} \quad \text{y} \quad y_3 = A_3 \text{sen } \frac{3\pi x}{L} \quad (12-14)$$

que se muestran en las figs. 12-7c y d.

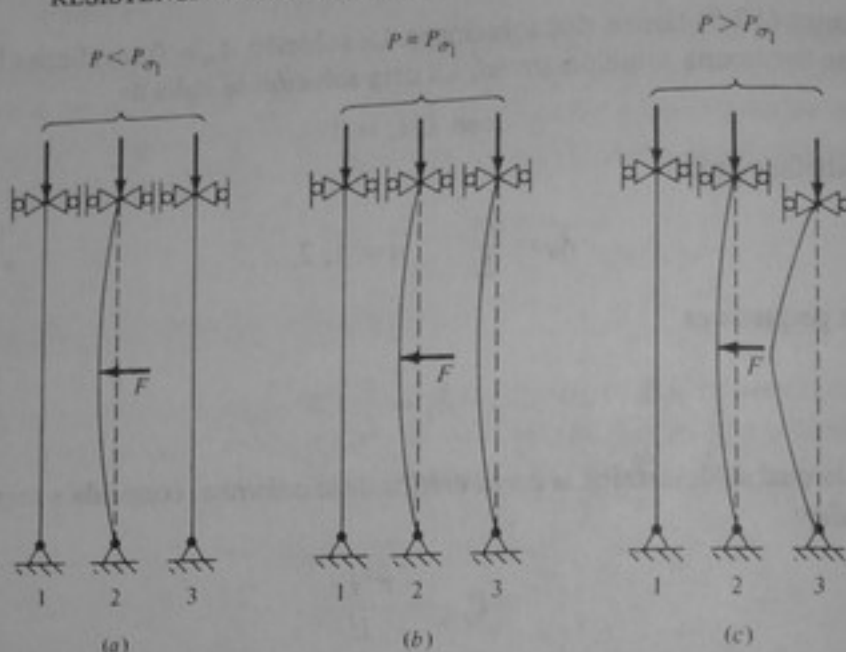


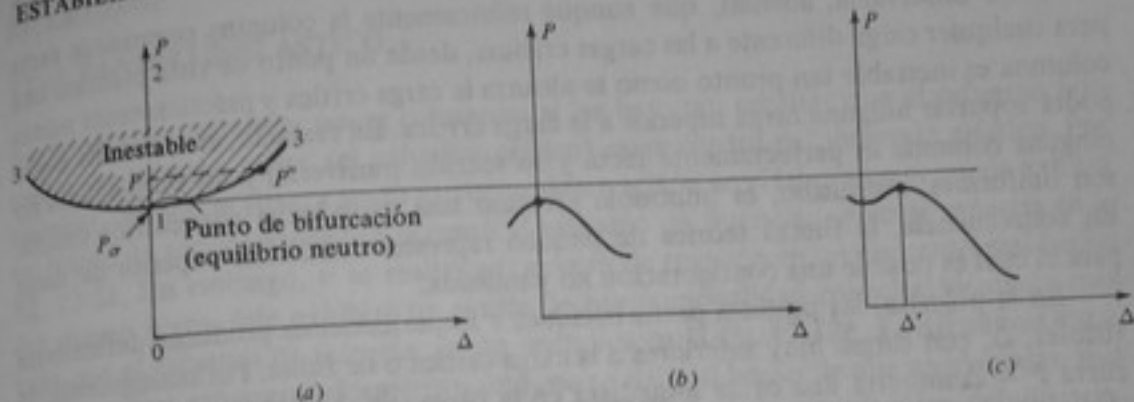
Figura 12-8 Configuraciones de una columna de extremos articulados con pasadores. (a) Estable. (b) Neutra. (c) Inestable.

Como se indicó en la sección introductoria de este capítulo, se puede distinguir entre equilibrio estable, neutro e inestable. Con base en la anterior deducción teórica de las cargas críticas, parece que para cualquier magnitud de la carga P siempre hay una solución trivial, es decir, una configuración recta de la columna, mientras que solamente para valores de las cargas críticas, P_{cr} , puede haber, además, configuraciones flexionadas. La pregunta que se puede hacer ahora es si la configuración recta es estable, neutra o inestable. Para responder esta pregunta considérese un experimento simple. Se aplica una fuerza lateral *pequeña*, F , a la columna cargada de extremos articulados con pasadores. Si la carga P es suficientemente pequeña, la columna retornará a la configuración recta de equilibrio tan pronto como se retire la fuerza F (fig. 12-8a). En realidad, según lo tratado respecto a la fig. 12-1, la columna vibrará ligeramente alrededor de su posición recta original de equilibrio y después de un momento, debido a la amortiguación, retornará a la configuración recta original. Por definición, para cargas menores que P_{cr1} la columna es estable si retorna a su configuración recta original cuando la pequeña perturbación desaparece.

Sin embargo, si la carga es igual a la carga crítica más baja, P_{cr1} , después de retirar la fuerza perturbadora, F , la columna permanecerá en la configuración ligeramente flexionada causada por F (fig. 12-8b). La curvatura o deflexión lateral dependen de la magnitud de la fuerza lateral F . De este modo, la columna puede estar en equilibrio en un infinito número de configuraciones ligeramente flexionadas. Por definición, en P_{cr1} la columna está en equilibrio *neutro*.

Si la carga sobrepasa P_{cr1} , teóricamente es posible una configuración recta. Sin embargo, después de aplicar y retirar una pequeña fuerza lateral F , la columna se doblará considerablemente y en la mayoría de los casos se derrumbará debido a esfuerzos de flexión excesivamente altos (fig. 12-8c). Esto indica que la configuración recta es *inestable*, puesto que una pequeña perturbación produce una deformación excesiva o el colapso.

ESTABILIDAD

Figura 12-9 Diagrama $P - \Delta$

En la figura 12-9 se representa la relación entre la carga axial P y la deflexión lateral del punto medio de la columna Δ . Cuando la carga es menor que P_{cr} , entre los puntos ① y ②, la columna es recta y estable en el sentido de que retornará a su configuración recta después de una pequeña perturbación. En P_{cr} , teóricamente la columna permanece recta, pero, como se indicó anteriormente, su equilibrio es precario. Este punto en el diagrama $P - \Delta$ se llama *punto de bifurcación*. Para cargas que sobrepasan P_{cr} , teóricamente existen dos configuraciones posibles: una configuración recta (rama ① - ②, ilustrada en la fig. 12-9) y una configuración doblada (rama ① - ③, ilustrada en la fig. 12-9). La configuración recta es inestable, y la más ligera perturbación hará que la columna adquiera la configuración doblada. Este último fenómeno se representa mediante la línea $P'P''$ en el diagrama $P - \Delta$. La rama ① - ③ es una línea curva. La deducción de la ecuación de la carga crítica (12-9) conduce a una configuración flexionada correspondiente de magnitud indeterminada [ecuación (12-12)].

Utilizando la ecuación diferencial exacta de la curva elástica para deflexiones grandes es posible obtener una configuración flexionada de equilibrio para valores mayores que P_{cr} . Por ejemplo, para una carga $P = 1.015 P_{cr}$, es decir, para un aumento de solo 1.5 por ciento, se puede demostrar que el ángulo de pendiente en el extremo libre de una columna en voladizo es 20° (fig. 12-10). Por lo general, el material no puede resistir esta curvatura y ocurrirá falla de flexión por fluencia. De este modo, para todos los fines prácticos, la carga crítica produce falla.

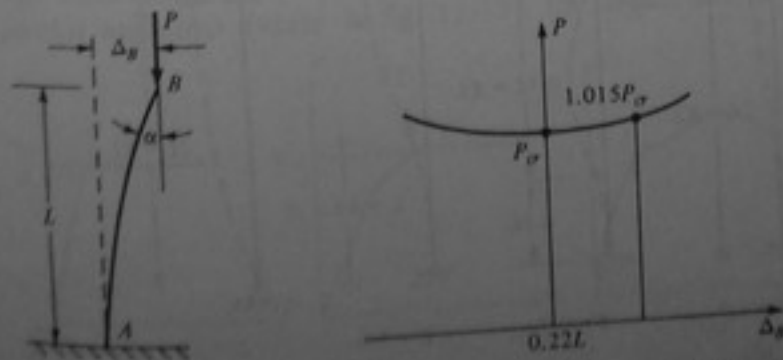


Figura 12-10 Configuración teórica de una columna en voladizo debida a una carga que sobrepasa la carga de Euler.

Debe observarse, además, que aunque teóricamente la columna permanece recta para cualquier carga diferente a las cargas críticas, desde un punto de vista práctico una columna es inestable tan pronto como se alcanza la carga crítica y prácticamente nunca podrá soportar ninguna carga superior a la carga crítica. En realidad, esto se debe a que ninguna columna es perfectamente recta y su sección transversal y sus propiedades no son uniformes. Asimismo, es imposible efectuar una carga axial concéntrica exacta. En consecuencia, la fuerza teórica de pandeo representa el límite superior de carga para el cual es posible una configuración no pandeada.

En la práctica, las posibles perturbaciones e imperfecciones producen deflexiones visibles, Δ , con cargas muy inferiores a la carga crítica o de Euler. Por consiguiente, la curva $P - \Delta$ muestra una caída inmediata en la carga (fig. 12-9b) tan pronto como se alcanza una determinada magnitud de carga (menor que la P_{cr} teórica) o una caída después que se alcanza un determinado límite de la deflexión Δ' (fig. 12-9c). Por consiguiente, la carga teórica de pandeo representa el *límite superior* de carga para el cual es posible una forma sin pandeo ($\Delta = 0$).

Para condiciones de los extremos diferentes a los de una columna de extremos articulados con pasadores, se pueden aplicar diferentes condiciones de contorno con el fin de determinar los diferentes valores para las constantes arbitrarias de la ecuación (12-4). Otra alternativa consiste en introducir el concepto de *longitud efectiva* de una columna. Esta longitud se expresa como la longitud real multiplicada por un factor de longitud efectiva, K , y representa la longitud de una columna equivalente de extremos articulados con pasadores.

En la figura 12-11 se indican algunos valores teóricos de K . Las expresiones para la carga y esfuerzo críticos se convierten ahora en

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2} \quad (12-15)$$

En la práctica los valores de K generalmente son más altos que los valores teóricos dados en la fig. 12-11, puesto que en una estructura real rara vez se obtiene completa fijación de los nudos.

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(KL/r)^2} \quad (12-16)$$

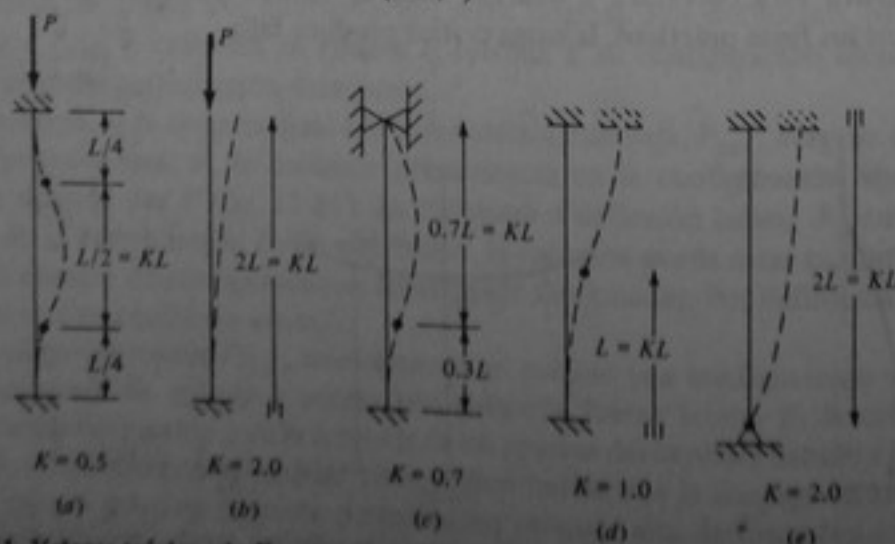


Figura 12-11 Valores teóricos de K para columnas diferentes a la de extremos articulados con pasadores.

12-4 PANDEO INELÁSTICO

En la práctica hay muy pocas columnas, si las hay, tan esbeltas que el esfuerzo promedio en la carga crítica (el esfuerzo crítico) caiga dentro del intervalo elástico. Por ejemplo, cuando se ensaya acero estructural en tracción en el laboratorio, puede exhibir un límite de proporcionalidad cercano al esfuerzo de fluencia, como se muestra en la fig. 12-2a. Sin embargo, si se realiza un ensayo de tracción en un elemento real hecho del mismo acero, éste exhibirá un límite de proporcionalidad considerablemente más bajo que el esfuerzo de fluencia, como se indica en la fig. 12-12b. La diferencia entre las dos curvas esfuerzo-deformación unitaria se debe al hecho de que un elemento real tiene esfuerzos residuales producidos durante el proceso de manufactura, debido principalmente al enfriamiento desigual. Por el contrario, una probeta normal para ensayo está libre de esfuerzos residuales. Tal como se explicó en el capítulo 10, esfuerzos residuales hasta de 15 klb/pul^2 son muy normales en perfiles laminados de acero. En las secciones soldadas es posible desarrollar esfuerzos residuales mucho más altos. El comportamiento inelástico se puede presentar antes de alcanzarse un esfuerzo nominal promedio de σ_{flu} , debido a la presencia de esfuerzos residuales. El American Institute of Steel Construction (AISC) supone que para acero estructural el comportamiento inelástico empieza en $0.5 \sigma_{flu}$.

Como se explicó en el capítulo 4, la mayor parte de los materiales diferentes de los aceros de resistencia muy baja (tales como el acero estructural A36, utilizado comúnmente) exhiben curvas esfuerzo-deformación unitaria de los tipos que se muestran en las figs. 12-12c y d. En estos casos, con frecuencia el material no se comporta exactamente en forma lineal o elástica, aun con pequeñas cargas. Para fines prácticos existen algunos límites de esfuerzo (y de la deformación unitaria correspondiente) por debajo de los cuales se puede considerar que el material se comporta linealmente y tiene un módulo de elasticidad constante, E . Por encima de este límite tendrá lugar el pandeo con cargas considerablemente más bajas que las calculadas con base en un valor constante de E . Únicamente para columnas muy esbeltas, con valores altos de KL/r , será aproximada la carga teórica de Euler debido a que el esfuerzo crítico aun cae en el intervalo de esfuerzo elástico. El pandeo bajo estas condiciones se denomina *pandeo elástico* (véase la fig. 12-13). Para columnas más robustas el esfuerzo promedio sobrepasará el límite de proporcionalidad del elemento, y la carga crítica, así como el esfuerzo crítico correspondiente, se reducirán debido a una caída en el valor de E . El pandeo bajo estas condiciones tiene lugar en el intervalo de esfuerzo *inelástico* y se denomina *pandeo inelástico* (véase la fig. 12-13). En la práctica, la mayoría de columnas se

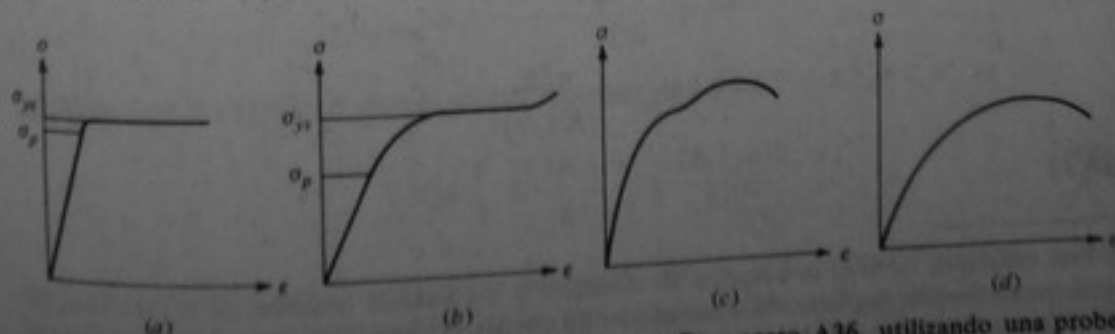


Figura 12-12 Curvas esfuerzo-deformación unitaria. (a) Para acero A36, utilizando una probeta normal para ensayo. (b) utilizando un elemento real de acero A36. (c) Para acero de alta resistencia. (d) Para concreto.

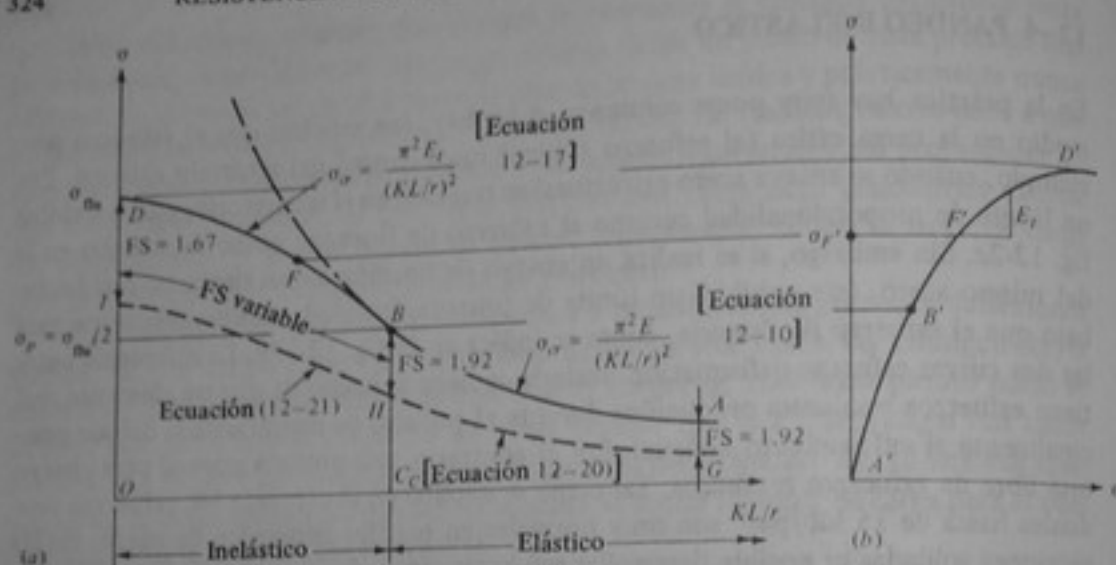


Figura 12-13 (a) Curvas de esfuerzo crítico para pandeo de columnas. (b) Curva esfuerzo-deformación unitaria.

someten a pandeo inelástico. Las columnas que a veces se pandean elásticamente se denominan "largas" o "esbeltas", y "robustas" o "intermedias" las que pandean inelásticamente. Si las columnas son muy cortas, no presentan ningún tipo de pandeo en la falla. Estas columnas se denominan columnas "cortas".

Considérese ahora el diagrama de la fig. 12-13. El eje horizontal representa la relación de esbeltez, KL/r , y el eje vertical, el esfuerzo crítico, σ_{cr} . Para pandeo elástico se aplica la expresión de Euler para esfuerzo crítico [ecuación (12-10)], representada por la curva AB , que a veces se denomina *hipérbola de Euler*. Para columnas robustas que tengan un esfuerzo crítico promedio mayor que el límite de proporcionalidad, la ecuación (12-10) deja de ser aplicable, pues el módulo de elasticidad E ya no es constante. Por ejemplo, en un nivel de esfuerzo σ_F , la rigidez del material está dada por E_t , que es la pendiente de la tangente a la curva esfuerzo-deformación unitaria en el punto F' . La columna permanecerá estable si su rigidez a la flexión reducida, $E_t I$, en F' es suficientemente grande para prevenir el pandeo. La resistencia al pandeo de una columna de longitud dada es directamente proporcional a su rigidez a la flexión, como se puede observar en las ecuaciones (12-9) y (12-15). A medida que disminuye en magnitud el módulo de elasticidad, E se puede remplazar por el módulo tangente E_t para hacer la fórmula del pandeo elástico aplicable en el intervalo elástico. Así, la ecuación (12-10) se convierte en †

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E_t}{(KL/r)^2} \quad (12-17)$$

† Esta ecuación, llamada la ecuación de *Essenger* o del *módulo tangente*, da la capacidad de carga de una columna con base en la suposición de que las deformaciones unitarias longitudinales en la columna continúen aumentando. Esta suposición representa aproximadamente lo que sucede en una columna real.

ESTABILIDAD
Para un límite
para la cual el

de donde

En la figura 12
Las curvas de d

en donde, nuev

Es interes
esbeltas se tom
columnas esbel
que las colum
para columnas
con un grado
introducir un fa
de este texto
rectitud que se
para explicar e
ejemplo, las esp
va desde 1.67 e
yores que C_c el

Las especifici
en la forma

Esta porción de
Para el intervalo

mientras que la e

Esta porción de l
El numerador de
(12-17) en el senti
bola de Euler en

Para un límite de proporcionalidad supuesto de $0.5 \sigma_{flu}$, la relación de esbeltez C_e para la cual el comportamiento de pandeo elástico se hace inelástico se halla de

$$\frac{\sigma_{flu}}{2} = \frac{\pi^2 E}{C_e^2}$$

de donde

$$C_e = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_{flu}}} \quad (12-18)$$

En la figura 12-13 se representan las curvas de esfuerzo crítico para pandeo de columnas. Las curvas de diseño se hallan aplicando un factor de seguridad adecuado. Así,

$$\sigma_{adm} = \frac{\pi^2 E}{(FS)(KL/r)^2} \quad (12-19)$$

en donde, nuevamente, E puede ser remplazado por E_t .

Es interesante observar que, generalmente, el factor de seguridad para columnas esbeltas se toma mayor que para columnas robustas. La razón para esto es que las columnas esbeltas son mucho más sensibles a la carga excéntrica y a la falta de rectitud que las columnas robustas. Se puede demostrar teóricamente que el esfuerzo crítico para columnas esbeltas se reduce por la excentricidad de la carga y la falta de rectitud con un grado mucho mayor que para columnas robustas. Por consiguiente, es lógico introducir un factor de seguridad mayor para columnas esbeltas. Está fuera del alcance de este texto el discutir los efectos exactos de la excentricidad de la carga y la falta de rectitud que se presenta en la práctica. Estos aspectos se mencionan aquí únicamente para explicar el uso de factores de seguridad más altos con columnas esbeltas. Por ejemplo, las especificaciones de la AISC emplean un factor de seguridad variable que va desde 1.67 en $KL/r = 0$ hasta 1.92 en $KL/r = C_e$. Para relaciones de esbeltez mayores que C_e el factor de seguridad se mantiene constante en 1.92.

Las especificaciones de la AISC expresan el esfuerzo admisible para pandeo elástico en la forma

$$\sigma_{adm} = \frac{12\pi^2 E}{23(KL/r)^2} = \frac{\pi^2 E}{1.92(KL/r)^2} \quad (12-20)$$

Esta porción de la curva de diseño se representa mediante la curva GH en la fig. 12-13a. Para el intervalo inelástico las especificaciones de la AISC dan

$$\sigma_{adm} = \frac{\{1 - [(KL/r)^2/2C_e^2]\} \sigma_{flu}}{FS} \quad (12-21)$$

mientras que la expresión para el factor de seguridad para $0 < KL/r < C_e$ es

$$FS = \frac{5}{3} + \frac{3KL/r}{8C_e} - \frac{(KL/r)^3}{8C_e^3} \quad (12-22)$$

Esta porción de la curva de diseño se representa mediante la curva HI en la fig. 12-13a. El numerador de la ecuación (12-21) es una aproximación matemática de la ecuación (12-17) en el sentido de que representa una curva cuadrática que es tangente a la hipérbola de Euler en el punto B y a una línea horizontal en el punto D . Los valores repre-

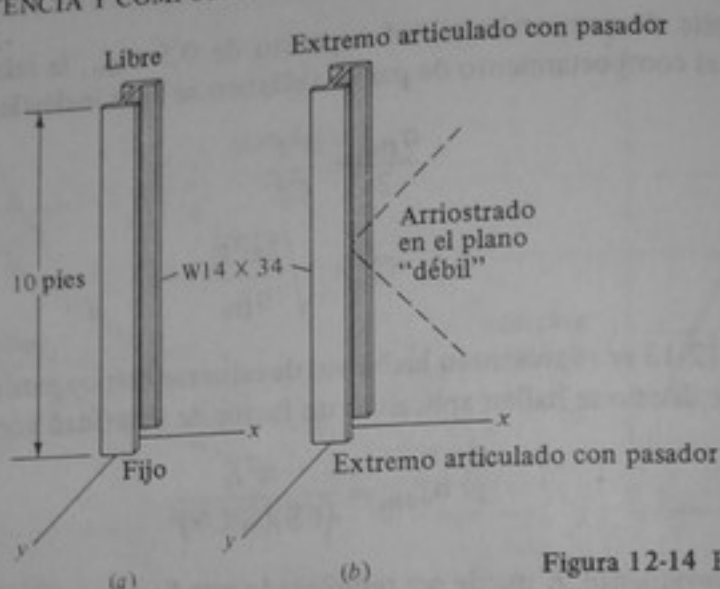


Figura 12-14 Ejemplo 12-1.

sentados por la curva *BFD* se dividen ahora por el factor de seguridad *FS* para obtener la ecuación (12-21). La curva *BFD* se aproxima mucho a la curva que resultaría si se utilizaran los diagramas reales esfuerzo-deformación unitaria. Las especificaciones de la American Association of State Highway and Transportation Officials (AASHTO) para puentes de carretera son idénticas a las de la AISC, con la excepción de que las primeras requieren un *FS* constante de 2.12 para el pandeo, tanto elástico como inelástico, en columnas de acero.

Ejemplo 12-1 Para las columnas que se muestran en la fig. 12-14, ¿cuál es la carga admisible de acuerdo con las especificaciones de la AISC y de la AASHTO? Tomar $\sigma_{fu} = 36 \text{ klb/pul}^2$ y $E = 29 \times 10^3 \text{ klb/pul}^2$.

SOLUCION Para la columna *a*, $r_x = 5.83$ y $r_y = 1.52$. Se usa el menor valor de los dos, r_y , y $K = 2$:

$$\frac{KL}{r_y} = \frac{2 \times 10 \times 12}{1.52} = 157.9$$

$$y \quad C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 \times 29 \times 10^3}{36}} = 126.1$$

es decir, pandeo elástico. La columna es elástica y se aplica la ecuación (12-19):

$$\sigma_{adm} = \frac{\pi^2 \times 29 \times 10^3}{(157.9)^2 FS} = \frac{11.48}{FS} \text{ klb/pul}^2$$

De acuerdo con la especificación de la AISC,

$$\sigma_{adm} = \frac{11.48}{1.92} = 5.98 \text{ klb/pul}^2$$

$$P_{adm} = 5.98A = 5.98(10.0) = 59.8 \text{ klb}$$

Resp

La especificación de la AASHTO conduce a

$$\sigma_{adm} = \frac{11.48}{2.12} = 5.415 \text{ klb/pul}^2$$

$$P_{adm} = 54.2 \text{ klb}$$

Resp.

Para la columna b , $K_y = \frac{1}{2}$, de donde

$$\frac{K_y L}{r_y} = \frac{\frac{1}{2} \times 10 \times 12}{1.52} = 39.47 < C_c$$

es decir, pandeo inelástico ($K_x L/r_x = 10 \times 12/5.83 = 20.58 < 39.47$ no controla el pandeo). Entonces,

$$\sigma_{adm} = \frac{36\{1 - (39.47)^2/[2(126.1)^2]\}}{FS} = \frac{34.24}{FS}$$

Para un diseño basado en la AISC y de acuerdo con la ecuación (12-22),

$$FS = \frac{5}{3} + \frac{3(39.47)}{8(126.1)} - \frac{(39.47)^3}{8(126.1)^3} = 1.667 + 0.117 - 0.004 = 1.78$$

$$y \quad \sigma_{adm} = \frac{34.24}{1.78} = 19.24 \text{ klb/pul}^2$$

de modo que

$$P_{adm} = 192.4 \text{ klb}$$

Resp.

Para un diseño basado en la AASHTO,

$$\sigma_{adm} = \frac{34.24}{2.12} = 16.15 \text{ klb/pul}^2$$

y

$$P_{adm} = 161.5 \text{ klb}$$

Resp.

Con frecuencia difieren las condiciones de apoyo en las dos direcciones principales.

Ejemplo 12-2 Una columna $W12 \times 85$ de 12 pies de longitud está fija en ambos extremos en la dirección débil y articulada con pasadores en la dirección fuerte. ¿Cuál es la carga admisible, utilizando la especificación de la AASHTO? Tomar $\sigma_{fu} = 36 \text{ klb/pul}^2$.

SOLUCION

$$\frac{K_x L}{r_x} = \frac{1 \times 12 \times 12}{5.38} = 26.76$$

$$\frac{K_y L}{r_y} = \frac{\frac{1}{2} \times 12 \times 12}{3.07} = 23.45$$

y 26.76 controla el pandeo. Del ejemplo anterior, $C_c = 126.1$. Aplicando la ecuación (12-11) en $FS = 2.12$ se obtiene

$$\sigma_{adm} = \frac{\{1 - (26.76)^2/[2(126.1)^2]\}36}{2.12} = 16.6 \text{ klb/pul}^2$$

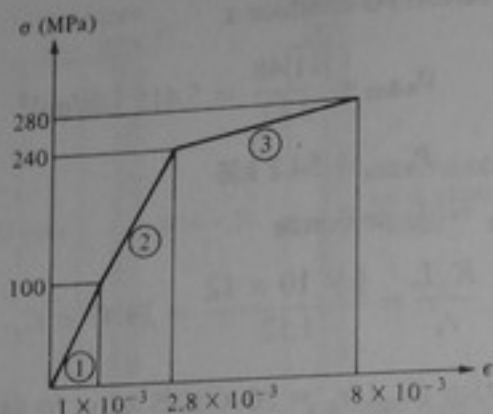


Figura 12-15 Ejemplo 12-3.

Para el área $A = 25 \text{ pul}^2$,

$$P_{adm} = 16.6(25) = 415 \text{ klb}$$

Resp.

Ejemplo 12-3 En la figura 12-15 se muestra la curva esfuerzo-deformación unitaria para un material. ¿Qué carga axial puede soportar una columna de 4 m de longitud, si su sección transversal es redonda y tiene un diámetro de 10 cm? Los extremos son fijos.

SOLUCION El área de la sección transversal es

$$A = \frac{\pi}{4} (10)^2 \times 10^{-4} = 7.854 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

El radio de giro es

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{(\pi/64)d^4}{(\pi/4)d^2}} = \frac{d}{4} = 2.5 \text{ cm}$$

Como los extremos de la columna son fijos, $K = 0.5$ y

$$\frac{KL}{r} = \frac{0.5 \times 4}{2.5 \times 10^{-2}} = 80$$

Ahora bien, de acuerdo con la ecuación (12-17),

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E_t}{(KL/r)^2} = 0.001542 E_t \quad (1)$$

Como no se conoce el valor de E_t , se utiliza un procedimiento de ensayo y error. Para la rama ①, $E_1 = 100/(1 \times 10^{-3}) = 10^5 \text{ MPa}$, que sustituido en la ecuación (1) produce

$$\sigma_{cr} = 0.001542 \times 10^5 = 154.2 \text{ MPa} > 100 \text{ MPa}$$

Luego se toma la segunda porción de la curva esfuerzo-deformación unitaria y se obtiene

$$E_2 = \frac{240 - 100}{(2.8 - 1) \times 10^{-3}} = 77.78 \times 10^3 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{cr} = 0.001542 \times 77.78 \times 10^3 = 119.9 \text{ MPa}$$

y

Como este valor está comprendido entre 100 y 240 MPa, es un valor crítico. La carga crítica de pandeo es

$$P_{cr} = \sigma_{cr} A = 119.9 \times 7.854 \times 10^{-3} = 0.942 \text{ MN} = 942 \text{ kN} \quad \text{Resp.}$$

12-5 RESUMEN

En este capítulo se estudia el pandeo de columnas, tanto en comportamiento elástico como inelástico. Únicamente se consideró pandeo *puro*, excluyendo el comportamiento de vigas-columnas.

Este capítulo sólo sirve como introducción al fenómeno del pandeo y en opinión de los autores cubre el material necesario para comprender el concepto básico de estabilidad. Los diseños prácticos, así como las fórmulas y gráficas empíricas se presentaron con el único fin de mejorar la comprensión, relacionando el comportamiento teórico de las columnas con el diseño real de estos elementos.

PROBLEMAS

- 12-1 Una columna W14 × 90 de 10 pies de longitud tiene sus dos extremos articulados con pasadores en ambas direcciones. ¿Cuál es la carga admisible de la columna (a) utilizando las especificaciones de la AASHTO y (b) utilizando las especificaciones de la AISC? Tomar $\sigma_{fu} = 36 \text{ klb/pul}^2$ y $E = 29 \times 10^3 \text{ klb/pul}^2$. Suponer que no hay ladeo (movimiento lateral relativo entre apoyos).
- 12-2 Repetir el problema 12-1 si la columna tiene fijos (sujetos) los dos extremos en ambas direcciones (no hay ladeo).
- 12-3 Repetir el problema 12-1 si la columna está fija en su base y articulada con pasadores en el extremo superior, en las dos direcciones (no hay ladeo).
- 12-4 Repetir el problema 12-1 si la columna está fija en su base y libre en el otro extremo (columna con voladizo).
- 12-5 Repetir el problema 12-1 si la columna está fija en su base en ambas direcciones, mientras que el extremo superior está sujeto contra rotación respecto a su eje débil y articulado con pasador en la otra dirección (no hay ladeo).
- 12-6 Repetir el problema 12-5 si se permite el ladeo del extremo superior de la columna en ambas direcciones.
- 12-7 Si la columna del problema 12-1 debe tener la misma resistencia al pandeo en ambas direcciones, utilizando arriostramiento lateral.
- (a) ¿En qué plano debe localizarse el arriostramiento (x-x o y-y)?
- (b) ¿Cuál es la máxima longitud sin apoyo?
- 12-8 Si la columna del problema 12-1 está fija contra rotación respecto a su eje fuerte y articulada con pasadores en la otra dirección, en ambos extremos, y no hay ladeo, ¿cuál es el mínimo número total de puntos intermedios de arriostramiento necesarios para desarrollar en la dirección débil por lo menos la misma resistencia al pandeo que en la dirección fuerte?

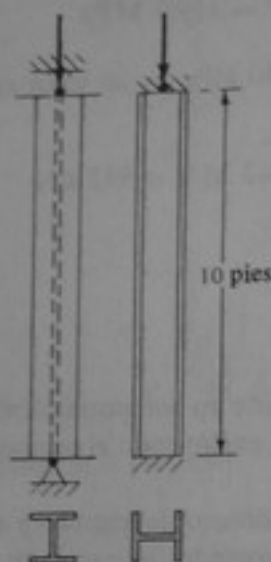


Figura P12-8

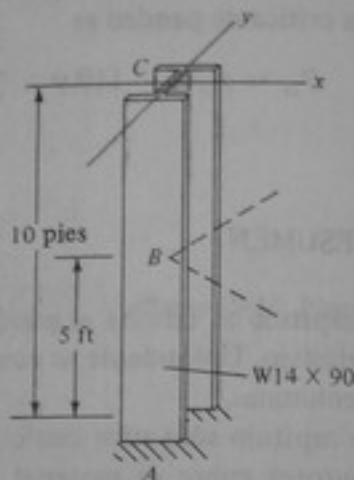


Figura P12-9

12-9 ¿Qué carga puede soportar la columna en voladizo que se muestra, de acuerdo con las especificaciones de la AISC, si está arriostrada contra movimiento lateral en el plano $x-x$, en el extremo superior y en el punto medio? Suponer uniones articuladas con pasadores entre riostras y columna, acero A36 ($\sigma_{flu} = 36 \text{ klb/pul}^2$) y $E = 29 \times 10^3 \text{ klb/pul}^2$.

12-10 Para la columna del problema 12-9, determinar la localización óptima del punto B y la correspondiente carga máxima de la columna.

12-11 a 12-20 Repetir los problemas 12-1 a 12-10 para una columna $W18 \times 71$ de 12 pies de longitud, hecha de un acero con esfuerzo de fluencia, $\sigma_{flu} = 50 \text{ klb/pul}^2$.

12-21 Para la barra ABC con arriostramiento cruzado que se muestra en la figura, ¿cuál es el valor mínimo del radio de giro para garantizar que hay pandeo elástico bajo compresión? Suponer (a) uniones articuladas con pasadores en A , B y C para pandeo en el plano (onda sinusoidal completa) y (b) uniones articuladas con pasadores en A y B y carencia de unión en C para pandeo fuera del plano (media onda sinusoidal), acero A36 ($\sigma_{flu} = 36 \text{ klb/pul}^2$) y $E = 29 \times 10^3 \text{ klb/pul}^2$.

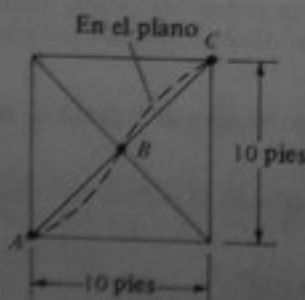


Figura P12-21

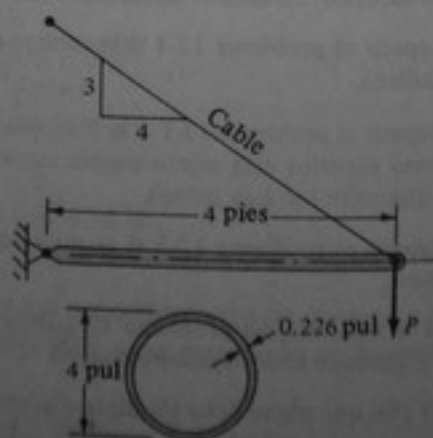


Figura P12-22

12-22 Para la estructura representada, determinar el valor admisible máximo de P si $\sigma_{flu} = 36 \text{ klb/pul}^2$ y $E = 29 \times 10^3 \text{ klb/pul}^2$. Utilizar las especificaciones de la AISC. Suponer que el cable es suficientemente fuerte. Tomar $A = 2.68 \text{ pul}^2$, $I = 4.79 \text{ pul}^4$ y $r = 1.34 \text{ pul}$.

ESTABILIDAD
12-23 La grúa de la figura muestra la grúa de la dimensión de las dimensiones con las especificaciones de las propiedades de la sección.

12-34 Tres tubos redondos con pasadores articulados con pasadores en A , B y C . $E_{al} = 70 \times 10^3 \text{ Mpa}$, $\sigma_{flu} = 250 \text{ N/mm}^2$.
(a) ¿Cuál barra pandea?
(b) ¿Con qué aumento de carga?

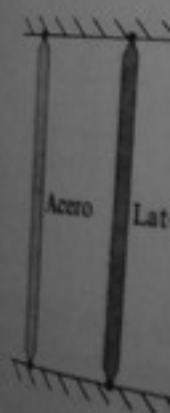


Figura P12-24

12-25 Un ángulo $4 \times 3 \times 1/2$ con la longitud máxima permitida de la AISC.

12-26 Dos ángulos $5 \times 3 \times 1/2$ con la longitud máxima permitida de la AISC. $I_x = 7.37 \text{ pul}^4$.

12-23 La grúa de la figura se utiliza para levantar una carga P . Si todos los mástiles son tubos de acero de las dimensiones indicadas, ¿cuál es la carga máxima P que se puede soportar, de acuerdo con las especificaciones de la AISC? Suponer que el cable es suficientemente fuerte. (Véanse las propiedades de la sección en el problema 12-22).

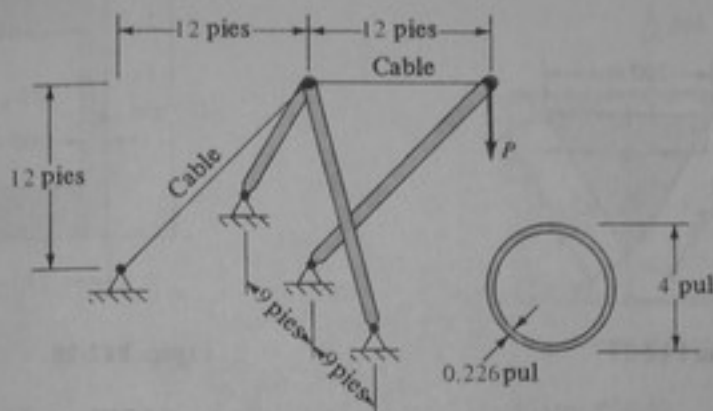


Figura P12-23

12-24 Tres tubos redondos, con la misma sección transversal que el del problema 12-22, están articulados con pasadores entre apoyos inmóviles. Tomar $E_{ac} = 207 \times 10^3$ MPa, $E_{la} = 103 \times 10^3$ MPa, $E_{al} = 70 \times 10^3$ MPa, $\alpha_{ac} = 11.7 \times 10^{-6}$ m/m/°C, $\alpha_{la} = 18.9 \times 10^{-6}$ m/m/°C, $\alpha_{al} = 23.4 \times 10^{-6}$ m/m/°C, $\sigma_{flu,ac} = 250$ MPa, $\sigma_{flu,la} = 400$ MPa y $\sigma_{flu,al} = 240$ MPa.

- (a) ¿Cuál barra pandeará primero si todas las tres se calientan la misma cantidad?
 (b) ¿Con qué aumento de temperatura ocurrirá este pandeo?

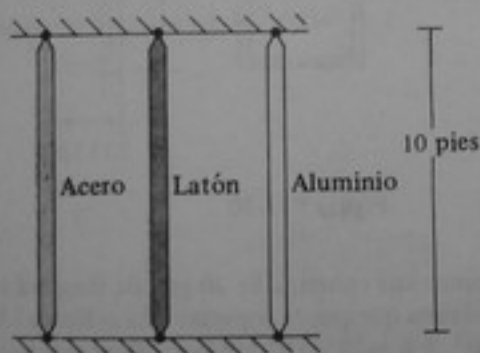


Figura P12-24

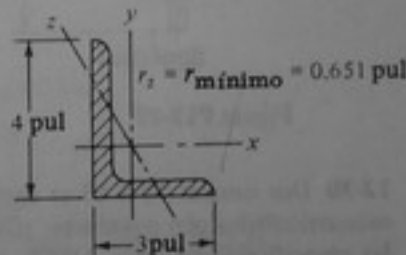


Figura P12-25

12-25 Un ángulo $4 \times 3 \times \frac{1}{2}$ pul de acero estructural A36 debe soportar 20 klb en carga axial. ¿Cuál es la longitud máxima que puede tener? Suponer extremos articulados y utilizar las especificaciones de la AISC.

12-26 Dos ángulos $5 \times 3 \times \frac{3}{8}$ pul se unen dorso con dorso. Para una columna de extremos articulados con pasadores y 8 pies de longitud, ¿cuál es la carga máxima de diseño que puede soportar de acuerdo con las especificaciones de la AASHTO si $\sigma_{flu} = 36$ klb/pul². Para cada ángulo tomar $A = 2.86$ pul², $I_x = 7.37$ pul⁴, $I_y = 1.61$ pul⁴, $y = 1.7$ pul, $I_y = 2.04$ pul⁴, $r_y = 0.845$ pul y $x = 0.704$ pul.

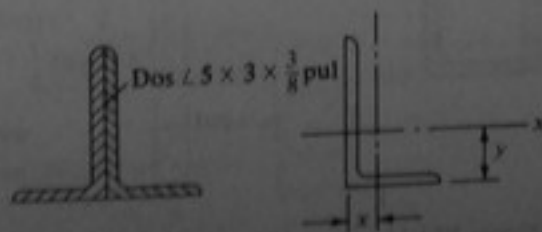


Figura P12-26

12-27 Determinar las dos relaciones de esbeltez principales para una columna de 3 metros de longitud y extremos articulados con pasadores que tiene la sección mostrada en la figura.

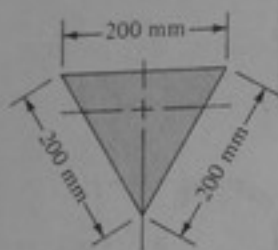


Figura P12-27

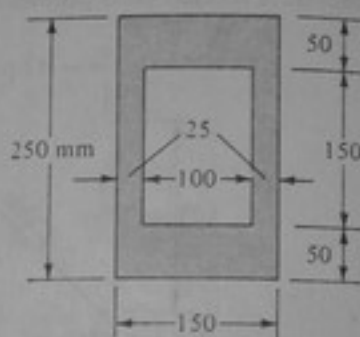


Figura P12-28

12-28 Repetir el problema 12-27 para la sección transversal mostrada.

12-29 Repetir el problema 12-27 para la sección transversal mostrada.

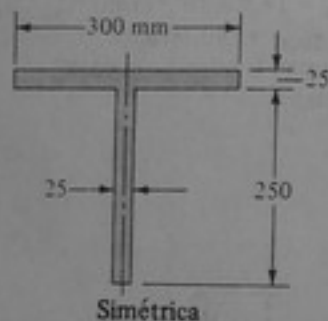


Figura P12-29

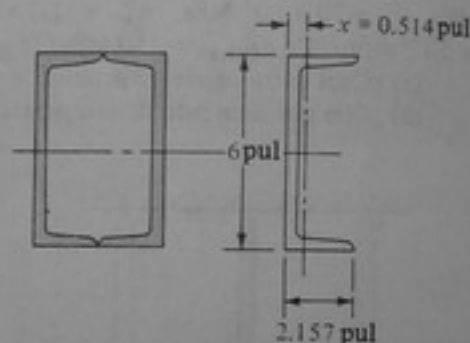


Figura P12-30

12-30 Dos canales C6 x 13 se sueldan y actúan como una columna de 20 pies de longitud y extremos articulados con pasadores. ¿Cuál es la carga máxima que puede soportar esta columna? Utilizar las especificaciones de la AISCI, $\sigma_{flu} = 36 \text{ klb/pul}^2$ y $E = 29 \times 10^3 \text{ klb/pul}^2$. Para cada una de las canales tomar $A = 3.83 \text{ pul}^2$, $I_x = 17.4 \text{ pul}^4$, $r_x = 2.13 \text{ pul}$, $I_y = 1.05 \text{ pul}^4$, $r_y = 0.525 \text{ pul}$.

12-31 Dos ángulos $6 \times 4 \times \frac{1}{2}$ pul se sueldan como se indica en la figura para formar una columna de 15 pies de longitud y extremos articulados con pasadores. Determinar la carga axial máxima utilizando las especificaciones de la AASHTO, $\sigma_{flu} = 50 \text{ klb/pul}^2$ y $E = 29 \times 10^3 \text{ klb/pul}^2$. Para cada ángulo tomar $A = 4.75 \text{ pul}^2$, $I_x = 17.4 \text{ pul}^4$, $I_y = 6.27 \text{ pul}^4$, $y = 1.99 \text{ pul}$, $x = 0.987 \text{ pul}$.

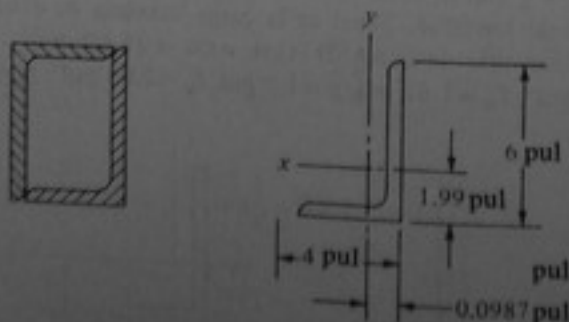


Figura P12-31

ESTABILIDAD
12-32 Cuatro
columna de 10
xina de acuerdo

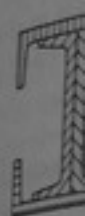


Figura P12-33

12-33 Una columna
de 10 pul de espesor
al pandeo en las
de la AISCI.
12-34 Un puntal
de modo que actúe
como un eje, ¿cuál es la
resistencia a la

12-35 Para la armadura
los elementos son tubos
 $\sigma_{tu} = 36 \text{ klb/pul}^2$ y

12-32 Cuatro canales C6 × 13 (véase el problema 12-30) se unen como se muestra para formar una columna de 10 pies de longitud y extremos articulados con pasadores. ¿Cuál es la carga axial máxima de acuerdo con las especificaciones de la AISC si $\sigma_{fu} = 50 \text{ klb/pul}^2$ y $E = 29 \times 10^3 \text{ klb/pul}^2$?

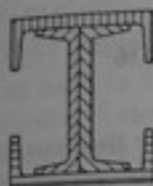


Figura P12-32

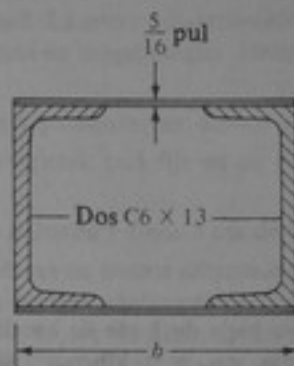


Figura P12-33

12-33 Una columna se compone de dos canales C6 × 13 (véase el problema 12-30) y dos placas $\frac{5}{16}$ pul de espesor. ¿Cuál debe ser el ancho b de esta columna para que tenga la misma resistencia al pandeo en las dos direcciones principales? Utilizar $\sigma_{fu} = 36 \text{ klb/pul}^2$ y las especificaciones de la AISC.

12-34 Un puntal de 20 pies de longitud consta de cuatro ángulos $3 \times 3 \times \frac{1}{2}$ pul soldados entre sí, de modo que actúan como una sola unidad. Si los apoyos del puntal están fijos en todas las direcciones, ¿cuál es la carga admisible de pandeo, de acuerdo con las especificaciones de la AISC, para una resistencia a la fluencia de 50 klb/pul^2 ?

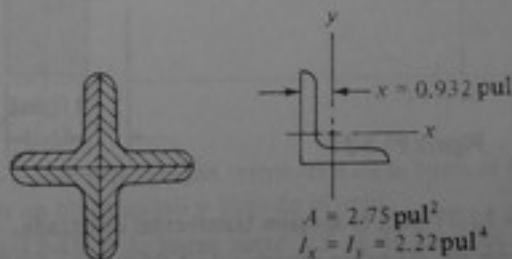


Figura P12-34

12-35 Para la armadura cargada simétricamente, ¿cuál es el valor máximo de las cargas P si todos los elementos son tubos de las dimensiones indicadas? Suponer uniones articuladas con pasadores, $\sigma_{fu} = 36 \text{ klb/pul}^2$ y $E = 29 \times 10^3 \text{ klb/pul}^2$. Utilizar las especificaciones de la AASHTO.

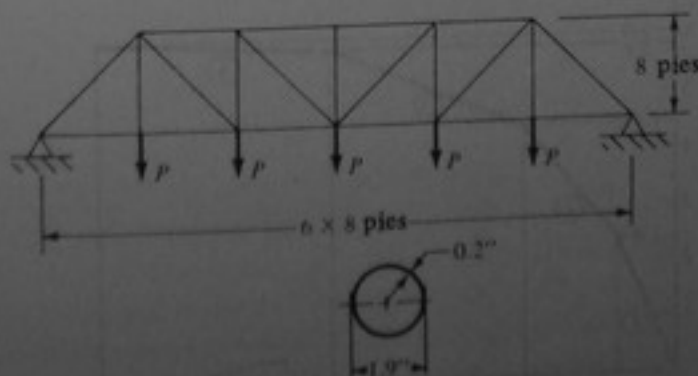


Figura P12-35

12-36 Dos ángulos $6 \times 4 \times \frac{1}{2}$ pul se unen a una placa espaciadora, como se muestra. ¿Cuál será el espesor mínimo de la placa, tal que cuando el elemento ensamblado se use como una columna de extremos articulados con pasadores, tenga igual resistencia al pandeo en las dos direcciones principales? (Véanse las propiedades de los ángulos en el problema 12-31.)

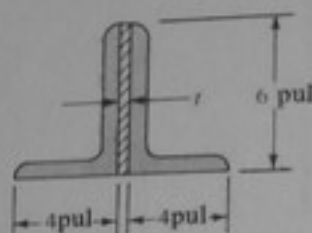


Figura P12-36

12-37 Una biela de 1 pie de longitud está hecha de una aleación de acero que tiene una resistencia a la fluencia, $\sigma_{fu} = 50$ klb/pul². Si los pasadores en los extremos de la biela son paralelos al eje x y se puede suponer restricción completa contra la rotación respecto al eje y , ¿cuál es la carga de compresión axial admisible máxima? Utilizar las especificaciones de la AISC y $E = 29 \times 10^3$ klb/pul².

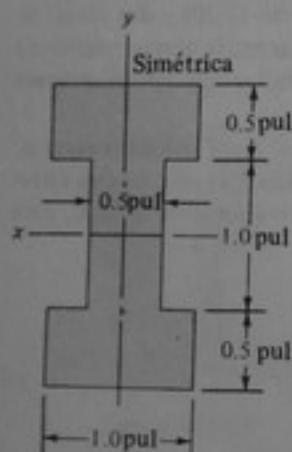


Figura P12-37

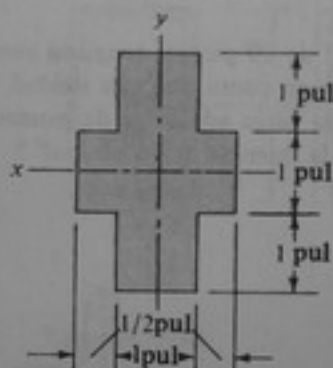


Figura P12-38

12-38 Repetir el problema 12-37 para la sección transversal mostrada.

12-39 Un tubo redondo con un diámetro exterior de 1.05 pul y un diámetro interior de 0.824 pul tiene 8 pul de longitud. Su diagrama esfuerzo-deformación unitaria se muestra en la figura. Un extremo del tubo es fijo y el otro libre. Determinar la carga axial de pandeo.

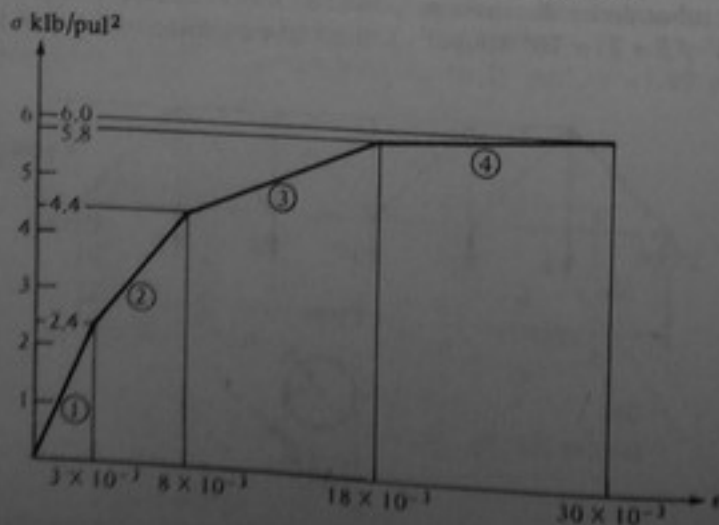


Figura P12-39

ESTABILIDAD
12-40 Repetir el problema 12-31 para una columna de longitud L y momento de inercia I .
12-41 Repetir el problema 12-31 para una columna de longitud L y momento de inercia I .
12-42 Una barra elástica de longitud L y momento de inercia I está sujeta a una carga crítica de compresión P .
12-43 Repetir el problema 12-31 para una columna de longitud L y momento de inercia I .
12-44 Repetir el problema 12-31 para una columna de longitud L y momento de inercia I .
12-45 a 12-47 Repetir el problema 12-31 para una columna de longitud L y momento de inercia I .
12-48 Una barra elástica de longitud L y momento de inercia I está sujeta a una carga crítica de compresión P .
12-49 Repetir el problema 12-31 para una columna de longitud L y momento de inercia I .
12-50 Repetir el problema 12-31 para una columna de longitud L y momento de inercia I .

ESTABILIDAD

12-40 Repetir el problema 12-39 si la columna tiene 12 pul de longitud y está articulada con pasadores en los extremos.

12-41 Repetir el problema 12-39 si la columna está articulada con pasadores en ambos extremos y su longitud es 5.5 pul.

12-42 Una barra rectangular de 1.5×2.0 cm tiene 1 m de longitud. La curva esfuerzo-deformación unitaria está dada por $10^6 \epsilon = 0.40 \sigma^2 - 1.167 \sigma$, en donde σ está en megapascales. Determinar la carga crítica de pandeo si un extremo es fijo y el otro libre.

12-43 Repetir el problema 12-42 si la barra está articulada con pasadores en ambos extremos.

12-44 Repetir el problema 12-42 si la barra tiene 1.5 m de longitud, está fija en un extremo y articulada en el otro.

12-45 a 12-47 Repetir los problemas 12-42 a 12-44 si la barra es redonda y tiene 3 cm de diámetro.

12-48 Una barra de 8 cm de diámetro está articulada con pasadores en ambos extremos y cargada en compresión. El elemento tiene 1 m de longitud y una curva esfuerzo-deformación unitaria que se puede aproximar mediante la expresión cuadrática $\epsilon = C_1 \sigma + C_2 \sigma^2$. Utilizando un factor de seguridad de 2, hallar la carga de trabajo segura admisible máxima.

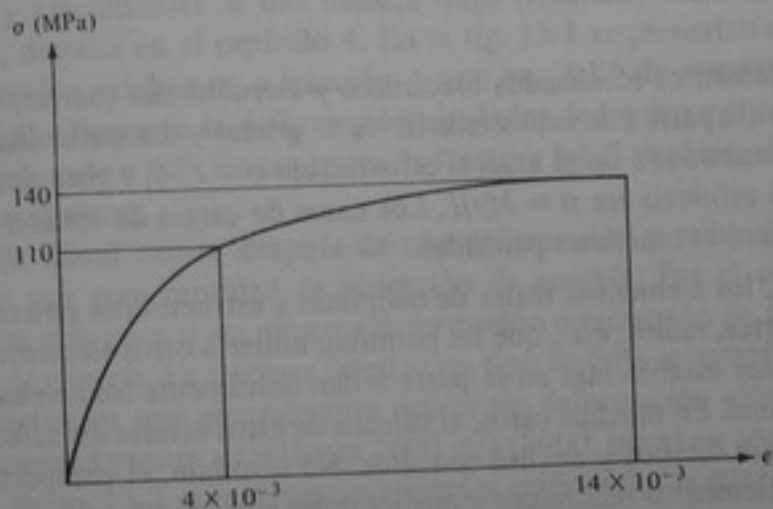


Figura P12-48

12-49 Repetir el problema 12-48 si la sección transversal de la barra es 6×9 cm, la barra tiene una longitud de 75 cm y está fija en un extremo y libre en el otro.

12-50 Repetir el problema 12-48 si la barra tiene 1.5 m de longitud, está fija en un extremo y articulada en el otro.

Capítulo 13

Fractura frágil

13-1 INTRODUCCION

Los diferentes elementos idealizados mecánicos y estructurales (barras, varillas, vigas, etc.) analizados en la parte 1 se supusieron libres de grietas y discontinuidades. Es decir, para elementos sometidos a carga axial el esfuerzo era $\sigma = P/A$, y para elementos sometidos a flexión el esfuerzo era $\sigma = My/I$. Los casos de cargas de torsión y de corte se analizaron empleando ecuaciones parecidas.

Sin embargo, los elementos reales de máquinas y estructurales generalmente necesitan agujeros, cortes, radios, etc., que les permitan unirse a otros elementos. Por tanto, las fórmulas simples establecidas en la parte 1 dan únicamente los niveles del esfuerzo promedio o nominal. En muchos casos, el cálculo de estos niveles del esfuerzo nominal es satisfactorio para diseños y análisis sencillos. No obstante, el comportamiento real de casi todos los elementos mecánicos y estructurales es muy diferente al descrito en la parte 1 debido a la influencia de estos agujeros, cortes, entallas, etc. Además de estas discontinuidades maquinadas y fabricadas, puede haber grietas por soldaduras en los elementos soldados, si no se han empleado los procedimientos y controles adecuados en la soldadura. Igualmente, la influencia de la temperatura, la velocidad de aplicación de la carga (por ejemplo, rápida, como en el caso del impacto de un peso que cae, o lenta, como la acción normal de las olas sobre los buques), y las restricciones (placas gruesas contra placas delgadas — efecto del espesor) pueden ser importantes para muchos de los materiales con los cuales se fabrican estos elementos. Todos estos factores pueden cambiar drásticamente los esfuerzos nominales calculados en los elementos. De este modo, además de comprender el análisis de los esfuerzos básicos de elementos idealizados, cubierto en la parte 1, el ingeniero debe saber:

1. Cómo pueden afectar las variaciones o discontinuidades locales en la geometría (agujeros, cortes, entallas, grietas por soldaduras, etc.) la distribución del esfuerzo promedio en un elemento.
2. Cómo pueden afectar las condiciones de servicio (temperatura, rapidez de la carga, repetición de carga, etc.) el comportamiento durante el servicio de elementos hechos de materiales reales (tales como aceros, aluminios, materiales compuestos, etc.).



Frágil

Dúctil

Figura 13-1 Comparación entre los modos de falla dúctil y frágil en varillas redondas con entalle.

Este capítulo describe la influencia de las discontinuidades geométricas sobre la distribución de esfuerzos en elementos y la forma como pueden fallar los elementos mecánicos y estructurales de una manera frágil (fractura) en contraste con la falla de tipo dúctil, descrita en el capítulo 4. En la fig. 13-1 se presentan ejemplos de dos elementos cargados axialmente a tracción — uno que falló de manera dúctil y el otro de manera frágil. Obsérvese la deformación alrededor de los dos agujeros en la falla dúctil y la falla por corte a 45° . En contraste, la fractura frágil es plana, sin deformación alrededor de los agujeros.

La falla dúctil ocurre después de una deformación y reducción de área considerables, con una gran cantidad de absorción de energía. Por el contrario, la fractura frágil ocurre con poca o sin ninguna deformación o reducción de área y con muy poca absorción de energía. La fractura frágil es un tipo de falla catastrófica de algunos materiales estructurales que generalmente ocurre sin deformación plástica previa y a velocidades extremadamente altas [hasta 2000 m/s (7000 pie/s) en aceros].

En la figura 13-2 se representan ejemplos gráficos de las relaciones esfuerzo-deformación unitaria para estos dos tipos de falla. La mayoría de los materiales estructurales exhiben una deformación considerable antes de alcanzar la resistencia final o de tracción, σ_{trac} (fig. 13-2a). Sin embargo, algunos materiales frágiles casi no exhiben deformación antes de la falla (fig. 13-2b). Además, bajo condiciones de restricción alta (por ejemplo, cuando los esfuerzos principales σ_1 , σ_2 y σ_3 son esencialmente iguales, como se indicó en el capítulo 4), aun los materiales dúctiles no presentan fluencia antes de la fractura. En estos casos, la curva esfuerzo-deformación unitaria de un material normalmente dúctil se asemeja a la de la fig. 13-2b. Para aplicaciones estructurales y mecánicas de tipo general, el comportamiento dúctil es mucho más conveniente que el comportamiento frágil debido al aviso muy evidente que se presenta antes de la falla.

En contraste con la falla dúctil, la fractura frágil se caracteriza generalmente por una superficie de fractura plana (fig. 13-1) con poca o ninguna ductilidad y con frecuencia a niveles del esfuerzo promedio inferiores a los de la fluencia general. Las fracturas frágiles no son tan comunes como la fluencia (capítulo 11), el pandeo (capítulo 12) y la fatiga (carga repetida, capítulo 14), pero cuando ocurren pueden ser más costosas en términos de vidas humanas y daños de las propiedades.

La figura 13-3 muestra un buque que ha fallado debido a una fractura frágil. Este buque fue construido con un acero estructural típico de ductilidad normal, pero se sometió a una sobrecarga en presencia de una concentración de esfuerzos severa. La concentración de esfuerzos aumentó la restricción local y restringió la fluencia. De este

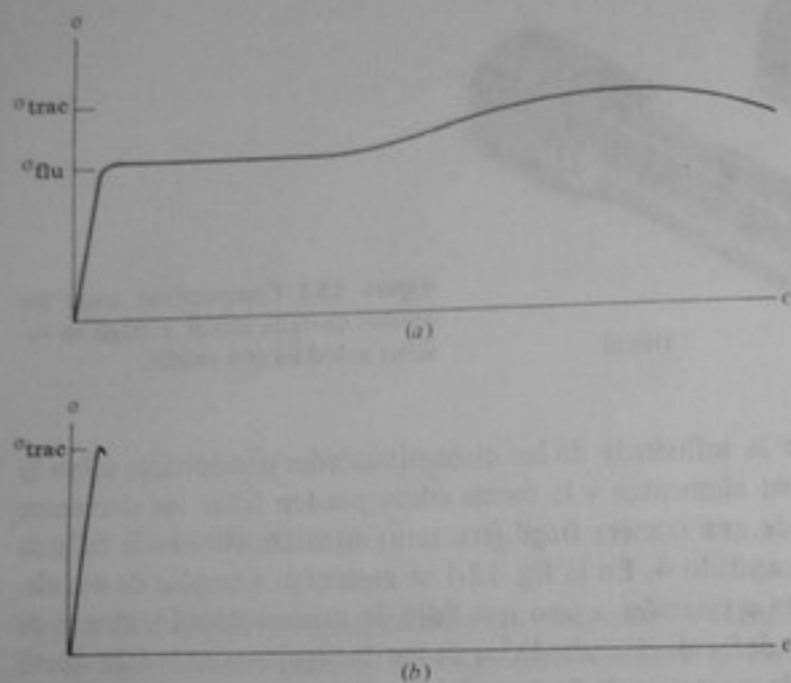


Figura 13-2 Comparación de las curvas σ - ϵ para materiales dúctiles y frágiles. (a) Material dúctil. (b) Material frágil.

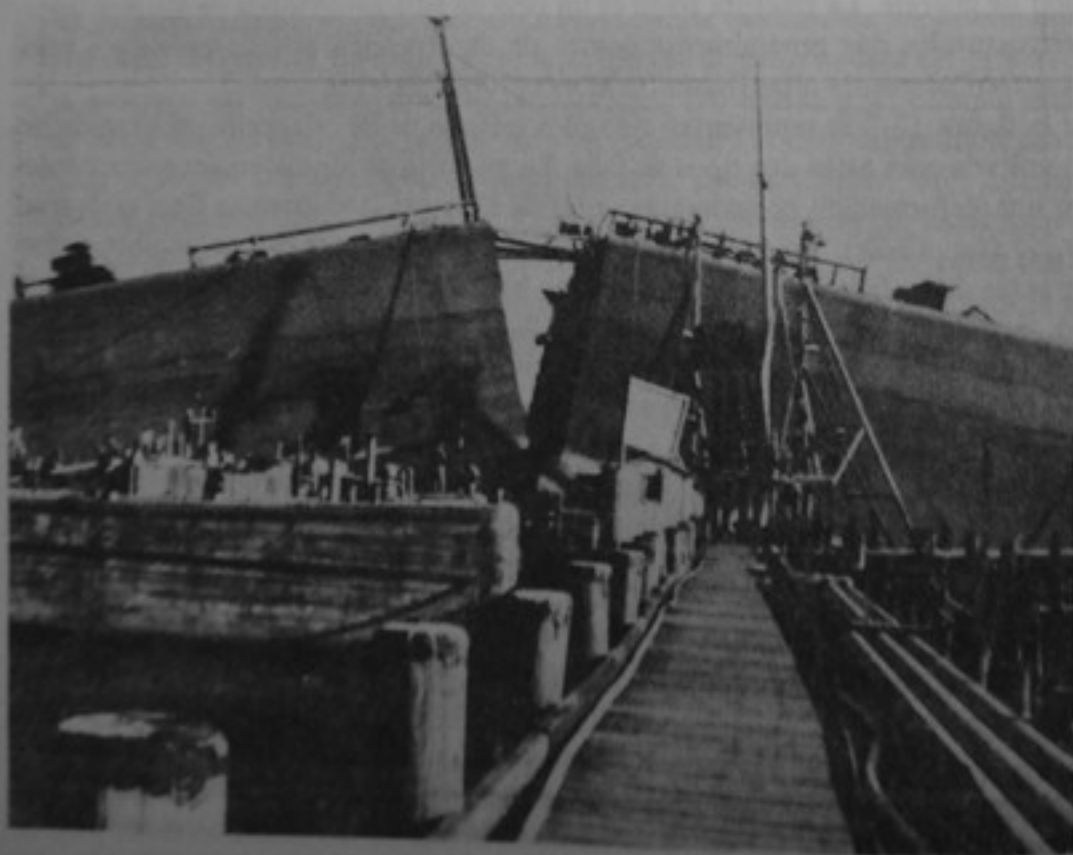


Figura 13-3 Fractura frágil de un buque, de tipo catastrófico.

FACTURA
modo, el
la fractura
fractura s

13-2 CO

Factor teó

Un agujero
nidad en
tinuidad.
concentra
máximo
factor teó

Una f
bución de
fluyen a t
estas linea
ticamente
un agujero
fig. 13-4b.
del esfuerz
ción de est
esfuerzo p
puede obse

Se han
Las figs. 13-
nación de e
K, para un s
na) es aprox

modo, el esfuerzo local alcanzó el valor de la resistencia a la tracción del acero y ocurrió la fractura frágil. Una vez iniciada la fractura frágil, la condición de carga fue tal que la fractura se propagó en ambos sentidos, alrededor del buque, en menos de 1 s.

13-2 CONCENTRACION DE ESFUERZOS

Factor teórico de concentración de esfuerzos

Un agujero, un corte, un radio, una grieta por soldadura o cualquier otra discontinuidad en un elemento produce un aumento del esfuerzo promedio cerca a la discontinuidad. Este aumento en el esfuerzo se denomina *concentración del esfuerzo* o *concentración de esfuerzos* (véase la sección 6-2). La relación entre el esfuerzo local máximo en una discontinuidad, σ_{\max} , y el esfuerzo promedio, σ_{pro} , se denomina factor teórico de concentración de esfuerzos, K_t :

$$K_t = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\text{pro}}} \quad (13-1)$$

Una forma de visualizar el efecto de las concentraciones de esfuerzos en la distribución de los esfuerzos en un elemento es suponer que hay "líneas de esfuerzo" que fluyen a través de un elemento. Para una barra lisa cargada en tracción (o compresión), estas líneas de esfuerzos están distribuidas uniformemente, como se muestra esquemáticamente en la fig. 13-4a. Si hay un cambio repentino en la geometría (por ejemplo, un agujero o una entalla), estas líneas de esfuerzo se concentran como se indica en la fig. 13-4b. El espaciamiento de estas líneas de esfuerzo es proporcional a la magnitud del esfuerzo a través de una sección que pase por el agujero, de modo que la distribución de esfuerzos es como se muestra en la fig. 13-4c, en donde $\sigma_{\max} = K_t \sigma_{\text{pro}}$. El esfuerzo promedio se puede calcular para el área neta o para el área total, como se puede observar en la fig. 13-4d y afecta ligeramente el valor de K_t :

$$\sigma_{\text{pro}}(\text{neto}) = \frac{P}{t(W - D)} \quad (13-2)$$

$$\sigma_{\text{pro}}(\text{total}) = \frac{P}{tW} \quad (13-3)$$

Se han determinado los valores de K_t para muchas geometrías y cargas diferentes.† Las figs. 13-5 y 13-6 muestran el efecto de la geometría en el factor teórico de concentración de esfuerzos, K_t , para elementos cargados axialmente y en flexión. Por ejemplo, K_t para un agujero en una placa plana con una relación $2r/D$ tendiente a 0 (placa infinita) es aproximadamente 3.0 (fig. 13-5). Así,

$$\sigma_{\max} = K_t \sigma_{\text{pro}} = 3\sigma_{\text{pro}}$$

† R.E. Peterson, *Stress Concentration Design Factors*, Wiley, Nueva York, 1975.

