

RESISTENCIA DE MATERIALES I

PRACTICAS Y EXAMENES USMP

Ph.D. Genner Villarreal Castro

PREMIO NACIONAL ANR 2006, 2007, 2008

Lima – Perú

2012

La Resistencia de Materiales, es una ciencia sobre los métodos de cálculo a la resistencia, la rigidez y la estabilidad de los elementos estructurales. Se entiende por *resistencia* a la capacidad de oponerse a la rotura, *rigidez* a la capacidad de oponerse a la deformación y *estabilidad* a la capacidad de mantener su condición original de equilibrio.

Por lo general, el dictado de los cursos de Resistencia de Materiales, se centran principalmente en la descripción teórica y en la resolución de un escaso número de problemas, lo cual dificulta el proceso de aprendizaje, más aún tratándose de un curso eminentemente práctico y con una diversidad de problemas.

El presente libro nació, después de comprobar las grandes dificultades mostradas por los alumnos en la resolución de problemas aplicados en prácticas calificadas y exámenes, así como en la realización de sus trabajos domiciliarios.

Es por ello, que tomé el reto de escribir un libro, que haga más didáctico el proceso de estudio individual, resolviendo en forma seria y con el rigor científico todas las prácticas calificadas y exámenes aplicados por el autor en el período 2006-I al 2008-I, correspondiente al curso Resistencia de Materiales I dictado en la Escuela de Ingeniería Civil de la Universidad de San Martín de Porres, propiciando, de esta manera, una forma más amena de convivencia con la Resistencia de Materiales y conducente a un mejor dominio de la materia.

Este libro es un complemento perfecto al editado anteriormente por el autor, denominado Resistencia de Materiales, el cual se usa como texto base en las Carreras de Ingeniería Civil de muchas Universidades nacionales y extranjeras, así como en Centros de Investigación en Ingeniería Estructural.

Como base se tomó la experiencia adquirida en el dictado de los cursos de Mecánica de Materiales y Resistencia de Materiales en la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas, Universidad de San Martín de Porres y Universidad Privada Antenor Orrego.

En mi modesta opinión, el presente libro es único en su género, tanto en la forma de resolución de problemas; así como en su contenido, que no es una repetición de otros textos, editados anteriormente.

El presente libro consta de 4 Prácticas Calificadas, Examen Parcial y Examen Final por cada ciclo, siendo un total de 5 ciclos.

En la Práctica Calificada N° 1 se evalúa el capítulo tracción y compresión.

En la Práctica Calificada N° 2 se evalúan los capítulos esfuerzo y deformación y torsión.

En el Examen Parcial se evalúan los capítulos tracción y compresión, esfuerzo y deformación y torsión.

En la Práctica Calificada N° 3 se evalúa el capítulo flexión.

En la Práctica Calificada N° 4 se evalúa el capítulo deformación en vigas.

En el Examen Final se evalúan los capítulos flexión y deformación en vigas.

El presente texto está dirigido a estudiantes de ingeniería civil y docentes que imparten el curso Resistencia de Materiales I; así como, a ingenieros civiles, postgraduandos e investigadores en el área de estructuras.

Este libro se lo dedico a mis alumnos de Mecánica de Materiales y Resistencia de Materiales de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas, Universidad de San Martín de Porres y Universidad Privada Antenor Orrego; quienes con sus consultas me motivaron a escribir el presente libro y con su energía renovada me permitieron culminar con éxito este trabajo.

De manera muy especial, dedico el presente libro a mi sobrina Joanna Noriko Villarreal Imamura, quien con su inteligencia, carisma y dulzura, fue un soporte invaluable en la culminación de este trabajo, rogando a Dios Todopoderoso podamos seguir juntos aportando al desarrollo integral de la sociedad.

Ph.D. Genner Villarreal Castro
genner_vc@rambler.ru

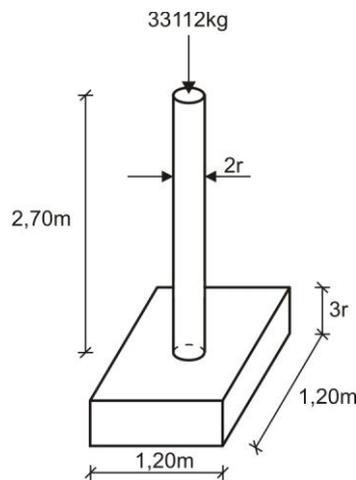
Lima, Abril del 2012



EVALUACIÓN	PRACTICA CALIFICADA Nº 1	SEM. ACADÉMICO	2006 – I
CURSO	RESISTENCIA DE MATERIALES I	SECCIÓN	26E
PROFESOR	Ph.D. GENNER VILLARREAL CASTRO	DURACIÓN	110m
ESCUELA	INGENIERIA CIVIL	CICLO	V

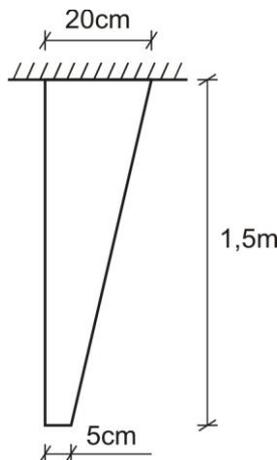
1. Determinar el máximo valor del radio “r” de la columna, tal que la estructura mostrada no se hunda, si el terreno tiene una capacidad portante de $2,5\text{kg/cm}^2$. Considerar que la zapata y la columna son de concreto armado, cuyo peso específico es 2400kg/m^3 y que sobre la columna actúa una carga de 33112kg

..... (4 puntos)



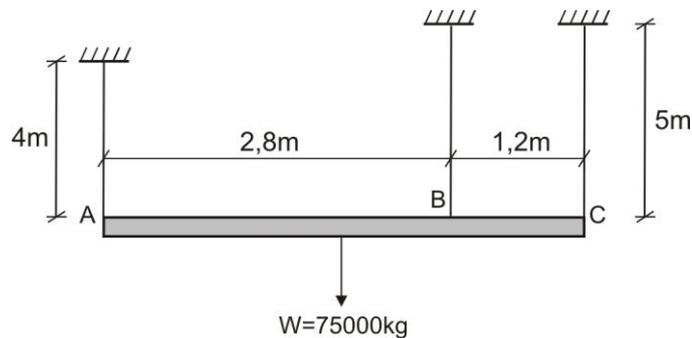
2. Una estructura ahusada de acero de 4cm de espesor se muestra en la figura. Se pide determinar el incremento de longitud en esta estructura debido a su peso propio, si en la parte superior está empotrada y en la parte inferior libre. Considerar que el peso específico del acero es $\gamma_a = 7,8\text{T/m}^3$ y el módulo de elasticidad es $E_a = 2,1 \cdot 10^6 \text{kg/cm}^2$

..... (4 puntos)



3. Un bloque perfectamente rígido ABC, cuyo peso es 75000kg, está soportado por tres cables de la misma sección y del mismo material. Determinar la fuerza que soporta cada cable, teniendo en consideración que el bloque no queda en forma horizontal.

..... (4 puntos)



4. Una columna cuadrada de concreto armado de 30cm de lado y 3m de altura, está reforzada con 4 varillas de acero de $\frac{3}{4}$ " de diámetro y sometida a la acción de una carga axial de compresión de 50T. Considerar $E_c = 15000\sqrt{f'_c}$, siendo $f'_c = 210\text{kg/cm}^2$ y $E_a = 2,1 \cdot 10^6 \text{kg/cm}^2$. Determinar los esfuerzos normales en el concreto y en el acero, así como el acortamiento que se produce en la columna.

..... (4 puntos)

5. La barra compuesta mostrada en la figura está firmemente sujeta a soportes indeformables. El montaje se ejecutó a la temperatura ambiente de 17°C . Calcular los esfuerzos en cada material, si la temperatura se eleva a 60°C . Las características se dan en la siguiente tabla:

MATERIAL	AREA DE LA BARRA	MODULO DE ELASTICIDAD	COEFICIENTE DE DILATACION TERMICA
ACERO	$A_a = 14\text{cm}^2$	$E_a = 2,1 \cdot 10^6 \text{kg/cm}^2$	$\alpha_a = 1,2 \cdot 10^{-5} \left(\frac{1}{^\circ\text{C}} \right)$
ALUMINIO	$A_{al} = 10\text{cm}^2$	$E_{al} = 7,2 \cdot 10^5 \text{kg/cm}^2$	$\alpha_{al} = 2,4 \cdot 10^{-5} \left(\frac{1}{^\circ\text{C}} \right)$

..... (4 puntos)



FECHA	La Molina, 27 de Marzo del 2006
-------	---------------------------------

SOLUCIONARIO DE PRACTICA CALIFICADA Nº 1

CICLO 2006 – I

1. Calculamos el peso total de la estructura:

$$P = 33112 + 2400 \left[\frac{\pi}{4} (2r)^2 (2,70) + 1,2 \cdot 1,2 \cdot 3r \right] = 33112 + 10368r + 20357,52r^2$$

Como nos piden el máximo valor del radio "r", tenemos que igualarlo con la capacidad portante del terreno.

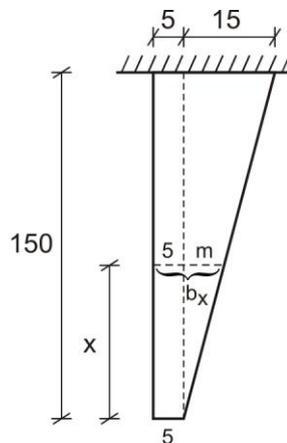
$$\frac{20357,52r^2 + 10368r + 33112}{1,2 \cdot 1,2} = 25000$$

$$20357,52r^2 + 10368r - 2888 = 0$$

De donde:

$$r = 0,2\text{m}$$

2. Dividimos la estructura, tal como se muestra en la siguiente figura:



De la relación de triángulos rectángulos se obtiene:

$$\frac{m}{x} = \frac{15}{150} \quad \Rightarrow \quad m = 0,1x$$

Luego:

$$b_x = 5 + m = 5 + 0,1x$$

$$A_x = (5 + 0,1x) \cdot 4 = 20 + 0,4x$$

$$P_x = \gamma_a V_x = \gamma_a \int_0^x A_x dx = \gamma_a \int_0^x (20 + 0,4x) dx = \gamma_a (20x + 0,2x^2)$$

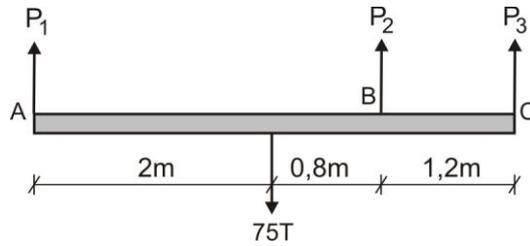
En consecuencia:

$$\delta = \int_0^L \frac{P_x dx}{E_a A_x} = \frac{\gamma_a}{E_a} \int_0^{150} \frac{(20x + 0,2x^2) dx}{(20 + 0,4x)} = \frac{7,8 \cdot 10^3}{10^6 \cdot 2,1 \cdot 10^6} \cdot 7642,13 = 2,838 \cdot 10^{-5} \text{ cm}$$

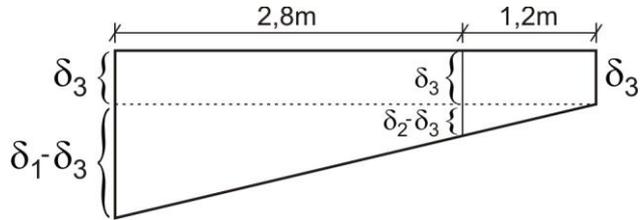
3. Efectuamos un corte por los tres cables y analizamos el equilibrio del bloque ABC

$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad P_1 + P_2 + P_3 = 75 \quad \dots\dots\dots (a)$$

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad 2,8P_2 + 4P_3 = 150 \quad \dots\dots\dots (b)$$



Efectuamos el diagrama de desplazamientos y analizamos la relación existente entre triángulos rectángulos.



$$\frac{\delta_2 - \delta_3}{1,2} = \frac{\delta_1 - \delta_3}{4}$$

$$1,2\delta_1 - 4\delta_2 + 2,8\delta_3 = 0$$

Reemplazamos valores:

$$1,2\left(\frac{P_1 L_1}{EA}\right) - 4\left(\frac{P_2 L_2}{EA}\right) + 2,8\left(\frac{P_3 L_3}{EA}\right) = 0$$

$$1,2.(P_1).(4) - 4.(P_2).(5) + 2,8.(P_3).(5) = 0$$

$$4,8P_1 - 20P_2 + 14P_3 = 0 \quad \dots\dots\dots (c)$$

Resolvemos las ecuaciones (a), (b) y (c), obteniendo:

$$P_1 = 30,730T = 30730\text{kg}$$

$$P_2 = 22,567T = 22567\text{kg}$$

$$P_3 = 21,703T = 21703\text{kg}$$

4. Como la columna es de concreto armado, se debe de cumplir la siguiente relación:

$$\delta_a = \delta_c \quad \Rightarrow \quad \frac{P_a L}{E_a A_a} = \frac{P_c L}{E_c A_c}$$

Siendo:

$$E_c = 15000\sqrt{210} = 217370,65\text{kg/cm}^2$$

$$A_a = 4\left[\frac{\pi}{4}.0,75^2\right] = 1,767\text{plg}^2 = 11,4\text{cm}^2$$

$$A_c = 30^2 - 11,4 = 888,6\text{cm}^2$$

Luego:

$$P_a = \frac{2,1 \cdot 10^6 \cdot 11,4}{217370,65 \cdot 888,6} P_c = 0,124 P_c$$

Además:

$$P_a + P_c = P$$

$$0,124P_c + P_c = 50000$$

$$P_c = 44483,99\text{kg}$$

$$P_a = 5516,01\text{kg}$$

Calculamos los esfuerzos en el concreto y acero:

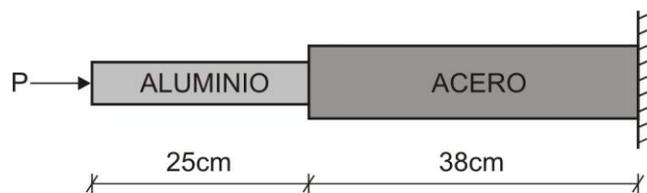
$$\sigma_c = \frac{P_c}{A_c} = \frac{44483,99}{888,6} = 50,06\text{kg/cm}^2$$

$$\sigma_a = \frac{P_a}{A_a} = \frac{5516,01}{11,4} = 483,86\text{kg/cm}^2$$

Determinamos el acortamiento en la columna:

$$\delta_{\text{columna}} = \delta_a = \delta_c = \frac{P_c L}{E_c A_c} = \frac{44483,99 \cdot 300}{217370,65 \cdot 888,6} = 0,069\text{cm} = 0,69\text{mm}$$

5. Eliminamos el empotramiento del lado izquierdo y lo reemplazamos por su reacción.



Se sabe que el desplazamiento en el empotramiento es cero, es decir:

$$\delta_T + \delta_P = 0$$

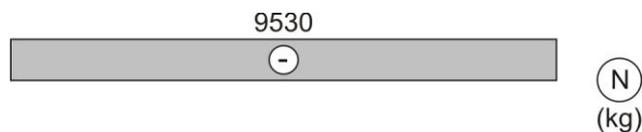
$$\alpha_{al}(\Delta T)L_{al} + \alpha_a(\Delta T)L_a - \frac{PL_{al}}{E_{al}A_{al}} - \frac{PL_a}{E_a A_a} = 0$$

$$2,4 \cdot 10^{-5} \cdot 43 \cdot 25 + 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot 43 \cdot 38 - \frac{P \cdot 25}{7,2 \cdot 10^5 \cdot 10} - \frac{P \cdot 38}{2,1 \cdot 10^6 \cdot 14} = 0$$

De donde:

$$P = 9530\text{kg}$$

Graficamos el diagrama de fuerza axial o normal.



Luego:

$$\sigma_{al} = \frac{P}{A_{al}} = -\frac{9530}{10} = -953\text{kg/cm}^2$$

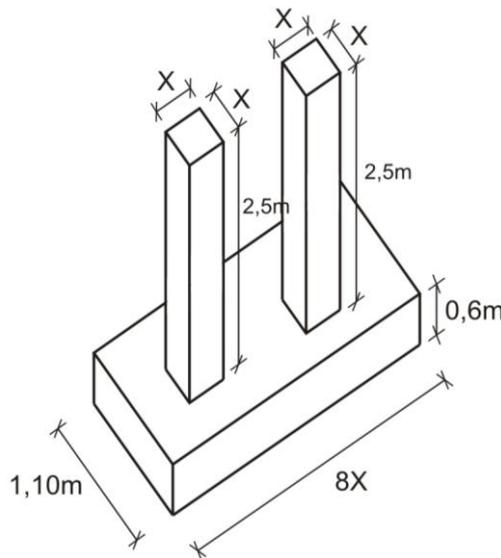
$$\sigma_a = \frac{P}{A_a} = -\frac{9530}{14} = -680,71\text{kg/cm}^2$$



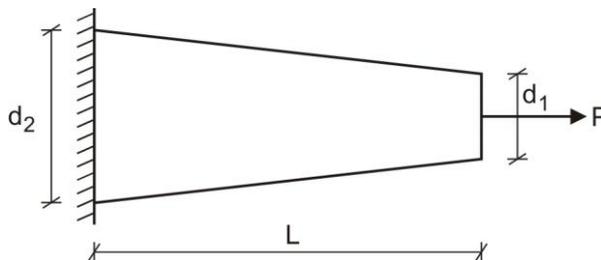
EVALUACIÓN	PRACTICA CALIFICADA Nº 1	SEM. ACADÉMICO	2006 – II
CURSO	RESISTENCIA DE MATERIALES I	SECCIÓN	26E
PROFESOR	Ph.D. GENNER VILLARREAL CASTRO	DURACIÓN	110m
ESCUELA	INGENIERIA CIVIL	CICLO	V

1. Al ensayar a compresión una probeta de concreto, el diámetro original de 6plg se incrementó en 0,0004plg y la longitud original de 12plg se redujo en 0,0065plg bajo la acción de la carga de compresión $P = 52000\text{lb}$. Determinar el coeficiente de Poisson μ y el módulo de elasticidad E
 (3 puntos)

2. Sabiendo que la estructura mostrada en la figura es de concreto armado y pesa 4881,6kg. Considere su peso específico 2400kg/m^3 . Se pide, determinar el valor de "X", el peso de la zapata combinada y la capacidad portante mínima del terreno para que la estructura no se hunda.
 (4 puntos)

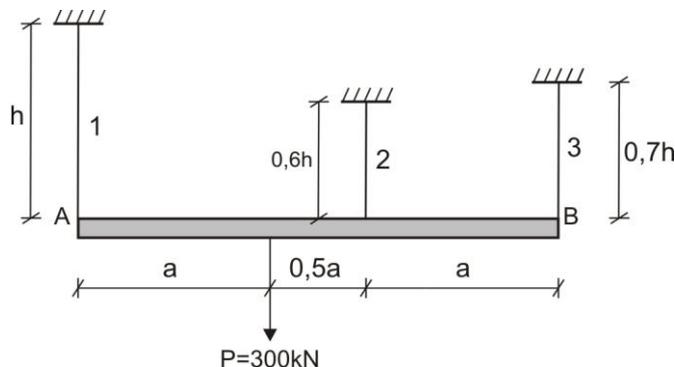


3. Una barra troncocónica AB de sección transversal circular se somete a una carga P en su extremo libre, tal como se muestra en la figura. Los diámetros en los extremos son d_1 y d_2 , la longitud L y el módulo de elasticidad es E . Obtener una fórmula para la energía de deformación U de la barra y determinar el alargamiento δ de la barra debido a la carga P
 (4 puntos)



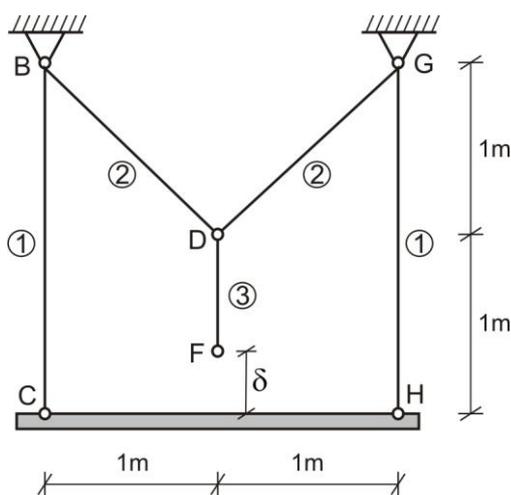
4. La barra sólida AB es sujeta por tres cables, tal como se muestra en la figura. Determinar las áreas de las secciones de los cables, si se sabe que el cable 1 es de acero, el cable 2, de cobre y el cable 3, de aluminio. Además, el área del segundo cable es el triple del primero y el del tercer cable es el doble del primero. Considerar $E_a = 2.10^5 \text{ MPa}$, $E_c = 10^5 \text{ MPa}$, $E_{al} = 0,7.10^5 \text{ MPa}$, $[\sigma]_a = 160 \text{ MPa}$, $[\sigma]_c = 60 \text{ MPa}$ y $[\sigma]_{al} = 120 \text{ MPa}$

..... (4 puntos)



5. Determinar los esfuerzos de montaje que surgen en las barras del sistema, si la barra 3 fue fabricada en $\delta = 0,4 \text{ mm}$ menor de lo proyectado. Considerar $E = 2.10^5 \text{ MPa}$, $A_2 = 1,5A_1$ y $A_3 = 2A_1$

..... (5 puntos)



FECHA

La Molina, 28 de Agosto del 2006

SOLUCIONARIO DE PRACTICA CALIFICADA Nº 1

CICLO 2006 – II

1. Calculamos la deformación transversal:

$$\varepsilon' = \frac{\Delta d}{d} = \frac{d_f - d_i}{d_i} = \frac{6,0004 - 6}{6} = 6,667 \cdot 10^{-5}$$

Ahora, determinamos la deformación longitudinal:

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L} = \frac{L_f - L_i}{L_i} = \frac{11,9935 - 12}{12} = -5,416 \cdot 10^{-4}$$

El coeficiente de Poisson será:

$$\mu = -\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} = -\frac{6,667 \cdot 10^{-5}}{-5,416 \cdot 10^{-4}} = 0,123$$

Calculamos el módulo de elasticidad:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{P}{\varepsilon A} = \frac{-52000}{-5,416 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 6^2} = 339,57 \cdot 10^4 \text{ psi} = 3,39 \cdot 10^6 \text{ psi}$$

2. Se sabe que:

$$P_{\text{zapata}} + 2P_{\text{columna}} = P_{\text{total}}$$

$$2400 \cdot (1,10) \cdot (8X) \cdot (0,60) + 2 \cdot (2400) \cdot (X) \cdot (X) \cdot (2,50) = 4881,6$$

$$12000X^2 + 12672X - 4881,6 = 0$$

De donde:

$$X = 0,3\text{m}$$

Calculamos el peso de la zapata combinada:

$$P_{\text{zapata}} = 2400 \cdot 1,10 \cdot 0,60 \cdot 2,4 = 3801,6\text{kg}$$

Determinamos la capacidad portante del terreno:

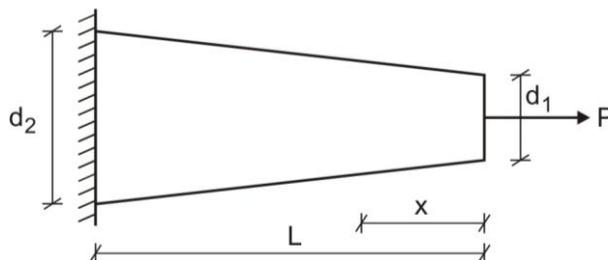
$$q_a \geq \frac{P_{\text{total}}}{A_{\text{zapata}}} \Rightarrow q_a \geq \frac{4881,6}{110 \cdot 240}$$

$$q_a \geq 0,185\text{kg/cm}^2$$

De donde:

$$q_{a,\text{mín}} = 0,185\text{kg/cm}^2 = 1,85\text{T/m}^2 \text{ (SUELO BLANDO)}$$

3. Dividimos la estructura, tal como se muestra en la figura:



El diámetro a una distancia "x" será:

$$d_x = d_1 + \frac{(d_2 - d_1)x}{L}$$

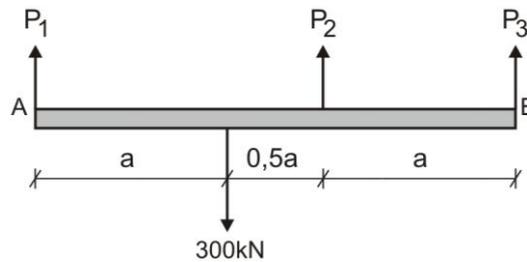
Calculamos la energía potencial de deformación:

$$U = \int_0^L \frac{P_x^2 dx}{2EA_x} = \int_0^L \frac{4P^2 dx}{2E\pi[d_1 + (d_2 - d_1)x/L]^2} = \frac{2P^2L}{\pi Ed_1 d_2}$$

Luego, por ser P carga única que actúa en toda la barra, se tendrá:

$$\delta = \frac{2U}{P} = \frac{4PL}{\pi Ed_1 d_2} \text{ (ALARGAMIENTO)}$$

4. Efectuamos un corte y analizamos el equilibrio de la barra sólida AB

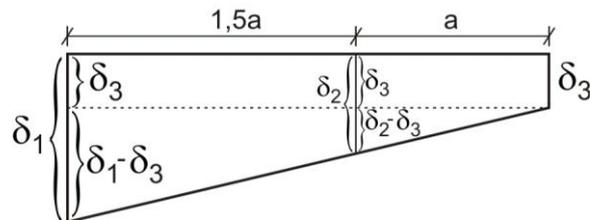


$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad P_1 + P_2 + P_3 = 300 \quad \dots\dots\dots (a)$$

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad 1,5P_2 a + 2,5P_3 a = 300a$$

$$1,5P_2 + 2,5P_3 = 300 \quad \dots\dots\dots (b)$$

El sistema estructural es una vez hiperestático y dicha hiperestaticidad lo resolvemos a través del diagrama de desplazamientos.