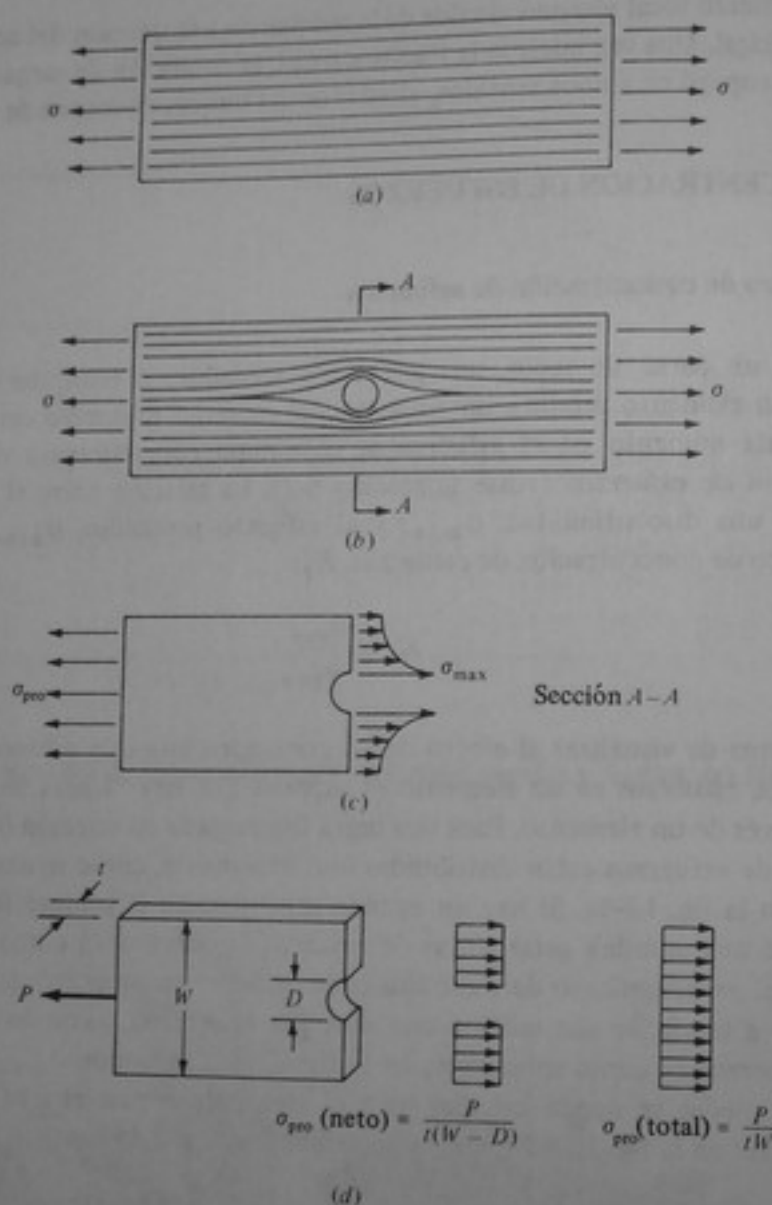


Figura 13-4 Esquemas que muestran el efecto de la concentración de esfuerzos sobre la distribución de esfuerzos. (a) Flujo de esfuerzos en una placa sin entallas. (b) Flujo de esfuerzos en una placa con un agujero. (c) Efecto de la concentración de esfuerzos sobre la distribución de esfuerzos. (d) Comparación de los esfuerzos en las áreas neta y total.

Ejemplo 13-1 Una placa plana de 30 pul de ancho y $\frac{3}{4}$ pul de espesor tiene un agujero de $1\frac{1}{2}$ pul de diámetro (fig. 13-7). En los extremos de la placa se aplica una carga uniformemente distribuida de 300 klb. La resistencia a la fluencia del material es 50 klb/pul². ¿Cuál es el esfuerzo máximo en el borde del agujero (punto A)?

SOLUCION El esfuerzo promedio en la sección neta es

$$\sigma = \frac{P}{A_{\text{neto}}} = \frac{300}{(30 - 1\frac{1}{2})(\frac{3}{4})} = 21.4$$

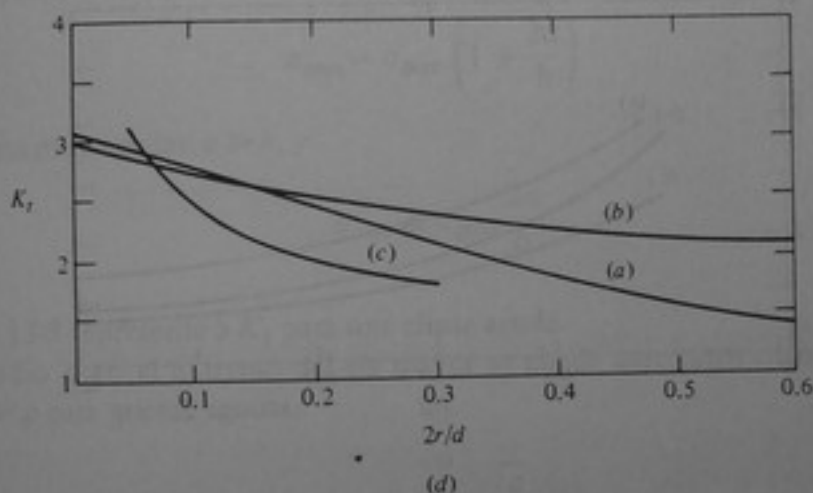
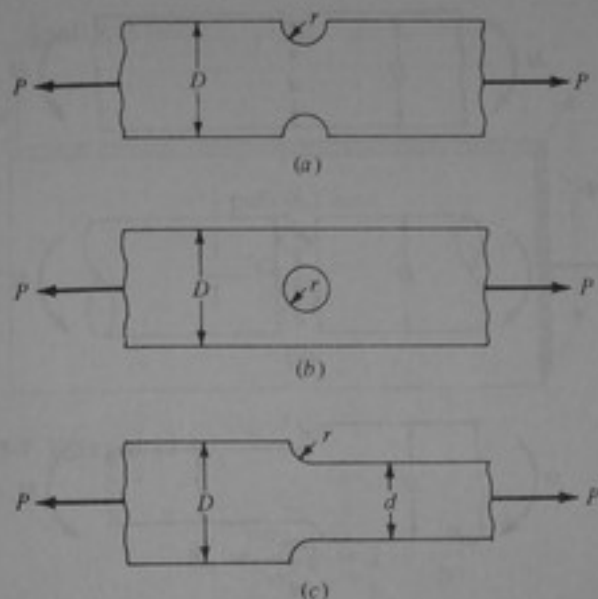


Figura 13-5 Factores de concentración de esfuerzos para algunas geometrías cargadas axialmente. (a) Barra plana de espesor t con entallas semicirculares. (b) Barra plana de espesor t con agujero circular. (c) Barra plana escalonada de espesor t con filetes de hombro. (d) Curvas para $D/d = 2$ y esfuerzo en la sección neta.

de modo que $\sigma_{\text{neto}} = 14 \text{ klb/pul}^2 \text{ (97 MPa)}$

Para $2r/D = 2(\frac{3}{4})/30 = 0.05$, K_t es 2.82 (de la fig. 13-5). Entonces,

$$\sigma_{\text{max}} = K_t \sigma_{\text{neto}} = 2.82(14) = 39.5 \text{ klb/pul}^2 \text{ (272 MPa)} \quad \text{Resp.}$$

Como este valor es menor que la resistencia a la fluencia, es correcto. Si, por ejemplo, la carga se duplicara, $P = 600 \text{ klb (2669 kN)}$, σ_{neto} sería $28 \text{ klb/pul}^2 \text{ (193 MPa)}$ y el σ_{max} calculado sería $2.82(28) = 79 \text{ klb/pul}^2 \text{ (545 MPa)}$. Sin embargo, este valor no sería correcto puesto que la resistencia a la fluencia del mate-

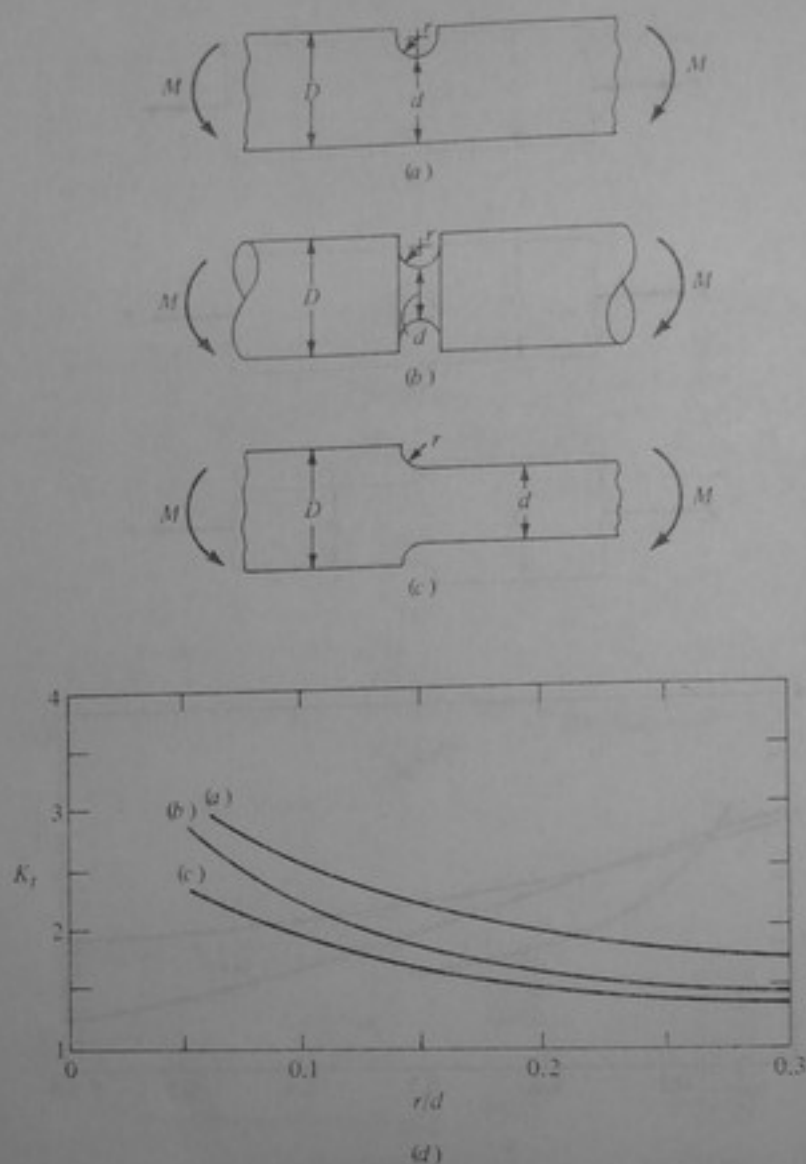


Figura 13-6 Factores de concentración de esfuerzos para algunas geometrías cargadas en flexión. (a) Barra plana de espesor t con entalla en forma de U. (b) Barra redonda de diámetro D con ranura en forma de U. (c) Barra plana escalonada de espesor T con filletes de hombro. (d) Curvas para $D/d = 2$ y esfuerzo en la sección neta.

rial es sólo 50 klb/pul² (345 MPa). Por lo tanto, se presentaría fluencia local alrededor del agujero (véanse las figs. 13-9b y c) y K_t disminuiría a algún valor menor que 2.82. Para esta carga, el esfuerzo real en el borde del agujero depende de la curva particular esfuerzo-deformación unitaria del material (véase la fig. 13-10).

Limitación de K_t

Un tipo común de discontinuidad es una grieta aguda en una placa grande. El primer paso para determinar la concentración de esfuerzos de una grieta aguda (es decir, una grieta cuyo radio se aproxima a cero) es analizar el factor de concentración de esfuerzos en el borde de una elipse, el cual está dado por

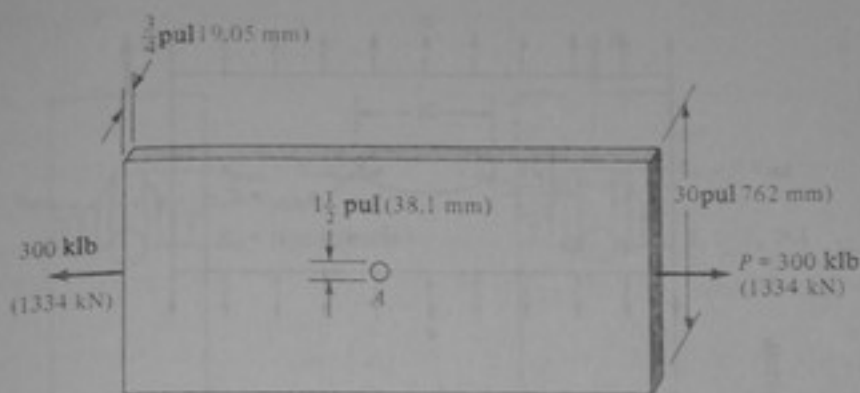


Figura 13-7 Ejemplo 13-1.

$$K_t = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\text{pro}}} = 1 + \frac{2a}{b} \quad (13-4)$$

Entonces, para una elipse,

$$\sigma_{\max} = \sigma_{\text{pro}} \left(1 + \frac{2a}{b} \right) \quad (13-5)$$

Para grietas muy agudas, $a \gg b$, y

$$\sigma_{\max} \approx \sigma_{\text{pro}} \frac{2a}{b} \quad (13-6)$$

La figura 13-8 representa a K_t para una elipse aguda.

El radio ρ en el extremo del eje mayor se puede aproximar mediante $\rho = b^2/a$. Como $a \gg \rho$ para grietas agudas,

$$\sigma_{\max} \approx \sigma_{\text{pro}} \times 2 \sqrt{\frac{a}{\rho}} \quad (13-7)$$

$$K_t = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\text{pro}}} = 2 \sqrt{\frac{a}{\rho}} \quad (13-8)$$

De este modo, K_t aumenta al aumentar la longitud de la grieta, a , y tiende a infinito cuando ρ tiende a cero, en grietas muy agudas. La fig. 13-8 muestra este comportamiento general como una función de la relación a/b .

Factor efectivo de concentración de esfuerzos

El factor teórico de concentración de esfuerzos, K_t , se determina con base, únicamente, en la forma geométrica y, por consiguiente, es independiente del material empleado. Sin embargo, si se mide la distribución de esfuerzos en los materiales reales, la relación entre el esfuerzo máximo y el esfuerzo nominal puede ser también una función del material particular utilizado (acero, titanio, aluminio, etc.); esta relación se llama *factor*

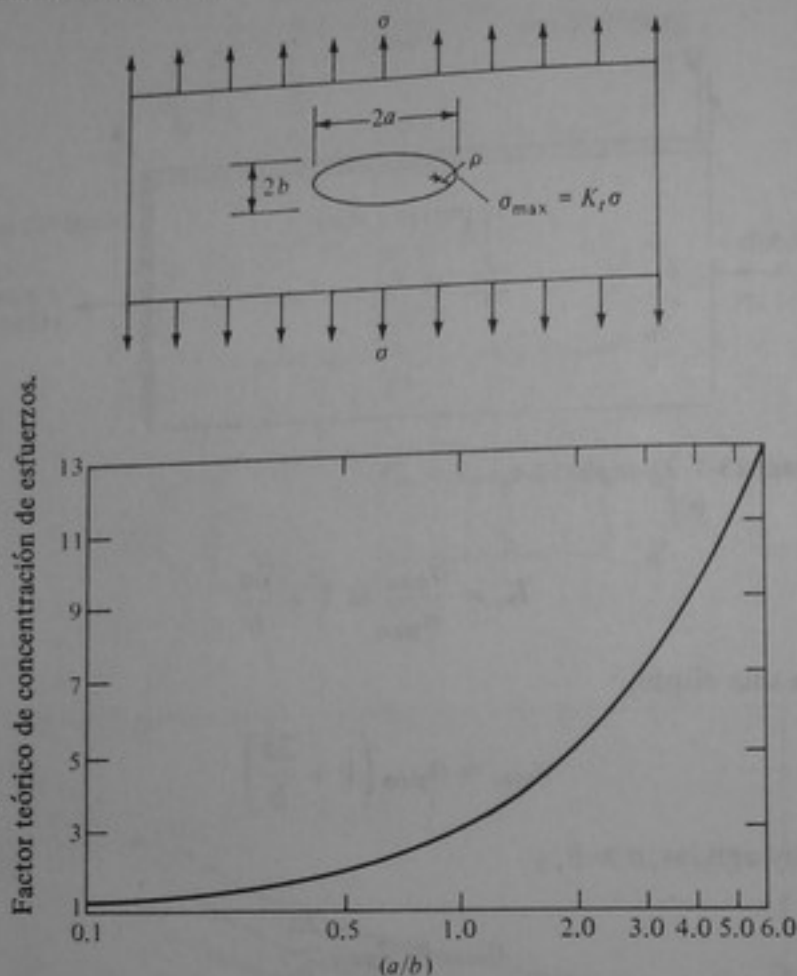


Figura 13-8 Factor de concentración de esfuerzos para un agujero elíptico.

efectivo de concentración de esfuerzos, K_e . El factor efectivo de concentración de esfuerzos puede ser diferente al factor teórico debido a los efectos de las propiedades del material (estructura metalúrgica básica, comportamiento inelástico, anisotropía, inhomogeneidad, etc.). El factor teórico de concentración de esfuerzos se usa más ampliamente para el análisis de esfuerzos estáticos, mientras que el factor efectivo se emplea más en el análisis de la fatiga (carga repetida), de acuerdo con lo que se explicó en el capítulo 14.

Para materiales dúctiles cargados en la región inelástica (más allá de la fluencia), el factor efectivo de concentración de esfuerzos disminuye hasta un valor que tiende a la unidad debido a la redistribución de los esfuerzos alrededor de la discontinuidad. La secuencia general de los eventos correspondientes a este comportamiento se muestra esquemáticamente en las figs. 13-9a a d y es de la siguiente manera:

1. Para comportamiento elástico,

$$K_t = K_e = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma}$$

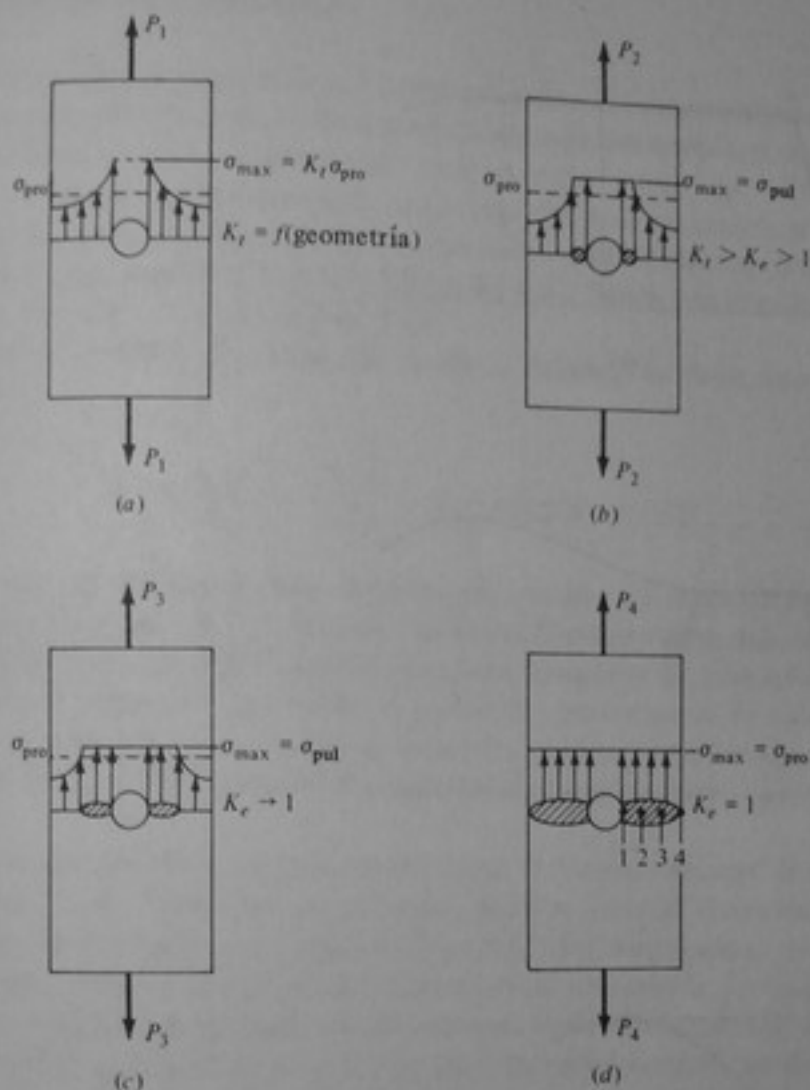
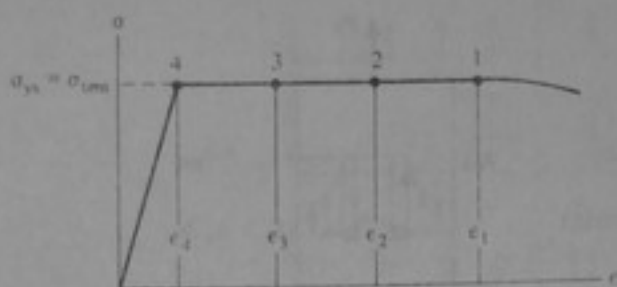


Figura 13-9 Esquemas que representan la secuencia de los eventos correspondientes a la fluencia general cerca de una concentración de esfuerzos. $P_4 > P_3 > P_2 > P_1$.

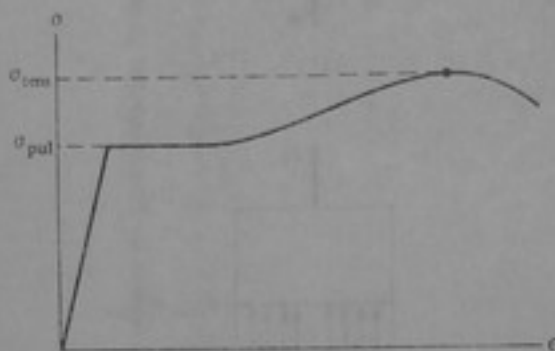
en donde

$$\sigma_{pro} = \frac{P}{A_{neto}}$$

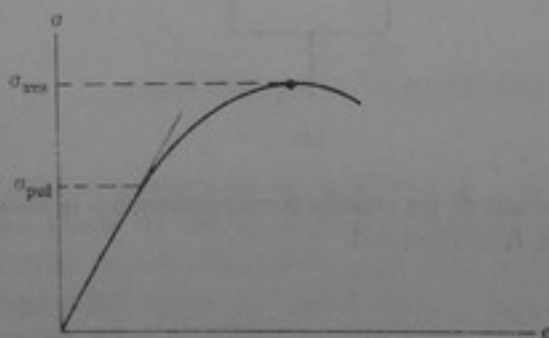
- Véase la figura 13-9a.
1. Cuando la carga aumenta desde P_1 hasta P_2 , el esfuerzo máximo, σ_{max} , en el borde de concentración de esfuerzos alcanza el valor del esfuerzo de fluencia. Entonces se presenta la fluencia y $\sigma_{max} = \sigma_{flu}$ para alguna distancia más allá del agujero. K_e es menor que K_t , pero todavía es mayor que 1.0 (fig. 13-9b).
 2. Cuando la carga aumenta aún más, hasta un valor P_3 , se presenta fluencia general en la mayor parte de la sección transversal y K_e se aproxima a 1 puesto que $\sigma_{max} = \sigma_{flu}$ y σ_{pro} se aproxima a σ_{flu} (fig. 13-9c).
 3. A algún nivel dado de carga, P_4 , se presenta fluencia general a través de toda la sección y $\sigma_{max} = \sigma_{flu} = \sigma_{pro}$. Por consiguiente, $K_e = 1$ (fig. 13-9d).



(a)



(b)



(c)

Figura 13-10 Representación esquemática de varios tipos de curvas $\sigma-\epsilon$ para materiales estructurales. (a) Material elástico-plástico idealizado. (b) Acero estructural típico. (c) Material no lineal típico.

5. Obsérvese que las localizaciones 1, 2, 3 y 4 en la fig. 13-9d se han deformado en diferentes cantidades, como se puede ver en la fig. 13-10a. Sin embargo, el esfuerzo es el mismo debido a la forma particular de la curva $\sigma-\epsilon$.
6. Si el material es dúctil (es decir que tiene la capacidad de deformarse inelásticamente aun con la presencia de un agujero), el aumento en la capacidad de carga puede ser mayor que $P_A = \sigma_{flu} A_{neto}$, según la relación $\sigma-\epsilon$ para el material particular con el cual ha sido fabricado el elemento. Por ejemplo, para la curva esfuerzo-deformación unitaria que se muestra en la fig. 13-10a, $P_{max} = \sigma_{flu} A_{neto}$. Para las curvas típicas esfuerzo-deformación unitaria de otros materiales estructurales, que se presentan en las figs. 13-10b y c, la capacidad máxima de carga en tracción es $P_{max} = \sigma_{trac} A_{neto}$, que es mayor que la capacidad de carga al iniciarse la fluencia.

13-3 TENACIDAD A LA ENTALLA

La mayoría de materiales estructurales se comportan de una manera dúctil en presencia de concentraciones de esfuerzos. Es decir, cuando se carga lentamente, el material fluye antes de una concentración de esfuerzos, como se indicó en las figs. 13-9b a d. Para estos casos de una sola aplicación de la carga más allá de la resistencia a la fluencia, K_t y K_e se aproximan a un valor de 1.0 y estos factores no tienen importancia real en el diseño. (Para carga repetida, es decir, fatiga, K_t y K_e tienen una importancia considerable, como se establece en el capítulo 14.)

Para entallas agudas, muy largas, K_t tiende a infinito. Es decir, con base en la ecuación (13-8),

$$K_t = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\text{pro}}} = 2 \sqrt{\frac{a}{\rho}} \rightarrow \infty \text{ cuando } \rho \rightarrow 0$$

Aun para el caso de entallas agudas cargadas en tracción, la mayoría de materiales estructurales se comportan de una manera dúctil y la fluencia ocurre delante de la entalla. La mayor parte de "entallas" agudas son concentraciones de esfuerzos que no tienen un radio bien definido y, por tanto, el factor de concentración de esfuerzos no se calcula. Si se calcula este factor, su valor sería muy grande y un poco sin sentido. Por ejemplo, véase la fig. 13-8, en donde K_t aumenta rápidamente para relaciones a/b mayores que 6.

Las entallas pueden tener un gran efecto sobre el comportamiento de estructuras. Esto es, casi todos los materiales estructurales dúctiles, cuando se someten a ciertas condiciones de servicio (tales como carga de impacto, bajas temperaturas o condiciones de restricción alta, como la que se puede hallar en placas gruesas), se pueden comportar de una manera frágil en presencia de entallas severas. Cada una de estas condiciones de servicio restringe la capacidad de un material para fluir plásticamente alrededor de una entalla o discontinuidad. Este hecho es importante para mejorar la comprensión del comportamiento real de elementos estructurales y mecánicos en aplicaciones de servicio. En la fig. 13-11 se muestra la comparación de los comportamientos dúctil y frágil para una barra con entalla. (La diferencia en el comportamiento esfuerzo-deformación unitaria se mostró gráficamente en la fig. 13-2). Obsérvese el efecto severo de la entalla sobre la ductilidad de este material estructural.

Como es muy difícil fabricar máquinas, equipos, puentes, aviones, buques o cualquier otro tipo de estructura grande sin introducir algún tipo de entalla, grieta, discontinuidad u otra concentración de esfuerzos, el ingeniero de diseño *debe* conocer el



Figura 13-11 Efecto de un entalle agudo sobre el comportamiento de un material estructural frágil.

efecto de las entallas sobre el comportamiento del material. De este modo, además de las propiedades del material, tales como la resistencia a la fluencia, el módulo de elasticidad y la resistencia a la tracción, descritas en el capítulo 4, hay otra propiedad del material muy importante, llamada la tenacidad a la entalla. La *tenacidad a la entalla* se define como la capacidad de un material para absorber energía en presencia de una entalla aguda, por lo general cuando se carga muy rápidamente con una carga de impacto. En contraste, la *tenacidad* de un material se define como la capacidad de un elemento sin entallas (por ejemplo una barra redonda lisa, como se indicó en el capítulo 4) para absorber energía, usualmente cuando se carga en forma lenta.

Por lo general, la tenacidad se mide como el área bajo la curva esfuerzo-deformación unitaria en una probeta normal para ensayo de tracción, con unidades de pulgada-libras (deducidas de $\text{lb/pul}^2 \times \text{pul/pul} \times \text{pul}^3 = \text{pul} \cdot \text{lb}$). La tenacidad a la entalla se mide comúnmente como la cantidad de energía (joules o pie-libras) necesaria para fracturar una probeta específica para este ensayo con una temperatura y rapidez de carga particulares.

La tenacidad a la entalla se mide con diversas probetas de ensayo. Una de las más utilizadas es la probeta para impacto Charpy con entalla en V (CVN), que se muestra en la fig. 13-12a, antes y después de un ensayo. Esta probeta tiene 2.165 pul (55 mm) de longitud y una sección transversal cuadrada de 0.934 pul (10 mm) de lado. Se emplea una máquina de ensayo con un péndulo (fig. 13-12b) para golpear la probeta a dife-

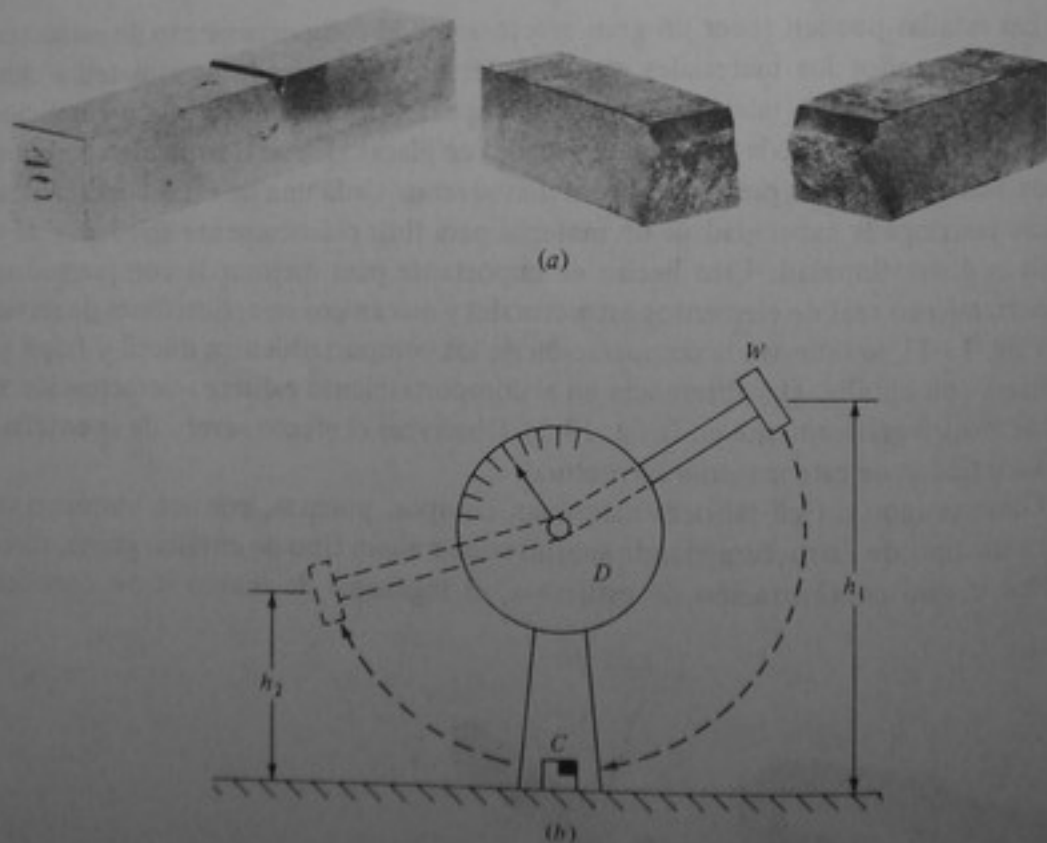


Figura 13-12 Probeta para impacto Charpy con entalla en V y esquema del procedimiento de ensayo. (a) Probeta para impacto Charpy con entalla en V antes y después del ensayo. (b) Esquema que muestra el martillo de choque, W , cayendo desde la altura h_1 , golpeando la probeta en C y subiendo hasta la altura final máxima, h_2 . La energía absorbida por la probeta, relacionada con la diferencia de alturas, $h_1 - h_2$, se registra en el dial D .

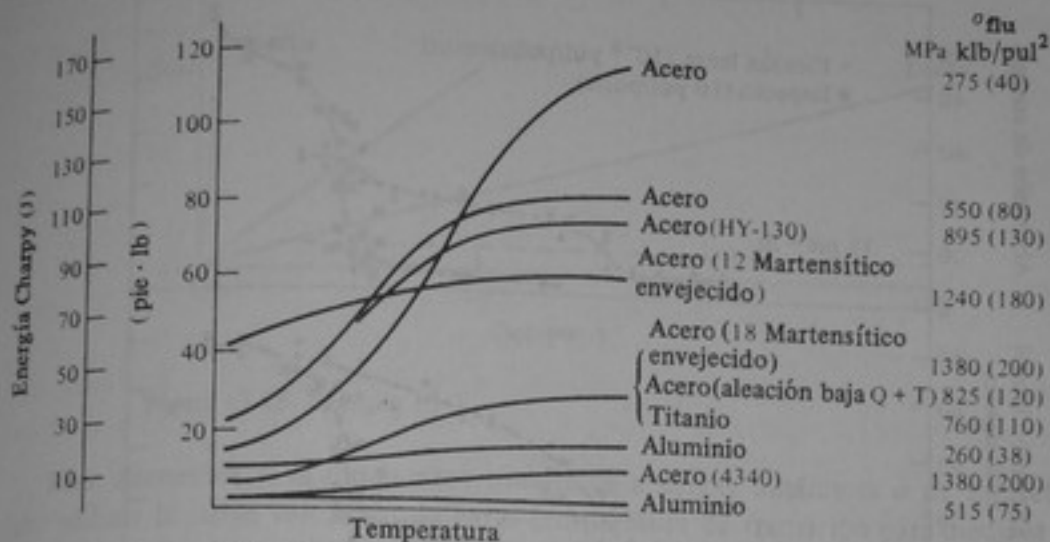


Figura 13-13 Energía de impacto en probeta Charpy con entalla en V contra temperatura para materiales estructurales seleccionados.

rentes temperaturas. La energía absorbida que se necesita para fracturar la probeta se representa gráficamente como una función de la temperatura; en la fig. 13-13 se muestran resultados típicos para algunos materiales estructurales comunes.

Tradicionalmente, las características de rigidez a la entalla de muchos materiales estructurales se describen en función de la transición de comportamiento frágil a dúctil bajo condiciones de carga de impacto. Esto es, los valores de impacto CVN de la parte inferior izquierda de la fig. 13-13 son representativos de niveles bajos de tenacidad al entalle o comportamiento frágil bajo condiciones de carga de impacto (es decir, 5 a 10 pie · lb). En contraste, los niveles de valores de CVN a temperaturas más altas (parte superior derecha) son representativos del comportamiento de tipo dúctil (60 a 80 pie · lb). Debe observarse que algunos materiales (tales como aluminio, titanio y acero de resistencia muy alta) no exhiben un comportamiento de transición claro (véase la fig. 13-13). Además, algunos materiales tienen baja tenacidad a la entalla a todas las temperaturas (por ejemplo, el aluminio con resistencia a la fluencia de 75 klb/pul²), mientras que otros materiales tienen un nivel alto de tenacidad a la entalla a todas las temperaturas (por ejemplo, el acero con resistencia a la fluencia de 180 klb/pul²).

En la figura 13-14 se muestra el cambio en la energía absorbida, en la ductilidad (expansión o contracción lateral en la raíz de la entalla) y en la aparición de la fractura (medida como porcentaje del esfuerzo cortante sobre la superficie) para un acero estructural típico. En + 140° F se observa un comportamiento completamente dúctil. En - 200° F se observa comportamiento completamente frágil. La región comprendida entre estos dos extremos se llama *región de transición*. Obsérvese que la región de transición es diferente para dos velocidades de carga diferentes, lenta e impacto.

Con frecuencia se establecen varias "temperaturas de transición" como una indicación de la tenacidad a la entalla de un material estructural. Por ejemplo, la temperatura de transición correspondiente a una energía de impacto de 15 pie · lb para el acero de la fig. 13-14 es aproximadamente 30° F. La temperatura de transición correspondiente a una aparición de fractura del 50% para este acero es aproximadamente 40° F, como se indica en la fig. 13-14. Obviamente, estas temperaturas de transición varían de ma-

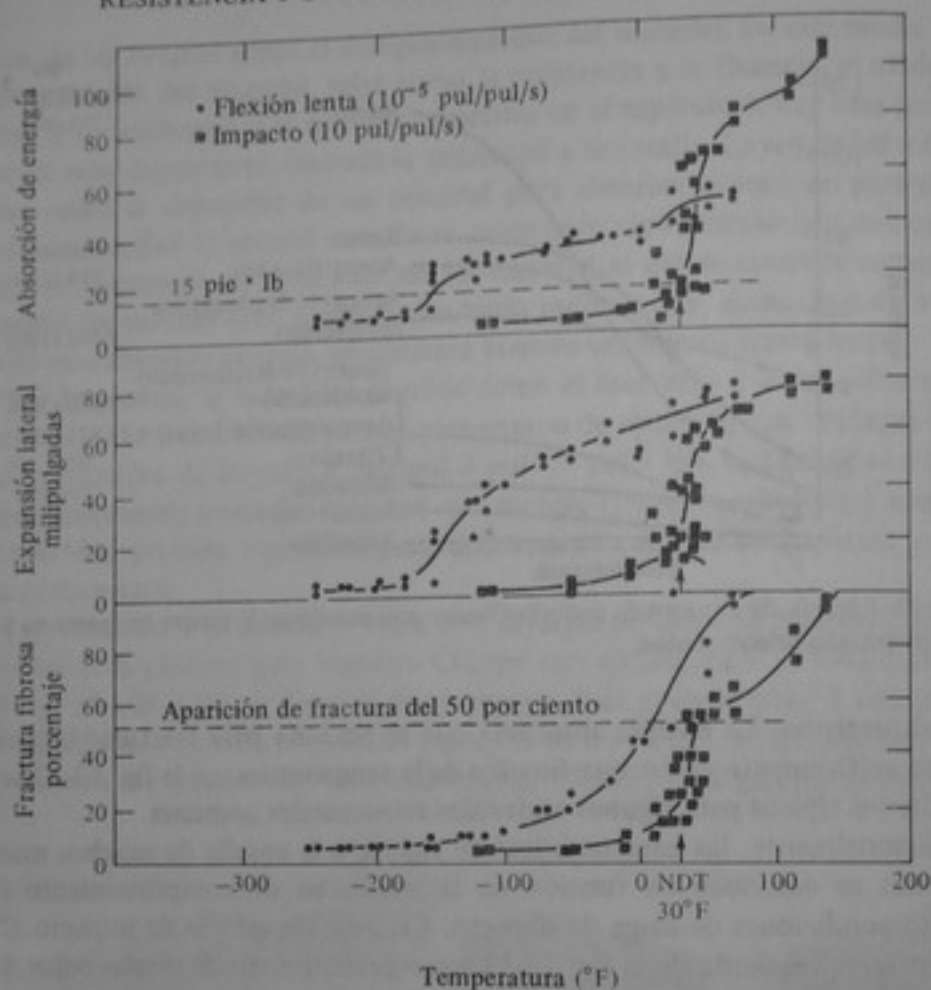


Figura 13-14 Absorción de energía en probeta Charpy con entalla en V, expansión lateral y fractura fibrosa para ensayos de impacto y flexión lenta en probetas normales CVN de acero estructural típico de resistencia baja.

material a material, según las características de tenacidad a la entalla, particulares de cada material. Una forma tradicional de diseño que se utiliza para prevenir la fractura frágil en un elemento consiste en especificar que éste se puede usar únicamente por encima de alguna temperatura de transición particular. Es decir, que para el material de la fig. 13-14, un método de diseño para controlar la fractura podría ser limitar su uso a temperaturas superiores a la temperatura de transición correspondiente a $15 \text{ pie} \cdot \text{lb}$, para las estructuras sometidas a cargas de impacto.

Además de los efectos de las entallas y la temperatura sobre el comportamiento de los materiales estructurales, la velocidad de aplicación de la carga también puede ser importante. Es decir, si las probetas con entalla para ensayo se cargan lentamente, la transición de comportamiento frágil a dúctil puede ocurrir a temperaturas mucho más bajas que para cargas de impacto, para algunos materiales. Las velocidades de carga lentas son de aproximadamente 10^{-5} pul/pul/s, las velocidades intermedias son de 1 a 10 pul/pul/s, como se indica en el ejemplo 13-2. La fig. 13-14 también muestra que las velocidades bajas de carga hacen que el comportamiento de transición se produzca a temperaturas más bajas.

FRACTURA

Para el...
debe utilizar...
idad a la en...
una velocidad...
un compone...
electo debid...
que muchos...
liben efectos

Ejemplo...
tamente...
cruza un...
caso de u...
a una vel...
cruza un...
taciones...
estructural...
deformaci...

SOLUCIO...
también a...

Para P_{max} ...
 $\epsilon_{max} = 0.0$...
para las tres

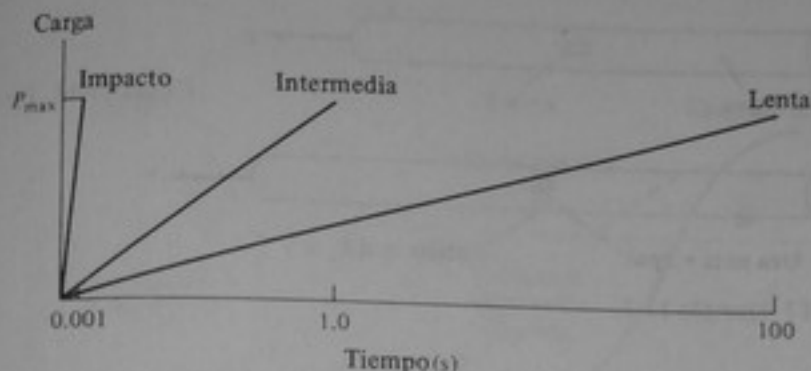


Figura 13-15 Ejemplo 13-2.

Para elementos o componentes sometidos a cargas dinámicas o de impacto, se debe utilizar la curva velocidad de carga-temperatura de transición para medir la tenacidad a la entalla. Se puede hacer un enunciado parecido para un elemento cargado con una velocidad de carga intermedia (entre lenta e impacto). Así, el comportamiento de un componente mecánico o estructural hecho de un material que no exhibe ningún efecto debido a la velocidad de carga, puede variar apreciablemente. Debe observarse que muchos materiales estructurales, principalmente los aceros de baja resistencia, exhiben efectos producidos por la velocidad de carga.

Ejemplo 13-2 Las cargas se pueden aplicar a los elementos estructurales muy lentamente (sobre un largo período de tiempo, como en el caso de un tractor que cruza un puente moviéndose muy lentamente), muy rápidamente (como en el caso de una carga de impacto debida a un peso que cae), o, como es el caso general, a una velocidad intermedia entre estas dos (como en el caso de un camión que cruza un puente de luz corta a 55 mph). En la fig. 13-15 se muestran las representaciones gráficas típicas carga-tiempo para cargas aplicadas a un elemento estructural hecho de barra redonda (fig. 13-16). ¿Cuáles son las velocidades de deformación unitaria para cada una de las curvas de la fig. 13-16?

SOLUCION Cuando la carga aumenta hasta su valor máximo, el esfuerzo $\sigma = P/A$ también aumenta, así como la deformación unitaria. La deformación unitaria es

$$\epsilon_{\max} = \frac{\sigma_{\max}}{E} = \frac{P_{\max}}{AE}$$

Para $P_{\max} = 100\,000$ lb, $A = 2$ pul² y $E = 30 \times 10^6$ lb/pul² se puede calcular $\epsilon_{\max} = 0.00167$ pul/pul. De este modo, las velocidades de deformación unitaria para las tres cargas representadas (impacto, intermedia y lenta) son:

$$\dot{\epsilon}_{\text{imp}} = \frac{0.00167}{0.001 \text{ s}} = 1.7 \text{ pul/pul/s}$$

$$\dot{\epsilon}_{\text{int}} = \frac{0.00167}{1 \text{ s}} = 1.7 \times 10^{-3} \text{ pul/pul/s}$$

$$\dot{\epsilon}_{\text{lenta}} = \frac{0.00167}{100 \text{ s}} = 1.7 \times 10^{-5} \text{ pul/pul/s}$$

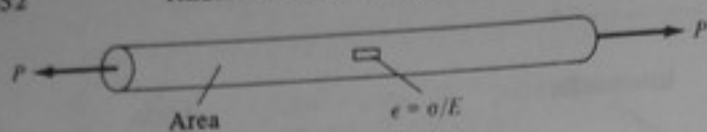


Figura 13-16 Ejemplo 13-2.

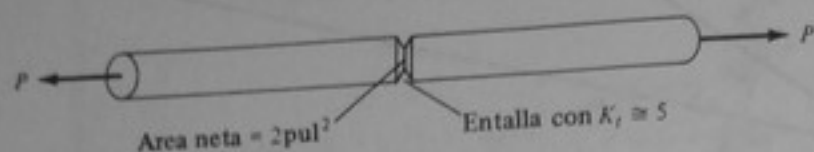


Figura 13-17 Ejemplo 13-2.

Para elementos con entallas se supone que K_t es la misma en todos los casos. Así, las velocidades individuales de carga podrían aumentar ligeramente, pero existirían diferencias del mismo orden de magnitud.

Por ejemplo, supóngase que la barra redonda de la fig. 13-17 tiene una entalla circunferencial tal que $K_t = 5.0$. Para las mismas condiciones generales anteriores,

$$\begin{aligned} \epsilon_{\max} &= \frac{K_t \sigma_{\max}}{E} = \frac{K_t P_{\max}}{AE} \\ &= \frac{5(100,000)}{2(30 \times 10^6)} = 0.00835 \text{ pul/pul} \end{aligned}$$

Esta deformación unitaria es cinco veces mayor que para la barra sin entalla.

Las velocidades de deformación unitaria correspondientes serían

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{\text{imp}} &= \frac{0.00835}{0.001} = 8.3 \text{ pul/pul/s} \\ \dot{\epsilon}_{\text{inst}} &= \frac{0.00835}{1} = 8.3 \times 10^{-3} \text{ pul/pul/s} \\ \dot{\epsilon}_{\text{lenta}} &= \frac{0.00835}{100} = 8.3 \times 10^{-5} \text{ pul/pul/s} \end{aligned}$$

Como se indica en las figs. 13-14 y 13-18, la tenacidad a la entalla de muchos aceros estructurales se afecta en forma significativa con la velocidad de carga.

13-4 NIVELES DE UTILIZACION

La figura 13-18 muestra esquemáticamente el cambio en el comportamiento de la tenacidad a la entalla con la temperatura para un acero estructural típico. Como se indicó antes, a bajas temperaturas el comportamiento es frágil y a temperaturas más altas el nivel de la tenacidad aumenta significativamente y el comportamiento es dúctil. Obsérvese, además, que la tenacidad del acero puede cambiar apreciablemente con la rapidez o velocidad de la carga. No obstante, independientemente de la rapidez de carga, los resultados se pueden relacionar con diferentes estados de fractura o con los niveles de utilización generales. En la fig. 13-18 se muestran los tres niveles generales, que son:

FRAC...
Niveles de utilización medidos mediante la energía absorbida (pie · lb) en ensayos

Figura 13-18 entalla y los n

1. Comporta con poca no se deb si es posib
2. Comporta mente ac pero gener
3. Comporta materiales cidad a la

No todo indica en las plo, algunos no obstante,

Niveles de utilización Elán

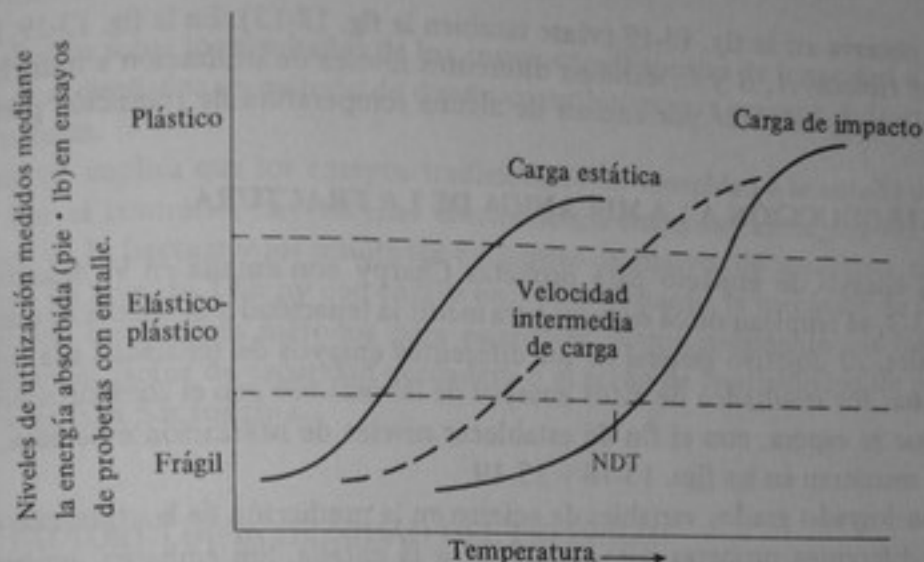


Figura 13-18 Representación gráfica de la relación entre los resultados de ensayos de tenacidad a la entalla y los niveles de utilización de la estructura para diferentes velocidades de carga.

1. *Comportamiento frágil.* Fractura bajo niveles de esfuerzos principalmente elásticos con poca o ninguna ductilidad. Comportamiento del tipo más pobre. En general, no se deben utilizar materiales en esta región a velocidades de carga de servicio, si es posible.
2. *Comportamiento plástico.* Fractura dúctil bajo fluencia general (total). Comúnmente acompañada por deformaciones grandes (comportamiento muy conveniente, pero generalmente no necesario para muchas aplicaciones de estructuras).
3. *Comportamiento elástico-plástico.* Transición entre los niveles 1 y 2. La mayoría de materiales estructurales exhiben este nivel de utilización y niveles adecuados de tenacidad a la entalla a velocidades de carga y temperaturas de servicio.

No todos los materiales estructurales exhiben la transición de frágil a dúctil que se indica en las figs. 13-14 y 13-18. Los materiales que no exhiben la transición (por ejemplo, algunos aceros con resistencia a la fluencia muy alta, aluminios y titanios) pueden, no obstante, exhibir diferentes niveles de utilización (es decir, tenacidades a la entalla),

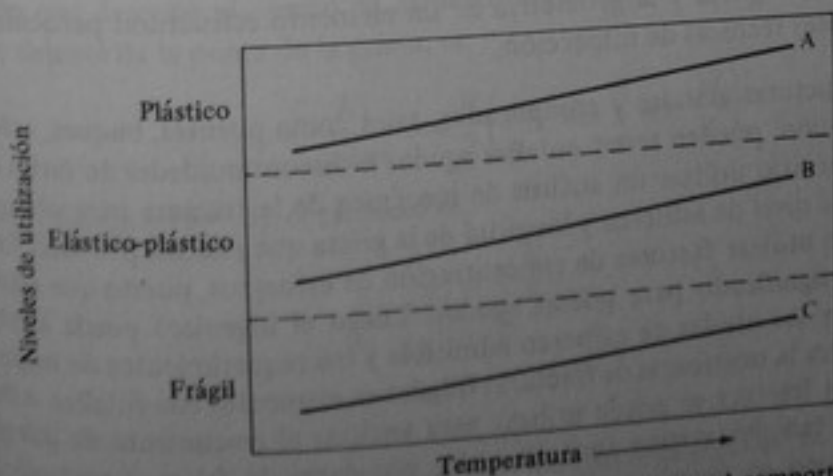


Figura 13-19 Representación gráfica de materiales que no exhiben el comportamiento de transición frágil a dúctil.

como se observa en la fig. 13-19 (véase también la fig. 13-13). En la fig. 13-19, los tres materiales típicos, *A*, *B* y *C*, exhiben diferentes niveles de utilización a todas las temperaturas, no únicamente por encima de alguna temperatura de transición particular.

13-5 INTRODUCCION A LA MECANICA DE LA FRACTURA

Fuera del ensayo de impacto para probetas Charpy con entalla en V, descrito en la sección 13-3, se emplean otros ensayos para medir la tenacidad a la entalla de materiales estructurales. El objetivo general de los diferentes ensayos de tenacidad a la entalla es correlacionar los resultados de estos ensayos de laboratorio con el comportamiento de servicio que se espera, con el fin de establecer niveles de utilización esperados, como los que se muestran en las figs. 13-18 y 13-19.

Se han logrado grados variables de acierto en la predicción de la utilización en servicio con diferentes probetas para tenacidad a la entalla. Sin embargo, aunque estas predicciones se establezcan para sistemas estructurales o mecánicas existentes, no necesariamente son válidas para nuevos diseños, nuevas condiciones de operación o nuevos materiales. Esto se debe a que los resultados, que se expresan en función de energía absorbida o aparición de la fractura (véanse las figs. 13-13 y 13-14), no siempre se pueden trasladar a un parámetro de diseño de ingeniería tal como el esfuerzo.

Una manera mucho mejor de analizar la tenacidad a la entalla es utilizando los principios de una ciencia de la ingeniería desarrollada recientemente, que se llama *mecánica de la fractura*. La mecánica de la fractura es un método de caracterizar el comportamiento a la fractura de vigas, barras, varillas, etc., con entalla *aguda* o grietas (por ejemplo, $K_t \rightarrow \infty$), en términos que pueden ser usados directamente por el ingeniero, es decir, *esfuerzo* y *longitud* de la *grieta*. La mecánica de la fractura se basa en un análisis de esfuerzos cerca de una entalla o grieta y no depende, por consiguiente, del uso de una amplia experiencia de servicio para convertir los resultados del laboratorio en información práctica para el diseño, siempre que el ingeniero pueda determinar:

1. La tenacidad a la entalla del material, utilizando ensayos del tipo de mecánica de la fractura.
2. El esfuerzo nominal, calculado como se indica en la parte 1 de este texto.
3. La longitud de la grieta y la geometría de un elemento estructural particular, mediante diferentes técnicas de inspección.

Muchas estructuras grandes y complicadas, tales como puentes, buques, aviones y recipientes a presión, pueden tener entallas agudas o discontinuidades de varias clases. Entonces, es necesario utilizar un análisis de mecánica de la fractura para obtener las combinaciones de nivel de esfuerzo y longitud de la grieta que puedan producir fractura frágil en lugar de utilizar factores de concentración de esfuerzos, puesto que estos factores no tienen significado para grietas agudas. Luego el ingeniero puede establecer *cuantitativamente* los niveles de esfuerzo admisible y los requerimientos de inspección para diseñar contra la ocurrencia de fracturas frágiles en elementos con entallas. Además, la mecánica de la fractura se puede utilizar para analizar el crecimiento de grietas pequeñas hasta el tamaño crítico (por ejemplo, por carga de fatiga o corrosión con esfuerzo), tal como se describió en el capítulo 14. Por consiguiente, los ensayos y las técnicas de análisis mediante la mecánica de la fractura tienen varias ventajas

FRACTURA FRA
muy definidas sobr
y ofrecen al diseña
en estructuras.

Esto no implic
útiles. Por el cont
mecánica de la fra
el ensayo de impa
proporciona los
influyen en el fact
tura contra falla po

13-6 FACTORES

En la parte 1 de
rentes elementos s
los factores de cor
mentos moderada
etc., con radios bie

Sin embargo,
o grietas extremad
ción, defectos, sol
tóricos de conce
estas grietas, muy
calcular los factor
concentración de esfu
más común \dagger es K_{11}
de una grieta agud
concentración de esfu
factores de intensid
de una grieta.

Este campo de
cuación que descri
estado delante de

A lo largo del eje x

muy definidas sobre los resultados de los ensayos tradicionales de tenacidad a la entalla y ofrecen al diseñador un método de diseño cuantitativo para prevenir la fractura frágil en estructuras.

Esto no implica que los ensayos tradicionales de tenacidad a la entalla ya no sean útiles. Por el contrario, hay muchas correlaciones empíricas entre los valores de la mecánica de la fractura y los resultados existentes de ensayos de tenacidad, tales como el ensayo de impacto Charpy con entalla en V. No obstante, la mecánica de la fractura proporciona los mejores métodos para establecer cuantitativamente los factores que influyen en el factor de seguridad verdadero o el grado de confiabilidad de una estructura contra falla por fractura.

13-6 FACTORES DE INTENSIDAD DEL ESFUERZO

En la parte 1 de este texto se establecieron métodos para calcular esfuerzos en diferentes elementos sin entalla (barras, vigas, ejes, etc.). En la sección 13-2 se introdujeron los factores de concentración de esfuerzos para calcular los esfuerzos máximos en elementos *moderadamente entallados*, es decir, elementos con agujeros, filetes, entallas, etc., con radios bien definidos.

Sin embargo, con mucha frecuencia en los elementos estructurales existen entallas o grietas extremadamente *agudas*, debido a las cargas de fatiga, los procesos de fabricación, defectos, soldaduras, etc. Para estos casos, $K_t \rightarrow \infty$. Por consiguiente, los factores teóricos de concentración de esfuerzos pierden su significado. Cuando se presentan estas grietas, muy agudas, en los elementos, se utiliza la mecánica de la fractura para calcular los *factores de intensidad del esfuerzo*, en contraste con los factores de concentración de esfuerzos, delante de estas grietas. El factor de intensidad del esfuerzo más común[†] es K_I , que es el parámetro que describe el *campo de esfuerzo* total delante de una grieta aguda sometida a carga de tracción. Obsérvese que los factores de concentración de esfuerzos, K_t , describen el esfuerzo en un solo punto, mientras que los factores de intensidad del esfuerzo, K_I , describen el campo de esfuerzo en la proximidad de una grieta.

Este campo de esfuerzo delante de una grieta aguda se muestra en la fig. 13-20. La ecuación que describe el campo de esfuerzo en la dirección y , en un punto cualquiera situado delante de la punta de la grieta, es

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right) \quad (13-9)$$

A lo largo del eje x ($\theta = 0$), el esfuerzo es,

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \quad (13-10)$$

[†] Hay otros factores de intensidad del esfuerzo que describen el campo de esfuerzo delante de una grieta sometida a fuerzas cortantes o deslizantes; estos factores se denominan K_{II} y K_{III} , pero no se usan comúnmente para la mayoría de aplicaciones estructurales.

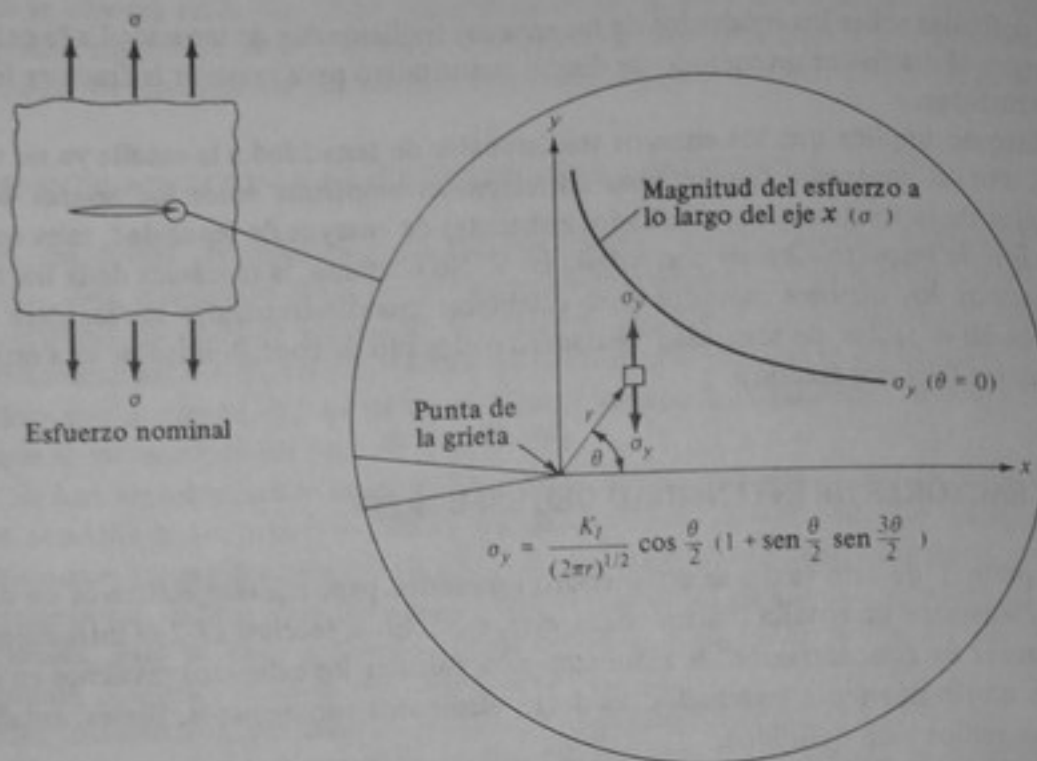


Figura 13-20 Distribución del campo de esfuerzo elástico delante de una grieta.

De este modo, el parámetro K_I describe el esfuerzo σ_y en la dirección y , para cualquier valor de r , excepto $r = 0$. De nuevo, K_I es el factor de intensidad del esfuerzo que describe el campo de esfuerzo delante de la grieta (es decir, en muchos puntos) y no sólo en un punto, como K_t .

Las ecuaciones (13-9) y (13-10) describen el campo de esfuerzo local exactamente delante de una grieta aguda cualquiera en un elemento estructural grande. Obsérvese que las unidades de K_I deben ser esfuerzo \times longitud^{1/2} (klb/pul² \cdot pul^{1/2} ó MPa \cdot m^{1/2}). Se ha demostrado que K_I está relacionada con el esfuerzo nominal σ y con la raíz cuadrada de la longitud total de la grieta, a , en un elemento. En efecto, se han desarrollado numerosas ecuaciones para factores de intensidad del esfuerzo para geometrías específicas de grietas en elementos particulares, tales como barras, placas y vigas. En la fig. 13-21 se dan ejemplos de los valores de K_I más comúnmente usados y se repite en las ecuaciones (13-11) a (13-13).

$$\text{Grieta a través de todo el espesor: } K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \quad (13-11)$$

$$\text{Grieta en un borde: } K_I = 1.12 \sigma \sqrt{\pi a} \quad (13-12)$$

$$\text{Grieta en una viga: } K_I = \frac{6M}{B(w-a)^{3/2}} \times f\left(\frac{a}{w}\right) \quad (13-13)$$

en donde $f(a/w)$ es el valor dado en la fig. 13-21.

Como una ilustración del cálculo de K_I para una placa ancha con una grieta en un borde [fig. 13-21b y ecuación (13-12)], supongamos que el área y la carga son tales que el esfuerzo nominal es 20 klb/pul². Generalmente las grietas son pequeñas comparadas con el área total en elementos reales, de tal suerte que la diferencia entre los esfuerzos

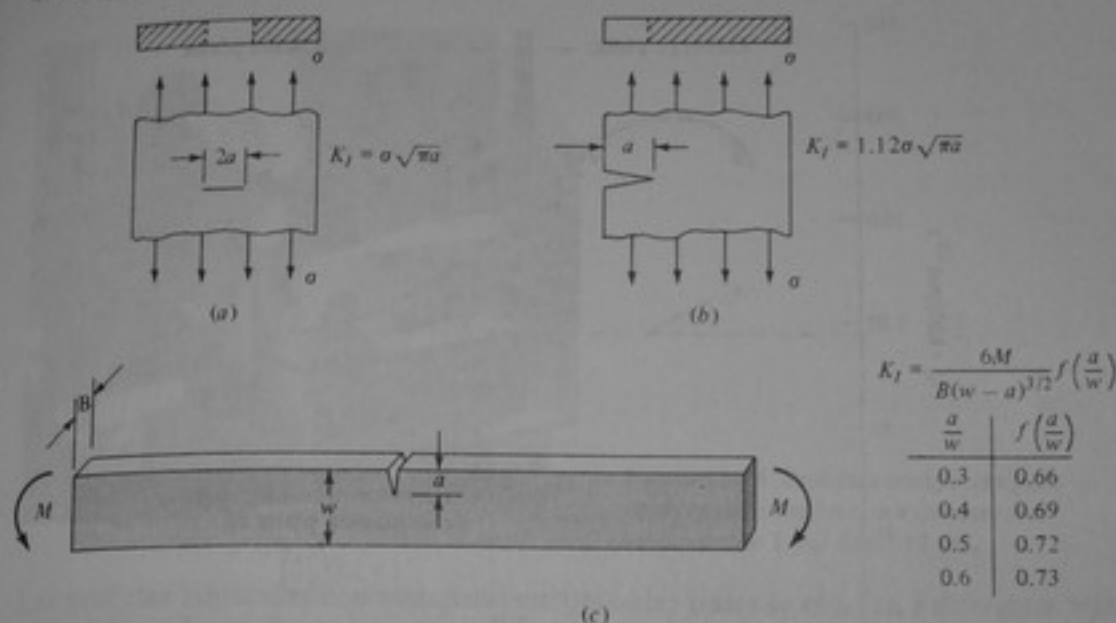


Figura 13-21 Relaciones K_I para geometría de grietas típicas. (a) Grieta a través de todo el espesor en una placa ancha. (b) Grieta en un borde de una placa ancha. (c) Viga en flexión.

nominales calculados para las áreas total y neta es pequeña. Suponer también que $a = 2.0$ pul. Entonces,

$$K_I = 1.12\sigma\sqrt{\pi a} = 1.12(20)\sqrt{3.14(2.0)} = 55 \text{ klb/pul}^2 \cdot \text{pul}^{1/2} \text{ (60.5 MPa} \cdot \text{m}^{1/2}\text{)}$$

Si el esfuerzo se aumenta hasta 40 klb/pul^2 , K_I aumenta hasta $110 \text{ klb/pul}^2 \cdot \text{pul}^{1/2}$ ($121 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$). Así, el cálculo de K_I se parece al cálculo del esfuerzo σ en que depende de la carga aplicada y la geometría del elemento. Sin embargo, K_I también es una función de la longitud y la geometría de la grieta.

13-7 FACTORES CRITICOS DE INTENSIDAD DEL ESFUERZO

Uno de los principios fundamentales de la mecánica de la fractura es que el crecimiento inestable de la grieta (fractura frágil) ocurre cuando el factor de intensidad del esfuerzo, K_I , alcanza un valor crítico, K_c . Esto es análogo al hecho de que la fluencia (un tipo de inestabilidad) ocurre cuando el esfuerzo σ alcanza un valor crítico del esfuerzo, es decir, el esfuerzo de fluencia, σ_{flu} . Obsérvese que K_I puede aumentar al aumentar el esfuerzo o la longitud de la grieta.

El factor crítico de intensidad del esfuerzo es una propiedad del material (en el mismo sentido que el esfuerzo de fluencia es una propiedad del material), pero depende en gran medida de condiciones de servicio tales como la temperatura, la rapidez de carga y la restricción. De este modo, hay varios factores críticos de intensidad del esfuerzo para cada material estructural. Estos son:

K_{cL} , el factor crítico de intensidad del esfuerzo para velocidades de carga lentas y placas delgadas. Generalmente varía con el espesor de la probeta, como se indica en la fig. 13-22.

K_{cH} , el factor crítico de intensidad del esfuerzo para velocidades bajas de carga y placas gruesas. Se aplica únicamente a placas gruesas, como se muestra en la fig. 13-22.

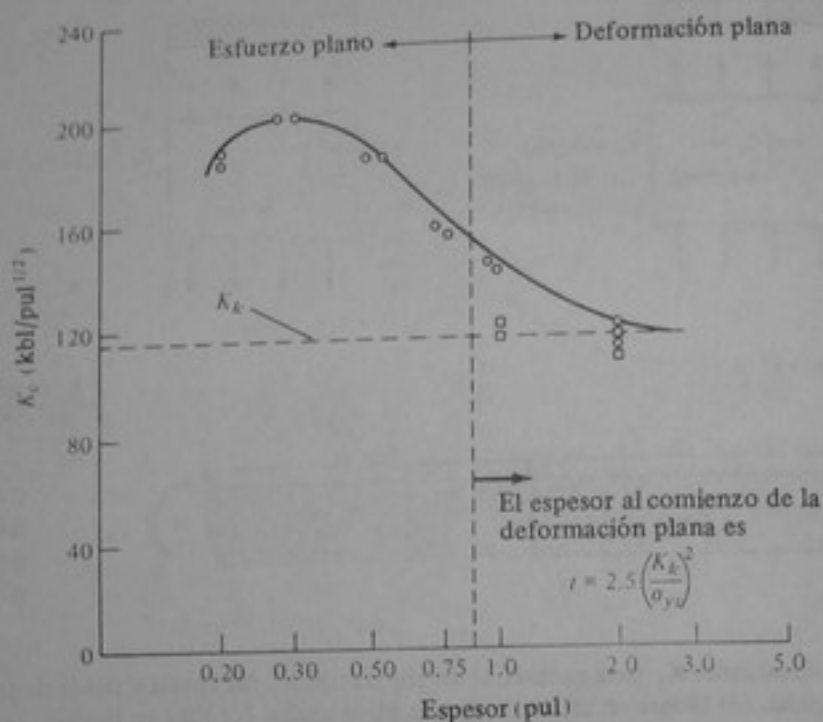


Figura 13-22 Efecto del espesor sobre el comportamiento de K_c .

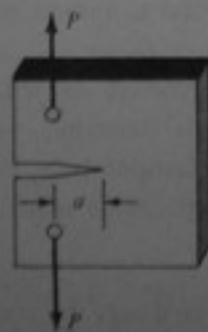
K_{1d} , el factor crítico de intensidad del esfuerzo para cargas de impacto y placas gruesas.

Los valores generalmente son menores que K_{1c} a la misma temperatura.

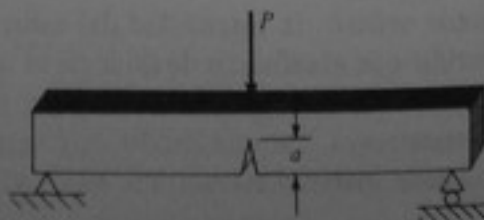
K_{1cint} , el factor crítico de intensidad del esfuerzo para velocidad de carga intermedias entre velocidad lenta e impacto.

Estos valores críticos se deben obtener ensayando materiales estructurales reales, de igual manera que otras propiedades de los materiales.

Los tipos más comunes de probetas para ensayos de mecánica de la fractura son la probeta compacta para tracción y la probeta para flexión de tres puntos, que se muestran en la fig. 13-23.



Probeta compacta para tracción



Probeta para flexión

Figura 13-23 Probetas para ensayos de mecánica de la fractura.

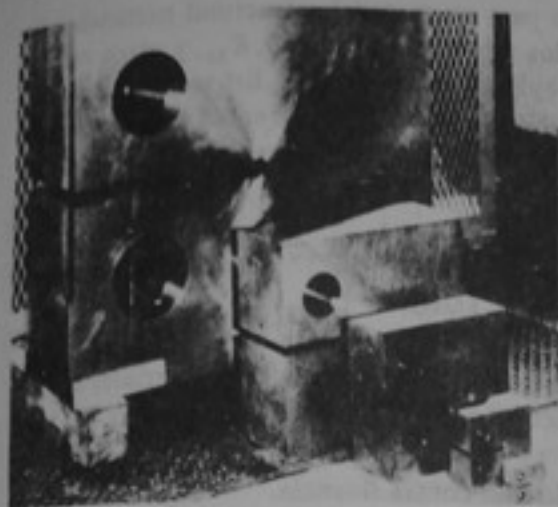


Figura 13-24 Probetas compactas para ensayos de tracción con espesores que varían desde 1 pul hasta 12 pul.

Las probetas fabricadas con materiales estructurales reales se ensayan a diferentes temperaturas y velocidades de carga. El tamaño de la grieta y el esfuerzo en la falla se sustituyen en una expresión general para K_I y se calcula un valor de K_{Ic} . A veces es necesario ensayar probetas muy gruesas (hasta 12 pul de espesor) para obtener los valores de K_{Ic} , como se indica en la fig. 13-24.