Aplicamos la relación de triángulos rectángulos, obteniendo:

$$\frac{\delta_2 - \delta_3}{a} = \frac{\delta_1 - \delta_3}{2,5a}$$

$$\delta_1 - 2,5\delta_2 + 1,5\delta_3 = 0$$

Además:

$$\delta_1 = \frac{P_1 h}{E_a A_a}; \quad \delta_2 = \frac{P_2 (0,6h)}{E_c A_c}; \quad \delta_3 = \frac{P_3 (0,7h)}{E_{al} A_{al}}$$

Reemplazamos valores y obtenemos:

$$\frac{P_1 h}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 (A)} - 2,5 \frac{P_2 (0,6h)}{10^5 \cdot 10^6 (3A)} + 1,5 \frac{P_3 (0,7h)}{0,7 \cdot 10^5 \cdot 10^6 (2A)} = 0$$

$$0,5P_1 - 0,5P_2 + 0,75P_3 = 0 \quad \dots\dots\dots (c)$$

Resolvemos las ecuaciones (a), (b) y (c):

$$P_1 = 117,39\text{kN}$$

$$P_2 = 156,52\text{kN}$$

$$P_3 = 26,09\text{kN}$$

Aplicamos la condición de resistencia:

ACERO:

$$\sigma_a \leq [\sigma]_a \quad \Rightarrow \quad \frac{117,39 \cdot 10^3}{A} \leq 160 \cdot 10^6 \quad \therefore \quad A \geq 7,33 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$A \geq 7,33 \text{ cm}^2$$

COBRE:

$$\sigma_c \leq [\sigma]_c \quad \Rightarrow \quad \frac{156,52 \cdot 10^3}{3A} \leq 60 \cdot 10^6 \quad \therefore \quad A \geq 8,69 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

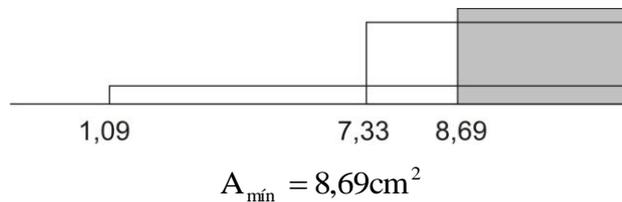
$$A \geq 8,69 \text{ cm}^2$$

ALUMINIO:

$$\sigma_{al} \leq [\sigma]_{al} \quad \Rightarrow \quad \frac{26,09 \cdot 10^3}{2A} \leq 120 \cdot 10^6 \quad \therefore \quad A \geq 1,09 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$A \geq 1,09 \text{ cm}^2$$

De donde:



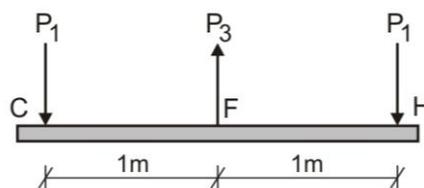
Luego:

$$A_a = A = 8,69 \text{ cm}^2$$

$$A_c = 3A = 26,07 \text{ cm}^2$$

$$A_{al} = 2A = 17,38 \text{ cm}^2$$

5. Se fija la barra 3 a la viga, obteniéndose las fuerzas internas después del corte efectuado.

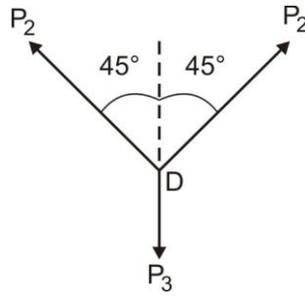


$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad P_3 = 2P_1 \quad \dots\dots\dots (a)$$

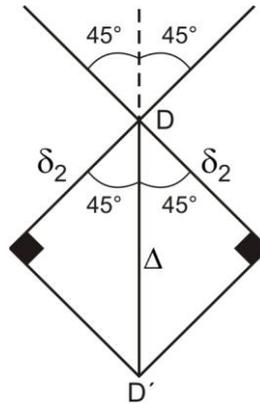
Analizamos el equilibrio en el nudo D

$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad 2P_2 \cos 45^\circ = P_3$$

$$P_3 = P_2 \sqrt{2} \quad \dots\dots\dots (b)$$



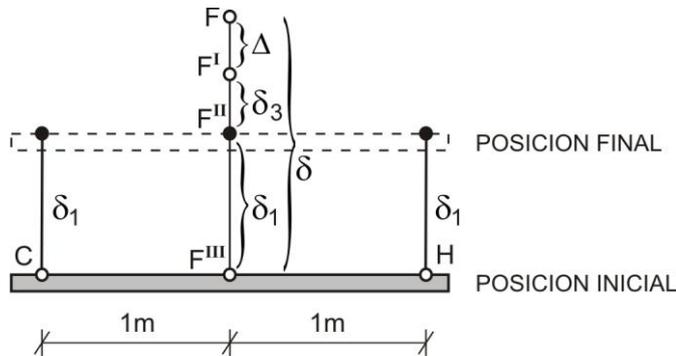
Analizamos el diagrama de desplazamientos en el nudo D sin considerar la fuerza P_3 , solo consideramos las acciones de las fuerzas P_2



Del gráfico tenemos:

$$\Delta \cos 45^\circ = \delta_2 \quad \Rightarrow \quad \Delta = \delta_2 \sqrt{2} \quad \dots\dots\dots (c)$$

Ahora, analizamos el diagrama de desplazamientos del sistema estructural correspondiente a la viga CFH, traccionando la barra central hasta la viga, denominada posición inicial y retornando a una posición final del sistema.



De donde:

$$\Delta + \delta_1 + \delta_3 = \delta$$

$$\sqrt{2} \left[\frac{P_2 L_2}{EA_2} \right] + \left[\frac{P_1 L_1}{EA_1} \right] + \left[\frac{P_3 L_3}{EA_3} \right] = 0,4 \cdot 10^{-3}$$

$$\sqrt{2} \left[\frac{P_3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{E(1,5A_1)} \right] + \left[\frac{P_3}{2} \cdot \frac{2}{EA_1} \right] + \left[\frac{P_3 \cdot 1}{E(2A_1)} \right] = 0,4 \cdot 10^{-3}$$

$$\frac{4\sqrt{2}}{3} \left(\frac{P_3}{2A_1} \right) + 2 \left(\frac{P_3}{2A_1} \right) + \left(\frac{P_3}{2A_1} \right) = 80 \cdot 10^6$$

$$\frac{4\sqrt{2}}{3}\sigma_3 + 2\sigma_3 + \sigma_3 = 80.10^6$$

$$\sigma_3 = 16,37.10^6 \text{ Pa} = 16,37\text{MPa (TRACCION)}$$

Ahora, determinamos los esfuerzos σ_1 y σ_2 , los cuales son de compresión y tracción respectivamente, de acuerdo a los diagramas de desplazamiento mostrados en la página anterior.

$$\sigma_1 = \frac{P_1}{A_1} = \frac{P_3}{2} \left(\frac{1}{A_1} \right) = \frac{P_3}{2A_1} = \sigma_3 = 16,37\text{MPa (COMPRESION)}$$

$$\sigma_2 = \frac{P_2}{A_2} = \frac{P_3}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{1,5A_1} \right) = \frac{\sqrt{2}}{1,5} \left(\frac{P_3}{2A_1} \right) = \frac{\sqrt{2}}{1,5} \sigma_3 = 15,43\text{MPa (TRACCION)}$$



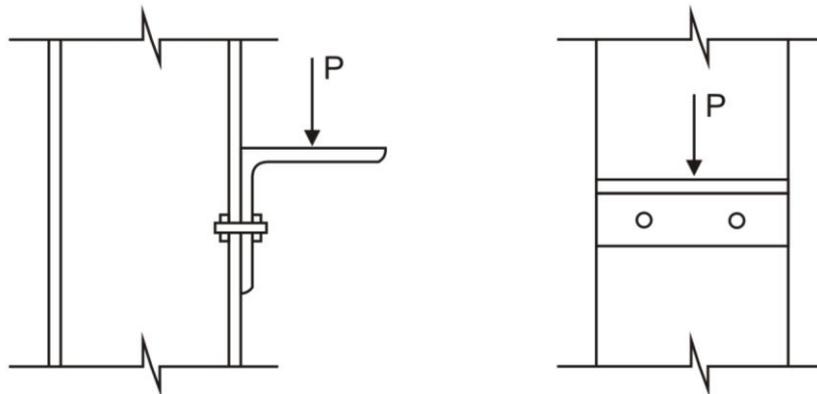
EVALUACIÓN	PRACTICA CALIFICADA N° 1	SEM. ACADÉMICO	2007 – I
CURSO	RESISTENCIA DE MATERIALES I	SECCIÓN	26E
PROFESOR	Ph.D. GENNER VILLARREAL CASTRO	DURACIÓN	110m
ESCUELA	INGENIERIA CIVIL	CICLO	V

1. Determinar la fuerza de tracción máxima que puede soportar una varilla de acero de diámetro 5/8", donde el esfuerzo de fluencia es $f_y = 4200\text{kg/cm}^2$, considerando un factor de seguridad $n = 2$ en un diseño por esfuerzo simple.

..... (3 puntos)

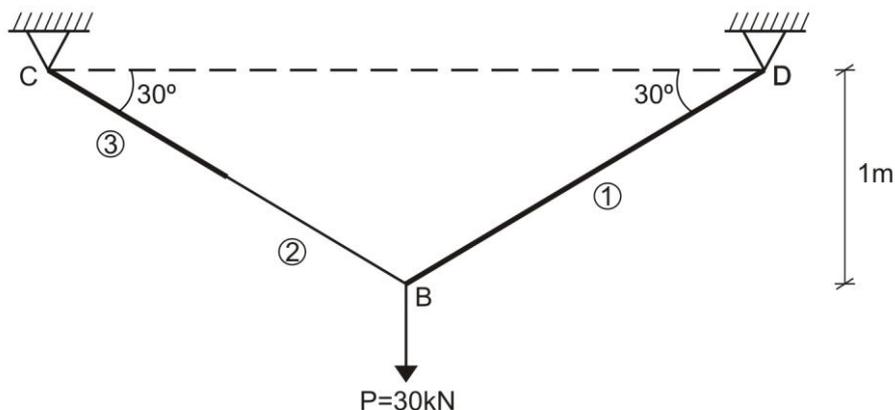
2. La ménsula de acero mostrada en la figura está fijada a la columna mediante dos pernos, si la ménsula soporta una carga $P = 2500\text{kg}$ y el esfuerzo admisible por corte de los pernos es de 750kg/cm^2 . Diseñar los pernos de fijación sabiendo que en el mercado se dispone de pernos con diámetros de 12, 16 y 20mm

..... (3 puntos)



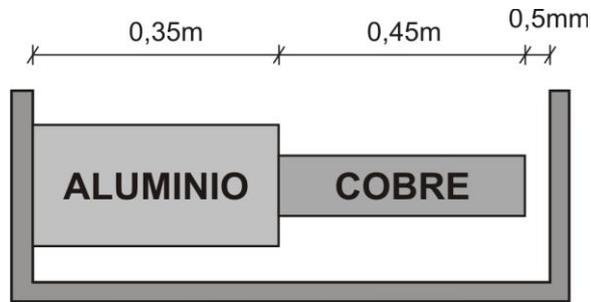
3. Determinar los desplazamientos δ_x , δ_y del nudo B y los esfuerzos normales que surgen en las barras, si $L_2 = L_3$, $A_3 = 2A_2 = 4\text{cm}^2$ y $A_1 = 3\text{cm}^2$. Considerar $E = 2.10^5\text{MPa}$

..... (5 puntos)



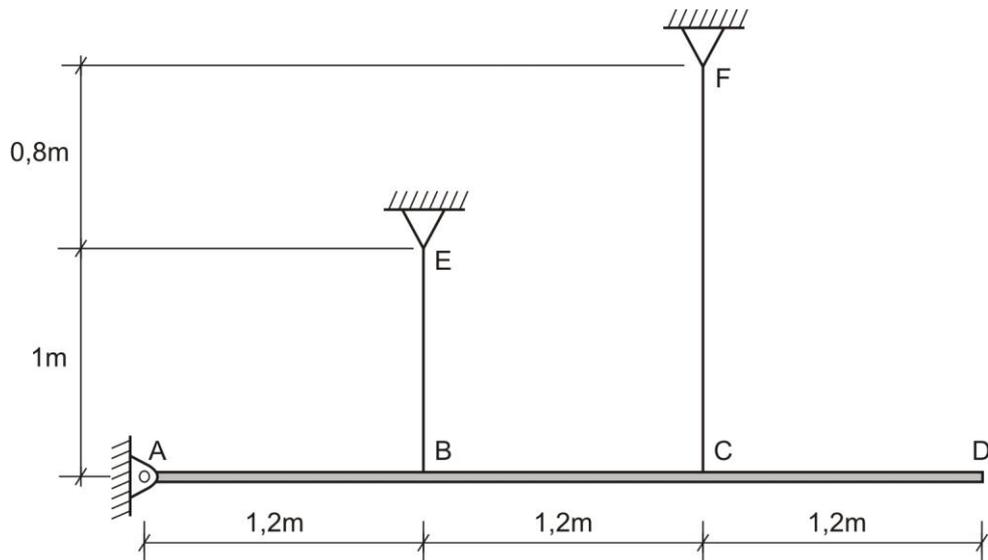
4. Para la barra escalonada, se tiene que $E_c = 100\text{GPa}$; $A_c = 1500\text{mm}^2$; $\alpha_c = 16,5 \cdot 10^{-6}/^\circ\text{C}$; $E_{al} = 72\text{GPa}$; $A_{al} = 1800\text{mm}^2$; $\alpha_{al} = 23,9 \cdot 10^{-6}/^\circ\text{C}$. Se pide determinar la fuerza de compresión en las barras mostradas después del incremento de temperatura en 96°C y la variación de longitud en la barra de cobre.

..... (4 puntos)



5. En la barra rígida AD de 10kN/m de peso es sujeta por dos cables de acero de $1,5\text{cm}$ de diámetro ($E = 200\text{GPa}$ y $\alpha = 12,5 \cdot 10^{-6}/^\circ\text{C}$) y a una temperatura inicial de 23°C . Si el sistema pasara a una temperatura de 40°C . Se pide determinar la deformación y esfuerzos finales en los cables.

..... (5 puntos)



FECHA	La Molina, 26 de Marzo del 2007
-------	---------------------------------

SOLUCIONARIO DE PRACTICA CALIFICADA Nº 1

CICLO 2007 – I

1. Calculamos el esfuerzo admisible:

$$[\sigma] = \frac{f_y}{n} = \frac{4200}{2} = 2100 \text{ kg/cm}^2$$

Luego:

$$\frac{P}{A} \leq [\sigma] \Rightarrow P \leq 2100 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^2 \cdot 2,54^2$$

$$P \leq 4156,58 \text{ kg}$$

De donde:

$$P_{\text{máx}} = 4156,58 \text{ kg}$$

2. La carga que soportará cada perno es:

$$P_{\text{perno}} = \frac{P}{2} = 1250 \text{ kg}$$

Aplicamos la condición de resistencia:

$$\tau \leq [\tau] \Rightarrow \frac{P_{\text{perno}}}{A_{\text{perno}}} \leq [\tau]$$
$$\frac{1250}{\pi d^2 / 4} \leq 750$$

De donde:

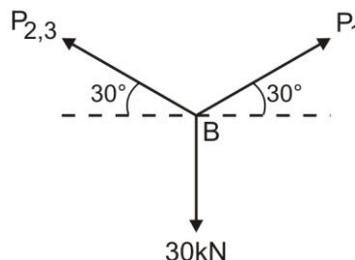
$$d \geq 1,456 \text{ cm}$$

$$d \geq 14,56 \text{ mm}$$

Como se puede apreciar, cumplen los diámetros 16mm y 20mm, pero por economía elegimos:

$$d_{\text{mín}} = 16 \text{ mm}$$

3. Analizamos el equilibrio del nudo B



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow P_1 = P_{2,3}$$

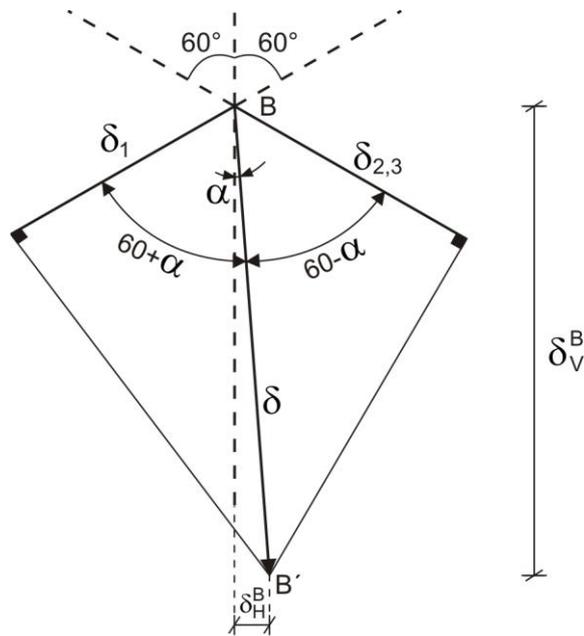
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow P_1 \sin 30^\circ + P_{2,3} \sin 30^\circ = 30 \quad \therefore \quad P_1 = P_{2,3} = 30 \text{ kN (TRACCION)}$$

Luego:

$$\delta_1 = \frac{P_1 L_1}{EA_1} = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 2}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 3 \cdot 10^{-4}} = 10^{-3} \text{ m} = 1 \text{ mm}$$

$$\delta_{2,3} = \delta_2 + \delta_3 = \frac{P_{2,3}L_2}{EA_2} + \frac{P_{2,3}L_3}{EA_3} = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 1}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^{-4}} + \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 1}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 4 \cdot 10^{-4}} = 11,25 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 1,125 \text{ mm}$$

Efectuamos el diagrama de desplazamientos:



Del gráfico:

$$\delta \cos(60 + \alpha) = \delta_1 \quad \dots\dots\dots (a)$$

$$\delta \cos(60 - \alpha) = \delta_{2,3} \quad \dots\dots\dots (b)$$

Dividimos (a) entre (b), obteniendo:

$$\frac{\cos(60 + \alpha)}{\cos(60 - \alpha)} = \frac{1}{1,125}$$

Efectuando operaciones, obtenemos:

$$\text{tg} \alpha = \frac{0,125}{2,125} \text{ctg} 60^\circ$$

De donde:

$$\alpha = 1,945^\circ$$

Luego:

$$\delta = \frac{\delta_1}{\cos(60 + \alpha)} = \frac{1}{\cos 61,945^\circ} = 2,126 \text{ mm}$$

Del diagrama de desplazamientos:

$$\delta_H^B = \delta \text{sen} \alpha = 2,126 \text{sen} 1,945^\circ = 0,072 \text{ mm} \rightarrow$$

$$\delta_V^B = \delta \cos \alpha = 2,126 \cos 1,945^\circ = 2,125 \text{ mm} \downarrow$$

Calculamos los esfuerzos normales:

$$\sigma_1 = \frac{P_1}{A_1} = \frac{30 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^{-4}} = 100 \text{ MPa (TRACCION)}$$

$$\sigma_2 = \frac{P_{2,3}}{A_2} = \frac{30 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{-4}} = 150 \text{MPa (TRACCION)}$$

$$\sigma_3 = \frac{P_{2,3}}{A_3} = \frac{30 \cdot 10^3}{4 \cdot 10^{-4}} = 75 \text{MPa (TRACCION)}$$

4. Calculamos la variación de longitud producto del incremento de temperatura:

$$\delta_T = \alpha_{al}(\Delta T)L_{al} + \alpha_c(\Delta T)L_c = 23,9 \cdot 10^{-6} \cdot 96,0,35 + 16,5 \cdot 10^{-6} \cdot 96,0,45 = 1,516 \text{mm}$$

Como δ_T es mayor que 0,5mm; significa que en el extremo derecho existe una reacción que impide se desplace mayor a este valor de 0,5mm e implica que la reacción R disminuye la magnitud 1,016mm

$$\frac{RL_c}{E_c A_c} + \frac{RL_{al}}{E_{al} A_{al}} = 1,016 \cdot 10^{-3}$$

$$\frac{R \cdot 0,45}{100 \cdot 10^9 \cdot 1500 \cdot 10^{-6}} + \frac{R \cdot 0,35}{72 \cdot 10^9 \cdot 1800 \cdot 10^{-6}} = 1,016 \cdot 10^{-3}$$

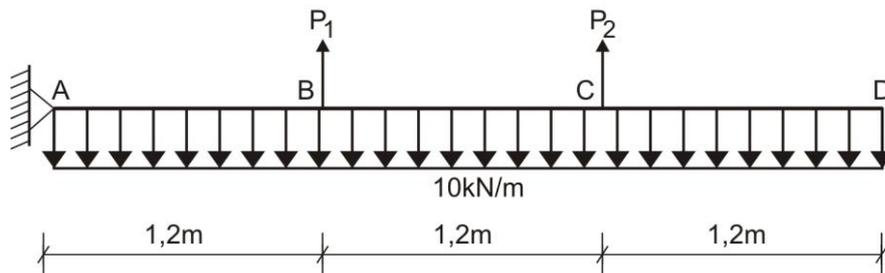
$$R = 178,24 \text{kN}$$

Ahora, calculamos la variación de longitud en la barra de cobre.

$$\delta_c = \delta_c^T - \delta_c^R = \alpha_c(\Delta T)L_c - \frac{RL_c}{E_c A_c} = 16,5 \cdot 10^{-6} \cdot 96,0,45 - \frac{178,24 \cdot 10^3 \cdot 0,45}{100 \cdot 10^9 \cdot 1500 \cdot 10^{-6}} = 178 \cdot 10^{-6} \text{m}$$

$$\delta_c = 0,178 \text{mm}$$

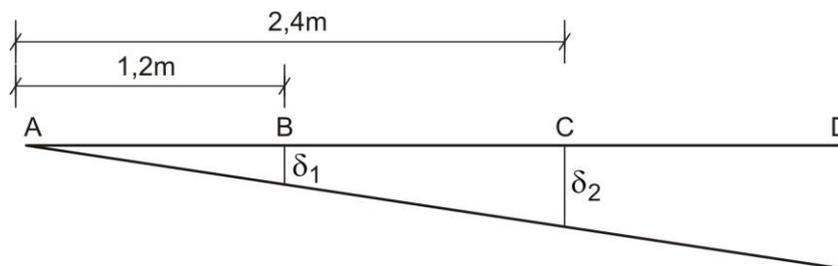
5. Efectuamos un corte en los cables y analizamos su equilibrio:



$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad 1,2P_1 + 2,4P_2 - 10 \cdot 3,6 \cdot 1,8 = 0$$

$$P_1 + 2P_2 = 54 \quad \dots\dots\dots (a)$$

Luego, efectuamos el diagrama de desplazamientos:



$$\frac{\delta_1}{1,2} = \frac{\delta_2}{2,4}$$

$$2\delta_1 = \delta_2$$

$$2 \left[\frac{P_1 L_1}{EA} + \alpha(\Delta T) L_1 \right] = \frac{P_2 L_2}{EA} + \alpha(\Delta T) L_2$$

$$2 \left[\frac{P_1 \cdot 1.4}{200 \cdot 10^6 \cdot \pi \cdot 1.5^2 \cdot 10^{-4}} + 12,5 \cdot 10^{-6} \cdot 17.1 \right] = \frac{P_2 \cdot 1,8.4}{200 \cdot 10^6 \cdot \pi \cdot 1,5^2 \cdot 10^{-4}} + 12,5 \cdot 10^{-6} \cdot 17.1,8$$

$$5,659P_1 - 5,093P_2 = -4,250 \quad \dots\dots\dots (b)$$

Resolvemos (a) y (b), obteniendo:

$$P_1 = 16,240\text{kN}$$

$$P_2 = 18,880\text{kN}$$

Calculamos los esfuerzos en los cables:

$$\sigma_{BE} = \frac{P_1}{A} = \frac{16,240 \cdot 10^3 \cdot 4}{\pi \cdot 1,5^2 \cdot 10^{-4}} = 91,90\text{MPa}$$

$$\sigma_{CF} = \frac{P_2}{A} = \frac{18,880 \cdot 10^3 \cdot 4}{\pi \cdot 1,5^2 \cdot 10^{-4}} = 106,84\text{MPa}$$

La deformación en los cables será:

$$\delta_1 = \frac{16,240 \cdot 10^3 \cdot 1.4}{200 \cdot 10^9 \cdot \pi \cdot 1,5^2 \cdot 10^{-4}} + 12,5 \cdot 10^{-6} \cdot 17.1 = 67,2 \cdot 10^{-5} \text{ m} = 0,672\text{mm}$$

$$\delta_2 = 2\delta_1 = 1,344\text{mm}$$



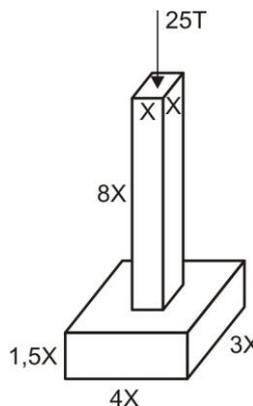
EVALUACIÓN	PRACTICA CALIFICADA Nº 1	SEM. ACADÉMICO	2007 – II
CURSO	RESISTENCIA DE MATERIALES I	SECCIÓN	26E
PROFESOR	Ph.D. GENNER VILLARREAL CASTRO	DURACIÓN	110m
ESCUELA	INGENIERIA CIVIL	CICLO	V

1. Determinar la fuerza de tracción P necesaria para producir una deformación unitaria longitudinal $\epsilon = 0,0007$ en una varilla de acero ($E = 30.10^6$ psi) de sección transversal circular, cuyo diámetro es igual a 1plg

..... (2 puntos)