En la figura 13-25 se presentan ejemplos de valores de K_{Ic} para un acero estructural típico que tiene una resistencia a la fluencia a la temperatura ambiente de 50 klb/pul² (345 KPa). Estos resultados, obtenidos para tres velocidades de carga diferentes, muestran el gran efecto que pueden tener la temperatura y la velocidad de carga sobre

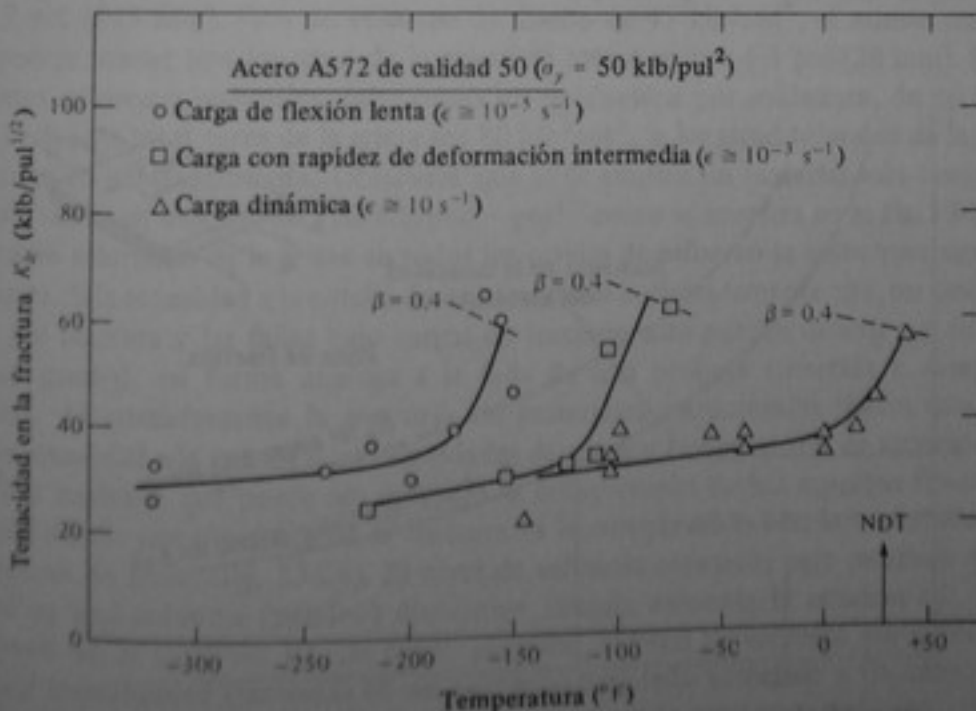


Figura 13-25 Efecto de la temperatura y de la rapidez de deformación sobre la tenacidad en la fractura de un acero estructural con resistencia a la fluencia de 50 klb/pul².

el factor crítico de intensidad del esfuerzo para un material estructural particular. Se han establecido relaciones generales entre los valores de tenacidad, K_{Ic} , y otros valores de ensayos de tenacidad a la entalla (tales como el impacto CVN). Esto era de esperarse, puesto que los materiales que tienen niveles altos de tenacidad a la entalla deben exhibir comportamiento dúctil, independientemente del ensayo particular usado para medir la tenacidad a la entalla.

13-8 DISEÑO POR MECANICA DE LA FRACTURA

El método fundamental de diseño para prevenir la fractura frágil en materiales estructurales consiste en mantener el factor calculado de intensidad del esfuerzo, K_I , por debajo del factor crítico de intensidad del esfuerzo, K_c ; es decir, mantener $K_I < K_c$. Esto es análogo a mantener $\sigma < \sigma_{flu}$ para diseñar contra fluencia.

En la figura 13-26 se muestra gráficamente la relación general entre la tenacidad del material, K_c , K_{Ic} o K_{Id} , el esfuerzo nominal, σ , y la longitud de la grieta, a . Si para una combinación particular de esfuerzo y longitud de la grieta en una estructura, K_I alcanza el nivel crítico, K_c , puede ocurrir fractura. De este modo, hay muchas combinaciones de esfuerzo y longitud de la grieta (por ejemplo, σ_f y a_f) que pueden causar fractura en una estructura fabricada con un material que tiene un valor particular de K_c , así como una temperatura de servicio, una rapidez de carga y un espesor particulares. Por otra parte, hay muchas combinaciones de esfuerzo y longitud de la grieta (por ejemplo, σ_0 y a_0) que no producirán la falla de un material estructural particular.

Como ejemplo numérico de la aplicación de la mecánica de la fractura al diseño, considérese la ecuación $K_I = \sigma\sqrt{\pi a}$ que relaciona K_I con el esfuerzo aplicado y la longitud de la grieta, para una grieta que atraviesa todo el espesor en una placa ancha

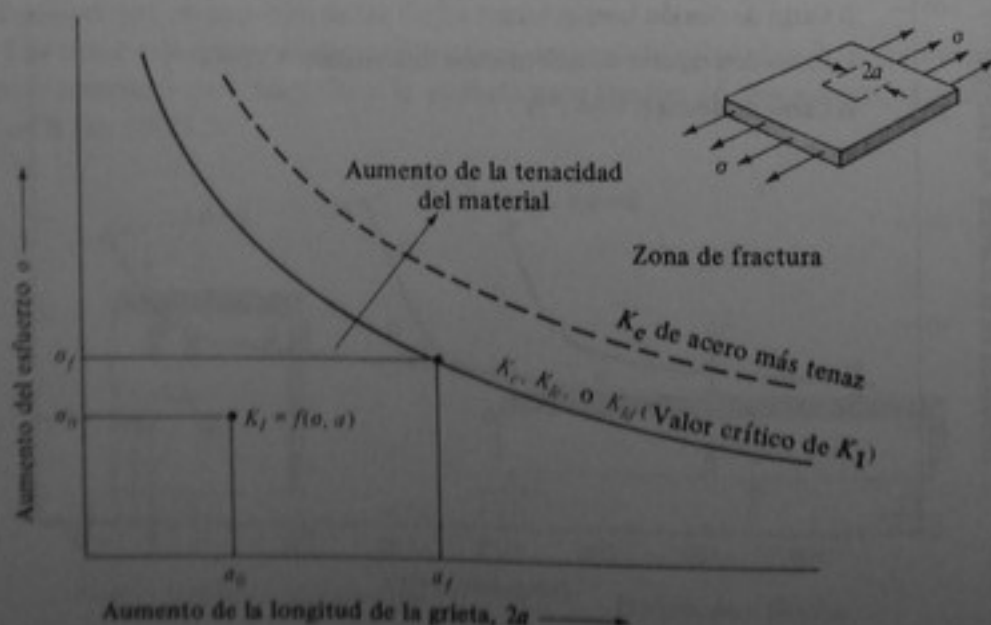


Figura 13-26 Relación gráfica entre esfuerzo, longitud de la grieta y tenacidad del material.

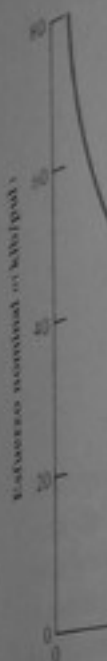


Fig. 13-27)

para un ace
valor de K_c
espesor de la
haciendo K_I
De este mod
de 5.7 pul
no podría
presentes es
que el esfuer
se reduce c
ejemplo uno
longitudes to
tramente. Si
litas por fra
rónica gene
ración. Af
do de tenaci
Otra ana
del dise
la columna d
total en un
a tierra en
que man
que man
la columna d

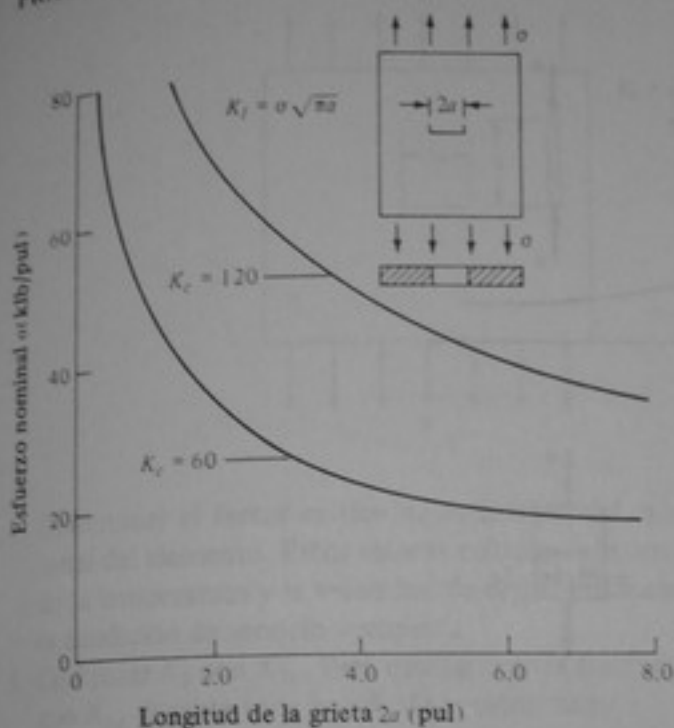


Figura 13-27 Relación entre esfuerzo y longitud de la grieta para una grieta a través de todo el espesor en materiales con $K_c = 60$ y $K_c = 120$ klb/pul² · pul^{1/2}.

(fig. 13-27). Supongamos que los resultados de los ensayos de laboratorio indican que para un acero estructural particular con una resistencia a la fluencia de 80 klb/pul², el valor de K_c es 60 klb/pul² · pul^{1/2} a la temperatura de servicio, rapidez de carga y espesor de la placa dados. Supongamos también que el esfuerzo de diseño es 20 klb/pul². Haciendo $K_I = K_c = 60$ klb/pul² · pul^{1/2} y $\sigma = 20$ klb/pul² se obtiene $2a = 5.7$ pul. De este modo, para estas condiciones la longitud tolerable de la grieta sería alrededor de 5.7 pul (145 mm). Para un esfuerzo de diseño de 45 klb/pul², el mismo material solo podría tolerar una longitud de la grieta de más o menos 1.1 pul (28 mm). Si hay presentes esfuerzos residuales, tales como los producidos por soldadura, de tal modo que el esfuerzo total cerca de la grieta sea 80 klb/pul², la longitud tolerable de la grieta se reduce considerablemente. Obsérvese que si se emplea un material más tenaz, por ejemplo uno con una K_c de 120 klb/pul² · pul^{1/2} como se muestra en la fig. 13-27, las longitudes tolerables de la grieta en todos los niveles de esfuerzo se aumentan significativamente. Si la tenacidad a la entalla de un material es suficientemente alta, no ocurrirán fallas por fractura y las fallas bajo cargas de tracción solo pueden ocurrir por fluencia plástica general, en forma análoga a la falla de una probeta sometida a ensayo de tracción. Afortunadamente la mayoría de materiales estructurales tienen este nivel alto de tenacidad a la entalla a las velocidades de carga y temperaturas de servicio.

Otra analogía que puede ser útil para la comprensión de los aspectos fundamentales del diseño por mecánica de la fractura es la comparación con la inestabilidad de la columna de Euler (fig. 13-28). El nivel de esfuerzo necesario para producir inestabilidad en una columna (pandeo) disminuye cuando aumenta la relación L/r , como se observa en el capítulo 12. De modo parecido, el nivel de esfuerzo requerido para producir inestabilidad (fractura) en un elemento agrietado sometido a tracción disminuye cuando aumenta la longitud de la grieta, a . Cuando, en uno u otro caso, el nivel de esfuerzo se aproxima a la resistencia de fluencia, tanto el análisis de Euler como el análisis de K_c pierden su validez debido a la fluencia general.

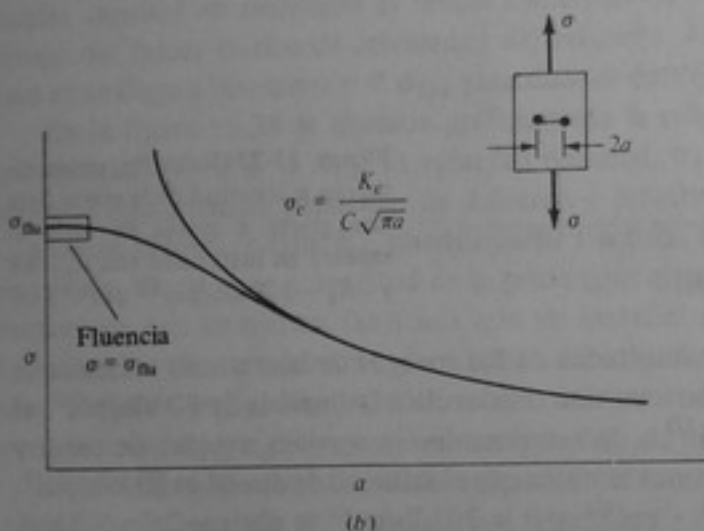
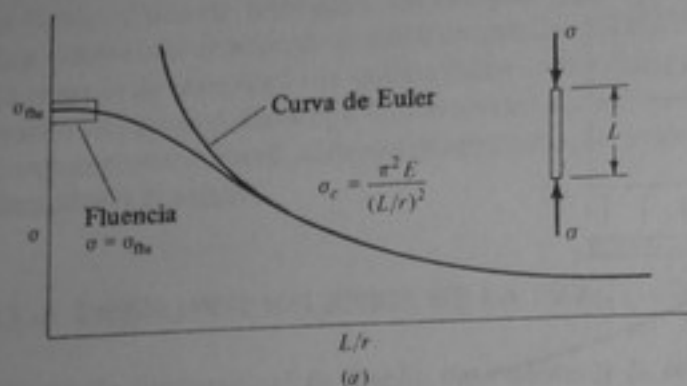


Figura 13-28 Analogía sobre inestabilidad de la columna e inestabilidad por agrietamiento. (a) Inestabilidad de la columna. (b) Inestabilidad por agrietamiento.

Para prevenir el *pandeo*, el esfuerzo real y los valores de L/r deben estar por debajo de la curva de Euler. Para prevenir la *fractura*, el esfuerzo real y la longitud de la grieta, a , deben estar por debajo del nivel de K_c , indicado en la fig. 13-28. Obviamente, al utilizar un material con un nivel alto de tenacidad a la fractura (por ejemplo, un nivel de K_c de 120 klb/pul² · pul^{1/2} comparado con 60 klb/pul² · pul^{1/2} en la fig. 13-27) serán más las posibles combinaciones de esfuerzo de diseño y longitud de la grieta que puede tolerar una estructura sin fracturarse. En efecto, si la tenacidad en la fractura es suficientemente alta, la falla será por fluencia o por inestabilidad en la tracción y no por fractura, *aun cuando exista una entalla*. Por supuesto, éste es un objetivo conveniente en la selección del material.

En resumen, un procedimiento general de diseño para prevenir la fractura frágil en elementos estructurales o mecánicos incluye los siguientes pasos:

1. Calcular el esfuerzo nominal, σ , para el elemento, en la forma descrita en la parte 1.
2. Determinar por inspección de campo (o por especificaciones de un código, en algunos casos) la geometría esperada de la grieta y su longitud inicial, a .
3. Calcular K_1 para las condiciones de esfuerzo σ y longitud de la grieta, a , utilizando la relación apropiada K_1 . En la fig. 13-21 se presentan ejemplos de diferentes relaciones K_1 .

4. Determinar el nivel de resistencia del elemento del elemento de la temperatura de la condición de servicio.
5. Comparar K_1 con K_{1c} que K_{1c} dura.

Ejemplo 13

y una resistencia utilizar en la grieta a través de la grieta para

SOLUCION

para grietas para la mitad de esfuerzo aplicado. La curva de esfuerzo se verá crecer

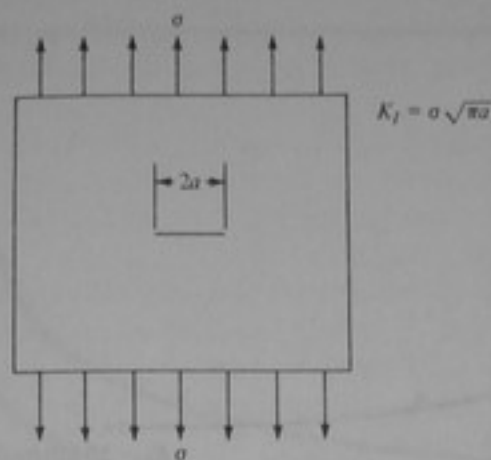


Figura 13-29 Ejemplo 13-3.

4. Determinar el factor crítico de intensidad del esfuerzo, K_{Ic} , K_{Ic} o K_{Ic} , para el material del elemento. Estos valores críticos de intensidad del esfuerzo son una función de la temperatura y la velocidad de carga. Entonces, utilícese el valor particular para la condición de servicio apropiada.
5. Comparar K_I con K_{Ic} . Para diseñar contra fractura frágil, asegúrese que K_I sea menor que K_{Ic} durante toda la vida de la estructura.

Ejemplo 13-3 Supóngase que un material que tiene un $K_{Ic} = 50 \text{ klb/pul}^2 \cdot \text{pul}^{1/2}$ y una resistencia a la fluencia de 100 klb/pul^2 a la temperatura de servicio se debe utilizar en el elemento representado en la fig. 13-29. Existe la posibilidad de una grieta a través de todo el espesor. Establecer la relación esfuerzo-longitud de la grieta para fines de diseño.

SOLUCION Haciendo $K_I = K_{Ic}$ en la expresión para la intensidad del esfuerzo para grietas a través de todo el espesor en placas anchas, se obtienen los valores de la mitad de la longitud de la grieta, a , en la tabla 13-1 para diferentes valores del esfuerzo aplicado. Estos resultados se representan gráficamente en la fig. 13-30. La curva designada K_{Ic} es el lugar geométrico de los puntos en los cuales se presentará crecimiento inestable de la grieta (fractura).

Tabla 13-1

Esfuerzo, klb/pul ²	Esfuerzo, MPa	a , pul	a , mm
10	69	7.96	202
20	138	1.99	50.5
30	207	0.88	22.4
40	276	0.50	12.7
50	245	0.32	8.1
60	414	0.22	5.6
70	483	0.16	4.1
80	552	0.12	3.1
90	621	0.10	2.5
100	690	0.08	0.2

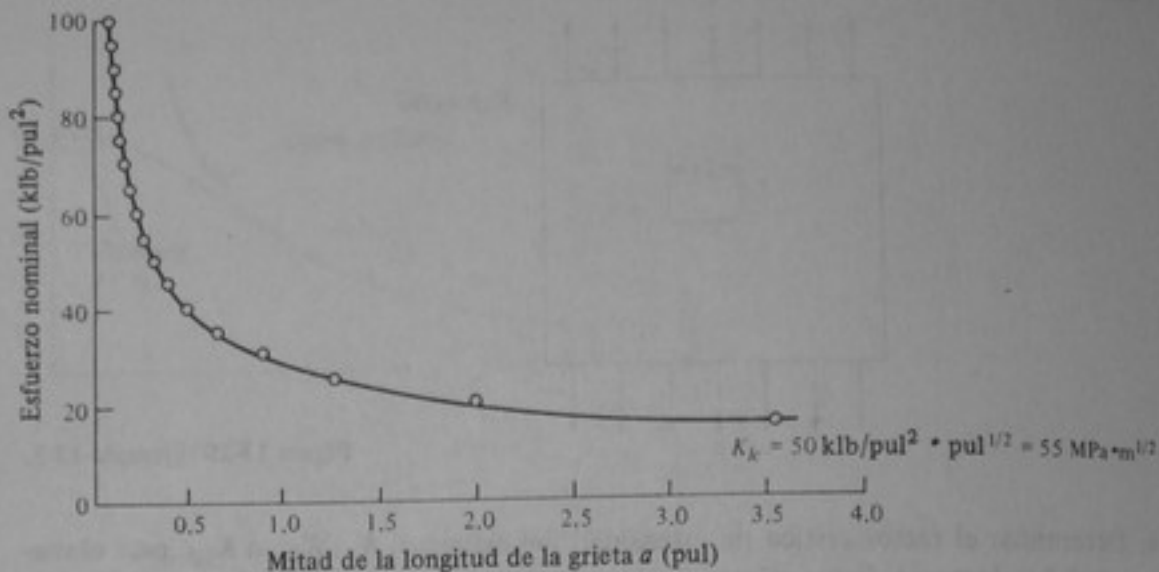


Figura 13-30 Ejemplo 13-3. Relación esfuerzo-longitud de la grieta para una grieta a través de todo el espesor en un material que tiene $K_{Ic} = 50 \text{ klb/pul}^2 \cdot \text{pul}^{1/2}$.

De este modo, si el nivel de esfuerzo nominal de diseño es 30 klb/pul^2 (207 MPa), entonces la longitud máxima tolerable o longitud crítica de la grieta es 1.76 pul (44.7 mm), puesto que en la gráfica se representa la mitad de la longitud de la grieta, a . Asimismo, si el nivel del esfuerzo nominal de diseño es 60 klb/pul^2 (414 MPa), entonces la longitud de la grieta es 0.44 pul (11.2 mm). Se puede observar que no hay una sola longitud crítica de la grieta para un material estructural particular (con una velocidad de carga y temperatura dadas), sino un número "semiinfinito" de longitudes críticas de la grieta, según el nivel del esfuerzo nominal de diseño.

La figura 13-31 muestra el lugar geométrico de valores de esfuerzo y longitud de la grieta para una " K_I de diseño" de $K_{Ic}/2$, es decir, un factor de seguridad de 2 basado en el factor crítico de intensidad del esfuerzo, utilizando la definición tradicional de factor de seguridad. En este caso, una estructura que tenga una longitud de la grieta, $2a$, de 0.44 pul (11.2 mm) y esté cargada con un esfuerzo de diseño de 30 klb/pul^2 (207 MPa), tiene un factor de seguridad de 2 contra fractura. Así, la curva $K_I = 25 \text{ klb/pul}^2 \cdot \text{pul}^{1/2}$ es el lugar geométrico de todos los niveles de esfuerzo y las correspondientes longitudes de la grieta, con un factor de seguridad de 2 contra fractura. El factor de seguridad también se puede basar únicamente en el esfuerzo o únicamente en la longitud de la grieta, en lugar de en el factor crítico de intensidad del esfuerzo.

Obviamente, para materiales de alta tenacidad (comparados con los materiales de baja tenacidad a la entalla), el número de combinaciones posibles de esfuerzo de diseño y longitudes admisibles de la grieta que no conducen a la falla es mucho mayor. La fig. 13-32 representa el lugar geométrico de los puntos de falla para un material más tenaz, con una K_{Ic} de $100 \text{ klb/pul}^2 \cdot \text{pul}^{1/2}$ ($110 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$), junto con el lugar geométrico de los puntos de falla del material que tiene un K_{Ic} de $50 \text{ klb/pul}^2 \cdot \text{pul}^{1/2}$, del ejemplo 13-3. Para el material con K_{Ic} más alto, las longitudes tolerables de la grieta en todos los niveles de esfuerzo son considerablemente mayores, lo cual significa que la posibilidad de fractura se reduce considerablemente.

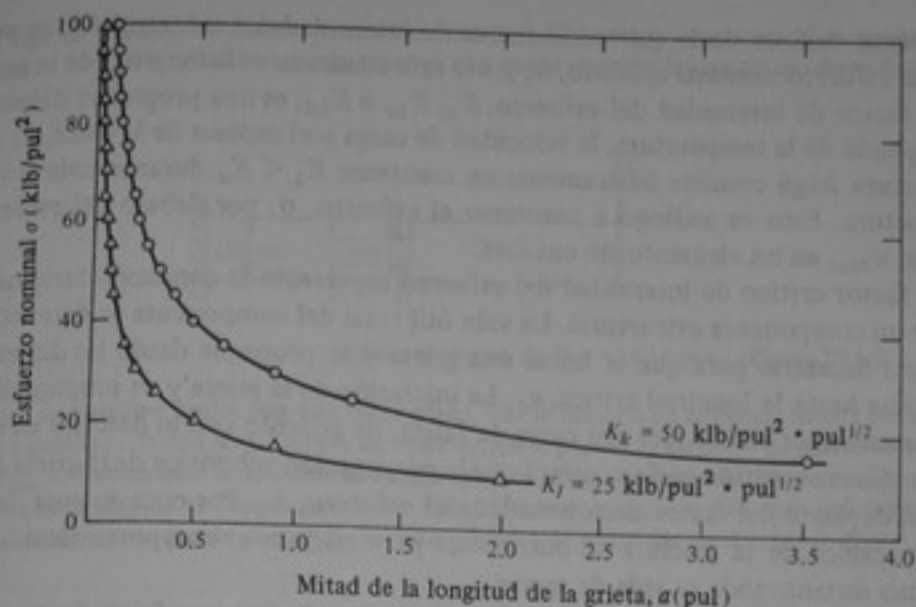


Figura 13-31 Ejemplo 13-3. Relación esfuerzo-longitud de la grieta para grieta a través de todo el espesor que muestra K_{Ic} , $\text{des} = 25 \text{ klb/pul}^2 \cdot \text{pul}^{1/2}$.

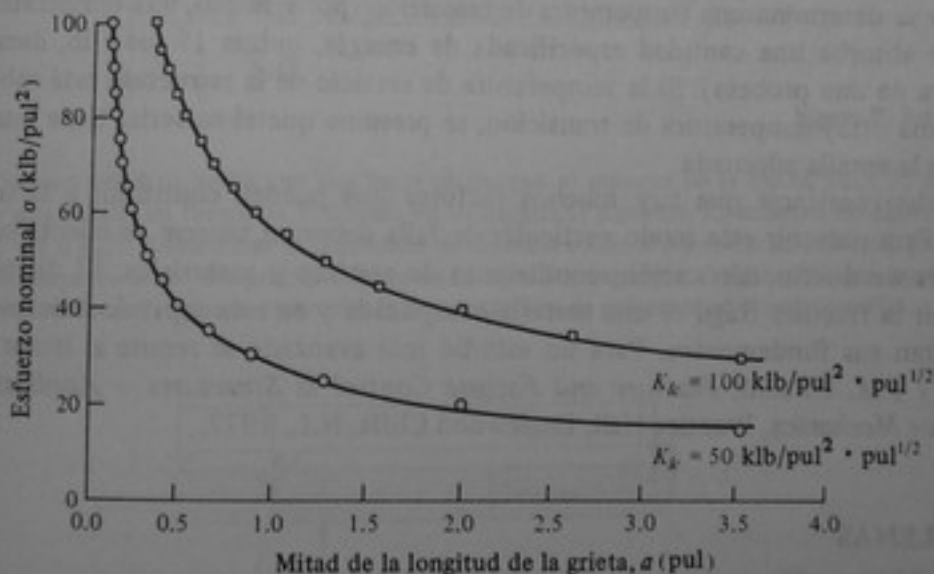


Figura 13-32 Ejemplo 13-3. Relación esfuerzo-longitud de la grieta para una grieta a través de todo el espesor que muestra el efecto de un K_{Ic} mayor ($100 \text{ klb/pul}^2 \cdot \text{pul}^{1/2}$).

13-9 RESUMEN

Los componentes o elementos estructurales no se pueden construir sin discontinuidades de alguna clase. Si éstas son relativamente suaves, por ejemplo agujeros, chaflanes, ranuras, etc., con radios grandes, se pueden utilizar factores de concentración de esfuerzos, K_t , para calcular el esfuerzo máximo en un punto. Si las discontinuidades son relativamente severas, por ejemplo grietas por soldadura, grietas por fatiga, entallas muy agudas, etc., se pueden utilizar factores de intensidad del esfuerzo, K_I , para calcular el campo

de esfuerzo delante de la grieta. El factor de intensidad del esfuerzo, K_I , es proporcional al esfuerzo nominal aplicado, σ , y a la raíz cuadrada de la longitud de la grieta, a .

El factor de intensidad del esfuerzo, K_e , K_{Ic} o K_{Id} , es una propiedad del material que depende de la temperatura, la velocidad de carga y el espesor de la placa. El diseño por fractura frágil consiste básicamente en mantener $K_I < K_e$ durante toda la vida de la estructura. Esto es análogo a mantener el esfuerzo, σ , por debajo del esfuerzo de fluencia, σ_{flu} , en un elemento sin entallas.

El factor crítico de intensidad del esfuerzo representa la condición terminal en la vida de un componente estructural. La vida útil total del componente se determina por el tiempo necesario para que se inicie una grieta y se propague desde las dimensiones subcríticas hasta la longitud crítica, a_c . La iniciación de la grieta y su propagación subcrítica pueden ser producidas por carga de fatiga, de acuerdo con lo descrito en el capítulo 14. En ese capítulo se demostrará que la propagación subcrítica de la grieta (fatiga) también depende del factor de intensidad del esfuerzo, K_I . Por consiguiente, la teoría de la mecánica de la fractura se puede usar para analizar el comportamiento de una estructura durante toda su vida de servicio.

El método tradicional para medir la resistencia a la fractura frágil de un material estructural es utilizar ensayos de tenacidad a la entalla tales como el ensayo para impacto Charpy con entalla en V. Estos ensayos se realizan dentro de un intervalo de temperaturas y se determina una temperatura de transición (por ejemplo, una temperatura a la cual se absorbe una cantidad especificada de energía, quizás 15 pie · lb, durante la fractura de una probeta). Si la temperatura de servicio de la estructura está sobre ésta (o alguna otra) temperatura de transición, se presume que el material tiene una tenacidad a la entalla adecuada.

Debe recalcar que hay muchos factores que pueden contribuir a la fractura frágil. Para prevenir este modo particular de falla deberían tenerse en cuenta consideraciones de diseño, fabricación, condiciones de servicio y materiales. El diseño para prevenir la fractura frágil es una materia complicada y en este capítulo únicamente se presentan sus fundamentos. Para un estudio más avanzado se remite al lector a S.T. Rolfe y J.M. Barsom, *Fracture and Fatigue Control in Structures - Application of Fracture Mechanics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1977.

PROBLEMAS

13-1 ¿Por qué en un material estructural es más deseable el comportamiento dúctil que el comportamiento frágil?

13-2 Una viga en voladizo de sección transversal circular está hecha de un material con una resistencia a la fluencia de 50 klb/pul². ¿Cuál es la carga máxima que podrá soportar la viga sin que haya fluencia en el punto A?

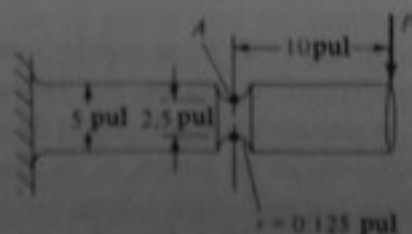
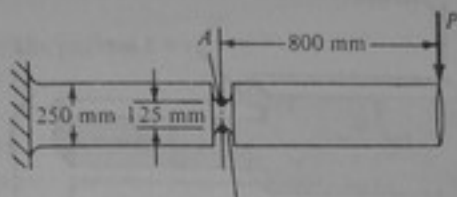


Figura P13-2

13-3 Una viga en voladizo de sección transversal circular está hecha de un material con resistencia a la fluencia de 345 MPa. ¿Cuál es la carga máxima que puede soportar la viga sin que haya fluencia en el punto A?

Entalla en forma de U, $r = 18.75$ mm Figura P13-3

13-4 La viga en voladizo hecha con una barra plana, que se muestra en la figura, tiene 2 pul de espesor y una entalla en forma de U fresada en su superficie superior. El esfuerzo de diseño de la viga debe ser $\sigma_{flu}/2$. Determinar la resistencia de fluencia mínima del material que se necesita para soportar una carga de 500 lb. Despreciar el peso de la viga. Suponga que el elemento está sujeto a la pared de tal modo que se puede despreciar la concentración de esfuerzos en el extremo fijo.

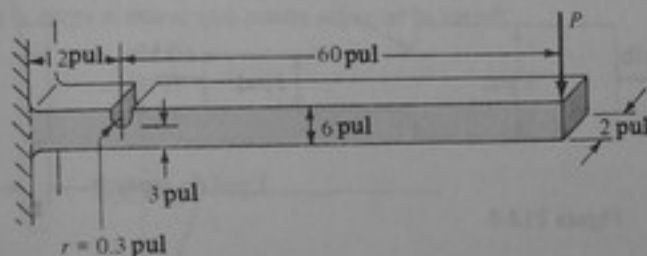


Figura P13-4

13-5 La viga en voladizo hecha con una barra plana, que se muestra en la figura, tiene 75 mm de espesor y una entalla en forma de U fresada en su superficie superior. El esfuerzo de diseño de la viga debe ser $\sigma_{flu}/2$. Determinar la resistencia de fluencia mínima del material necesaria para soportar una carga de 3 kN. Despreciar el peso de la viga. Suponga que el elemento está sujeto a la pared de tal modo que se puede despreciar la concentración de esfuerzos en el extremo fijo.

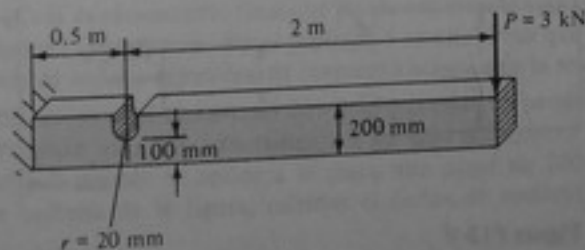


Figura P13-5

13-6 La barra plana escalonada de la figura tiene 3 pul de espesor y soporta un momento de 25 pul · lb. Determinar el esfuerzo máximo en la viga.

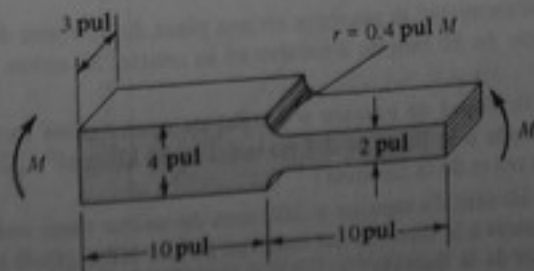


Figura P13-6

13-7 La barra plana escalonada de la figura tiene 60 mm de espesor y soporta un momento de 3000 N · m. Determinar el esfuerzo máximo en la viga.

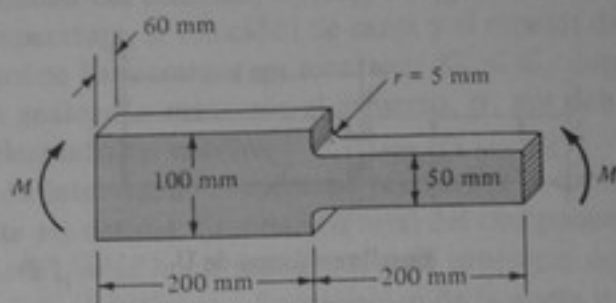


Figura P13-7

13-8 Una barra plana escalonada se utiliza como elemento a tracción en una aplicación mecánica. El material utilizado tiene una resistencia a la fluencia de 60 klb/pul². El esfuerzo de diseño es la resistencia de fluencia dividida por un factor de seguridad de 1.5. ¿Qué radio se debe utilizar para el chaflán, de modo que no se sobrepase la especificación de diseño?

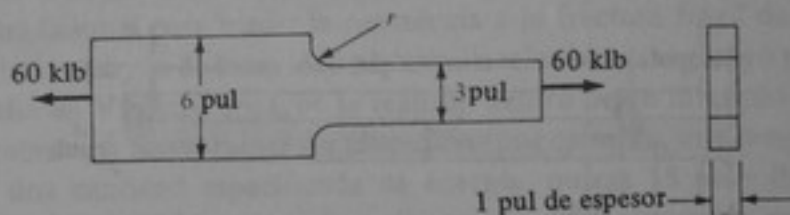


Figura P13-8

13-9 Una barra plana escalonada se utiliza como elemento a tracción en una aplicación estructural. El material utilizado tiene una resistencia a la fluencia de 420 MPa. El esfuerzo de diseño es la resistencia a la fluencia dividida por un factor de seguridad de $\frac{4}{3}$. ¿Qué radio se debe utilizar para el chaflán, de modo que no se sobrepase la especificación de diseño?

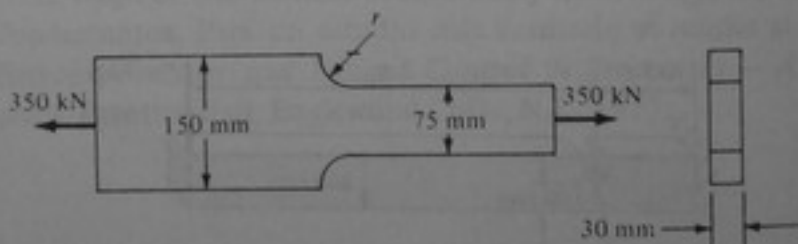


Figura P13-9

13-10 Hallar el esfuerzo máximo que se presenta en una placa de 20 pul de ancho por $\frac{1}{2}$ pul de espesor, que tiene un agujero de 2 pul de diámetro en su centro. Se aplica una carga axial de 120 klb a la placa.

13-11 Hallar el esfuerzo máximo que se presenta en una placa de 300 mm de ancho por 10 mm de espesor, que tiene un agujero de 50 mm de diámetro en su centro. Se aplica una carga axial de 500 kN a la placa.

13-12 Una barra plana de 0.25 pul de espesor y 15 pul de ancho tiene entallas semicirculares de 1.5 pul de radio. La resistencia a la fluencia del material es 50 klb/pul². ¿Cuál es la carga máxima que puede soportar la barra antes de la fluencia?

13-13 Una barra plana de 10 mm de espesor y 500 mm de ancho tiene entallas semicirculares de 75 mm de radio. La resistencia a la fluencia del material es 350 MPa. ¿Cuál es la carga máxima que puede soportar la barra antes de la fluencia?

13-14 Dada la curva esfuerzo-deformación unitaria que se muestra para un material elástico-plástico ideal utilizado en una barra de $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ pul.

- (a) Determinar el esfuerzo para cargas axiales de 50 y 75 klb.
 (b) ¿Cuál es la carga máxima que puede soportar la barra?

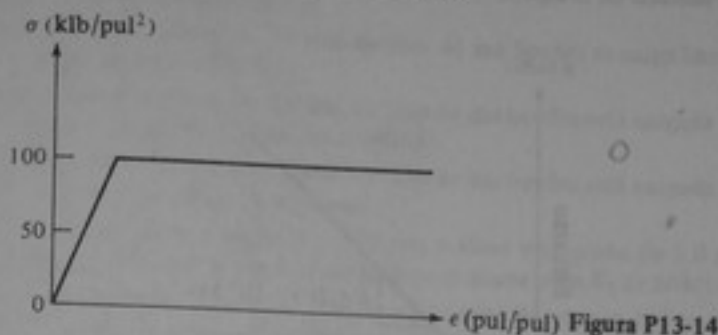


Figura P13-14

13-15 Dada la curva esfuerzo-deformación unitaria que se muestra para un material elástico-plástico ideal utilizado en una barra de 30 x 30 mm.

- (a) Determinar el esfuerzo para cargas axiales de 300 y 450 kN.
 (b) ¿Cuál es la carga máxima que puede soportar la barra?

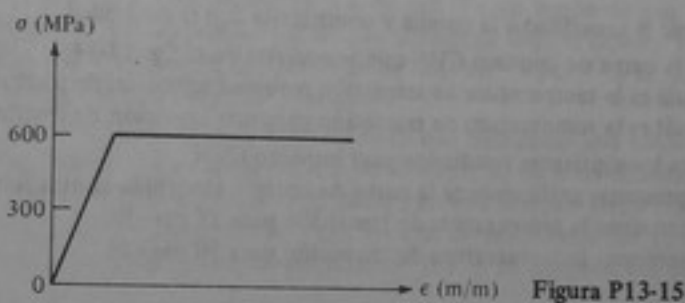


Figura P13-15

13-16 Utilizando el diagrama esfuerzo-deformación unitaria del problema 13-14, determinar el momento máximo M que puede soportar una viga de sección transversal $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ pul, permaneciendo en la región elástica. ¿Cuál es el momento final que puede soportar la viga sin desarrollar una articulación totalmente plástica? (Sugerencia: En el capítulo 5 se estableció que las secciones planas permanecen planas a través de toda la capacidad de momento plástico de la sección).

13-17 Una placa ancha de sección transversal 20 x 0.25 pul tiene un pequeño agujero en su centro. Un medidor de deformación montado exactamente a un lado del agujero indica una deformación unitaria de 0.004 pul/pul cuando se aplica a la placa una carga de 200 klb. Dado el diagrama esfuerzo-deformación unitaria de la figura, calcular el factor de concentración de esfuerzos, K_t .

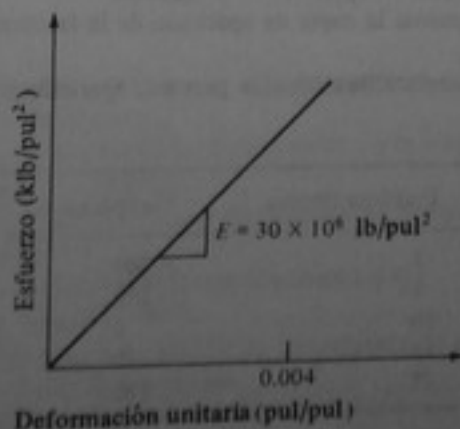


Figura P13-17

13-18 Una placa ancha de sección transversal 600×15 mm tiene un pequeño agujero en su centro. Un medidor de deformación montado exactamente a un lado del agujero indica una deformación unitaria de 0.005 m/m cuando se aplica a la placa una carga de 3000 kN. Dado el diagrama esfuerzo-deformación unitaria de la figura, calcular el factor de concentración de esfuerzos, K_t .

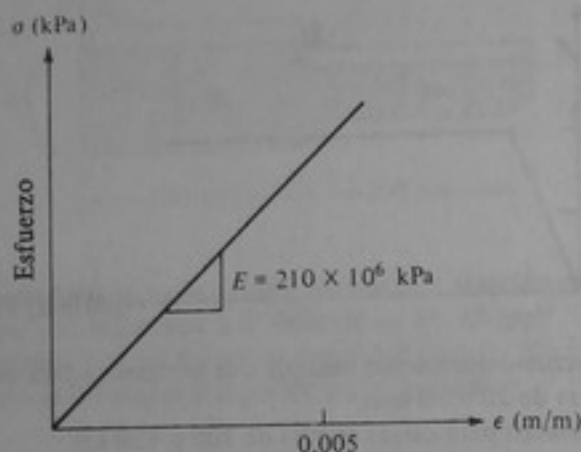


Figura P13-18.

13-19 Definir la tenacidad a la entalla y compararla con la tenacidad.

13-20 Para la curva de impacto CVN que se muestra en la fig. 13-14.

- (a) ¿Cuál es la temperatura de transición para una aparición de fractura del 50%?
 (b) ¿Cuál es la temperatura de transición para una aparición de fractura del 25%?

13-21 Dados los siguientes resultados para impacto CVN.

- (a) Representar gráficamente la curva de energía absorbida contra temperatura.
 (b) Determinar la temperatura de transición para 15 pie · lb.
 (c) Determinar la temperatura de transición para 30 pie · lb.

Energía absorbida, pie · lb	Temperatura, °F
5	-150
10	-100
25	-50
35	0
40	50
40	100

13-22 Dados los siguientes datos de aparición de la fractura.

- (a) Representar gráficamente la curva de aparición de la fractura, en porcentaje, contra temperatura.
 (b) Determinar la temperatura de transición para una aparición de la fractura del 50 por ciento.

Fractura fibrosa, %	Temperatura, °F
5	-200
5	-100
10	0
55	50
75	100

13-23 Dado un material con una resistencia a la fluencia de 100 klb/pul^2 que está cargado hasta un valor K_I de $100 \text{ klb/pul}^2 \cdot \text{pul}^{1/2}$, representar gráficamente la distribución del esfuerzo σ_y directamente delante de una grieta ($\theta = 0$) entre $r = 0$ y $r = 2 \text{ pul}$.

13-24 Una placa ancha con una grieta de 1.0 pul en uno de sus bordes de carga hasta un esfuerzo nominal de 30 klb/pul^2 . ¿Cuál es el valor de K_I ?

13-25 Una placa ancha con una grieta de 30 mm en uno de sus bordes se carga hasta un esfuerzo nominal de 210 MPa . ¿Cuál es el valor de K_I ?

13-26 Una placa ancha con una grieta de 2.0 pul en uno de sus bordes está cargada hasta un nivel K_I de $100 \text{ klb/pul}^2 \cdot \text{pul}^{1/2}$. ¿Cuál es el esfuerzo nominal?

13-27 Una placa ancha con una grieta de 75 mm en uno de sus bordes está cargada hasta un nivel K_I de $110 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$. ¿Cuál es el esfuerzo nominal?

13-28 Si la sección transversal de una placa es $1 \times 40 \text{ pul}$ y tiene una grieta de 1.0 pul de profundidad en uno de sus bordes, ¿qué nivel de carga se requiere para alcanzar un K_I de $50 \text{ klb/pul}^2 \cdot \text{pul}^{1/2}$?

13-29 Una placa con una grieta en uno de sus bordes está hecha de un material que tiene una K_{Ic} de $120 \text{ klb/pul}^2 \cdot \text{pul}^{1/2}$ a la temperatura de servicio. ¿Cuál es el esfuerzo crítico para longitudes de la grieta de (a) 1.0 pul , (b) 2 pul y (c) 3 pul ?

13-30 Una placa con una grieta en uno de sus bordes está hecha de un material que tiene una K_{Ic} de $135 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$ a la temperatura de servicio. ¿Cuál es el esfuerzo crítico para longitudes de la grieta de (a) 50 mm , (b) 75 mm y (c) 100 mm ?

13-31 Dos placas tienen secciones transversales de $1 \times 40 \text{ pul}$. En un borde de una placa y en el centro de la otra se encuentran sendas grietas agudas que atraviesan todo el espesor y tienen longitudes de 4 pul . Si la K_{Ic} del material de las placas es $80 \text{ klb/pul}^2 \cdot \text{pul}^{1/2}$ a la temperatura de servicio, ¿cuál de las dos placas fallará primero? ¿Por qué?

13-32 Un acero estructural ($\sigma_{flu} = 60 \text{ klb/pul}^2$) se utiliza en una aplicación que tiene una temperatura de servicio, A , en el verano y una temperatura de servicio, B , durante el invierno (véase la gráfica de K_{Ic} contra temperatura de servicio). Una placa con una sección transversal de $22 \times 0.5 \text{ pul}$ se carga con 630 klb y tiene una grieta de 1 pul en uno de sus bordes. La placa fallará por fluencia o por fatiga: (a) ¿a la temperatura de servicio, A ? (b) ¿a la temperatura de servicio, B ?

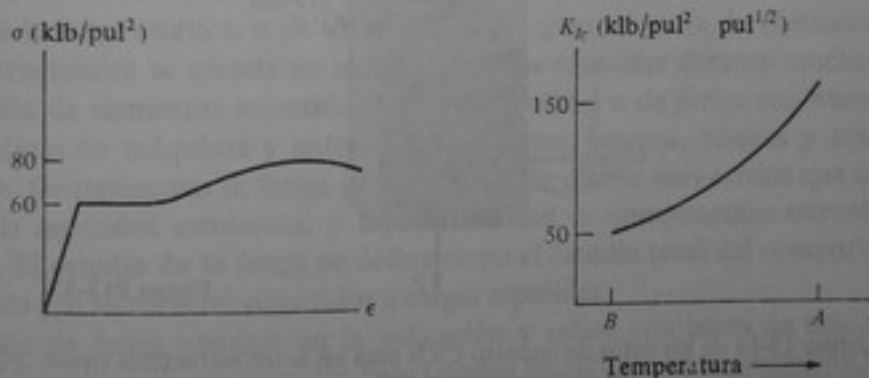


Figura P13-32

13-33 Dada una K_{Ic} de $100 \text{ klb/pul}^2 \cdot \text{pul}^{1/2}$ a la temperatura de servicio de una placa infinitamente ancha con una grieta en su centro,

(a) hacer la representación gráfica de la relación entre σ y la longitud de la grieta, a .

(b) determinar a en $\sigma_{des} = 70 \text{ klb/pul}^2$.

13-34 Dada una K_{Ic} de $110 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$ a la temperatura de servicio de una placa infinitamente ancha con una grieta en su centro,

(a) hacer la representación gráfica de la relación entre σ y a .

(b) determinar a_{cr} para $\sigma_{des} = 250 \text{ MPa}$.

13-35 Dada una K_{Ic} de $1000 \text{ klb/pul}^2 \cdot \text{pul}^{1/2}$ a la temperatura de servicio de una placa infinitamente ancha con una grieta en uno de sus bordes,

(a) hacer la representación gráfica de la relación entre σ y a .

(b) determinar a_{cr} a 70 klb/pul^2 .

13-36 Para la placa que se muestra, determinar la carga máxima que puede soportar la placa si la resistencia a la fluencia del material es 60 klb/pul^2 y el valor de K_{Ic} es $185 \text{ klb/pul}^2 \cdot \text{pul}^{1/2}$. ¿Cuál es el modo de falla? Utilizar A_{NETA} para el esfuerzo y despreciar la flexión.

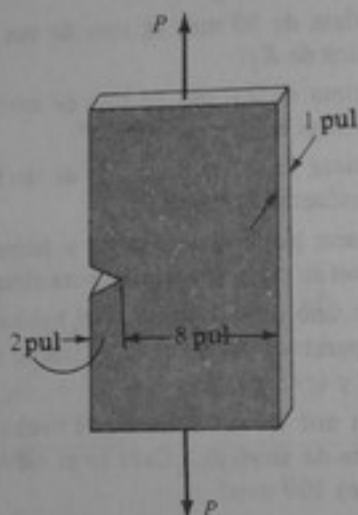


Figura P13-36

13-37 Para la placa que se muestra, determinar la carga máxima que puede soportar la placa si la resistencia a la fluencia del material es 450 MPa y el valor de K_{Ic} es $170 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$. ¿Cuál es el modo de falla?

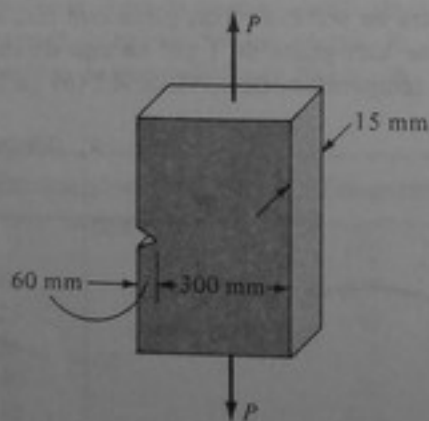


Figura P13-37

13-38 La figura 13-14 da los datos de impacto CVN para un acero estructural típico. ¿Qué intervalo general de valores define la región elástico-plástica para carga de impacto?

Capítulo 14

Fatiga

14-1 INTRODUCCION

Para los cálculos de esfuerzos y deformaciones, en los capítulos anteriores se supuso carga de un solo ciclo. Es decir, se ha supuesto que las diferentes cargas (axial, de flexión, cortante) se aplican una sola vez a los elementos. El comportamiento de los diferentes elementos se analizó utilizando conceptos de la estática y propiedades del material para un solo ciclo, tales como el módulo de elasticidad, E , y la resistencia a la fluencia, σ_{flu} . En el capítulo 13 se describió una excepción a este caso, para elementos con entalles, cargados hasta la falla. En este último caso se utilizaron las propiedades de tenacidad al entalle del material (es decir, CVN , K_c , K_{Ic} , K_{Id}) para analizar el comportamiento a la fractura de los elementos.

Aunque en una introducción a la resistencia de materiales el énfasis inicial se debe hacer sobre la carga estática, o de un solo ciclo, la gran mayoría de elementos mecánicos o estructurales se somete en realidad a cargas *repetidas* durante muchos ciclos. Los ejemplos de elementos sometidos a cargas repetidas o *de fatiga* son numerosos e incluyen piezas de máquinas y automóviles, puentes, aviones, buques y equipos de perforación. Generalmente la fatiga es un criterio de diseño más crítico que cualquier otro para la seguridad estructural y la confiabilidad de componentes estructurales o mecánicos. El estudio de la fatiga se define como el estudio total del comportamiento de elementos y/o estructuras sometidos a cargas repetidas.

La carga de fatiga consiste en la aplicación y retiro continuos de una carga. El número de cargas puede ser bastante bajo (menos de 10^4 cargas se denomina *fatiga de bajos ciclos*) o muy alto (más de 10^4 cargas se denomina *fatiga de altos ciclos*). En algunos casos el número de cargas puede estar entre 10^6 y 10^9 ciclos.

Cuando un elemento se somete a carga de fatiga, se puede desarrollar una grieta en el punto de esfuerzo (o deformación) máximo (a). Los mecanismos de iniciación de una grieta por fatiga son complicados y sobrepasan el alcance de un texto introductorio. No obstante, desde un punto de vista de ingeniería, las grietas por fatiga generalmente se inician en la región de esfuerzo máximo de tracción. Una concentración de esfuerzos ya existente (tal como un agujero, entalle o discontinuidad) en la región del esfuerzo máximo de tracción iniciará antes la grieta por fatiga. Como es de esperarse, mientras más severa sea la concentración de esfuerzos, menor será el tiempo necesario para iniciarse una grieta por fatiga. Además, debe recalcarse que no existe un medio teórico

confiable para predecir cuándo se iniciará una grieta por fatiga. En su lugar, se deben utilizar los resultados de ensayos experimentales para obtener la información. Una vez que en un elemento se ha iniciado una grieta por fatiga, se necesitan ciclos de carga adicionales para propagar la grieta hasta un tamaño crítico. Este tamaño crítico se puede determinar de diferentes maneras. Una determinación se basa en la pérdida de área en la sección transversal, hasta tal punto que se presente la falla por inestabilidad a la tracción, como en un ensayo de tracción. Otra determinación se refiere a la falla por fractura frágil cuando se alcanza K_{Ic} o K_c . Otra definición más se refiere a la deformación excesiva por fluencia, de tal suerte que el elemento no puede realizar su función de diseño; por ejemplo, la deflexión excesiva del eje de un motor.

El número de ciclos necesarios para iniciar una grieta por fatiga es la duración hasta la iniciación de la fatiga, N_i . El período de crecimiento de la grieta desde la iniciación hasta la longitud crítica se llama *duración de propagación* de la grieta, N_p . La duración total, N_T , es la suma de estas dos duraciones, es decir,

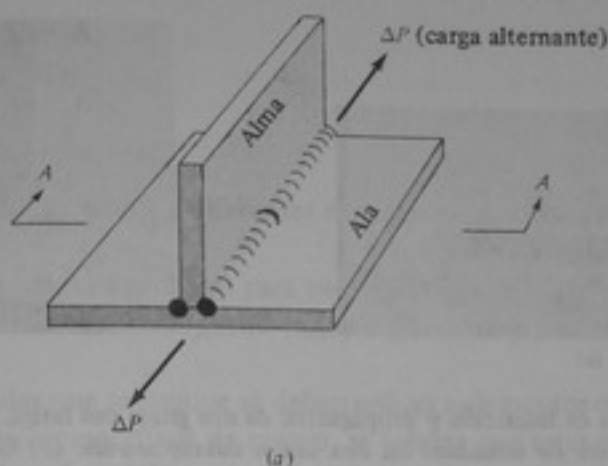
$$N_T = N_i + N_p \quad (14-1)$$

Obviamente, una grieta ya existente en un elemento, tal como una grieta por soldadura o algún otro tipo de grieta de fabricación, reduce prácticamente a cero la duración hasta la iniciación de la fatiga. En este caso, la duración total de la fatiga es igual a la duración de propagación.

No hay una definición clara del momento exacto en que se inicia una grieta por fatiga. Para un metalúrgico una grieta puede tener 0.001 pul de profundidad mientras que para un ingeniero puede tener al menos, 0.1 pul de profundidad. Un físico podría tener otra definición diferente. Desde un punto de vista de ingeniería, una grieta se define, generalmente, como aquella que puede ser observada con poco o ningún aumento, aproximadamente a partir de 0.1 pul de profundidad. En las figs. 14-1 a 14-3 se presentan ejemplos de grietas por fatiga.

La figura 14-1a muestra una junta alma-ala soldada y cargada en fatiga con una carga cíclica de intervalo ΔP . En la sección *A-A* se generó una grieta por fatiga a partir de un defecto inicial, por ejemplo, un poco de la soldadura (fig. 14-1b). La grieta se propagó en una forma circular (*forma de moneda*) hasta su tamaño crítico, cuando ocurrió una fractura frágil. La fig. 14-2 es un esquema de la fotografía de la fig. 14-1b que muestra las diferentes etapas del crecimiento de la grieta. En este ejemplo, la duración hasta la iniciación de la fatiga, N_i , es igual al número de ciclos de carga necesarios para generar una grieta por fatiga a partir de los poros de la soldadura. La duración de propagación, N_p , es igual al número de ciclos de carga necesarios para que la grieta crezca hasta su tamaño crítico. La fig. 14-3a es una fotografía de una cubreplaca soldada a un ala y muestra la iniciación de una grieta por fatiga en el extremo de chaflán de soldadura. La fig. 14-3b muestra una grieta por fatiga que se desarrolla en una viga soldada a partir de la base de un atiesador transversal.

Recuérdese del capítulo 13 que el tamaño crítico de la grieta se puede calcular utilizando factores de intensidad del esfuerzo. La relación general entre iniciación, propagación y tamaño crítico en la falla se muestra en la fig. 14-4 para una probeta de laboratorio para ensayo de fatiga. En esta probeta, la grieta se inicia en la entalla, se propaga en una distancia que depende del material específico del ensayo y finalmente sobreviene la fractura.



(a)



(b)

Figura 14-1 Crecimiento de grieta por fatiga en un perfil soldado. (a) Sección soldada sometida a carga de fatiga. (b) Fotografía de la sección A-A que muestra el defecto inicial, la grieta por fatiga y la fractura frágil.

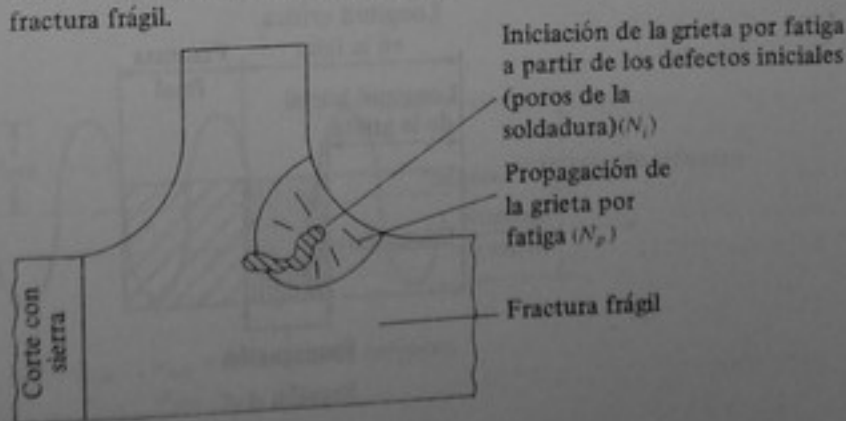


Figura 14-2 Esquema de la fig. 14-1b que muestra las etapas del comportamiento de la grieta.

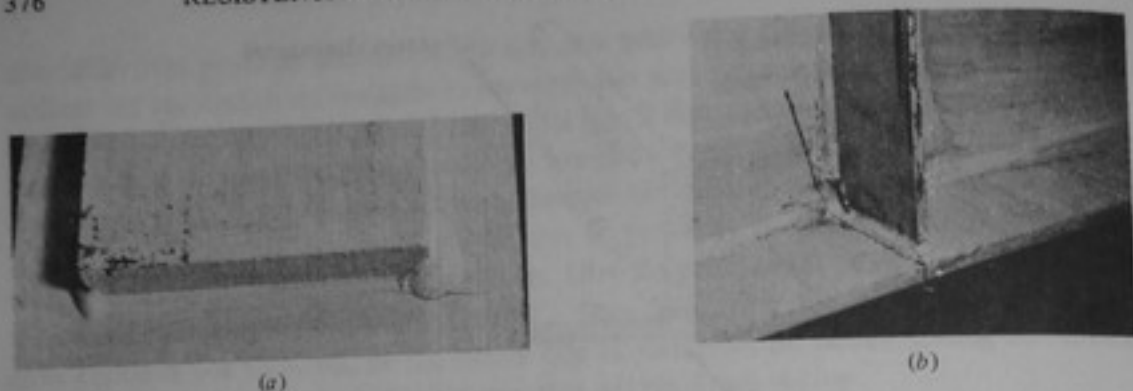


Figura 14-3 Ejemplos de iniciación y propagación de una grieta por fatiga. (a) Grieta por fatiga en el extremo de un filete de soldadura en una unión cubreplaca-ala. (b) Grieta por fatiga que se desarrolla en la base de un atiesador transversal, en una viga soldada.

Los niveles de esfuerzo aplicados en la iniciación y la propagación de la fatiga pueden estar por debajo de los niveles "admisibles" del esfuerzo de diseño para carga estática. De este modo, si los elementos están sometidos a carga de fatiga, puede ocurrir falla aunque el elemento parezca diseñado correctamente con base en el análisis de un ciclo. Por consiguiente, es sumamente importante que el diseñador reconozca la posibilidad de que se presente carga de fatiga en un elemento mecánico o estructural particular y analice, con base en esto, su comportamiento.

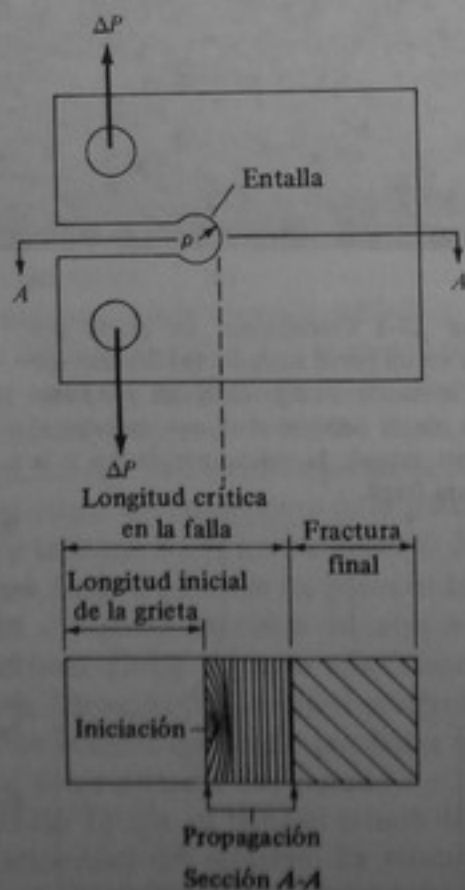


Figura 14-4 Esquema que muestra la región de iniciación de la grieta por fatiga, la región de propagación y la región de la fractura final.

14-2 CARGA DE FATIGA

Generalidades

La carga de fatiga se puede referir a diferentes situaciones, como las siguientes:

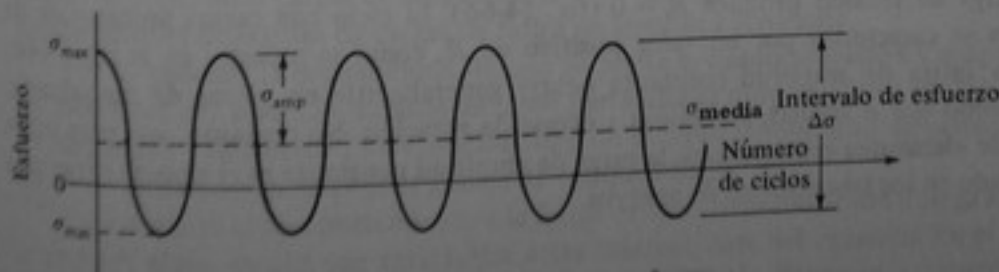
1. Las cargas reales aplicadas a probetas para ensayo en laboratorio. Estas cargas pueden ser de amplitud constante o amplitud variable (aleatoria), como se describirá más adelante.
2. Las cargas idealizadas que se supone se deben aplicar a elementos o estructuras reales. En ausencia de datos específicos de campo, se supone que estas cargas son análogas a las cargas aplicadas a las probetas para ensayo en laboratorio.
3. Las cargas reales aplicadas a elementos o estructuras reales. Estas cargas solo pueden ser medidas después de construida la pieza. Sin embargo, los registros de una situación (por ejemplo, el tráfico de camiones en un puente o los esfuerzos medidos en elementos de aviones) se pueden utilizar para diseñar posteriormente otras estructuras.

Idealmente, el comportamiento a la fatiga de estructuras reales debe "moldearse" tanto como sea posible con base en pruebas de laboratorio con probetas sometidas a condiciones similares. Es decir que para predecir el comportamiento de elementos reales en la forma más aproximada posible, las probetas para ensayos de laboratorio se deben someter al mismo tipo de carga de fatiga que los elementos reales. Los dos tipos de carga más comunes son la carga de amplitud constante y la carga de amplitud variable (o aleatoria).

Amplitud constante

En la carga de amplitud constante, el intervalo de la carga (o, más usualmente, el intervalo del esfuerzo) es constante a lo largo de todo el proceso de carga, como se indica en la fig. 14-5. La carga varía desde σ_{\max} hasta σ_{\min} . Esto da por resultado un intervalo del esfuerzo, $\Delta\sigma$, igual a la diferencia algebraica entre los dos valores:

$$\text{Intervalo del esfuerzo} = \Delta\sigma = \sigma_{\max} - \sigma_{\min} \quad (14-2)$$



$$\Delta\sigma = \sigma_{\max} - \sigma_{\min} = \text{Intervalo de esfuerzo}$$

$$\sigma_{\text{amp}} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}$$

$$\sigma_{\text{media}} = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}$$

Figura 14-5 Terminología empleada en la fatiga de amplitud constante.

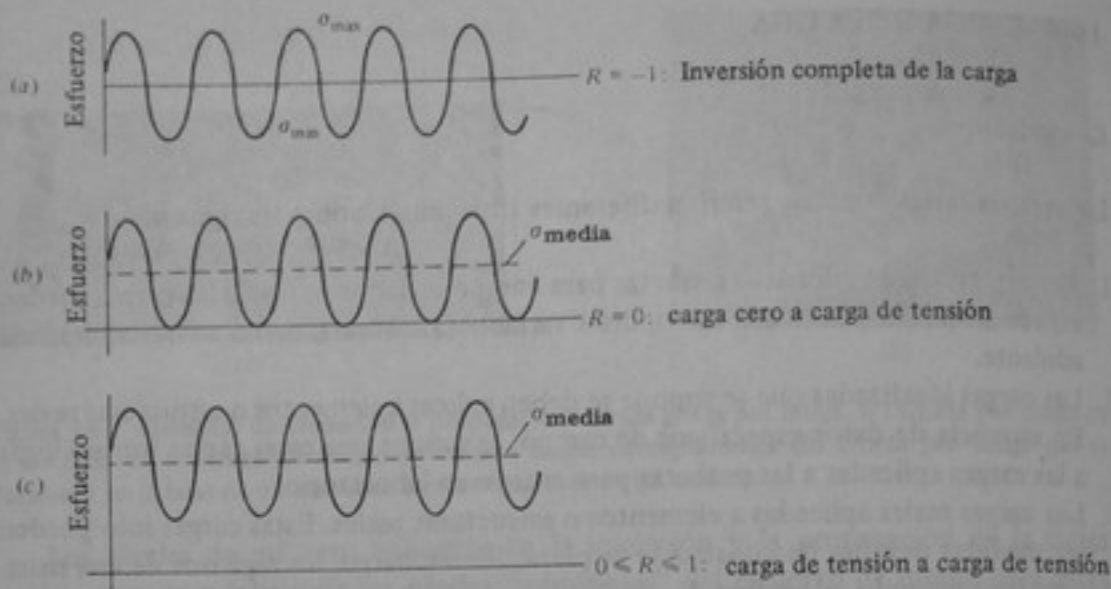


Figura 14-6 Comparación de las relaciones R para diferentes cargas; $R = \sigma_{\min}/\sigma_{\max}$.

El esfuerzo medio es

$$\sigma_{\text{media}} = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} \quad (14-3)$$

La amplitud del esfuerzo se define mediante

$$\sigma_{\text{amp}} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} \quad (14-4)$$

Una consideración importante en el análisis de la fatiga es la cantidad relativa de esfuerzos de tensión y de compresión, que se mide por medio de la relación R :

$$R = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} \quad (14-5)$$

La inversión completa desde una carga de tensión hasta una carga igual de compresión da por resultado $R = -1$, como se indica en la fig. 14-6a. El ciclo entre carga cero y una carga de tensión produce $R = 0$ (fig. 14-6b). El ciclo con cargas únicamente de tensión se caracteriza por un valor positivo de R , como se muestra en la fig. 14-6c.

La fatiga de amplitud constante ocurre generalmente en piezas de maquinaria, tales como ejes o varillas, sometidas a cargas de rotación. No obstante, aun para otros tipos de elementos estructurales, la carga de amplitud constante es el tipo de carga más estudiado en los laboratorios de ensayos.

Amplitud variable (aleatoria)

En muchas estructuras las cargas de fatiga no son de amplitud constante, sino de amplitud variable o aleatoria, como se indica en las figs. 14-7 y 14-8. Ejemplos de este

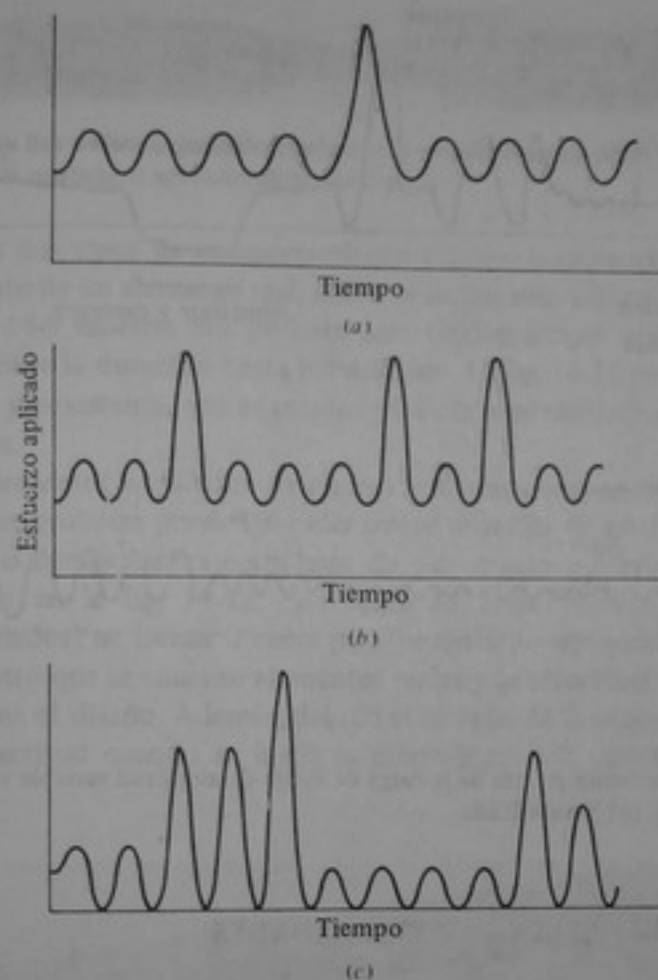


Figura 14-7 Cargas típicas con ciclo de amplitud variable. (a) Carga con un solo ciclo alto superpuesto. (b) Carga con múltiples ciclos altos superpuestos. (c) Carga con múltiples ciclos altos variables superpuestos.

tipo de carga de fatiga son el tráfico de camiones sobre puentes, las cargas del viento sobre los aviones y las cargas de las olas sobre los buques. (Tal como se muestra en la fig. 14-8, con frecuencia se simplifican las cargas reales para facilitar el análisis). Estas cargas, denominadas cargas de fatiga de *amplitud variable* (aleatoria) constan de muchas combinaciones diferentes de cargas de fatiga de amplitud constante.

Por lo general, la probabilidad de que se repita la misma secuencia y magnitud de los intervalos del esfuerzo durante un lapso particular es muy pequeña; por tal motivo, las cargas son "aleatorias". Obviamente, hay un número semiinfinito de patrones aleatorios de esfuerzo con diferentes grados de complejidad.

Para analizar el comportamiento a la fatiga de elementos sometidos a carga aleatoria se necesita algún medio que caracterice estas fluctuaciones del esfuerzo. En el análisis del comportamiento hasta la iniciación de la fatiga, N_i , el método más corriente para estudiar la carga de amplitud variable es utilizar la *regla del daño lineal de Miner*. Un método que se usa ampliamente para estudiar la carga de amplitud variable en el análisis de la propagación de la grieta, N_p , es el de la *raíz cuadrada de la suma de los cuadrados*. Estos dos métodos se describen más adelante.