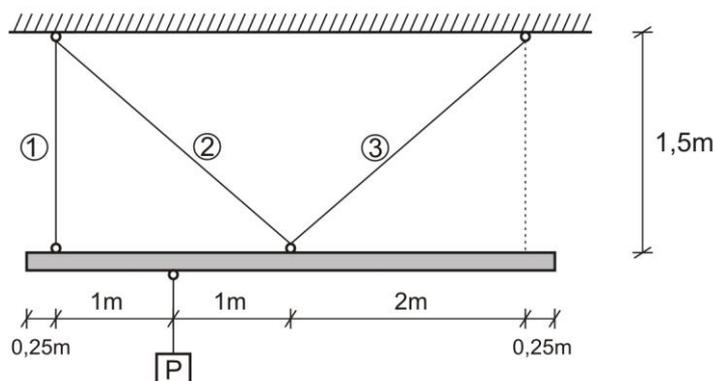
2. La columna de un edificio apoticado de concreto armado recibe la carga axial de 25T. Determinar las dimensiones de la columna y zapata, sabiendo que ha sido diseñado con una capacidad portante de $1,51\text{kg/cm}^2$ e indicar el tipo de suelo según la Norma de Diseño Sismorresistente E030

..... (3 puntos)



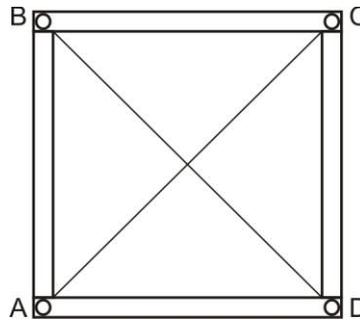
3. La barra rígida horizontal pesa 1000kg/m y soporta además la carga $P = 6000\text{kg}$, es sostenida por las tres varillas de acero indicadas, cuyo esfuerzo de fluencia es 4200kg/cm^2 . Diseñar las varillas considerando un factor de seguridad 1,8 para la condición de resistencia. Los diámetros de las varillas disponibles en el mercado son $3/8"$, $1/2"$, $5/8"$, $3/4"$, $7/8"$ y $1"$. Considerar $1\text{plg}=2,54\text{cm}$

..... (4 puntos)



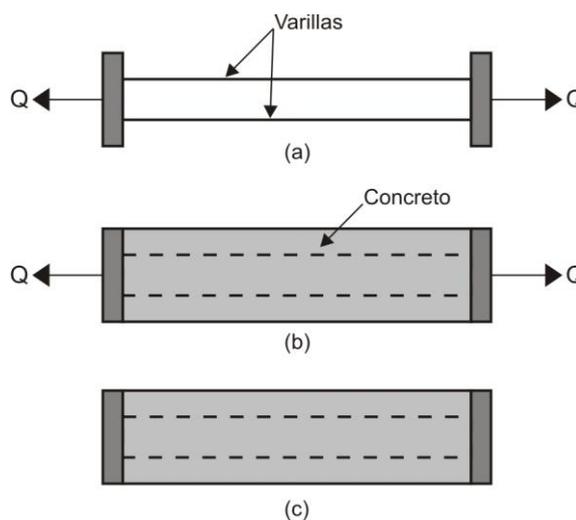
4. Las barras exteriores del bastidor cuadrado mostrado en la figura, están hechas de aluminio ($E_{al} = 10,6 \cdot 10^6 \text{ psi}$, $\alpha_{al} = 13 \cdot 10^{-6} / ^\circ\text{F}$) y las diagonales son cables de acero ($E_a = 29 \cdot 10^6 \text{ psi}$, $\alpha_a = 6,5 \cdot 10^{-6} / ^\circ\text{F}$). Las áreas de sección transversal de las barras de aluminio y los cables de acero guardan una proporción 20:1. Determinar el esfuerzo σ_a en los cables de acero, si la temperatura del bastidor completo se incrementa 80°F

..... (5 puntos)



5. Las vigas de concreto preforzado se fabrican algunas veces de la siguiente forma. En un mecanismo de gato hidráulico se estiran varillas de acero de alta resistencia, bajo una fuerza Q , como se muestra en la parte (a) de la figura. El concreto se vacía o cuela alrededor de las varillas para formar una viga, como se muestra en la parte (b). Después de que el concreto ha fraguado adecuadamente, los gatos se sueltan y la fuerza Q desaparece (véase última parte de la figura). De esta manera, la viga está sometida a una condición preforzada, con las varillas en tracción y el concreto en compresión. Supongamos que la carga de prefuerzo Q produce en las varillas de acero un esfuerzo inicial $\sigma_o = 820 \text{ MPa}$. Si los módulos de elasticidad del acero y el concreto guardan una proporción 8:1 y las áreas de sección transversal guardan una relación 1:30 ¿Cuáles son los esfuerzos finales σ_a y σ_c en los dos materiales?

..... (6 puntos)



FECHA	La Molina, 27 de Agosto del 2007
-------	----------------------------------

SOLUCIONARIO DE PRACTICA CALIFICADA N° 1

CICLO 2007 – II

1. Sabemos que $\varepsilon = \delta/L$ y $\delta = PL/EA$, obteniendo la siguiente expresión:

$$\varepsilon = \frac{PL}{EA} \cdot \frac{1}{L} = \frac{P}{EA} \quad \Rightarrow \quad P = EA\varepsilon = 30 \cdot 10^6 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 1^2 \cdot 0,0007 = 16493,361b$$

$$P = 16,493k$$

2. Aplicamos el concepto de capacidad portante del terreno:

$$\frac{25 + 2,4(X)(X)(8X) + 2,4(1,5X)(3X)(4X)}{(3X)(4X)} = 15,1$$

$$62,4X^3 - 181,2X^2 + 25 = 0$$

Obtenemos tres soluciones, siendo las siguientes:

$$X_1 = 0,4m \text{ (OK)}$$

$$X_2 = 2,85m \text{ (IRREAL)}$$

$$X_3 = -0,35m \text{ (ILOGICO)}$$

De esta manera, las dimensiones de la columna y zapata son:

Columna: 0,4m x 0,4m

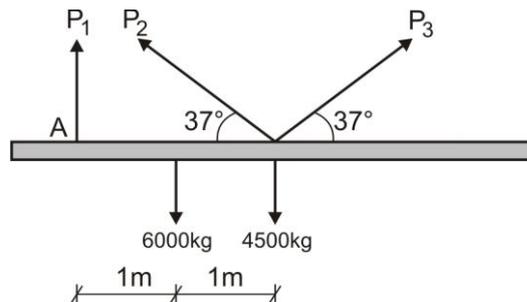
Zapata: 1,2m x 1,6m x 0,6m

Para indicar el tipo de suelo de acuerdo a la Norma de Diseño Sismorresistente E030, analizamos la capacidad portante, la cual es de 1,51kg/cm² que corresponde a un SUELO INTERMEDIO.

3. Calculamos el peso de la barra rígida horizontal:

$$P = 1000 \cdot 4,5 = 4500kg$$

Colocamos el peso de barra en el centro de la misma y efectuamos un corte en las varillas, analizando su equilibrio:



$$\sum F_X = 0 \quad \Rightarrow \quad P_2 = P_3 \quad \dots\dots\dots (a)$$

$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad P_1 + 2P_2 \text{sen}37^\circ = 10500 \quad \dots\dots\dots (b)$$

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad 2P_2 \text{sen}37^\circ (2) - 4500(2) - 6000(1) = 0$$

$$P_2 = P_3 = 6250kg \text{ (TRACCION)}$$

Reemplazamos en la ecuación (b) y obtenemos:

$$P_1 = 3000kg$$

Luego:

$$[\sigma] = \frac{f_y}{n} = \frac{4200}{1,8} = 2333,33 \text{ kg/cm}^2$$

A través de la condición de resistencia, elegimos los diámetros de las varillas.

VARILLA 1:

$$\frac{3000}{A_1} \leq 2333,33 \Rightarrow A_1 \geq 1,286 \text{ cm}^2$$

$$\frac{\pi}{4} d_1^2 \geq 1,286 \text{ cm}^2$$

$$d_1 \geq 1,279 \text{ cm}$$

Para la varilla 1, elegimos el diámetro 5/8"

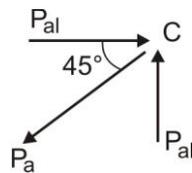
VARILLAS 2 y 3:

$$\frac{6250}{A_2} \leq 2333,33 \Rightarrow A_2 \geq 2,678 \text{ cm}^2$$

$$d_2 \geq 1,846 \text{ cm}$$

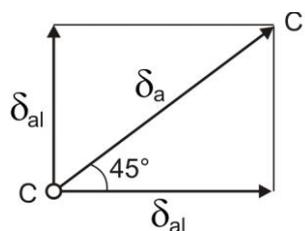
Para las varillas 2 y 3, elegimos el diámetro 3/4"

4. Como $\alpha_{al} > \alpha_a$, entonces las barras exteriores del bastidor que son de aluminio se comprimen y las diagonales de acero se traccionan, analizando, para ello, el equilibrio del nudo C



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow P_{al} = P_a \cos 45^\circ \dots\dots\dots (a)$$

Ahora, analizamos el diagrama de desplazamientos del nudo C



$$\delta_a \cos 45^\circ = \delta_{al}$$

$$\left[\frac{P_a L \sqrt{2}}{E_a A_a} + \alpha_a (L \sqrt{2}) (\Delta T) \right] \cos 45^\circ = \alpha_{al} (L) (\Delta T) - \frac{P_{al} L}{E_{al} A_{al}}$$

$$\frac{P_a}{E_a A_a} + \frac{P_{al}}{E_{al} A_{al}} = (\Delta T) (\alpha_{al} - \alpha_a) \dots\dots\dots (b)$$

Reemplazamos (a) en (b) y la condición del problema, que $A_{al} = 20A_a$, obteniendo:

$$\frac{P_a}{E_a A_a} + \frac{P_a \cos 45^\circ}{E_{al} (20A_a)} = (\Delta T)(\alpha_{al} - \alpha_a)$$

$$\sigma_a \left(\frac{1}{E_a} + \frac{\cos 45^\circ}{20E_{al}} \right) = (\Delta T)(\alpha_{al} - \alpha_a)$$

$$\sigma_a = \frac{20E_a E_{al} (\Delta T)(\alpha_{al} - \alpha_a)}{20E_{al} + E_a \cos 45^\circ}$$

$$\sigma_a = \frac{20 \cdot 29 \cdot 10^6 \cdot 10,6 \cdot 10^6 \cdot 80 \cdot (13 \cdot 10^{-6} - 6,5 \cdot 10^{-6})}{20 \cdot 10,6 \cdot 10^6 + 29 \cdot 10^6 \cdot \cos 45^\circ} = 13750 \text{ psi}$$

$$\sigma_a = 13,75 \text{ ksi (TRACCION)}$$

5. Como el concreto trabaja en compresión y el acero en tracción, se tendrá:

$$\delta_a + \delta_c = \delta$$

$$\frac{P_a L}{E_a A_a} + \frac{P_c L}{E_c A_c} = \frac{QL}{E_a A_a}$$

De la figura (c) se sabe que:

$$P_a = P_c$$

Luego:

$$P_a \left(\frac{1}{E_a A_a} + \frac{1}{E_c A_c} \right) = \frac{Q}{E_a A_a}$$

Además:

$$\sigma_o = \frac{Q}{A_a} = 820 \text{ MPa}$$

Se tendrá:

$$\frac{P_a (E_a A_a + E_c A_c)}{E_a A_a E_c A_c} = \frac{820}{E_a}$$

$$\sigma_a \left(1 + \frac{E_a}{E_c} \cdot \frac{A_a}{A_c} \right) = 820$$

$$\sigma_a \left(1 + \frac{8}{1} \cdot \frac{1}{30} \right) = 820$$

$$\sigma_a = 647,368 \text{ MPa (TRACCION)}$$

Entonces:

$$\frac{\sigma_a}{E_a} + \frac{\sigma_c}{E_c} = \frac{820}{E_a}$$

$$\sigma_c = \frac{E_c}{E_a} (820 - \sigma_a) = \frac{1}{8} (820 - 647,368)$$

$$\sigma_c = 21,579 \text{ MPa (COMPRESION)}$$



EVALUACIÓN	PRACTICA CALIFICADA Nº 1	SEM. ACADÉMICO	2008 – I
CURSO	RESISTENCIA DE MATERIALES I	SECCIÓN	26E
PROFESOR	Ph.D. GENNER VILLARREAL CASTRO	DURACIÓN	110m
ESCUELA	INGENIERIA CIVIL	CICLO	V

1. Para comprobar la magnitud del esfuerzo creado por la máquina de ensayo se usa una muestra de referencia de diámetro $d = 50\text{mm}$. El alargamiento de la muestra estirada, medido en una longitud $L = 100\text{mm}$ resulta igual a $\delta = 0,1\text{mm}$. Determinar la fuerza de tracción P y la magnitud del esfuerzo normal σ en la muestra, si el módulo de elasticidad del material de la muestra es $E = 2,04 \cdot 10^5 \text{MPa}$ y el límite de proporcionalidad es $\sigma_{\text{prop}} = 260\text{MPa}$

..... (3 puntos)

2. La barra horizontal uniforme rígida mostrada en la figura, soporta la acción de su peso propio W y es sostenido por los cables (1), (2) y (3) que tienen la misma área A de sección transversal y son del mismo material con esfuerzo de fluencia f_y y módulo de elasticidad E

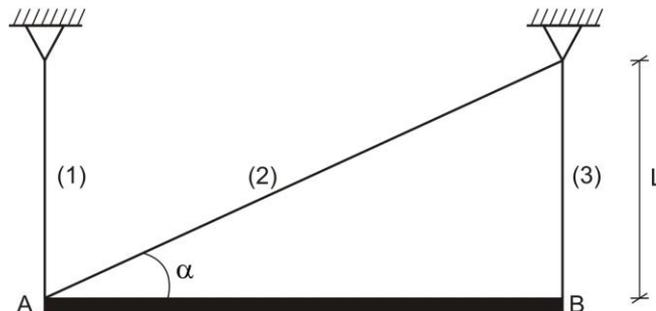
De las siguientes afirmaciones, diga cuál o cuáles son verdaderas justificando su respuesta:

a) El cable (2) no trabaja

b) La componente vertical del desplazamiento del punto B es $\frac{WL}{3EA}$

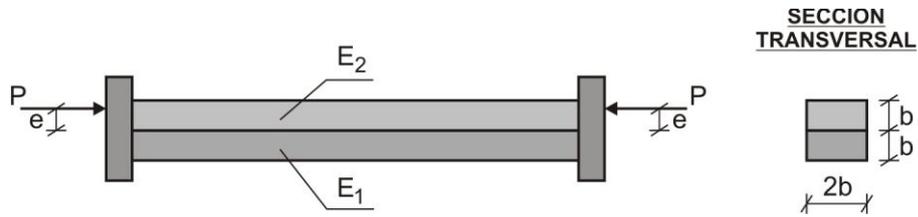
c) El factor de seguridad (n) deberá satisfacer la relación $n \leq \frac{2Af_y}{W}$

..... (3 puntos)



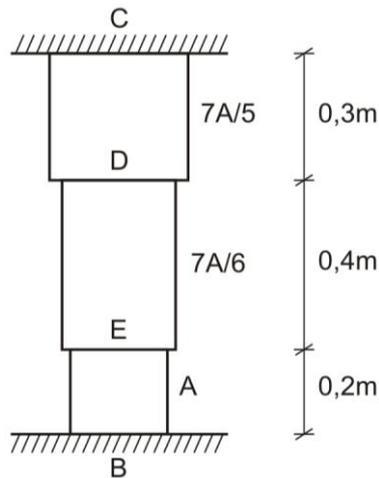
3. Una barra compuesta de sección transversal cuadrada se construye con dos materiales diferentes que tienen módulos de elasticidad E_1 y E_2 . Ambas partes de la barra tienen las mismas dimensiones en sus secciones transversales. Si se supone que las placas de los extremos son rígidas, obtener una fórmula para la excentricidad “e” de la carga “P” tal que cada parte de la barra se esfuerce uniformemente en compresión. Bajo estas condiciones, ¿Qué parte de la carga P soporta cada material?

..... (5 puntos)



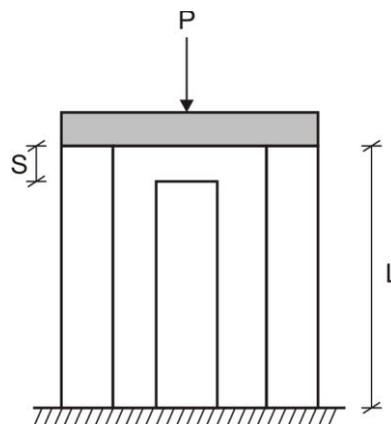
4. Determinar los esfuerzos en la barra escalonada doblemente empotrada, si es de acero, siendo la variación de temperatura $\Delta T = 36^\circ C$, $E_a = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$ y $\alpha_a = 125 \cdot 10^{-7} / ^\circ C$. Las áreas de cada tramo están expresadas en función de A

..... (4 puntos)



5. Una placa rígida de acero se sostiene mediante tres postes de concreto de alta resistencia, cada uno con sección transversal cuadrada de 200mm x 200mm y longitud $L = 2\text{m}$. Antes de aplicarse la carga P el poste central es más corto que los otros en una cantidad $s = 1\text{mm}$. Determinar la carga máxima admisible P_{adm} si el módulo de elasticidad del concreto es $E_c = 30\text{GPa}$ y el esfuerzo admisible en compresión es $\sigma_{adm} = 18\text{MPa}$

..... (5 puntos)



FECHA	La Molina, 24 de Marzo del 2008
--------------	---------------------------------

SOLUCIONARIO DE PRACTICA CALIFICADA Nº 1

CICLO 2008 – I

1. Se sabe que $\sigma = E\varepsilon$ y $\sigma = P/A$, obteniendo la siguiente expresión:

$$E\varepsilon = \frac{P}{A} \Rightarrow P = EA\varepsilon = EA \frac{\delta}{L} = 2,04 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 50^2 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{0,1 \cdot 10^{-3}}{100 \cdot 10^{-3}} = 400553 \text{ N}$$

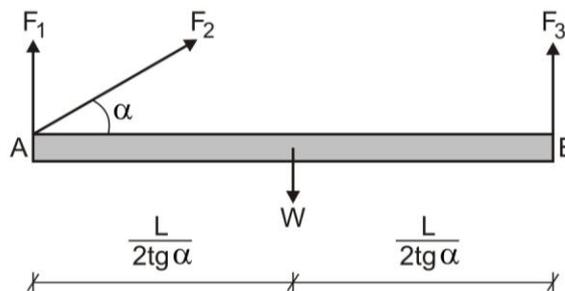
$$P = 400,553 \text{ kN}$$

Calculamos el esfuerzo:

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{400553,4}{\pi \cdot 50^2 \cdot 10^{-6}} = 204 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 204 \text{ MPa} < \sigma_{\text{prop}}$$

Esto implica que se ha trabajado dentro de un rango elástico, habiéndose utilizado correctamente las fórmulas.

2. a) Efectuamos un corte y analizamos el equilibrio, siendo $\alpha \neq 0$



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_2 \cos \alpha = 0 \quad \therefore F_2 = 0$$

La respuesta es VERDADERO, es decir, que el cable (2) no trabaja

$$\text{b) } \sum M_A = 0 \Rightarrow F_3 \left(\frac{L}{\text{tg}\alpha} \right) = W \left(\frac{L}{2\text{tg}\alpha} \right) \quad \therefore F_3 = \frac{W}{2}$$

Luego, calculamos el desplazamiento vertical del nudo B

$$\delta_v^B = \frac{F_3 L}{EA} = \frac{WL}{2EA} \quad (\text{FALSO})$$

$$\text{c) } \sum F_y = 0 \Rightarrow F_1 + \frac{W}{2} - W = 0 \quad \therefore F_1 = \frac{W}{2}$$

Luego:

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{N_{\text{máx}}}{A} = \frac{W}{2A}$$

Además:

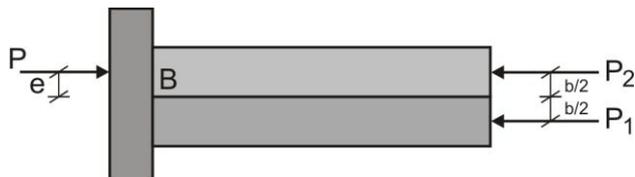
$$\sigma_{\text{máx}} \leq [\sigma] \Rightarrow \frac{W}{2A} \leq [\sigma]$$

Donde:

$$[\sigma] = \frac{f_y}{n} \Rightarrow \frac{W}{2A} \leq \frac{f_y}{n}$$

$$n \leq \frac{2Af_y}{W} \quad (\text{VERDADERO})$$

3. Analizamos el equilibrio de una parte de la barra:



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow P_1 + P_2 = P \dots\dots\dots (a)$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow -P_1\left(\frac{b}{2}\right) - Pe + P_2\left(\frac{b}{2}\right) = 0$$

$$P_1\left(\frac{b}{2}\right) + Pe = P_2\left(\frac{b}{2}\right) \dots\dots\dots (b)$$

Además, por dato del problema, las placas son rígidas, es decir:

$$\delta_1 = \delta_2 \Rightarrow \frac{P_1 L}{E_1 A} = \frac{P_2 L}{E_2 A}$$

$$P_1 = \frac{E_1}{E_2} P_2 \dots\dots\dots (c)$$

Reemplazamos (c) en (b) y obtenemos:

$$\frac{E_1}{E_2} P_2 + P_2 = P \Rightarrow P_2 = \frac{PE_2}{E_1 + E_2}$$

Luego, reemplazamos en (c), obteniendo:

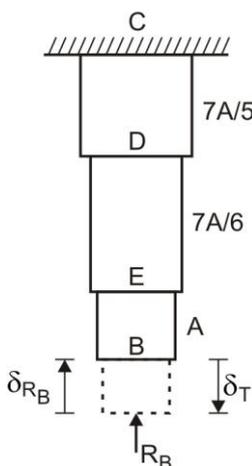
$$P_1 = \frac{PE_1}{E_1 + E_2}$$

Reemplazamos los valores obtenidos en (b):

$$\left(\frac{PE_1}{E_1 + E_2}\right)\left(\frac{b}{2}\right) + Pe = \left(\frac{PE_2}{E_1 + E_2}\right)\left(\frac{b}{2}\right)$$

$$e = \frac{b(E_2 - E_1)}{2(E_1 + E_2)}$$

4. Eliminamos el empotramiento en B y analizamos el efecto de temperatura y reacción que surge en dicho apoyo.



Como B es empotramiento perfecto, se cumplirá:

$$\delta_{R_B} = \delta_T$$

$$\frac{R_B \cdot 0,2}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot A} + \frac{R_B \cdot 0,4}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot (7A/6)} + \frac{R_B \cdot 0,3}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot (7A/5)} = 125 \cdot 10^{-7} \cdot 36,0,9$$

$$\frac{R_B}{A} = 106,98 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

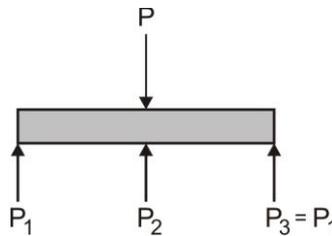
$$\sigma_{BE} = 106,98 \text{ MPa (COMPRESION)}$$

Luego, determinamos los esfuerzos en los otros tramos de la barra escalonada:

$$\sigma_{DE} = \frac{6}{7} \sigma_{BE} = 91,70 \text{ MPa (COMPRESION)}$$

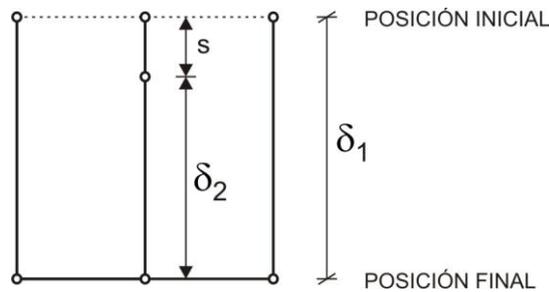
$$\sigma_{CD} = \frac{5}{7} \sigma_{BE} = 76,41 \text{ MPa (COMPRESION)}$$

5. Una vez aplicada la carga se tendrá:



$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad 2P_1 + P_2 = P \quad \dots\dots\dots (a)$$

Luego, analizamos el diagrama de desplazamientos:



$$\delta_1 = \delta_2 + s \quad \Rightarrow \quad \frac{P_1 L}{E_c A} = \frac{P_2 L}{E_c A} + 10^{-3}$$

$$P_1 = P_2 + \frac{30 \cdot 10^9 \cdot 200^2 \cdot 10^{-6}}{2} \cdot 10^{-3}$$

$$P_1 = P_2 + 600000 \quad \dots\dots\dots (b)$$

Reemplazamos (b) en (a), obteniendo:

$$P_1 = \frac{P + 600000}{3}$$

$$P_2 = \frac{P - 1200000}{3}$$

Ahora, analizamos los postes extremo y central.