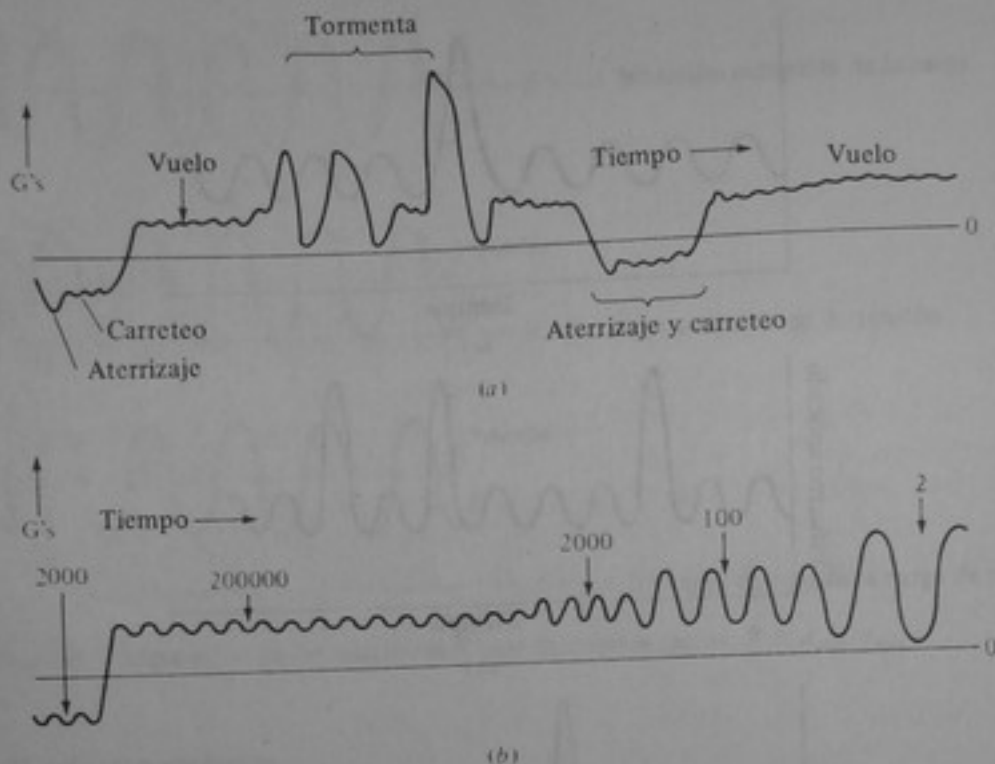


Figura 14-8 Representación gráfica de la carga de fatiga de amplitud variable y la carga simplificada para análisis. (a) Real. (b) Simplificada.

14-3 ENSAYO DE FATIGA – GENERALIDADES

El objetivo del ensayo de fatiga es obtener información respecto al comportamiento a la fatiga de un material y/o una geometría particulares. El ensayo de fatiga es necesario para obtener información básica sobre las propiedades del material, de la misma manera que se obtiene información sobre la resistencia a la fluencia y el módulo de elasticidad de un material a partir de un ensayo de tensión. En cuanto sea posible, las condiciones del material, los intervalos del esfuerzo y el tipo de carga deben ser bastante similares a las condiciones reales de servicio, con el fin de que los resultados sean útiles para el diseño. Este procedimiento es semejante al del capítulo 4, en donde se describieron los resultados de ensayos de tracción y compresión en un solo ciclo y su uso en el análisis del comportamiento de elementos cargados una sola vez.

Hay dos tipos generales de ensayos de fatiga:

1. Los ensayos de laboratorio en pequeña escala para obtener información fundamental sobre el comportamiento del material. Generalmente las probetas son barras, vigas, etc., semejantes a los elementos que se estudiaron en la parte 1. De ordinario, estos ensayos se realizan con el fin de obtener información sobre la duración hasta la iniciación de la fatiga, N_i , o sobre la duración de la propagación, N_p . Sin embargo, en algunos casos no se hace distinción entre las dos regiones y las probetas se ensayan hasta la falla para obtener la duración total, N_T . Si se obtiene solamente la duración total de probetas pequeñas, se dificulta el uso de los resultados para predecir el comportamiento de elementos reales a escala natural. Es preferible determinar sepa-



Figura 14-9 Probeta lisa utilizada para determinar el comportamiento hasta la iniciación de la fatiga (la longitud de la probeta es aproximadamente 5 pul).

radamente los dos tipos de comportamiento y luego combinarlos para predecir el comportamiento de un elemento real, como se indica más adelante.

La figura 14-9 muestra una probeta para flexión simple utilizada para obtener información sobre la duración hasta la iniciación. La fig. 14-10 presenta una probeta con una grieta preexistente, que se emplea para obtener resultados sobre la duración de propagación.

2. *Ensayos de elementos simulados (o reales)* que son componentes de máquinas o estructuras. Las probetas pueden ser elementos sencillos de estructuras, como el de la fig. 14-11, o componentes complejos de estructuras a escala natural, como se puede observar en la fig. 14-12. Generalmente, estos ensayos con componentes reales (o simulados) se llevan a cabo para obtener información sobre la duración total, N_T , puesto que se ensayan elementos reales y la información se puede utilizar directamente en el diseño. Además, debido al tamaño de la probeta, es difícil determinar con exactitud cuando se inicia la grieta y cuando empieza la propagación.

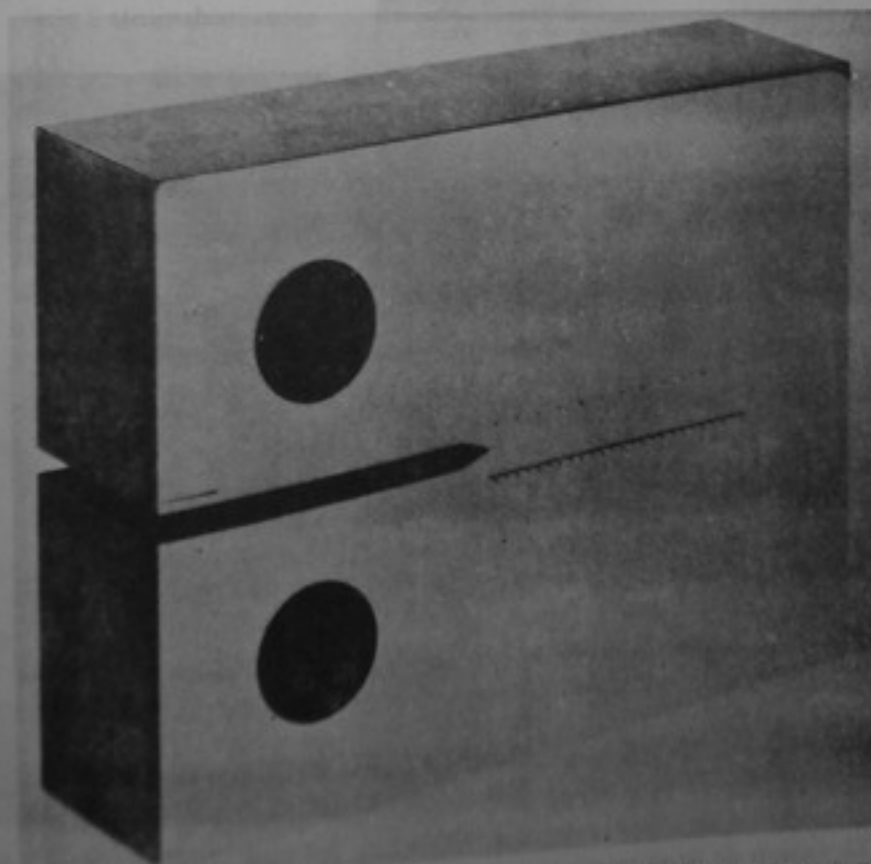


Figura 14-10 Probeta compactada para tracción utilizada para determinar el comportamiento de la propagación en la fatiga (la longitud de la probeta es aproximadamente 5 pul).

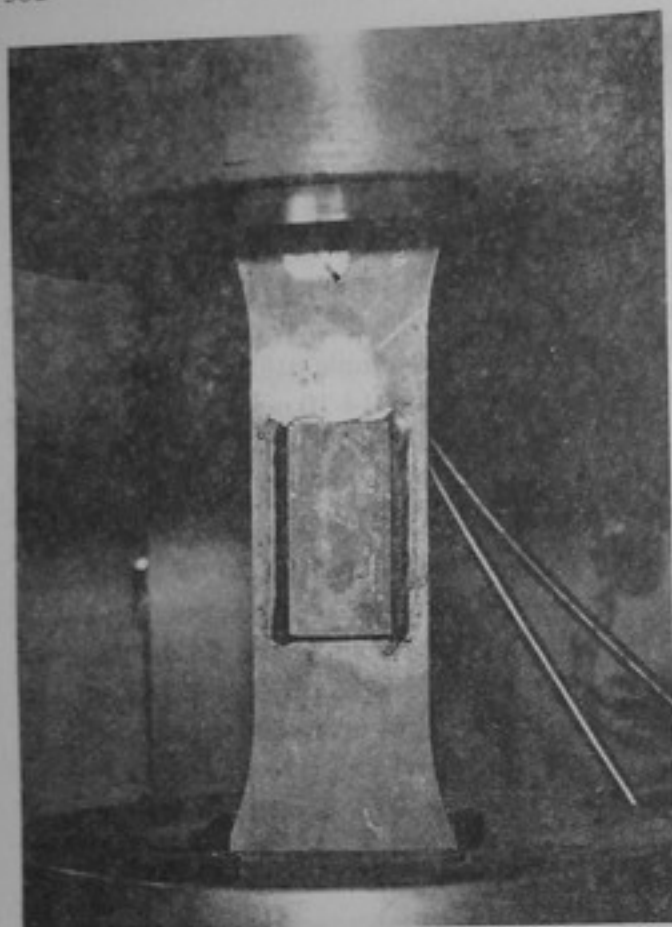
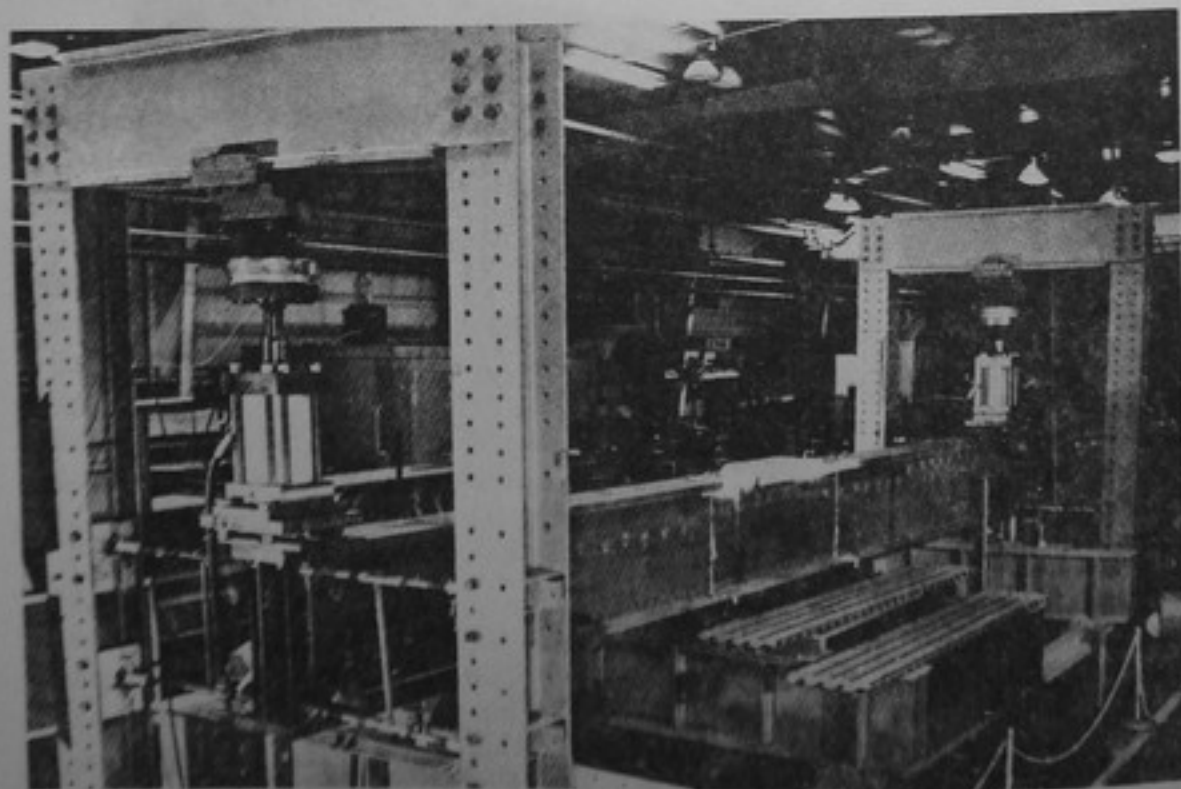
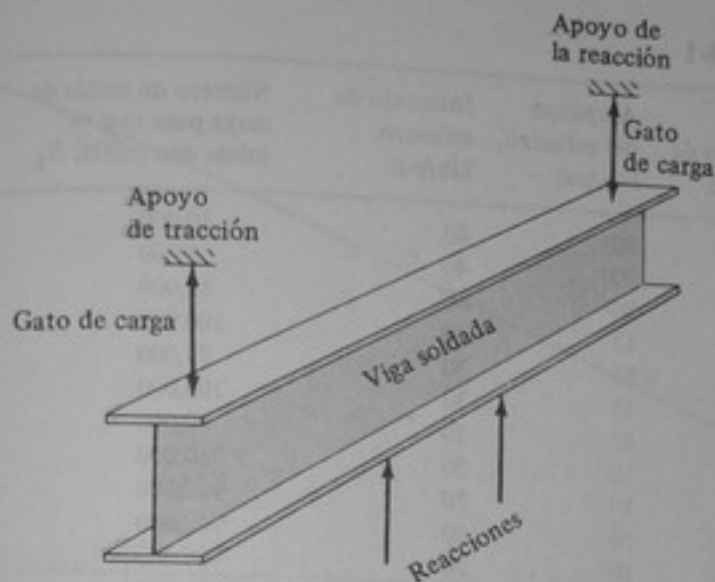


Figura 14-11 Probeta para fatiga utilizada para determinar el comportamiento a la fatiga de una unión soldada (la longitud de la probeta es aproximadamente 2 pies).



(a)

Figura 14-12 Ensayo de fatiga en escala natural de una viga soldada utilizada como componente estructural. (a) Montaje del ensayo de la viga (la longitud de la probeta es aproximadamente 25 pies). (b) Esquema que muestra la carga de cuatro puntos en flexión.



(b)

Figura 14-12 (Continuación).

14-4 COMPORTAMIENTO HASTA LA INICIACION DE LA FATIGA

Diagramas $E-N$

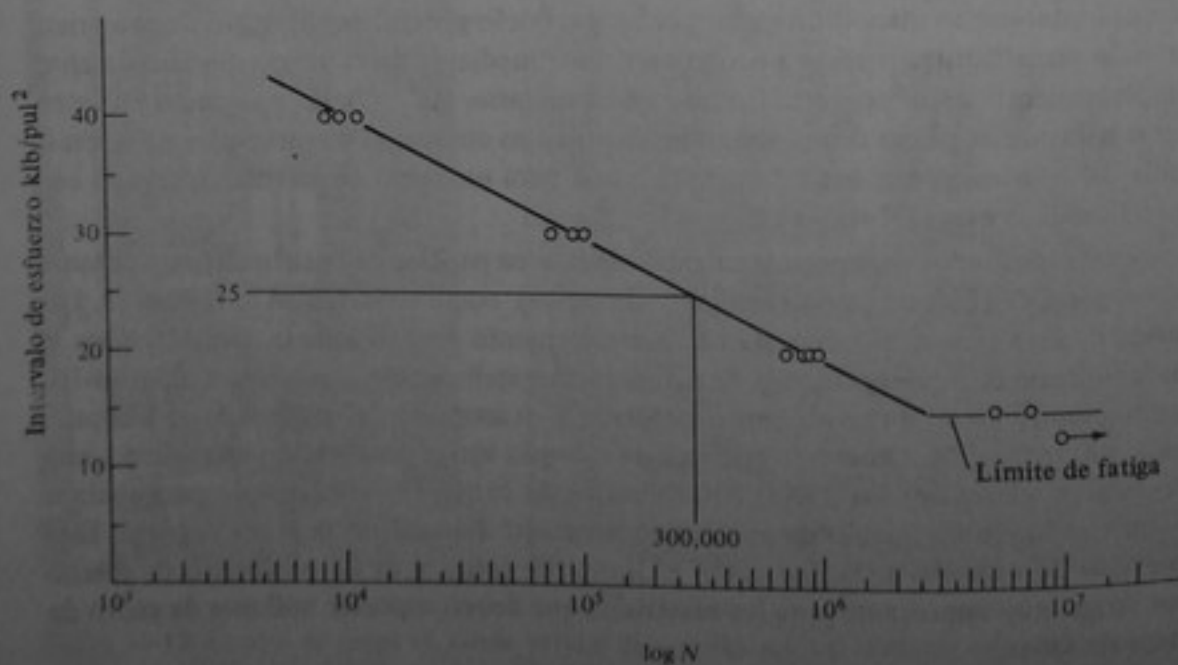
Para los ensayos de laboratorio en pequeña escala, para obtener información sobre la duración hasta la iniciación, se tornean (o fabrican) varias probetas idénticas, las cuales se ensayan en diferentes intervalos de esfuerzo (por lo general, con una amplitud constante) hasta que se inicie una grieta por fatiga. Por lo general, la iniciación de una grieta se mide visualmente, pero se puede determinar mediante un cambio especificado en el desplazamiento de la probeta. Como es de esperarse, las probetas ensayadas en intervalos bajos de esfuerzo duran más que las probetas ensayadas en intervalos altos. En la tabla 14-1 se muestran los resultados típicos para un acero estructural ensayado con inversión de la carga ($R = -1$).

Estos resultados se representan gráficamente en papel semilogarítmico para obtener una curva $E-N$ (Esfuerzo contra número de ciclos), como se indica en la fig. 14-13. Las curvas de este tipo se pueden utilizar posteriormente para estimar la duración hasta la iniciación con cualquier intervalo de esfuerzo. Por ejemplo, de acuerdo con la fig. 14-13, la duración en fatiga de un elemento sometido a un intervalo de esfuerzo de 25 klb/pul^2 sería 300 000 ciclos. Obsérvese que en este ejemplo varias probetas no han fallado, aun después de sobrepasar los 2 000 000 de ciclos de carga. Esto indica que para algunos materiales hay un intervalo de esfuerzo por debajo del cual no se inicia la grieta. Este intervalo de esfuerzo se define como el límite de fatiga y es un parámetro de diseño por fatiga muy importante para los materiales que deben soportar millones de ciclos de carga sin fallar.

Algunos materiales, por ejemplo los aluminios estructurales, no exhiben un límite de fatiga bien definido. En su lugar, los resultados de los ensayos continúan dismi-

Tabla 14-1

Número de probeta	Amplitud del esfuerzo, klb/pul	Intervalo de esfuerzo, klb/pul	Número de ciclos de carga para que se inicie una grieta, N_f
1	20	40	10,000
2	20	40	9,000
3	20	40	12,000
4	15	30	100,000
5	15	30	95,000
6	15	30	103,000
7	15	30	80,000
8	10	20	850,000
9	10	20	900,000
10	10	20	920,000
11	10	20	700,000
12	7.5	15	5,000,000
13	7.5	15	7,000,000
14	6	12	> 9,000,000

Figura 14-13 Resultados típicos $E-N$ de un ensayo de fatiga que muestran el límite de fatiga.

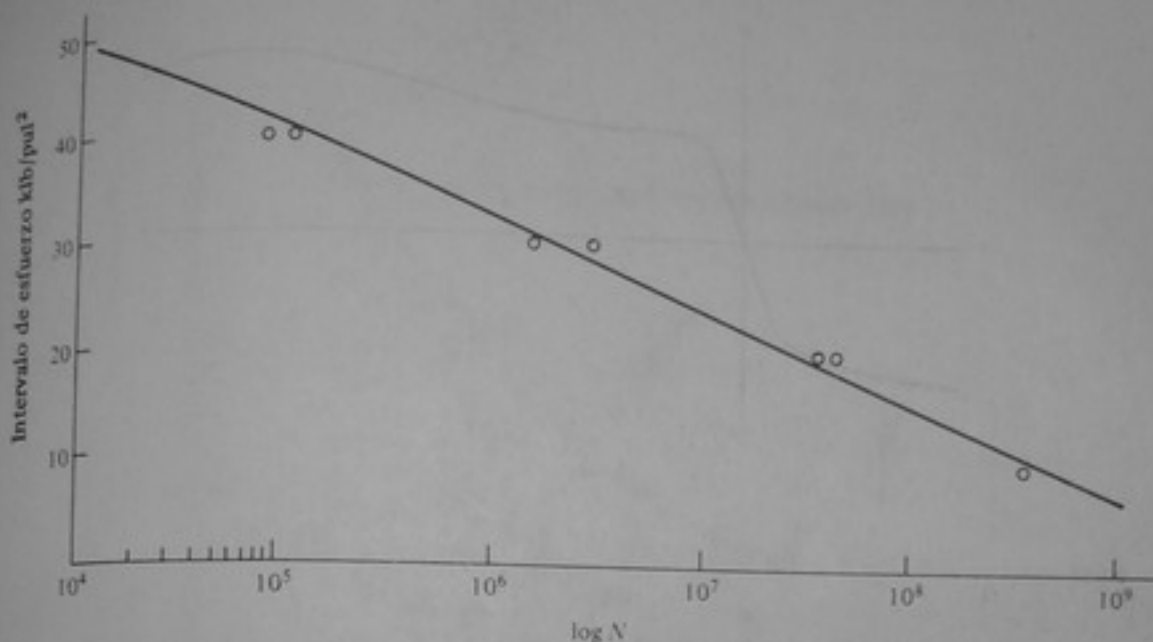


Figura 14-14 Resultados típicos $E-N$ de un ensayo de fatiga para un material sin límite de fatiga.

nuyendo aun después de 10 000 000 de ciclos de carga, como se puede observar en la fig. 14-14. Para estos materiales, el "límite" de fatiga se puede caracterizar mediante un número arbitrario (pero alto) de ciclos, por ejemplo entre 10^6 y 10^8 ciclos.

Fatiga por el ciclo de deformación unitaria

Los diagramas $E-N$ descritos en la sección anterior se basan en una amplitud constante del intervalo de *esfuerzo*, y los intervalos de esfuerzo están por debajo del límite elástico del material. Es decir que para una curva general esfuerzo-deformación unitaria como la de la fig. 14-15a, el esfuerzo máximo que se aplica para establecer la curva $E-N$ está en la porción elástica de la curva $\sigma-\epsilon$ (fig. 14-15b).

No obstante, hay situaciones en las cuales los elementos o estructuras están cargados en fatiga más allá de su *límite elástico*. Por ejemplo, los elementos sometidos a cargas térmicas, los elementos con entallas, la tubería sometida a deformaciones grandes y algunos componentes de recipientes a presión para usos nucleares se someten a carga cíclica inelástica, como se indica en la fig. 14-15c. En estos casos, el intervalo de *deformación unitaria* se convierte en el parámetro de control en vez del intervalo de esfuerzo, debido a que puede haber grandes variaciones en el intervalo de deformación unitaria (y, por tanto, daño por fatiga) y solo pequeños cambios en el intervalo de esfuerzo. En la fig. 14-15c, la carga inicial se representa mediante la región ABC , y la descarga inelástica inicial más la inversión mediante CDE . La descarga en compresión va de E a F y luego se repite el ciclo $FCDEF$. De este modo, hay una componente elástica $\Delta\epsilon_e$ y una componente plástica $\Delta\epsilon_p$ para producir el intervalo total de deformación unitaria, $\Delta\epsilon_T$. Evidentemente, el ancho de la curva cerrada de histéresis depende del material y del nivel de deformación cíclica. Si el nivel de deformación cíclica es muy pequeño, solo existe la componente elástica de la deformación unitaria y la carga cíclica es elástica (véase la fig. 14-15b).

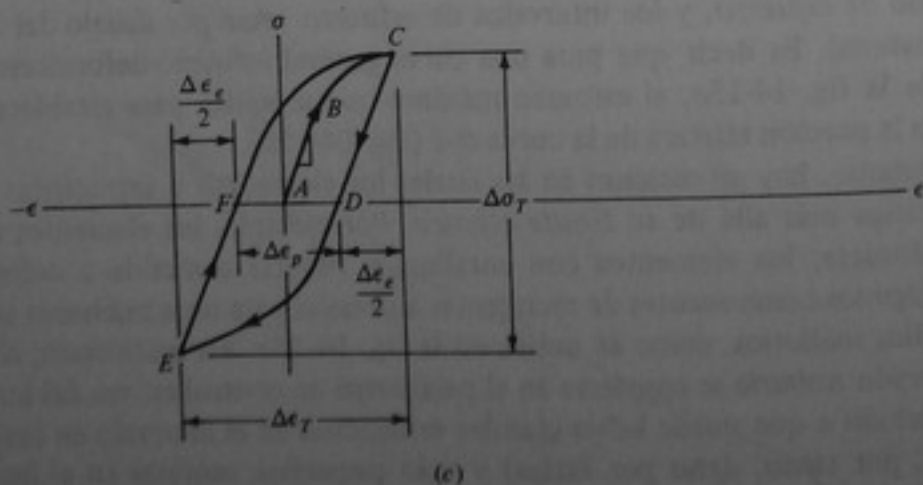
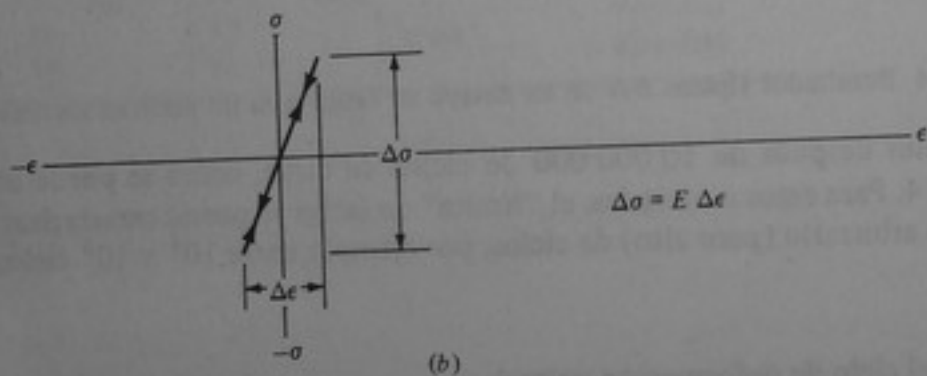
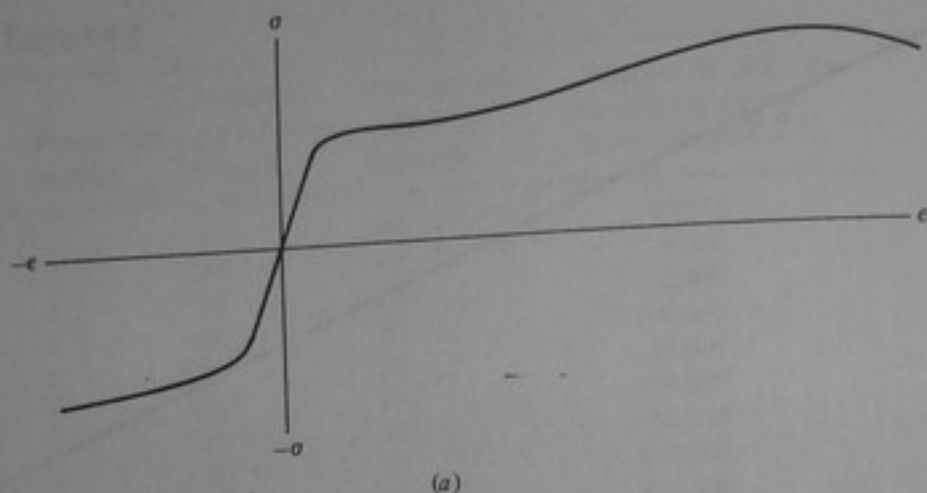


Figura 14-15 Carga cíclica en las regiones elástica e inelástica de la curva esfuerzo-deformación unitaria. (a) Curva general esfuerzo-deformación unitaria. (b) Carga cíclica elástica. (c) Carga cíclica inelástica.

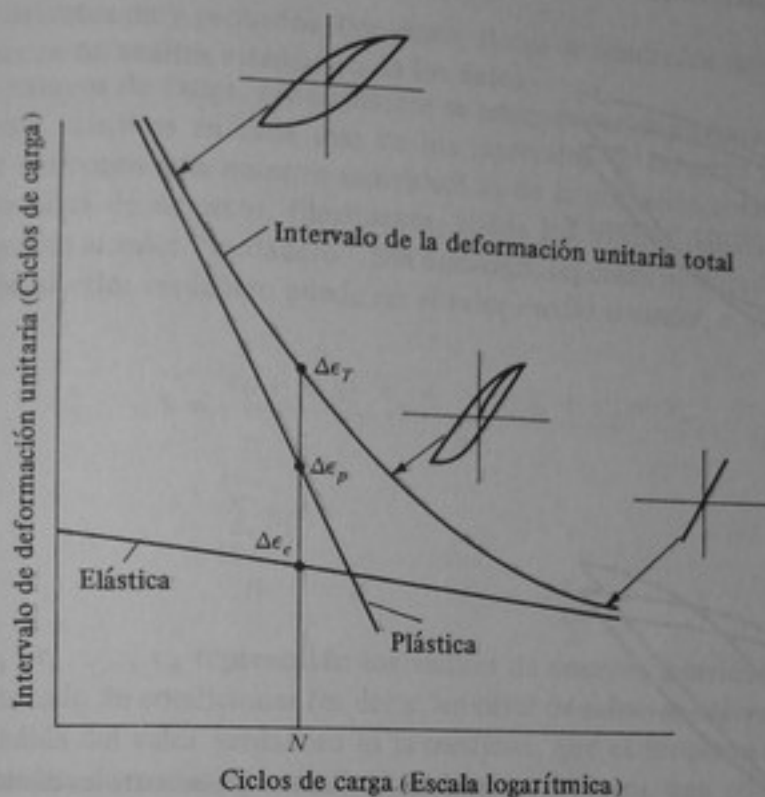


Figura 14-16 Relación gráfica entre los intervalos de deformación unitaria elástica, plástica y total para la curva del ciclo de deformación.

El comportamiento de materiales sometidos a carga con deformación cíclica más allá del límite elástico (fig. 14-15c) se analiza utilizando curvas del ciclo de deformación en lugar de las curvas del ciclo de esfuerzo ($E-N$). En la fig. 14-16 se muestra una curva de ciclo de Deformación. Como el intervalo de deformación unitaria total, $\Delta\epsilon_T$, tiene una componente elástica y una plástica, cada uno de estos comportamientos se puede describir mediante curvas separadas. Para un valor particular cualquiera de N ,

$$\Delta\epsilon_T = \Delta\epsilon_e + \Delta\epsilon_p \quad (14-6)$$

como se muestra en la fig. 14-16.

Obsérvese que para valores altos de la amplitud de la deformación unitaria, $\Delta\epsilon_T$, el intervalo de deformación unitaria total es bastante grande y la gráfica $\Delta\sigma-\Delta\epsilon$ tiene una curva cerrada de histéresis también bastante grande. Para bajos valores de la amplitud de la deformación unitaria, $\Delta\epsilon_e$ se aproxima al intervalo de la deformación unitaria total y la curva cerrada de histéresis se aproxima a una línea recta. Existen relaciones generalizadas entre $\Delta\epsilon_T$, $\Delta\epsilon_e$, $\Delta\epsilon_p$, N y otras propiedades y constituyen el tema de estudios avanzados sobre fatiga. No obstante, es importante reconocer que el comportamiento a la fatiga se puede analizar bien sea mediante la curva del ciclo de esfuerzo ($E-N$) o mediante la curva del ciclo de deformación unitaria ($e-N$).

Algunos materiales realmente sufren cambios en el intervalo de esfuerzo con un aumento en el número de ciclos, cuando se someten a valores constantes $\Delta\epsilon$ por encima de la resistencia a la fluencia. Es decir, algunos materiales sufren endurecimiento por deformación cíclica de tal modo que el intervalo de esfuerzo aumenta al aumentar el número de ciclos de carga, como se muestra en la fig. 14-17a. El nivel de esfuerzo

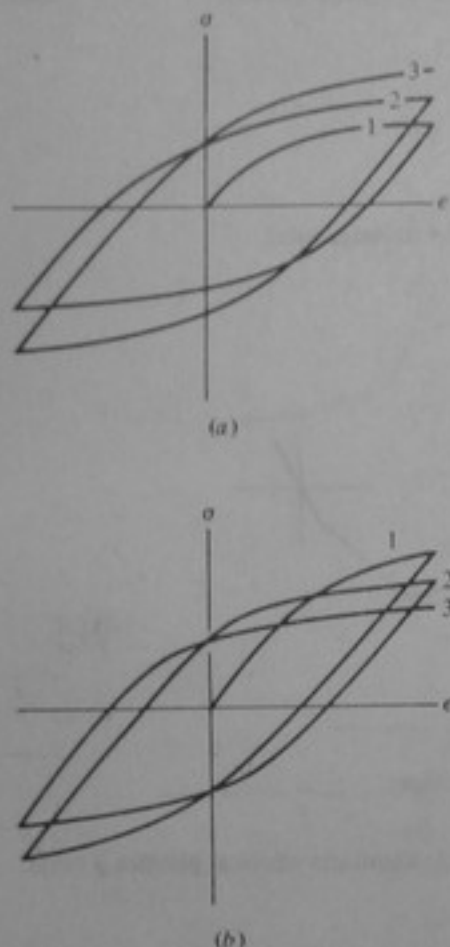


Figura 14-17 Gráfica que muestra los cambios en el intervalo $\Delta\sigma$ para materiales que endurecen por deformación y ablandan por deformación, respectivamente, y están sometidos al mismo intervalo $\Delta\varepsilon$. (a) Endurecimiento por deformación. (b) Ablandamiento por deformación.

alcanza un valor aproximadamente constante después de algún número de ciclos de carga, generalmente en el intervalo de 10 a 100 ciclos. Por el contrario, hay otros materiales que se ablandan por deformación (fig. 14-17b), de tal modo que el intervalo de esfuerzo *disminuye* con el número de ciclos en un intervalo de deformación constante. Como regla general, los materiales inicialmente duros y fuertes (tratados térmicamente) se ablandarán por deformación cíclica mientras que los materiales inicialmente blandos se endurecerán. Para predecir el comportamiento de estos materiales se deben utilizar las curvas esfuerzo-deformación unitaria para cargas cíclicas en lugar de las curvas esfuerzo-deformación unitaria monótonas (para un ciclo). Las curvas esfuerzo-deformación unitaria cíclicas representan el comportamiento del material después de varios ciclos de carga y pueden ser significativamente diferentes de las curvas monótonas σ - ε debido a que dependen de la historia previa de la deformación. La determinación de las curvas cíclicas σ - ε se describe en textos avanzados de fatiga.

Naturaleza estadística de la fatiga

Debido a la variación en las propiedades de los materiales, la preparación de las probetas, las condiciones de los ensayos, etc., es de esperarse alguna dispersión en todos los resultados de ensayos para determinación de las propiedades de los materiales, aun en condiciones supuestamente idénticas. Los resultados de ensayos de fatiga son particularmente susceptibles de dispersión puesto que las grietas por fatiga se pueden iniciar

FATIGA
a partir de
se debe basa
En los e
supuestamer
resultado se
determinado
entre si e ig
aproximaci

en donde x_1
junto determ

Otra me
licado en me
decir que x_3
 x_4 . (Si el nú
intermedios.)

Aunque l
determinado
perción de los
o la desviación

en donde $x_1 =$
 $x = r$
 $n = r$

la desviación n
ración de la
resultados de
comadamant
se caerán de

Ejemplo 14-1
tiempo de si

80/100

a partir de defectos muy pequeños. Por tanto, el uso de resultados de ensayos de fatiga se debe basar en un análisis estadístico de los datos.

En los ensayos de fatiga, generalmente se ensayan varias probetas en condiciones supuestamente idénticas en cada uno de los intervalos de esfuerzo analizados. Cada resultado se denomina una *muestra* individual x_i de la población total ensayada en un determinado nivel de esfuerzo. Idealmente, todos los valores deberían ser idénticos entre sí e iguales al valor "verdadero". Sin embargo, las cosas no suceden así. La mejor aproximación al valor verdadero puede ser el valor *medio* o *media*, \bar{x} , dado por

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_i + \cdots + x_n}{n} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}\end{aligned}\quad (14-7)$$

en donde x_1, x_2, \dots, x_n representan los valores de ensayos individuales para un conjunto determinado de condiciones (es decir, un nivel de esfuerzo determinado).

Otra medida del valor verdadero es la *mediana*, que es simplemente el valor localizado en medio de todos los resultados de ensayos para una condición dada. Es decir que x_3 es la mediana de x_1, x_2, x_3, x_4 y x_5 , sin importar los valores de x_1, \dots, x_5 . (Si el número de resultados es par, la mediana es el promedio de los dos valores intermedios.)

Aunque la media (o la mediana) da un solo valor representativo para un conjunto determinado de resultados de ensayos, no describe completamente el intervalo o dispersión de los resultados. Una medida ampliamente usada de la dispersión o variabilidad es la *desviación normal*, S , dada por

$$S = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}}\quad (14-8)$$

en donde x_i = resultados de ensayos individuales
 \bar{x} = media, definida en la ecuación (14-7)
 n = número total de resultados

La desviación normal de un conjunto de resultados de ensayos constituye una buena estimación de la variación en estos resultados. Si se supone una distribución normal para los resultados de los ensayos, es decir, una distribución en forma de campana, entonces aproximadamente las dos terceras partes (en realidad, el 68%) de los resultados de los ensayos caerán dentro de una desviación normal por encima y una por debajo de la media.

Ejemplo 14-1 En un intervalo de esfuerzo de $\Delta\sigma = 20$ klb/pul², la duración a la fatiga de siete probetas idénticas para ensayo de un material estructural son:

80,000 140,000 200,000 220,000 110,000 180,000 260,000

Determinar la media de la duración a la fatiga, la mediana y la desviación normal.

SOLUCION La media se halla con la fórmula

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1,190,000}{7} = 170,000 \text{ ciclos} \quad \text{Resp.}$$

La mediana es el valor intermedio, o sea 180 000 ciclos.

La desviación normal se halla mediante

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}} \\ &= \sqrt{\frac{(80,000 - 170,000)^2 + (140,000 - 170,000)^2 + \dots}{7 - 1}} \\ &= \sqrt{\frac{(-90,000)^2 + (-30,000)^2 + (30,000)^2 + (50,000)^2 \\ &\quad + (-60,000)^2 + (10,000)^2 + (90,000)^2}{7 - 1}} \\ &= \sqrt{\frac{24,200,000,000}{6}} \end{aligned}$$

de modo que

$$S = 63,500 \text{ ciclos} \quad \text{Resp.}$$

Entonces, suponiendo una distribución normal de los resultados de los ensayos, se puede esperar que las dos terceras partes de todos los ensayos futuros realizados en este intervalo particular de esfuerzo caigan dentro del intervalo de duración de $170\,000 \pm 63\,500$ o entre 106 500 y 233 500 ciclos. Obsérvese que este intervalo es bastante grande, lo cual indica que la muestra era bastante pequeña y la dispersión bastante grande.

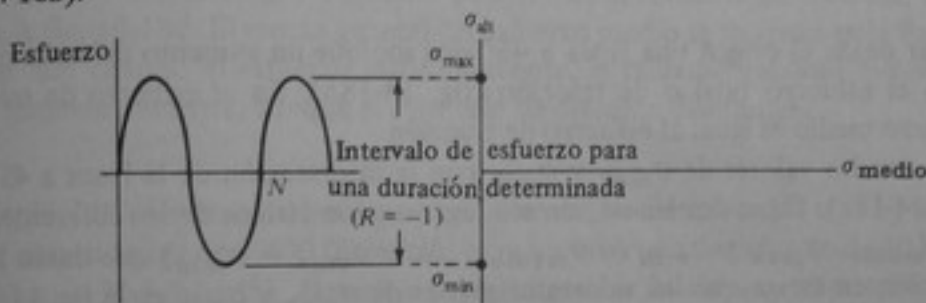
Efecto del esfuerzo medio

Debe observarse que los ensayos de laboratorio $E-N$ generalmente se realizan bajo condiciones de inversión completa ($R = -1$ o un esfuerzo medio igual a cero; fig. 14-6). Sin embargo, muchas aplicaciones prácticas de la fatiga ocurren a niveles de esfuerzo medio diferentes de cero. Es decir que el esfuerzo alternante se superpone a algún esfuerzo inicial constante (por ejemplo, el peso constante de la estructura, denominado a veces carga muerta). Se debe observar que el intervalo de esfuerzo $\Delta\sigma$ tiene el mayor efecto sobre la duración en fatiga mientras que el esfuerzo medio tiene un efecto secundario. No obstante, puede haber ocasiones en las que el ingeniero debe estimar la influencia del esfuerzo medio sobre la duración en fatiga.

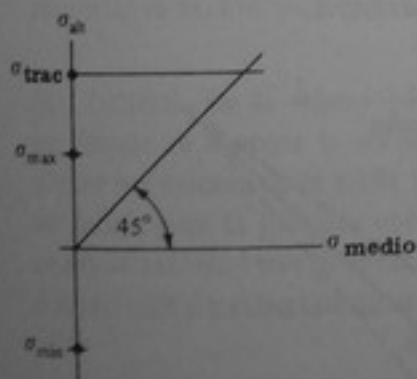
Para evitar tener que realizar ensayos de laboratorio en todos los niveles posibles de esfuerzo medio, es conveniente convertir analíticamente los resultados de ensayos de fatiga con esfuerzo medio cero a resultados con esfuerzos medios diferentes. Hay varias formas de hacer esto, pero uno de los métodos más comunes es utilizar el diagrama de Goodman. Goodman observó que para cada valor del esfuerzo medio hay un valor diferente del intervalo de esfuerzo, $\Delta\sigma = \sigma_{\max} - \sigma_{\min}$, que se puede soportar

durante un cierto número de ciclos sin fallar. Cuando el esfuerzo medio aumenta, el intervalo de esfuerzo disminuye, alcanzando un límite teórico de cero cuando se llega al esfuerzo de tensión. El desarrollo, paso a paso, del diagrama de Goodman es el siguiente:

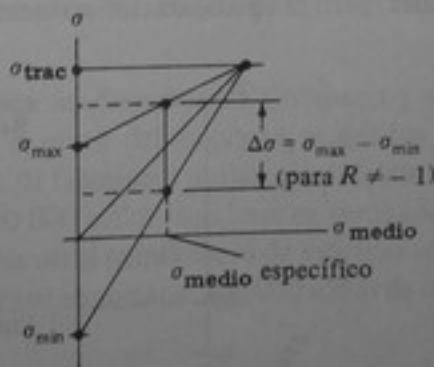
1. Obtener los resultados de ensayos $E-N$ para una carga de amplitud constante y un esfuerzo medio igual a cero ($R = -1$). Estos resultados son muy fáciles de obtener y a menudo se hallan en la literatura técnica. En las figs. 14-3 y 14-4 se presentan ejemplos de resultados $E-N$.
2. Determinar el intervalo de esfuerzo para una duración particular, por ejemplo, N ciclos, a partir de una curva $E-N$ para $R = -1$.
3. Representar gráficamente σ_{max} y σ_{min} sobre el eje vertical de un diagrama de Goodman, en el cual la abscisa es el esfuerzo medio. Para $R = -1$, $\sigma_{medio} = 0$ (fig. 14-18a).



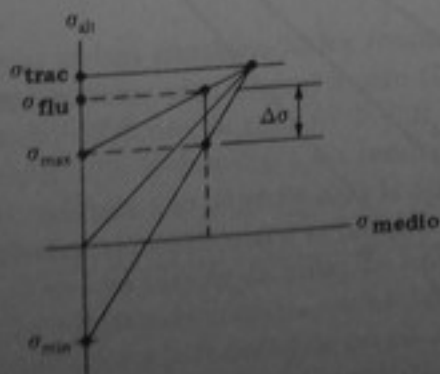
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 14-18 Desarrollo, paso a paso, del diagrama de Goodman. (a) Representación gráfica de σ_{max} y σ_{min} sobre la curva $\sigma_{alt} - \sigma_{medio}$. (b) Establecimiento de línea a 45° y σ_{trac} . (c) Establecimiento de $\Delta\sigma$ para un σ_{medio} determinado. (d) Límites prácticos del diagrama.

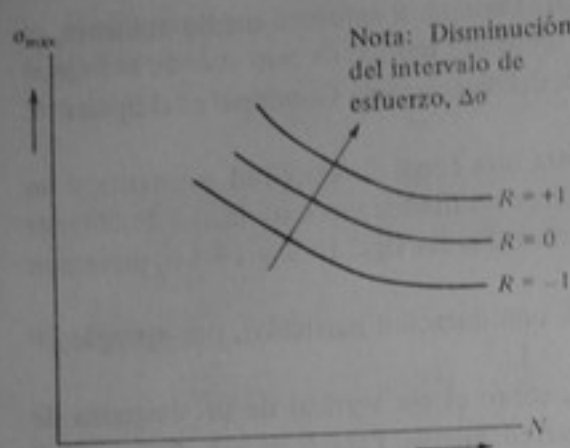


Figura 14-19 Esquema que muestra el efecto general de la relación R sobre σ_{\max} .

4. Trazar desde el origen una línea a 45° que indique un aumento del esfuerzo medio hasta el esfuerzo final σ de tracción (fig. 14-18b). En el esfuerzo de tracción, el esfuerzo medio es igual al esfuerzo de tracción.
5. Conectar los valores de σ_{\max} y σ_{\min} con la intersección de la línea a 45° y σ_{\min} (fig. 14-18c). Estas dos líneas son los lugares geométricos de los diferentes valores de σ_{medio} , σ_{\max} y σ_{\min} (o σ_{medio} y $\Delta\sigma = \sigma_{\max} - \sigma_{\min}$) que darán la misma duración en fatiga que los valores originales de σ_{\max} y σ_{\min} en la fig. 14-18a para $\sigma_{\text{medio}} = 0$. Algunas veces estas líneas son curvas, con base en resultados de ensayos reales, pero la aproximación a líneas rectas es conservativa.

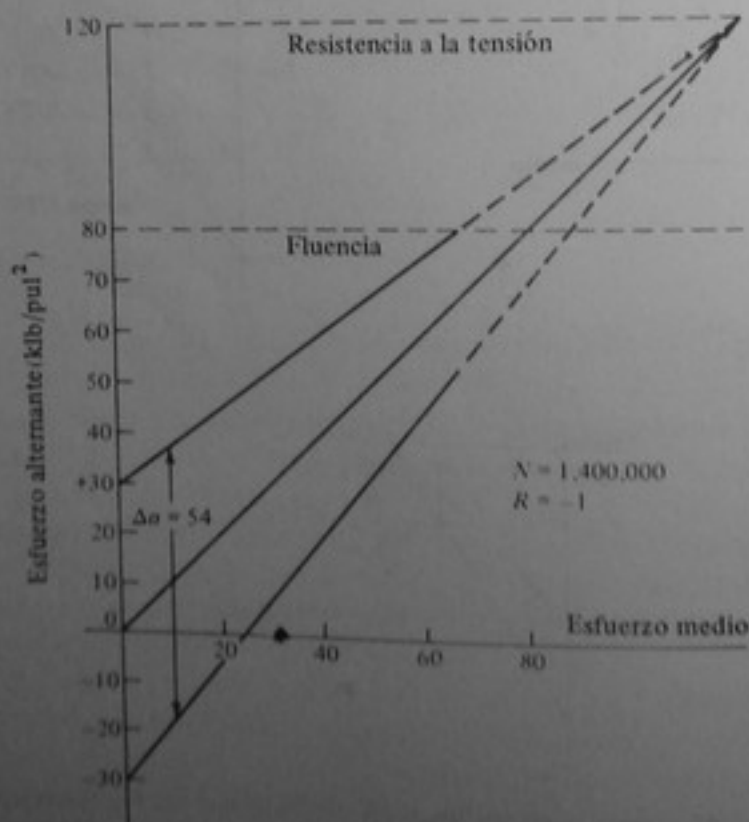


Figura 14-20 Ejemplo 14-2. Uso del diagrama de Goodman.

Tabla 14-2

Condición	σ_{medio}	σ_{max}	σ_{min}	$\sigma_{\text{intervalo}}$	σ_{amp}
1	0	+30	-30	60	± 30
2	10	+37	-17	54	± 27
3	20	+45	-5	50	± 25
4	30	+53	+7	16	± 23
5	40	+60	+20	40	± 20
6	50	+68	+32	36	± 18

A medida que el esfuerzo medio aumenta, el intervalo de esfuerzo para una duración determinada se reduce, y en el valor de la resistencia a la tensión el intervalo de esfuerzo es cero. Sin embargo, un límite práctico es el esfuerzo de fluencia, como se indica en la fig. 14-18d. El efecto general del esfuerzo medio se muestra en la fig. 14-19. Obsérvese que cuando el esfuerzo medio aumenta, el esfuerzo *máximo* que se puede soportar también aumenta, aunque el *intervalo* de esfuerzo disminuye.

Ejemplo 14-2 Un material ensayado con inversión completa ($R = -1$) tiene una duración en fatiga de 1 400 000 ciclos para un intervalo de esfuerzo de 60 klb/pul² (+30 a -30 klb/pul²). Determinar los intervalos de esfuerzo equivalentes para niveles de esfuerzo medio de 10, 20 y 30 klb/pul². La resistencia a la fluencia del material es 80 klb/pul² y la resistencia a la tracción es 120 klb/pul².

SOLUCION En la figura 14-20 se representa un diagrama de Goodman a escala en donde se emplea la información dada. A partir del diagrama se pueden establecer los valores de la tabla 14-2. El análisis de Goodman indica que si la duración en fatiga para la primera condición es 1 400 000 ciclos, con base en resultados de ensayos reales, otras probetas probadas en las otras condiciones de esfuerzo medio e intervalos de esfuerzo menores también deben soportar 1 400 000 ciclos de carga.

Daño acumulativo

En las secciones anteriores se han considerado los resultados de ensayos de fatiga (1) con amplitud constante y esfuerzo medio igual a cero ($R = -1$) y (2) con amplitud constante y esfuerzo medio diferente de cero ($-1 < R \leq 1$). En la fig. 14-6 se representan estas dos condiciones. En ambos casos los resultados se basan en *un solo* valor del intervalo de esfuerzo, aplicado a lo largo de toda la duración de la probeta.

Sin embargo, en las condiciones de campo reales los elementos o estructuras generalmente se someten a *diferentes* niveles de esfuerzo, esfuerzos medios, etc., como se indica en la fig. 14-21. La forma más conveniente de determinar el comportamiento a la fatiga de elementos sometidos a la variedad de cargas que se muestra en la fig. 14-21 sería utilizar el mismo patrón de carga. Para algunas situaciones críticas realmente se hace esto. Sin embargo, el método más frecuente consiste en utilizar resultados de ensayos para amplitud constante junto con una teoría de daño acumulativo para predecir el comportamiento de elementos sometidos a condiciones de carga variables.

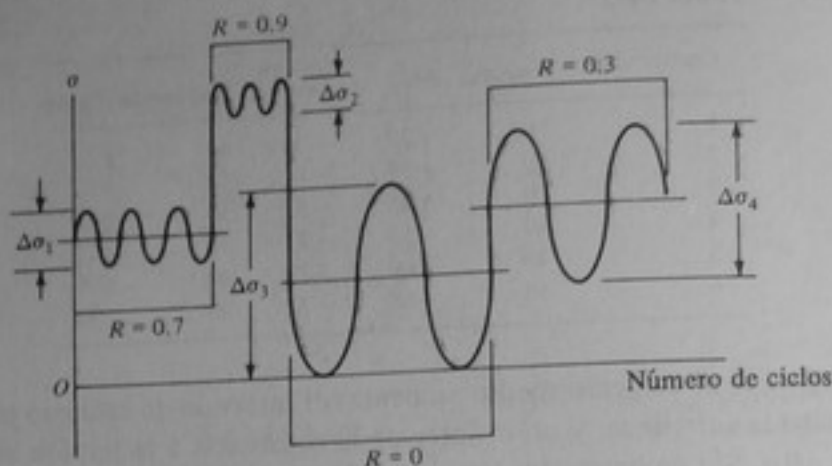


Figura 14-21 Representación gráfica de varios valores de R y de intervalos de esfuerzo en una carga de amplitud variable.

Uno de los métodos más empleados es la ley del daño acumulativo de Miner. En este método se supone que el "daño" (es decir, la pérdida de duración en fatiga) de un elemento en un nivel cualquiera de esfuerzo es aditivo, de tal modo que

$$\sum_{i=1}^{i=k} \frac{n_i}{N_i} = 1 \quad (14-9)$$

en donde k = número de niveles de esfuerzo diferentes en una secuencia de carga particular

i = i -ésimo nivel de esfuerzo en esta secuencia de carga

n_i = número de ciclos de carga en un nivel de esfuerzo σ_i (fig. 14-21)

N_i = duración en fatiga para un nivel de esfuerzo de σ_i (fig. 14-21)

Este análisis incluye la suposición de que no hay efecto de la *secuencia* de aplicación de la carga, es decir que

$$\frac{n_1}{N_1} + \frac{n_2}{N_2} + \frac{n_i}{N_i} = \frac{n_i}{N_i} + \frac{n_2}{N_2} + \frac{n_1}{N_1}$$

En realidad hay un efecto, particularmente en probetas con entallas, pero como una primera aproximación al análisis del daño acumulativo, la ley del daño acumulativo de Miner se usa ampliamente y es bastante exacta. Es decir que n_i/N_i puede variar aproximadamente entre 0.7 y 1.3, pero como primera aproximación se utiliza 1.0.

Ejemplo 14-2 Los siguientes valores de intervalo de esfuerzo, $\Delta\sigma$, y duración, N , se obtuvieron para una serie de probetas para ensayo de fatiga, de acuerdo con la fig. 14-22:

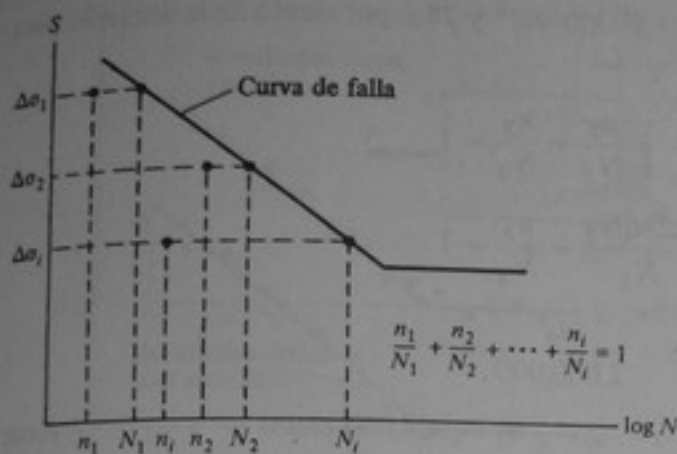


Figura 14-22 Relación gráfica de n_i y N_i para utilizarla en la relación del daño acumulativo de Miner.

$\Delta\sigma$, klb/pul^2	N , ciclos
40	100,000
30	700,000
20	2,000,000

Si un elemento fue "dañado" al ser cargado durante 40 000 ciclos con $\Delta\sigma = 40$ klb/pul^2 y 200 000 ciclos con $\Delta\sigma = 30$ klb/pul^2 , ¿cuántos ciclos adicionales de carga puede soportar con $\Delta\sigma = 20$ klb/pul^2 ?

SOLUCION El límite superior de carga con $\Delta\sigma = 20$ klb/pul^2 es 2 000 000 de ciclos, suponiendo que no haya daño. Como

$$\frac{n_1}{N_1} + \frac{n_2}{N_2} + \frac{n_3}{N_3} = 1$$

se tiene

$$\frac{40,000}{100,000} + \frac{200,000}{700,000} + \frac{n_3}{2,000,000} = 1$$

$$0.4 + 0.286 + \frac{n_3}{2,000,000} = 1$$

$$n_3 = 2,000,000(1 - 0.686)$$

$$n_3 = 628,000 \text{ ciclos}$$

Resp.

Entonces, después de haber sido "dañado" por las cargas parciales descritas anteriormente, este elemento particular puede soportar una carga adicional de 628 000 ciclos para $\Delta\sigma = 20$ klb/pul^2 .

A veces las cargas anteriores se expresan como porcentajes de la duración para cada nivel de esfuerzo. Por ejemplo, se ha aplicado una carga previa del 40 por

ciento de la duración para $\Delta\sigma = 40 \text{ klb/pul}^2$ y 28.6 por ciento de la duración para $\Delta\sigma = 30 \text{ klb/pul}^2$. Entonces,

$$\frac{n_1}{N_1} + \frac{n_2}{N_2} + \frac{n_3}{N_3} = 1$$

$$\text{o} \quad \frac{0.4N_1}{N_1} + \frac{0.286N_2}{N_2} + \frac{n_3}{N_3} = 1$$

$$0.4 + 0.286 + \frac{n_3}{2,000,000} = 1$$

$$\text{y} \quad n_3 = 628,000 \text{ ciclos} \quad \text{Resp.}$$

La duración total en fatiga es la suma de los valores individuales N_i , o sea que $N_T = \sum N_i$. La aplicación de la ley de Miner implica la falla.

14-5 FACTORES QUE AFECTAN EL COMPORTAMIENTO EN LA INICIACION DE LA FATIGA

Como se estableció en el capítulo 13, las concentraciones de esfuerzos de diferentes clases (entallas, agujeros, etc.) aumentan el esfuerzo cerca de ellas; por tanto, puede esperarse que afecten el comportamiento en la iniciación de la fatiga de un material. Generalmente, las entallas superficiales son las más severas debido a que:

1. Allí es donde se presenta la mayoría de defectos, imperfecciones, grietas, etc.
2. La mayoría de cargas *no* son perfectamente concéntricas; por consiguiente, se presentan esfuerzos de flexión que son máximos en la superficie.

De este modo, la duración en fatiga de un elemento con entalla se relaciona más con el esfuerzo *máximo* $\sigma_{\max} = K_T \sigma_{\text{PRO}}$ que con el esfuerzo promedio. No obstante, debido a la fluencia local en el extremo de una entalla, a los cambios metalúrgicos en el comportamiento del material sometido a cargas repetidas y a otros factores, la duración en fatiga *no* se reduce en todo el valor del factor teórico de concentración de esfuerzos, K_T , sino que se reduce en un factor menor denominado *factor efectivo de concentración de esfuerzos en fatiga*, K_F .

El factor K_F se determina experimentalmente. La fig. 14-23 muestra el efecto general de la geometría sobre el comportamiento de iniciación de la fatiga de un material estructural y una comparación de K_T y K_F . En este ejemplo, el factor teórico de concentración de esfuerzos, K_T , es igual a 2.5, pero la relación de esfuerzos en los límites de fatiga para las barras lisa y con entalla es 1.7. Esta relación se llama K_F y es igual a $\Delta\sigma_{\text{lisa}}/\Delta\sigma_{\text{con entalla}}$.

Una medida de la influencia de entallas suaves sobre el comportamiento de la iniciación de la fatiga es q , el factor de sensibilidad a la entalla:

$$q = \frac{K_F - 1}{K_T - 1} \quad (14-10)$$

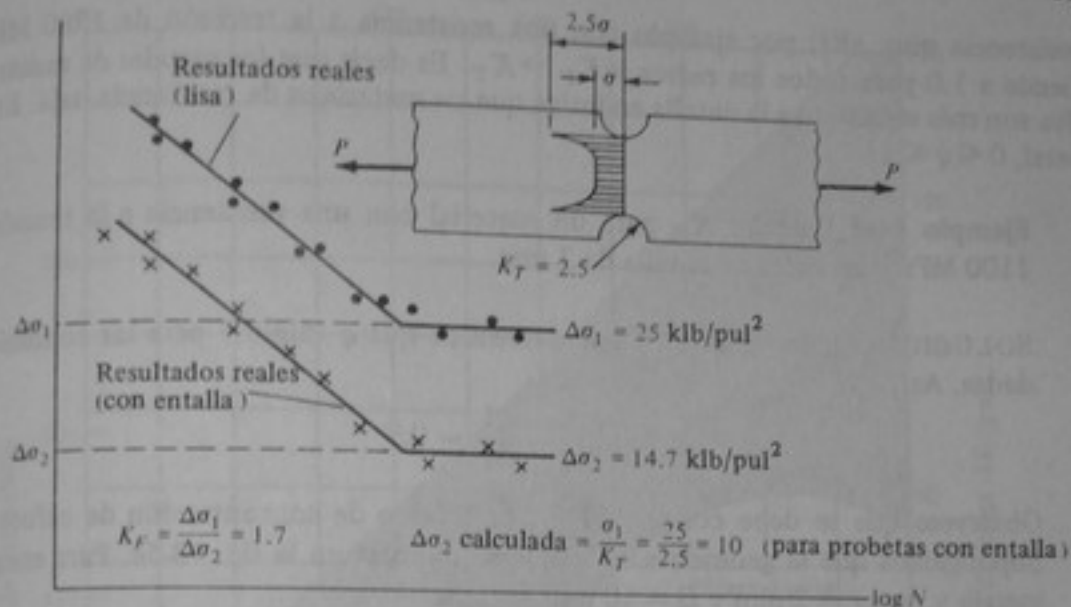


Figura 14-23 Representación gráfica del efecto de la geometría sobre el comportamiento $E-N$ y comparación de K_T y K_F .

en donde K_F es el factor efectivo de concentración de esfuerzos obtenido a partir de resultados experimentales mediante la siguiente relación:

$$K_F = \frac{\text{resistencia a la fatiga } (\sigma) \text{ de la probeta sin entalla para } N_i \text{ ciclos}}{\text{resistencia a la fatiga } (\sigma) \text{ de la probeta con entalla para } N_i \text{ ciclos}} \quad (14-11)$$

La figura 14-24 muestra el efecto del nivel de resistencia a la tensión y el radio de la entalla sobre el factor de sensibilidad a la entalla, q . Obsérvese que para metales de

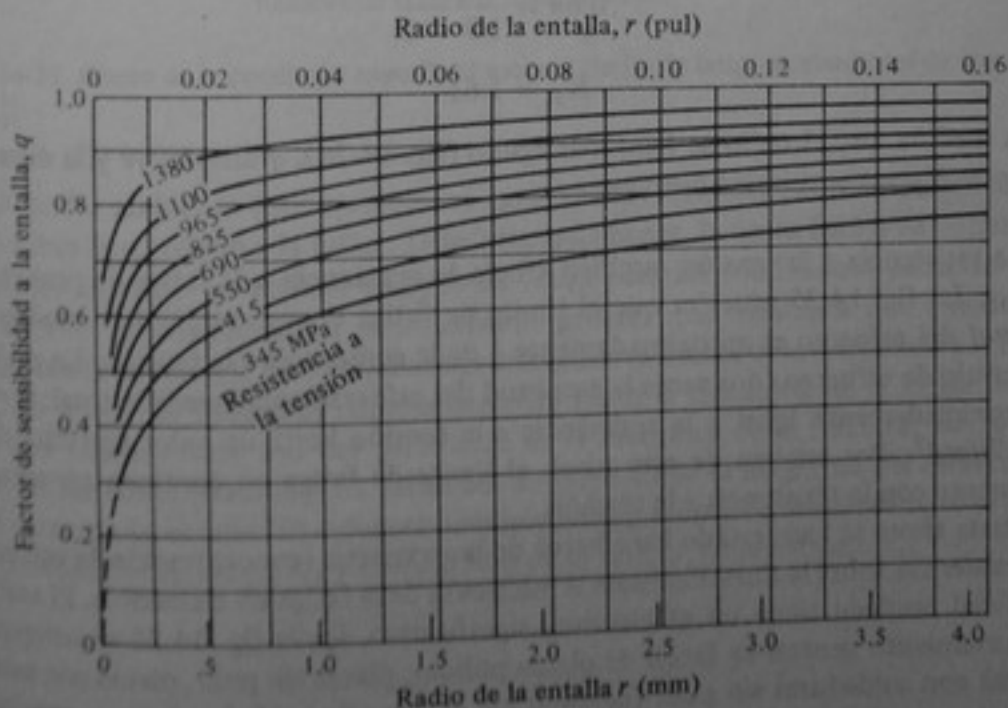


Figura 14-24 Efecto de la resistencia a la tracción y la agudeza de la entalla sobre la sensibilidad relativa a la entalla.

resistencia muy alta, por ejemplo con una resistencia a la tracción de 1380 MPa, q tiende a 1.0 para todos los radios y $K_F \rightarrow K_T$. Es decir que los metales de resistencia alta son más sensitivos a la entalla en fatiga que los materiales de resistencia baja. En general, $0 \leq q \leq 1$.

Ejemplo 14-4 Calcular K_F para un material con una resistencia a la tensión de 1100 MPa y un radio de entalla de 2 mm.

SOLUCION En la figura 14-24 se determina que q vale 0.9 para las condiciones dadas. Así,

$$q = \frac{K_F - 1}{K_T - 1} = 0.9$$

Obsérvese que se debe conocer el factor teórico de concentración de esfuerzos. Supongamos que la geometría es la que se muestra en la fig. 13-5a. Para esa geometría y para $r = 2$ mm y $D = 10$ mm se tiene

$$\frac{2r}{D} = \frac{2(2)}{10} = 0.4 \quad \text{y} \quad K_T = 1.9$$

Por consiguiente:
$$0.9 = \frac{K_F - 1}{1.9 - 1}$$

de suerte que $K_F = 1.81$ *Resp.*

Obsérvese que $K_F \cong K_T$ debido a la alta resistencia del material. Para la misma geometría, pero para un material con una resistencia a la tensión de 345 MPa y $q = 0.68$,

$$0.68 = \frac{K_F - 1}{1.9 - 1}$$

$$K_F = 1.61$$

A medida que el radio se hace más agudo (fig. 14-24), q disminuye y la diferencia entre K_F y K_T también disminuye.

La resistencia a la tensión también afecta la resistencia a la fatiga de probetas sin entallas. La fig. 14-25 muestra que el límite de fatiga de aceros, medido mediante la amplitud del esfuerzo es aproximadamente $\frac{1}{2}$ de la resistencia a la tensión. En realidad, el intervalo de esfuerzo (dos veces la amplitud del esfuerzo para inversión total; $R = -1$) es aproximadamente igual a la resistencia a la tensión hasta un valor aproximado de 150 klb/pul². Por encima de este nivel, el límite de fatiga no continúa aumentando linealmente con la resistencia a la tensión.

Hasta ahora se han tratado los efectos de la geometría (concentración de esfuerzos) y la resistencia sobre la duración hasta la iniciación de la fatiga en elementos. El acabado superficial también tiene un efecto muy significativo. En la fig. 14-26 se compara el comportamiento general en fatiga de placas pulidas, placas sin pulir, placas con entallas y placas con soldaduras sin pulir (dejando los excesos de soldadura). Estos resultados demuestran que el acabado superficial puede tener un efecto significativo sobre el comportamiento en fatiga de materiales estructurales.

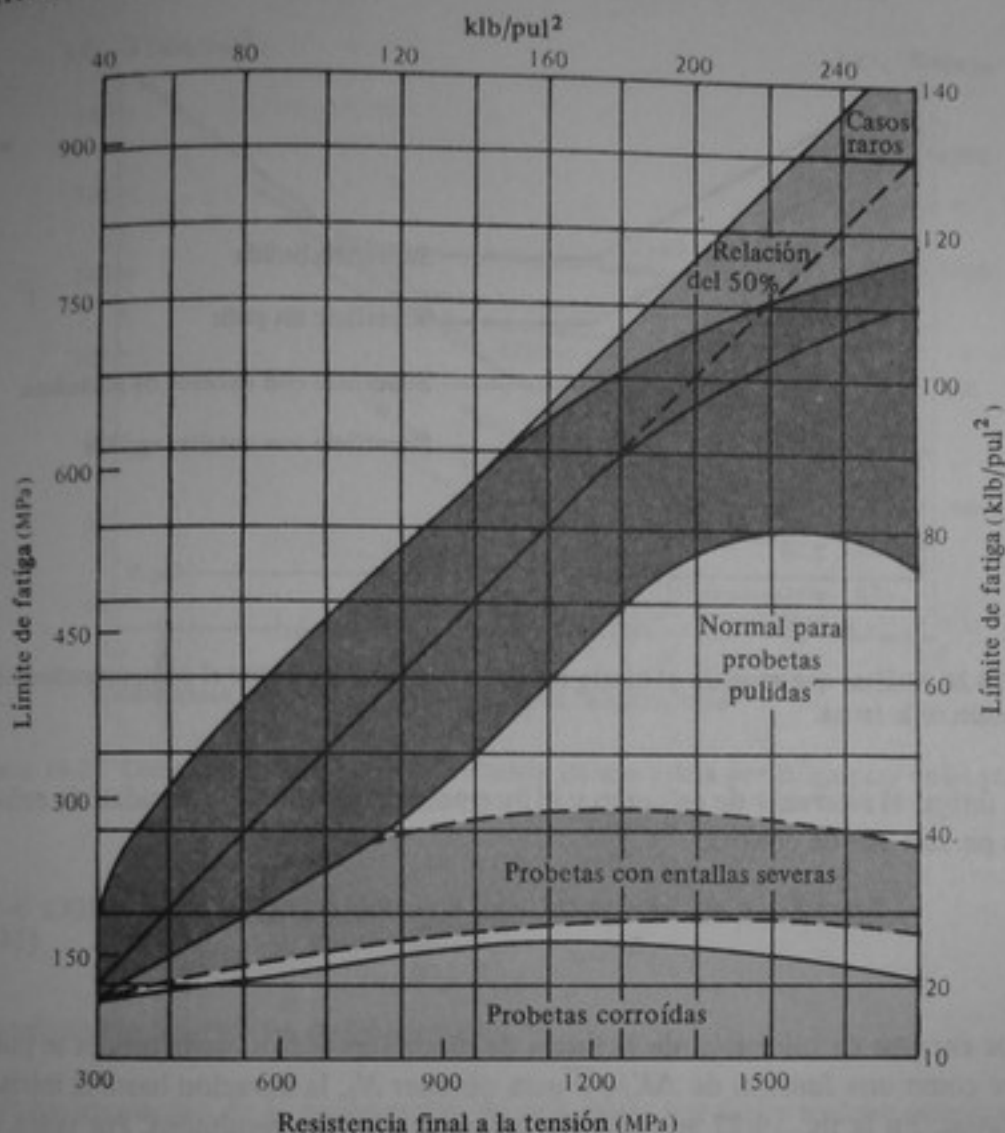


Figura 14-25 Efecto de la condición superficial sobre el límite de fatiga en aleaciones de acero.

El medio ambiente (por ejemplo, el agua salada) también tiene un efecto significativo sobre la duración a la fatiga. Desafortunadamente, la única forma de determinar este efecto consiste en realizar ensayos de fatiga para las condiciones particulares de interés. Sólo es posible hacer el enunciado general que establece que cuanto más severas sean la geometría y las condiciones ambientales, menor es la resistencia a la fatiga.

Otra forma de indicar el comportamiento hasta la iniciación de la fatiga de probetas con entallas hace uso del parámetro de la mecánica de la fractura, $\Delta K/\sqrt{\rho}$. El efecto de las concentraciones de esfuerzos es intensificar la magnitud del esfuerzo nominal cerca de la entalla. El esfuerzo máximo, σ_{max} , se puede relacionar con el factor de intensidad del esfuerzo, K_I y con el radio de la raíz, ρ , en la forma:

$$\sigma_{max} = \frac{2 K_I}{\sqrt{\pi} \sqrt{\rho}} \quad (14-12)$$

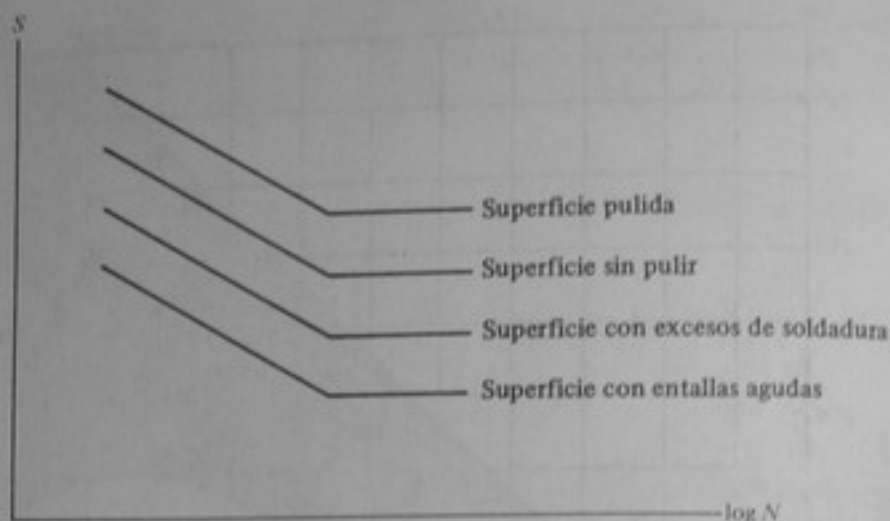


Figura 14-26 Gráfica que muestra el efecto del acabado superficial sobre el comportamiento hasta la iniciación de la fatiga.