POSTE EXTREMO:

$$\sigma_1 = \frac{P_1}{A} = \frac{P + 600000}{3.200^2 \cdot 10^{-6}} \leq 18 \cdot 10^6$$

$$P \leq 1560000\text{N}$$

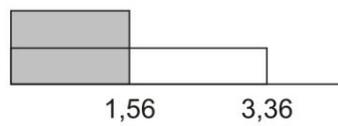
$$P \leq 1,56\text{MN}$$

POSTE CENTRAL:

$$\sigma_2 = \frac{P_2}{A} = \frac{P - 1200000}{3.200^2 \cdot 10^{-6}} \leq 18 \cdot 10^6$$

$$P \leq 3360000\text{N}$$

$$P \leq 3,36\text{MN}$$



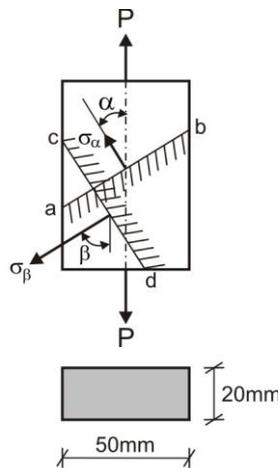
Como debe cumplir con ambas condiciones, se tendrá:

$$P_{\text{adm}} = 1,56\text{MN}$$

EVALUACIÓN	PRACTICA CALIFICADA Nº 2	SEM. ACADÉMICO	2006 – I
CURSO	RESISTENCIA DE MATERIALES I	SECCIÓN	26E
PROFESOR	Ph.D. GENNER VILLARREAL CASTRO	DURACIÓN	110m
ESCUELA	INGENIERIA CIVIL	CICLO	V

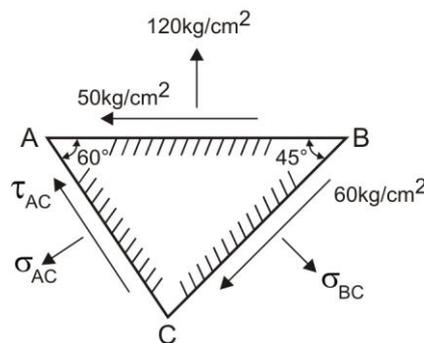
1. Determinar la magnitud de la fuerza P que estira una muestra de sección rectangular de 50mm x 20mm, si se conocen las magnitudes de los esfuerzos normales $\sigma_\alpha = 20\text{MPa}$ y $\sigma_\beta = 60\text{MPa}$ en los planos recíprocamente perpendiculares ab y cd

..... (4 puntos)



2. Por un punto en estado plano de esfuerzos pasan los planos AB, BC y AC como se indica en la figura. Determinar los esfuerzos que faltan.

..... (5 puntos)

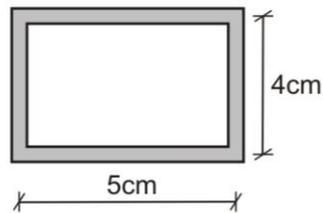


3. Hallar el valor del diámetro de una barra de sección circular, necesario para transmitir un momento torsor $T = 4600\text{kg.m}$, si el ángulo de giro en torsión no debe de exceder de 1° en 2 metros y si el esfuerzo tangencial admisible es $[\tau] = 820\text{kg/cm}^2$. Considerar que el módulo de elasticidad al corte del material es $G = 0,8 \cdot 10^6\text{kg/cm}^2$

..... (3 puntos)

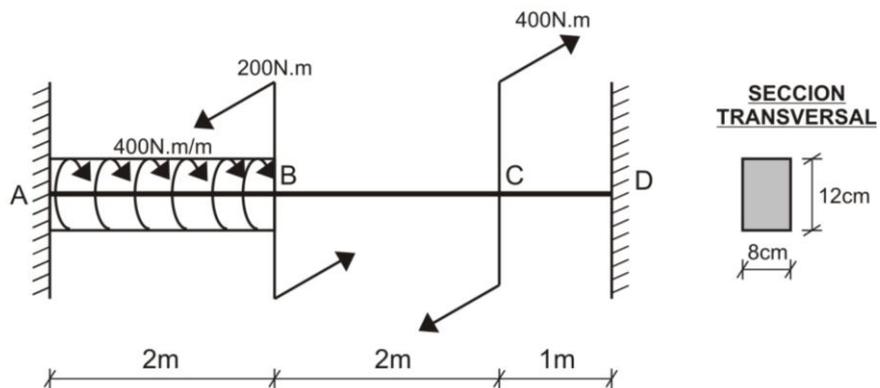
4. Un momento torsor $T = 6400\text{kg}\cdot\text{cm}$ se aplica a un tubo de pared delgada, cuya sección se muestra en la figura. Determinar el espesor de su pared (constante en toda la sección), de tal manera que el esfuerzo tangencial no exceda de $100\text{kg}/\text{cm}^2$

..... (3 puntos)



5. Graficar el diagrama de momento torsor y determinar el ángulo de giro en torsión en el punto C de la barra de sección rectangular, considerando que su módulo de corte es $G = 8 \cdot 10^4 \text{MPa}$

..... (5 puntos)



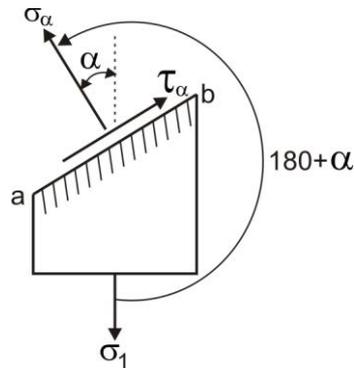
FECHA	La Molina, 24 de Abril del 2006
--------------	---------------------------------

SOLUCIONARIO DE PRÁCTICA CALIFICADA Nº 2

CICLO 2006 – I

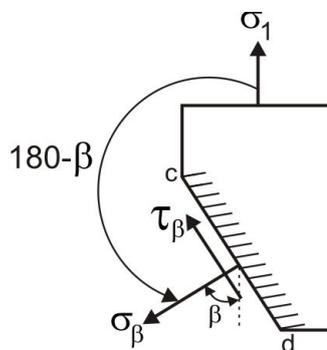
1. Analizamos cada uno de los planos, sabiendo que se trata de un estado de esfuerzos lineal.

PLANO ab:



$$\sigma_{\alpha} = \sigma_1 \cos^2(180 + \alpha) = \sigma_1 (\cos 180 \cos \alpha - \text{sen} 180 \text{sen} \alpha)^2 = \sigma_1 \cos^2 \alpha$$

PLANO cd:



$$\sigma_{\beta} = \sigma_1 \cos^2(180 - \beta) = \sigma_1 (\cos 180 \cos \beta + \text{sen} 180 \text{sen} \beta)^2 = \sigma_1 \cos^2 \beta$$

Además, si sumamos y consideramos que $\alpha + \beta = 90$ se obtendrá:

$$\sigma_{\alpha} + \sigma_{\beta} = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_1 \cos^2 \beta = \sigma_1 [\cos^2 \alpha + \cos^2(90 - \alpha)] = \sigma_1 (\cos^2 \alpha + \text{sen}^2 \alpha) = \sigma_1$$

Reemplazamos valores y obtenemos:

$$\sigma_1 = 20 + 60 = 80 \text{MPa}$$

Además:

$$\sigma_1 = \frac{P}{A} \Rightarrow P = \sigma_1 A = 80 \cdot 10^6 \cdot 50 \cdot 10^{-3} \cdot 20 \cdot 10^{-3} = 80000 \text{N}$$

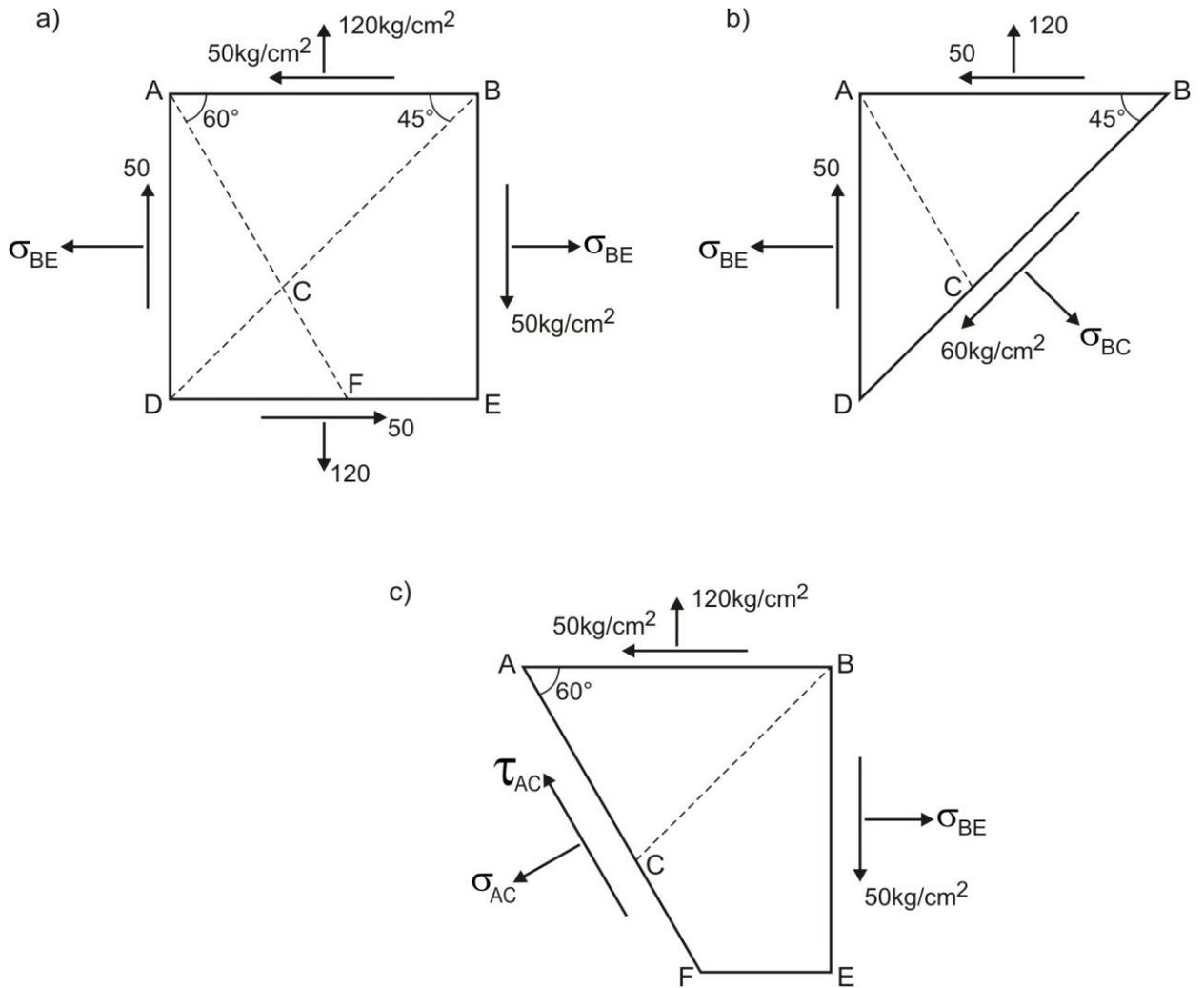
$$P = 80 \text{kN}$$

2. Analizamos el estado plano, para ello formamos el cuadrado ABED (figura a), luego efectuamos los cortes ABD (figura b) y ABEF (figura c), analizando sus estados de esfuerzos

Para determinar los esfuerzos en el plano inclinado, aplicamos las siguientes ecuaciones:

$$\sigma_{\alpha} = \frac{\sigma_X + \sigma_Y}{2} + \frac{\sigma_X - \sigma_Y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{XY} \text{sen} 2\alpha$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_X - \sigma_Y}{2} \text{sen} 2\alpha + \tau_{XY} \cos 2\alpha$$



PLANO INCLINADO BC:

Para ello, debemos de considerar que $\sigma_{BE} = \sigma_x$, $\sigma_{BC} = \sigma_{\alpha=135^\circ}$, $\tau_{\alpha=135^\circ} = 60 \text{ kg/cm}^2$ y $\alpha = 135^\circ$

Luego, tenemos:

$$\tau_{\alpha=135^\circ} = \frac{\sigma_x - 120}{2} \sin 270^\circ + 50 \cos 270^\circ = 60 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{BE} = \sigma_x = 0$$

$$\sigma_{\alpha=135^\circ} = \frac{0 + 120}{2} + \frac{0 - 120}{2} \cos 270^\circ - 50 \sin 270^\circ \quad \Rightarrow \quad \sigma_{BC} = \sigma_{\alpha=135^\circ} = 110 \text{ kg/cm}^2$$

PLANO INCLINADO AC:

Consideramos $\sigma_{BE} = \sigma_x = 0$, $\sigma_{AC} = \sigma_{\alpha=210^\circ}$, $\tau_{AC} = \tau_{\alpha=210^\circ}$ y $\alpha = 210^\circ$, obteniendo:

$$\sigma_{\alpha=210^\circ} = \frac{0 + 120}{2} + \frac{0 - 120}{2} \cos 420^\circ - 50 \sin 420^\circ \quad \Rightarrow \quad \sigma_{AC} = \sigma_{\alpha=210^\circ} = -13,30 \text{ kg/cm}^2$$

$$\tau_{\alpha=210^\circ} = \frac{0 - 120}{2} \sin 420^\circ + 50 \cos 420^\circ \quad \Rightarrow \quad \tau_{AC} = \tau_{\alpha=210^\circ} = -26,96 \text{ kg/cm}^2$$

3. Por dato del problema:

$$\phi \leq [\phi]$$

$$\frac{TL}{GI_p} \leq [\phi]$$

$$\frac{4600 \cdot 100 \cdot 200}{0,8 \cdot 10^6 \cdot (\pi/32) \cdot d^4} \leq \frac{\pi}{180}$$

$$d \geq 16,10 \text{ cm}$$

Asimismo:

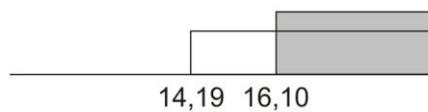
$$\tau \leq [\tau]$$

$$\frac{T}{W_p} \leq [\tau]$$

$$\frac{4600 \cdot 100}{(\pi/16) \cdot d^3} \leq 820$$

$$d \geq 14,19 \text{ cm}$$

Luego:



Asumimos:

$$d_{\text{mín}} = 16,10 \text{ cm}$$

4. Se sabe que:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{T}{2A_o \delta} \leq [\tau]$$

Siendo:

A_o - área formada por la línea media

δ - espesor de la pared delgada

Reemplazamos valores y obtenemos:

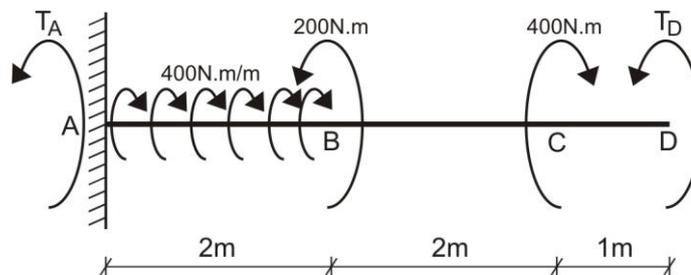
$$\frac{6400}{2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \delta} \leq 100$$

$$\delta \geq 1,6 \text{ cm}$$

Asumimos:

$$\delta_{\text{mín}} = 1,6 \text{ cm}$$

5. Eliminamos el empotramiento en D y lo reemplazamos por su momento torsor T_D



$$\phi_D = 0$$

$$\frac{T_D \cdot 5}{GI_t} - \frac{400 \cdot 4}{GI_t} + \frac{200 \cdot 2}{GI_t} - \int_0^2 \frac{400x dx}{GI_t} = 0$$

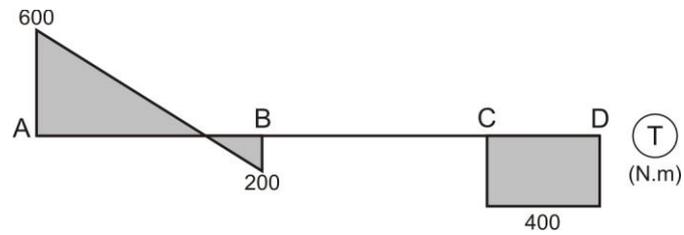
$$T_D = 400\text{N.m}$$

Luego:

$$\sum T_{\text{eje}} = 0 \quad \Rightarrow \quad T_A + 200 + 400 - 400.2 - 400 = 0$$

$$T_A = 600\text{N.m}$$

Graficamos el diagrama de momento torsor:



Ahora, calculamos el ángulo de giro en torsión en el punto C de la barra.

$$\phi_C = \frac{400.1}{8.10^4.10^6.1204,224.10^{-8}} = 4,15.10^{-4}\text{rad} = 0,024^\circ$$

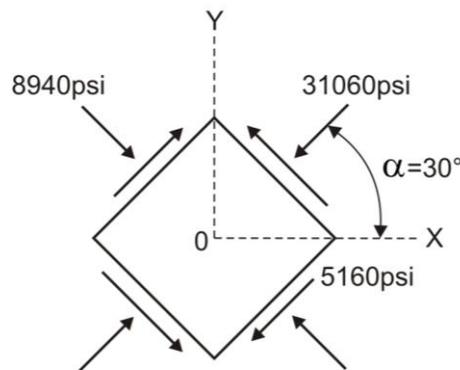
Siendo:

$$I_t = 0,196.12.8^3 = 1204,224\text{cm}^4$$

EVALUACIÓN	PRACTICA CALIFICADA Nº 2	SEM. ACADÉMICO	2006 – II
CURSO	RESISTENCIA DE MATERIALES I	SECCIÓN	26E
PROFESOR	Ph.D. GENNER VILLARREAL CASTRO	DURACIÓN	110m
ESCUELA	INGENIERIA CIVIL	CICLO	V

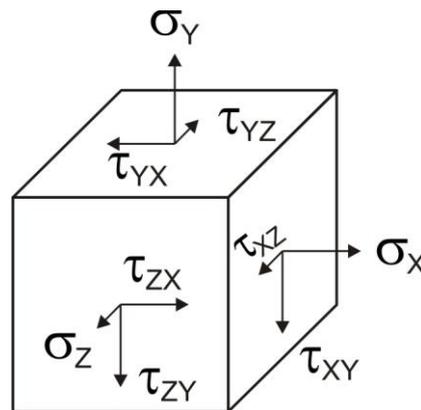
1. Un elemento en estado plano de esfuerzos se gira un ángulo $\alpha = 30^\circ$. Sobre el elemento girado, los esfuerzos normales y tangenciales tienen las magnitudes y direcciones mostradas en la figura. Determinar los esfuerzos σ_x , σ_y y τ_{xy}

..... (4 puntos)



2. Determinar la relación entre σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yz} , para que el estado de esfuerzos espacial mostrado en la figura, resulte ser plano y luego lineal.

..... (4 puntos)

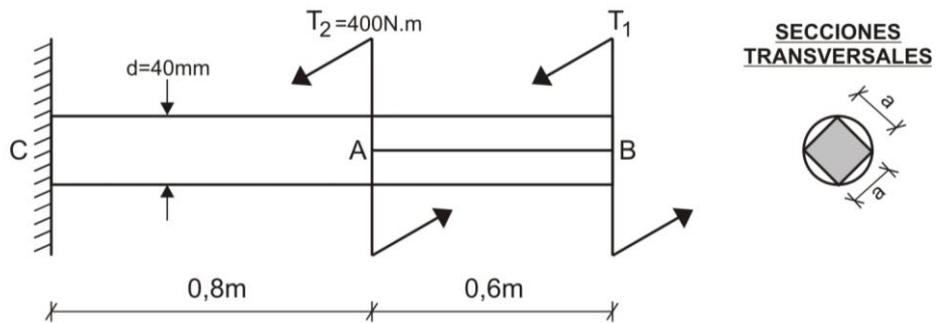


3. Una barra de acero consta de una parte hueca de 3m de longitud con diámetro exterior 10cm y diámetro interior 7,5cm y otra parte maciza de 1,6m de longitud y 7,5cm de diámetro. Determinar el máximo momento torsor que puede soportar sin que el esfuerzo tangencial sobrepase de 800 kg/cm^2 , ni el ángulo de giro en torsión supere el valor de $2,7^\circ$ en los 4,6m. Considerar $G = 8,6 \cdot 10^5 \text{ kg/cm}^2$

..... (3 puntos)

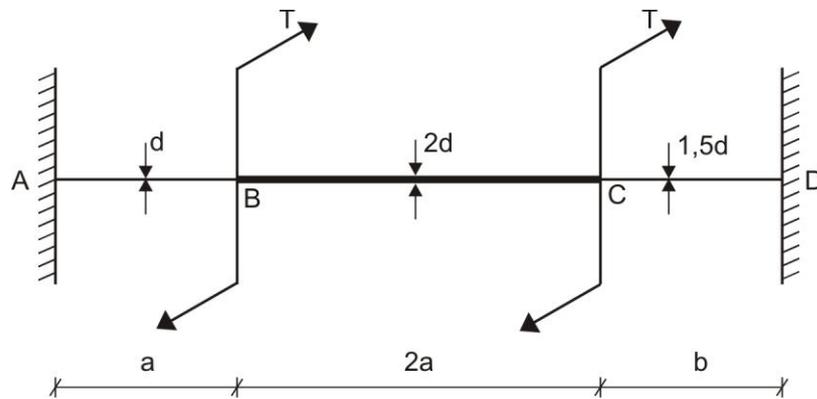
4. Determinar el valor del momento torsor T_1 , el esfuerzo tangencial máximo $\tau_{\text{máx}}$ y el ángulo de giro en torsión ϕ_A , si se sabe que $\phi_A = 0,5\phi_B$ y $G = 8 \cdot 10^4 \text{ MPa}$ para toda la barra.

..... (4 puntos)



5. Determinar el valor de "b" en función de "a", si $(\tau_{AB})_{\text{máx}} = (\tau_{CD})_{\text{máx}}$ y la barra doblemente empotrada es de un mismo material.

..... (5 puntos)

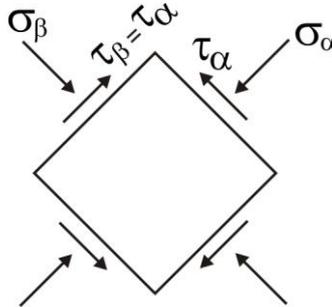


FECHA	La Molina, 25 de Setiembre del 2006
-------	-------------------------------------

SOLUCIONARIO DE PRÁCTICA CALIFICADA Nº 2

CICLO 2006 – II

1. Esquematzamos la distribución de esfuerzos, tal como se muestra en la figura:



Se sabe que en un elemento girado en estado plano, se cumplirá:

$$\sigma_{\alpha} + \sigma_{\beta} = \sigma_X + \sigma_Y$$

Reemplazamos valores y obtenemos:

$$\sigma_X + \sigma_Y = -31060 - 8940$$

$$\sigma_X + \sigma_Y = -40000 \quad \dots\dots\dots (a)$$

Luego:

$$\sigma_{\alpha} = \frac{\sigma_X + \sigma_Y}{2} + \frac{\sigma_X - \sigma_Y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{XY} \sin 2\alpha$$

$$-20000 + \frac{\sigma_X - \sigma_Y}{2} \cos 60^{\circ} - \tau_{XY} \sin 60^{\circ} = -31060$$

$$\frac{\sigma_X - \sigma_Y}{2} \cos 60^{\circ} - \tau_{XY} \sin 60^{\circ} = -11060 \quad \dots\dots\dots (b)$$

Además:

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_X - \sigma_Y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{XY} \cos 2\alpha$$

$$\frac{\sigma_X - \sigma_Y}{2} \sin 60^{\circ} + \tau_{XY} \cos 60^{\circ} = -5160 \quad \dots\dots\dots (c)$$

Multiplicamos la ecuación (b) por $\cos 60^{\circ}$ y la ecuación (c) por $\sin 60^{\circ}$, luego lo sumamos y obtenemos:

$$\frac{\sigma_X - \sigma_Y}{2} = -10000$$

$$\sigma_X - \sigma_Y = -20000 \quad \dots\dots\dots (d)$$

Resolvemos (a) y (d), obteniendo:

$$\sigma_X = -30000 \text{psi}$$

$$\sigma_Y = -10000 \text{psi}$$

Reemplazamos valores en la ecuación (b), obteniendo:

$$\tau_{XY} = 7000 \text{psi}$$

2. El estado de esfuerzos es volumétrico, en consecuencia tendrá tres esfuerzos principales $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ y todos son diferentes de cero, debiéndose de cumplir con la relación $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$

Para determinar dichos esfuerzos principales se resuelve la ecuación:

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0$$

Siendo:

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$I_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2$$

$$I_3 = \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{xz}\tau_{yz} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{xz}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2$$

CONVERSION A ESTADO PLANO:

Para que dicho estado espacial, cuya orientación de esfuerzos es positiva, se convierta en plano, se deberá de cumplir que $I_3 = 0$, es decir:

$$\sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{xz}\tau_{yz} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{xz}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 = 0$$

Quedando la ecuación cúbica:

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma = 0$$

$$\sigma(\sigma^2 - I_1\sigma + I_2) = 0$$

De donde:

$$\sigma_1 = \frac{I_1 + \sqrt{I_1^2 - 4I_2}}{2}$$

$$\sigma_2 = \frac{I_1 - \sqrt{I_1^2 - 4I_2}}{2}$$

$$\sigma_3 = 0$$

Además, se deberá de cumplir que $I_1^2 - 4I_2 \geq 0$

CONVERSION A ESTADO LINEAL:

Para que el estado espacial de esfuerzos se convierta en lineal, deberá de cumplirse que $\sigma_1 \neq 0$ y

$$\sigma_2 = \sigma_3 = 0$$

Luego, será necesario que $I_2 = 0$, obteniéndose:

$$\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2 = 0$$

Quedando la ecuación:

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 = 0$$

$$\sigma^2(\sigma - I_1) = 0$$

De donde:

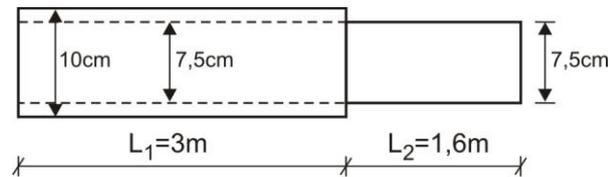
$$\sigma_1 = I_1$$

$$\sigma_2 = \sigma_3 = 0$$

Nótese, que para que el estado de esfuerzos espacial se convierta en lineal, deberá de cumplirse que

$$I_2 = 0 \text{ e } I_3 = 0$$

3. Esquematisamos la barra con sus dimensiones:



CONDICION DE RESISTENCIA:

a) SECCION TUBULAR:

$$\tau_{\text{máx}} \leq [\tau] \Rightarrow \frac{T}{(\pi/16) \cdot 10^3 \cdot (1 - 0,75^4)} \leq 800 \quad \therefore T \leq 107378,65 \text{ kg.cm}$$

b) SECCION MACIZA:

$$\tau_{\text{máx}} \leq [\tau] \Rightarrow \frac{16T}{\pi \cdot 7,5^3} \leq 800 \quad \therefore T \leq 66267,97 \text{ kg.cm}$$

CONDICION DE RIGIDEZ:

Por condición del problema, el ángulo de giro en torsión es de toda la barra.

$$\phi_{\text{máx}} \leq [\phi] \Rightarrow \frac{T \cdot 160}{8,6 \cdot 10^5 \cdot (\pi/32) \cdot 7,5^4} + \frac{T \cdot 300}{8,6 \cdot 10^5 \cdot (\pi/32) \cdot 10^4 \cdot (1 - 0,75^4)} \leq \frac{2,7\pi}{180}$$

$$T \leq 42215,11 \text{ kg.cm}$$

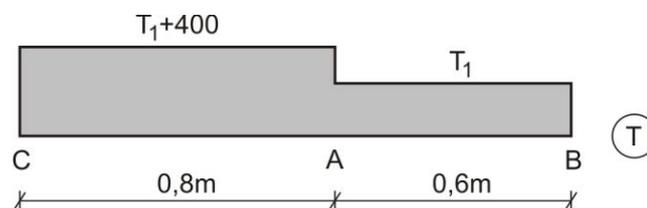
Como debe ser una sola respuesta, analizamos el intervalo, para que cumpla con ambas condiciones del problema.



De donde:

$$T_{\text{máx}} = 42215,11 \text{ kg.cm}$$

4. Graficamos el diagrama de momento torsor:



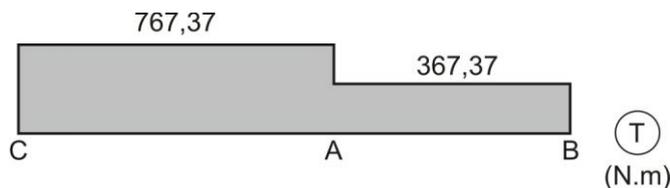
Aplicamos la condición del problema:

$$\phi_A = 0,5\phi_B$$

$$\frac{(T_1 + 400) \cdot 0,8}{G(\pi/32) \cdot 40^4 \cdot 10^{-12}} = 0,5 \left[\frac{(T_1 + 400) \cdot 0,8}{G(\pi/32) \cdot 40^4 \cdot 10^{-12}} + \frac{T_1 \cdot 0,6}{G \cdot 0,141 \cdot (20\sqrt{2})^4 \cdot 10^{-12}} \right]$$

$$T_1 = 367,37 \text{ N.m}$$

Luego, el diagrama de momento torsor es:



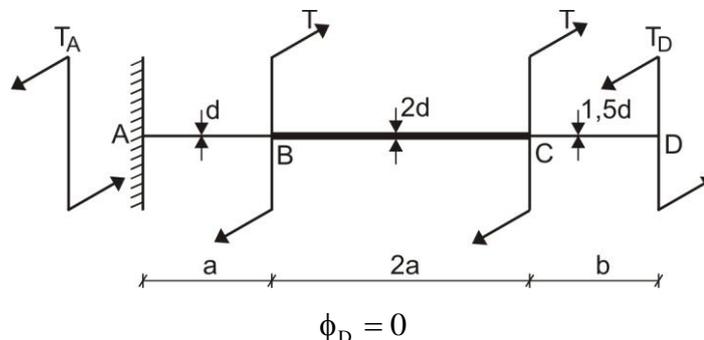
$$\tau_{CA} = \frac{16 \cdot 767,37}{\pi \cdot 40^3 \cdot 10^{-9}} = 61,06 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\text{máx}} = \tau_{AB} = \frac{367,37}{0,208 \cdot (20\sqrt{2})^3 \cdot 10^{-9}} = 78,05 \text{ MPa}$$

Calculamos el ángulo de giro en A

$$\phi_A = \frac{767,37 \cdot 0,8}{8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \cdot (\pi/32) \cdot 40^4 \cdot 10^{-12}} = 0,03 \text{ rad} = 1,75^\circ$$

5. Eliminamos el empotramiento en D y lo reemplazamos por T_D



$$\frac{T_D \cdot b}{G(\pi/32) \cdot (1,5d)^4} + \frac{(T_D - T) \cdot (2a)}{G(\pi/32) \cdot (2d)^4} + \frac{(T_D - 2T) \cdot (a)}{G(\pi/32) \cdot d^4} = 0$$

$$T_D = \frac{2,125Ta}{1,125a + 0,1975b} \quad \dots\dots\dots (a)$$

Por condición del problema:

$$(\tau_{AB})_{\text{máx}} = (\tau_{CD})_{\text{máx}}$$

$$\frac{16T_A}{\pi d^3} = \frac{16T_D}{\pi (1,5d)^3}$$

$$T_D = 3,375T_A \quad \dots\dots\dots (b)$$

Además:

$$\sum T_{\text{eje}} = 0 \quad \Rightarrow \quad T_A + T_D = 2T$$

De donde:

$$T_A = 0,4571T$$

$$T_D = 1,5429T$$

Reemplazamos valores en la ecuación (a) y obtenemos:

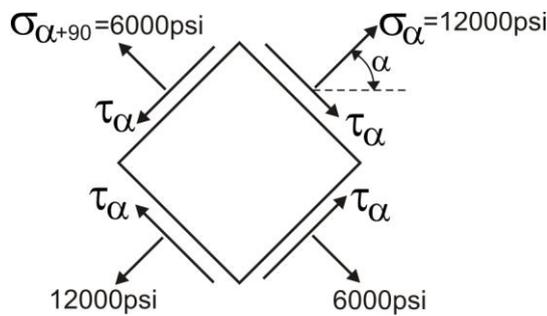
$$1,5429T = \frac{2,125Ta}{1,125a + 0,1975b}$$

$$b = 1,278a$$

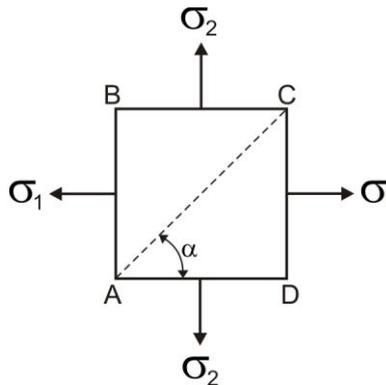


EVALUACIÓN	PRACTICA CALIFICADA Nº 2	SEM. ACADÉMICO	2007 – I
CURSO	RESISTENCIA DE MATERIALES I	SECCIÓN	26E
PROFESOR	Ph.D. GENNER VILLARREAL CASTRO	DURACIÓN	110m
ESCUELA	INGENIERIA CIVIL	CICLO	V

1. Sobre las caras de un elemento cortado de una barra en esfuerzo uniaxial, actúan esfuerzos normales de 12000psi y 6000psi. Determinar el ángulo α y el esfuerzo tangencial τ_α . También, determinar el esfuerzo normal máximo $\sigma_{\text{máx}}$ y el esfuerzo tangencial máximo $\tau_{\text{máx}}$ (4 puntos)



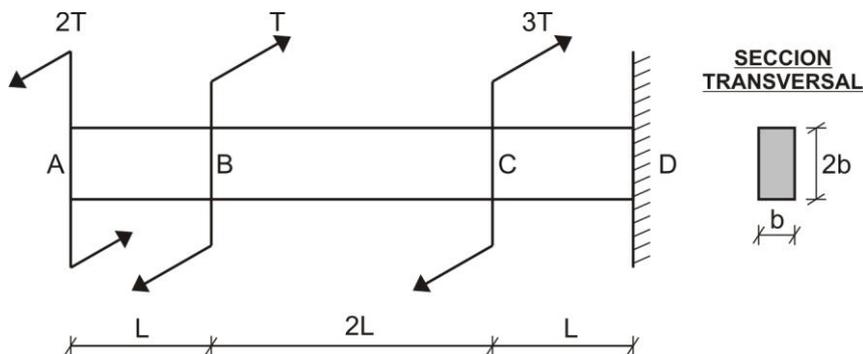
2. Determinar la relación entre los esfuerzos σ_1 y σ_2 para que las longitudes de las diagonales del elemento rectangular ABCD no varíen. Considerar el coeficiente de Poisson igual a μ (4 puntos)



3. Calcular el diámetro mínimo de una barra de acero que está sometida a un momento torsor de 14kN.m y no debe experimentar una deformación angular superior a 3° en una longitud de 6m. ¿Cuál es entonces el esfuerzo tangencial máximo que aparecerá en el? Considerar $G = 83\text{GPa}$ (3 puntos)

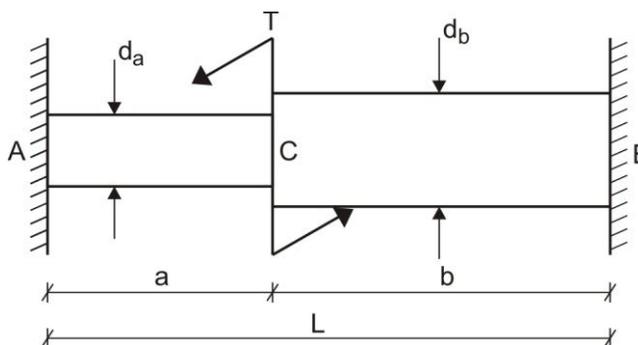
4. Para la barra mostrada en la figura, se pide:
- Graficar los diagramas de momento torsor y ángulo de giro en torsión
 - Determinar el esfuerzo tangencial máximo y la energía potencial de deformación

..... (4 puntos)



5. Una barra escalonada ABC de longitud total "L" está empotrada en ambos extremos. La barra tiene diámetros d_a y d_b en las porciones AC y CB, respectivamente. Un par torsionante "T" actúa en la sección C. ¿Cuáles deben ser las longitudes "a" y "b" para el diseño más económico del elemento?

..... (5 puntos)



FECHA	La Molina, 23 de Abril del 2007
-------	---------------------------------

SOLUCIONARIO DE PRÁCTICA CALIFICADA Nº 2
CICLO 2007 – I

1. Se sabe que:

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_1 \cos^2 \alpha$$

Por dato del problema:

$$\sigma_1 \cos^2 \alpha = 12000 \quad \dots\dots\dots (a)$$

Además:

$$\sigma_{\alpha+90} = \sigma_1 \cos^2 (\alpha + 90) = \sigma_1 \sin^2 \alpha$$

Entonces, por dato del problema:

$$\sigma_1 \sin^2 \alpha = 6000 \quad \dots\dots\dots (b)$$

Sumamos (a) y (b), obteniendo:

$$\sigma_1 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 18000$$

$$\sigma_{\text{máx}} = \sigma_1 = 18000 \text{psi}$$

Luego, reemplazamos en (b) y obtenemos:

$$\text{sen} \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 35,26^\circ$$

Asimismo:

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_1}{2} \text{sen} 2\alpha = \frac{18000}{2} \text{sen} 70,52^\circ = 8484,82 \text{psi}$$

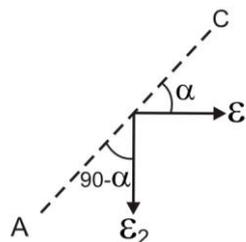
$$\tau_{\text{máx}} = \frac{\sigma_1}{2} = \frac{18000}{2} = 9000 \text{psi}$$

2. Las deformaciones principales, según la Ley de Hooke generalizada son para el estado plano:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu \sigma_2]$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu \sigma_1]$$

Las orientaciones de las mismas son las mostradas en la figura:



Además, según condición del problema, se tiene:

$$\varepsilon_{AC} = \frac{\delta_{AC}}{L_{AC}} = 0$$

Esto, se debe a que:

$$\delta_{AC} = 0$$

Luego:

$$\varepsilon_{AC} = \varepsilon_1 \cos \alpha - \varepsilon_2 \cos(90 - \alpha) = 0$$

$$\frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu \sigma_2] \cos \alpha = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu \sigma_1] \cos(90 - \alpha)$$

$$\sigma_1 (\cos \alpha + \mu \operatorname{sen} \alpha) = \sigma_2 (\operatorname{sen} \alpha + \mu \cos \alpha)$$

Dividimos ambas expresiones entre $\cos \alpha$ y obtenemos:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \mu}{1 + \mu \operatorname{tg} \alpha}$$

3. Se sabe que:

$$\phi \leq [\phi] \Rightarrow \frac{TL}{GI_p} \leq [\phi]$$

$$\frac{14 \cdot 10^3 \cdot 6}{83 \cdot 10^9 \cdot (\pi/32) \cdot d^4} \leq \frac{\pi}{60}$$

$$d \geq 11,84 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

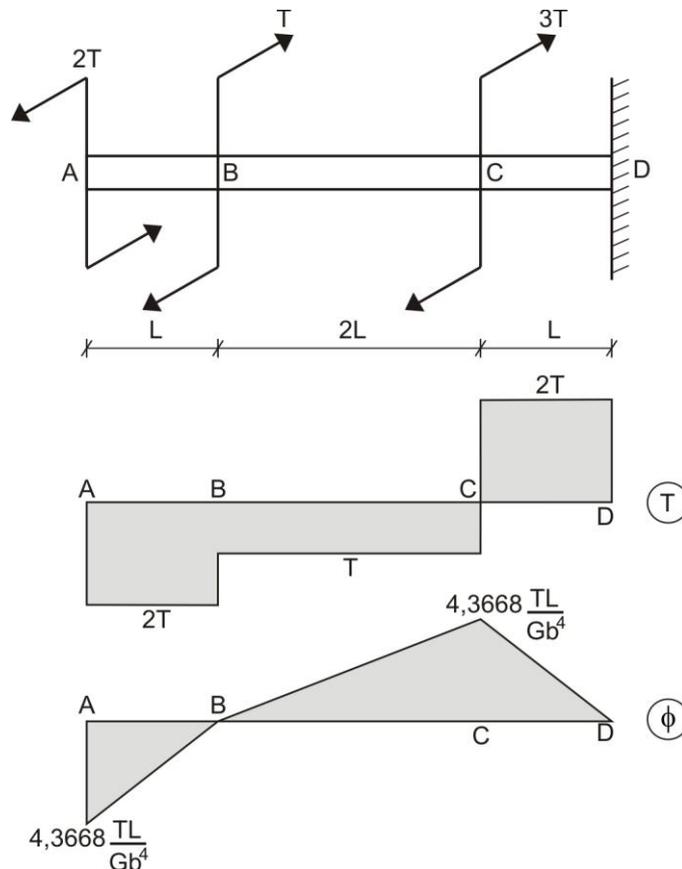
Asumimos:

$$d = 118,4 \text{ mm}$$

Luego:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{16T}{\pi d^3} = \frac{16 \cdot 14 \cdot 10^3}{\pi \cdot 118,4^3 \cdot 10^{-9}} = 42,96 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 42,96 \text{ MPa}$$

4. a) Graficamos el diagrama de momento torsor de acuerdo a los criterios conocidos y el diagrama de ángulo de giro en torsión por el método de las áreas:



$$\phi_D = 0$$

$$\phi_C = \frac{(2T)(L)}{G(0,458b^4)} = 4,3668 \frac{TL}{Gb^4}$$

$$I_t = \beta(2b)(b)^3 = 0,229(2b)(b)^3 = 0,458b^4$$

$$\phi_B = 4,3668 \frac{TL}{Gb^4} - \frac{(T)(2L)}{G(0,458b^4)} = 0$$

$$\phi_A = -\frac{(2T)(L)}{G(0,458b^4)} = -4,3668 \frac{TL}{Gb^4}$$

b) Calculamos el esfuerzo tangencial máximo:

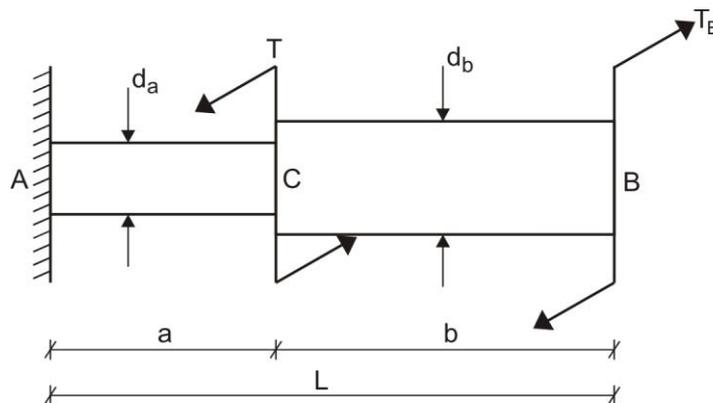
$$\tau_{\text{máx}} = \frac{T_{\text{máx}}}{W_t} = \frac{2T}{0,492b^3} = 4,065 \frac{T}{b^3}$$

$$W_t = \alpha(2b)(b)^2 = 0,246(2b)(b)^2 = 0,492b^3$$

Determinamos la energía potencial de deformación:

$$U = \frac{(-2T)^2(L)}{2G(0,458b^4)} + \frac{(-T)^2(2L)}{2G(0,458b^4)} + \frac{(2T)^2(L)}{2G(0,458b^4)} = 10,917 \frac{T^2L}{Gb^4}$$

5. Eliminamos el empotramiento en B y lo reemplazamos por T_B



Se sabe que:

$$\phi_B = 0$$

$$\frac{T_B(b)}{G(\pi/32)(d_b)^4} + \frac{T_B(a)}{G(\pi/32)(d_a)^4} - \frac{T(a)}{G(\pi/32)(d_a)^4} = 0$$

$$T_B = \frac{Tad_b^4}{ad_b^4 + bd_a^4}$$

Como:

$$\sum T_{\text{eje}} = 0 \quad \Rightarrow \quad T_A + T_B - T = 0$$

$$T_A = \frac{Tbd_a^4}{ad_b^4 + bd_a^4}$$

Para que el diseño sea más económico, se debe cumplir:

$$\tau_{AC} = \tau_{CB}$$

$$\frac{16T_A}{\pi d_a^3} = \frac{16T_B}{\pi d_b^3}$$

$$\left(\frac{T b d_a^4}{a d_b^4 + b d_a^4} \right) d_b^3 = \left(\frac{T a d_b^4}{a d_b^4 + b d_a^4} \right) d_a^3$$

$$b d_a = a d_b$$

$$(L - a) d_a = a d_b$$

$$a = \frac{d_a L}{d_a + d_b}$$

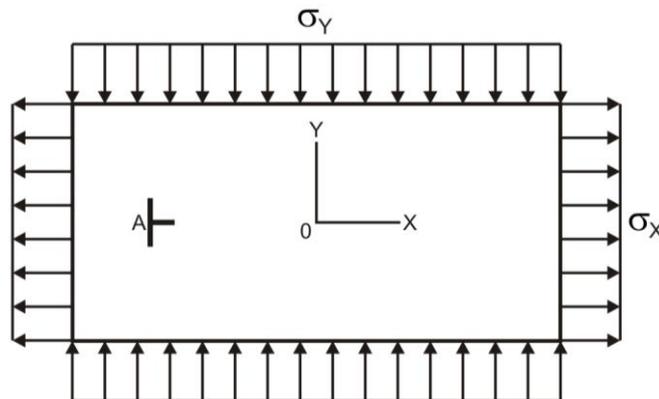
$$b = \frac{d_b L}{d_a + d_b}$$



EVALUACIÓN	PRACTICA CALIFICADA Nº 2	SEM. ACADÉMICO	2007 – II
CURSO	RESISTENCIA DE MATERIALES I	SECCIÓN	26E
PROFESOR	Ph.D. GENNER VILLARREAL CASTRO	DURACIÓN	110m
ESCUELA	INGENIERIA CIVIL	CICLO	V

1. Una placa delgada, rectangular y de acero está sometida a esfuerzos normales uniformes σ_x y σ_y como se indica en la figura. Se fijan a la placa medidores de deformación orientados en las direcciones X e Y en el punto A. Las lecturas de los medidores marcan deformaciones normales $\epsilon_x = 0,001$ y $\epsilon_y = -0,0007$. Determinar los esfuerzos σ_x y σ_y , considerando $E = 30 \cdot 10^6$ psi y $\mu = 0,3$

..... (3 puntos)



2. Un cubo de acero está sometido a la acción de esfuerzos normales y tangenciales en sus aristas. Viene dado: $\sigma_x = 120$ MPa, $\sigma_y = 80$ MPa, $\sigma_z = 100$ MPa, $\tau_{xy} = 40$ MPa, $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$. Calcular:

- Los esfuerzos principales σ_1 , σ_2 y σ_3
- El esfuerzo tangencial máximo
- Los esfuerzos normal σ_{oct} y tangencial τ_{oct} octaédricos
- El cambio unitario de volumen o deformación volumétrica

..... (5 puntos)

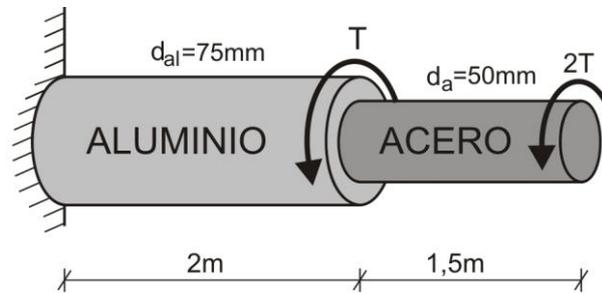
3. Una barra hueca de aluminio ($G = 4 \cdot 10^6$ psi) con un diámetro exterior de 4plg y un diámetro interior de 3,5plg tiene una longitud de 8pie

- Si la barra se tuerce mediante momentos torsores en los extremos, ¿cuál será el ángulo de giro en torsión ϕ cuando el esfuerzo tangencial máximo sea 8000psi?
- ¿Qué diámetro “d” se requiere para que una barra maciza soporte el mismo momento torsor con el mismo esfuerzo tangencial máximo?

..... (3 puntos)

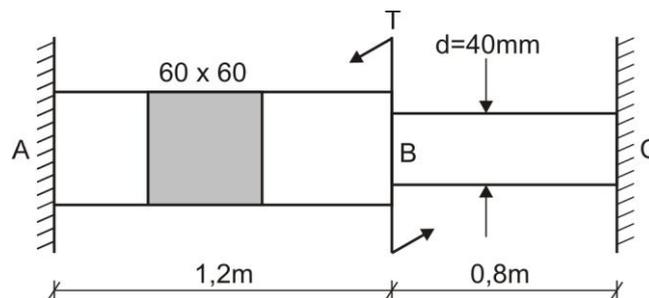
4. Una barra escalonada, que consta de un segmento de aluminio y otro de acero, está sometido a dos momentos de torsión como se muestra en la figura. Calcular el máximo valor admisible de T de acuerdo con las siguientes condiciones: $[\tau]_{al} = 100\text{MPa}$, $[\tau]_{ac} = 70\text{MPa}$ y el ángulo de giro en torsión en el extremo libre está limitado a 12° . Considerar $G_a = 83\text{GPa}$ y $G_{al} = 28\text{GPa}$

..... (4 puntos)



5. Determinar el valor del momento torsor T , el ángulo de giro en torsión ϕ_B y la energía potencial de deformación U , si el esfuerzo tangencial admisible es $[\tau] = 40\text{MPa}$ y $G = 8 \cdot 10^4 \text{MPa}$

..... (5 puntos)



FECHA	La Molina, 24 de Setiembre del 2007
-------	-------------------------------------

SOLUCIONARIO DE PRÁCTICA CALIFICADA Nº 2

CICLO 2007 – II

1. Sabemos que:

$$\varepsilon_X = \frac{1}{E} [\sigma_X - \mu\sigma_Y] \Rightarrow \frac{1}{30 \cdot 10^6} [\sigma_X - 0,3\sigma_Y] = 0,001$$

$$\sigma_X - 0,3\sigma_Y = 30000 \quad \dots\dots\dots (a)$$

$$\varepsilon_Y = \frac{1}{E} [\sigma_Y - \mu\sigma_X] \Rightarrow \frac{1}{30 \cdot 10^6} [\sigma_Y - 0,3\sigma_X] = -0,0007$$

$$\sigma_Y - 0,3\sigma_X = -21000 \quad \dots\dots\dots (b)$$

Resolvemos (a) y (b), obteniendo:

$$\sigma_X = 26043,96\text{psi}$$

$$\sigma_Y = -13186,81\text{psi}$$

2. a) Calculamos los coeficientes de la ecuación cúbica:

$$I_1 = \sigma_X + \sigma_Y + \sigma_Z = 120 + 80 + 100 = 300$$

$$I_2 = \sigma_X\sigma_Y + \sigma_X\sigma_Z + \sigma_Y\sigma_Z - \tau_{XY}^2 - \tau_{XZ}^2 - \tau_{YZ}^2 = 120(80) + 120(100) + 80(100) - 40^2 = 28000$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_X & \tau_{XY} & \tau_{XZ} \\ \tau_{XY} & \sigma_Y & \tau_{YZ} \\ \tau_{XZ} & \tau_{YZ} & \sigma_Z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 120 & 40 & 0 \\ 40 & 80 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{vmatrix} = 120(80)(100) - 40(40)(100) = 800000$$

Luego, reemplazamos valores en la ecuación cúbica:

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0$$

$$\sigma^3 - 300\sigma^2 + 28000\sigma - 800000 = 0$$

Obtenemos tres soluciones y lo ordenamos de mayor a menor, siendo estos los esfuerzos principales:

$$\sigma_1 = 144,721\text{MPa}$$

$$\sigma_2 = 100\text{MPa}$$

$$\sigma_3 = 55,278\text{MPa}$$

b) Determinamos el esfuerzo tangencial máximo:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{144,721 - 55,278}{2} = 44,721\text{MPa}$$

c) Calculamos los esfuerzos normal y tangencial octaédricos:

$$\sigma_{\text{oct}} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3}(144,721 + 100 + 55,278) = 100\text{MPa}$$

$$\tau_{\text{oct}} = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

$$\tau_{\text{oct}} = \frac{1}{3}\sqrt{(144,721 - 100)^2 + (100 - 55,278)^2 + (55,278 - 144,721)^2} = 36,515\text{MPa}$$

d) Determinamos el cambio unitario de volumen:

$$e = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1-2.0,3}{2.10^5}(120+80+100) = 6.10^{-4}$$