Para la fatiga, el *intervalo* de esfuerzo y el *intervalo* del factor de intensidad de esfuerzo son los parámetros de control:

$$\Delta\sigma_{\max} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Delta K_I}{\sqrt{\rho}} \quad (14-13)$$

Los ensayos de iniciación de la fatiga de diferentes aceros estructurales se pueden obtener como una función de $\Delta K/\sqrt{\rho}$ para obtener N_i , la duración hasta la iniciación de la fatiga. En la fig. 14-27 se presentan ejemplos de estos resultados. Por tanto, otro método para predecir el comportamiento hasta la iniciación de la fatiga de probetas con entallas es analizar los resultados en función del parámetro $\Delta K/\sqrt{\rho}$.

Ejemplo 14-5 Una placa plana tiene una entalla en uno de sus bordes que tiene 2 pul de longitud y un radio en la raíz, ρ , de 0.10 pul. Si el intervalo de esfuerzo aplicado, $\Delta\sigma$, es 15 klb/pul² para un acero A517-F (fig. 14-27), determinar el número de ciclos necesario para que se inicie una grieta.

SOLUCION Con base en el análisis de una grieta en el borde (fig. 13-17),

$$\Delta K_I = 1.12 \Delta\sigma \sqrt{\pi a} = 1.12(15) \sqrt{3.14(2.0)}$$

$$\Delta K_I = 42 \text{ klb/pul}^2 \cdot \text{pul}^{1/2}$$

$$\frac{\Delta K}{\sqrt{\rho}} = \frac{42}{\sqrt{0.1}} = 133 \text{ klb/pul}^2$$

En la figura 14-27 se determina que $N_i = 110\,000$ ciclos.

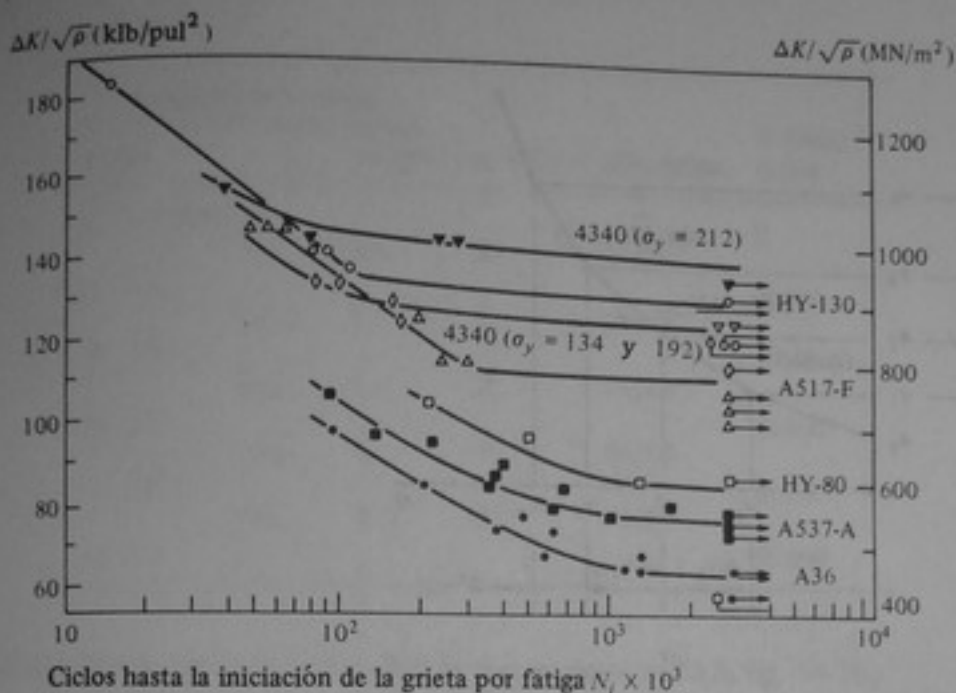


Figura 14-27 Comportamiento hasta la iniciación de una grieta por fatiga para diferentes aceros.

14-6 COMPORTAMIENTO EN LA PROPAGACION DE LA FATIGA

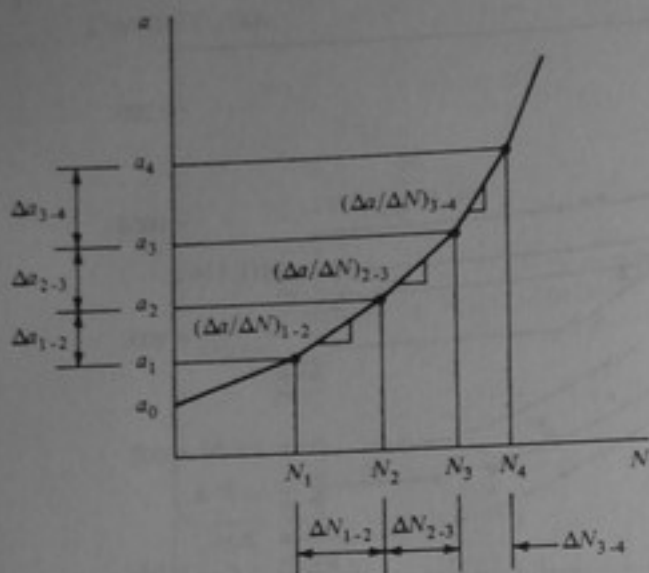
Procedimiento del ensayo de laboratorio

El comportamiento de la propagación de una grieta por fatiga se debe estudiar experimentalmente. La probeta para ensayos de laboratorio que más se emplea para analizar este comportamiento es la probeta con grieta en un borde, semejante a la que se muestra en la fig. 14-10. Es relativamente fácil iniciar el desarrollo de una grieta por fatiga a partir de una entalla profunda y aguda, tallada en la probeta. Una vez iniciada la grieta, se hacen mediciones del intervalo de esfuerzo, $\Delta\sigma$, la longitud de la grieta, a , y el número de ciclos de carga, N , a intervalos frecuentes, para analizar el comportamiento en la propagación de la fatiga.

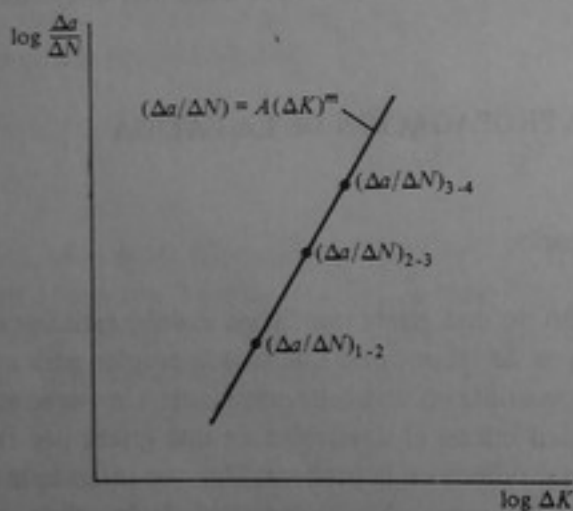
El primer paso en un estudio de propagación de una grieta por fatiga consiste en obtener valores de la longitud de la grieta, a , contra el número de ciclos de carga, N . El siguiente ejemplo describe el procedimiento utilizado para analizar los datos.

Ejemplo 14-6 Suponer que se han obtenido valores de la longitud de la grieta, a , y el número de ciclos de carga, N , en el ensayo de una probeta con longitud inicial de la grieta de 1.0 pul. Estos valores se presentan en la tabla 14-3 y se representan gráficamente en la fig. 14-28. Los valores de $\Delta\sigma$ se dan con base en un análisis de esfuerzo de la probeta ensayada.

Utilizando esta información se calcula la razón de crecimiento de la grieta, $\Delta a/\Delta N$, y el intervalo de intensidad del esfuerzo para cada incremento de longitud de la grieta, de la siguiente manera:



(a)



(b)

Figura 14-28 Gráfica que muestra el uso de los datos de propagación de la grieta por fatiga. (a) Determinación de $\Delta a/\Delta N$. (b) Determinación de $\Delta a/\Delta N = A(\Delta K)^m$.

para el primer incremento,

$$a_0 = 1.0$$

$$a_f = 1.1$$

$$\Delta a = 0.1$$

$$\Delta N = 20,000 \text{ (medidos para un crecimiento de la grieta de 0.1 pul)}$$

$$\frac{\Delta a}{\Delta N} = \frac{0.1}{20,000} = 5 \times 10^{-6} \text{ pul/ciclo}$$

Tabla 14-3

Longitud de la grieta		Δa , pul	$\Delta \sigma$, klb/pul ²	ΔN , ciclos	N total, ciclos
a , pul					
a_0	1.0 (inicial)				0
	Δa_{0-1}	0.1	20	20,000	
a_1	1.1				20,000
	Δa_{1-2}	0.1	21	18,000	
a_2	1.2				38,000
	Δa_{2-3}	0.1	22	14,000	
a_3	1.3				52,000
	Δa_{3-4}	0.1	23	10,000	
a_4	1.4				62,000
	Δa_{4-5}	0.1	23.5	8,000	
a_5	1.5				70,000

Para la probeta con grieta en un borde que se muestra en la fig. 14-10,

$$\Delta K = 1.12\sqrt{\pi} \Delta \sigma \sqrt{a_{\text{pro}}}$$

en donde
$$a_{\text{pro}} = \frac{a_0 + a_f}{2} = \frac{1.0 + 1.1}{2} = 1.05$$

Entonces,
$$\Delta K = 1.12(1.77)(20)\sqrt{1.05} = 40.6 \text{ klb/pul}^2 \cdot \text{pul}^{1/2}$$

Ahora se representan gráficamente los valores correspondientes de ΔK contra $\Delta a/\Delta N$ para todos los datos obtenidos, como se indica en la fig. 14-28. En la fig. 14-28a se representan los valores de $\Delta a/\Delta N$ para varios incrementos de la longitud de la grieta y los correspondientes valores ΔK se representan sobre una curva logarítmica en la fig. 14-28b.

Generalmente los resultados se pueden representar mediante una ecuación de la forma

$$\frac{da}{dN} = A(\Delta K)^m \quad (14-14)$$

en donde da/dN = razón de crecimiento de la grieta, pul/ciclo

A, m = propiedades del material

ΔK = intervalo del factor de intensidad del esfuerzo, $K_{\text{max}} - K_{\text{min}}$

En las figuras 14-29 y 14-30 se muestran resultados típicos de ensayos para diferentes materiales estructurales. Estos resultados se pueden utilizar para analizar el comportamiento a la fatiga de elementos estructurales o mecánicos reales, como se describe en la siguiente sección.

Propagación de la grieta por fatiga—Amplitud constante

En el estudio de la propagación de una grieta por fatiga siempre se supone que hay presente una grieta en un elemento cualquiera. Esta grieta puede ser iniciada por fatiga o puede deberse a un defecto de fabricación.

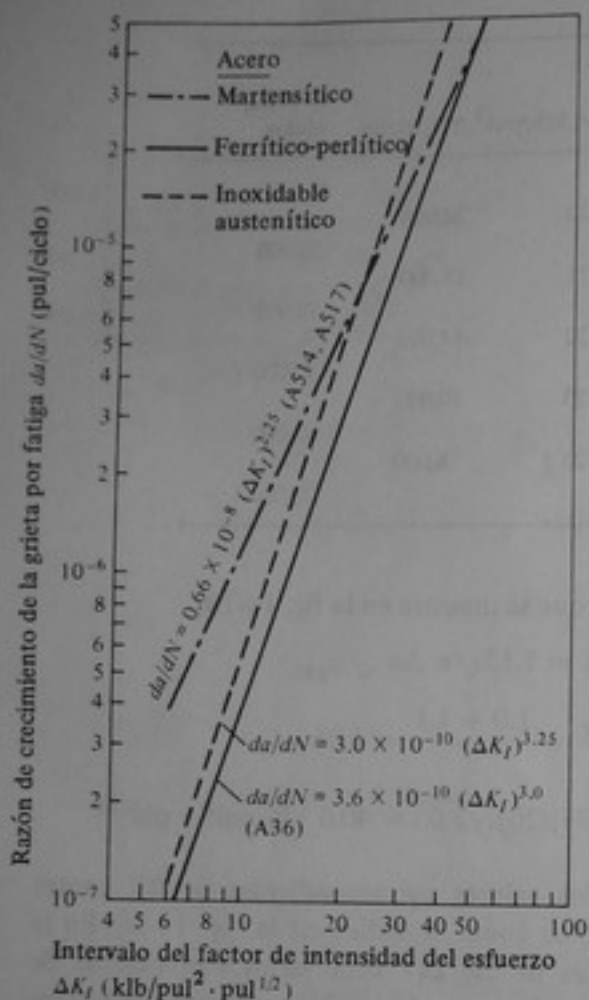


Figura 14-29 Datos representativos de la propagación de una grieta para aceros.

En las figuras 14-28 a 14-30 y en la ecuación (14-14) se indicó que el comportamiento de propagación de una grieta por fatiga de un material estructural se puede representar en la forma

$$\frac{da}{dN} = A(\Delta K)^m$$

De este modo, el factor principal que afecta el comportamiento durante el crecimiento de una grieta por fatiga es el intervalo de intensidad del esfuerzo, ΔK , dado por

$$\Delta K \approx C \Delta \sigma \sqrt{a} \quad (14-15)$$

en donde C = constante geométrica descrita en el capítulo 13.

$\Delta \sigma$ = intervalo de esfuerzo aplicado, klb/pul²

a = dimensión de la grieta (véase la fig. 13-17)

Este hecho es sumamente útil debido a que la ecuación (14-14) se puede utilizar para estimar la duración de propagación de un material, lo cual se hace de la siguiente manera:

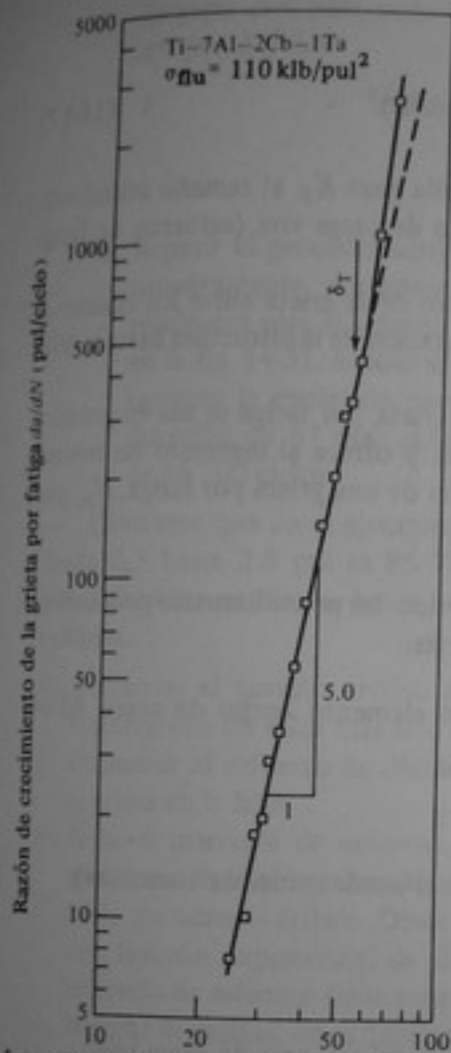


Figura 14-30 Datos de la propagación de una grieta para una aleación de titanio.

1. Con base en los procedimientos de inspección utilizados para determinar los tamaños de las grietas en una determinada clase de estructuras, estimar el tamaño inicial máximo de la grieta, a_0 , en la estructura. Determinar también la relación asociada, K_I (fig. 13-17) para el elemento que está siendo analizado.
2. Conociendo K_e o K_{Ic} y el esfuerzo de diseño máximo nominal, calcular el tamaño crítico de la grieta, a_{cr} , que produciría la falla por fractura frágil (capítulo 13).
3. Obtener una expresión que describa la razón de crecimiento de la grieta por fatiga del material analizado. Los siguientes estimativos conservativos de la razón de crecimiento de la grieta por fatiga por cada ciclo de carga, da/dN , se han determinado a la temperatura ambiente del recinto:

Aceros martensíticos (por ejemplo, A514 y A517):

$$\frac{da}{dN} = 0.66 \times 10^{-8} (\Delta K_I)^{2.25} \quad (14-16)$$

Aceros ferríticos-perlíticos (por ejemplo, A36):

$$\frac{da}{dN} = 3.6 \times 10^{-10} (\Delta K_I)^3 \quad (14-17)$$

- Determinar ΔK_I , utilizando la expresión adecuada para K_I , el tamaño inicial estimado de la grieta, a_0 , y el intervalo de esfuerzo de carga viva (esfuerzo de fatiga del ciclo).
- Integrar la expresión para la razón de crecimiento de la grieta entre los límites a_0 (en el K_I inicial) y a_{cr} (en K_{Ic}) para obtener la duración de la estructura hasta la falla.

Esta forma de estudiar la propagación de una grieta por fatiga se usa en prácticamente todos los tipos de aplicaciones estructurales y ofrece al ingeniero un método racional para predecir la duración de la propagación de una grieta por fatiga, N_p , para un conjunto determinado de condiciones.

Ejemplo 14-7 El presente es un ejemplo numérico del procedimiento para estimar la duración de propagación, con unidades inglesas.

- Suponer las siguientes condiciones para un elemento hecho de acero A514:

$$\sigma_y = 100 \text{ klb/pul}^2$$

$$K_{Ic} = 150 \text{ klb/pul}^2 \cdot \text{pul}^{1/2}$$

$$a_0 = 0.3 \text{ pul} \quad (\text{grieta en el borde sometida a tracción})$$

$$\sigma_{\max} = 45 \text{ klb/pul}^2$$

$$\sigma_{\min} = 25 \text{ klb/pul}^2$$

$$\Delta\sigma = 20 \text{ klb/pul}^2 \quad (\text{intervalo del esfuerzo de carga viva})$$

$$K_I = 1.12\sigma\sqrt{\pi a} \quad (\text{grieta en el borde sometida a tracción})$$

- Calcular a_{cr} para $\sigma = 45 \text{ klb/pul}^2$:

$$a_{cr} = \left(\frac{K_{Ic}}{1.12\sqrt{\pi}\sigma_{\max}} \right)^2 = \left(\frac{150}{1.12(1.77)(45)} \right)^2 = 2.8 \text{ pul}$$

- Suponer un incremento del tamaño de la grieta, $\Delta a = 0.1 \text{ pul}$. Si se suponen incrementos menores la exactitud aumenta ligeramente.
- Determinar la expresión para ΔK_I , en la cual a_{pro} representa el tamaño promedio de la grieta entre los dos incrementos a_i y a_j :

$$\begin{aligned} \Delta K_I &= 1.12\sqrt{\pi} \Delta\sigma\sqrt{a_{pro}} \\ &= 1.98(20)\sqrt{a_{pro}} \end{aligned}$$

- Utilizando la expresión adecuada para la razón de crecimiento de la grieta,

$$\frac{da}{dN} = 0.66 \times 10^{-8} (\Delta K_I)^{2.25}$$

despejar ΔN para cada incremento del tamaño de la grieta, reemplazando da/dN por $\Delta a/\Delta N$:

$$\Delta N = \frac{\Delta a}{0.66 \times 10^{-8} [1.98(20)\sqrt{a_{pro}}]^{2.25}}$$

$$= 12,500 \text{ ciclos}$$

6. Repetir el procedimiento para el incremento de a desde 0.4 hasta 0.5 y así sucesivamente, por integración numérica, como se indica en la tabla 14-4. Los resultados para el tamaño de la grieta y la duración en este ejemplo se presentan en la fig. 14-31. Si sólo se desea hallar la duración total, se puede integrar directamente la expresión para ΔN . En este ejemplo, la integración directa da una duración de 87 600 ciclos mientras que la técnica numérica da una duración de 86 700 ciclos.

Obsérvese que en el ejemplo 14-7, la duración total de propagación de una grieta desde 0.3 hasta 2.8 pul es 86 700 ciclos. Entonces, si se requiere una duración de 100 000 ciclos, el diseño no es adecuado y se debe hacer uno o más de los siguientes cambios:

1. Aumentar el tamaño crítico de la grieta en la falla ($a_{cr} = 2.8$ pul), utilizando el material con un valor más alto de K_{Ic} .
2. Disminuir el esfuerzo de diseño, σ_{dis} o σ_{max} , para aumentar el tamaño crítico de la grieta en la falla.
3. Bajar el intervalo de esfuerzo, $\Delta\sigma$, para disminuir la razón de crecimiento de la grieta, con lo cual se aumenta el número de ciclos necesario para que la grieta crezca hasta un tamaño crítico. Obsérvese que como la razón de crecimiento de la grieta es una función exponencial de $\Delta\sigma$, o, realmente, de ΔK , el disminuir ligeramente el intervalo de esfuerzo tiene un efecto significativo sobre la duración.
4. Mejorar la calidad de la fabricación y la eficacia de la inspección, de modo que se reduzca el tamaño inicial de la grieta, a_0 . Resulta claro en la tabla 14-4 y en la fig. 14-31 que la mayor parte de la duración está comprendida en las primeras etapas de la propagación de la grieta. En efecto, para duplicar el tamaño inicial de la grieta durante las primeras etapas de la propagación se necesita casi la mitad del número total de ciclos. Por consiguiente, cualquier disminución en el tamaño inicial de la grieta tiene un efecto *muy* significativo sobre la duración en fatiga de un elemento estructural.

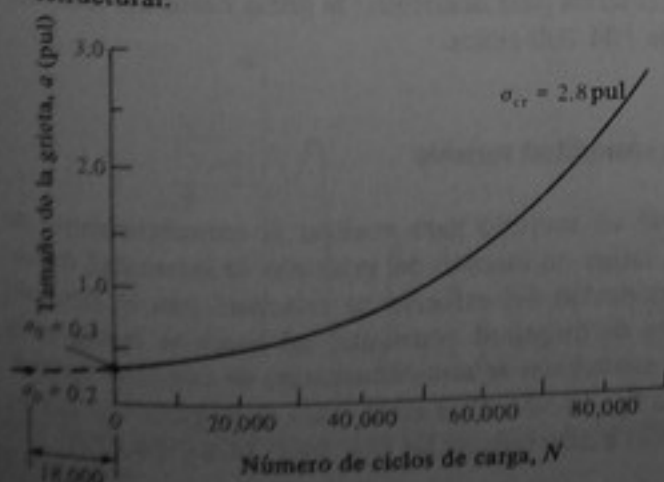


Figura 14-31 Curva de crecimiento de una grieta por fatiga para la etapa de propagación (ejemplo 14-6). Véase también la tabla 14-4.

Tabla 14-4 Cálculos del crecimiento de una grieta por fatiga para el ejemplo 14-7

a_0 , pul	a_f , pul	a_{pro} , pul	ΔK , klb/pul ² ·pul ^{1/2}	ΔN , [†] ciclos	$\sum N$, ciclos
0.3	0.4	0.35	23.5	12,500	12,500
0.4	0.5	0.45	26.7	9,750	22,250
0.5	0.6	0.55	29.4	7,550	29,800
0.6	0.7	0.65	32.2	6,150	35,950
0.7	0.8	0.75	34.6	5,200	41,150
0.8	0.9	0.85	36.6	4,600	45,750
0.9	1.0	0.95	38.8	4,100	49,850
1.0	1.1	1.05	40.5	3,700	53,550
1.1	1.2	1.15	42.5	3,300	56,850
1.2	1.3	1.25	44.5	2,950	59,800
1.3	1.4	1.35	46.1	2,700	62,500
1.4	1.5	1.45	47.7	2,550	65,050
1.5	1.6	1.55	49.3	2,350	67,400
1.6	1.7	1.65	51.0	2,200	69,600
1.7	1.8	1.75	52.5	2,050	71,650
1.8	1.9	1.85	54.0	1,900	73,550
1.9	2.0	1.95	55.6	1,800	75,350
2.0	2.1	2.05	56.8	1,700	77,050
2.1	2.2	2.15	58.5	1,600	78,650
2.2	2.3	2.25	59.6	1,500	80,150
2.3	2.4	2.35	60.8	1,450	81,600
2.4	2.5	2.45	62.5	1,400	83,000
2.5	2.6	2.55	63.5	1,350	84,350
2.6	2.7	2.65	64.8	1,200	85,550
2.7	2.8	2.75	66.0	1,150	86,700

$$^{\dagger} \Delta N = \Delta a / \{0.66 \times 10^{-8} [1.98(\Delta\sigma) \sqrt{\sigma_{pro}}]^{2.25}\}, \text{ en donde}$$

$$\Delta a = 0.10 \text{ pul y } \Delta\sigma = 20 \text{ klb/pul}^2$$

En el ejemplo 14-7, si a_0 fuera solamente 0.2 pul, el diseño sería satisfactorio. Es decir que el número de ciclos necesario para que la grieta crezca desde 0.2 hasta 0.3 pul es aproximadamente 18 000 ciclos, como se indica en la fig. 14-31. Cuando se suma este número a los 86 700 ciclos necesarios para desarrollar la grieta desde 0.3 hasta 2.8 pul, la duración total aumenta hasta 104 700 ciclos.

Propagación de la grieta por fatiga—Amplitud variable

En la sección anterior se describió un método para analizar el comportamiento de la propagación de una grieta por fatiga en función del intervalo de intensidad del esfuerzo, ΔK . Este intervalo de intensidad del esfuerzo se relacionó con el intervalo de esfuerzo, $\Delta\sigma$, para condiciones de amplitud constante, tal como se indica en la fig. 14-32a. Sin embargo, muchas estructuras se someten a cargas de amplitud variable o aleatoria, como se muestra en la fig. 14-32b. Para estos casos, la magnitud de $\Delta\sigma$ (y, por tanto, la de ΔK) varía de un ciclo a otro (véanse las figs. 14-7, 14-8 y 14-32b).

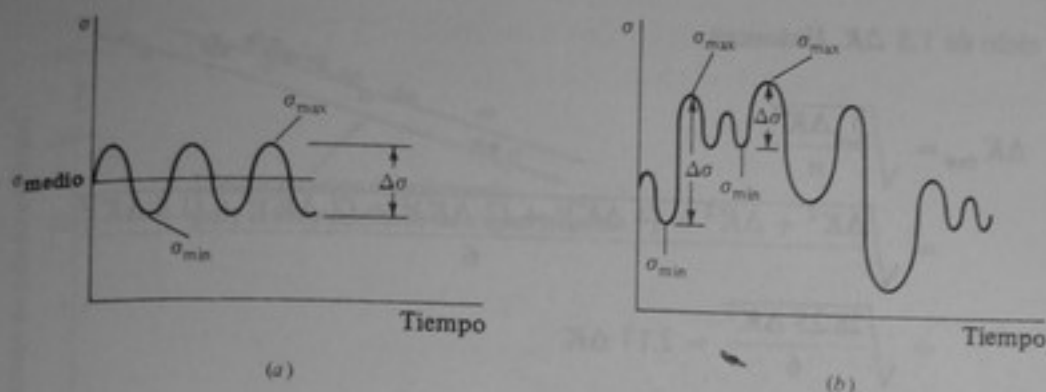


Figura 14-32 Comparación entre los ensayos de fatiga de amplitud constante y amplitud variable. (a) Amplitud constante (b) Amplitud variable.

Un método conveniente para analizar el comportamiento de la propagación de una grieta por fatiga bajo condiciones de carga de amplitud variable consiste en determinar el valor de la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de todos los intervalos reales del factor de intensidad del esfuerzo utilizados. Es decir, se calcula

$$\Delta K_{\text{rsc}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k (\Delta K_i)^2}{n}} \quad (14-18)$$

en donde K_{rsc} = raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los intervalos de intensidad del esfuerzo.

ΔK_i = intervalos individuales de intensidad del esfuerzo para carga de amplitud variable (fig. 14-32)

n = número de valores individuales ΔK_i

Teóricamente el comportamiento en fatiga de una probeta sometida a ΔK_{rsc} es equivalente al comportamiento de una probeta semejante sometida a la suma de los valores individuales de ΔK_i para amplitud variable.

Ejemplo 14-8 Suponer que una estructura se somete a las cargas ΔK que se representan en la fig. 14-33, es decir, dos ciclos de $1.0 \Delta K$, un ciclo de $4.0 \Delta K$, dos ciclos de $2.0 \Delta K$ y un

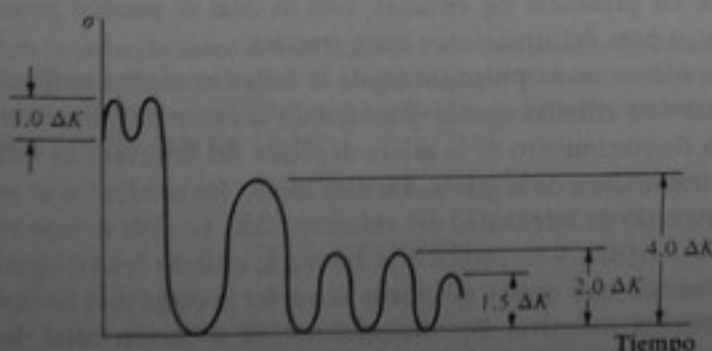


Figura 14-33 Representación gráfica de una carga de amplitud variable utilizada para calcular el valor de ΔK_{rsc}

ciclo de $1.5 \Delta K$. Entonces,

$$\begin{aligned} \Delta K_{\text{rsc}} &= \sqrt{\frac{\sum \Delta K^2}{n}} \\ &= \sqrt{\frac{\Delta K^2 + \Delta K^2 + (4 \Delta K)^2 + (2 \Delta K)^2 + (2 \Delta K)^2 + (1.5 \Delta K)^2}{6}} \\ &= \sqrt{\frac{28.25 \Delta K^2}{6}} = 2.17 \Delta K \end{aligned}$$

Para esta condición de carga de amplitud variable, el comportamiento en la propagación de la grieta por fatiga se determina utilizando ΔK_{rsc} ó $2.17 \Delta K$:

$$\frac{da}{dN} = A(\Delta K_{\text{rsc}})^m = A(2.17 \Delta K)^m$$

y siguiendo luego el procedimiento para determinar el comportamiento durante el crecimiento de la grieta por fatiga bajo carga de amplitud *constante*.

14-7 RESUMEN

La mayoría de elementos estructurales y mecánicos se someten a cargas repetidas o de fatiga en lugar de cargas de un solo ciclo. La carga de fatiga consiste en la aplicación y retiro continuos de una carga a lo largo de toda la duración de una estructura. El número de ciclos de carga necesario para iniciar una grieta se denomina duración hasta la iniciación de la fatiga, y el número de ciclos de carga que se necesita para desarrollar la grieta hasta un tamaño crítico se llama duración de propagación.

El comportamiento en la iniciación de la fatiga se analiza realizando ensayos de fatiga en probetas hasta la falla. Los resultados se representan gráficamente, ya sea como un intervalo de esfuerzo aplicado o un intervalo de deformación unitaria aplicado contra el número de ciclos hasta la falla. La falla se define generalmente como la iniciación del agrietamiento y es una función del intervalo de esfuerzo (o de deformación unitaria), la preparación superficial y la geometría local. El intervalo de esfuerzo se utiliza para carga elástica. El intervalo de deformación unitaria se utiliza para carga inelástica, ya sea en presencia de entallas, con lo cual se pueden presentar deformaciones inelásticas, o para deformaciones muy grandes.

El comportamiento en la propagación de la fatiga se analiza realizando ensayos de fatiga en probetas con entallas agudas y midiendo la razón de crecimiento de la grieta, da/dN . La razón de crecimiento de la grieta depende del intervalo de esfuerzo aplicado y de la longitud instantánea de la grieta. De este modo, los resultados se pueden analizar empleando el intervalo de intensidad del esfuerzo, ΔK . La falla ocurre cuando la grieta alcanza un tamaño crítico y se produce la fractura; cuando los esfuerzos se hacen tan grandes que la sección que queda no puede soportar la carga más tiempo, o cuando se presenta deformación excesiva. Por consiguiente, la duración total de un elemento estructural es igual a la suma de la duración hasta la iniciación de la fatiga y la duración de propagación.

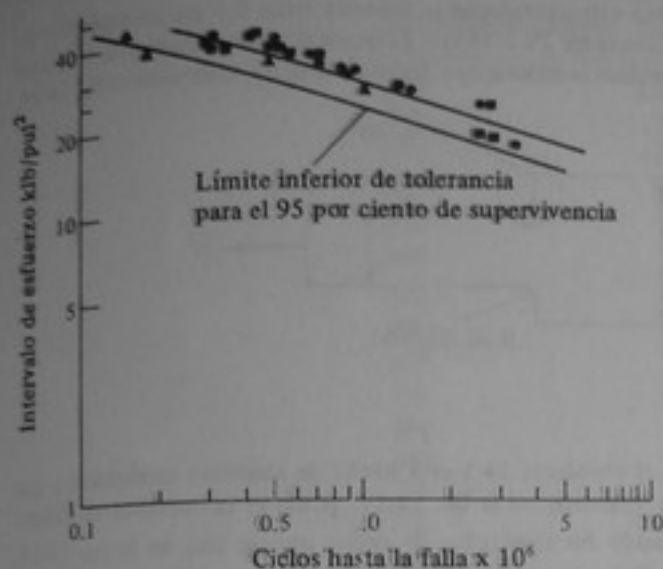


Figura 14-34 Intervalo de esfuerzo como una función de los ciclos de duración para un acero estructural.

PROBLEMAS

En varios problemas se debe hacer uso de la fig. 14-34, en la cual se representa una curva "de ajuste óptimo" adaptada a valores reales y un límite inferior de tolerancia para el 95 por ciento de supervivencia, es decir, una curva de diseño. Los resultados que se muestran son para un acero estructural que tiene una resistencia a la fluencia de 40 klb/pul^2 y una resistencia a la tracción de 70 klb/pul^2 (Nota: En los problemas 14-1 a 14-19, despreciar el efecto del esfuerzo medio en las figs. 14-34, 14-13 y 14-14).

14-1 Una barra rectangular de acero estructural con una sección transversal de $2 \times 3 \text{ pul}$ se somete a una carga axial de 60 klb con inversión completa. Utilizar la fig. 14-34 para determinar la duración en fatiga de la barra.

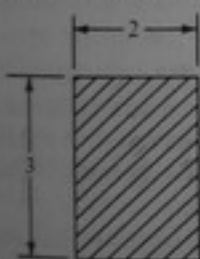


Figura P14-1

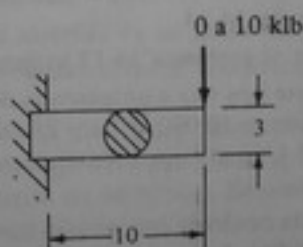


Figura P14-2

14-2 Una varilla redonda de acero estructural de 3 pul de diámetro actúa como una viga en voladizo y soporta una carga que varía de 0 a 10 klb . La longitud de la viga es 10 pul . Utilizando la fig. 14-34, determinar la duración en fatiga de la viga. Despreciar cualquier efecto de concentración de esfuerzos en la pared.

14-3 Una barra rectangular de acero estructural tiene las dimensiones indicadas y se debe utilizar como una viga simplemente apoyada con un tramo total de 10 m y con una carga cíclica de 0 a $12\,000 \text{ N}$ aplicada en el punto medio del tramo. ¿Cuál es la duración en fatiga de esta viga si su material es el que se describe en la fig. 14-34?

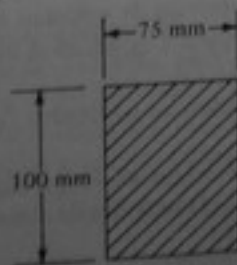


Figura P14-3

14-4 La barra plana escalonada de acero estructural que se muestra tiene 0.5 pul de espesor y soporta una carga de tensión axial con ciclos entre 20 y 35 klb. El factor de concentración de esfuerzos para la configuración dada es 2.44. Determinar la duración en fatiga de la barra, utilizando la fig. 14-34.

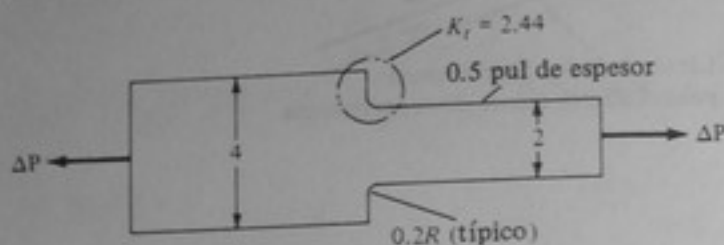


Figura P14-4

14-5 Suponga que la barra descrita en el problema 14-1 está hecha de aluminio estructural y que los resultados de la fatiga son los que aparecen en la fig. 14-14. ¿Cuál es la duración en fatiga?

14-6 Resolver el problema 14-2 utilizando los resultados de fatiga que se dan en la fig. 14-14.

14-7 Resolver el problema 14-3 utilizando los resultados de fatiga que se dan en la fig. 14-14.

14-8 Resolver el problema 14-4 utilizando los resultados de fatiga que se dan en la fig. 14-14.

14-9 Una barra con 1.5 pul de diámetro se usa como un elemento sometido a tracción axial en una estructura que debe tener una duración útil de 1.0×10^6 ciclos. ¿Cuál es el intervalo de carga máximo que puede soportar el elemento con seguridad, si se utiliza la curva de fatiga de la fig. 14-34?

14-10 Resolver el problema 14-9 utilizando los resultados de fatiga que se dan en la fig. 14-14.

14-11 Un elemento que tiene una sección transversal cuadrada de 25×25 mm y una longitud de 5 m se somete a una carga axial cíclica de 0 a 40 000 N. Si el elemento está hecho de un material que presenta los resultados de fatiga que se dan en la fig. 14-13, ¿Cuál es su duración en fatiga?

14-12 Se somete una viga a un intervalo de esfuerzo de flexión de 40 klb/pul² durante 17 000 ciclos, 30 klb/pul² durante 180 000 ciclos y 25 klb/pul² por el resto de su duración. Determinar el número de ciclos de 25 klb/pul² que supuestamente producirá la falla y la duración total esperada. Utilizar la fig. 14-34.

14-13 Resolver el problema 14-12 utilizando los resultados de fatiga que se dan en la fig. 14-14.

14-14 Se somete una viga a un intervalo de esfuerzo de flexión de 40 klb/pul² durante 7 000 ciclos, 30 klb/pul² durante 50 000 ciclos y 25 klb/pul² por el resto de su duración. Determinar el número de ciclos de 25 klb/pul² que supuestamente producirá la falla y la duración total esperada. Utilizar la fig. 14-13.

14-15 Una barra cuadrada con sección transversal de 2.5×2.5 pul y 20 pul de longitud se usa como una viga en voladizo. La barra debe tener una duración total de 2×10^6 ciclos. El intervalo de esfuerzo nominal es 18 klb/pul². Sin embargo, se sabe que se presentará una sobrecarga, concentrada en el extremo libre, durante aproximadamente el 15 por ciento del tiempo. ¿Cuál es el intervalo de carga máximo que puede ocurrir durante el 15 por ciento del tiempo sin disminuir la duración? La resistencia a la fluencia del material es 60 klb/pul². Utilizar la fig. 14-34 y despreciar K_T .

14-16 Resolver el problema 14-15 utilizando los resultados de fatiga de la fig. 14-14 si la sobrecarga se presenta aproximadamente durante el 20 por ciento del tiempo y se desea una duración total de 5×10^7 ciclos.

14-17 Se sabe que un elemento estructural tiene una duración total de 1.5×10^6 ciclos. Durante el 10 por ciento de la duración total, el intervalo de esfuerzo es de 30 klb/pul² y durante el 60 por ciento de la duración total, es de 20 klb/pul². ¿Cuál es el intervalo de esfuerzo para el resto de la duración? Utilizar la fig. 14-34.

14-18 Resolver el problema 14-17 utilizando los resultados de fatiga de la fig. 14-14 y una duración total de 3.0×10^7 ciclos.

14-19 Dado el siguiente conjunto de resultados de fatiga, calcular el valor medio, la mediana y la desviación normal para cada uno de los tres intervalos de esfuerzo indicados. ¿Cuál de los conjuntos cree usted que es más confiable? ¿Por qué?

Intervalo de esfuerzo	Duración, ciclos
100	1,000,000
100	800,000
100	1,100,000
150	600,000
150	550,000
150	700,000
200	50,000
200	40,000
200	35,000
200	62,000
200	60,000
200	52,000
200	50,000
200	45,000
200	41,000
200	45,000

14-20 Los resultados de fatiga que se muestran en la fig. 14-34 son para inversión completa ($R = -1$). Si una estructura está cargada de tal modo que el esfuerzo medio es 10 klb/pul^2 , ¿qué intervalo de esfuerzo puede soportar la estructura para 1 000 000 de ciclos de carga si $\sigma_{\text{máx}} = 40 \text{ klb/pul}^2$ y $\sigma_f = 70 \text{ klb/pul}^2$?

14-21 Resolver el problema 14-20 suponiendo un esfuerzo medio de 20 klb/pul^2 .

14-22 Resolver el problema 14-20 suponiendo un esfuerzo medio de 200 MPa .

14-23 Una placa plana de 25 mm de espesor y anchura semiinfinita está hecha de acero A36 (fig. 14-26); tiene una entalla en el centro de 4 pul de longitud, con un radio en la raíz de cada extremo igual a 0.15 pul . Si el intervalo de esfuerzo aplicado es 100 MPa , determinar el número de ciclos para iniciar una grieta por fatiga a partir de la entalla.

14-24 Resolver el problema 14-23 suponiendo que el material es un acero martensítico HY80.

14-25 ¿Cuál es el efecto de disminuir el intervalo de esfuerzo sobre el comportamiento de crecimiento de una grieta por fatiga?

14-26 Suponga un elemento estructural hecho de acero A517 con una resistencia a la fluencia de 100 klb/pul^2 y una K_{Ic} de $150 \text{ klb/pul}^2 \cdot \text{pul}^{1/2}$. Tomar $a_0 = 0.3 \text{ pul}$ (grieta en un borde), $\sigma_{\text{máx}} = 48 \text{ klb/pul}^2$, $\sigma_{\text{mín}} = 25 \text{ klb/pul}^2$ y $K_I = 1.12 \sigma \sqrt{a}$ (grieta en un borde). Determinar la duración en fatiga del elemento.

14-27 Resolver el problema 14-26 suponiendo que $a_0 = 0.4 \text{ pul}$.

14-28 Resolver el problema 14-26 suponiendo que $a_0 = 20.5 \text{ mm}$.

14-29 Suponga un elemento estructural de placa ancha, hecho de un acero A517 con una resistencia a la fluencia de 100 klb/pul^2 y una K_{Ic} de $200 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$. Se presenta una grieta de 10 mm en un borde, con $\sigma_{\text{máx}} = 400 \text{ MPa}$ y $\sigma_{\text{mín}} = 200 \text{ MPa}$. Determinar la duración en fatiga del elemento.

14-30 Determinar la duración en fatiga del elemento estructural descrito en el problema 14-29, si está hecho de acero A36 con una resistencia a la fluencia de 285 MPa , una K_{Ic} de $80 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$, $\sigma_{\text{máx}} = 200 \text{ MPa}$ y $\sigma_{\text{mín}} = 30 \text{ MPa}$.

14-31 Resolver el problema 14-30 suponiendo nuevamente que el elemento está hecho de acero A36 con una resistencia a la fluencia de 285 MPa , pero suponiendo además que se debe utilizar a una baja temperatura, para la cual $K_{Ic} = 50 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$.

14-32 Dadas las condiciones siguientes, calcular el número de ciclos necesario para desarrollar una grieta en un borde de una placa infinitamente ancha, desde $a_0 = 0.3 \text{ pul}$ hasta 0.5 pul :

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{máx}} &= 150 \text{ klb/pul}^2 & \Delta\sigma &= 20 \text{ klb/pul}^2 & \frac{da}{dN} &= 8 \times 10^{-8} (\Delta K)^{2.0} \\ K_{Ic} &= 75 \text{ klb/pul}^2 \cdot \text{pul}^{1/2} & \sigma_{\text{mín}} &= 40 \text{ klb/pul}^2 & \Delta a &= 0.05 \end{aligned}$$

14-33 Resolver el problema 14-32 utilizando los mismos datos, con la excepción de que $\Delta\sigma = 10 \text{ klb/pul}^2$.

14-34 Resolver el problema 14-32 suponiendo que $a_0 = 0.1 \text{ pul}$.

14-35 Resolver el problema 14-32 suponiendo que $a_0 = 0.05 \text{ pul}$ y que la longitud final de la grieta es igual a la longitud crítica para las condiciones dadas.

14-36 Dadas las condiciones siguientes, calcular el número de ciclos necesarios para desarrollar una grieta en un borde de una placa infinitamente ancha hasta la falla:

$$\sigma_{ys} = 100 \text{ klb/pul}^2$$

$$\Delta\sigma = 30 \text{ klb/pul}^2 \quad \frac{da}{dN} = 0.66 \times 10^{-8} (\Delta K_I)^{2.25}$$

$$K_k = 100 \text{ klb/pul}^2 \cdot \text{pul}^{1/2}$$

$$\sigma_{des} = 50 \text{ klb/pul}^2 \quad a_0 = 0.1 \text{ pul}$$

14-37 Resolver el problema 14-36 utilizando las mismas condiciones con la excepción de que $K_{Ic} = 150 \text{ klb/pul}^2 \cdot \text{pul}^{1/2}$.

Aplicaciones de los principios de la resistencia de materiales

15-1 INTRODUCCION

En este capítulo se trata el comportamiento de diferentes elementos mediante la consideración de varios criterios basados en el desempeño real. El objetivo principal de este capítulo es recalcar el hecho de que en el análisis de un elemento mecánico o estructural se deben probar diferentes criterios de diseño para determinar cuál es el que controla. Por ejemplo, el cálculo del esfuerzo nominal bajo condiciones de carga estática en un elemento idealizado no conduce necesariamente a una predicción exacta de su comportamiento real bajo las condiciones de servicio a su modo de falla final. Para saber cómo se va a comportar un elemento en la realidad, el ingeniero debe considerar el material empleado para fabricar el elemento y sus uniones, el efecto de las posibles grietas, discontinuidades y restricciones, así como las condiciones de servicio que se esperan. Puede resultar conveniente que los niveles de esfuerzo nominal o la capacidad de carga final controlen el diseño de un elemento. Sin embargo, es importante comprender que este procedimiento no presenta una visión exacta del comportamiento real de dicho elemento, especialmente si éste está sometido a cargas repetidas o a concentraciones de esfuerzos demasiado localizadas. En las siguientes secciones se estudia el comportamiento de varios elementos sencillos en relación con las posibles variaciones en material y dimensiones nominales, geometría (agujeros, cortes, entalles, grietas por soldadura, etc.) y condiciones de servicio (temperatura, velocidad de carga, repetición de la carga, etc.). La última sección es una introducción al análisis, diseño y comportamiento real de uniones.

15-2 ELEMENTOS AXIALES

Los elementos axiales se pueden cargar en tracción o en compresión. Su comportamiento bajo la carga y su modo de falla dependen de varios factores que se van a examinar. Las barras cargadas axialmente pueden fallar por (1) esfuerzo que sobrepase

el esfuerzo crítico del material, (2) fatiga debida a cargas repetidas, (3) inestabilidad bajo compresión o (4) fractura frágil. Enseguida se trata sobre estos cuatro tipos de comportamiento.

Comportamiento a la resistencia

Si una barra se somete a una carga axial P (fig. 15-1a), entonces, de acuerdo con el principio de Saint Venant, el esfuerzo nominal a alguna distancia del punto de aplicación de la carga es

$$\sigma_{\text{pro}} = \frac{P}{A} \quad (15-1)$$

Si la carga se conoce con buena precisión y la sección transversal es exacta, la ecuación (15-1) describe con exactitud el nivel de esfuerzo en, por ejemplo, la mitad de la altura.

Si lo que interesa es la falla o la seguridad contra la falla en esta sección, y la barra está hecha de un acero estructural bastante dúctil, como el A36, entonces, de acuerdo con el método de diseño del esfuerzo admisible,

$$FS = \frac{\sigma_{\text{flu}}}{\sigma_{\text{pro}}} = \frac{\sigma_{\text{flu}}}{P/A} \quad (15-2)$$

El método de diseño de la resistencia final da

$$FC = \frac{P_{\text{flu}}}{P} = \frac{\sigma_{\text{flu}} A}{\sigma_{\text{pro}} A} = \frac{\sigma_{\text{flu}}}{P/A} \quad (15-3)$$

Con base en estas dos ecuaciones se puede observar que los dos métodos de diseño conducen a la misma evaluación de la resistencia de la barra en la sección media. De acuerdo con el capítulo 10, la magnitud del margen de seguridad necesario depende de las posibles variaciones en la carga, P , en el área de la sección transversal, A , y en el valor del esfuerzo de fluencia, σ_{flu} . Hablando estrictamente, el margen de seguridad real en la sección media es mayor si se considera el *esfuerzo final*, σ_{fin} , o la *carga final*, P_{fin} , en lugar de la iniciación de la fluencia.

Si las únicas variaciones que se pueden evitar son las de la fuerza P , el área A y el valor de σ_{flu} , un margen de seguridad de, digamos, 1.5, probablemente sería muy alto. Por ejemplo, si se tiene la posibilidad de un 15 por ciento de sobrecarga, un 5 por ciento de subtamaño y un 10 por ciento de disminución en el esfuerzo de fluencia, el margen de seguridad debe ser

$$FS = FC = 1.15 \times 1.05 \times 1.10 = 1.33$$

Por otra parte, si estas variaciones pueden ser dos veces mayores, el margen de seguridad debe ser

$$FS = FC = 1.30 \times 1.10 \times 1.20 = 1.72$$

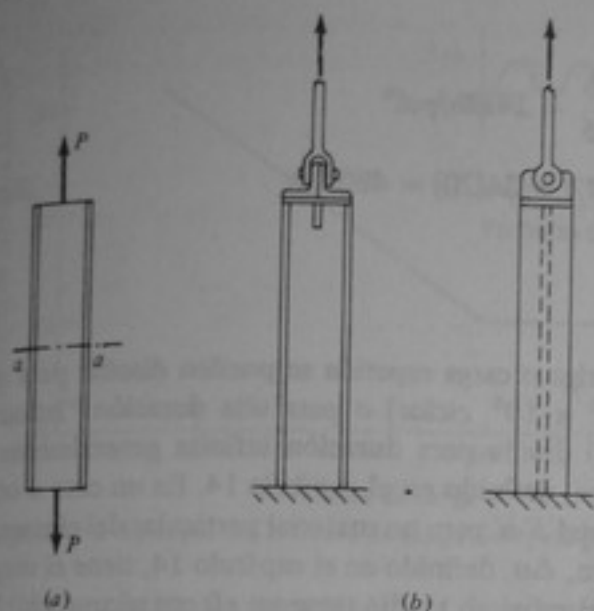


Figura 15-1 Elemento cargado axialmente.

Por lo general, los fabricantes de aceros tratan de garantizar que sus productos cumplan las normas mínimas especificadas y, en consecuencia, el esfuerzo de fluencia real usualmente es mayor que el especificado. Si se considera nuevamente la segunda combinación de variaciones, pero el esfuerzo de fluencia es 20 por ciento más alto que el especificado, se necesita un margen de seguridad de

$$FS = FC = 1.30 \times 1.10 \times 0.80 = 1.14$$

Si consideramos ahora el comportamiento de la barra en el punto de aplicación de la carga y suponemos que la carga es concentrada, como se muestra en la fig. 15-1a, entonces, el esfuerzo real en el punto de aplicación de la carga es infinito; esto implica la falla local en forma de fluencia. En un diseño real la carga se aplica mediante alguna clase de unión (fig. 15-1b) que distribuye la carga. No obstante, a menos que la unión sea infinitamente rígida, se presentará algún esfuerzo localizado superior al esfuerzo medio, que puede producir fluencia local. Desde el punto de vista del diseño por esfuerzo admisible, estos esfuerzos altos localizados exigen que se reduzca más la carga admisible, P . Desde el punto de vista de la resistencia final, cuando ocurre fluencia local hay una redistribución de los esfuerzos, mientras que para una carga P_{flu} igual a $\sigma_{flu}A$ la distribución de esfuerzos sería aproximadamente uniforme e igual a σ_{flu} . Que la redistribución de esfuerzos realmente tenga lugar depende de varios factores, tales como la ductilidad del material y especialmente su tenacidad a la entalla cerca a posibles grietas por soldadura, discontinuidades o agujeros para pernos (según el tipo de unión empleado). Sin embargo, si el área de contacto es menor que A , aunque el esfuerzo sea uniformemente distribuido, el valor de P_{flu} será menor que el que resulta de la ecuación (15-3).

Ejemplo 15-1 Considerar un perfil W14 X 68 de acero A36 sometido a tracción, con un $FS = 1.5$. ¿Cuál es la carga admisible?

SOLUCION

$$\sigma_{adm} = \frac{36}{1.5} = 24 \text{ klb/pul}^2$$

$$P_{adm} = 24A = 24(20) = 480 \text{ klb}$$

Resp.

Comportamiento a la fatiga

Los elementos axiales sometidos a fatiga o carga repetida se pueden diseñar para una duración "finita" (por ejemplo, 10^3 a 10^6 ciclos) o para una duración "infinita" (por ejemplo, más de 10^6 ciclos). El diseño para duración infinita generalmente se efectúa por debajo del límite de fatiga, definido en el capítulo 14. En un caso u otro, se debe obtener una curva experimental $E-N$ para un material particular del elemento. Generalmente, el intervalo de esfuerzo, $\Delta\sigma$, definido en el capítulo 14, tiene el mayor efecto sobre la duración en fatiga y el esfuerzo medio tiene un efecto secundario. Por tanto, la mayoría de las curvas $E-N$ están dadas en función del intervalo de esfuerzo. En este caso, el efecto del esfuerzo medio se desprecia y no se emplean los diagramas de Goodman.

Las curvas $E-N$ pueden ser de dos tipos generales:

1. Resultados para probetas lisas y pulidas que dan una indicación de las propiedades básicas para fatiga del material. Se debe utilizar un factor de concentración de esfuerzos en fatiga, K_F , para la geometría local particular del elemento axial (sin pulir, con entallas, soldado, etc.) con el fin de obtener un intervalo de esfuerzo apropiado, $\Delta\sigma$, para utilizarlo con la curva $E-N$:

$$\Delta\sigma = K_F(\Delta\sigma)_{nom} \quad (15-4)$$

En donde $(\Delta\sigma)_{nom}$ = intervalo de esfuerzo calculado a partir de $\Delta P/A$

$$\Delta P = P_{max} - P_{min}$$

K_F = factor efectivo de concentración de esfuerzos en fatiga
para la geometría particular usada

2. Resultados para elementos reales sin pulir con superficies y condiciones de entalle reales.

Ejemplo 15-2 Dada la curva $E-N$ que se muestra en la fig. 15-2 para probetas pulidas, determinar el intervalo máximo de carga que puede soportar un elemento axial, redondo y liso (área = 10.0 pul^2) para una duración "infinita".

SOLUCION El límite de fatiga es 10 klb/pul^2 y la superficie real es lisa; de modo que $K_F = 1.0$. Si el elemento se somete a esfuerzo desde 0 hasta 9 klb/pul^2 (por debajo del límite de fatiga), la duración debe ser infinita. Entonces,

$$\Delta\sigma = 9 = \frac{\Delta P}{A}$$

$$\Delta P = 9(10) = 90 \text{ klb}$$

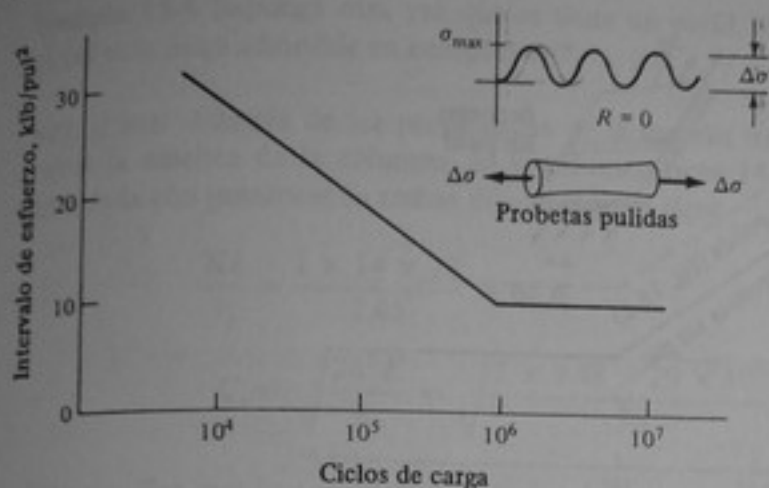


Figura 15-2 Ejemplo 15-2. Curva de fatiga $E-N$ para probetas pulidas (tipo general 1).

Con un factor de seguridad de 1.5, la carga de diseño para duración "infinita" debe ser

$$P_{\text{dis}} = \frac{90}{\text{FS}} = \frac{90}{1.5} = 60 \text{ klb}$$

(En este caso, $P_{\text{min}} = 0$.)

Si el elemento real tuviera una entalla tal que $K_F = 1.3$, la carga admisible se hallaría de la siguiente manera:

$$\text{Límite de fatiga} = 9 \text{ klb/pul}^2$$

$$\text{curva } E-N = 9 = K_F \text{ nom}$$

Por consiguiente, $\sigma_{\text{nom}} = 9/1.3 = 6.9 \text{ klb/pul}^2$ y la carga máxima P sería

$$P = 6.9(10) = 69 \text{ klb}$$

(suponiendo $P_{\text{min}} = 0$). Aplicando el factor de seguridad de 1.5 como antes, se obtiene la carga de diseño para duración "infinita":

$$P_{\text{dis}} = \frac{69}{1.5} = 46 \text{ klb}$$

De este modo, la barra lisa puede soportar un infinito número de ciclos de carga entre 0 y 60 klb, mientras que la barra con concentración de esfuerzos de 1.3 puede soportar un infinito número de ciclos de carga entre 0 y 46 klb.

Ejemplo 15-3 Dada la curva $E-N$ de la fig. 15-3, determinada para elementos reales sin pulir, hallar el intervalo máximo de carga que puede soportar un elemento con un área de 10.0 pul^2 para una duración infinita.

SOLUCION El límite de fatiga para elementos reales sin pulir es 5 klb/pul^2 , de modo que se puede aplicar un esfuerzo de 4 klb/pul^2 durante un número "infinito"

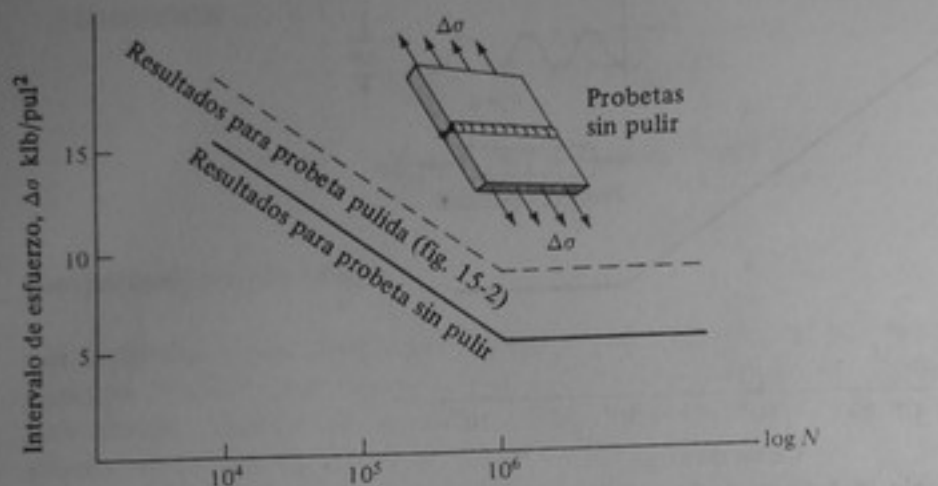


Figura 15-3 Ejemplo 15-3. Curva de fatiga $E-N$ para probetas sin pulir (tipo general 2).

de veces. Como se utilizaron probetas sin pulir, el efecto de cualquier concentración de esfuerzos ya está incluido en los resultados $E-N$. Así,

$$P = \sigma A = 4(10) = 40 \text{ klb}$$

Utilizando el mismo factor de seguridad de 1.5 se obtiene

$$P_{\text{dis}} = \frac{40}{1.5} = 26.7 \text{ klb} \quad \text{Resp.}$$

Si la duración de diseño fuera de solo 10^4 ciclos, se podría aplicar un esfuerzo de 15 klb/pul^2 , el cual conduce a una carga $P = \sigma A = 15(10) = 150 \text{ klb}$. Entonces, para un factor de seguridad de 1.5,

$$P_{\text{dis}} = \frac{150}{1.5} = 100 \text{ klb} \quad \text{Resp.}$$

Obsérvese que si se puede determinar un factor efectivo de concentración de esfuerzos en fatiga K_F , para la geometría real, el uso de una curva $E-N$ para probetas lisas y pulidas (de tipo 1) resulta fácil. Sin embargo, los valores de K_F no son fáciles de obtener ni muy confiables.

Si hay una grieta aguda preexistente, no se puede utilizar una curva $E-N$ para determinar la duración de servicio. En su lugar, se supone que la grieta se propagará y la duración de propagación de la grieta se determina como se indica en el capítulo 14. Obsérvese que en estos ejemplos se utiliza el intervalo de esfuerzo, mientras que los efectos del esfuerzo medio (que son secundarios) se desprecian.

Comportamiento a la estabilidad

Si una barra se carga axialmente en compresión, su esbeltez, más que su resistencia a la fluencia, es la que determina el esfuerzo crítico.

Ejemplo 15-4 Suponga otra vez que se tiene un perfil W14 X 68 de acero A36. ¿Cuál es la carga admisible en compresión?

SOLUCION Además de las propiedades de la sección transversal, se debe determinar la esbeltez de la columna. Si la columna tiene 14 pies de longitud y está articulada con pasadores en ambas direcciones, se tiene

$$\frac{KL}{r_y} = \frac{1 \times 14 \times 12}{2.45} = 68.6$$

$$y \quad C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_y}} = \sqrt{\frac{2 \times 9.48 \times 29 \times 10^3}{36}} = 126.1$$

Esto significa que hay pandeo inelástico y las ecuaciones (12-21) y (12-22) de la AISC dan

$$FS = \frac{5}{3} + \frac{3(68.6)}{8(126.1)} - \frac{(68.6)^3}{8(126.1)^3} = 1.85$$

$$y \quad \sigma_{adm} = \frac{\{1 - (68.6)^2/[2(126.1)^2]\}36}{1.85} = 16.6 \text{ klb/pul}^2$$

Entonces, la carga admisible es

$$P_w = 16.6(20) = 332 \text{ klb} \quad \text{Resp.}$$

Compárese esta carga con la carga admisible de trabajo en tracción de 480 klb.

Comportamiento a la fractura

Los elementos axiales que tienen concentraciones de esfuerzos, discontinuidades o grietas severas y que están cargados a temperaturas de servicio a las cuales pueden ocurrir fracturas frágiles, pueden sufrir este tipo de fracturas. Para analizar la susceptibilidad a la falla de un elemento cargado axialmente se debe obtener la siguiente información:

1. El nivel de esfuerzo nominal, $\sigma = P/A$, despreciando el efecto de la grieta aguda. Si el campo de esfuerzo se cambia debido a una concentración de esfuerzos adicional, por ejemplo, una grieta que se desarrolla a partir de un agujero, utilícese $\sigma = K_t P/A$, en donde K_t es el factor de concentración de esfuerzos para el agujero. En este caso, la longitud de la grieta, a , debe medirse desde el borde del agujero.
2. La tenacidad a la fractura del material del elemento para la temperatura de servicio y velocidad de carga particulares. Idealmente, la tenacidad debería expresarse en función del factor crítico de intensidad del esfuerzo, K_{Ic} , K_c o K_{Ia} .
3. El tamaño y la geometría de la grieta y la relación correspondiente, K_I , para la geometría particular de la grieta.

Utilizando la información anterior se calcula K_I y se compara con el valor adecuado de K_{Ic} , K_c o K_{Ia} .

Ejemplo 15-5 Una placa plana tiene una grieta de 2 pul de profundidad en un borde. El área neta de la sección transversal de la placa es 40 pul². La tenacidad a la fractura para carga estática y de impacto es la que se muestra en la fig. 15-4 y el material tiene una resistencia a la fluencia de 40 kbl/pul². Determinar las cargas reales de falla para las siguientes condiciones:

- Temperatura de servicio = -80°F; carga lenta; esfuerzo nominal de diseño de 20 kbl/pul². La carga nominal de diseño es $P = \sigma A = 20(40) = 800$ kbl.
- Temperatura de servicio = 0°F; carga lenta; esfuerzo nominal de diseño de 20 kbl/pul². La carga nominal de diseño es 800 kbl.
- Temperatura de servicio = 0°F; carga de impacto; esfuerzo nominal de diseño de 20 kbl/pul². La carga nominal de diseño es 800 kbl.
- Temperatura de servicio = 0°F; carga de impacto hasta el nivel de fluencia total (40 kbl/pul²). La carga nominal de diseño (de fluencia) es $P = \sigma_{flu} A = 40(40) = 1600$ kbl. Para este caso, calcular el tamaño de la grieta que producirá fractura a un nivel de esfuerzo de 40 kbl/pul².

SOLUCION

- Con base en los resultados representados en la fig. 15-4, K_{Ic} (carga lenta) en -80°F es igual a 50 kbl/pul² · pul^{1/2}. Para una grieta en un borde,

$$K_{I,dis} = 1.12\sigma\sqrt{\pi a}$$

(Véase el capítulo 13). Entonces,

$$K_{I,dis} = 1.12(20)\sqrt{\pi(2)} = 56 \text{ kbl/pul}^2 \cdot \text{pul}^{1/2}$$

Como $K_I < K_{Ic}$, la falla ocurrirá antes de que se pueda alcanzar la carga de diseño de 800 kbl. En la falla,

$$K_I = K_{Ic} = 1.12\sigma\sqrt{\pi a}$$

$$50 = 1.12\sigma\sqrt{\pi(2)}$$

$$\sigma = \frac{50}{1.12(2.51)} = 17.8 \text{ kbl/pul}^2 \text{ (esfuerzo en la falla)}$$

$$P_{falla} = \sigma A = 17.8(40) = 712 \text{ kbl (carga real en la falla)} \quad \text{Resp.}$$

La carga de diseño no se puede alcanzar debido a que

$$P_{dis} = 20(40) = 800 \text{ kbl} \quad \text{Resp.}$$

- Para 0°F, $K_{Ic} < 80$ kbl/pul² · pul^{1/2} y $K_{I,dis}$, como en la parte a, es 56 kbl/pul² · pul^{1/2}. Como $K_{Ic} < K_I$, no ocurrirá falla.

La carga que se puede soportar a 0°F, aplicada en forma lenta, es

$$K_I = K_{Ic} = 80 = 1.12\sigma\sqrt{3.14(2)}$$

$$\sigma = \frac{80}{1.12(2.51)} = 28.5 \text{ kbl/pul}^2$$

$$P_{falla} = \sigma A = 28.5(40) = 1138 \text{ kbl} \quad \text{Resp.}$$

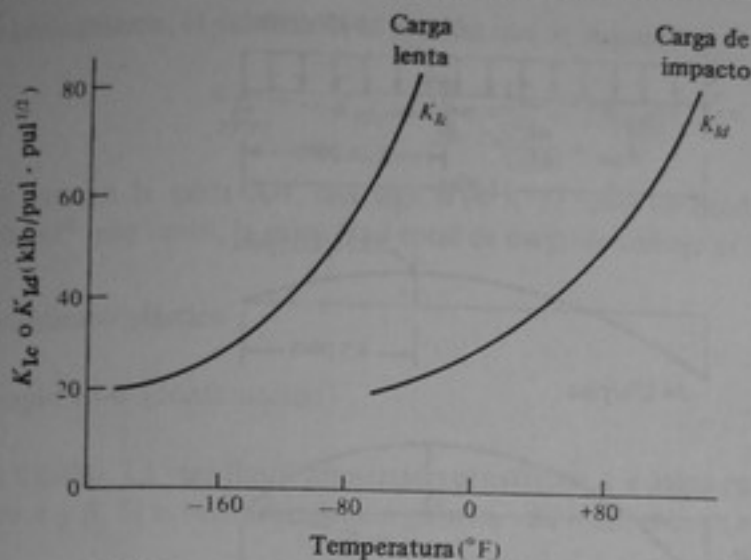


Figura 15-4 Resultados típicos de tenacidad a la fractura para un acero estructural con $\sigma_{\text{flu}} = 40 \text{ klb/pul}^2$.

- (c) $K_{I,d} = 30 \text{ klb/pul}^2 \cdot \text{pul}^{1/2}$ para carga de impacto o *dinámica* y, como antes, $K_{I,\text{dis}} = 56 \text{ klb/pul}^2 \cdot \text{pul}^{1/2}$. Como $K_I < K_{Ic}$, la falla se presentará mucho antes de alcanzar la carga de diseño de 800 klb. La carga real de falla se presenta cuando $K_I = K_{I,d} = 30 \text{ klb/pul}^2 \cdot \text{pul}^{1/2}$. De este modo,

$$30 = 1.12\sigma\sqrt{\pi(2)}$$

$$\sigma = \frac{30}{1.12(2.51)} = 10.7 \text{ klb/pul}^2$$

$$P_{\text{falla}} = \sigma A = 10.7(40) = 428 \text{ klb} \quad \text{Resp.}$$

- (d) Para 0°F , $K_{I,d} = 30 \text{ klb/pul}^2 \cdot \text{pul}^{1/2}$ y

$$K_{I,\text{dis}} = 1.12\sigma\sqrt{\pi a} = 1.12(40)\sqrt{\pi(2)} = 112 \text{ klb/pul}^2 \cdot \text{pul}^{1/2}$$

Así, $K_{I,\text{dis}} \gg K_{I,d}$ y la falla ocurrirá mucho antes de alcanzarse la carga de diseño. Sin embargo, si el tamaño de la grieta es mucho menor de 2 pul, no puede ocurrir falla. Específicamente,

$$K_{I,\text{dis}} = K_{I,d} = 30 = 1.12(40)\sqrt{\pi a}$$

$$a_{\text{cr}} = \left(\frac{30}{1.12(40)}\right)^2 \frac{1}{\pi} = 0.14 \text{ pul} \quad \text{Resp.}$$

para $\sigma_{\text{dis}} = 40 \text{ klb/pul}^2$. Por tanto, para un tamaño de la grieta menor de 0.14 pul, no debe ocurrir fractura frágil si el nivel de esfuerzo es 40 klb/pul^2 .

15-3 VIGAS

El diseño de vigas se puede regir completamente con unos pocos criterios. Por ejemplo, debido al desarrollo de los materiales de resistencia alta, los perfiles más livianos, utilizados como vigas, se pueden calcular con base en la resistencia, pero también puede

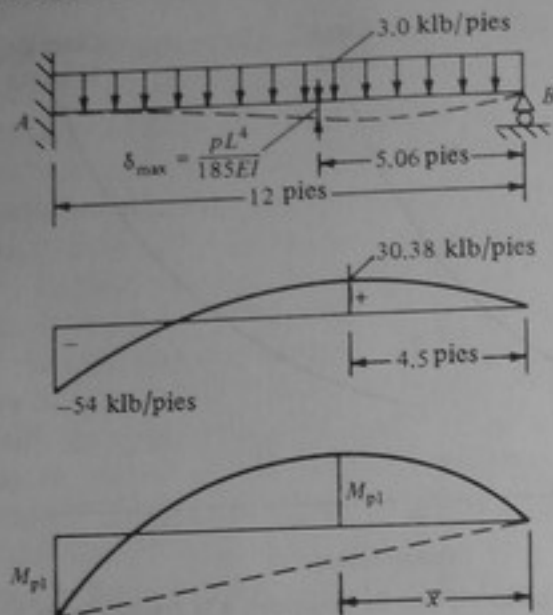


Figura 15-5 Ejemplo 15-6.

sucedan que sea la estabilidad y las deflexiones las que controlen el diseño final. Como no se ha tratado la estabilidad lateral por torsión de vigas sometidas a flexión, esta inestabilidad (así como la inestabilidad local) no se consideran aquí. Sin embargo, se considerarán otros cinco patrones de falla para vigas, que son:

1. Sobrepasar el esfuerzo crítico del material.
2. Sobrepasar la capacidad de carga final.
3. Ocurrencia de deformaciones excesivas inaceptables.
4. Ocurrencia de falla por fatiga.
5. Derrumbamiento producido por fractura frágil.