3. a) Para la barra de sección tubular:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{T}{W_p} \Rightarrow \frac{T}{(\pi/16)(4)^3(1-0,875^4)} = 8000 \quad \therefore \quad T = 41601,56 \text{ lb.plg}$$

Luego:

$$\phi = \frac{TL}{GI_p} = \frac{41601,56 \cdot 8 \cdot 12}{4.10^6(\pi/32)(4)^4(1-0,875^4)} = 0,096 \text{ rad} = 5,5^\circ$$

b) Por dato del problema, se debe de cumplir para la barra maciza la siguiente condición:

$$\frac{41601,56}{(\pi/16)d^3} = 8000$$

$$d = 2,98 \text{ plg}$$

4. Graficamos el diagrama de momento torsor:



Aplicamos la condición de resistencia para ambos materiales:

ACERO:

$$\frac{2T}{(\pi/16).50^3.10^{-9}} \leq 100.10^6 \quad \Rightarrow \quad T \leq 1227,18 \text{ N.m}$$

ALUMINIO:

$$\frac{3T}{(\pi/16).75^3.10^{-9}} \leq 70.10^6 \quad \Rightarrow \quad T \leq 1932,81 \text{ N.m}$$

Ahora, aplicamos la condición de rigidez:

$$\frac{2T(1,5)}{83.10^9(\pi/32).50^4.10^{-12}} + \frac{3T(2)}{28.10^9(\pi/32).75^4.10^{-12}} \leq \frac{\pi}{15}$$

$$T \leq 1637,52 \text{ N.m}$$



Asumimos:

$$T_{\text{adm}} = 1227,18 \text{ N.m}$$

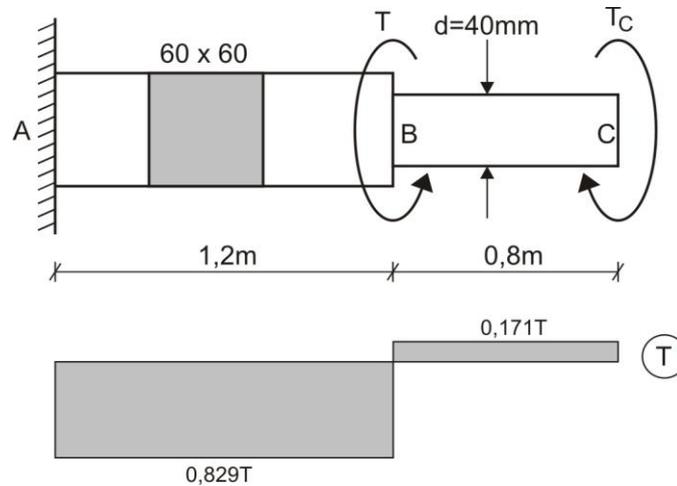
5. Eliminamos el empotramiento en C y lo reemplazamos por su momento torsor T_C

$$\phi_C = 0$$

$$\frac{T_C \cdot 0,8}{G(\pi/32) \cdot 40^4 \cdot 10^{-12}} + \frac{T_C \cdot 1,2}{G \cdot 0,141 \cdot 60^4 \cdot 10^{-12}} - \frac{T \cdot 1,2}{G \cdot 0,141 \cdot 60^4 \cdot 10^{-12}} = 0$$

$$T_C = 0,171T$$

A partir del momento torsor determinado, graficamos el diagrama de momento torsor



Aplicamos la condición de resistencia:

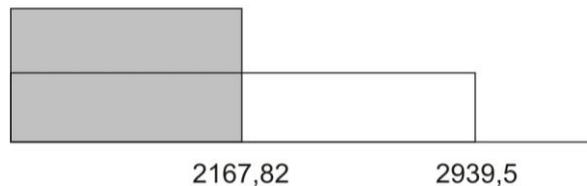
SECCION CIRCULAR:

$$\frac{0,171T}{(\pi/16) \cdot 40^3 \cdot 10^{-9}} \leq 40 \cdot 10^6 \quad \Rightarrow \quad T \leq 2939,5 \text{ N.m}$$

SECCION CUADRADA:

$$\frac{0,829T}{0,208 \cdot 60^3 \cdot 10^{-9}} \leq 40 \cdot 10^6 \quad \Rightarrow \quad T \leq 2167,82 \text{ N.m}$$

Luego:



Asumimos:

$$T = 2167,82 \text{ N.m}$$

Determinamos el ángulo de giro en torsión en B

$$\phi_B = \frac{0,171 \cdot 2167,82 \cdot 0,8}{8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 (\pi/32) \cdot 40^4 \cdot 10^{-12}} = 0,0147 \text{ rad} = 0,84^\circ$$

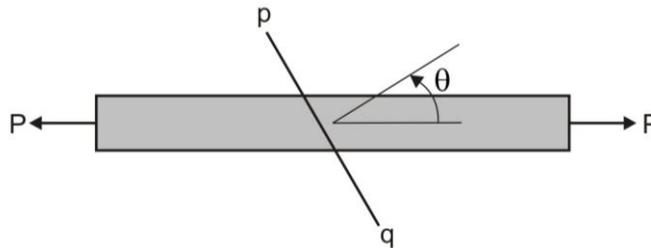
Calculamos la energía potencial de deformación:

$$U = \sum_{i=1}^2 \frac{T_i^2 L_i}{2GI_{p(t_i)}} = \frac{(0,829 \cdot 2167,82)^2 \cdot 1,2}{2 \cdot 8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \cdot 0,141 \cdot 60^4 \cdot 10^{-12}} + \frac{(0,171 \cdot 2167,82)^2 \cdot 0,8}{2 \cdot 8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 (\pi/32) \cdot 40^4 \cdot 10^{-12}} = 16 \text{ N.m} = 16 \text{ J}$$

EVALUACIÓN	PRACTICA CALIFICADA N° 2	SEM. ACADÉMICO	2008 – I
CURSO	RESISTENCIA DE MATERIALES I	SECCIÓN	26E
PROFESOR	Ph.D. GENNER VILLARREAL CASTRO	DURACIÓN	110m
ESCUELA	INGENIERIA CIVIL	CICLO	V

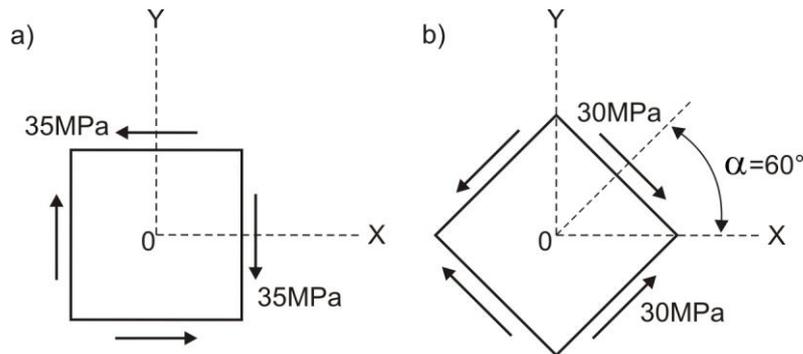
1. Un miembro en tracción se construye al unir con pegamento dos piezas de material a lo largo de la línea pq , tal como se muestra en la figura. Por razones prácticas el ángulo θ se limita al intervalo de 0° a 60° . Determinar el valor del ángulo θ y la carga máxima admisible P_{adm} , si el área de sección transversal de la barra es $1,5plg^2$ y los esfuerzos admisibles en la junta son $\sigma_{adm} = 2000psi$ y $\tau_{adm} = 1000psi$

..... (3 puntos)



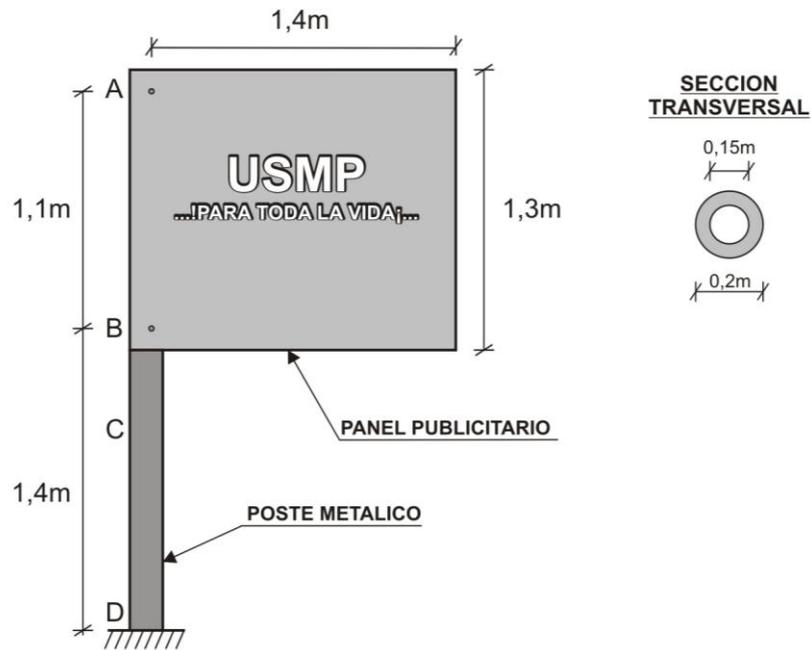
2. En un punto de un cuerpo, el estado plano de esfuerzos es el resultado de dos estados separados que se muestran en las figuras (a) y (b). Calcular los esfuerzos principales y el ángulo α_0 , que resulta de la acción simultánea de estos dos estados.

..... (5 puntos)

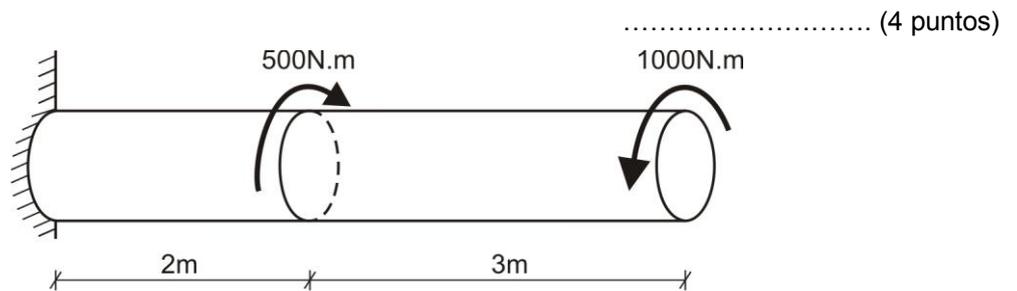


3. Se tiene un panel publicitario de $1,3m \times 1,5m$ que se muestra en la figura. La fuerza del viento que impacta sobre la superficie del mismo genera torsión en el poste metálico, debido a ello se solicita determinar el ángulo de giro en el punto C localizado a $1m$ de la base del poste. Considerar $G = 8.10^5 kg/cm^2$ y que la fuerza del viento es perpendicular al panel e igual a $w = 500kg/m^2$. En la figura también se muestra la sección transversal del poste.

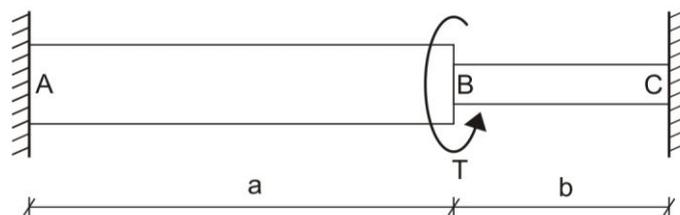
..... (3 puntos)



4. Una barra de acero se encuentra cargada como se muestra en la figura. Determinar el diámetro requerido de la barra, si el esfuerzo tangencial está limitado a 60MPa y el ángulo de giro en torsión en el extremo libre no debe exceder de 4° . Considerar $G = 83\text{GPa}$



5. En la barra escalonada, doblemente empotrada en sus extremos, la porción AB tiene 75mm de diámetro y es de bronce, con $[\tau]_b = 60\text{MPa}$ y $G_b = 35\text{GPa}$. La porción BC es de acero, de 50mm de diámetro, $[\tau]_a = 80\text{MPa}$ y $G_a = 83\text{GPa}$. Determinar la relación de longitudes b/a que debe existir para que el acero y el bronce trabajen al máximo esfuerzo posible ¿Qué momento torsor T es necesario para ello?



FECHA	La Molina, 21 de Abril del 2008
-------	---------------------------------

SOLUCIONARIO DE PRÁCTICA CALIFICADA Nº 2

CICLO 2008 – I

1. Por dato del problema:

$$\sigma_1 \cos^2 \theta \leq 2000 \quad \dots\dots\dots (a)$$

$$\sigma_1 \sin \theta \cos \theta \leq 1000 \quad \dots\dots\dots (b)$$

Dividimos (b) entre (a) y obtenemos:

$$\operatorname{tg} \theta \leq 0,5$$

$$\theta \leq 26,56^\circ$$

Luego:

$$\theta = 26,56^\circ$$

Reemplazamos en (a):

$$\frac{P}{1,5} \cos^2 26,56^\circ \leq 2000$$

$$P \leq 3750 \text{ lb}$$

Asumimos:

$$P_{\text{adm}} = 3750 \text{ lb}$$

2. Se sabe que en un elemento girado en estado plano, se cumplirá:

$$\sigma_\alpha + \sigma_\beta = \sigma_X + \sigma_Y$$

Analizamos la figura (b) del problema:

$$\sigma_X + \sigma_Y = 0 \quad \dots\dots\dots (a)$$

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_X + \sigma_Y}{2} + \frac{\sigma_X - \sigma_Y}{2} \cos 120^\circ - \tau_{XY} \sin 120^\circ = 0$$

$$\frac{\sigma_X - \sigma_Y}{2} \cos 120^\circ - \tau_{XY} \sin 120^\circ = 0 \quad \dots\dots\dots (b)$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_X - \sigma_Y}{2} \sin 120^\circ + \tau_{XY} \cos 120^\circ = 30$$

$$\frac{\sigma_X - \sigma_Y}{2} \sin 120^\circ + \tau_{XY} \cos 120^\circ = 30 \quad \dots\dots\dots (c)$$

Multiplicamos (b) por $\cos 120^\circ$ y (c) por $\sin 120^\circ$, luego lo sumamos y obtenemos:

$$\frac{\sigma_X - \sigma_Y}{2} = 26$$

$$\sigma_X - \sigma_Y = 52 \quad \dots\dots\dots (d)$$

Resolvemos (a) y (d), obteniendo:

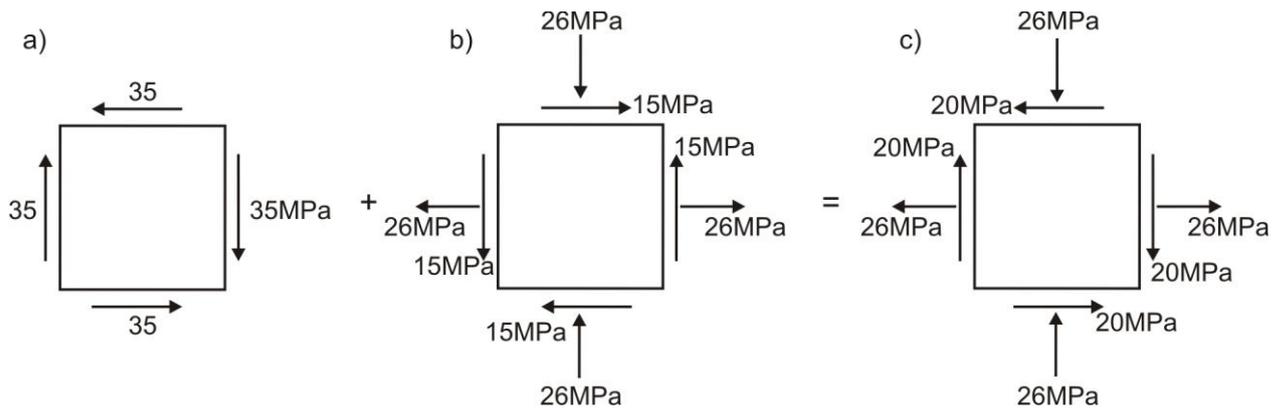
$$\sigma_X = 26 \text{ MPa}$$

$$\sigma_Y = -26 \text{ MPa}$$

Reemplazamos en (b) y obtenemos:

$$\tau_{XY} = -15 \text{ MPa}$$

Luego, analizamos la suma de esfuerzos de los casos (a) y (b), obteniendo el estado plano de esfuerzos equivalente (c), tal como se muestra en la figura:



Determinamos los esfuerzos principales del estado equivalente (c)

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \frac{26 - 26}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(26 + 26)^2 + 4(20)^2} = 32,80 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \frac{26 - 26}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(26 + 26)^2 + 4(20)^2} = -32,80 \text{ MPa}$$

Ahora calculamos el ángulo de giro α_0

$$\text{tg}2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \Rightarrow \text{tg}2\alpha_0 = -\frac{2(20)}{52}$$

$$\alpha_0 = -18,78^\circ$$

3. Calculamos la fuerza resultante del viento:

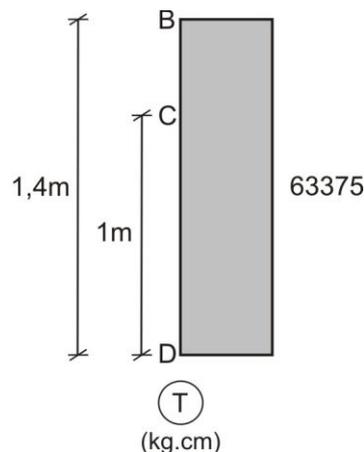
$$F = w \cdot A_{\text{panel}} = 500 \cdot 1,3 \cdot 1,5 = 975 \text{ kg}$$

Determinamos el momento torsor que generará:

$$T = 975(75 - 10) = 63375 \text{ kg.cm}$$

Los 10cm es la distancia del extremo del panel hasta los pernos de fijación.

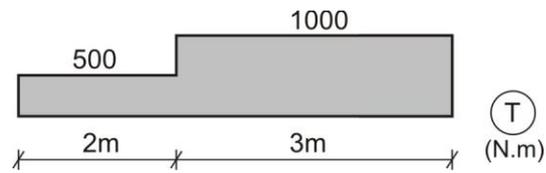
El momento torsor que se genera es igual por toda la altura del poste, tal como se muestra en la figura:



Luego:

$$\phi_c = \frac{63375 \cdot 100}{8 \cdot 10^5 (\pi/32) \cdot 20^4 (1 - 0,75^4)} = 7,38 \cdot 10^{-4} \text{ rad} = 0,04^\circ$$

4. Graficamos el diagrama de momento torsor:



Aplicamos la condición de resistencia:

$$\tau_{\text{máx}} \leq [\tau] \quad \Rightarrow \quad \frac{1000}{(\pi/16)d^3} \leq 60 \cdot 10^6 \quad \therefore \quad d \geq 4,39 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$d \geq 43,9 \text{ mm}$$

Ahora, aplicamos la condición de rigidez:

$$\phi_{\text{máx}} \leq [\phi] \quad \Rightarrow \quad \frac{1000 \cdot 3}{83 \cdot 10^9 (\pi/32)d^4} + \frac{500 \cdot 2}{83 \cdot 10^9 (\pi/32)d^4} \leq \frac{\pi}{45} \quad \therefore \quad d \geq 5,15 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

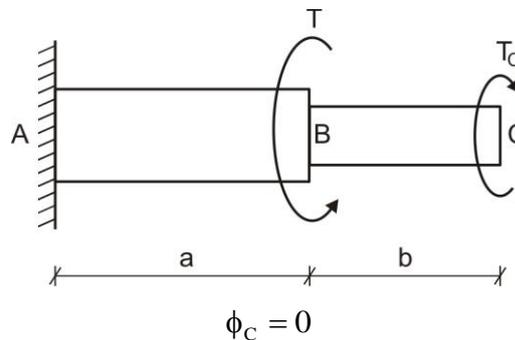
$$d \geq 51,5 \text{ mm}$$



Asumimos:

$$d = 51,5 \text{ mm}$$

5. Eliminamos el empotramiento en C y lo reemplazamos por T_C



$$\frac{T_C b}{G_a I_{p(a)}} + \frac{T_C a}{G_b I_{p(b)}} - \frac{T a}{G_b I_{p(b)}} = 0$$

$$\frac{T_C b}{83 \cdot 10^9 (\pi/32) \cdot 50^4 \cdot 10^{-12}} + \frac{T_C a}{35 \cdot 10^9 (\pi/32) \cdot 75^4 \cdot 10^{-12}} - \frac{T a}{35 \cdot 10^9 (\pi/32) \cdot 75^4 \cdot 10^{-12}} = 0$$

$$T_C = \frac{9,03 T a}{19,277 b + 9,03 a}$$

Luego:

$$\sum T_{\text{eje}} = 0 \quad \Rightarrow \quad T_A + T_C - T = 0$$

$$T_A = \frac{19,277 T b}{19,277 b + 9,03 a}$$

Por condición del problema:

$$\tau_{b,\text{máx}} = \frac{T_A}{(\pi/16)d_b^3} = [\tau]_b \quad \Rightarrow \quad \frac{19,277Tb}{19,277b + 9,03a} = \frac{\pi}{16} \cdot 75^3 \cdot 10^{-9} \cdot 60 \cdot 10^6$$
$$\frac{19,277Tb}{19,277b + 9,03a} = 4970,1 \quad \dots\dots\dots (a)$$

$$\tau_{a,\text{máx}} = \frac{T_C}{(\pi/16)d_a^3} = [\tau]_a \quad \Rightarrow \quad \frac{9,03Ta}{19,277b + 9,03a} = \frac{\pi}{16} \cdot 50^3 \cdot 10^{-9} \cdot 80 \cdot 10^6$$
$$\frac{9,03Ta}{19,277b + 9,03a} = 1963,5 \quad \dots\dots\dots (b)$$

Dividimos (a) entre (b) y obtenemos:

$$\frac{b}{a} = 1,186$$

Reemplazamos en la ecuación (a), dividiendo previamente dicha ecuación entre "a", obteniendo:

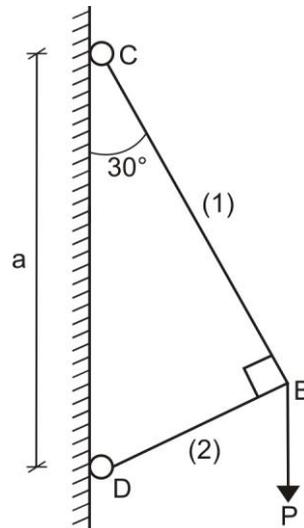
$$\frac{19,277T(b/a)}{19,277(b/a) + 9,03} = 4970,1 \quad \Rightarrow \quad \frac{19,277T(1,186)}{19,277(1,186) + 9,03} = 4970,1$$
$$T = 6933,14\text{N.m} = 6,933\text{kN.m}$$



EVALUACIÓN	EXAMEN PARCIAL	SEM. ACADÉMICO	2006 – I
CURSO	RESISTENCIA DE MATERIALES I	SECCIÓN	26E
PROFESOR	Ph.D. GENNER VILLARREAL CASTRO	DURACIÓN	110m
ESCUELA	INGENIERIA CIVIL	CICLO	V

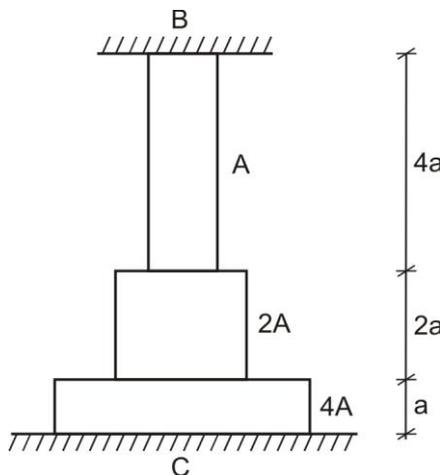
1. Determinar los desplazamientos δ_x y δ_y del punto de aplicación de la fuerza exterior "P" y los esfuerzos normales en las barras (1) y (2). Considerar el módulo de elasticidad "E" y el área "A" de la sección transversal igual para ambas barras.

..... (4 puntos)



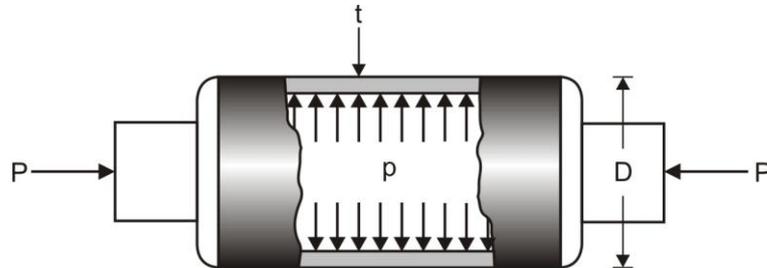
2. Determinar los esfuerzos normales de la barra escalonada doblemente empotrada, sabiendo que el peso específico es " γ ". Considerar el módulo de elasticidad "E" constante e igual para toda la barra escalonada.