Para estudiar estos patrones considérese la viga de la fig. 15-5.

Comportamiento a la resistencia

Ejemplo 15-6 Considérese la viga que se muestra en la fig. 15-5. Se supone que la viga está apoyada lateralmente y, por consiguiente, es estable. El esfuerzo de fluencia, σ_{flu} , es 36 klb/pul². Diseñar la viga.

SOLUCION El momento extremo ocurre en el extremo empotrado y es igual a 54 klb · pie. De acuerdo con el método de diseño del esfuerzo de trabajo, el mayor momento que puede soportar la viga es el momento al empezar la fluencia. Para un factor de seguridad, $PS = 1.50$, el momento admisible será

$$M_{adm} = S \frac{36}{1.50} = 54 \times 12$$

Por consiguiente, el módulo de la sección que se requiere es

$$S_{\text{req}} = \frac{54 \times 12}{36/1.50} = 27 \text{ pul}^3$$

Con base en la tabla A-4, una viga W14 \times 22 tiene un módulo de la sección de 29.0 pul³; por tanto, la capacidad total de carga de trabajo es 3.22 klb/pie. Resp.

Comportamiento plástico

Ejemplo 15-6 (continuación)

SOLUCION La viga fluirá primero en el extremo *A* y luego en algún punto situado entre *A* y *B*. Si la otra articulación plástica está localizada en *x*, se tiene

$$\frac{\bar{x}}{L} M_{\text{pl}} + M_{\text{pl}} = \frac{P_{\text{fin}} L \bar{x}}{2} - \frac{P_{\text{fin}} \bar{x}^2}{2} \quad (1)$$

de donde

$$\frac{M_{\text{pl}}}{P_{\text{fin}}} = \frac{\bar{x}L^2 - \bar{x}^2L}{2(L + \bar{x})} \quad (2)$$

Para hallar el punto de momento máximo se hace $dM_{\text{pl}}/dx = 0$, de donde $x = 0.414L = 4.97$ pies. Sustituyendo este valor en la ecuación (2) se obtiene

$$P_{\text{fin}} = \frac{11.65 M_{\text{pl}}}{L^2}$$

Utilizando el mismo margen de seguridad que en la sección anterior, se tiene

$$M_{\text{pl}} = \frac{144(3 \times 1.5)}{11.65} = 55.6 \text{ klb} \cdot \text{pie}$$

y el módulo plástico requerido es

$$Z = \frac{55.6 \times 12}{36} = 18.5 \text{ pul}^3$$

que correspondería a un perfil W12 \times 16 ($Z = 20.1 \text{ pul}^3$, de acuerdo con la tabla A-4), para una capacidad real de carga de trabajo de 3.25 klb/pie.

Comportamiento a la deflexión

En muchos casos hay límites para la deflexión máxima admisible que puede sufrir una viga en condiciones de servicio. En este ejemplo, se supone un límite de deflexión comúnmente usado para carga de trabajo: $L/360$.

Ejemplo 15-6 (continuación)

SOLUCION La deflexión máxima se limita a

$$\frac{pL^4}{185EI} = \frac{L}{360}$$

en donde L está en pulgadas. Entonces,

$$I_{\min} = \frac{360pL^3}{185E} = \frac{(360)(\frac{3}{12})(144)^3}{185 \times 29 \times 10^3} = 50 \text{ pul}^4$$

que exige un perfil W10 X 12 (para el cual I es 53.8 pul⁴), que puede soportar una carga de trabajo de 3.23 klb/pie.

Comportamiento a la fractura y a la fatiga

El procedimiento general para analizar el comportamiento de vigas a la fractura y a la fatiga es semejante al utilizado para elementos axiales. La principal diferencia consiste en que el esfuerzo nominal se calcula empleando la teoría de la viga ($\sigma = My/I$) en lugar de P/A . Las propiedades del material, es decir, las propiedades de fracturas expresadas en función de los resultados de impacto, CVN, o los resultados de ensayos mecánicos de fractura (K_{Ic} , K_{Ic} , K_{Ic}) se obtienen en la forma descrita en el capítulo 13. Las propiedades de fatiga, o sea, los resultados $E-N$ o los resultados de propagación de una grieta por fatiga, se obtienen tal como se indica en el capítulo 14. Como el elemento es una viga, es conveniente usar vigas como probetas en los ensayos de fatiga, pero no es absolutamente necesario. Se pueden utilizar los resultados de ensayos de fatiga axial puesto que los resultados de fatiga son propiedades del material generalmente válidas para todos los tipos de elementos. Obsérvese que la resistencia a la fluencia y el módulo de elasticidad son propiedades del material obtenidas en ensayos axiales, pero los resultados se usan para diferentes tipos de elementos (axiales, vigas, recipientes a presión, etc.)

Un factor de intensidad de esfuerzo para vigas rectangulares con entalla es

$$K_1 = \frac{6M}{B(W-a)} f\left(\frac{a}{W}\right) \quad (15-5)$$

en donde M = momento de flexión

B = ancho de la viga

a = profundidad de la grieta

W = altura de la viga

$f(a/W)$ = variable que depende de a/W

Algunos valores de $f(a/W)$ son:

$f\left(\frac{a}{W}\right)$	0.66	0.69	0.72	0.73
$\frac{a}{W}$	0.3	0.4	0.5	0.6

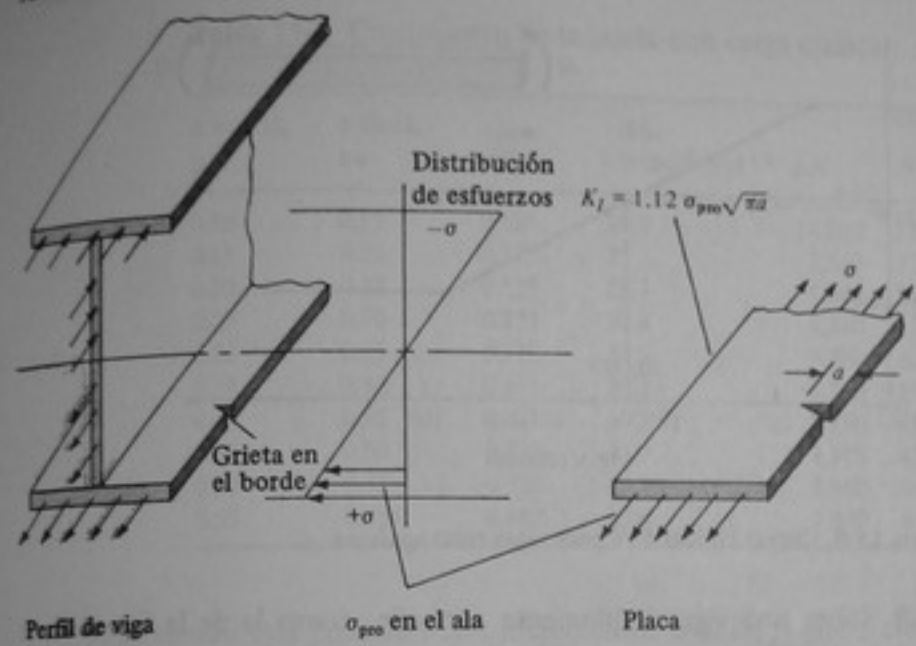


Figura 15-6 Esquema que muestra cómo se puede utilizar la relación K_I para placas planas con el fin de analizar el comportamiento de perfiles de vigas con entalles en el ala sometida a tracción.

Para vigas grandes con alas, con frecuencia se utiliza una expresión de K_I para placas planas cargadas en tracción, como se indica en la fig. 15-6. La relación K_I para placas planas cargadas en tracción está dada por

$$K_I = 1.12 \sigma \sqrt{\pi a}$$

Ejemplo 15-7 Determinar la duración en fatiga de la viga simplemente apoyada de la fig. 15-7, utilizando la curva $E-N$ que se muestra en la fig. 15-8 para vigas.

SOLUCION Para $P = 0$, $M = 0$ y $\sigma_{max} = 0$. Para $P = 10$ klb,

$$\sigma = \frac{My}{I} = \frac{PL}{4S} = \frac{10(20)(12)}{4(28.9)} = 20.8 \text{ klb/pul}^2$$

Por consiguiente, el intervalo de esfuerzo, $\Delta\sigma$, es 20.8 klb/pul². Con base en la curva $E-N$, la duración en fatiga para un intervalo de esfuerzo de 20.8 klb/pul² es 30 000 ciclos. Por tanto, se puede esperar que esta viga soporte 30 000 ciclos de una carga de 10 klb.

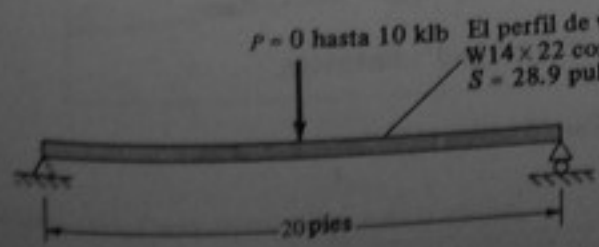


Figura 15-7 Viga analizada en el ejemplo 15-7.

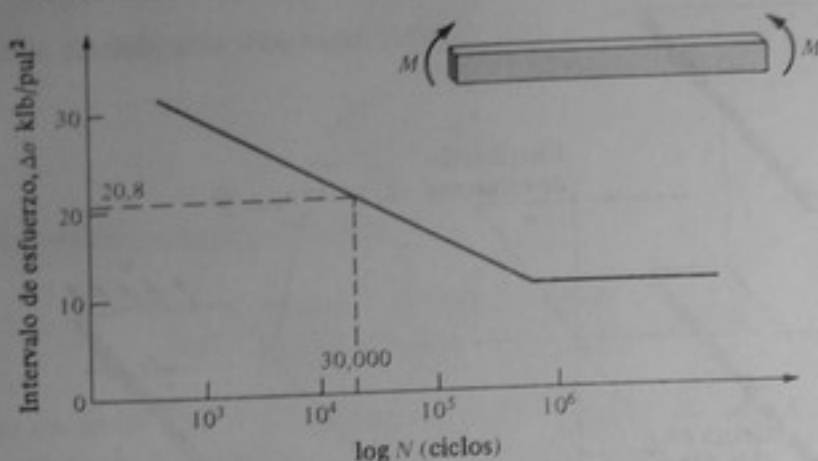


Figura 15-8 Curvas típicas $E-N$ para vigas rectangulares.

Ejemplo 15-8 Sobre una viga simplemente apoyada, como la de la fig. 15-7, se aplica en forma repetida una carga de 25 klb. La viga es hecha con un perfil W10 X 45 que tiene un ancho del ala de 8 pul, un espesor del ala de $\frac{5}{8}$ pul, una altura total de $10\frac{1}{8}$ pul y un valor $I = 249$ pul⁴. Existe una grieta inicial de 0.1 pul en un borde, semejante a la de la fig. 15-6. La viga debe operar en Alaska, a una temperatura de -40°F . A esta temperatura, la K_{Ic} del acero es 45 klb/pul² · pul^{1/2} y la resistencia a la fluencia es 40 klb/pul². Calcular la duración en fatiga de la viga.

SOLUCION Primero se verifica para el perfil la posibilidad de falla por fluencia general:

$$\sigma = \frac{My}{I} = \frac{(PL/4)y}{I} = \frac{(25)(20)(12)(5.7)}{4(249)} = 30.5 \text{ klb/pul}^2$$

Como $\sigma < 40$ klb/pul², la viga no alcanza su límite elástico y, por tanto, no se presenta fluencia.

Luego se calcula la longitud crítica de la grieta, a_{cr} , usando el valor de 45 klb/pul² · pul^{1/2} para K_{Ic} :

$$K_I = 1.12\sigma\sqrt{\pi a}$$

$$a_{cr} = \frac{K_{Ic}^2}{\pi(1.12\sigma)^2} = \frac{(45)^2}{\pi(1.12)^2(30.5)^2} = 0.554 \text{ pul}$$

La duración en fatiga se calcula de la siguiente manera:

$$\Delta K_I = 1.12 \Delta\sigma \sqrt{\pi} \sqrt{a_{pro}} = 60.5 \sqrt{a_{pro}}$$

para un intervalo de esfuerzo de 30.5 klb/pul². Entonces,

$$\frac{da}{dN} = 3.6 \times 10^{-10} (\Delta K_I)^{3.0}$$

$$\Delta N = \frac{\Delta a}{3.6 \times 10^{-10} (\Delta K_I)^{3.0}}$$

Tabla 15-1 Crecimiento de la grieta con carga cíclica.

a inicial, pul	a final, pul	a_{pro} , pul	ΔK , klb/pul ² · pul ^{1/2}	ΔN	N total
0.10	0.15	0.125	21.4	14,200	14,200
0.15	0.20	0.175	25.3	3,550	22,800
0.20	0.25	0.225	28.7	5,860	28,600
0.25	0.30	0.275	31.8	4,340	33,000
0.30	0.35	0.325	34.5	3,380	36,300
0.35	0.40	0.375	37.1	2,730	39,100
0.40	0.45	0.425	39.5	2,260	41,300
0.45	0.50	0.475	41.7	1,910	43,200
0.50	0.55	0.525	43.9	1,650	44,900
0.55	0.554	0.552	45.0	1,440	46,300

Resolviendo esta ecuación con incrementos cuando la grieta crece desde 0.1 hasta 0.15 pul se obtiene un ΔN de 14 200 ciclos. El crecimiento de la grieta desde 0.15 hasta 0.2 pul y los posteriores crecimientos dan por resultado una duración total de 44 800 ciclos para desarrollar la grieta hasta su tamaño crítico, a_{cr} , de 0.554 pul, como se indica en la tabla 15-1. Estos resultados se representan gráficamente en la fig. 15-9, y muestran el aumento de la razón de crecimiento de la grieta al aumentar el tamaño de ésta. La mayor parte de la duración en fatiga ocurre en los menores tamaños de la grieta.

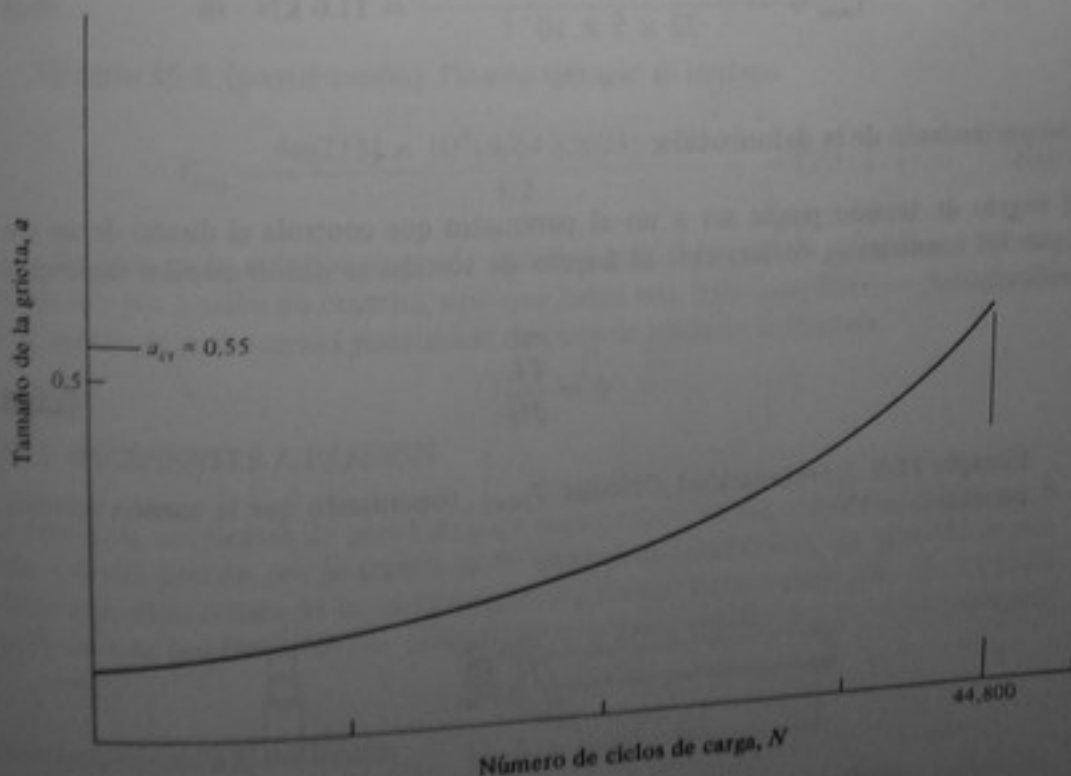


Figura 15-9 Curva de crecimiento de la grieta.

15-4 EJES

Los ejes cargados en torsión pueden fallar de varias maneras; algunos de los modos de falla más comunes son

1. Falla por resistencia debido a la fluencia
2. Torsión excesiva
3. Inestabilidad por torsión

Comportamiento a la resistencia

Ejemplo 15-9 Considerar el eje tubular que se muestra en la fig. 15-10 y determinar T_{\max} si

$$\begin{array}{lll} d_i = 8 \text{ cm} & \tau_{ys} = 100 \text{ MPa} & G = 85 \times 10^6 \text{ kPa} \\ d_o = 10 \text{ cm} & L = 2 \text{ m} & E = 212.5 \times 10^6 \text{ kPa} \end{array}$$

SOLUCION

$$\tau_{\max} = \frac{Tr}{J} = \frac{T(0.05)}{(\pi/32)(10^4 - 8^4) \times 10^{-8}} = 10^5 \text{ kPa}$$

$$T_{\max} = \frac{\pi \times 10^8 \times 10^{-8}(10^4 - 8^4)}{32 \times 5 \times 10^{-2}} = 11.6 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{Resp.}$$

Comportamiento de la deformación

El ángulo de torsión puede ser o no el parámetro que controla el diseño de un eje, según las condiciones de servicio. El ángulo de torsión se puede calcular fácilmente mediante

$$\phi = \frac{TL}{JG} \quad (15-6)$$

Ejemplo 15-9 (continuación) Calcular T_{\max} , suponiendo que la torsión máxima permisible es 1° .



Figura 15-10 Ejemplo 15-9.

Resp.

SOLUCION

$$\phi = \frac{2\pi}{360} = 17.45 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

$$T_{\max} = \frac{(\pi/32)(5904) \times 10^{-8} \times 85 \times 10^6}{2} 17.45 \times 10^{-3}$$

$$= \frac{\pi \times 0.5904 \times 8.5 \times 17.45}{64} = 4.30 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{Resp.}$$

Comportamiento a la inestabilidad

Aunque no se estudió el pandeo por torsión de ejes, el momento crítico de torsión para un eje simplemente apoyado se puede calcular mediante

$$T_{\text{cr}} = \frac{2\pi EI}{L} \quad (15-7)$$

Si se aplica un margen de seguridad (factor de carga) de 1.50, se obtiene

$$T_{\text{adm}} = \frac{4\pi EI}{3L} \quad (15-8)$$

Ejemplo 15-9 (continuación) En este ejemplo se obtiene

$$T_{\max} = \frac{4\pi(213) \times 10^6(\pi/64)(5904) \times 10^{-8}}{3/2} = 1290 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{Resp.}$$

Con base en lo anterior se puede observar que el eje fallará primero por fluencia. El pandeo por torsión no ocurrirá, sino que habrá una falla completa por plastificación total del eje, la cual ocurrirá justamente después de iniciarse la fluencia.

15-5 RECIPIENTES A PRESION

El diseño de recipientes de pared delgada para presión es importante debido a que la falla por alta presión por lo común es de naturaleza catastrófica. En general, un recipiente a presión consta de la parte cilíndrica y los extremos o tapas (fig. 15-11). El estudio en esta sección se refiere únicamente a la parte cilíndrica y no a los extremos.

Comportamiento a la resistencia

La parte cilíndrica del recipiente está en un estado biaxial de esfuerzo que consta de un esfuerzo longitudinal, σ_l , y un esfuerzo circunferencial o de aro (zuncho), σ_h .

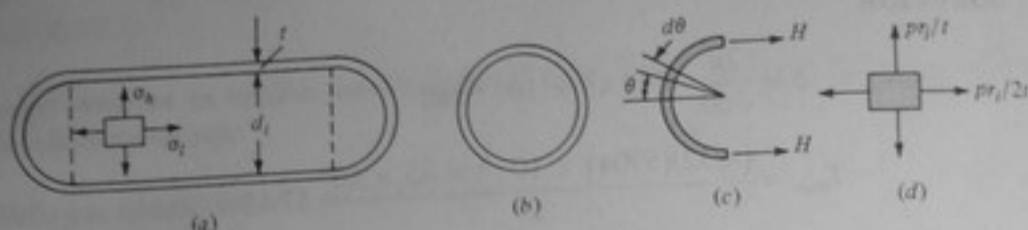


Figura 15-11 Ejemplo 15-10.

Como se dedujo en la sección 9-3, el esfuerzo longitudinal se puede determinar considerando la fuerza longitudinal total como $p\pi d_i^2/4$ (fig. 15-11b), la cual produce un esfuerzo de

$$\sigma_l = \frac{p\pi d_i^2/4}{\pi d_i t} = \frac{p d_i}{4t} = \frac{p r_i}{2t} \quad (15-9)$$

El esfuerzo de aro se halla considerando una sección semicircular de longitud unitaria (fig. 15-11c). La fuerza por unidad de longitud es $p r_i d\theta$ y su componente horizontal total es

$$2 \int_0^{\pi/2} p r_i \cos \theta d\theta = 2p r_i$$

Las fuerzas de aro por unidad de longitud, H , deben ser iguales a esta fuerza; por tanto,

$$2H = 2p r_i$$

o

$$H = p r_i$$

y

$$\sigma_h = \frac{p r_i}{t} \quad (15-10)$$

Ejemplo 15-10 Para un recipiente a presión, $d_i = 30$ pul, $t = 1$ pul y $\sigma_{\text{fin}} = 60$ klb/pul². Utilizando un factor de seguridad contra falla por reventado de 3, calcular p_{max} .

SOLUCION Con base en la ecuación (15-10),

$$p_{\text{max}} = \frac{60 \times 1}{3 \times 15} = 1.333 \text{ klb/pul}^2 = 1333 \text{ lb/pul}^2 \quad \text{Resp.}$$

Comportamiento a la fatiga y a la fractura

La iniciación de grietas por fatiga en recipientes a presión se puede predecir utilizando curvas $E-N$ de forma parecida que para elementos axiales o vigas. Es decir, se usa una curva $E-N$ para la geometría particular, obtenida a partir de probetas pulidas con un factor efectivo de concentración de esfuerzos o a partir de ensayos de fatiga con recipientes reales.

El comportamiento de propagación se analiza suponiendo que hay grietas preexistentes, producto de la fabricación o de un uso anterior. Las grietas preexistentes en

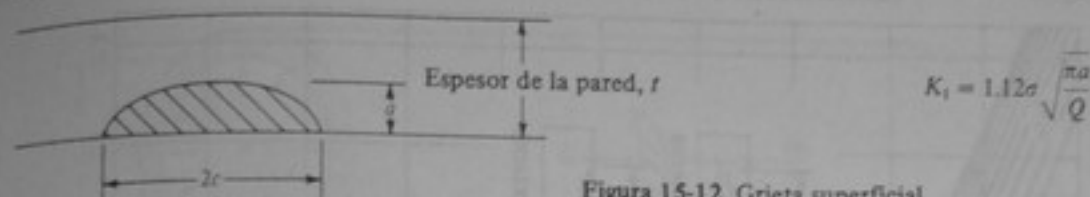


Figura 15-12 Grieta superficial.

recipientes a presión casi siempre son superficiales, sin profundidad apreciable a través del espesor; de otra manera los recipientes podrían presentar fugas y el esfuerzo disminuiría. La fig. 15-12 representa una grieta superficial y el factor de intensidad del esfuerzo para esa grieta. El factor de forma Q se utiliza para tener en cuenta los efectos de la relación entre la profundidad de la grieta, a , y la longitud, $2c$, como se indica en la fig. 15-13. Es decir que la forma de la grieta afecta la intensidad del esfuerzo alrededor de la grieta.

Si las grietas superficiales están orientadas circunferencialmente (fig. 15-14a), el esfuerzo longitudinal se utiliza para analizar la resistencia a la fatiga o a la fractura. Si las grietas están orientadas longitudinalmente (fig. 15-14b), el esfuerzo de aro se utiliza para analizar la resistencia a la fatiga o a la fractura. Como el esfuerzo de aro es el doble del esfuerzo longitudinal, la orientación de las posibles grietas en recipientes a presión tiene un gran efecto sobre su comportamiento.

En la figura 15-15a se muestra esquemáticamente el posible crecimiento de una grieta superficial a través de la pared del recipiente. Cuando esta grieta crece por fatiga, puede alcanzar o no un tamaño crítico antes de extenderse completamente a través de la pared. Si el tamaño crítico (descrito en el capítulo 13) es mayor que el espesor de la pared, el recipiente tendrá fuga antes de romperse. Este comportamiento de *fuga antes de la rotura* es muy conveniente puesto que la fuga es un modo de falla más deseable que la rotura o fractura. La fig. 15-16 es una fotografía de un recipiente a presión que se rompió antes de presentar fugas durante un ensayo de presión. Una grieta preexistente dentro de la pared del recipiente conduce a una falla catastrófica.

El tamaño crítico de la grieta en rotura o fractura se determina a partir de la relación K_I para grietas superficiales:

$$K_I = 1.12\sigma \sqrt{\frac{\pi a}{Q}} \quad (15-11)$$

en donde Q es un parámetro de forma de la grieta que varía con $a/2c$ y σ/σ_{flu} , como se indica en la fig. 15-13. Haciendo $K_{Ic} = K_I$ y despejando a para obtener la profundidad de la grieta en fractura, se obtiene

$$a_{cr} = \left(\frac{K_I}{1.12\sigma} \right)^2 \frac{Q}{\pi}$$

Si $a_{cr} < t$, en donde t es el espesor de la pared del recipiente, ocurrirá fractura antes de que haya fuga. La fig. 15-16 muestra el tipo de comportamiento catastrófico que se puede presentar si $a_{cr} < t$.

Si $a_{cr} > t$, habrá fuga antes de la fractura. Evidentemente esto es conveniente y se ha utilizado como criterio para evaluar el desempeño esperado de recipientes a presión.

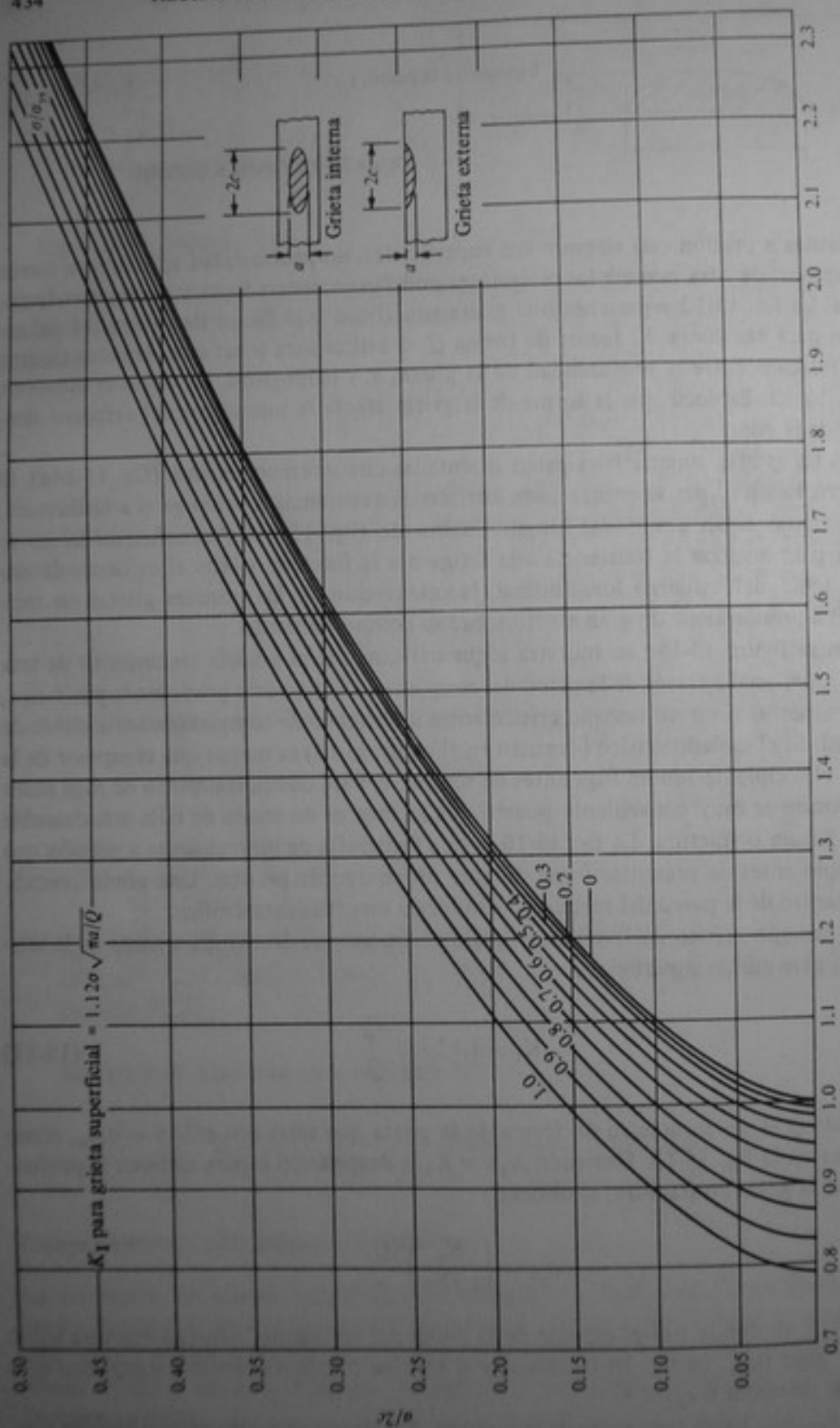


Figura 15-13 Efecto de la relación $a/2c$ y la relación σ/σ_u sobre el parámetro de forma de la grieta, Q .

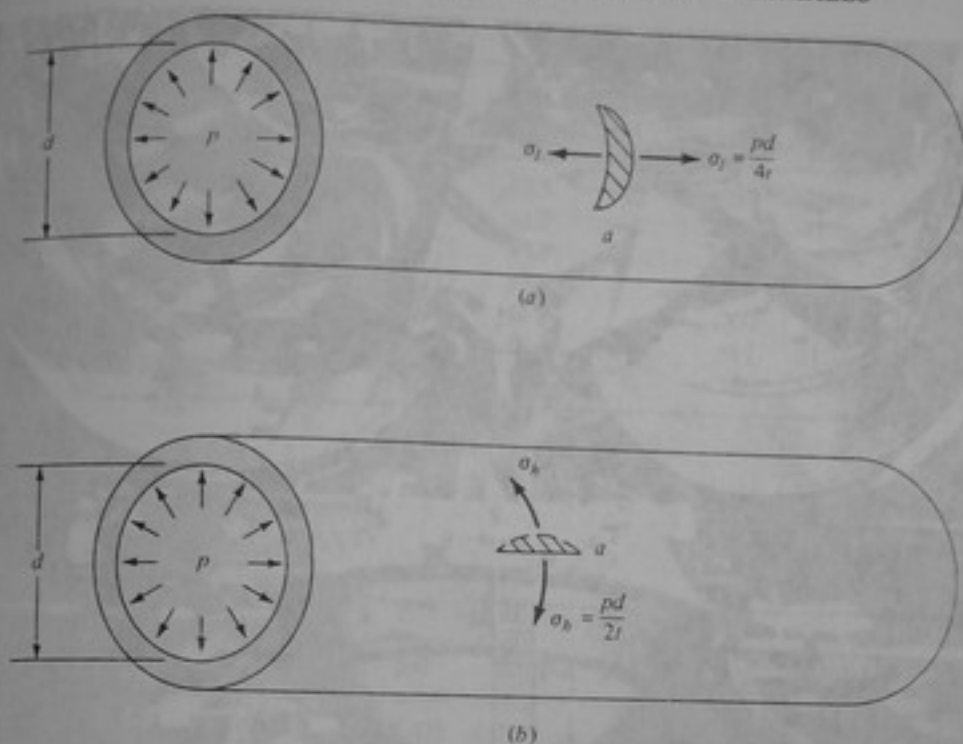


Figura 15-14 Orientación circunferencial y longitudinal de grietas en recipiente cilíndrico a presión. (a) Circunferencial. (b) Longitudinal.

Ejemplo 15-11 Un recipiente cilíndrico de pared delgada tiene un radio de 30 pul, un espesor de pared de 1.0 pul y una presión interna de 2000 lb/pul². El recipiente está hecho con un acero de alta resistencia que tiene una resistencia a la fluencia de 100 klb/pul² y una K_{Ic} de 70 klb/pul² · pul^{1/2} a la temperatura de operación. Existe una grieta longitudinal de profundidad $a_0 = 0.05$ pul, como se muestra en la fig. 15-14b. La longitud de la grieta es 0.5 pul, de modo que $a/2c = 0.05/0.5 = 0.1$. Determinar la duración en fatiga y el modo de falla para un intervalo de presión de diseño de (a) 0 a 2000 lb/pul² y (b) 0 a 1000 lb/pul².

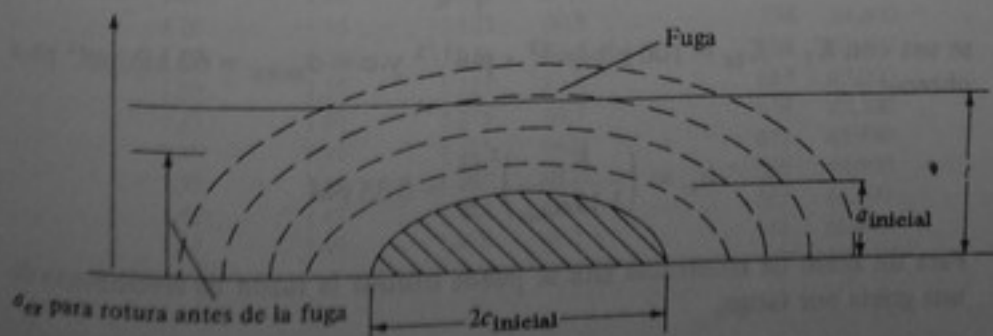


Figura 15-15 Esquema que muestra el crecimiento de una grieta superficial a través de la pared del recipiente.

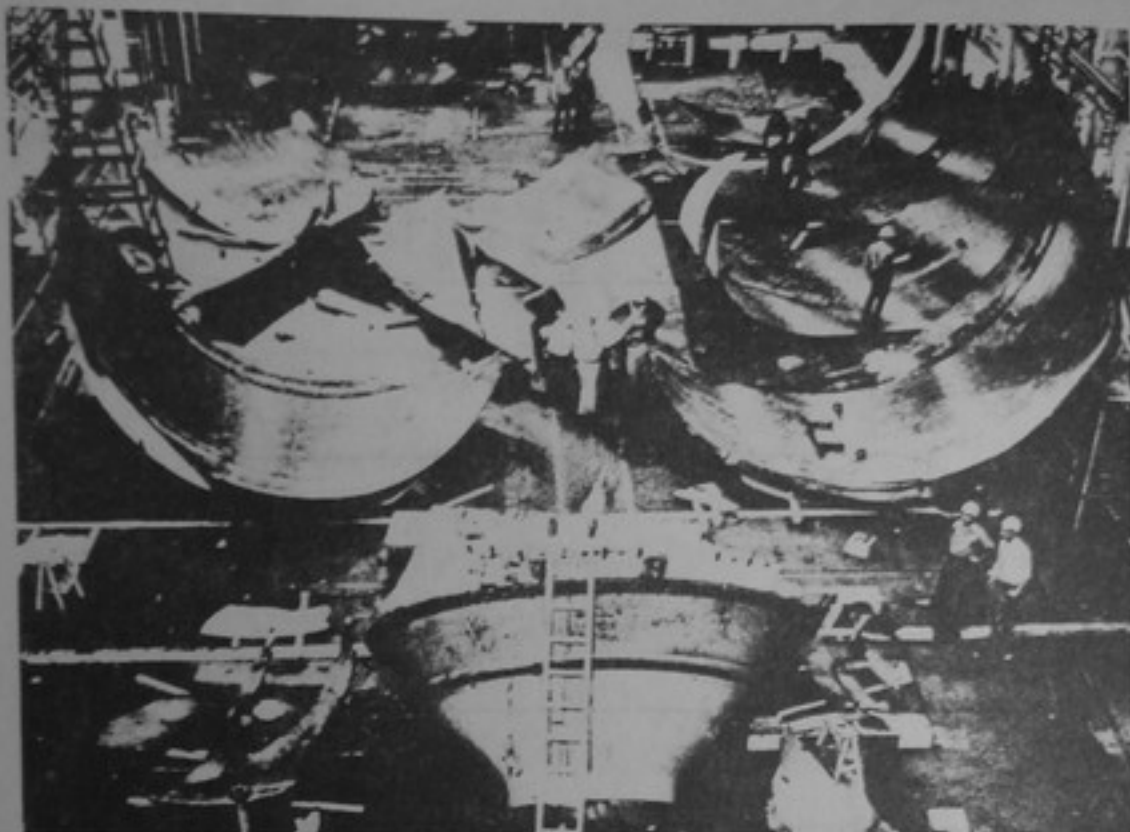


Figura 15-16 Ejemplo de comportamiento catastrófico por rotura antes de la fuga. (Cortesía de J. E. Shrawley, NASA Lewis Research Center).

SOLUCION

(a) La grieta es perpendicular al esfuerzo de aro, que es

$$\sigma_h = \frac{pD}{2t} = \frac{2000(60)}{2(1)} = 60 \text{ klb/pul}^2$$

Para $a/2c = 0.1$ y $\sigma/\sigma_{flu} = 60/100 = 0.6$, $Q \cong 1.02$ (fig. 15-13). La expresión de K_I para una grieta superficial,

$$K_I = 1.12\sigma \sqrt{\frac{\pi a}{Q}}$$

se usa con $K_I = K_{Ic} = 100 \text{ klb/pul}^2 \cdot \text{pul}^{1/2}$ y $\sigma = \sigma_{max} = 60 \text{ klb/pul}^2$ para obtener a_{cr} :

$$a_{cr} = \left(\frac{K_{Ic}}{1.12\sigma_{max}} \right)^2 \frac{Q}{\pi} = 0.35 \text{ pul}$$

Para un acero de resistencia alta se puede utilizar la razón de crecimiento de una grieta por fatiga,

$$\frac{da}{dN} = 0.66 \times 10^{-8} (\Delta K_I)^{2.25}$$

Tabla 15-2

a inicial, pul	a final, pul	a_{pro} , pul	ΔK , klb/pul ² pul ^{1/2}	ΔN	N total
0.05	0.10	0.075	32.3	3050	3050
0.10	0.15	0.125	41.7	1720	4770
0.15	0.20	0.175	49.3	1170	5940
0.20	0.25	0.225	55.9	885	6830
0.25	0.30	0.275	61.8	700	7530
0.30	0.35	0.325	67.2	583	8120
0.35	0.352	0.351	69.9	536	8650

Tabla 15-3

a inicial, pul	a final, pul	a_{pro} , pul	ΔK , klb/pul ² pul ^{1/2}	ΔN	N total
0.05	0.10	0.075	15.7	15,500	15,500
0.10	0.15	0.125	20.3	8,700	24,200
0.15	0.20	0.175	24.0	5,960	30,200
0.20	0.25	0.225	27.2	4,490	34,700
0.25	0.30	0.275	30.1	3,580	38,200
0.30	0.35	0.325	32.7	2,970	41,200
0.35	0.40	0.375	35.1	2,530	43,700
0.40	0.45	0.425	37.4	2,200	45,900
0.45	0.50	0.475	39.5	1,940	47,900
0.50	0.55	0.525	41.5	1,730	49,600
0.55	0.60	0.575	43.5	1,560	51,200
0.60	0.65	0.625	45.3	1,420	52,600
0.65	0.70	0.675	47.1	1,310	53,900
0.70	0.75	0.725	48.8	1,200	55,100
0.75	0.80	0.775	50.4	1,120	56,200
0.80	0.85	0.825	52.1	1,040	57,300
0.85	0.90	0.875	53.6	974	58,200
0.90	0.95	0.925	55.1	915	59,100
0.95	1.00	0.975	56.6	863	60,000 [†]
1.05	1.10	1.075	59.4	773	60,800
1.10	1.15	1.125	60.8	734	61,600
1.15	1.20	1.175	62.1	699	62,300
1.20	1.25	1.225	63.4	667	63,000
1.25	1.30	1.275	64.7	638	63,200
1.30	1.35	1.325	66.0	611	64,300
1.35	1.40	1.375	67.2	586	64,900
1.40	1.45	1.425	68.4	563	65,500
1.45	1.49	1.470	69.5	543	66,600

[†] Duración para $a = 1.0$ pul. (Por encima de este punto los cálculos no tienen sentido, puesto que el recipiente presentará fugas y no puede mantener la presión interna.)

dada en el capítulo 14. La integración numérica de esta relación entre los límites $a_0 = 0.05$ y $a_{cr} = 0.35$ da una duración total en fatiga de 8160 ciclos, como se muestra en la tabla 15-2. Como el tamaño crítico de la grieta es menor que el espesor de la pared, la falla será por fractura frágil con poco o ningún aviso. Es decir que el recipiente se romperá *antes* de que haya fuga.

- (b) Para un intervalo de presión de diseño de 0 a 1000 lb/pul², el intervalo de esfuerzo es

$$\sigma_h = \frac{pd}{2t} = \frac{1000(60)}{2(1)} = 30 \text{ klb/pul}^2$$

Para $a/2c = 0.1$ y $\sigma/\sigma_{flu} = 30/100$, $Q = 1.08$ y

$$a_{cr} = \left(\frac{K_{Ic}}{1.12(30)} \right)^2 \frac{1.08}{\pi} = 1.49 \text{ pul}$$

Utilizando la misma razón de crecimiento de la grieta que en la parte *a*, se obtiene una duración de propagación *calculada*, entre los límites de $a_0 = 0.05$ y $a_{cr} = 1.49$, de 66 600 ciclos, como se indica en la tabla 15-3. Sin embargo, se debe observar en la tabla que después de 60 000 ciclos de carga la profundidad de la grieta es igual al espesor de la pared. Por tal motivo, en este punto se presenta la fuga (véase la fig. 15-15) y la duración en fatiga del recipiente es de sólo 60 000 ciclos en lugar del valor de 66 000 calculado para una profundidad de la grieta de 1.49 pul. Entonces, el modo de falla es fuga, no fractura; el recipiente exhibirá un comportamiento de fuga antes de la rotura. Esto es conveniente puesto que una fuga se puede reparar mucho más fácilmente que una rotura o fractura (véase la fig. 15-16).

15-6 UNIONES

Para armar una estructura o una pieza de un equipo se deben unir sus diferentes componentes. Las uniones son muy importantes ya que una unión más débil que los componentes representa un eslabón débil. Muchas, si no la mayoría de las fallas, no ocurren en una sección interior de un elemento o componente sino en su unión con otro elemento o componente. No sólo la resistencia de una unión puede ser menor que la de los elementos unidos, debido a una reducción en la sección, sino que con frecuencia el comportamiento de las uniones es muy diferente al de los elementos, debido a las concentraciones locales de esfuerzos, los esfuerzos residuales por procesos de fabricación, la presencia de grietas o su sensibilidad a la carga cíclica, a la corrosión con esfuerzo, etc.

El análisis, diseño y detallado de las uniones es muy importante. El objetivo de este texto no es enseñar a diseñar y a detallar todos los tipos de uniones, sino estudiar la resistencia y el comportamiento de uniones sencillas. Los dos tipos principales de uniones son los que emplean pernos, remaches o pasadores y las uniones soldadas.

Uniones con pasadores y pernos

Actualmente la mayoría de uniones de este tipo son empernadas. Las uniones de pasadores se utilizan principalmente para juntas de apoyo y otras juntas especiales. Hoy en día los remaches se usan principalmente en aviones aunque en otro tiempo se utilizaron casi con exclusividad en todo tipo de estructuras. No se hará un estudio separado de los remaches debido a que, excepto por sus tamaños y esfuerzos admisibles, su comportamiento es análogo al de los pasadores y los pernos sin tornearse.

Existe una diferencia entre las uniones que utilizan pernos, remaches y pasadores comunes, y las que hacen uso de pernos de resistencia alta. Estos últimos se aprietan con el fin de obtener una fuerza de sujeción que produzca una transferencia de la carga mediante la resistencia de fricción entre los elementos sujetos en lugar de la resistencia de corte de los pernos.

Juntas corrientes con pernos, pasadores o remaches

Desde el punto de vista de la resistencia, una unión empernada puede fallar de diferentes modos:

1. Falla del perno en corte, tracción o una combinación de corte y tracción (fig. 15-17).
2. Falla de los elementos unidos en o cerca a las uniones, por empuje, tracción o corte (fig. 15-17).

Esfuerzo cortante en pernos Los pernos comunes se clasifican como pernos sin tornearse y tienen una designación ASTM de A307. Como se puede observar en la fig. 15-17a, si un perno está cargado en corte simple,

$$\tau_{pro} = \frac{P}{\pi/4d^2} \tag{15-12}$$

en donde d es el diámetro del perno en el plano de corte. Para dos o más planos de corte y más de un perno, se puede escribir

$$\tau_{pro} = \frac{P}{nm, \pi/4d^2} \tag{15-13}$$

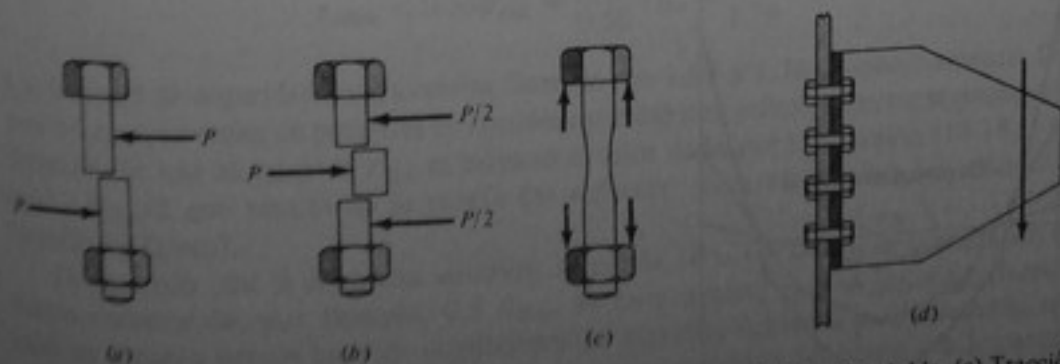


Figura 15-17 Falla por resistencia en pernos. (a) En corte simple. (b) En corte doble. (c) Tracción. (d) Corte y tracción.

en donde n_s es el número de planos de corte y n el número de pernos. La ecuación (15-13) se basa en las suposiciones de que (1) no hay transferencia de la carga mediante rozamiento, (2) el esfuerzo cortante está uniformemente distribuido sobre la sección transversal del cuerpo del perno y (3) todos los pernos soportan partes iguales de la carga. La segunda suposición solo se justifica para comportamiento dúctil después de sobrepasar el límite elástico. La tercera suposición generalmente es cierta sólo después de una fluencia considerable.

Para una sección transversal circular,

$$\tau_{\max} = \frac{VQ}{It} = \frac{P(\pi/8)d^2(2d/3\pi)}{(\pi/64)d^4d} = \frac{5.33P}{\pi d^2}$$

mientras que el esfuerzo cortante promedio es

$$\tau_{\text{pro}} = \frac{P}{\pi/4d^2} = \frac{4P}{\pi d^2}$$

Entonces, la relación entre el esfuerzo cortante máximo y el promedio es

$$\frac{\tau_{\max}}{\tau_{\text{pro}}} = \frac{5.33}{4} = 1.33$$

Si hay varias hileras de pernos, la hilera exterior soportará una fracción mayor de la carga debido a la deformación de la placa de unión, como se indica en la fig. 15-18. En el caso de siete hileras iguales, las hileras exteriores soportan aproximadamente 1.65 veces las fuerzas promedio. Nuevamente, cuando ocurre la falla todos los pernos están igualmente cargados hasta su límite de esfuerzo cortante y, por consiguiente, la suposición de igual participación sólo es cierta cuando se trata de la resistencia final de una junta.

El esfuerzo cortante admisible es igual al esfuerzo de fluencia por corte del material dividido por un factor de seguridad adecuado. El esfuerzo de fluencia por corte se puede calcular a partir de la condición de fluencia de Huber-Hencky-Von Mises (capítulo 11), que establece que

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_{\text{flu}}^2 \quad (15-14)$$

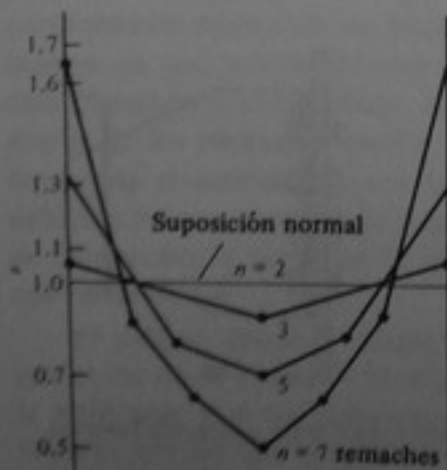


Figura 15-18 Distribuciones de carga entre hileras bajo condiciones de carga de trabajo.

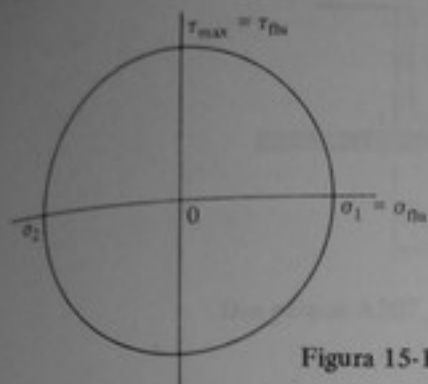


Figura 15-19 Círculo de Mohr para el caso de esfuerzo cortante puro.

Para esfuerzo cortante puro,

$$\sigma_1 = -\sigma_2 \quad \text{y} \quad \sigma_3 = 0 \quad (15-15)$$

de donde

$$\sigma_1^2 = \frac{\sigma_{flu}^2}{3}$$

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_{flu}}{\sqrt{3}} \quad (15-16)$$

De acuerdo con el círculo de Mohr (fig. 15-19),

$$\sigma_1 = \tau_{flu} \quad (15-17)$$

de modo que

$$\tau_{flu} = \frac{\sigma_{flu}}{\sqrt{3}} = 0.58\sigma_{flu} \quad (15-18)$$

La mayoría de las especificaciones dan el esfuerzo cortante admisible, τ_{adm} , en función del esfuerzo de fluencia en tracción, σ_{flu} . Las especificaciones de la AISC exigen que

$$\tau_{adm} \leq 0.3\sigma_{flu} = \frac{0.3}{0.58}\tau_{flu} = \frac{\tau_{flu}}{1.93} \quad (15-19)$$

mientras que las especificaciones de la AASHTO exigen que

$$\tau_{adm} \leq 0.33\sigma_{flu} = \frac{0.33}{0.58}\tau_{flu} = \frac{\tau_{flu}}{1.74} \quad (15-20)$$

Los factores de seguridad reales contra fluencia son 1.93 y 1.74, respectivamente. Con base en ensayos reales en probetas de torsión cargadas con esfuerzo cortante puro, se ha determinado que el valor de τ_{flu} es cercano al valor dado por la ecuación (15-18) y no igual a $\sigma_{flu}/2$ que resulta de la teoría del esfuerzo cortante máximo (condición de fluencia de Tresca).

De acuerdo con la discusión anterior, se puede observar que si se permite un esfuerzo cortante de, por ejemplo, $0.3\sigma_{flu}$, es muy posible que se presente fluencia local en algunos pernos bajo las condiciones de servicio, debido a la distribución real del esfuerzo cortante a través del plano de esfuerzo cortante del perno y a la participación diferente de las hileras. Para pernos A307, las especificaciones de la AISC permiten un esfuerzo cortante de 10.0 kb/pul^2 .

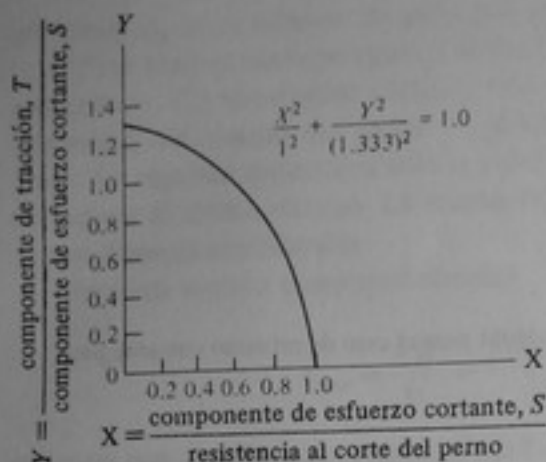


Figura 15-20 Curva de interacción para corte y tracción combinados en un perno.

Tracción de pernos Si un perno se carga en tracción, su esfuerzo admisible es igual a la resistencia a la fluencia del material del perno dividida por un factor de seguridad adecuado. En cuanto al área, se utiliza la denominada *área de esfuerzo*; para la porción roscada de un perno, esta área se puede aproximar, de acuerdo con las especificaciones de la AISC, mediante

$$A_s = 0.785 \left(d_{\text{nom}} - \frac{0.9743}{n} \right)^2 \quad (15-21)$$

en donde d_{nom} es el diámetro nominal del perno y n el número de hilos por pulgada. El esfuerzo de tracción admisible para pernos A307, de acuerdo con las especificaciones de la AISC, es 20 klb/pul².

Corte y tracción de pernos Si un perno se somete simultáneamente a corte y tracción, el esfuerzo admisible en tracción se puede ver reducido en presencia del corte. Estas reducciones se definen mediante una curva de interacción elíptica, como la de la fig. 15-20. Las especificaciones de la AISC dan para los pernos A307 un esfuerzo de tracción admisible de

$$\sigma_{t, \text{adm}} = 28 - 1.6 \tau_{\text{real}} \quad \text{pero} \quad \sigma_{t, \text{adm}} \leq 20.0 \text{ klb/pul}^2 \quad (15-22)$$

Ejemplo 15-2 Considerar la unión mostrada en la fig. 15-21. Calcular la carga de trabajo admisible para pernos A307 de $\frac{3}{4}$ pul de diámetro, utilizando las especificaciones de la AISC y suponiendo que no hay falla de la placa.

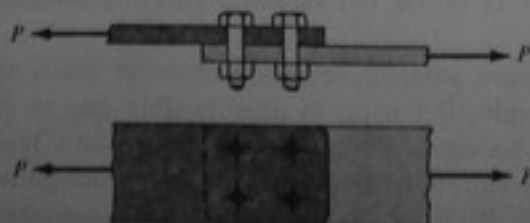
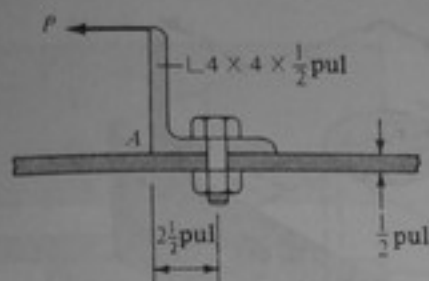


Figura 15-21 Ejemplo 15-12.


 Dos pernos A307, $\frac{3}{4}$ pul ϕ , 10 kilos/pul Figura 15-22 Ejemplo 15-13.

SOLUCION El número de pernos es $n = 4$. El número de planos de corte por perno es $n_s = 1$ y $\tau_{adm} = 10$ klb/pul². De acuerdo con la ecuación (15-13),

$$P = (1)(4) \frac{\pi}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^2 (10) = 17.67 \text{ klb} \quad \text{Resp.}$$

Ejemplo 15-13 Para la unión que se muestra en la fig. 15-22, ¿cuál es el valor máximo de P , suponiendo que se utilizan dos pernos A307 y que P actúa a lo largo del borde superior? Utilizar las especificaciones de la AISC.

SOLUCION La fuerza de tracción, T , en el perno se halla tomando el momento respecto de A :

$$4P = 2\frac{1}{2}T \quad \text{o} \quad T = 1.6P$$

Entonces,
$$\tau = \frac{P}{2(\pi/4d^2)} = \frac{2P}{\pi(\frac{3}{4})^2} = 1.13P$$

$$\sigma_{adm} = 28 - 1.6(1.13P) = 28 - 1.81P$$

De acuerdo con la ecuación (15-21),

$$A_s = 0.785 \left(0.75 - \frac{0.9743}{10}\right)^2 = 0.334$$

$$\sigma_{real} = \frac{1.6P}{2(0.334)} = 2.39P = 28 - 1.81P$$

$$P_{real} = \frac{28}{4.20} = 6.67 \text{ klb} \quad \text{Resp.}$$

En seguida se verifica para ver si $\sigma_{t, adm}$ es menor que 20 klb/pul²:

$$\sigma_{t, adm} = 28 - 1.6(1.13)(6.67) = 15.94 \text{ klb/pul}^2$$

que es menor que 20 klb/pul².

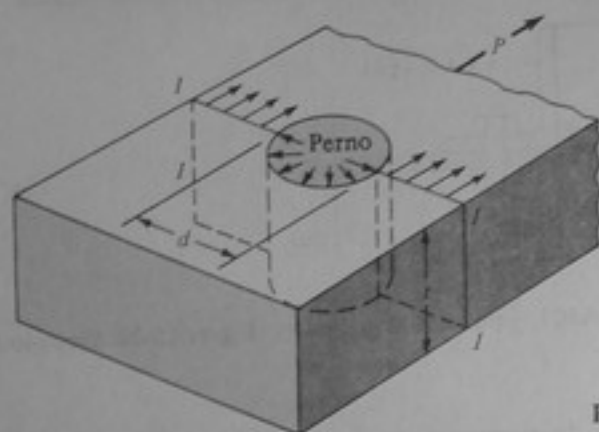


Figura 15-23 Empuje sobre placa.

Empuje sobre placas Como en el caso de esfuerzo cortante, se puede simplificar suponiendo que el esfuerzo de empuje está distribuido uniformemente sobre la proyección de la superficie del agujero cilíndrico en el plano diametral I - I - I - I de la fig. 15-23 y

$$\sigma_p = \frac{P}{td} \quad (15-23)$$

en donde d es el diámetro del perno. Es claro que esta simplificación es difícilmente justificable. Sin embargo, si el valor del esfuerzo de empuje admisible se basa en ensayos reales, el uso de la ecuación simplificada (15-23) es aceptable. El valor del esfuerzo real depende de la relación entre el diámetro del perno y el diámetro del agujero y del grado de confinamiento correspondiente. El esfuerzo de empuje admisible que se debe emplear en la ecuación (15-23), de acuerdo con las especificaciones de la AISC, es $1.35 \sigma_{flu}$. Este valor tiene muy poca relación con lo que sucede realmente en la unión.

Para un grupo de pernos en que se hace la suposición de igual participación,

$$\sigma_p = \frac{P}{ntd} \quad (15-24)$$

en donde, nuevamente, n es el número de pernos. En la tabla A-11 se dan los esfuerzos admisibles cortante y de tracción para remaches, pernos sin tornejar y pernos de alta resistencia, de acuerdo con las especificaciones de la AISC.

Ejemplo 15-14 Verificar el esfuerzo de empuje para la unión del ejemplo 15-12, si $t = 1$ pul.

SOLUCION

$$\sigma_p = \frac{17.67}{4(1)(0.75)} = 5.44 \text{ klb/pul}^2 \quad \text{Resp.}$$

Para una placa de acero A36, $\sigma_{p, adm}$ es $1.35 \times 36 = 48.6 \text{ klb/pul}^2$, muy por encima del esfuerzo de empuje real.

Ejemplo 15-15 Verificar el esfuerzo de empuje para la unión del ejemplo 15-13.

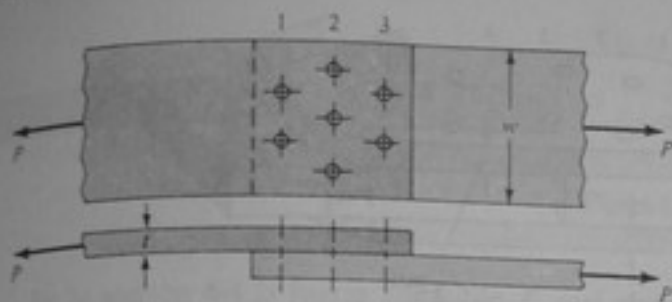


Figura 15-24 Tracción en las secciones netas.

SOLUCION

$$\sigma_p = \frac{6.67}{2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right)} = 8.9 \text{ klb/pul}^2 < 48.6 \text{ klb/pul}^2 \quad \text{Resp.}$$

Tracción de placas La presencia de agujeros reduce el área de la sección transversal de las placas de unión. Para la unión que se muestra en la fig. 15-24, la fuerza en la sección neta 1 de la placa superior es p , es decir que

$$p_{1-1} = P$$

Para la sección 2 de la placa superior.

$$P_{2-2} = \frac{2}{3}P$$

Para la sección 3,

$$P_{3-3} = \frac{2}{3}P$$

Para calcular los esfuerzos promedios de tracción en estas secciones se puede escribir

$$\sigma_{1-1} = \frac{P}{t(w - 2d_t)}$$

$$\sigma_{2-2} = \frac{\frac{2}{3}P}{t(w - 3d_t)}$$

$$\sigma_{3-3} = \frac{\frac{2}{3}P}{t(w - 2d_t)}$$

en donde d_t es igual al diámetro del agujero más $1/16$ pul. (Esto tiene como finalidad tener en cuenta el daño posible sobre el material circundante durante la fabricación; las especificaciones de la AISC definen d_t como el diámetro del agujero más $1/8$ pul.) El esfuerzo de tracción admisible es igual al esfuerzo de fluencia del material de la placa dividido por un factor de seguridad; las especificaciones de la AISC permiten $0.60 \sigma_{flu}$ para uniones emperradas. Con base en el capítulo 13 resulta obvio que una evaluación del esfuerzo promedio en una sección con agujeros no coincide completamente con la distribución real de esfuerzos. Los factores de concentración de esfuerzos superiores a los factores de seguridad producen fluencia en la cercanía inmediata de los agujeros, aún bajo condiciones de servicio. De nuevo, la única forma de justificar un

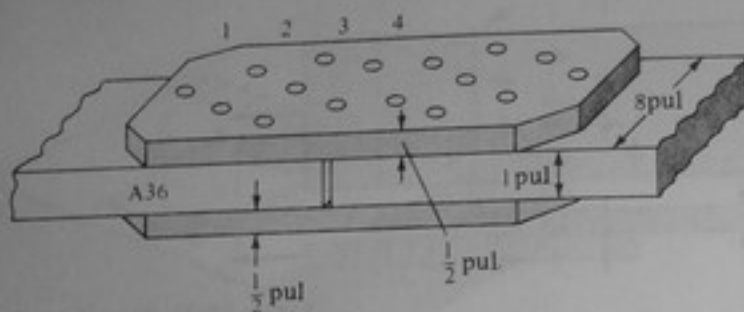


Figura 15-25 Ejemplo 15-16.

cálculo simplificado del esfuerzo promedio, se basa en la suposición de que el material se comportará de una manera dúctil, tal que en la falla la distribución de esfuerzos será uniforme e igual al esfuerzo de fluencia, σ_{flu} .

Ejemplo 15-16 Para la unión que se muestra en la fig. 15-25 se utilizan 16 pernos A307 de $\frac{7}{8}$ pul de diámetro. Determinar la carga máxima de la junta suponiendo que para la placa se utiliza acero A36.

SOLUCION El esfuerzo cortante es

$$\tau = 10 = \frac{P}{8(2)(\pi/4)(\frac{7}{8})^2}$$

$$P = 96.2 \text{ klb}$$

El esfuerzo de empuje es

$$1.35 \times 36 = \frac{P/2}{8(0.5)(\frac{7}{8})}$$

$$P = 340.2 \text{ klb}$$

Los esfuerzos de tracción en la placa principal son

$$\sigma_{1-1} = \frac{P}{1(8-1)} = 0.6 \times 36 \quad \circ \quad P = 151.2 \text{ klb}$$

$$\sigma_{2-2} = \frac{\frac{7}{8}P}{1(8-2)} = 0.6 \times 36 \quad \circ \quad P = 148.1 \text{ klb}$$

$$\sigma_{3-3} = \frac{\frac{5}{8}P}{1(8-3)} = 0.6 \times 36 \quad \circ \quad P = 172.8 \text{ klb}$$

y en la placa de unión,

$$\sigma_{4-4} = \frac{P/2}{\frac{1}{2}(8-2)} = 0.6 \times 36 \quad \circ \quad P = 129.6 \text{ klb}$$

$$\sigma_{3-3} = \frac{\frac{3}{4}(P/2)}{\frac{1}{2}(8-3)} = 0.6 \times 36 \quad \circ \quad P = 144.0 \text{ klb}$$

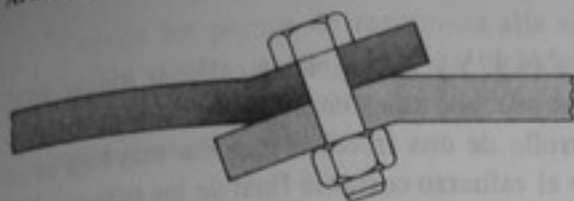


Figura 15-26 Flexión en una junta solapada.

En la sección 4-4 la fuerza admisible, P , será mayor ya que se tienen menos agujeros (dos) para una fracción menor de la carga, $\frac{2}{3} P$. Con base en estos cálculos se determina que P_{max} es 96.2 klb, el valor determinado por corte.

Eficiencia de la junta A veces la resistencia de una unión emperrada se expresa como un porcentaje de la resistencia de la sección sólida. En el ejemplo 15-16, la resistencia en la sección sólida es

$$P_{sólida} = 0.6 \times 36 \times 8 \times 1 = 172.8 \text{ klb}$$

y, por consiguiente, la eficiencia de la junta es

$$\frac{96.2}{172.8} 100 = 55.7 \text{ por ciento}$$

que se puede considerar baja. Obviamente, la eficiencia se puede aumentar usando más pernos o pernos de resistencia más alta.

Otros modos de falla por resistencia Siempre que se transmite una carga mediante una junta asimétrica, como la de la fig. 15-26, tiene lugar flexión de la placa, produciéndose esfuerzos de flexión en el perno y en la placa, así como un aumento de la presión de empuje. Generalmente, este efecto se desprecia.

Cuando las hileras de pernos están bastante cercanas, como se muestra en la fig. 15-27, surge otra dificultad: se puede desarrollar una desgarradura en zigzag en lugar de la falla a lo largo de las secciones 1-1 ó 2-2. Aquí no se hace el análisis de las juntas para este tipo de falla.

Un tercer tipo de falla es el que ocurre si la distancia hasta el extremo es demasiado pequeña. Generalmente, una distancia mínima hasta el extremo previene este tipo de falla, como se indica en la fig. 15-28.

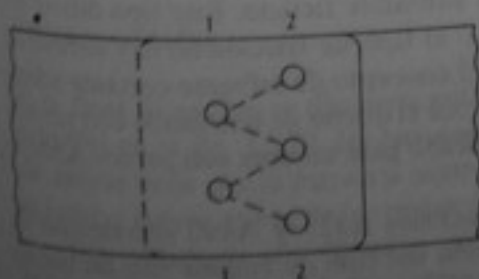


Figura 15-27 Falla de la placa en zigzag.

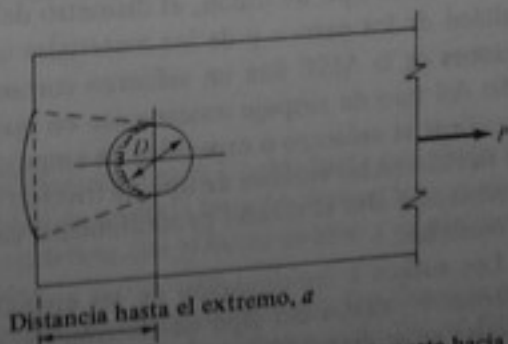


Figura 15-28 Falla de la placa por corte hacia afuera.

Pernos de resistencia alta

Cuando se usan pernos de resistencia alta (A325 y A490), la tracción se induce en el perno apretando la tuerca. Esta operación produce un esfuerzo combinado de tracción y torsión que da por resultado el desarrollo de una tracción máxima más baja en el perno. Los ensayos han demostrado que el esfuerzo cortante final de los pernos A325 es aproximadamente el 70 por ciento del esfuerzo final de tracción del perno. Además, los pernos A490 se hacen de aleaciones de acero templadas para utilizarlos con elementos de acero de resistencia alta.

En las juntas empernadas, los diámetros de los pernos deben ser menores que los de los agujeros en $\frac{1}{16}$ pul (2 mm); como los pernos no se expanden para llenar los agujeros, como sucede con los remaches, es esencial que las tuercas queden bastante apretadas con el fin de proteger la junta contra deslizamiento. Entonces, la transferencia de carga por parte de la junta se hace por fricción entre las partes unidas más que por corte de los sujetadores, excepto en el caso de cargas estáticas grandes.

En general, la tracción del perno tiene poco efecto sobre la resistencia final de las juntas debido a que cargas menores que la carga final hacen que las placas se deslicen lo suficiente para producir empuje sobre los pernos. Por consiguiente, el estado superficial y la tracción del perno tienen poco o ningún efecto sobre la resistencia final de una junta de pernos (o de remaches), pero tienen un efecto importante sobre las características de deslizamiento de la carga de la junta. La investigación más reciente ha demostrado que el valor del factor de deslizamiento no depende básicamente del rozamiento entre las superficies en contacto sino del esfuerzo cortante sobre las partes sobresalientes de las dos superficies—es decir, de su rugosidad y resistencia.

En la instalación de pernos de resistencia alta, cada perno se debe apretar hasta su carga de prueba. Esto se puede hacer por uno de dos métodos: el método de apretado con *llave calibrada* y el método de apretado por *giro de la tuerca*. Un perno A325 o A490 que se aprieta con el método de la llave calibrada (es decir, controlando el par de torsión) debe llevar una arandela endurecida bajo el elemento que se está girando (tuerca o cabeza del perno) en el proceso de apretado. Para unir materiales que tengan un punto de fluencia mínimo especificado por debajo de 40 klb/pul² (276 MPa) se deben utilizar dos arandelas aceradas con cada perno A490.

Diseño de juntas con pernos de resistencia alta Hay dos tipos posibles diferentes de uniones con pernos de resistencia alta: el tipo de *fricción* y el tipo de *empuje* (excluyendo las roscas de los planos de corte). Para las uniones del tipo de empuje, el *manual de la AISC* da las capacidades admisibles para diferentes esfuerzos admisibles, de acuerdo con el tipo de unión, el diámetro del perno, el espesor del material sujetado y la calidad de los pernos y de los materiales unidos. Para el tipo de fricción, las especificaciones de la AISC dan un esfuerzo cortante admisible ficticio. Este tipo difiere en diseño del tipo de empuje únicamente en que en el tipo de fricción no hay necesidad de verificar el esfuerzo o capacidad de empuje. El concepto de esfuerzo cortante admisible ficticio en las uniones de tipo de fricción reduce el diseño de una unión con pernos de resistencia alta al mismo procedimiento empleado para uniones con pernos A307 o con remaches.

Los sufijos a continuación de las especificaciones A325 y A490 representan lo siguiente: F: unión del tipo de fricción; N: unión del tipo de empuje con las roscas incluidas en el plano de corte; X = unión del tipo de empuje con las roscas excluidas del plano de corte.

Cuando los pernos de resistencia alta se someten a tracción, se debe verificar su adecuación contra la tracción total debida a cargas externas de tracción. El lector debe consultar en los textos de diseño estructural un tratamiento más detallado de los sujetadores estructurales.