..... (4 puntos)



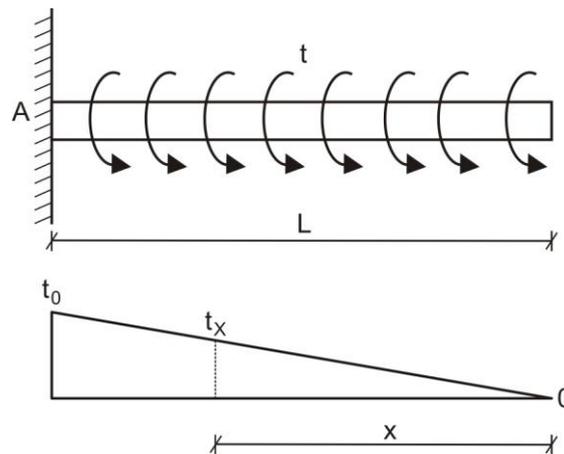
3. Un recipiente cilíndrico de hierro fundido de diámetro $D = 0,2\text{m}$ tiene las paredes de espesor igual a $t = 20\text{mm}$. La presión dentro del recipiente es $p = 4\text{MPa}$. El recipiente está además comprimido por fuerzas $P = 200\text{kN}$ aplicadas en sus extremos. Comprobar la resistencia del cilindro por la quinta teoría de resistencia (de Mohr), considerando que los esfuerzos admisibles son $[\sigma]_{tr} = 20\text{MPa}$ y $[\sigma]_{comp} = 60\text{MPa}$

..... (4 puntos)



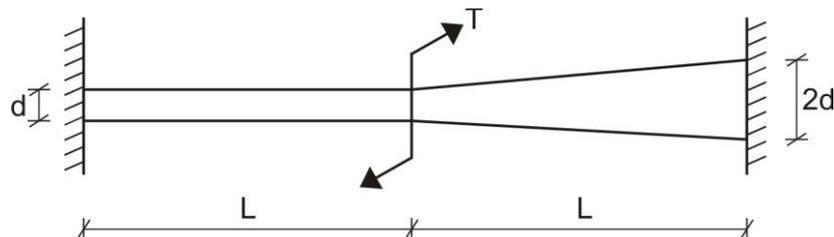
4. Obtener una fórmula para la energía potencial de deformación de la barra circular mostrada en la figura. La intensidad "t" del par distribuido varía linealmente desde un valor máximo t_0 en el empotramiento hasta cero en el extremo libre.

..... (3 puntos)



5. Graficar el diagrama de momento torsor para la barra doblemente empotrada mostrada en la figura, si su mitad izquierda es de sección transversal circular constante de diámetro "d" y la otra mitad varía su sección transversal circular desde "d" hasta "2d". Considerar que toda la barra es de un mismo material

..... (5 puntos)

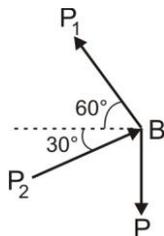


FECHA	La Molina, 03 de Mayo del 2006
-------	--------------------------------

SOLUCIONARIO DE EXAMEN PARCIAL

CICLO 2006 – I

1. Analizamos el equilibrio en el nudo "B"



$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad -P_1 \cos 60^\circ + P_2 \cos 30^\circ = 0$$

$$P_1 = P_2 \sqrt{3}$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad P_1 \sin 60^\circ + P_2 \sin 30^\circ - P = 0$$

$$(P_2 \sqrt{3}) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + P_2 \left(\frac{1}{2} \right) = P$$

$$P_2 = \frac{P}{2} \text{ (COMPRESION)}$$

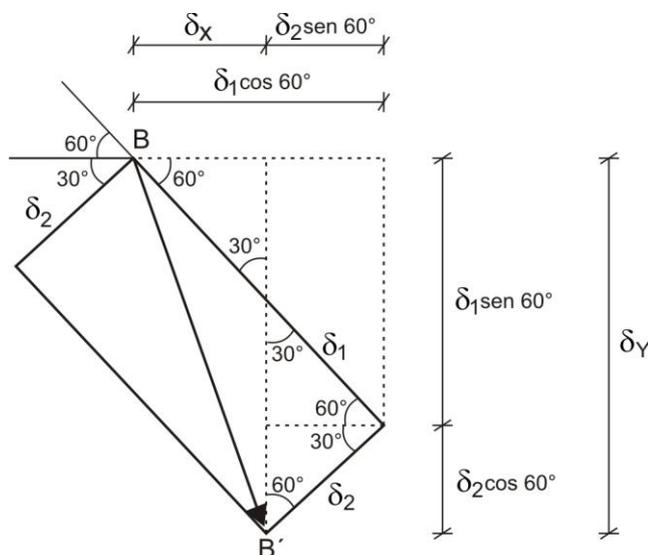
$$P_1 = \frac{P\sqrt{3}}{2} \text{ (TRACCION)}$$

Luego:

$$\delta_1 = \frac{P_1 L_1}{EA} = \left(\frac{P\sqrt{3}}{2} \right) \left(\frac{a\sqrt{3}}{2} \right) \left(\frac{1}{EA} \right) = \frac{3Pa}{4EA} \text{ (ALARGAMIENTO)}$$

$$\delta_2 = \frac{P_2 L_2}{EA} = \left(\frac{P}{2} \right) \left(\frac{a}{2} \right) \left(\frac{1}{EA} \right) = \frac{Pa}{4EA} \text{ (ACORTAMIENTO)}$$

Efectuamos el diagrama de desplazamientos:



$$\delta_x = \delta_1 \cos 60^\circ - \delta_2 \sin 60^\circ = \left(\frac{3Pa}{4EA} \right) \left(\frac{1}{2} \right) - \left(\frac{Pa}{4EA} \right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{Pa}{8EA} (3 - \sqrt{3}) = 0,158 \frac{Pa}{EA} \rightarrow$$

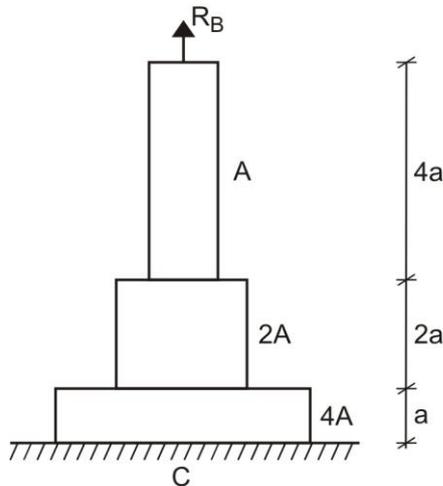
$$\delta_y = \delta_1 \sin 60^\circ + \delta_2 \cos 60^\circ = \left(\frac{3Pa}{4EA} \right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \left(\frac{Pa}{4EA} \right) \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{Pa}{8EA} (1 + 3\sqrt{3}) = 0,774 \frac{Pa}{EA} \downarrow$$

Determinamos los esfuerzos en las barras (1) y (2)

$$\sigma_1 = \frac{P_1}{A} = \frac{P\sqrt{3}}{2A} = 0,866 \frac{P}{A} \text{ (TRACCION)}$$

$$\sigma_2 = \frac{P_2}{A} = \frac{P}{2A} = 0,5 \frac{P}{A} \text{ (COMPRESION)}$$

2. Eliminamos el empotramiento en B y lo reemplazamos por la reacción R_B



Sabemos que:

$$\delta_B = 0$$

$$\frac{R_B(4a)}{EA} + \frac{R_B(2a)}{E(2A)} + \frac{R_B(a)}{E(4A)} - \frac{\gamma A(4a)(4a)}{2EA} - \frac{\gamma A(4a)(2a)}{E(2A)} - \frac{\gamma(2A)(2a)(2a)}{2E(2A)} - \frac{\gamma A(4a)(a)}{E(4A)} - \frac{\gamma(2A)(2a)(a)}{E(4A)} - \frac{\gamma(4A)(a)(a)}{2E(4A)} = 0$$

De donde:

$$R_B = \frac{22}{7} \gamma A a$$

Con el valor obtenido, graficamos los diagramas de fuerza axial y esfuerzo normal.

$$\sigma_{I-I} = \left(\frac{22}{7} \gamma A a \right) \left(\frac{1}{A} \right) = \frac{22}{7} \gamma a$$

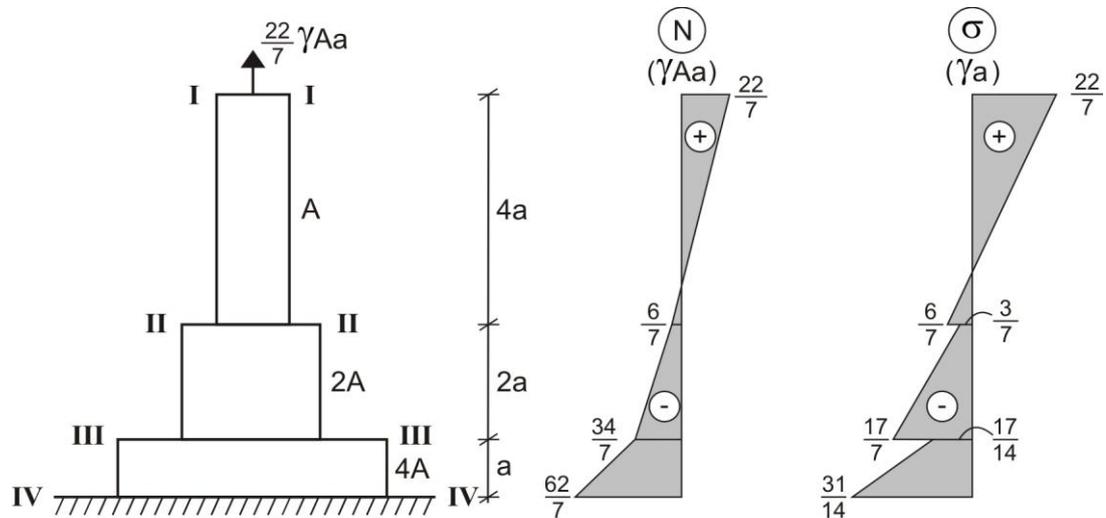
$$\sigma_{II-II}^{\text{sup}} = \left(\frac{22}{7} \gamma A a - \gamma A(4a) \right) \left(\frac{1}{A} \right) = \left(-\frac{6}{7} \gamma A a \right) \left(\frac{1}{A} \right) = -\frac{6}{7} \gamma a$$

$$\sigma_{II-II}^{\text{inf}} = \left(-\frac{6}{7} \gamma A a \right) \left(\frac{1}{2A} \right) = -\frac{3}{7} \gamma a$$

$$\sigma_{III-III}^{\text{sup}} = \left(\frac{22}{7} \gamma A a - \gamma A(4a) - \gamma(2A)(2a) \right) \left(\frac{1}{2A} \right) = \left(-\frac{34}{7} \gamma A a \right) \left(\frac{1}{2A} \right) = -\frac{17}{7} \gamma a$$

$$\sigma_{III-III}^{inf} = \left(-\frac{34}{7} \gamma A a \right) \left(\frac{1}{4A} \right) = -\frac{17}{14} \gamma a$$

$$\sigma_{IV-IV} = \left(\frac{22}{7} \gamma A a - \gamma A (4a) - \gamma (2A)(2a) - \gamma (4A)(a) \right) \left(\frac{1}{4A} \right) = -\frac{31}{14} \gamma a$$



3. Se sabe que para cilindros se tiene:

$$\sigma_1 = \frac{pD_i}{2t} = \frac{4.0,16}{2.20 \cdot 10^{-3}} = 16 \text{MPa (ESFUERZO CIRCULAR)}$$

$$\sigma_3' = \frac{pD_i}{4t} = \frac{4.0,16}{4.20 \cdot 10^{-3}} = 8 \text{MPa (ESFUERZO MERIDIONAL)}$$

$$\sigma_3'' = -\frac{P}{A} = -\frac{200 \cdot 10^3}{(\pi/4)(0,2^2 - 0,16^2)} = -17,68 \text{MPa (ESFUERZO DE COMPRESION)}$$

Luego:

$$\sigma_{e,v} = \sigma_1 - \frac{[\sigma]_{tr}}{[\sigma]_{comp}} \sigma_3 \leq [\sigma]_{tr}$$

Reemplazamos valores y obtenemos:

$$\sigma_{e,v} = 16 - \frac{20}{60}(8 - 17,68) = 19,227 \text{MPa} < [\sigma]_{tr} = 20 \text{MPa}$$

Por lo tanto, se cumple la condición de resistencia.

4. Por relación de triángulos:

$$\frac{t_x}{x} = \frac{t_o}{L} \Rightarrow t_x = \frac{t_o x}{L}$$

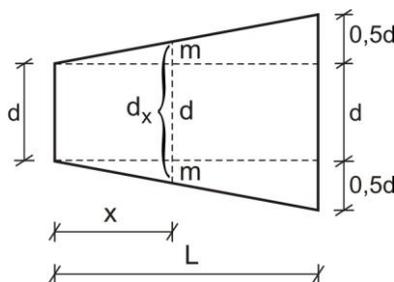
Luego:

$$T_x = \frac{1}{2} t_x x = \frac{1}{2} \left(\frac{t_o x}{L} \right) \cdot x = \frac{t_o x^2}{2L}$$

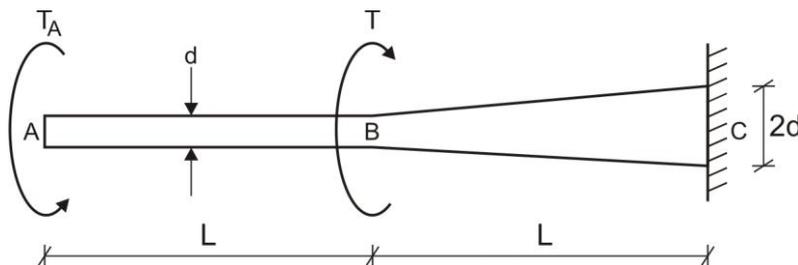
$$U = \int_0^L \frac{T_x^2 dx}{2GI_p} = \int_0^L \left(\frac{t_o x^2}{2L} \right)^2 \frac{dx}{2GI_p} = \frac{t_o^2 L^3}{40GI_p}$$

5. Analizamos la variación del diámetro en el tramo BC

$$\frac{m}{x} = \frac{0,5d}{L} \quad \Rightarrow \quad m = \frac{dx}{2L} \quad \therefore \quad d_x = d + 2m = d + 2\left(\frac{dx}{2L}\right) = d\left(1 + \frac{x}{L}\right)$$



Eliminamos el empotramiento del lado izquierdo y lo reemplazamos por su momento torsor T_A



Sabemos que:

$$\phi_A = 0$$

$$\frac{T_A L}{G(\pi/32)d^4} + \int_0^L \frac{T_A dx}{G(\pi/32)d^4(1+x/L)^4} - \int_0^L \frac{T dx}{G(\pi/32)d^4(1+x/L)^4} = 0$$

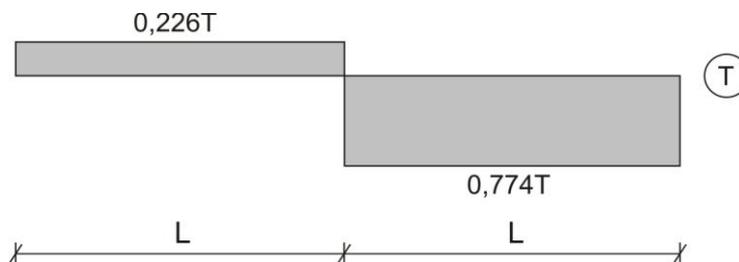
$$T_A = \frac{7}{31} T = 0,226T$$

Como:

$$\sum T_{eje} = 0 \quad \Rightarrow \quad T_A + T_C - T = 0$$

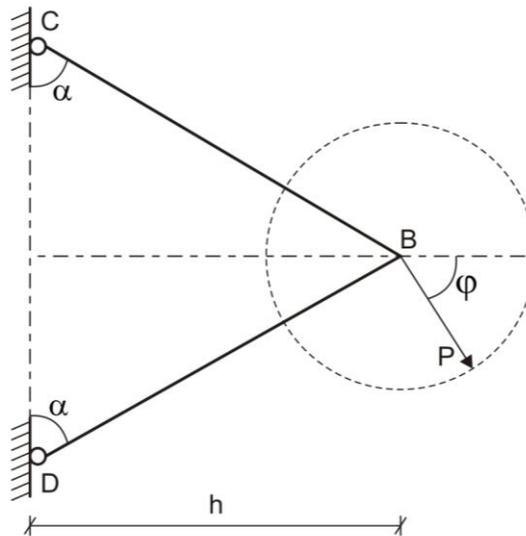
$$T_C = \frac{24}{31} T = 0,774T$$

Con los valores obtenidos, graficamos el diagrama de momento torsor.

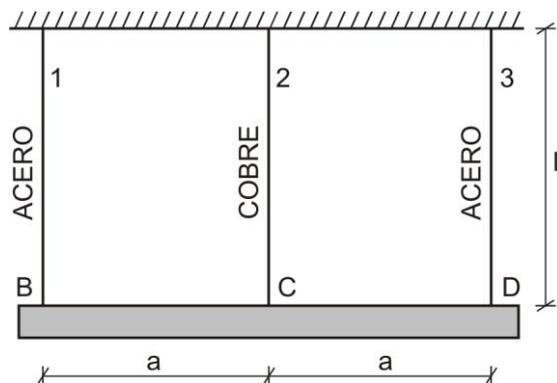


EVALUACIÓN	EXAMEN PARCIAL	SEM. ACADÉMICO	2006 – II
CURSO	RESISTENCIA DE MATERIALES I	SECCIÓN	26E
PROFESOR	Ph.D. GENNER VILLARREAL CASTRO	DURACIÓN	110m
ESCUELA	INGENIERIA CIVIL	CICLO	V

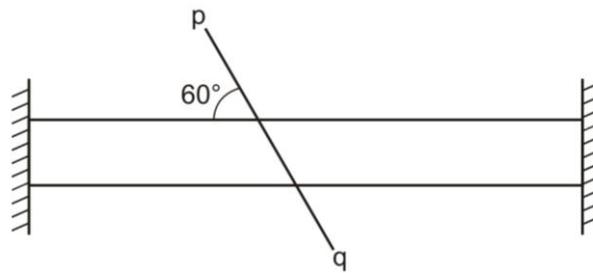
1. El nudo "B" recibe una fuerza "P" de magnitud constante que gira lentamente en el plano. Determinar el valor del ángulo " α " con la cual la masa del material de las barras sea mínima. Las áreas de las secciones de las barras son iguales y se determinan a partir de la condición de resistencia
..... (5 puntos)



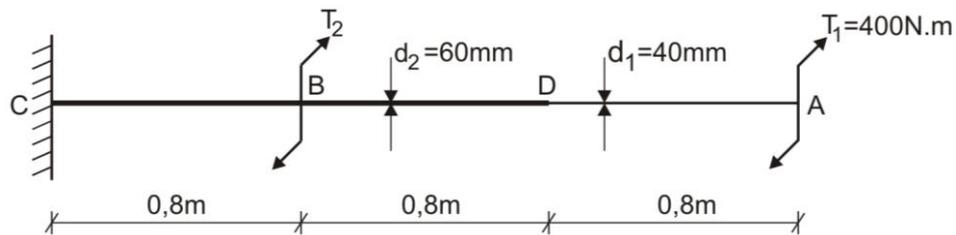
2. Determinar los esfuerzos que surgen en las secciones transversales de los cables que sostienen a la viga absolutamente rígida BCD mostrada en la figura, producto del calentamiento de la barra central de cobre, debido a la variación de temperatura en 50°C . Considerar que el coeficiente de dilatación térmica es $\alpha_c = 16,5 \cdot 10^{-6} / ^{\circ}\text{C}$, los módulos de elasticidad son $E_a = 2E_c = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$ y que las áreas de los tres cables es de 1 cm^2
..... (4 puntos)



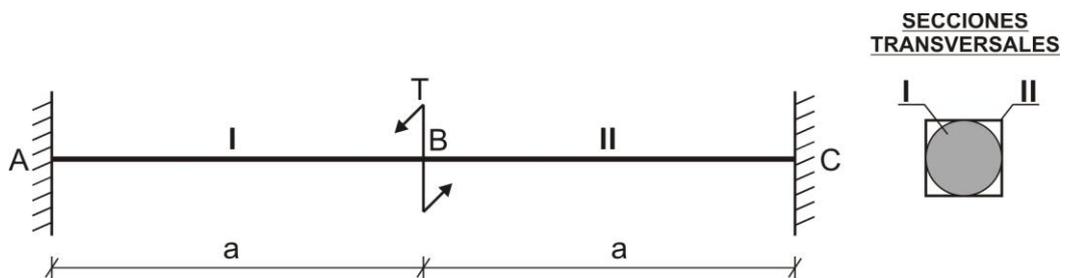
3. Una barra metálica está doblemente empotrada a una temperatura ambiente de 68°F , tal como se muestra en la figura. Calcular los esfuerzos normal y tangencial sobre la sección inclinada pq si la temperatura se incrementa hasta 200°F . Considerar $\alpha = 6,5 \cdot 10^{-6} / ^{\circ}\text{F}$ y $E = 30 \cdot 10^6 \text{ psi}$
- (3 puntos)



4. Determinar el valor del momento torsor T_2 , el esfuerzo tangencial máximo y el ángulo de giro en torsión en el punto A, si $\phi_A = 3\phi_B$ y $G = 8 \cdot 10^4 \text{ MPa}$
- (4 puntos)



5. Determinar el valor del esfuerzo tangencial máximo $(\tau_{II})_{\text{máx}}$ correspondiente al tramo BC de la barra doblemente empotrada, si el esfuerzo tangencial máximo en el tramo AB es $(\tau_I)_{\text{máx}} = 20\text{MPa}$. Considerar que el tramo AB de la barra es de sección transversal circular de diámetro "d" y el tramo BC es cuadrado de lado "d"
- (4 puntos)

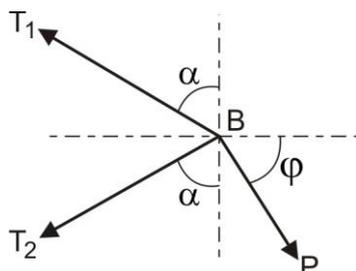


FECHA	La Molina, 04 de Octubre del 2006
-------	-----------------------------------

SOLUCIONARIO DE EXAMEN PARCIAL

CICLO 2006 – II

1. Analizamos el equilibrio del nudo B



$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad P \cos \varphi - T_1 \operatorname{sen} \alpha - T_2 \operatorname{sen} \alpha = 0$$

$$P \cos \varphi = T_1 \operatorname{sen} \alpha + T_2 \operatorname{sen} \alpha \quad \dots\dots\dots (a)$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad T_1 \cos \alpha - T_2 \cos \alpha - P \operatorname{sen} \varphi = 0$$

$$P \operatorname{sen} \varphi = T_1 \cos \alpha - T_2 \cos \alpha \quad \dots\dots\dots (b)$$

De la ecuación (a):

$$T_2 = \frac{P \cos \varphi - T_1 \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}$$

Reemplazamos en la ecuación (b):

$$P \operatorname{sen} \varphi = T_1 \cos \alpha - \left(\frac{P \cos \varphi - T_1 \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} \right) \cos \alpha$$

$$T_1 = \frac{P}{2} \left(\frac{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \varphi + \cos \alpha \cos \varphi}{\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha} \right)$$

$$T_1 = \frac{P \cos(\varphi - \alpha)}{\operatorname{sen} 2\alpha}$$

La tensión será máxima, cuando $\cos(\varphi - \alpha) = 1$, es decir, cuando $\varphi = \alpha$ y será igual a:

$$T_{1,\text{máx}} = \frac{P}{\operatorname{sen} 2\alpha}$$

Según la condición de resistencia:

$$A \geq \frac{T_{1,\text{máx}}}{[\sigma]} \quad \Rightarrow \quad A \geq \frac{P}{[\sigma] \operatorname{sen} 2\alpha}$$

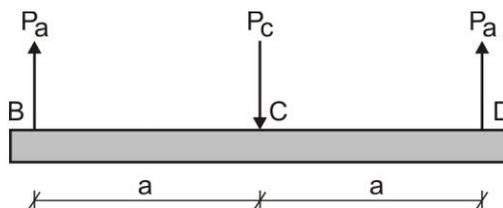
El área será mínima, cuando $\operatorname{sen} 2\alpha$ sea máximo, es decir $\operatorname{sen} 2\alpha = 1$, lo que implica que $\alpha = 45^\circ$

Como sabemos el peso y la masa están relacionados por la expresión $P = mg$, lo que implica que el peso crece cuando la masa crece y viceversa.

Además, el peso depende del volumen del material a utilizar, es decir, depende de su área y longitud, como este último es constante, entonces se concluye que a menor área de sección transversal, será menor su peso y masa, que es condición del problema y se cumple cuando $\alpha = 45^\circ$.

No se analizó T_2 debido a que por las condiciones de equilibrio y el gráfico respectivo, se desprende que $T_1 > T_2$ y la condición de resistencia se aplica para comprobar con la tracción máxima.

2. El calentamiento de la barra central provocará su alargamiento, surgiendo las fuerzas internas mostradas en la figura:



$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad 2P_a - P_c = 0 \quad \therefore \quad P_c = 2P_a$$

El sistema es una vez estáticamente indeterminado.

Luego, por la simetría se deduce que la viga se desplazará, pero en forma uniforme, o sea serán iguales todos los alargamientos de las barras.

$$\delta_a = \delta_c$$

Donde:

$$\delta_a = \frac{P_a L}{E_a A}$$

$$\delta_c = \alpha_c L(\Delta T) - \frac{P_c L}{E_c A} = \alpha_c L(\Delta T) - \frac{2P_a L}{E_c A}$$

Igualando ambas relaciones se obtiene:

$$P_a = \frac{\alpha_c (\Delta T)}{\left(\frac{1}{E_a A} + \frac{2}{E_c A} \right)} = \frac{16,5 \cdot 10^6 \cdot 50}{\left(\frac{1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 10^{-4}} + \frac{2}{10^{11} \cdot 10^{-4}} \right)} = 3300 \text{ N} = 3,3 \text{ kN (TRACCION)}$$

$$P_c = 2P_a = 6,6 \text{ kN (COMPRESION)}$$

Los esfuerzos serán:

$$\sigma_a = \frac{P_a}{A} = \frac{3,3 \cdot 10^3}{10^{-4}} = 33 \text{ MPa (TRACCION)}$$

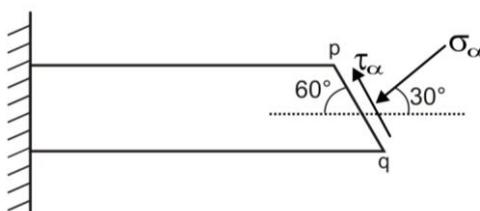
$$\sigma_c = \frac{P_c}{A} = \frac{6,6 \cdot 10^3}{10^{-4}} = 66 \text{ MPa (COMPRESION)}$$

3. Ante el incremento de temperatura y como los soportes son rígidos, en este caso empotramientos, la fuerza de reacción de dichos extremos serán iguales y los denotaremos como R, que impide que producto de la dilatación del material se desplacen los empotramientos, es decir:

$$\delta_R = \delta_T \quad \Rightarrow \quad \frac{RL}{EA} = \alpha(\Delta T)L \quad \therefore \quad \sigma_1 = E\alpha(\Delta T) = 30 \cdot 10^6 \cdot 6,5 \cdot 10^{-6} (200 - 68)$$

$$\sigma_1 = 25740 \text{ psi} = 25,74 \text{ ksi (COMPRESION)}$$

Esquematzamos los esfuerzos normal y tangencial en el plano inclinado pq, así como el ángulo α



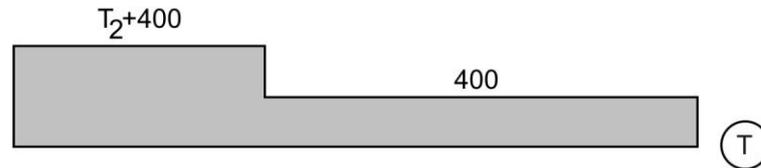
Determinamos dichos esfuerzos:

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_1 \cos^2 \alpha = -25,74 \cos^2 30 = -19,305 \text{ksi}$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_1}{2} \sin 2\alpha = -\frac{25,74}{2} \sin 60 = -11,146 \text{ksi}$$

Las orientaciones de σ_{α} y τ_{α} son las mostradas en el gráfico anterior.