Ejemplo 15-17 Resolver nuevamente el ejemplo 15-16 utilizando (a) pernos del tipo de fricción, A325, de $\frac{7}{8}$ pul de diámetro y (b) pernos del tipo de empuje, A325, de $\frac{7}{8}$ pul de diámetro.

SOLUCION

(a) Para pernos del tipo de fricción (A325F o A325N), el esfuerzo cortante admisible es 15 klb/pul² (tabla A-11). Entonces,

$$15 = \frac{P}{8(2)(\pi/4)(\frac{7}{8})^2} \quad \text{de modo que } P = 144.3 \text{ klb}$$

Todos los demás valores permanecen iguales y no hay necesidad de verificar el empuje. La carga admisible máxima se determina por tracción en la sección 4-4 de la placa de unión. De este modo,

$$P_{\max} = 129.6 \text{ klb} \quad \text{Resp.}$$

(b) Para pernos del tipo de empuje (A325X con las roscas excluidas), el esfuerzo cortante admisible es 22 klb/pul² (tabla A-11). Entonces,

$$22 = \frac{P}{8(2)(\pi/4)(\frac{7}{8})^2} \quad \text{de modo que } P = 211.7 \text{ klb}$$

Todos los demás valores permanecen iguales que en el ejemplo 15-16 (no hay necesidad de verificar el empuje) y, nuevamente, la carga admisible máxima está controlada por la tracción de la placa de unión, de donde

$$P_{\max} = 129.6 \text{ klb} \quad \text{Resp.}$$

Hay muchos otros tipos complicados de uniones empernadas, incluyendo las que transfieren simultáneamente fuerzas cortantes y momentos de flexión. Como esta sección se limita a presentar las propiedades básicas de las juntas empernadas, el lector se debe remitir a los textos de diseño estructural para encontrar un tratamiento más detallado de estas uniones.

Uniones soldadas

Para fines de análisis se distingue entre soldaduras a tope y soldaduras con filete, representadas en la fig. 15-29. No hay necesidad de analizar las soldaduras a tope si el metal de aporte tiene por lo menos la misma resistencia que el metal de base y su profundidad es igual o mayor que la de las partes unidas.

Las soldaduras con filetes se pueden cargar longitudinalmente (en forma paralela) o transversalmente (en forma perpendicular), como se muestra en la fig. 15-30. Los mayos indican que una soldadura con filete cargada en ángulos rectos con el filete

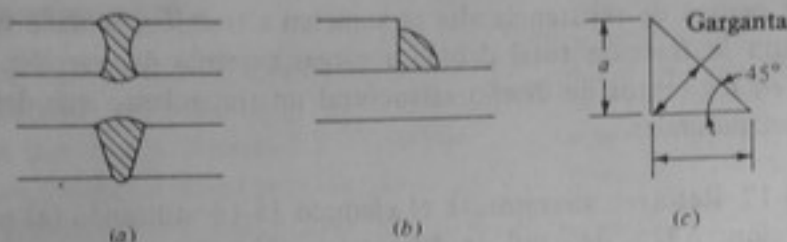


Figura 15-29 (a) Soldaduras a tope. (b) Soldadura con filete. (c) Sección transversal neta de la soldadura con filete.

(transversalmente) es aproximadamente tres veces más débil que cuando se carga longitudinalmente. A pesar de esto, todas las soldaduras con filete se diseñan empíricamente sobre la base del esfuerzo cortante admisible que actúa en el plano de la garganta (fig. 15-29c), independientemente de la dirección de carga. Para fines de diseño se acostumbra determinar la fuerza máxima por unidad de longitud de soldadura mediante

$$F_v = 0.707\tau_v a \quad (15-25)$$

en donde a es la dimensión nominal de la soldadura y τ_v es el esfuerzo cortante admisible. De acuerdo con las especificaciones de la American Welding Society,

$$\tau_v = 0.3\sigma_{ftn} \quad (15-26)$$

en donde σ_{ftn} es la resistencia a la tracción del electrodo. Los electrodos E-60 se utilizan con metales de base de calidad estructural normal (A36), mientras que los electrodos E-70 se usan con aceros de resistencia alta. Los electrodos A-60 y E-70 tienen resistencias a la tracción de 60 y 70 klb/pul², respectivamente.

Las diferentes especificaciones prescriben dimensiones máximas y mínimas para las soldaduras pero dichos detalles no se tratan aquí.

Ejemplo 15-18 Determinar la longitud de una soldadura con filete de $\frac{3}{8}$ pul que se necesita para hacer una unión de resistencia plena como la que se muestra en la fig. 15-31, utilizando electrodos E-60.

SOLUCION Para resistencia plena, el esfuerzo de tracción admisible es $0.66\sigma_{ftn} = 0.66 \times 36 = 24$ klb/pul² y $P_{adm} = 24(4)(\frac{1}{2}) = 48$ klb. Una soldadura con filete de $\frac{3}{8}$ pul puede soportar

$$F_v = 0.707(0.30)(60)(\frac{3}{8}) = 4.77 \text{ klb/pul de longitud}$$

La longitud total que se necesita es

$$L_{tot} = \frac{48}{4.77} \approx 10 \text{ pul} \quad \text{Resp.}$$

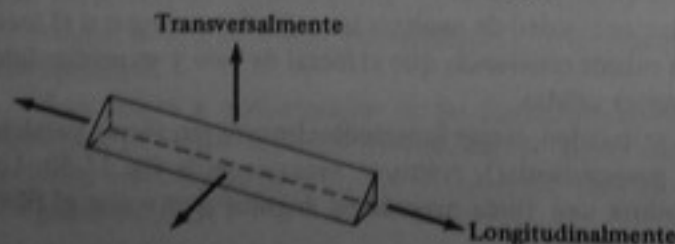


Figura 15-30 Direcciones de carga para soldadura con filete.

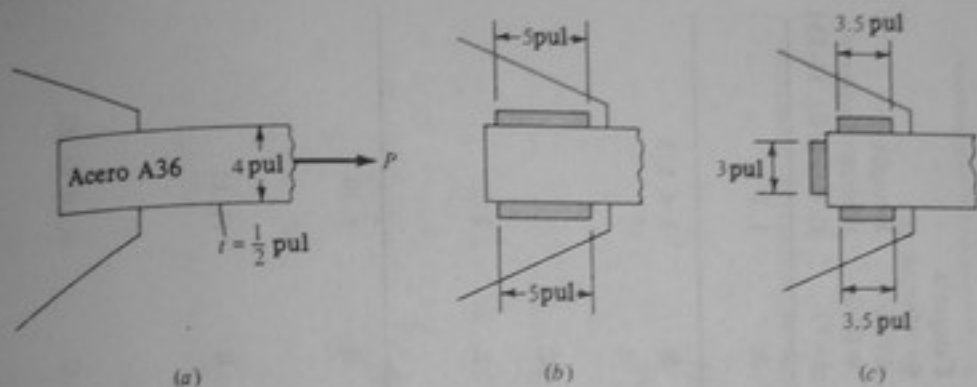


Figura 15-31 Ejemplo 15-18.

Se puede colocar una longitud de 5 pul a cada lado (fig. 15-31b) o bien, una soldadura transversal de 3 pul en el extremo y una soldadura de 3.5 pul a cada lado (fig. 15-31c).

Cuando se soldaban perfiles asimétricos, tales como ángulos, se acostumbraba balancear las soldaduras para garantizar que la fuerza resistente actuara a través del centroide del ángulo (fig. 15-32). No obstante, la práctica moderna consiste en ignorar la carga excéntrica sobre la suposición de que bajo la carga final ambas soldaduras resistirán hasta su capacidad plena.

De nuevo, como en el caso de las uniones empernadas, el lector debe consultar textos de diseño estructural para encontrar un tratamiento detallado de uniones soldadas más complicadas.

Fractura y fatiga de uniones

Las uniones son los lugares más probables de una estructura para que se presenten discontinuidades o grietas, puesto que una unión es la junta de dos o más elementos simples, tales como placas, barras o ejes. Por tal motivo, el comportamiento a la fractura y a la fatiga de las uniones es particularmente crítico al establecer el comportamiento global de una estructura.

El mejor método para establecer el comportamiento a la fatiga de uniones es realizar ensayos *E-N* de uniones reales. Los efectos de la geometría, el acabado superficial, el desalineamiento, etc., son tan críticos que el uso de factores de concentración de esfuerzos con resultados de ensayos *E-N* en probetas pulidas está sujeto a un error con-

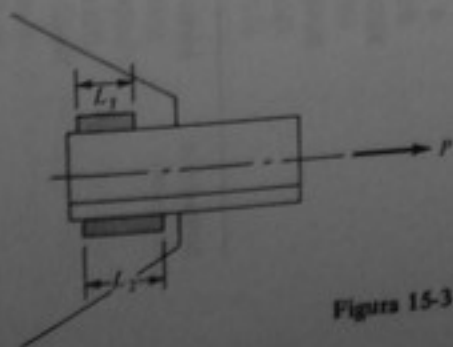


Figura 15-32 Longitudes desiguales de soldaduras.

Tabla 15-4 Categorías de uniones

Condición general	Situación	Clase de intervalo de esfuerzo		Ejemplo ilustrativo número (Véase la fig. 15-33)
		T (tracción) o in (inversión)	Categoría de esfuerzo (Véase la tabla 15-5)	
Material liso	Metal de base con superficies laminadas o limpias; bordes cortados con llama de gas, con una lisura ANSI de 1000 o menos.	T o in	A	1, 2
Elementos ensamblados	<p>Metal de base y metal de aporte en elementos sin fijaciones, ensamblados de placas o perfiles unidos mediante soldaduras continuas en ranuras de penetración total o parcial o mediante soldaduras con filete continuas y paralelas a la dirección del esfuerzo aplicado</p> <p>Esfuerzo de flexión calculado en la base de las soldaduras de atiesadores transversales sobre almas o alas de vigas</p> <p>Metal de base en los extremos de cubreplacas soldadas de longitud parcial que tienen extremos cuadrados o ahusados, con o sin soldaduras entre uno y otro extremo</p>	T o in	B	3, 4, 5, 7
Soldaduras en ranura	<p>Metal de base y metal de aporte en uniones transversales soldadas en ranuras de penetración total de secciones laminadas y soldadas que tienen perfiles parecidos cuando las soldaduras son esmeriladas a ras y la estabilidad de la soldadura verificada por la NDI</p> <p>Metal de base y metal de aporte en o adyacente a uniones transversales soldadas en ranuras de penetración total, en transiciones del ancho o el espesor, con esmerilado de la soldadura para obtener pendientes no mayores de 1 a 2½, con el esmerilado en la dirección del esfuerzo aplicado y la estabilidad de la soldadura verificada por la NDI</p> <p>Metal de base y metal de aporte en o adyacente a uniones soldadas en ranuras de penetración total, con o sin transiciones que tengan pendientes no mayores de 1 a 2½, cuando no se retira el exceso</p> <p>Metal de base en las piezas unidas mediante soldaduras en ranura sometidas a carga transversal y/o longitudinal cuando la longitud de la pieza, <i>L</i>, paralela a la línea de esfuerzo, es entre 2 y 12 veces el espesor de la placa, pero es menor de 4 pul</p> <p>Metal de base en las piezas unidas mediante soldaduras en ranura sometidas a carga transversal y/o longitudinal cuando la longitud de la pieza, <i>L</i>, es mayor</p>	T o in	C	6
		T o in	E	7
		T o in	B	8, 10
		T o in	B	11, 12
		T o in	C	8, 10, 11, 12
		T o in	D	13, 14
		T o in	E	13, 14

Metal de base y metal de aporte en el adyacente a uniones soldadas en ranuras de penetración total, con o sin transiciones que tengan pendientes no mayores de 1 a 3, soldado así se evita el exceso de metal de base en las piezas unidas mediante soldaduras en ranuras sometidas a carga transversal y/o longitudinal cuando la longitud de la pieza, L , es igual o mayor que el espesor de la placa, t , o el espesor de la flange, F .

T o in C 8, 10, 11, 12
T o in D 13, 14
E 15, 16

- Metal de base en los extremos de las piezas mediante soldaduras en ranura sometidas a carga transversal y/o longitudinal, sin importar la longitud de la pieza:
1. Cuando el radio de transición es de 24 pul o más y los extremos de la soldadura se esmerilan hasta alisarlos
 2. Cuando el radio de transición es de 6 pul o más y los extremos de la soldadura se esmerilan hasta alisarlos
 3. Cuando el radio de transición es de 2 pul o más y los extremos de la soldadura se esmerilan hasta alisarlos

T o in B 19
T o in C 19
T o in D 19

Uniones soldadas con filete

- Metal de base en soldaduras con filetes intermitentes, paralelos a la dirección del esfuerzo
- Metal de base adyacente a las piezas soldadas con filete, con la longitud L , en la dirección del esfuerzo, menor de 2 pul y conectores a corte del tipo de pernos prisioneros
- Metal de base adyacente a las piezas soldadas con filete, con la longitud L , en la dirección del esfuerzo, entre 2 pul y 12 veces el espesor de la placa, pero menor de 4 pul
- Metal de base adyacente a las piezas soldadas con filete, con la longitud L , en la dirección del esfuerzo, mayor que 12 veces el espesor de la placa o mayor de 4 pul
- Metal de base en las piezas unidas mediante soldaduras con filete, sin importar la longitud en la dirección del esfuerzo:
1. Cuando el radio de transición es de 24 pul o más y los extremos de la soldadura se esmerilan hasta alisarlos
 2. Cuando el radio de transición es de 6 pul o más y los extremos de la soldadura se esmerilan hasta alisarlos
 3. Cuando el radio de transición es de 2 pul o más y los extremos de la soldadura se esmerilan hasta alisarlos

T o in E 15, 16, 17
T o in C 15, 16, 17
T o in D 14, 15, 16
T o in E 14, 16
T o in B 19
T o in C 19
T o in D 19

Uniones mecánicas

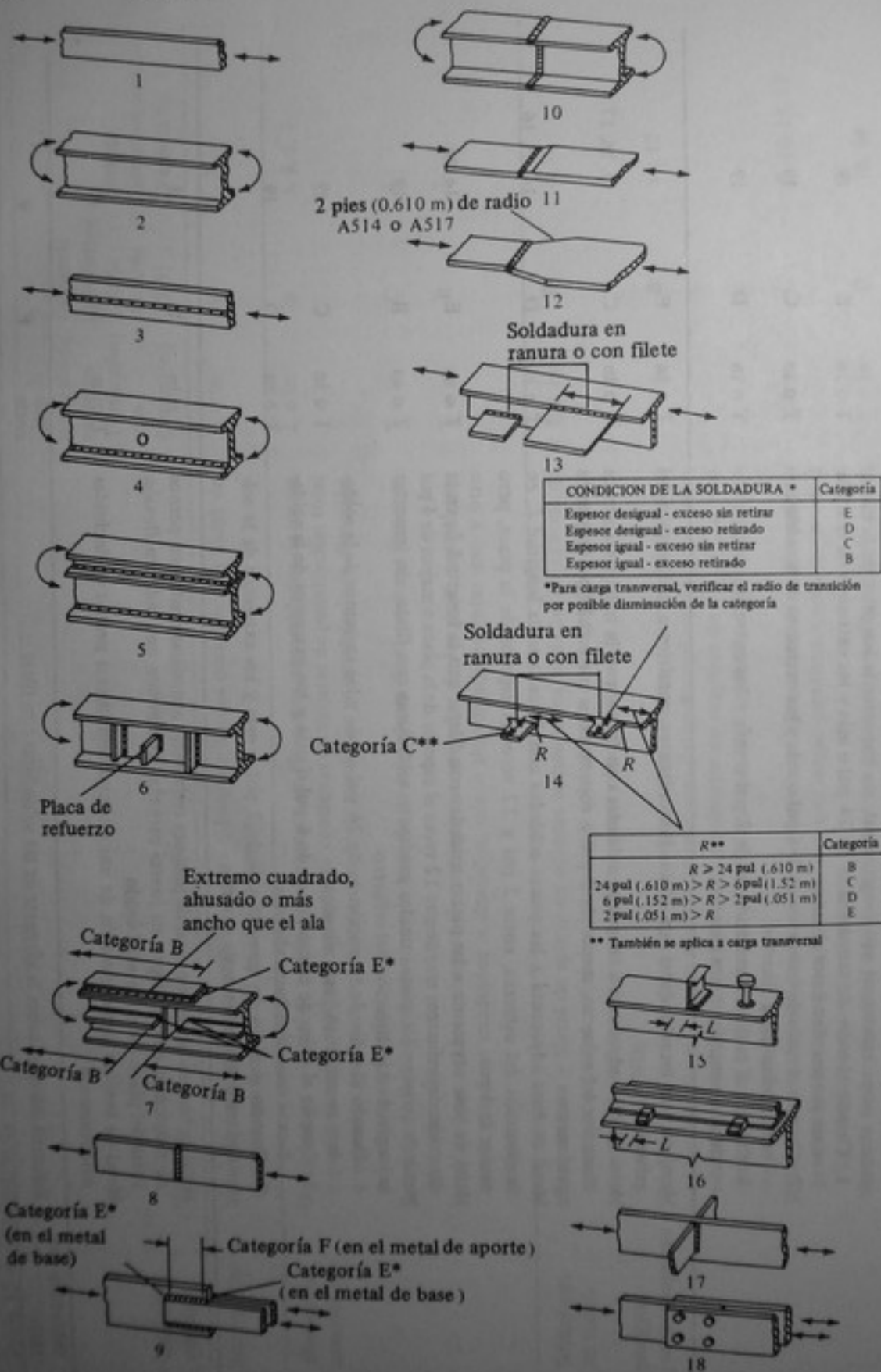
- Metal de base en la sección total de uniones resistentes al deslizamiento con pernos de resistencia alta, excepto en juntas cargadas axialmente que inducen flexión fuera del plano en el material unido
- Metal de base en la sección neta de uniones con remaches o pernos no incluidas anteriormente

T o in B 18
T o in D 18

Soldaduras con filete

- Esfuerzo cortante sobre la garganta de las soldaduras con filete

corde F 9



*En el extremo de la soldadura; no tiene longitud

Figura 15-33 Ejemplos de uniones.

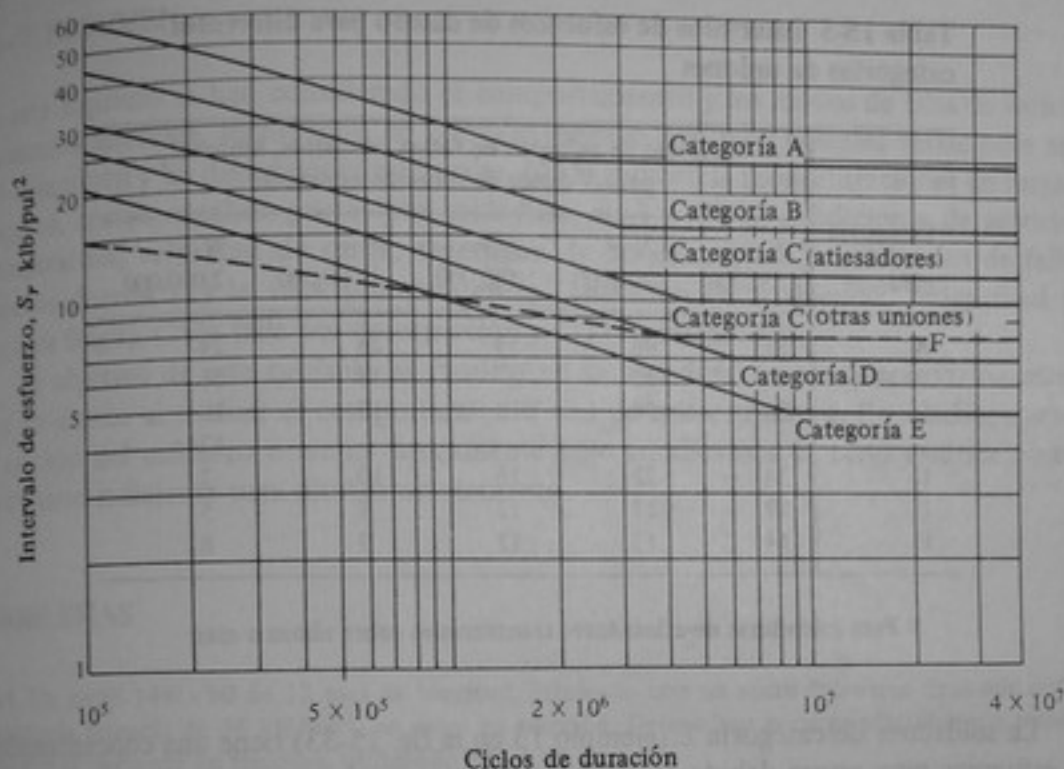


Figura 15-34 Curvas de diseño E-N para uniones de categorías A a E.

siderable. La fig. 15-33 representa varios tipos de uniones soldadas empleadas comúnmente por los ingenieros de puentes. Estos dieciocho ejemplos se describen y se dividen en seis categorías en la tabla 15-4. La categoría A es una placa lisa sin soldadura (sin unión) y tiene el mejor comportamiento a la fatiga. Las categorías E y F, en el otro extremo, tienen un comportamiento a la fatiga supremamente pobre debido a la severidad de la concentración de esfuerzos (véase el ejemplo 13 en la fig. 15-33).

Los resultados de ensayos de fatiga, E-N, de estas uniones se muestran en la fig. 15-34, e ilustran cómo se desmejora el comportamiento a la fatiga desde la categoría A hasta la categoría E. Las curvas corresponden a especificaciones para puentes, pero se pueden hallar curvas E-N semejantes en especificaciones para piezas de máquinas, recipientes a presión, etc. En la tabla 15-5 se resumen las duraciones en fatiga para diferentes ciclos, determinados a partir de estos resultados. Así, las uniones soldadas a tope, con el exceso esmerilado y liso (véanse los ejemplos 7, 10, 11 y 12 en la fig. 15-33), se designan mediante la categoría B (fig. 15-34) y tienen un límite de fatiga (para una duración de más de 2 000 000 de ciclos) de 24 klb/pul². Por otro lado, estas mismas uniones soldadas a tope, conservando el exceso, exhiben un comportamiento a la fatiga *más pobre* debido al efecto de la concentración de esfuerzos del exceso de soldadura. Una unión soldada a la que no se le ha retirado el exceso corresponde a una categoría C (fig. 15-34) y tiene un límite de fatiga de 16 klb/pul² (tabla 15-5).

De este modo, el exceso de soldadura no "refuerza" la junta debido al área adicional sino que, por el contrario, *debilita* la unión debido a su comportamiento más pobre a la fatiga. El material adicional no hace, necesariamente, más fuerte una unión.

Tabla 15-5 Intervalos de esfuerzos de diseño para diferentes categorías de uniones

Categoría del esfuerzo	Intervalo de esfuerzo de fatiga admisible, klb/pul^2 , para N ciclos de esfuerzo constante				
	$N = 150,000$	$N = 200,000$	$N = 500,000$	$N = 2,000,000$	$N > 2,000,000$
A	53	48	36	24	24
B	40	36	27	18	16
C	28	26	19	13	10
D	24	22	16	10	7
E	19	17	12	8	5
F	14	13	12	9	8

† Para soldaduras de atiesadores transversales sobre almas o alas.

La soldadura de categoría E (ejemplo 13 en la fig. 15-33) tiene una concentración de esfuerzos muy severa debido al cambio repentino en la geometría; tiene un límite de fatiga de solo 5 klb/pul^2 , como se indica en la fig. 15-34 y en la tabla 15-5.

De nuevo, el comportamiento a la fatiga de las uniones se determina mejor utilizando uniones reales para hallar los resultados $E-N$ que utilizando probetas pulidas y factores de concentración de esfuerzos.

El comportamiento a la fractura de uniones generalmente se analiza suponiendo que existe una pequeña grieta y siguiendo el procedimiento descrito en el capítulo 13, es decir:

1. Estimar el tamaño de la grieta por inspección, por suposición o mediante especificaciones de códigos. (Una especificación para aviones militares establece que durante el proceso de diseño, el diseñador debe suponer que existe una grieta de un determinado tamaño y debe demostrar que en estas condiciones la estructura se comportará satisfactoriamente.)
2. Utilizando este tamaño de la grieta, así como el esfuerzo nominal (determinado en la parte 1) y la relación adecuada K_I , calcular $K_{I, dis}$.
3. Comparar $K_{I, dis}$ con la propiedad crítica adecuada del material (K_I , K_{Ic} , K_{Id}) para todas las condiciones de servicio, incluyendo el posible desarrollo de la grieta por fatiga.
4. Si $K_I < K_e$ con un margen satisfactorio a lo largo de la duración de la estructura, no debe presentarse fractura y el diseño por resistencia a la fractura es adecuado.
5. Si $K_I > K_e$ en cualquier momento, a lo largo de la duración de la estructura, es necesario un rediseño.
6. Tal como se describió en el capítulo 13, un rediseño puede consistir en disminuir el nivel de esfuerzo o el tamaño de la grieta (es decir, disminuyendo K_I) o utilizando materiales con una tenacidad a la entalla mayor (aumentando K_e).

15-7 RESUMEN

En este capítulo se han considerado el comportamiento y los modos de falla de varios elementos sencillos, incluyendo su comportamiento real bajo posibles variaciones en (1) el material y las dimensiones nominales, (2) la geometría (concentraciones de carga, agujeros, cortes, entalles, grietas por soldadura, etc.) y (3) las condiciones de servicio (temperatura, velocidad de carga, repetición de las cargas, etc.). Los modos de falla tratados fueron (1) la falla por resistencia (iniciación de la fluencia, fatiga final y fractura frágil), (2) la falla por deformación y (3) la inestabilidad.

El objetivo de este capítulo es recalcar en la necesidad de considerar varios criterios de diseño al evaluar el comportamiento real de una estructura. En muchos casos, el cálculo del esfuerzo nominal únicamente bajo condiciones de carga estática no es un criterio suficiente para diseñar un elemento.

PROBLEMAS

15-1 Un perfil 14W x 90 de 12 pies de longitud, fabricado con un acero dulce que tiene una resistencia a la fluencia de 36 klb/pul², se carga en tracción. Determinar la carga admisible que puede soportar el elemento en tracción, utilizando FS = 1.67.

15-2 Suponer que el elemento del problema 15-1 exhibe el comportamiento a la fatiga descrito en la fig. 14-13. Suponer que la duración en fatiga depende solamente del intervalo de esfuerzo y no de los valores de R; es decir, despreciar cualquier efecto secundario del esfuerzo medio. Si el elemento se carga cíclicamente desde cero hasta la carga plena, determinar cuál es la duración en fatiga del elemento.

15-3 Si el elemento del problema 15-1 debe soportar un número infinito de ciclos desde cero hasta la carga plena, ¿cuál es el nivel del esfuerzo de diseño por fatiga? ¿Cuál es la carga de diseño por fatiga para este caso? ¿Cuál es el FS contra fluencia para este diseño?

15-4 Suponga que el elemento del problema 15-1 se carga en forma cíclica desde 0 hasta 2 MN y que se debe establecer un factor de seguridad de 2 en la duración. ¿Cuál es la duración en fatiga para esta situación, utilizando los resultados de fatiga dados en la fig. 14-13?

15-5 Suponer que el elemento del problema 15-2 es de un acero estructural de resistencia baja (ferrítico-perlítico) y tiene una grieta aguda de 0.5 pul de profundidad en un borde de un ala. Si el acero tiene una K_{Ic} a la temperatura de servicios de 60 MPa · m^{1/2} y el elemento se carga cíclicamente en tracción desde 0 hasta 600 klb, ¿cuál es su duración en fatiga?

15-6 Repetir el problema 15-1 si el elemento está cargado en compresión, utilizando las especificaciones de la AISC. Suponer extremos articulados con pasadores en ambas direcciones y $E = 29 \times 10^3$ klb/pul².

15-7 Repetir el problema 15-6 utilizando las especificaciones de la AASHTO.

15-8 Si el elemento descrito en el problema 15-1 tiene una grieta aguda de 2 pul de profundidad en un ala, un σ_{flu} de 36 klb/pul² y una K_{Ic} a la temperatura de servicio de 40 klb/pul² · pul^{1/2}, ¿cuál es la carga máxima que puede soportar el elemento antes de la fractura?

15-9 Si la grieta de 2 pul de profundidad está en el centro del ala del perfil 14W x 90 y las propiedades del material son las mismas que en el problema 15-8, ¿cuál es la carga máxima que puede soportar el elemento antes de la fractura?

15-10 Una placa ancha tiene una grieta de 15 mm de profundidad en uno de sus bordes, un σ_{flu} de 400 MPa y una K_{Ic} de 110 MPa · m^{1/2}. El elemento se carga lentamente hasta la falla. ¿Cuál es la carga de falla y cómo falla el elemento? Explicar la respuesta.

15-11 Suponga que el elemento del problema 15-10 tiene una grieta de 2 pul en un borde de la placa y todas las demás condiciones son iguales. ¿Cuál será la carga de falla para estas condiciones? Explicar la respuesta.

15-12 Las varillas AB y BC están hechas de tubería de 2 pul de diámetro exterior y 0.25 pul de espesor de pared. Utilizando las especificaciones de la AISC y $\sigma_{fu} = 36 \text{ klb/pul}^2$, halla P_{adm} . Suponer extremos articulados con pasadores.

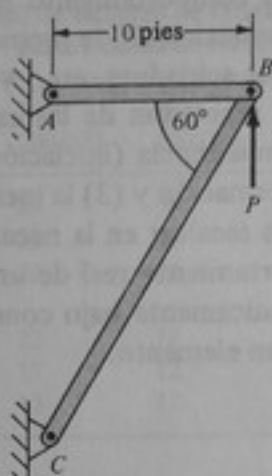


Figura P15-12

15-13 Repetir el problema 15-12 si AB y BC son ángulos de $4 \times 4 \times \frac{1}{2}$ pul con $A = 3.75 \text{ pul}^2$ y $r_{\min} = 0.782 \text{ pul}$. ¿Cuál es la carga P admisible, utilizando las especificaciones de la AISC?

15-14 Repetir el problema 15-12 si las barras están hechas de 2 ángulos $3 \times 2 \times \frac{7}{16}$ unidos dorso con dorso.

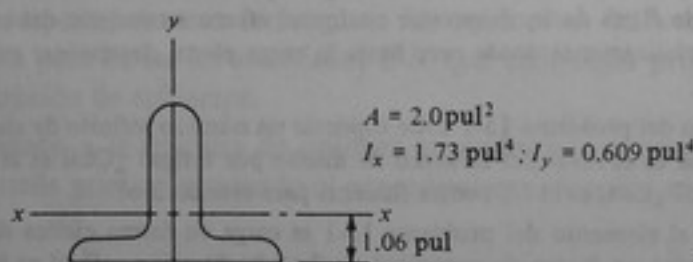


Figura P15-14

15-15 La viga de la figura se somete a la carga que se indica. Suponiendo apoyo lateral, seleccionar una viga W16 de acero A36 con base en un factor de seguridad contra la iniciación de la fluencia de 1.5.

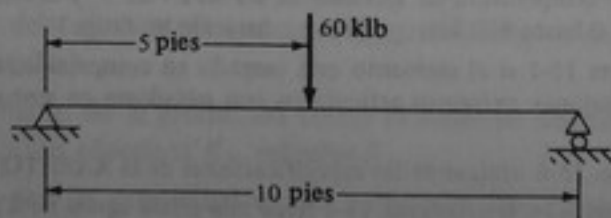


Figura P15-15

15-16 Rediseñar la viga del problema 15-15 utilizando el método de diseño plástico y $FC = 1.5$.

15-17 y 15-18 Repetir los problemas 15-15 y 15-16, seleccionando una viga 12W y utilizando $\sigma_{fu} = 50 \text{ klb/pul}^2$.

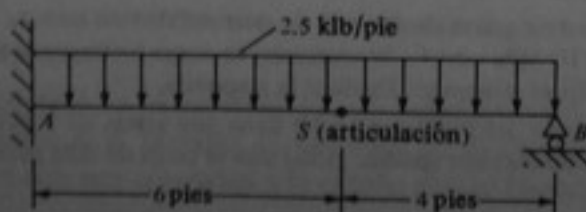
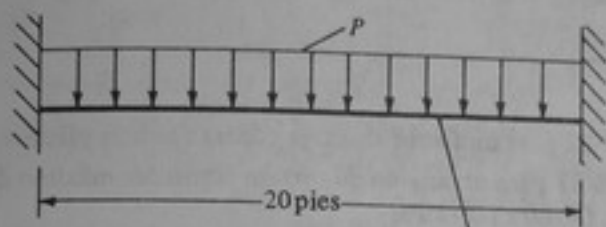


Figura P15-17 y 15-18

- 15-19 ¿Cuál es el valor admisible máximo de p en klb por pie, utilizando el criterio de iniciación de la fluencia y $FS=1.67$?
- 15-20 Repetir el problema 15-19 utilizando el método de diseño del factor de carga con $FC=1.67$.
- 15-21 y 15-22 Repetir los problemas 15-15 y 15-16 utilizando una viga 10W con $\sigma_{flu}=50$ klb/pul². (Sugerencia: Para momentos bajo comportamiento lineal, véase la tabla A-8).



14W×68, acero A36 Figura P15-19 y 15-20

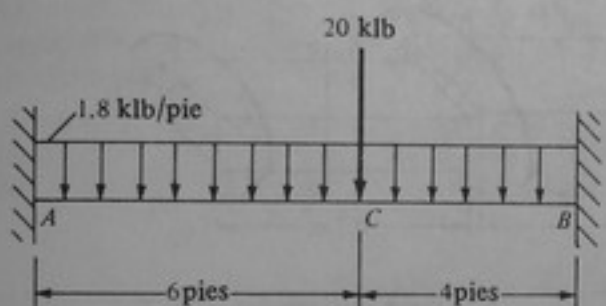


Figura P15-21 y 15-22

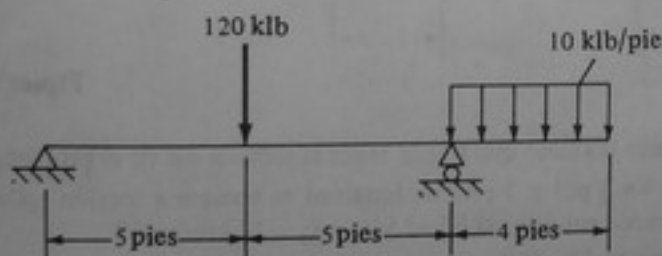


Figura P15-23 y 15-24

- 15-23 y 15-24 Repetir los problemas 15-15 y 15-16 seleccionando una viga de la serie 14W hecha de acero A36 y utilizando la carga que se muestra.
- 15-25 y 15-26 Repetir los problemas 15-15 y 15-17 para una deflexión admisible máxima de $L/360$, en donde L es el tramo total entre los apoyos. Usar $E=29 \times 10^3$ klb/pul².
- 15-27 Se fabrica una viga simplemente apoyada que tiene una longitud de 40 pies con un perfil W21=147. El material es un acero A36 con $\sigma_{flu}=36$ klb/pul². Suponga que el comportamiento a la fatiga de este acero es el que se ilustra en la fig. 14-13. Para la duración infinita, ¿cuál es la carga viva máxima (0 a tracción plena) que se puede aplicar en el centro de la viga?
- 15-28 Si la viga del problema 15-27 se somete a una carga viva de 0 a 80 klb, ¿cuál será la duración en fatiga?
- 15-29 El elemento del problema 15-27 tiene una grieta aguda de 1.0 pul de profundidad en una de las alas sometidas a tracción y tiene un valor de K_{Ic} de 120 MPa · m^{1/2} a la temperatura de servicio. Para una carga viva de 0 a 75 klb, ¿cuál es la duración en fatiga?
- 15-30 Resolver el problema 15-29 suponiendo que la profundidad inicial de la grieta es 2.0 pul.
- 15-31 Suponer que la viga del problema 15-27 se pone en servicio en un sitio con temperatura de -60 F. A esta temperatura, $K_{Ic}=60$ klb/pul · pul^{1/2}, $a_0=40$ mm y la carga viva es 0 a 40 klb. ¿Cuál es la duración de la estructura y cómo fallará?

15-32 Para el eje que se muestra, ¿cuál es el valor admisible máximo del momento de torsión, T , para un factor de seguridad contra la iniciación de la fluencia de 1.67 y $\tau_{flu} = 80$ MPa?

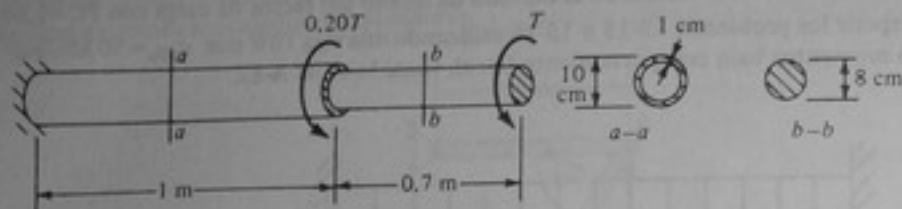


Figura P15-32

15-33 Repetir el problema 15-32 para un factor de carga contra fluencia plástica de 1.67.

15-34 Repetir el problema 15-32 para un ángulo de torsión admisible máximo de 1.2° bajo condiciones de carga de trabajo con $G = 80 \times 10^3$ MPa.

15-35 y 15-36 Repetir los problemas 15-32 y 15-34;

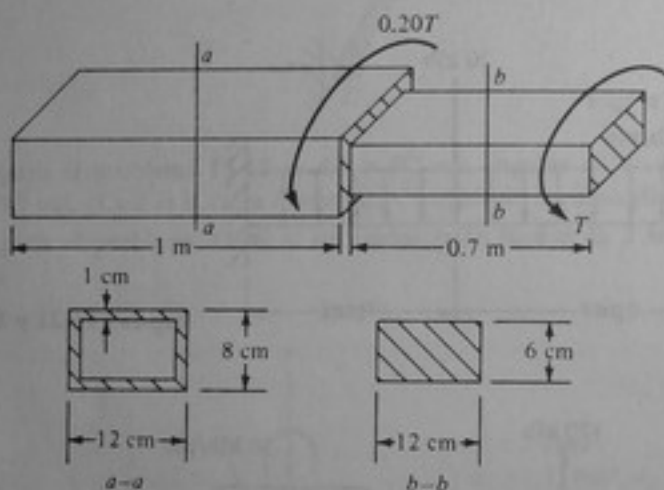


Figura P15-35 y 15-36

15-37 ¿Cuál es el momento máximo que puede tener la sección $a-a$ en el problema 15-35?

15-38 Un ángulo de $4 \times 4 \times \frac{1}{2}$ pul y 3 pies de longitud se somete a torsión. ¿Cuál es el momento de torsión máximo que puede soportar si $FS = 1.5$ y $\tau_{flu} = 20$ klb/pul²?

15-39 Repetir el problema 15-38 si $FC = 1.6$ y $\tau_{flu} = 20$ klb/pul².

15-40 Repetir el problema 15-38 si la torsión admisible máxima es 2.5° y $G = 12 \times 10^3$ klb/pul².

15-41 El eje circular que se muestra es accionado por un motor de 20 hp a 1700 rpm. ¿Cuál es el diámetro mínimo requerido por el eje para (a) un factor de seguridad de 1.5 contra iniciación de la fluencia, (b) un factor de carga de 1.7 contra fluencia plástica total, (c) una torsión máxima de 4° y (d) un factor de seguridad de 2.5 contra pandeo por torsión? Utilizar $\tau_{flu} = 100$ MPa, $G = 80 \times 10^3$ MPa y $\nu = 0.25$.

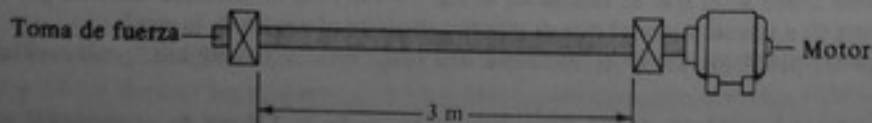


Figura P15-41

15-42 Un recipiente cilíndrico largo, a presión, tiene una presión interna de 10 MPa. Para un diámetro interno de 1 m, determinar el espesor de pared necesario, en milímetros, con base en un factor de carga contra reventamiento de 4. Utilizar $\sigma_{trac} = 450$ MPa.

15-43 ¿Cuál es la presión interna admisible en un recipiente cilíndrico a presión con un diámetro interior de 25 pul y un espesor de pared de $3/4$ pul para un factor de carga de 3.5 contra reventamiento si $\sigma_{trac} = 70$ klb/pul²?

15-44 Suponer que un recipiente largo cilíndrico a presión de 30 pul de diámetro tiene un espesor de pared de 1 pul. Existe una grieta superficial semiéptica longitudinal de 0.3 pul de profundidad y 1.0 pul de longitud superficial. Si la K_{Ic} del material del recipiente es $120 \text{ klb/pul}^2 \cdot \text{pul}^{1/2}$ y la resistencia a la fluencia es 189 klb/pul , ¿cuál es la presión interna máxima que puede soportar este recipiente sin fallar?

15-45 Para el recipiente descrito en el problema 15-44, si la profundidad de la grieta es 0.8 pul y su longitud superficial es 2.0 pul, ¿cuál es la presión interna en el momento de la falla?

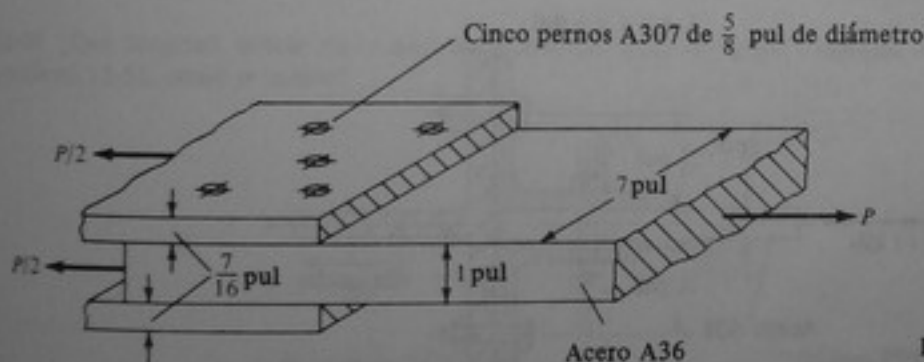
15-46 Suponer que el recipiente del problema 15-44 se enfría hasta -100°F , temperatura a la cual K_{Ic} es $60 \text{ klb/pul}^2 \cdot \text{pul}^{1/2}$. Si la profundidad de la grieta es 0.5 pul y su longitud en la superficie es 4 pul, ¿cuál es la presión interna en el momento de la falla?

15-47 Suponer que la presión dentro del recipiente del problema 15-44 varía cíclicamente entre 2000 y 4000 lb/pul². ¿Cuántos ciclos de carga resistirá el recipiente? ¿Cómo fallará? Explicar la respuesta.

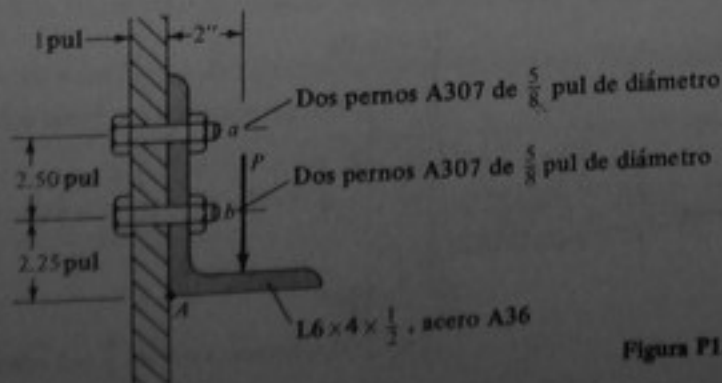
15-48 Suponer que la presión dentro del recipiente del problema 15-46 varía cíclicamente entre 1000 y 2500 lb/pul² a -100°F . La geometría inicial de la grieta es la misma, es decir, 0.5=4 pul. ¿Cuántos ciclos de carga resistirá el recipiente? ¿Cómo fallará? Explicar la respuesta.

15-49 Suponer las condiciones descritas en el problema 15-44, con la excepción de que la orientación de la grieta es *circunferencial* en lugar de longitudinal. ¿Cuál es la presión máxima que puede soportar el recipiente sin fallar?

15-50 ¿Cuál es el valor de P_{max} , de acuerdo con las especificaciones de la AISC, para la unión mostrada? Considerar el corte en los pernos, la tracción de la placa y el empuje y utilizar $\sigma_t = 0.6 \sigma_{fu}$, $\tau = 10 \text{ klb/pul}$, $\sigma_p = 1.35 \sigma_{fu}$ y $d_{\text{agujero}} = d_{\text{perno}} + \frac{1}{16} \text{ pul}$.



15-51 Para la unión de la figura, ¿cuál es el valor admisible máximo de P , suponiendo que el ángulo es suficientemente fuerte? (Sugerencia: Suponer que las fuerzas de tracción en los pernos a y b son proporcionales a las distancias desde sus líneas medias hasta el punto A . Considerar también el esfuerzo de empuje en el ángulo.) El diámetro del agujero es igual al diámetro del perno más $\frac{1}{16}$ pul y el área sobre la cual se ejerce el esfuerzo de tracción para un perno de $\frac{5}{8}$ pul de diámetro es 0.226 pul^2 . Utilizar las especificaciones de la AISC.



15-52 Para la unión que se muestra se emplean ocho pernos A307 de $\frac{3}{8}$ pul de diámetro. Utilizar las especificaciones de la AISC.

(a) Determinar el valor máximo de P considerando la tracción de la placa, el empuje sobre la placa y el corte de los pernos.

(b) ¿Cuál es la eficiencia de la junta?

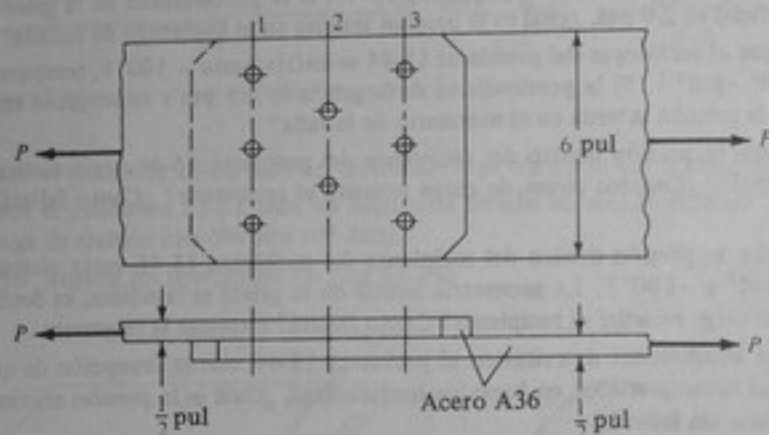


Figura P15-52

15-53 ¿Cuántos pernos A307 de $\frac{3}{8}$ pul se necesitan para la unión que se muestra? Suponer acero A36, $A_{\text{trac}} = 0.226 \text{ pul}^2$ y que la sección W es suficientemente fuerte.

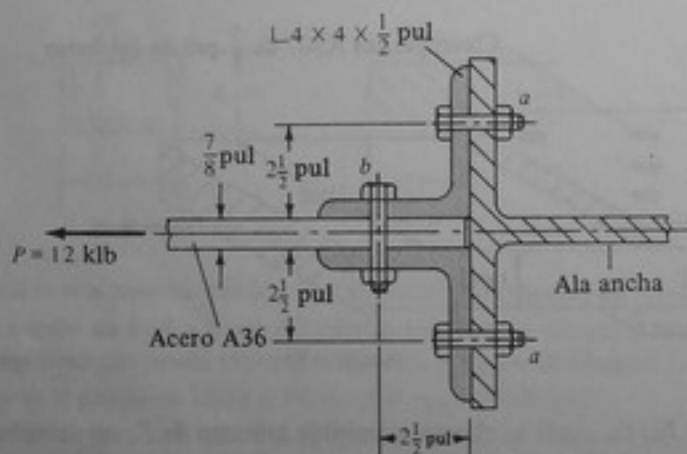


Figura P15-53

15-54 En la unión de la figura los pernos soportan una fuerza cortante total de 10 klb más una carga de tracción P . Utilizar las especificaciones de la AISC para determinar P_{max} . Las soldaduras en b son E-70, $\frac{1}{2}$ pul, y tienen 3 pul de longitud cada una. El área sobre la cual se ejerce el esfuerzo de tracción para un perno de $\frac{5}{8}$ pul de diámetro es 0.226 pul^2 .

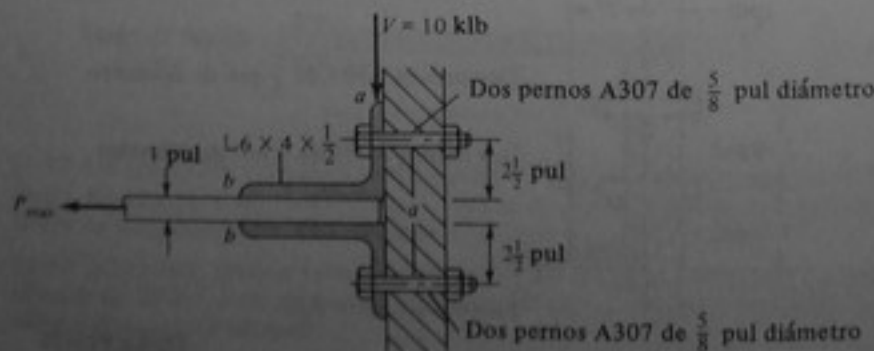


Figura P15-54

- 15-55 y 15-56 Repetir los problemas 15-50 y 15-52 utilizando pernos A325 del tipo de fricción de $\frac{1}{4}$ pul.
 15-57 Repetir el problema 15-50 si las placas se unen mediante dos soldaduras E-60 de $\frac{3}{8}$ pul y 5 pies de longitud, como se indica.

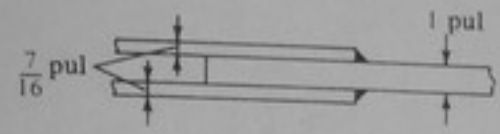


Figura P15-57

- 15-58 ¿Cuál es el valor de P_{max} si se usan electrodos E-60?

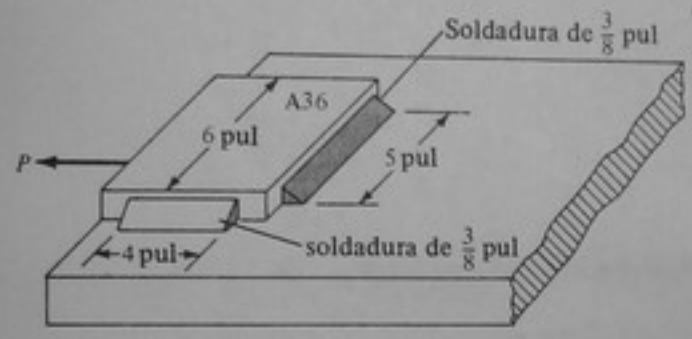


Figura P15-58

- 15-59 ¿Qué longitud deben tener las soldaduras con filete de $\frac{1}{4}$ pul utilizadas en la unión del problema 15-53, como se indica?

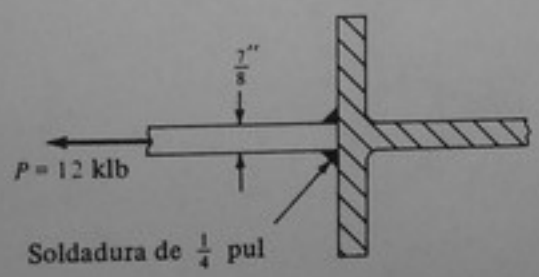


Figura P15-59

- 15-60 La unión representada en el ejemplo 10 de la fig. 15-33 está hecha de un perfil W33 x 141. La soldadura se esmerila a ras y la estabilidad de la soldadura se verifica por inspección no destructiva. Para una duración de 2 000 000 de ciclos de carga, ¿cuál es el intervalo de esfuerzo admisible?
 15-61 Si no se retira el exceso de soldadura del elemento descrito en el problema 15-60, ¿cuál es el intervalo de esfuerzo admisible para una duración de 2 000 000 de ciclos de carga?
 15-62 Una placa lateral de 12 pies de longitud se suelda al ala de tracción del elemento descrito en el problema 15-60. ¿Cuál es el intervalo de esfuerzo admisible para una duración de 2 000 000 de ciclos?
 15-63 ¿Cuál es el intervalo de esfuerzo admisible en el elemento del problema 15-61 para 200 000 ciclos de carga?
 15-64 Suponer que el elemento del problema 15-52 se fabrica con pernos de resistencia alta. ¿Cuál es el intervalo de esfuerzo admisible para 500 000 ciclos de carga?
 15-65 Si se presentara una grieta transversal en la unión representada en el ejemplo 11 de la fig. 15-33, ¿qué información se necesitaría para predecir la duración en fatiga de esta unión?

Apéndice A

Tablas

Tabla A-1 Factores de conversión de unidades inglesas (de ingeniería) a unidades SI

Para convertir	A	Multiplicar por
pies (pie)	metros (m)	0.3048
libras fuerza (lbf)	newtons (n)	4.448
pulgadas (pul)	metros	2.540×10^{-2}
pulgadas	centímetros (cm)	2.54
kilolibras (klb)	kilonewtons (kN)	4.448
klb por pulgada ² (klb/pul ²)	megapascales (MPa)	6.895
pulgadas ⁴ (momento de inercia)	centímetros ⁴	41.623
libras fuerza por pulgada cuadrada (lb/pul ²)	kilopascales (kPa) †	6.895
pies ⁴	metros ²	9.29×10^{-2}
pul ²	centímetros ²	6.452
libras fuerza-pulgada	newtons-metro (N · m)	0.1129
libras fuerza-pie	Newtons-metro	1.356
libras fuerza-pie (energía)	joules (J) (energía) ‡p	1.356
klb-pie	kilonewtons-metro (kN · m)	1.356
libras fuerza por pulgada	newtons por metro (N/m)	175.127
libras fuerza por pie	newtons por metro	14.594
klb por pie	kilonewtons por metro (kN/m)	14.594
grados Fahrenheit (°F)	grados celcius (°C)	$t_C = (t_F - 32)/1.8$

Factores de multiplicación en el sistema SI

10 ⁶	mega (M)	10 ⁻¹	deci (d)
10 ³	kilo (k)	10 ⁻²	centi (c)
10 ²	hecto (h)	10 ⁻³	mili (m)
10	deca (da)	10 ⁻⁶	micro (μ)

† 1 Pa = 1 N/m².

‡ 1 J = 1 N · m.

Tabla A-2 Propiedades mecánicas típicas de materiales de ingeniería seleccionados.

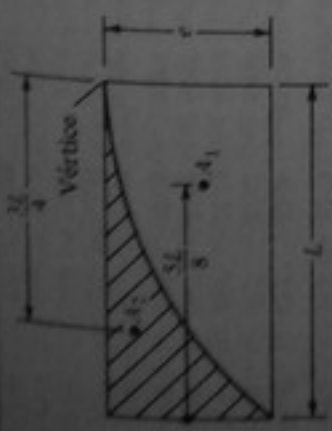
	E , GPa/ 10^6 lb/pul ²	ν	σ_{na} , MPa/klb/pul ²	σ_{na} , MPa/klb/pul ²	Masa/unidad de de volumen Mg por m ³ lb por pie ³	Coefficiente de dilatación térmica por 10^{-6} por °C/ 10^{-6} por °F
Aleación de aluminio, 2024-T4	72/10.5	0.33	300/44	475/69	2.78/173	23.2/12.9
Aleación de aluminio 6061-T6	69/10.0		240/35	260/38		
Latón, laminado en frío	100/14.6	0.35	410/60	520/75	8.75/543	17.6/9.8
Latón, recocido			100/15	270/40		
Hierro fundido, gris (comp.)	89/13	0.20		825/120	7.20/447	10.4/5.8
Hierro fundido, maleable	171/25	0.32	250/36	370/54	7.37/457	12.1/6.7
Concreto de resistencia media	21/3.1	0.15	8/1.2	21/3.0	2.41/150	10.8/6.0
Concreto de resistencia alta	31/4.5		14/2.0	34/5.0		
Aleación de magnesio	45/6.5	0.35	240/35	280/40	1.80/112	25/14
Aceros, 0.2% C, laminado en caliente			250/36	445/65		
Aceros, 0.4% C, laminado en caliente			360/52	580/		
Aceros, 0.6% C, templado	205/30	0.27	515/75	825/120	7.87/489	11.7/6.5
Aceros, 3.5% Ni, 0.4% C			1030/150	1375/200		
Titanio						
Madera, abeto rojo	109/15.9	0.34	825/120	895/130	4.44/276	8.3/4.6
Madera, pino	12/1.8		44/6.4	51/7.4	0.61/38	6.1/3.4
	12/1.8			58/8.4	0.58/36	

Tabla A-3 Propiedades de áreas planas.

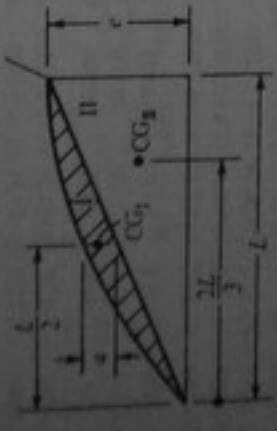
Media parábola

$$A_1 = \frac{2aL}{3}$$

$$A_2 = \frac{cL}{3}$$



No necesariamente el vértice



Parte de parábola

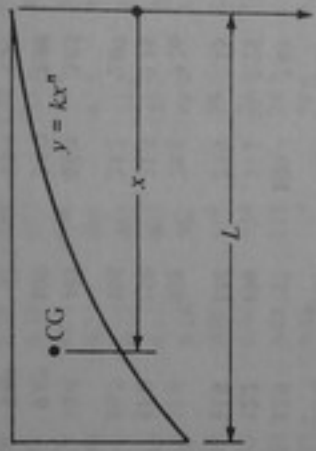
$$A_1 = \frac{2aL}{3}$$

$$A_2 = \frac{cL}{2}$$

Curva de n-ésimo grado

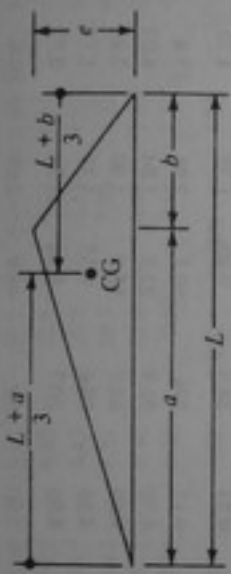
$$A = \frac{yL}{n+1}$$

$$x = \frac{n+1}{n+2}L$$



Triángulo

$$A = \frac{eL}{2}$$



Rectángulo

$$A = bh$$

$$I_0 = \frac{bh^3}{12}$$



Círculo

$$A = \pi r^2$$

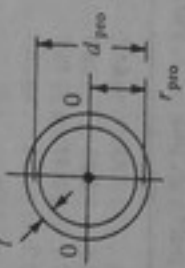
$$I_0 = \frac{\pi r^4}{4}$$



Tubo delgado

$$A = 2\pi r_{pro} t$$

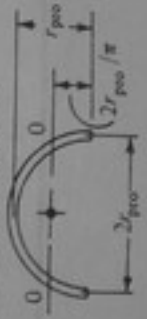
$$I_0 = \frac{J}{2} \approx \pi r_{pro}^3 t$$



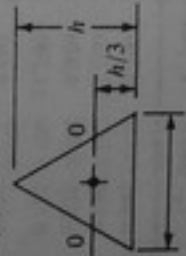
Medio tubo delgado

$$A = \pi r_{pro} t$$

$$I_0 \approx 0.095 \pi r_{pro}^3 t$$



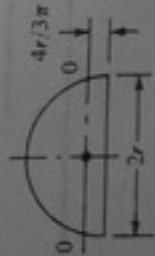
Triángulo



$$A = \frac{bh}{2}$$

$$I_0 = \frac{bh^3}{36}$$

Semicírculo



$$A = \frac{\pi r^2}{2}$$

$$I_0 = 0.111 r^4$$

Tabla A-4 Perfiles W. Propiedades para diseño

Designación	Ala				Propiedades elásticas						Constante de torsión		Módulo plástico	
	Área A , pul ²	Altura d , pul	Ancho b_f , pul	Espesor t_f , pul	Eje X-X		Eje Y-Y		r , pul	J , pul ⁴	r , pul	Z_x , pul ³	Z_y , pul ³	
					I , pul ⁴	S , pul ³	I , pul ⁴	S , pul ³						
W36 x 300	88.3	36.74	16.655	1.680	0.945	20,300	1110	15.2	1,300	156	3.83	1,260	241	
W36 x 210	61.8	36.69	12.180	1.360	0.830	13,200	719	14.6	411	67.5	2.58	833	107	
W36 x 150	44.2	35.85	11.975	0.940	0.625	9,040	504	14.3	270	45.1	2.47	581	70.9	
W36 x 201	59.1	33.68	15.745	1.150	0.715	11,500	684	14.0	749	95.2	3.56	772	147	
W33 x 152	44.7	33.49	11.565	1.055	0.635	8,160	487	13.5	273	47.2	2.47	559	73.9	
W33 x 118	34.7	32.86	11.480	0.740	0.550	5,900	359	13.0	187	32.6	2.32	415	51.3	
W30 x 211	62.0	30.94	15.105	1.315	0.775	10,300	663	12.9	757	100	3.49	749	154	
W30 x 132	38.9	30.31	10.545	1.000	0.615	5,770	380	12.2	196	37.2	2.25	437	58.4	
W30 x 108	31.7	29.83	10.475	0.760	0.545	4,470	299	11.9	146	27.9	2.15	346	43.9	
W27 x 178	52.3	27.81	14.085	1.190	0.725	6,990	502	11.6	555	78.8	3.26	567	122	
W27 x 114	33.5	27.29	10.070	0.930	0.570	4,090	299	11.0	159	31.5	2.18	343	49.3	
W27 x 84	24.8	26.71	9.960	0.640	0.460	2,850	213	10.7	106	21.2	2.07	244	33.2	
W24 x 162	47.7	25.00	12.955	1.220	0.705	5,170	414	10.4	443	68.4	3.05	468	105	
W24 x 94	27.7	24.31	9.065	0.875	0.515	2,700	222	9.87	109	24.0	1.98	254	37.5	
W24 x 76	22.4	23.92	8.990	0.680	0.440	2,100	176	9.69	82.5	18.4	1.92	200	28.6	
W24 x 62	18.2	23.74	7.040	0.590	0.430	1,550	131	9.23	34.5	9.80	1.38	153	15.7	
W21 x 147	43.2	22.06	12.510	1.150	0.720	3,630	329	9.17	376	60.1	2.95	373	92.6	
W21 x 93	27.3	21.62	8.420	0.930	0.580	2,070	192	8.70	92.9	22.1	1.84	221	34.7	
W21 x 68	20.0	21.13	8.270	0.685	0.430	1,480	140	8.60	64.7	15.7	1.80	160	24.4	
W21 x 57	16.7	21.06	6.555	0.650	0.405	1,170	111	8.36	30.6	9.35	1.35	129	14.8	
W21 x 44	13.0	20.66	6.500	0.450	0.350	843	81.6	8.06	20.7	6.36	1.26	95.4	10.2	
W18 x 119	35.1	18.97	11.265	1.060	0.655	2,190	231	7.90	253	44.9	2.69	261	69.1	
W18 x 97	28.5	18.59	11.145	0.870	0.535	1,750	188	7.82	201	36.1	2.65	211	55.3	
W18 x 71	20.8	18.47	7.635	0.810	0.495	1,170	127	7.50	60.3	15.8	1.70	145	24.7	
W18 x 60	17.6	18.24	7.555	0.695	0.415	984	108	7.47	50.1	13.3	1.69	123	20.6	
W18 x 46	13.5	18.06	6.060	0.605	0.360	712	78.8	7.25	22.5	7.43	1.29	90.7	11.7	
W18 x 35	10.3	17.70	6.000	0.425	0.300	510	57.6	7.04	15.3	5.12	1.22	66.5	8.06	

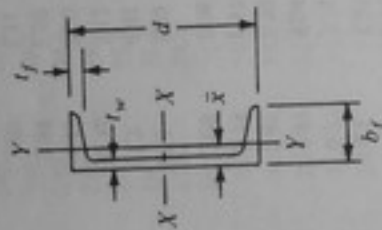
W16 x 100	28.4	16.97	10.425	0.985	0.585	1.490	1.75	7.10	186	35.7	2.52	7.73	198	54.9
W16 x 89	26.2	16.75	10.365	0.875	0.525	1.300	1.55	7.05	163	31.4	2.49	5.45	175	48.1
W16 x 77	22.6	16.52	10.295	0.760	0.455	1.110	1.34	7.00	138	26.9	2.47	3.57	150	41.1
W16 x 67	19.7	16.33	10.235	0.665	0.395	954	1.17	6.96	119	23.2	2.46	2.39	130	35.5
W16 x 57	16.8	16.43	7.120	0.715	0.430	758	92.2	6.72	43.1	12.1	1.60	2.22	105	18.9
W16 x 50	14.7	16.26	7.070	0.630	0.380	659	81.0	6.68	37.2	10.5	1.59	1.52	92.0	16.3
W16 x 45	13.3	16.13	7.035	0.565	0.345	586	72.7	6.65	32.8	9.34	1.57	1.11	82.3	14.5
W16 x 40	11.8	16.01	6.995	0.505	0.305	518	64.7	6.63	28.9	8.25	1.57	0.79	72.9	12.7
W16 x 36	10.6	15.86	6.985	0.430	0.295	448	56.5	6.51	24.5	7.00	1.52	0.54	64.0	10.8
W16 x 31	9.12	15.88	5.525	0.440	0.275	375	47.2	6.41	12.4	4.49	1.17	0.46	54.0	7.03
W16 x 26	7.68	15.69	5.500	0.345	0.250	301	38.4	6.26	9.59	3.49	1.12	0.26	44.2	5.48
W14 x 370	109	17.92	16.475	2.660	1.655	5440	607	7.07	1,990	241	4.27	222	736	370
W14 x 211	62.0	15.72	15.800	1.560	0.980	2,660	338	6.55	1,030	130	4.07	44.6	390	198
W14 x 145	42.7	14.78	15.500	1.090	0.680	1,710	232	6.33	677	87.3	3.98	15.2	260	133
W14 x 132	38.8	14.66	14.725	1.030	0.645	1,530	209	6.28	548	74.5	3.76	12.3	234	113
W14 x 120	35.3	14.48	14.670	0.940	0.590	1,380	190	6.24	495	67.5	3.74	9.37	212	102
W14 x 109	32.0	14.32	14.605	0.860	0.525	1,240	173	6.22	447	61.2	3.73	7.12	192	92.7
W14 x 99	29.1	14.16	14.565	0.780	0.485	1,110	157	6.17	402	55.2	3.71	5.37	173	83.6
W14 x 90	26.5	14.02	14.520	0.710	0.440	999	143	6.14	362	49.9	3.70	4.06	157	75.6
W14 x 82	24.1	14.31	10.130	0.855	0.510	882	123	6.05	148	29.3	2.48	5.08	139	44.8
W14 x 74	21.8	14.17	10.070	0.785	0.450	796	112	6.04	134	26.6	2.48	3.88	126	40.6
W14 x 68	20.0	14.04	10.035	0.720	0.415	723	103	6.01	121	24.2	2.45	3.02	115	36.9
W14 x 61	17.9	13.89	9.995	0.645	0.375	640	92.2	5.98	107	21.5	2.45	2.20	102	32.8
W14 x 53	15.6	13.92	8.060	0.660	0.370	541	77.8	5.89	57.7	14.3	1.92	1.94	87.1	22.0
W14 x 48	14.1	13.79	8.030	0.595	0.340	485	70.3	5.85	51.4	12.8	1.91	1.46	78.4	19.6
W14 x 43	12.6	13.66	7.995	0.530	0.305	428	62.7	5.82	45.2	11.3	1.89	1.05	69.6	17.3
W14 x 38	11.2	14.10	6.770	0.515	0.310	385	54.6	5.88	26.7	7.88	1.55	0.80	61.5	12.1
W14 x 34	10.0	13.98	6.745	0.455	0.285	340	48.6	5.83	23.3	6.91	1.53	0.57	54.6	10.6
W14 x 30	8.85	13.84	6.730	0.385	0.270	291	42.0	5.73	19.6	5.82	1.49	0.38	47.3	8.99
W14 x 26	7.69	13.91	5.025	0.420	0.255	245	35.3	5.65	8.91	3.54	1.08	0.36	40.2	5.54
W14 x 22	6.49	13.74	5.000	0.335	0.230	199	29.0	5.54	7.00	2.80	1.04	0.21	33.2	4.39

Tabla A-4 (continuación).

Designación	Ala			Propiedades elásticas						Constante de torsión		Módulo plástico		
	Área A , pul ²	Altura d , pul	Ancho b_y , pul	Espesor t_f , pul	Ancho del alma t_w , pul	Eje X-X		Eje Y-Y		r , pul	J , pul ⁴	Z_x , pul ³	Z_y , pul ³	
						I_x , pul ⁴	S_x , pul ³	r_x , pul	I_y , pul ⁴					S_y , pul ³
W12 x 336	98.8	16.82	13.385	2.955	1.775	4.060	483	6.41	1.190	177	3.47	243	603	274
W12 x 170	50.0	14.03	12.570	1.560	0.960	1.650	235	5.74	517	82.3	3.22	35.6	275	126
W12 x 120	35.3	13.12	12.320	1.105	0.710	1.070	163	5.51	345	56.0	3.13	12.9	186	85.4
W12 x 106	31.2	12.89	12.220	0.990	0.610	933	145	5.47	301	49.3	3.11	9.13	164	75.1
W12 x 96	28.2	12.71	12.160	0.900	0.550	833	131	5.44	270	44.4	3.09	6.86	147	67.5
W12 x 87	25.6	12.53	12.125	0.810	0.515	740	118	5.38	241	39.7	3.07	5.10	132	60.4
W12 x 79	23.2	12.38	12.080	0.735	0.470	662	107	5.34	216	35.8	3.05	3.84	119	54.3
W12 x 72	21.1	12.25	12.040	0.670	0.430	597	97.4	5.31	195	32.4	3.04	2.93	108	49.2
W12 x 65	19.1	12.12	12.000	0.605	0.390	533	87.9	5.28	174	29.1	3.02	2.18	96.8	44.1
W12 x 58	17.0	12.19	10.010	0.640	0.360	475	78.0	5.28	107	21.4	2.51	2.10	86.4	32.5
W12 x 53	15.6	12.06	9.995	0.575	0.345	425	70.6	5.23	95.8	19.2	2.48	1.58	77.9	29.1
W12 x 50	14.7	12.19	8.080	0.640	0.370	394	64.7	5.18	56.3	13.9	1.96	1.78	72.4	21.4
W12 x 45	13.2	12.06	8.045	0.575	0.335	350	58.1	5.15	50.0	12.4	1.94	1.31	64.7	19.0
W12 x 40	11.8	11.94	8.005	0.515	0.295	310	51.9	5.13	44.1	11.0	1.93	0.95	57.5	16.8
W12 x 35	10.3	12.50	6.560	0.520	0.300	285	45.6	5.25	24.5	7.47	1.54	0.74	51.2	11.5
W12 x 30	8.79	12.34	6.520	0.440	0.260	238	38.6	5.21	20.3	6.24	1.52	0.46	43.1	9.56
W12 x 26	7.65	12.22	6.490	0.380	0.230	204	33.4	5.17	17.3	5.34	1.51	0.30	37.2	8.17
W12 x 22	6.48	12.31	4.030	0.425	0.260	156	25.4	4.91	4.66	2.31	0.848	0.29	29.3	3.66
W12 x 19	5.57	12.16	4.005	0.350	0.235	130	21.3	4.82	3.76	1.88	0.822	0.18	24.7	2.98
W12 x 16	4.71	11.99	3.990	0.265	0.220	103	17.1	4.67	2.82	1.41	0.778	0.10	20.1	2.26
W12 x 14	4.16	11.91	3.970	0.225	0.200	88.6	14.9	4.62	2.36	1.19	0.753	0.07	17.4	1.90
W10 x 112	32.9	11.36	10.415	1.250	0.755	716	126	4.66	236	45.3	2.68	15.1	147	69.2
W10 x 100	29.4	11.10	10.340	1.120	0.680	623	112	4.60	207	40.0	2.65	10.9	130	61.0
W10 x 88	25.9	10.84	10.265	0.990	0.605	534	98.5	4.54	179	34.8	2.63	7.53	113	53.1
W10 x 77	22.6	10.60	10.190	0.870	0.530	455	85.9	4.49	154	30.1	2.60	5.11	97.6	45.9
W10 x 68	20.0	10.40	10.130	0.770	0.470	394	75.7	4.44	134	26.4	2.59	3.56	85.3	40.1
W10 x 60	17.6	10.22	10.080	0.680	0.420	341	66.7	4.39	116	23.0	2.57	2.48	74.6	35.0
W10 x 54	15.8	10.09	10.030	0.615	0.370	303	60.0	4.37	103	20.6	2.56	1.82	66.6	31.3
W10 x 49	14.4	9.98	10.000	0.560	0.340	272	54.6	4.35	93.4	18.7	2.54	1.39	60.4	28.3
W10 x 45	13.3	10.10	8.020	0.620	0.350	248	49.1	4.33	53.4	13.3	2.01	1.51	54.9	20.3

W10 x 39	11.5	9.82	7.985	0.530	0.315	209	42.1	4.27	45.0	11.3	1.98	0.98	46.8	17.2
W10 x 33	8.71	9.73	7.960	0.435	0.290	170	35.0	4.19	36.6	9.20	1.94	0.58	38.8	14.0
W10 x 30	8.84	10.47	5.810	0.510	0.300	170	32.4	4.38	16.7	5.75	1.37	0.62	36.6	8.84
W10 x 28	7.81	10.33	5.770	0.440	0.260	144	27.9	4.35	14.1	4.89	1.36	0.40	31.3	7.50
W10 x 22	6.49	10.17	5.750	0.360	0.240	118	23.2	4.27	11.4	3.97	1.33	0.24	26.0	6.10
W10 x 19	5.82	10.24	4.020	0.395	0.250	96.3	18.8	4.14	4.29	2.14	0.874	0.23	21.6	3.35
W10 x 17	4.99	10.11	4.010	0.330	0.240	81.9	16.2	4.05	3.56	1.78	0.845	0.16	18.7	2.80
W10 x 15	4.41	9.99	4.000	0.270	0.230	68.9	13.8	3.95	2.89	1.45	0.810	0.10	16.0	2.30
W10 x 12	3.54	9.87	3.960	0.210	0.190	53.8	10.9	3.90	2.18	1.10	0.785	0.05	12.6	1.74
W8 x 67	19.7	9.00	8.280	0.935	0.570	272	60.4	3.72	88.6	21.4	2.12	5.06	70.2	32.7
W8 x 58	17.1	8.75	8.220	0.810	0.510	228	52.0	3.65	75.1	18.3	2.10	3.34	59.8	27.9
W8 x 48	14.1	8.50	8.110	0.685	0.400	184	43.3	3.61	60.9	15.0	2.08	1.96	49.0	22.9
W8 x 40	11.7	8.25	8.070	0.560	0.360	146	35.5	3.53	49.1	12.2	2.04	1.12	39.8	18.5
W8 x 35	10.3	8.12	8.020	0.495	0.310	127	31.2	3.51	42.6	10.6	2.03	0.77	34.7	16.1
W8 x 31	9.13	8.00	7.995	0.435	0.285	110	27.5	3.47	37.1	9.27	2.02	0.54	30.4	14.1
W8 x 28	8.25	8.06	6.535	0.465	0.285	98.0	24.3	3.45	21.7	6.63	1.62	0.54	27.2	10.1
W8 x 24	7.08	7.93	6.495	0.400	0.245	82.8	20.9	3.42	18.3	5.63	1.61	0.35	23.2	8.57
W8 x 21	6.16	8.28	5.270	0.400	0.250	75.3	18.2	3.49	9.77	3.71	1.26	0.28	20.4	5.69
W8 x 18	5.26	8.14	5.250	0.330	0.230	61.9	15.2	3.43	7.97	3.04	1.23	0.17	17.0	4.66
W8 x 15	4.44	8.11	4.015	0.315	0.245	48.0	11.8	3.29	3.41	1.70	0.876	0.14	13.6	2.67
W8 x 13	3.84	7.99	4.000	0.255	0.230	39.6	9.91	3.21	2.73	1.37	0.843	0.09	11.4	2.15
W8 x 10	2.96	7.89	3.940	0.205	0.170	30.8	7.81	3.22	2.09	1.06	0.841	0.04	8.87	1.66
W6 x 25	7.34	6.38	6.080	0.455	0.320	53.4	16.7	2.70	17.1	5.61	1.52	0.46	18.9	8.56
W6 x 20	5.87	6.20	6.020	0.365	0.260	41.4	13.4	2.66	13.3	4.41	1.50	0.24	14.9	6.72
W6 x 15	4.43	5.99	5.990	0.260	0.230	29.1	9.72	2.56	9.32	3.11	1.45	0.10	10.8	4.75
W6 x 16	4.74	6.28	4.030	0.405	0.260	32.1	10.2	2.60	4.43	2.20	0.967	0.22	11.7	3.39
W6 x 12	3.55	6.03	4.000	0.280	0.230	22.1	7.31	2.49	2.99	1.50	0.918	0.09	8.30	2.32
W6 x 9	2.68	5.90	3.940	0.215	0.170	16.4	5.56	2.47	2.20	1.11	0.905	0.04	6.23	1.72
W5 x 19	5.54	5.15	5.030	0.430	0.270	26.2	10.2	2.17	9.13	3.63	1.28	0.31	11.6	5.53
W5 x 16	4.68	5.01	5.000	0.360	0.240	21.3	8.51	2.13	7.51	3.00	1.27	0.19	9.59	4.57
W4 x 13	3.83	4.16	4.060	0.345	0.280	11.3	5.46	1.72	3.86	1.90	1.00	0.15	6.28	2.92

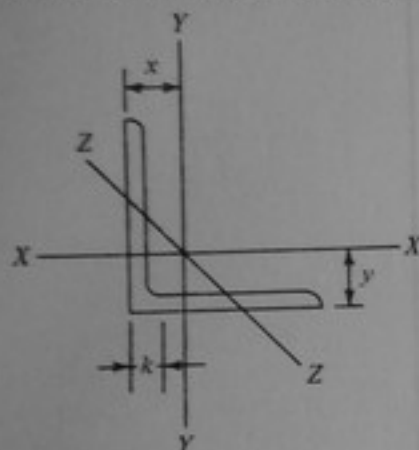
Tabla A-5 Canales con norma norteamericana. Propiedades para diseño.



Designación	Area A , pul ²	Altura d , pul	Ala			Espesor del alma t_w , pul	Peso nominal por pie	Eje X-X		Eje Y-Y		Locali- zación del centro de corte, E_0 , pul		Constante de torsión J , pul ⁴	
			Ancho b_f , pul	Espesor promedio t_f , pul	I_x , pul ⁴			S_x , pul ³	r_x , pul	I_y , pul ⁴	S_y , pul ³	r_y , pul	\bar{x} , pul		E_0 , pul
C15 x 50	14.7	15.00	3.716	0.650	0.716	50	404	53.8	5.24	11.0	3.78	0.867	0.799	2.66	
C15 x 40	11.8	15.00	3.520	0.650	0.520	40	349	46.5	5.44	9.23	3.36	0.886	0.778	1.46	
C15 x 33.9	9.96	15.00	3.400	0.650	0.400	33.9	315	42.0	5.62	8.13	3.11	0.904	0.787	1.01	
C12 x 30	8.82	12.00	3.170	0.501	0.510	30	162	27.0	4.29	5.14	2.06	0.763	0.674	0.865	
C12 x 25	7.35	12.00	3.047	0.501	0.387	25	144	24.1	4.43	4.47	1.88	0.780	0.674	0.541	
C12 x 20.7	6.09	12.00	2.942	0.501	0.282	20.7	129	21.5	4.61	3.88	1.73	0.799	0.698	0.371	

C10 x 30	8.82	10.00	3.033	0.436	0.673	103	20.7	3.42	30	3.94	1.65	0.669	0.649	0.705	1.22
C10 x 25	7.35	10.00	2.886	0.436	0.526	91.2	18.2	3.52	25	3.36	1.48	0.676	0.617	0.757	0.690
C10 x 20	5.88	10.00	2.739	0.436	0.379	78.9	15.8	3.66	20	2.81	1.32	0.691	0.606	0.826	0.370
C10 x 15.3	4.49	10.00	2.600	0.436	0.240	67.4	13.5	3.87	15.3	2.28	1.16	0.713	0.634	0.916	0.211
C9 x 20	5.88	9.00	2.648	0.413	0.448	60.9	13.5	3.22	20	2.42	1.17	0.642	0.583	0.739	0.429
C9 x 15	4.41	9.00	2.485	0.413	0.285	51.0	11.3	3.40	15	1.93	1.01	0.661	0.586	0.824	0.209
C9 x 13.4	3.94	9.00	2.433	0.413	0.233	47.9	10.6	3.48	13.4	1.76	0.962	0.668	0.601	0.859	0.169
C8 x 18.75	5.51	8.00	2.527	0.390	0.487	44.0	11.0	2.82	18.75	1.98	1.01	0.599	0.565	0.674	0.436
C8 x 13.75	4.04	8.00	2.343	0.390	0.303	36.1	9.03	2.99	13.75	1.53	0.853	0.615	0.553	0.756	0.187
C8 x 11.5	3.38	8.00	2.260	0.390	0.220	32.6	8.14	3.11	11.5	1.32	0.781	0.625	0.571	0.807	0.131
C7 x 14.75	4.33	7.00	2.299	0.366	0.419	27.2	7.78	2.51	14.75	1.38	0.779	0.564	0.532	0.651	0.268
C7 x 12.25	3.60	7.00	2.194	0.366	0.314	24.2	6.93	2.60	12.25	1.17	0.702	0.571	0.525	0.695	0.161
C7 x 9.8	2.87	7.00	2.090	0.366	0.210	21.3	6.08	2.72	9.8	0.968	0.625	0.581	0.541	0.752	0.100
C6 x 13	3.83	6.00	2.157	0.343	0.437	17.4	5.80	2.13	13	1.05	0.642	0.525	0.514	0.599	0.241
C6 x 10.5	3.09	6.00	2.034	0.343	0.314	15.2	5.06	2.22	10.5	0.865	0.564	0.529	0.500	0.643	0.131
C6 x 8.2	2.40	6.00	1.920	0.343	0.200	13.1	4.38	2.34	8.2	0.692	0.492	0.537	0.512	0.699	0.075
C5 x 9	2.64	5.00	1.885	0.320	0.325	8.90	3.56	1.83	9	0.632	0.449	0.489	0.478	0.590	0.109
C5 x 6.7	1.97	5.00	1.750	0.320	0.190	7.49	3.00	1.95	6.7	0.478	0.378	0.493	0.484	0.647	0.055
C4 x 7.25	2.13	4.00	1.721	0.296	0.321	4.59	2.29	1.47	7.25	0.432	0.343	0.450	0.459	0.546	0.082
C4 x 5.4	1.59	4.00	1.584	0.296	0.184	3.85	1.93	1.56	5.4	0.319	0.283	0.449	0.458	0.594	0.040
C3 x 6	1.76	3.00	1.596	0.273	0.356	2.07	1.38	1.08	6	0.305	0.268	0.416	0.455	0.500	0.073
C3 x 5	1.47	3.00	1.498	0.273	0.258	1.85	1.24	1.12	5	0.247	0.233	0.410	0.438	0.521	0.043
C3 x 4.1	1.21	3.00	1.410	0.273	0.170	1.66	1.10	1.17	4.1	0.197	0.202	0.404	0.437	0.546	0.027

Tabla A-6 Angulos de alas iguales. Propiedades para diseño.

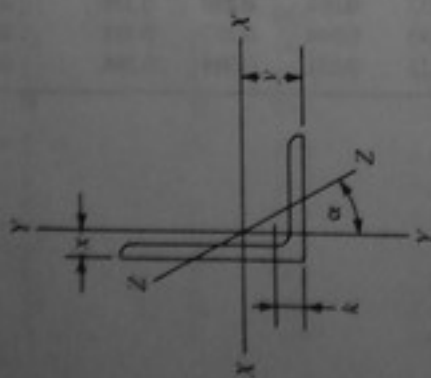


Dimensiones, pul	k, pul	Peso por pie, lb	Area, pul ²	Eje X-X y eje Y-Y			Eje Z-Z	
				I, pul ⁴	S, pul ³	r, pul	r, pul	
						x o y, pul		
8 x 8 x 1 1/8	1 1/4	56.9	16.7	98.0	17.5	2.42	2.41	1.56
	1 1/8	51.0	15.0	89.0	15.8	2.44	2.37	1.56
	1 1/2	45.0	13.2	79.6	14.0	2.45	2.32	1.57
	1 3/8	38.9	11.4	69.7	12.2	2.47	2.28	1.58
	1 1/4	32.7	9.61	59.4	10.3	2.49	2.23	1.58
	1 3/16	29.6	8.68	54.1	9.34	2.50	2.21	1.59
	1 1/8	26.4	7.75	48.6	8.36	2.50	2.19	1.59
6 x 6 x 1	1 1/2	37.4	11.0	35.5	8.57	1.80	1.86	1.17
	1 3/4	33.1	9.73	31.9	7.63	1.81	1.82	1.17
	1 1/4	28.7	8.44	28.2	6.66	1.83	1.78	1.17
	1 1/8	24.2	7.11	24.2	5.66	1.84	1.73	1.18
	1 1/16	21.9	6.43	22.1	5.14	1.85	1.71	1.18
	1	19.6	5.75	19.9	4.61	1.86	1.68	1.18
	3/4	17.2	5.06	17.7	4.08	1.87	1.66	1.19
5 x 5 x 7/16	1 1/8	27.2	7.98	17.8	5.17	1.49	1.57	0.973
	1 1/4	23.6	6.94	15.7	4.53	1.51	1.52	0.975
	1 1/8	20.0	5.86	13.6	3.86	1.52	1.48	0.978
	1	16.2	4.75	11.3	3.16	1.54	1.43	0.983
	3/4	14.3	4.18	10.0	2.79	1.55	1.41	0.986
	7/16	12.3	3.61	8.74	2.42	1.56	1.39	0.990
	3/8	10.3	3.03	7.42	2.04	1.57	1.37	0.994
4 x 4 x 1/4	1 1/8	18.5	5.44	7.67	2.81	1.19	1.27	0.778
	1	15.7	4.61	6.66	2.40	1.20	1.23	0.779
	7/8	12.8	3.75	5.56	1.97	1.22	1.18	0.782
	3/4	11.3	3.31	4.97	1.75	1.23	1.16	0.785
	1/2	9.8	2.86	4.36	1.52	1.23	1.14	0.788
	3/8	8.2	2.40	3.71	1.29	1.24	1.12	0.791
	1/4	6.6	1.94	3.04	1.05	1.25	1.09	0.795

Tabla A-6 (continuación).

Dimensiones, pul	k, pul	Peso por pie, lb	Area, pul ²	Eje X-X y eje Y-Y			Eje Z-Z r, pul	
				I, pul ⁴	S, pul ³	r, pul		
$3\frac{1}{2} \times 3\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ $\frac{7}{16}$ $\frac{3}{8}$ $\frac{5}{16}$ $\frac{1}{4}$	$\frac{7}{8}$	11.1	3.25	3.64	1.49	1.06	1.06	0.683
	$\frac{13}{16}$	9.8	2.87	3.26	1.32	1.07	1.04	0.684
	$\frac{3}{4}$	8.5	2.48	2.87	1.15	1.07	1.01	0.687
	$\frac{11}{16}$	7.2	2.09	2.45	0.976	1.08	0.990	0.690
	$\frac{5}{8}$	5.8	1.69	2.01	0.794	1.09	0.968	0.694
$3 \times 3 \times \frac{1}{2}$ $\frac{7}{16}$ $\frac{3}{8}$ $\frac{5}{16}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{3}{16}$	$\frac{13}{16}$	9.4	2.75	2.22	1.07	0.898	0.932	0.584
	$\frac{3}{4}$	8.3	2.43	1.99	0.954	0.905	0.910	0.585
	$\frac{11}{16}$	7.2	2.11	1.76	0.833	0.913	0.888	0.587
	$\frac{5}{8}$	6.1	1.78	1.51	0.707	0.922	0.869	0.589
	$\frac{9}{16}$	4.9	1.44	1.24	0.577	0.930	0.842	0.592
$2\frac{1}{2} \times 2\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ $\frac{7}{16}$ $\frac{3}{8}$ $\frac{5}{16}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{3}{16}$	$\frac{13}{16}$	7.7	2.25	1.23	0.724	0.739	0.806	0.487
	$\frac{11}{16}$	5.9	1.73	0.984	0.566	0.753	0.762	0.487
	$\frac{3}{4}$	5.0	1.46	0.849	0.482	0.761	0.740	0.489
	$\frac{5}{8}$	4.1	1.19	0.703	0.394	0.769	0.717	0.491
	$\frac{9}{16}$	3.07	0.92	0.547	0.303	0.778	0.694	0.495
$2 \times 2 \times \frac{3}{8}$ $\frac{5}{16}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{3}{16}$ $\frac{1}{8}$	$\frac{7}{8}$	4.7	1.36	0.479	0.351	0.594	0.636	0.389
	$\frac{13}{16}$	3.92	1.15	0.416	0.300	0.601	0.614	0.390
	$\frac{3}{4}$	3.19	0.933	0.348	0.247	0.609	0.592	0.391
	$\frac{11}{16}$	2.44	0.715	0.272	0.190	0.617	0.569	0.394
	$\frac{5}{8}$	1.65	0.484	0.190	0.131	0.626	0.546	0.398
$1\frac{3}{4} \times 1\frac{3}{4} \times \frac{1}{4}$ $\frac{3}{16}$ $\frac{1}{8}$	$\frac{11}{16}$	2.77	0.813	0.227	0.186	0.529	0.529	0.341
	$\frac{3}{8}$	2.12	0.621	0.179	0.144	0.537	0.506	0.343
	$\frac{9}{16}$	1.44	0.422	0.126	0.099	0.546	0.484	0.347
$1\frac{1}{2} \times 1\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$ $\frac{3}{16}$ $\frac{5}{32}$ $\frac{1}{8}$	$\frac{5}{8}$	2.34	0.688	0.139	0.134	0.449	0.466	0.292
	$\frac{9}{16}$	1.80	0.527	0.110	0.104	0.457	0.444	0.293
	$\frac{7}{16}$	1.52	0.444	0.094	0.088	0.461	0.433	0.295
	$\frac{1}{2}$	1.23	0.359	0.078	0.072	0.465	0.421	0.296
$1\frac{1}{4} \times 1\frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$ $\frac{3}{16}$ $\frac{1}{8}$	$\frac{5}{8}$	1.92	0.563	0.077	0.091	0.369	0.403	0.243
	$\frac{9}{16}$	1.48	0.434	0.061	0.071	0.377	0.381	0.244
	$\frac{1}{2}$	1.01	0.297	0.044	0.049	0.385	0.359	0.246
$1 \times 1 \times \frac{1}{4}$ $\frac{3}{16}$ $\frac{1}{8}$	$\frac{5}{8}$	1.49	0.438	0.037	0.056	0.290	0.339	0.196
	$\frac{9}{16}$	1.16	0.340	0.030	0.044	0.297	0.318	0.195
	$\frac{1}{2}$	0.80	0.234	0.022	0.031	0.304	0.296	0.196

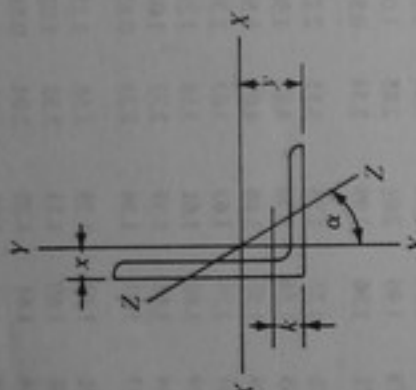
Tabla A.7 Angulos de alas desiguales. Propiedades para diseño.



Dimensiones, pul	k, pul	Peso por pie, lb	Area, pul ²	Eje X-X			Eje Y-Y			Eje Z-Z			
				I, pul ⁴	S, pul ³	r, pul	y, pul	I, pul ⁴	S, pul ³	r, pul	x, pul	r, pul	tan α
9 × 4 × 1	1 1/2	40.8	12.0	97.0	17.6	2.84	3.50	12.0	4.00	1.00	1.00	0.834	0.203
1 1/2	1 1/2	36.1	10.6	86.8	15.7	2.86	3.45	10.8	3.56	1.01	0.953	0.836	0.208
1 1/4	1 1/4	31.3	9.19	76.1	13.6	2.88	3.41	9.63	3.11	1.02	0.906	0.841	0.212
1 1/4	1 1/4	26.3	7.73	64.9	11.5	2.90	3.36	8.32	2.65	1.04	0.858	0.847	0.216
1 1/16	1 1/16	23.8	7.00	59.1	10.4	2.91	3.33	7.63	2.41	1.04	0.834	0.850	0.218
1	1	21.3	6.25	53.2	9.34	2.92	3.31	6.92	2.17	1.05	0.810	0.854	0.220
8 × 6 × 1	1 1/2	44.2	13.0	80.8	15.1	2.49	2.65	38.8	8.92	1.73	1.65	1.28	0.543
1 1/2	1 1/2	39.1	11.5	72.3	13.4	2.51	2.61	34.9	7.94	1.74	1.61	1.28	0.547
1 1/4	1 1/4	33.8	9.94	63.4	11.7	2.53	2.56	30.7	6.92	1.76	1.56	1.29	0.551
1 1/4	1 1/4	28.5	8.36	54.1	9.87	2.54	2.52	26.3	5.88	1.77	1.52	1.29	0.554
1 1/16	1 1/16	25.7	7.56	49.3	8.95	2.55	2.50	24.0	5.34	1.78	1.50	1.30	0.556
1	1	23.0	6.75	44.3	8.02	2.56	2.47	21.7	4.79	1.79	1.47	1.30	0.558
1 1/16	1 1/16	20.2	5.93	39.2	7.07	2.57	2.45	19.3	4.23	1.80	1.45	1.31	0.560
8 × 4 × 1	1 1/2	37.4	11.0	69.6	14.1	2.52	3.05	11.6	3.94	1.03	1.05	0.846	0.247
1 1/2	1 1/2	33.1	9.73	62.5	12.5	2.53	3.00	10.5	3.51	1.04	0.999	0.848	0.253
1 1/4	1 1/4	28.7	8.44	54.9	10.9	2.55	2.95	9.36	3.07	1.05	0.953	0.852	0.258

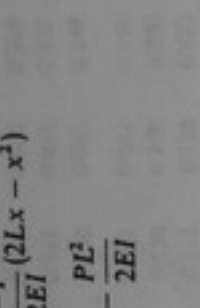
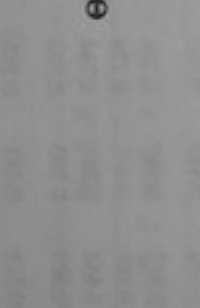
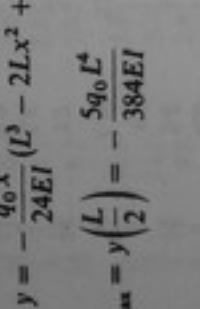
Tabla A-7 (continuación).

Dimensiones, pul	k, pul	Peso por pie, lb	Area, pul ²	Eje X-X			Eje Y-Y			Eje Z-Z				
				I, pul ⁴	S, pul ³	r, pul	y, pul	I, pul ⁴	S, pul ³	r, pul	x, pul	r, pul	tan α	
$4 \times 3\frac{1}{2} \times \frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	14.7	4.30	6.37	2.35	1.22	1.29	4.52	1.84	1.03	1.04	0.719	0.745	
	$\frac{1}{8}$	11.9	3.50	5.32	1.94	1.23	1.25	3.79	1.52	1.04	1.00	0.722	0.750	
	$\frac{7}{16}$	10.6	3.09	4.76	1.72	1.24	1.23	3.40	1.35	1.05	0.978	0.724	0.753	
	$\frac{1}{4}$	9.1	2.67	4.18	1.49	1.25	1.21	2.95	1.17	1.06	0.955	0.727	0.755	
	$\frac{5}{16}$	7.7	2.25	3.56	1.26	1.26	1.18	2.55	0.994	1.07	0.932	0.730	0.757	
	$\frac{1}{2}$	6.2	1.81	2.91	1.03	1.27	1.16	2.09	0.808	1.07	0.909	0.734	0.759	
	$4 \times 3 \times \frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	13.6	3.98	6.03	2.30	1.23	1.37	2.87	1.35	0.849	0.871	0.637	0.534
		$\frac{1}{8}$	11.1	3.25	5.05	1.89	1.25	1.33	2.42	1.12	0.864	0.827	0.639	0.543
		$\frac{7}{16}$	9.8	2.87	4.52	1.68	1.25	1.30	2.18	0.992	0.871	0.804	0.641	0.547
		$\frac{1}{4}$	8.5	2.48	3.96	1.46	1.26	1.28	1.92	0.866	0.879	0.782	0.644	0.551
		$\frac{5}{16}$	7.2	2.09	3.38	1.23	1.27	1.26	1.65	0.734	0.887	0.759	0.647	0.554
		$\frac{1}{2}$	5.8	1.69	2.77	1.00	1.28	1.24	1.36	0.599	0.896	0.736	0.651	0.558
$3\frac{1}{2} \times 3 \times \frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	10.2	3.00	3.45	1.45	1.07	1.13	2.33	1.10	0.881	0.875	0.621	0.714	
	$\frac{1}{8}$	9.1	2.65	3.10	1.29	1.08	1.10	2.09	0.975	0.889	0.853	0.622	0.718	
	$\frac{7}{16}$	7.9	2.30	2.72	1.13	1.09	1.08	1.85	0.851	0.897	0.830	0.625	0.721	
	$\frac{1}{4}$	6.6	1.93	2.33	0.954	1.10	1.06	1.58	0.722	0.905	0.808	0.627	0.724	
	$\frac{5}{16}$	5.4	1.56	1.91	0.776	1.11	1.04	1.30	0.589	0.914	0.785	0.631	0.727	



$3 \times 2 \frac{1}{2} \times \frac{1}{16}$	9.4	2.75	3.24	1.41	1.09	1.20	1.36	0.760	0.704	0.705	0.534	0.486
$3 \times 2 \frac{1}{2} \times \frac{1}{16}$	8.3	2.43	2.91	1.26	1.09	1.18	1.23	0.677	0.711	0.682	0.535	0.491
$3 \times 2 \frac{1}{2} \times \frac{1}{16}$	7.2	2.11	2.56	1.09	1.10	1.16	1.09	0.592	0.719	0.660	0.537	0.496
$3 \times 2 \frac{1}{2} \times \frac{1}{16}$	6.1	1.78	2.19	0.927	1.11	1.14	0.939	0.504	0.727	0.637	0.540	0.501
$3 \times 2 \frac{1}{2} \times \frac{1}{16}$	4.9	1.44	1.80	0.755	1.12	1.11	0.777	0.412	0.735	0.614	0.544	0.506
$3 \times 2 \frac{1}{2} \times \frac{1}{16}$	8.5	2.50	2.08	1.04	0.913	1.00	1.30	0.744	0.722	0.750	0.520	0.667
$3 \times 2 \frac{1}{2} \times \frac{1}{16}$	7.6	2.21	1.88	0.928	0.920	0.978	1.18	0.664	0.729	0.728	0.521	0.672
$3 \times 2 \frac{1}{2} \times \frac{1}{16}$	6.6	1.92	1.66	0.810	0.928	0.956	1.04	0.581	0.736	0.706	0.522	0.676
$3 \times 2 \frac{1}{2} \times \frac{1}{16}$	5.6	1.62	1.42	0.688	0.937	0.933	0.898	0.494	0.744	0.683	0.525	0.680
$3 \times 2 \frac{1}{2} \times \frac{1}{16}$	4.5	1.31	1.17	0.561	0.945	0.911	0.743	0.404	0.753	0.661	0.528	0.684
$3 \times 2 \frac{1}{2} \times \frac{1}{16}$	3.39	0.996	0.907	0.430	0.954	0.888	0.577	0.310	0.761	0.638	0.533	0.688
$3 \times 2 \times \frac{1}{16}$	7.7	2.25	1.92	1.00	0.924	1.08	0.672	0.474	0.546	0.583	0.428	0.414
$3 \times 2 \times \frac{1}{16}$	6.8	2.00	1.73	0.894	0.932	1.06	0.609	0.424	0.553	0.561	0.429	0.421
$3 \times 2 \times \frac{1}{16}$	5.9	1.73	1.53	0.781	0.940	1.04	0.543	0.371	0.559	0.539	0.430	0.428
$3 \times 2 \times \frac{1}{16}$	5.0	1.46	1.32	0.664	0.948	1.02	0.470	0.317	0.567	0.516	0.432	0.435
$3 \times 2 \times \frac{1}{16}$	4.1	1.19	1.09	0.542	0.957	0.993	0.392	0.260	0.574	0.493	0.435	0.440
$3 \times 2 \times \frac{1}{16}$	3.07	0.902	0.842	0.415	0.966	0.970	0.307	0.200	0.583	0.470	0.439	0.446
$2 \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{1}{16}$	5.3	1.55	0.912	0.547	0.768	0.831	0.514	0.363	0.577	0.581	0.420	0.614
$2 \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{1}{16}$	4.5	1.31	0.788	0.466	0.776	0.809	0.446	0.310	0.584	0.559	0.422	0.620
$2 \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{1}{16}$	3.62	1.06	0.654	0.381	0.784	0.787	0.372	0.254	0.592	0.537	0.424	0.626
$2 \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{1}{16}$	2.75	0.809	0.509	0.293	0.793	0.764	0.291	0.196	0.600	0.514	0.427	0.631
$2 \frac{1}{2} \times 1 \frac{1}{2} \times \frac{1}{16}$	3.92	1.15	0.711	0.444	0.785	0.898	0.191	0.174	0.408	0.398	0.322	0.349
$2 \frac{1}{2} \times 1 \frac{1}{2} \times \frac{1}{16}$	3.19	0.938	0.591	0.364	0.794	0.875	0.161	0.143	0.415	0.375	0.324	0.357
$2 \frac{1}{2} \times 1 \frac{1}{2} \times \frac{1}{16}$	2.44	0.715	0.461	0.279	0.803	0.852	0.127	0.111	0.422	0.352	0.327	0.364
$2 \times 1 \frac{1}{2} \times \frac{1}{16}$	2.77	0.813	0.316	0.236	0.623	0.663	0.151	0.139	0.432	0.413	0.320	0.543
$2 \times 1 \frac{1}{2} \times \frac{1}{16}$	2.12	0.621	0.248	0.182	0.632	0.641	0.120	0.108	0.440	0.391	0.322	0.551
$2 \times 1 \frac{1}{2} \times \frac{1}{16}$	1.44	0.422	0.173	0.125	0.641	0.618	0.085	0.075	0.448	0.368	0.326	0.558
$2 \times 1 \frac{1}{2} \times \frac{1}{16}$	2.55	0.750	0.296	0.229	0.628	0.708	0.089	0.097	0.344	0.333	0.269	0.378
$2 \times 1 \frac{1}{2} \times \frac{1}{16}$	1.96	0.574	0.232	0.177	0.636	0.686	0.071	0.075	0.351	0.311	0.271	0.387
$2 \times 1 \frac{1}{2} \times \frac{1}{16}$	1.33	0.391	0.163	0.122	0.645	0.663	0.050	0.052	0.359	0.287	0.274	0.396
$1 \frac{1}{2} \times 1 \frac{1}{2} \times \frac{1}{16}$	2.34	0.688	0.202	0.176	0.543	0.602	0.085	0.095	0.352	0.352	0.267	0.486
$1 \frac{1}{2} \times 1 \frac{1}{2} \times \frac{1}{16}$	1.80	0.527	0.160	0.137	0.551	0.580	0.068	0.074	0.359	0.330	0.269	0.496
$1 \frac{1}{2} \times 1 \frac{1}{2} \times \frac{1}{16}$	1.23	0.359	0.113	0.094	0.560	0.557	0.049	0.051	0.368	0.307	0.272	0.506

Tabla A-8 Curvas elásticas para vigas.

Deflexión	Pendiente
 $y = -\frac{P}{6EI}(3Lx^2 - x^3)$ $y_{\max} = y(L) = -\frac{PL^3}{3EI}$	$\Theta = \frac{-P}{2EI}(2Lx - x^2)$ $\Theta(L) = -\frac{PL^2}{2EI}$
 $y = -\frac{q_0}{24EI}(x^4 - 4Lx^3 + 6L^2x^2)$ $y_{\max} = y(L) = -\frac{q_0 L^4}{8EI}$	$\Theta = \frac{-q_0}{6EI}(3L^2x - 3Lx^2 + x^3)$ $\Theta(L) = \frac{-q_0 L^3}{6EI}$
 $y = -\frac{q_0 x}{24EI}(L^3 - 2Lx^2 + x^3)$ $y_{\max} = y\left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{5q_0 L^4}{384EI}$	$\Theta = \frac{-q_0}{24EI}(L^3 - 6Lx^2 + 4x^3)$ $\Theta(L) = -\Theta(0) = \frac{q_0 L^3}{24EI}$

$$\Theta_{AC} = \frac{-Pb}{6EIL} (L^2 - b^2 - 3x^2)$$

$$\Theta_{CB} = \frac{-Pa}{6EIL} (2L^2 + a^2 - 6Lx_1 + 3x_1^2)$$

Cuando $a = b = L/2$,

$$\Theta_{AC} = \frac{-P}{4EI} \left(\frac{L^2}{4} - x^2 \right)$$

$$y_{AC} = \frac{-Pb}{6EIL} (L^2x - b^2x - x^3)$$

$$y_{CB} = \frac{-Pa}{6EIL} (L - x_1)(2Lx_1 - a^2 - x_1^2)$$

Cuando $a = b = L/2$,

$$y_{AC} = \frac{-P}{4EI} \left(\frac{L^2x}{4} - \frac{x^3}{3} \right)$$

$$\Theta = -\frac{M_0}{6EIL} (L^2 - 3x^2)$$

$$\Theta(0) = -\frac{M_0L}{6EI}$$

$$\Theta(L) = \frac{M_0L}{3EI}$$

$$y = -\frac{M_0x}{6EIL} (L^2 - x^2)$$

$$\Theta = -\frac{M_0x}{EI}$$

$$\Theta(L) = -\frac{M_0L}{EI}$$

$$y = -\frac{M_0x^2}{2EI}$$

$$y(L) = -\frac{M_0L^2}{2EI}$$

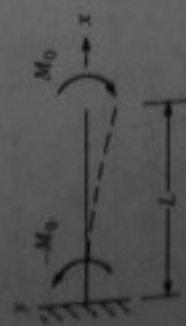
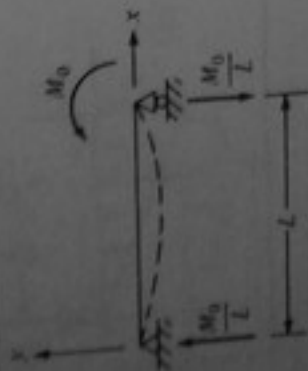
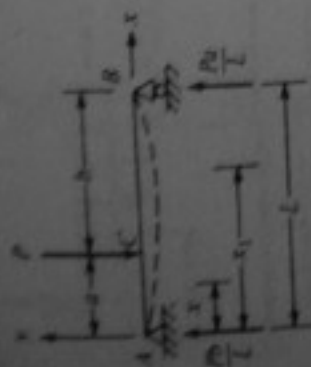


Tabla A-8 (continuación).

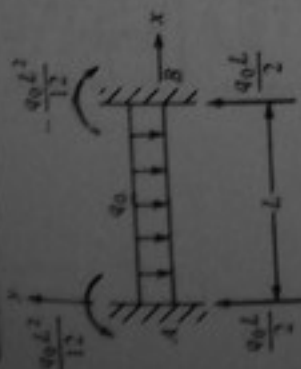
	Deflexión	Pendiente
	$y_{AC} = \frac{-PL^3}{32EI} \left(\frac{x}{L} - \frac{5x^3}{3L^2} \right)$ $y_{CB} = y_1 = \frac{-PL^3}{32EI} \left(\frac{-x_1}{4L} - \frac{5x_1^2}{2L^2} + \frac{11x_1^3}{3L^3} + \frac{7}{24} \right)$ $y\left(\frac{L}{2}\right) = y_c = \frac{-7PL^3}{768EI}$	$\Theta_{AC} = \frac{-PL^2}{32EI} \left(1 - \frac{5x^2}{L^2} \right)$ $\Theta_{CB} = \frac{-PL^2}{32EI} \left(\frac{11x_1^2}{L^2} - \frac{5x_1}{L} - \frac{1}{4} \right)$ $\Theta\left(\frac{L}{2}\right) = \Theta(C) = \frac{PL^2}{128EI}$
	$y = \frac{-QL^3}{60EI} \left(\frac{x}{L} - \frac{2x^3}{L^3} + \frac{x^5}{L^5} \right)$	$\Theta = \frac{-QL^2}{12EI} \left(\frac{1}{5} - \frac{6x^2}{5L^2} + \frac{x^4}{L^4} \right)$
	$y = \frac{-q_0 L^4}{48EI} \left(\frac{x}{L} - \frac{3x^3}{L^3} + \frac{2x^4}{L^4} \right)$ <p>Para $x = 0.4215L$,</p> $y_{\min} = \frac{-q_0 L^4}{185EI}$	$\Theta = \frac{-q_0 L^3}{48EI} \left(1 - \frac{9x^2}{L^2} + \frac{8x^3}{L^3} \right)$

$$\Theta = \frac{-q_0 L^2}{6EI} \left(\frac{x}{2L} - \frac{3x^2}{2L^2} + \frac{x^3}{L^3} \right)$$

$$M_A = \frac{q_0 L^2}{12} = -M_B$$

$$y = \frac{-q_0 L^4}{24EI} \left(\frac{x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} + \frac{x^4}{L^4} \right)$$

$$y_{\max} = \frac{-q_0 L^4}{384EI}$$

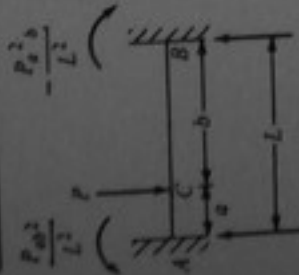


$$\Theta = \frac{-Pb^2}{6EI L^3} (6axL - 9ax^2 - 3bx^2) \quad (x < a)$$

$$M_A = \frac{Pab^2}{L^2}; M_B = \frac{-Pa^2b}{L^2}$$

$$M_x = R_A x - \frac{Pab^2}{L^2} \quad (x < a)$$

$$y = \frac{-Pb^2 x^2}{6EI L^3} (3aL - 3ax - bx) \quad (x < a)$$



$$M_x = R_A x \quad (x < a)$$

$$M_x = R_A x - P(x - a) \quad (x > a)$$

$$y = \frac{-Pb^2 x}{12EI L^3} (3aL^2 - 2Lx^2 - ax^2) \quad (x < a)$$

$$y = \frac{-Pa}{12EI L^3} (L - x)^2 (3L^2 x - a^2 x - 2a^2 L) \quad (x > a)$$

$$R_A = \frac{Pb^2}{2L^2} (a + 2L)$$

$$R_B = \frac{Pa}{2L^2} (3L^2 - a^2)$$

$$M_A = 0; M_B = \frac{-Pab(a + L)}{2L^2}$$

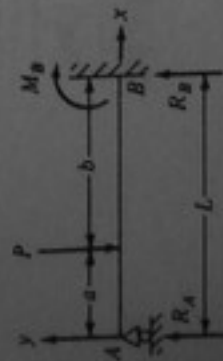
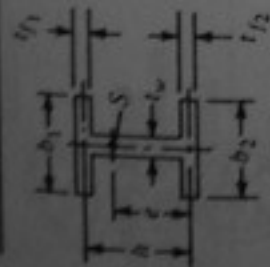


Tabla A-9 Constantes de torsión, J .

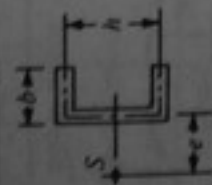
Perfil	Observaciones
General	Perfiles compuestos de perfiles rectangulares de ancho b_i y espesor t_i
$J = \sum_i b_i t_i^3 / 3$	S = centro de corte
	$J = \frac{2bt^3}{3}$
	$J = \frac{b_1 t_1^3 + b_2 t_2^3}{3}$
	$J = \frac{bt_f^3 + dt_w^3}{3}$
	$J = \frac{2bt_f^3 + ht_w^3}{3}$



$$J = \frac{b_1 t_1^3 + b_2 t_2^3 + ht_w^3}{3}$$

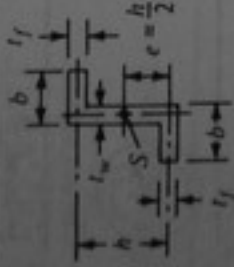
If $t_{f1} = t_{f2}$, entonces $= \frac{hb_1^3}{b_1^3 + b_2^3}$

If $t_{f1} = t_{f2} = t_w = t$, entonces $J_x = \frac{t^3}{3} (b_1 + b_2 + h)$



$$J = \frac{2bt_w^3 + ht_w^3}{3}$$

$$e = \frac{3b^2 t_w}{6bt_w + ht_w}$$

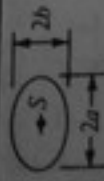


$$J = \frac{2bt_w^3 + ht_w^3}{3}$$



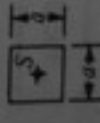
Circular sólido

$$J = \frac{\pi r^4}{2}$$



Elíptico sólido

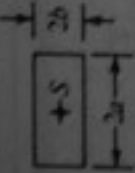


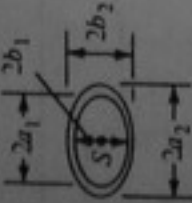

$$J = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2}$$



Cuadrado sólido

$$J = 0.1406a^4$$

Tabla A-9 (continuación).

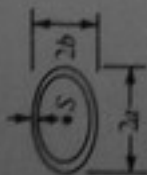
Perfil	Observaciones
	$J = ab^3 \left[\frac{16}{3} - 3.36 \frac{b}{a} \left(1 - \frac{b^4}{12a^4} \right) \right]$
Rectángulo sólido	
	$J = \frac{a^4 \sqrt{3}}{80}$
Triángulo equilátero	
	$J = \frac{\pi(r_2^4 - r_1^4)}{2}$
Círculo hueco	
	$J = \frac{\pi^3 a_2^3 b_2^3}{a_2^2 + b_2^2} (1 - k^4)$ <p>donde $k = \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$</p>
Elipse hueca	
	$J = 8\pi r^3 t^3$
Tubo circular de pared delgada	

Mediana

$$J = \frac{4A_m^2 t}{L}$$

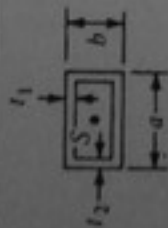
donde A_m = área aproximada encerrada dentro de la mediana
 L = longitud de la mediana

Tubo de pared delgada y forma arbitraria



$$J = \frac{4\pi^2 t [(a - \frac{1}{2}t)^2 (b - \frac{1}{2}t)^2]}{\pi(a + b - t) [1 + 0.27(a - b)^2 / (a + b)^2]}$$

Tubo elíptico de pared delgada



$$J = \frac{2t_1 t_2 (a - t_2)^2 (b - t_1)^2}{at_2 + bt_1 - t_2^2 - t_1^2}$$

Tubo rectangular



$$J = \frac{\alpha r t^3}{3}$$

$$e = \frac{2r \sin(\alpha/2) - r \cos(\alpha/2)}{r - \sin(\alpha/2) \cos(\alpha/2)}$$

Tubo circular abierto

Tabla A-10 Factores para determinar la constante de torsión y el esfuerzo cortante máximo de torsión en barras rectangulares.

Relación entre ancho y espesor, b/t	Factores para las ecuaciones (7-32), (7-33), y (7-37)		
	2ψ	χ	ξ
1.00	0.1928	0.6753	0.141
1.10	0.1973	0.7198	0.153
1.20	0.2006	0.7578	0.165
1.30	0.2031	0.7935	0.177
1.40	0.2050	0.8222	0.187
1.50	0.2064	0.8976	0.196
1.60	0.2074	0.8695	0.204
1.80	0.2086	0.9044	0.218
2.00	0.2093	0.9300	0.229
2.50	0.2099	0.9681	0.250
3.00	0.2101	0.9855	0.263
4.00	0.2101	0.9970	0.281
∞	0.2101	1.0000	0.333

Tabla A-11 Esfuerzos cortante y de tracción admisibles en remaches, pernos sin tornear y pernos de resistencia alta (Especificaciones de la AISC, Tabla 1.5.2.1).

Descripción del sujetador	Tracción F_t	Fuerza cortante F_v	
		Uniones del tipo de fricción	Uniones del tipo de empuje
Remaches A502, clase 1, remachados en caliente	20.0		15.0
Remaches A502, clase 2, remachados en caliente	27.0		20.0
Pernos A307	20.0†		10.0
Partes roscadas § de acero que llenan los requisitos de la sección 1.4.1	$0.60F_y$ †		$0.30F_y$
Pernos A325 y A449, cuando las roscas <i>no</i> se excluyen de los planos de corte	40.0‡	15.0	15.0
Pernos A325 y A449, cuando las roscas se excluyen de los planos de corte	40.0‡	15.0	22.0
Pernos A490, cuando las roscas <i>no</i> se excluyen de los planos de corte	54.0‡¶	20.0	22.5
Pernos A490, cuando las roscas se excluyen de los planos de corte	54.0‡¶	20.0	32.0

† Aplicada a un área de esfuerzo de tracción igual a $0.7854 (D - 0.9743/n)^2$, en donde D es el diámetro mayor de la rosca y n el número de hilos por pulgada.

‡ Aplicada al área nominal del perno.

§ Como el área nominal de una varilla recalcada es menor que el área de esfuerzo, la primera área gobernará.

¶ Únicamente carga estática.

Apéndice B

Figuras

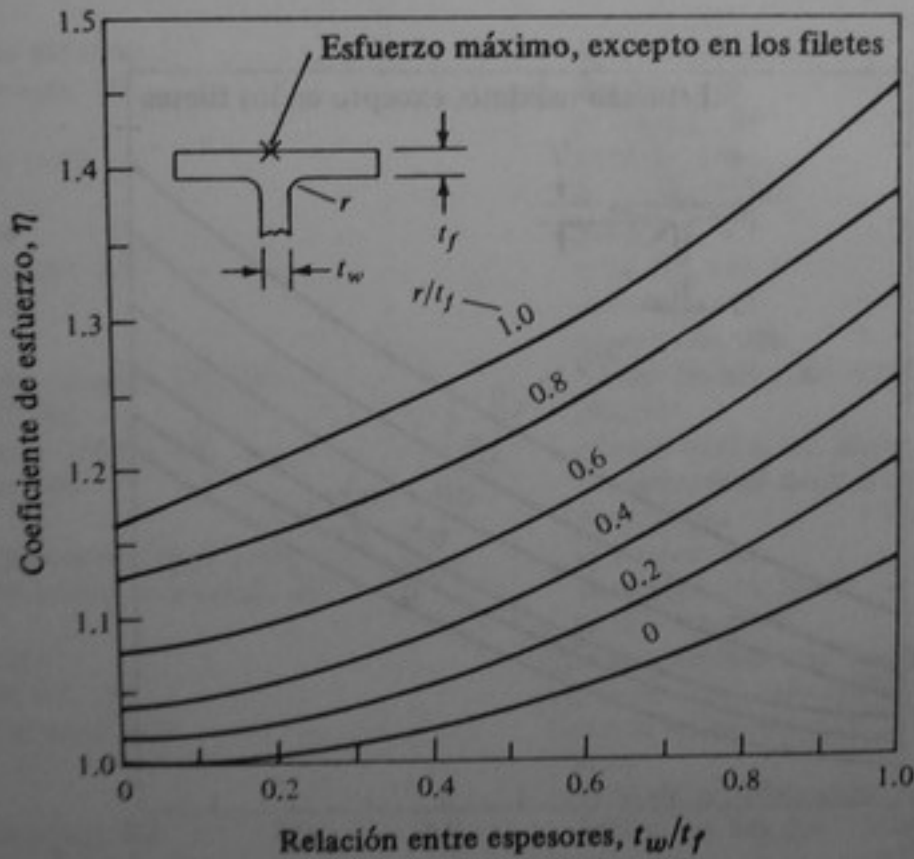


Figura B-1 Coeficientes de esfuerzo para perfiles T o W con alas paralelas.

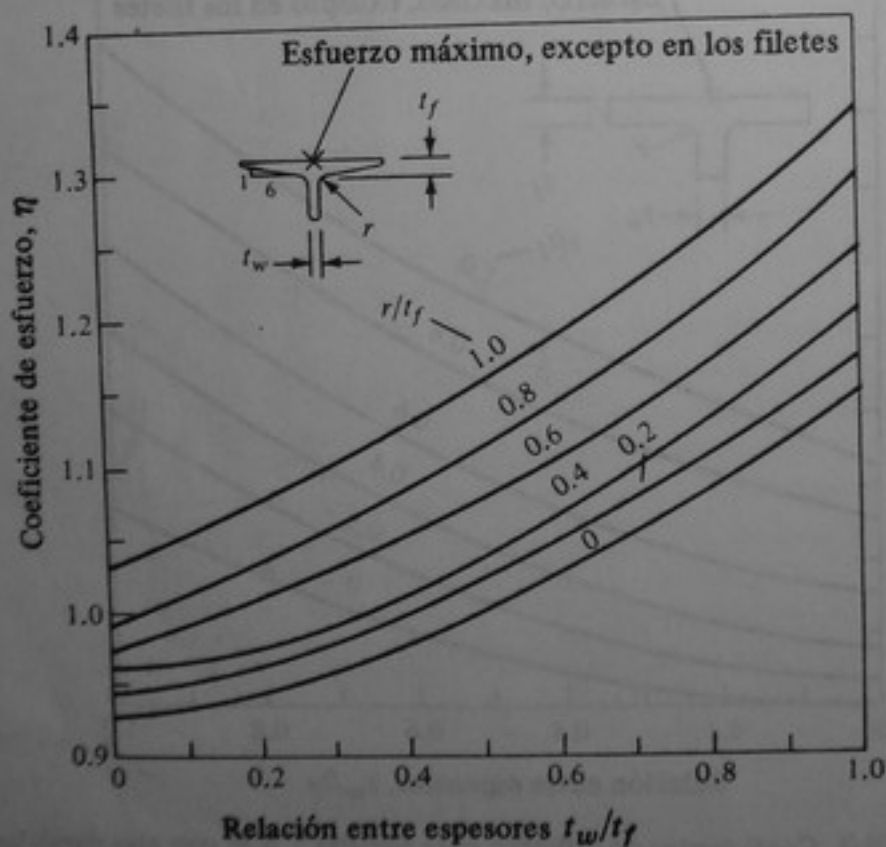


Figura B-2 Coeficientes de esfuerzo para perfiles T o I de alas con pendiente interior.

- Abarquillamiento del alma, 317
- Absorción de energía, 350
- Acciones:
 - cálculo de las, 11-12
 - externas, 81
 - internas, 10-14
- Ala, pandeo local del, 317
- Alabeo, 130, 144
- Amplitud:
 - de la carga (del esfuerzo), 377, 385
 - constante, 377, 403
 - variable (casual), 378-380, 408
- Análisis plástico, 169
- Ángulo(s):
 - propiedades para diseño de, 474-475
 - de torsión por unidad de longitud, 145
- Área:
 - de esfuerzo, 442
 - transformada, 115, 175
- Articulaciones plásticas, 297

- Caballo de fuerza (hp), 131
- Calidad de la fabricación, 293
- Campo del esfuerzo, 355, 356
- Canales con norma norteamericana, propiedades para los, diseño de, 472-473
- Capacidad:
 - de la primera reserva, 296
 - de reserva (del momento de flexión):
 - primera, 296
 - segunda, 297
 - tercera, 298
- Cara:
 - negativa, 11, 194
 - positiva, 11, 194
- Carga(s):
 - cíclica, 74
 - crítica, 315
 - de una columna, 319
 - de derrumbamiento, 292
 - dinámica, 118
 - de energía, 118
 - de Euler, 319
 - de fatiga, 377-380
 - ficticia, 91
 - final, 292, 416
 - idealizada, 377
 - inversión de, 378
 - rapidez de, 336, 350, 352
 - real, 377
 - relación entre carga, fuerza cortante y momento de flexión, 179
 - repetida, 373
 - de servicio, 291
 - de trabajo, 216, 291
 - vertical ficticia, 91
- Categoría de esfuerzos, 452-453
- Centro de corte, 167, 185-186
- Ciclos de carga, 74
- Círculo:
 - de Mohr de deformación unitaria, 270
 - de Mohr de esfuerzo, 258-261, 265
- Clivaje, 299
- Códigos, 291
- Coficiente(s):
 - de dilatación térmica, 46, 69
 - de esfuerzo:
 - para perfiles T o I, 492
 - para perfiles T o W, 491
- Columnas, 160
 - pandeo elástico de, 318
 - vigas, 160
- Comportamiento:
 - dinámico, 291
 - de ejes a la inestabilidad, 431
 - de ejes respecto a la deformación, 430
 - elástico lineal, 131, 132, 138
 - elástico plástico, 353
 - elastoplástico, 139, 169, 170
 - ideal, 139

- de elementos, 415
 - axiales a la estabilidad, 420
- esfuerzo-deformación, 347
- estático, 291
- a la fatiga:
 - de elementos axiales, 418
 - iniciación, 381, 383
- a la fractura:
 - de elementos axiales, 421
- frágil, 353
- de fuga antes de la rotura, 433
- inelástico, 131, 323
- en la iniciación de la fatiga, 381, 383
- lineal, 131
 - elástico, 131-132, 138
 - no lineal, 131, 138
 - plástico, 353
- en la propagación de la fatiga, 381, 401-406, 408-410
- a la resistencia:
 - de ejes, 430
 - de elementos axiales, 416-417
 - de recipientes a presión, 431
 - de vigas, 424
- de rotura antes de la fuga, 436, 438
- de transición de frágil a dúctil, 353
- de las vigas en deflexión, 425
- Concentración de esfuerzos, 103, 294, 339-343
- Concepto(s):
 - del continuo, 19
 - de duración de seguridad, 299
 - de energía, 79-95
 - de límite de falla, 299
- Concreto reforzado, viga de, 177
- Condición(es):
 - de apoyo y de contorno de una viga, 202
 - de continuidad de una viga, 203
 - de fluencia de Huber, Henky-Von Mises, 303, 440
 - de servicio, 291, 293, 336, 347, 357
 - superficial, 399
- Configuración:
 - cóncava, 190
 - convexa, 190
 - del equilibrio, 314
 - estable, 314
 - inestable, 314, 320
 - neutro, 314, 320
 - precario, 314, 321
- Conservación de la energía, principio de la, 81
- Constante(s):
 - de amplitud, 377, 403
 - de torsión, 134, 484-487, 488
 - en barras rectangulares, 488
- Control de la fractura, 366
- Criterio(s):
 - de deformación, 300
 - de diseño, 291-301
 - de fatiga, 299-300
 - de fluencia, 294-295
 - de la fractura, 298-299
 - de inestabilidad, 298
 - plástico, 295
- Curva(s):
 - de deformación ciclos E-N, 387
 - de diseño E-N, 455
 - E-N (esfuerzo ciclos), 387, 418
 - elásticas para vigas, 480-483
 - esfuerzo-deformación, 346
- Curvatura:
 - positiva, 190
 - primitiva, 190
 - de una viga, 188, 190
- Daño acumulativo, 393
- Deformación(es), 38-49
 - círculo de Mohr de, 270
 - componentes de la, 266, 268
 - de corte, 40, 131
 - máximo, 270
 - por corte de vigas, 161
 - definición de, 39-41
 - ejes principales de la, 270
 - de elementos cargados axialmente, 103
 - medición de la, 58
 - normal, 40
 - permanente de un material, 64
 - plana, 358
 - plásticas, 64, 65
 - principales, 270
 - relación con los desplazamientos totales, 42
 - residual, 64
 - térmica, 49, 69
 - por torsión, 131, 135-136
 - transformación de la, 266, 268
 - de una viga, 188, 202
 - condiciones de contorno de fuerza de la, 202
 - condiciones de contorno geométricas en la, 202
 - método de la energía para determinar la, 207
- Densidad complementaria de energía de deformación, 82, 85
 - adicional, 85
 - total, 84
- Desempeño, niveles de, 352-354
- Desplazamiento(s), 38
 - componentes del, 38, 48
 - recíprocos, ley de Maxwell de los, 93
- Desviaciones normales, 389
- Diagrama(s):
 - E-N, 383, 385
- esfuerzo-deformación, 59, 61-67
 - idealizados, 65
- de fuerzas cortantes:
 - y de momentos de flexión para vigas, 187
 - utilizando el método de gradiente, 188
 - utilizando el procedimiento de la suma, 194
- de Goodman, 390, 391
- de momentos:
 - utilizando el método de gradiente, 188
 - utilizando el procedimiento de la suma, 199
- de Ramber-Osgood, 65-66
- Dilatación térmica, coeficiente de, 49, 69
- Dimensiones de la sección, 293
- Discontinuidades, 336, 339, 342, 365
- Diseño por mecánica de la fractura, 360-363

- Distancia:
 a la fibra externa, 161
 hasta el extremo, 447
- Distribución:
 de la deformación, 101-102
 de esfuerzos, 103, 340
- Duración:
 de una estructura, 291
 hasta la iniciación de la fatiga, 374, 380
 de la propagación (grieta por fatiga), 374, 380
 total, 374, 381
- Ecuación(es):
 de Essenger, 324
 de fuerzas cortantes, 194
 geométricas de desplazamientos, 110
 del módulo tangente, 324
 de momentos, 194
 de transformación de la deformación, 268
 de transformación del esfuerzo, 249, 250, 264
- Eficiencia:
 de una junta, 447
 de una unión, 417
- Eje(s), 430
 centroidal, 162
 giratorios, 130, 131
 neutro, 161, 162
 octaédricos, 307
 principales, 165-166
 de simetría, 165
 de torsión, 186
- Elasticidad, 64
 módulo de, 162
- Elementos:
 axiales, 415
 cargados axialmente, 100-119
 circulares:
 energía de deformación para, 138
 torsión de, 131
 compuestos de materiales diferentes, 112
 deformación de, 103
 estáticamente indeterminados, 109
 no circulares, 134
 y sistemas cargados axialmente, estáticamente indeterminados, 109-110
- Empuje sobre una placa, 444
- Endurecimiento por deformación, 64-65
- Energía, 79
 cinética, 81, 118
 de deformación, 79
 axial, 85, 116
 por corte, 85, 131, 148
 por distorsión, 306
 elástica, total, 84
 por flexión, 85
 tipos de, 82
 por torsión, 85, 138
 para elementos circulares, 138
 de una viga, 201-202
 principio de conservación de la, 81
- Ensayo:
 de fatiga, 380
 de materiales, 56-59
- Entalla, 347, 376
 aguda, 347, 355
 tenacidad a la, 73, 299, 347-350
- Equilibrio, 12
 estable, 314, 320
 estático, ecuaciones de, 109
 inestable, 314, 320
 neutro, 314, 320
 precario, 314, 321
- Esfuerzo(s), 19-24
 admisibles:
 conceptos de, 316
 de empuje, 44
 métodos de cálculo, 292
 para pernos de resistencia alta, 448, 489
 para pernos sin torrear, 439, 489
 de tracción, 442, 445
 de alabeo, 130
 campo del, 355, 356
 círculo de Mohr de, 258-261, 265
 combinados, 236-242
 componentes del, 19, 248, 362
 componentes de referencia del, 250-264
 de compresión, 16
 cortante(s):
 admisibles, 440-441, 450
 longitudinales, 132
 máxima absoluta, 265
 máximo, 252, 264
 octaédrico, 306-307
 en pernos, 439
 promedio, 20, 240, 440
 radiales, 132
 de torsión, 131
 en vigas, 180, 265
 crítico, 315, 319
 definición de, 15
 de diseño, 422
 de empuje admisible, 444
 de Euler, 319
 final, 63, 64, 416
 de fluencia, 63
 método del 0.2% de separación para definir el, 67
 hidrostático, 305
 medio, 378, 390
 de membrana, 242-244
 nominal, 61, 336
 normal promedio, 20
 plano, 358
 principales, 252, 264
 promedios normal y cortante, 20, 440
 relación con las acciones internas, 16
 residuales, 293, 294, 323
 tensor, 20
 térmico, 49, 69-70
 de torsión, 167
 de tracción, 16, 442, 445
 admisible, 442, 445
 transformación de, 247-249
 verdadero, 61

- Especificaciones, 291
- Estabilidad, 314-329
- Estados de esfuerzos:
 - tridimensionales, 263-265
 - uniaxiales, 100
- Estricción de la probeta, 60
- Euler:
 - carga de, 319
 - esfuerzo de, 319
- Expansión lateral, 350

- Fabricación, calidad de la, 293
- Factor(es):
 - de carga, 292
 - de concentración de esfuerzos, 339, 347
 - efectivo, 343
 - en la fatiga, 396, 418
 - teórico, 339
 - de conversión, 465
 - crítico de intensidad de esfuerzo, 357-358
 - de forma, 171, 295
 - de intensidad del esfuerzo, 355-356, 426
 - de longitud efectiva, 322
 - de seguridad, 292
 - de columnas, 325
- Falla, 291
 - de la capacidad de servicio, 291
 - dúctil, 294, 303, 337
 - estructural, 294
 - frágil, 294, 303
 - local, 294
 - modos de, 294, 415
 - por resistencia, 291, 292, 447
 - modos de, 447
 - de una sección, 294
 - teorías de, 303-307
 - comparación de las, 309-311
 - energía de distorsión, 305-306
 - esfuerzo cortante máximo, 304-305
 - esfuerzo cortante octaédrico, 306-307
 - esfuerzo normal máximo, 304
 - verificación experimental de las, 309-311
 - de toda la estructura, 294
- Fatiga, 74, 299-300, 373-410
 - de altos ciclos, 373
 - de bajos ciclos, 373
 - por ciclos de deformación, 385
- Fenómeno de coacción, 295
- Fijación de la junta, 323
- Filote, soldadura con, 449
- Flexión:
 - inédica de vigas, 169
 - no asimétrica, 166
 - oblicua, 166
 - pura, 159
 - de vigas respecto a ejes arbitrarios, 166
- Fluencia, 60
 - esfuerzo de, 63
 - general, 345
 - local, 294
 - plástica, 149
 - total, 140, 172
- Flujo, 74
 - de corte, 148
- Formas de los modos, 319
- Fórmula:
 - de la flexión elástica, 161
 - de transferencia, 163
- Fractura:
 - y comportamiento a la fatiga, 343
 - de conexiones, 459
 - de recipientes a presión, 440
 - de vigas, 426
 - diseño por mecánica de la, 360-363
 - fibrosa, 357
 - frágil, 299, 336-365
- Fuerza(s):
 - axiales, 20
 - cortante, 11
 - relación entre carga, momento de flexión y, 179
 - internas, 9-10, 81
- Funciones de singularidad, 204

- Gradiente del momento, 180
- Grado:
 - de indeterminación estática, 209, 318
 - de redundancia estática, 318
- Grieta(s), 355
 - a través del espesor, 356-357
 - en bordes, 356, 357, 427
 - crecimiento de la, 429
 - razón de, 403
 - por fatiga, 374
 - crecimiento de la, 375
 - propagación de la, 381, 401-406, 408-410
 - superficial, 433
 - en vigas, 356

- Hipérbola de Euler, 324
- Historia de la resistencia de materiales, 3-5
- Indeterminación:
 - estática (redundancia), grado de, 209, 318
 - externa, 109
 - interna y externa, 109
- Indicadores de roseta (para deformaciones), 272, 274
- Inercia, producto de, 165
- Inestabilidad:
 - de la deformación, 314
 - de un elemento, 316, 317
 - estructural, 316, 317
 - local, 316
 - tipos de, 314-318
 - torsional, 316
- Integraciones sucesivas, 202, 209
- Intervalo:
 - de la deformación, 385
 - de esfuerzo, 377, 385
- Inversión de la carga, 378
- Juntas:
 - de pasadores, 439

- pernadas de alta resistencia, diseño de, 448
 pernadas corrientes, 439
 remachadas, 439
- Ley:
 del daño acumulativo de Miner, 394
 de Hooke, 62, 65, 66, 101, 131, 161
 generalizada, 68-69, 85
 de Maxwell de los desplazamientos recíprocos, 93
 de la termodinámica, primera, 81
- Límite:
 de aguante, 74
 elástico, 64
 de fatiga, 74, 383, 418-419
 de proporcionalidad, 63, 323
- Longitud efectiva de una columna, 322
- Márgenes de seguridad, 291-294, 416-417
- Material(es):
 dúctiles, 65
 elástico lineal, 64
 ensayos de, 56-59
 frágiles, 65
 isotrópicos, 67
 propiedades de los, 292
 resistencia de los, aplicación de los
 principios de la, 415, 456
- Mecánica de la fractura, 354-355
- Media, 389
- Mediana, 389
- Medidores de deformación (deformímetros),
 58-59, 272, 274
- Método:
 de apretado de pernos por giro de la tuerca, 448
 de diseño daño-tolerancia, 294
 del diseño elástico, 292
 de diseño de límite de falla, 300
 del diseño plástico, 292, 295
 de la energía, 207
 del gradiente:
 diagramas de durezas cortantes utilizando
 el, 188
 diagramas de momentos utilizados el, 188
 de las integraciones sucesivas, 194
 de la llave calibrada para apretar pernos, 448
 de las porciones, 194
- Modos de falla, 294, 415
- Módulo:
 de elasticidad, 62, 162
 cortante, 68
 plástico, 171
 de resiliencia, 74, 84
 de la sección, 162
 inferior, 162
 superior, 162
 tangente, 324
 de tenacidad, 73
 de Young, 62
- Momento(s)
 estático (de primer orden), 181
 de flexión, 11
 relación entre carga, fuerza cortante
 y, 179
- de fluencia, 170
 gradiente del, 180
 de inercia, 162
 de la sección transformada, 176
 polar, 133
 parcialmente plástico, 171
 plástico, 170
 de primer orden, 181
 redistribución de, 297
 de torsión (torque), 11, 131
 distribuido, 136
- Niveles de desempeño, 352-354
- Núcleo elástico, 139
- Pandeo, 315
 elástico, 323, 327
 de columna, 318
 inelástico, 323-324
 local del ala, 317
- Pasadores, juntas de, 439
- Perfiles W, propiedades para el diseño de los,
 468-471
- Pernos:
 corrientes, 439
 esfuerzo cortante en, 439
 de resistencia alta, 448, 489
 sin tornear, 439, 489
- Planos:
 de esfuerzo cortante, 245
 principales, 161, 252, 264
- Principio(s):
 de la resistencia de materiales, aplicaciones
 de los, 415, 456
 de Saint-Venant, 101, 416
- Probeta:
 compacta para tracción, 358, 359, 381
 para ensayos, 57, 58
 para impacto CVN (Charpy con entalla en V),
 348-349
- Procedimiento de la suma:
 diagramas de fuerzas cortantes utilizando
 el, 195
 diagramas de momentos utilizando el, 199
- Producto de inercia, 165
- Productores de esfuerzos, 295
- Propiedades:
 de las áreas planas, 466
 de los materiales, 292
 mecánicas de los materiales, 56-74, 466
 efecto de la rapidez de carga sobre las, 72
 efecto de la temperatura sobre las, 71
 y la ley de Hooke, 62-65
- Punto de bifurcación, 321
- Radio de giro, 319
- Raíz:
 cuadrada de la suma de los cuadrados (rsc),
 179
 cuadrada de la suma de los cuadrados de los
 intervalos de intensidad del esfuerzo, 469

- Recipientes a presión, 242-246, 431-438
 cilíndricos, 242
 diseño, 431
 esféricos, 245
 esfuerzo de membrana en, 242
- Rectángulos delgados, 145
- Redistribución de momentos, 297
- Región de transición, 349
- Regla del daño lineal de Miner, 399
- Relación(es):
 entre carga, fuerza cortante y momento de flexión, 179
 entre las constantes elásticas, 275
 deformación-desplazamiento, 45-47
 esfuerzo-deformación, 62, 65, 69, 336
 de Poisson, 66-67
 R, 378
 de torsión, 147
- Requisitos:
 de desempeño, 291
 para la seguridad, 291
- Resiliencia, 74
 módulo de, 74, 84
- Resistencia:
 final, 60
 de fluencia, 63
- Restricción, 336, 337
- Rosetas de deformación, 272, 274
- Rotación:
 residual, 141
 por unidad de longitud, 135
- Rotura de la fuga, comportamiento de la, 436, 438
- Sección(es):
 abiertas de pared delgada, 145
 alabeada, 131
 cerrada de pared delgada, 147
 no alabeadas, 131
 rectangulares sólidas, 144
 transformada, momento de inercia de la, 176
- Seguridad, 292
- Servicio, cargas de, 291
- Simetría, eje de, 165
- Soldaduras:
 con filete, 449
 a tope, 449
- Superficie neutra, 161
- Superposición, principio de la, 238
- Tamaño de la grieta, 295, 357
- Temperatura de transición, 349
- Tenacidad, 73, 348
 a la entalla, 73, 299, 347-350
 módulo de, 73
- Teoremas:
 de Castigliano, primera, 87,
 de Castigliano, segunda, 87, 207, 219
 de los ejes paralelos, 66, 163
 recíprocos, 93-94
- Teoría:
 "clásica" de las vigas, 160
 del esfuerzo cortante octaédrico, 306-307
 de las vigas, 160
- Termodinámica, primera ley de la, 81
- Torsión, 130-149
 constante de, 134, 484-487, 488
 de elementos circulares, 131
 esfuerzo cortante máximo de torsión en barras rectangulares, 488
 pura, 130
- Trabajo, 79-82
 absorbido, 81
 cargas de, 291, 316
 complementario, 85
 externo, 80
 interno, 81
 negativo, 81
- Tracción:
 en pernos, 442
 de una placa, 445
- Transformación:
 de la deformación, 266, 268
 del esfuerzo, 247-249
- Trayectoria:
 múltiple de carga, 317
 única de carga, 318
- Uniones, 438-456
 categorías de, 452-456
 empernadas, 439
 de pasadores, 439
 pernadas, 439
 soldadas, 449-451
 del tipo de empuje, 448
 del tipo de fricción, 448
- Variaciones:
 lineales de la deformación, 139
 de longitud, 293
- Vector de desplazamiento, 38
- Velocidad de deformación, 351-352
- Vigas:
 análisis de las, 159-220
 columnas, 160
 comportamiento en la deflexión de las, 425
 comportamiento a la resistencia de las, 424
 compuestas, 175
 de concreto reforzado, 177
 curvas, 216
 elásticas para las, 480-483
 deformación por corte de las, 161
 diagramas de momentos y de fuerzas cortantes para las, 187
 diseño de las, 423-424
 de dos materiales (compuestas), 175
 esfuerzos cortantes en las, 180
 estáticamente indeterminadas, 208-210
 flexión inelástica de las, 169
 flexión respecto a ejes arbitrarios, 166
 grietas en, 356
 suposiciones básicas de la teoría de las, 160
 teoría "clásica" de las, 160
- Young, módulo de, 62

OTROS LIBROS MCGRAW - HILL EN ESPAÑOL CON TEMAS AFINES:

- | | |
|-----------------|---|
| Beer | Mecánica de materiales |
| Beer & Johnston | Mecánica vectorial para ingenieros. Tomo I Estática, 3/e. |
| Beer & Johnston | Mecánica vectorial para ingenieros. Tomo II Dinámica, 3/e. |
| Beer & Johnston | Mecánica vectorial para ingenieros (S.I.). Tomo I Estática, 3/e. |
| Beer & Johnston | Mecánica vectorial para ingenieros (S.I.). Tomo II Dinámica, 3/e. |
| Kazanas | Procesos básicos de manufactura |
| Krar | Operación de máquinas herramientas |
| Norris | Análisis elemental de estructuras, 2/e. |
| Snigley | Diseño en ingeniería mecánica, 4/e. |

U S A C

BIBLIOTECA CENTRAL
GUATEMALA



478165363

ISBN 968-451-430-1