4. Graficamos el diagrama de momento torsor:



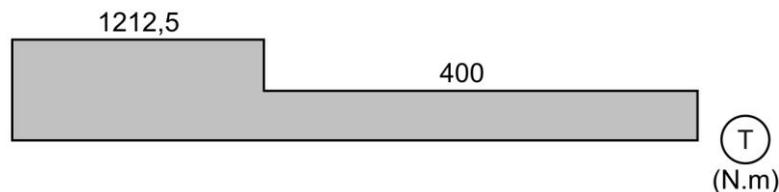
Por dato del problema:

$$\phi_A = 3\phi_B$$

$$\frac{(T_2 + 400) \cdot 0,8}{G(\pi/32) \cdot 60^4 \cdot 10^{-12}} + \frac{400 \cdot 0,8}{G(\pi/32) \cdot 60^4 \cdot 10^{-12}} + \frac{400 \cdot 0,8}{G(\pi/32) \cdot 40^4 \cdot 10^{-12}} = 3 \left[\frac{(T_2 + 400) \cdot 0,8}{G(\pi/32) \cdot 60^4 \cdot 10^{-12}} \right]$$

$$T_2 = 812,5 \text{N.m}$$

Luego:



$$\tau_{CB} = \frac{16 \cdot 1212,5}{\pi \cdot 60^3 \cdot 10^{-9}} = 28,59 \text{MPa}$$

$$\tau_{BD} = \frac{16 \cdot 400}{\pi \cdot 60^3 \cdot 10^{-9}} = 9,43 \text{MPa}$$

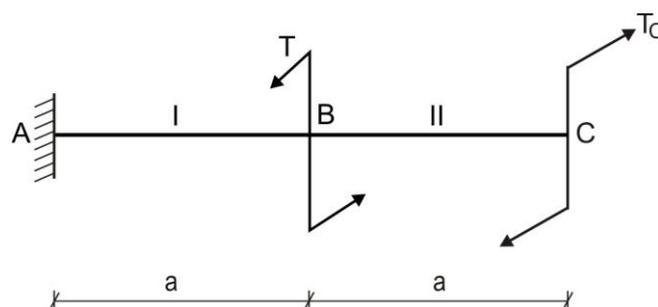
$$\tau_{\text{máx}} = \tau_{DA} = \frac{16 \cdot 400}{\pi \cdot 40^3 \cdot 10^{-9}} = 31,83 \text{MPa}$$

Asimismo:

$$\phi_B = \frac{1212,5 \cdot 0,8}{8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 (\pi/32) \cdot 60^4 \cdot 10^{-12}} = 9,5296 \cdot 10^{-3} \text{ rad} = 0,546^\circ$$

$$\phi_A = 3\phi_B = 3 \cdot 0,546 = 1,638^\circ$$

5. Eliminamos el empotramiento en C y lo reemplazamos por su momento torsor T_C

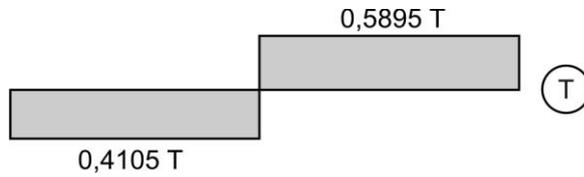


$$\phi_c = 0$$

$$\frac{T_c(a)}{G \cdot 0,141d^4} + \frac{(T_c - T)(a)}{G(\pi/32)d^4} = 0$$

$$T_c = 0,5895T$$

Graficamos el diagrama de momento torsor:



Por condición del problema:

$$(\tau_I)_{\text{máx}} = \frac{16 \cdot 0,4105T}{\pi d^3} = 20 \quad \Rightarrow \quad \frac{T}{d^3} = 9,5663$$

Luego:

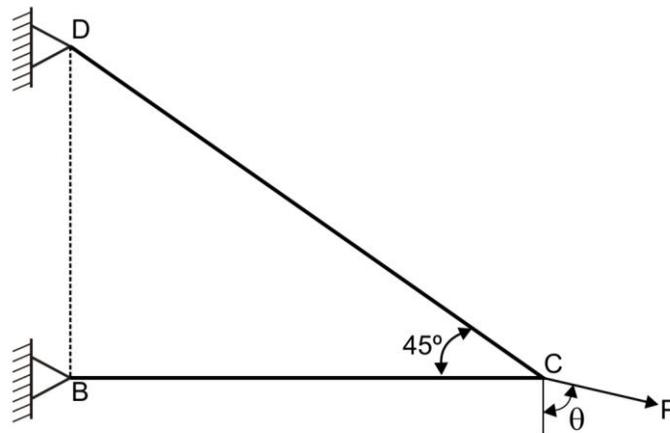
$$(\tau_{II})_{\text{máx}} = \frac{0,5895T}{0,208d^3} = 27,11 \text{ MPa}$$



EVALUACIÓN	EXAMEN PARCIAL	SEM. ACADÉMICO	2007 – I
CURSO	RESISTENCIA DE MATERIALES I	SECCIÓN	26E
PROFESOR	Ph.D. GENNER VILLARREAL CASTRO	DURACIÓN	110m
ESCUELA	INGENIERIA CIVIL	CICLO	V

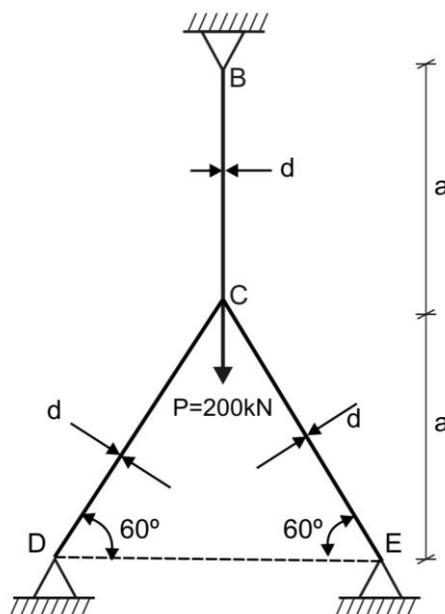
1. La estructura BCD mostrada en la figura soporta en el nudo C una fuerza P que actúa según un ángulo θ respecto a la vertical. Las áreas de sección transversal y módulos de elasticidad de los miembros BC y CD son los mismos. Determinar el ángulo θ tal que la deflexión del nudo C tenga la misma dirección que la fuerza P

..... (5 puntos)



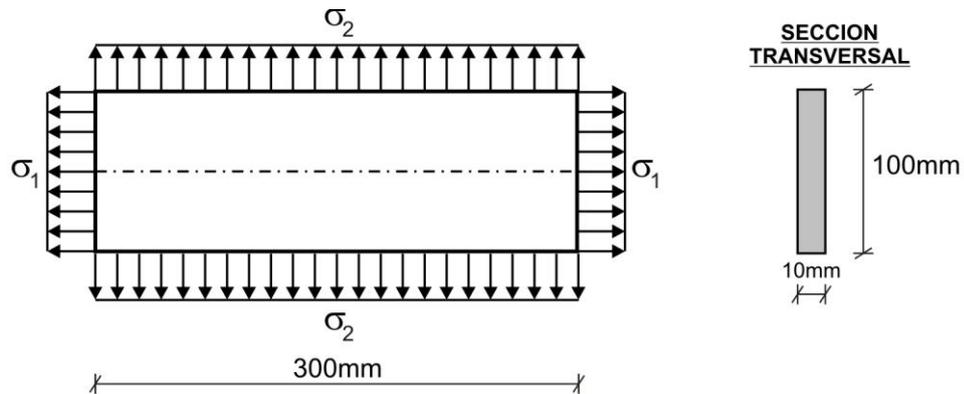
2. Elegir el diámetro “d” de la sección transversal, si $[\sigma] = 100\text{MPa}$. Considerar que la rigidez EA es constante en toda la estructura.

..... (5 puntos)



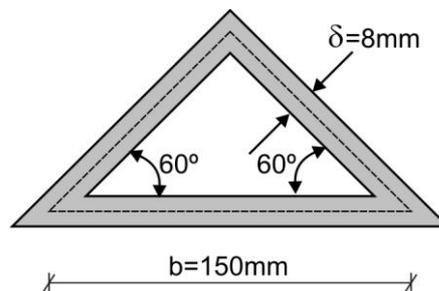
3. En una banda de acero rectangular de dimensiones 300x100x10mm actúan los esfuerzos normales $\sigma_1 = 120\text{MPa}$ y $\sigma_2 = 60\text{MPa}$. Determinar la variación volumétrica relativa ε_v , si $E = 2 \cdot 10^5 \text{MPa}$ y $\mu = 0,25$

..... (3 puntos)



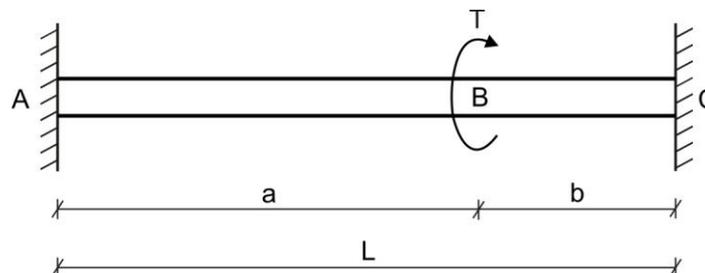
4. La sección transversal de un tubo de pared delgada de acero ($G = 80\text{GPa}$) tiene la forma de un triángulo equilátero. La longitud de cada lado a lo largo de la línea media es $b = 150\text{mm}$ y el espesor de pared es $\delta = 8\text{mm}$. Si el esfuerzo tangencial admisible es 60MPa , ¿Cuál es el momento torsor máximo admisible T_{adm} que puede actuar sobre el tubo? Para este valor del momento torsor, ¿Cuál es el ángulo de giro en torsión por unidad de longitud ϕ_o ?

..... (4 puntos)



5. Un momento torsor T se aplica como se muestra en la figura a una barra maciza circular con extremos empotrados. Determinar los momentos torsores en los empotramientos.

..... (3 puntos)

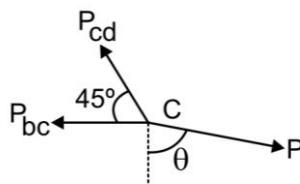


FECHA	La Molina, 02 de Mayo del 2007
-------	--------------------------------

SOLUCIONARIO DE EXAMEN PARCIAL

CICLO 2007 – I

1. Analizamos el equilibrio en el nudo C



$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad P_{cd} \sin 45 - P \cos \theta = 0$$

$$P_{cd} = P\sqrt{2} \cos \theta \text{ (TRACCION)}$$

$$\sum F_X = 0 \quad \Rightarrow \quad -P_{cd} \cos 45 - P_{bc} + P \sin \theta = 0$$

$$-P\sqrt{2} \cos \theta \cos 45 - P_{bc} + P \sin \theta = 0$$

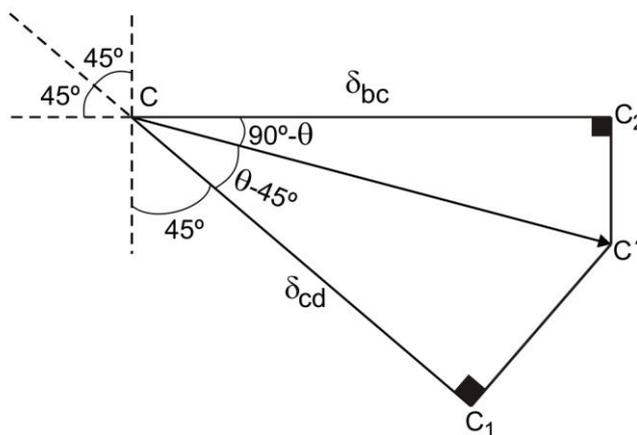
$$P_{bc} = P(\sin \theta - \cos \theta) \text{ (TRACCION)}$$

Luego, asumimos $L_{cd} = L$ y obtenemos:

$$\delta_{cd} = \frac{P_{cd} L_{cd}}{EA} = \frac{(P\sqrt{2} \cos \theta)(L)}{EA} = \frac{PL\sqrt{2} \cos \theta}{EA} \text{ (ALARGAMIENTO)}$$

$$\delta_{bc} = \frac{P_{bc} L_{bc}}{EA} = \frac{P(\sin \theta - \cos \theta)L \cos 45}{EA} = \frac{PL(\sin \theta - \cos \theta)}{\sqrt{2}EA} \text{ (ALARGAMIENTO)}$$

Esquemizamos el diagrama de desplazamientos:



En consecuencia:

$$\frac{\delta_{cd}}{\cos(\theta - 45)} = \frac{\delta_{bc}}{\cos(90 - \theta)}$$

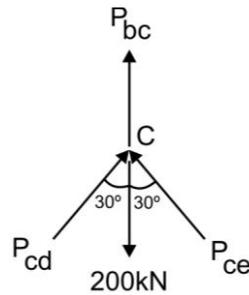
$$\left(\frac{PL\sqrt{2} \cos \theta}{EA} \right) \cos(90 - \theta) = \left[\frac{PL(\sin \theta - \cos \theta)}{\sqrt{2}EA} \right] \cos(\theta - 45)$$

$$2\sin \theta \cos \theta = (\sin \theta - \cos \theta) \cos(\theta - 45)$$

$$\operatorname{tg} 2\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\theta = 72,37^\circ$$

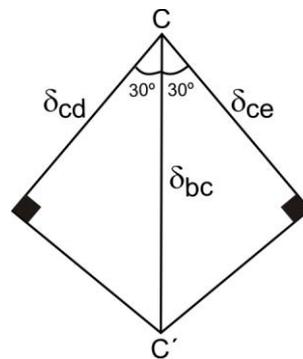
2. Analizamos el equilibrio del nudo C



$$\sum F_X = 0 \quad \Rightarrow \quad P_{cd} \sin 30 - P_{ce} \sin 30 = 0 \quad \therefore \quad P_{cd} = P_{ce}$$

$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad P_{bc} + 2P_{cd} \cos 30 - 200 = 0 \quad \therefore \quad P_{bc} + P_{cd} \sqrt{3} = 200 \quad \dots\dots\dots (a)$$

Efectuamos el diagrama de desplazamientos:



De donde:

$$\delta_{bc} \cos 30 = \delta_{cd} \quad \Rightarrow \quad \frac{P_{bc}(a)}{EA} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{P_{cd}}{EA} \left(\frac{a}{\sqrt{3}/2} \right) \quad \therefore \quad P_{cd} = \frac{3}{4} P_{bc} \quad \dots\dots\dots (b)$$

Reemplazamos (b) en (a) y obtenemos:

$$P_{bc} = 87 \text{ kN (TRACCION)}$$

$$P_{cd} = 65,25 \text{ kN (COMPRESION)}$$

Aplicamos la condición de resistencia:

BARRA BC:

$$\frac{87 \cdot 10^3}{(\pi/4)d^2} \leq 100 \cdot 10^6 \quad \Rightarrow \quad d \geq 33,28 \cdot 10^{-3} \text{ m} \quad \therefore \quad d \geq 33,28 \text{ mm}$$

BARRAS CD y CE:

$$\frac{65,25 \cdot 10^3}{(\pi/4)d^2} \leq 100 \cdot 10^6 \quad \Rightarrow \quad d \geq 28,82 \cdot 10^{-3} \text{ m} \quad \therefore \quad d \geq 28,82 \text{ mm}$$



Asumimos:

$$d_{\min} = 33,28 \text{ mm}$$

3. Aplicamos la Ley de Hooke generalizada:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] = \frac{1}{2 \cdot 10^5} [120 - 0,25(60 + 0)] = 5,25 \cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)] = \frac{1}{2 \cdot 10^5} [60 - 0,25(120 + 0)] = 1,5 \cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)] = \frac{1}{2 \cdot 10^5} [0 - 0,25(120 + 60)] = -2,25 \cdot 10^{-4}$$

Luego:

$$\varepsilon_v = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 5,25 \cdot 10^{-4} + 1,5 \cdot 10^{-4} - 2,25 \cdot 10^{-4} = 4,5 \cdot 10^{-4}$$

4. Se sabe que:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{T}{2A_o \delta_{\text{mín}}} \leq [\tau] \quad \Rightarrow \quad T \leq 2 \left(\frac{b^2 \sqrt{3}}{4} \right) \delta [\tau]$$

$$T \leq 2 \left(\frac{150^2 \cdot 10^{-6} \sqrt{3}}{4} \right) \cdot 8 \cdot 10^{-3} \cdot 60 \cdot 10^6$$

$$T \leq 9353 \text{ N.m}$$

$$T_{\text{adm}} = 9,353 \text{ kN.m}$$

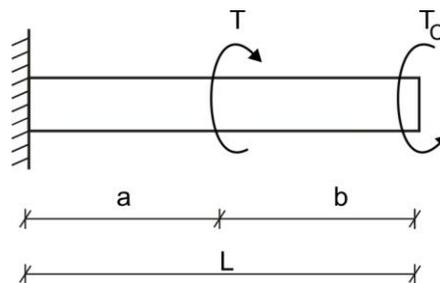
Luego:

$$\phi_o = \frac{T}{GI_t} = \frac{9,353 \cdot 10^3}{80 \cdot 10^9 \cdot 6,75 \cdot 10^{-6}} = 0,01732 \text{ rad/m}$$

Donde:

$$I_t = \frac{4A_o^2}{\int_0^{L_{\text{media}}} \frac{ds}{\delta}} = \frac{4(b^2 \sqrt{3}/4)^2}{\int_0^{0,45} \frac{ds}{8 \cdot 10^{-3}}} = \frac{4(150^2 \cdot 10^{-6} \sqrt{3}/4)^2 \cdot 8 \cdot 10^{-3}}{0,45} = 6,75 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$$

5. Eliminamos el empotramiento en C y lo reemplazamos por T_C



Se sabe que:

$$\phi_C = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{T_C L}{GI_p} - \frac{T a}{GI_p} = 0 \quad \therefore \quad T_C = \frac{T a}{L}$$

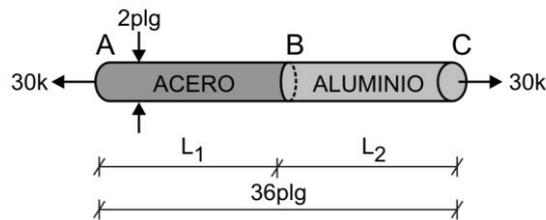
$$\sum T_{\text{eje}} = 0 \quad \Rightarrow \quad T_A + T_C - T = 0 \quad \therefore \quad T_A = T - \frac{T a}{L} = \frac{T(L - a)}{L} = \frac{T b}{L}$$



EVALUACIÓN	EXAMEN PARCIAL	SEM. ACADÉMICO	2007 – II
CURSO	RESISTENCIA DE MATERIALES I	SECCIÓN	26E
PROFESOR	Ph.D. GENNER VILLARREAL CASTRO	DURACIÓN	110m
ESCUELA	INGENIERIA CIVIL	CICLO	V

1. La barra ABC está compuesta de dos materiales y tiene una longitud total de 36plg y un diámetro de 2plg. La parte AB es de acero ($E_a = 30 \cdot 10^6$ psi) y la parte BC es de aluminio ($E_{al} = 10 \cdot 10^6$ psi). La barra se somete a una fuerza de tracción de 30k
- Determinar las longitudes L_1 y L_2 para las partes de acero y aluminio, respectivamente, a fin de que ambas partes tengan el mismo alargamiento
 - ¿Cuál es el alargamiento total de la barra?

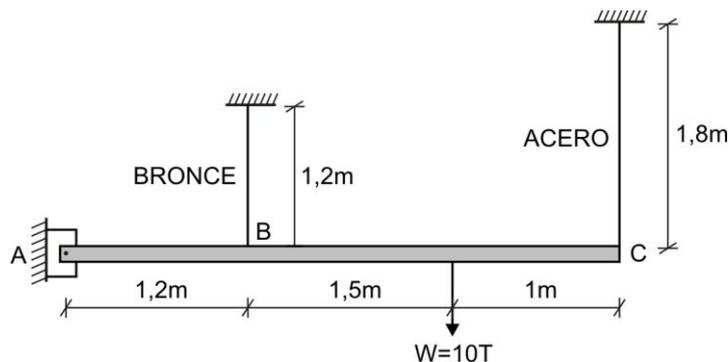
..... (4 puntos)



2. Una barra rígida ABC de peso despreciable está soportada como se indica en la figura. Determinar la variación de temperatura que deben experimentar los cables verticales, para que la de bronce alcance un esfuerzo de tracción de 500 kg/cm^2

MATERIAL	AREA DE LA BARRA	MODULO DE ELASTICIDAD	COEFICIENTE DE DILATACION TERMICA
ACERO	$A_a = 5 \text{ cm}^2$	$E_a = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$	$\alpha_a = 1,2 \cdot 10^{-5} \left(\frac{1}{^\circ\text{C}} \right)$
BRONCE	$A_b = 10 \text{ cm}^2$	$E_b = 8,5 \cdot 10^5 \text{ kg/cm}^2$	$\alpha_b = 1,95 \cdot 10^{-5} \left(\frac{1}{^\circ\text{C}} \right)$

..... (4 puntos)

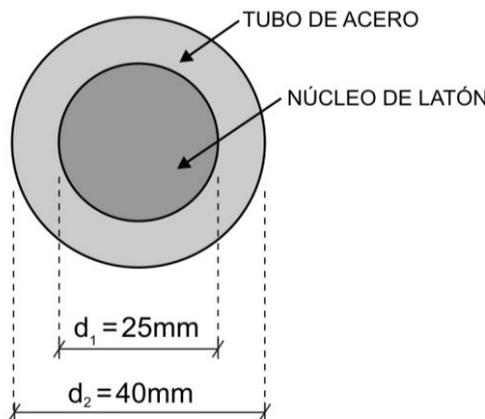


3. Un punto de un cuerpo se encuentra sujeto al estado plano de esfuerzos, siendo $\sigma_x = 200\text{kg/cm}^2$, $\sigma_y = -100\text{kg/cm}^2$ y $\tau_{xy} = 200\text{kg/cm}^2$. Determinar los valores de los esfuerzos principales y la orientación de los planos donde el esfuerzo normal es igual a la sexta parte del esfuerzo principal máximo

..... (4 puntos)

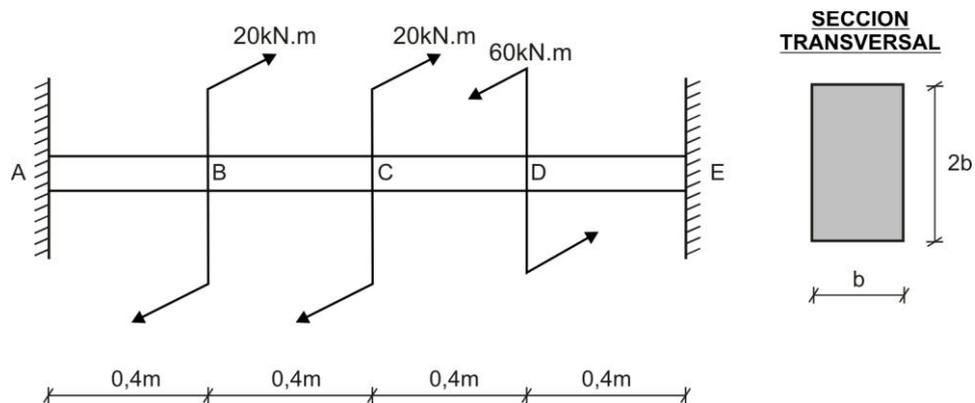
4. Una barra compuesta se construye mediante el montaje por contracción de un tubo de acero sobre un núcleo de latón, en forma tal que ambos actúan como una unidad en torsión. El módulo de elasticidad a cortante del tubo es $G_a = 75\text{GPa}$ y el del núcleo es $G_L = 39\text{GPa}$. Los diámetros exteriores son $d_1 = 25\text{mm}$ para el núcleo y $d_2 = 40\text{mm}$ para el tubo. Calcular los esfuerzos tangenciales máximos τ_a y τ_L en el acero y el latón, respectivamente, ocasionados por un momento torsor $T = 900\text{N.m}$

..... (4 puntos)



5. Determinar el valor de "b" y el ángulo de giro en torsión en C, si $[\tau] = 80\text{MPa}$ y $G = 8 \cdot 10^4\text{MPa}$

..... (4 puntos)



FECHA	La Molina, 03 de Octubre del 2007
--------------	-----------------------------------

SOLUCIONARIO DE EXAMEN PARCIAL

CICLO 2007 – II

1. a) Sabemos que:

$$L_1 + L_2 = 36 \quad \dots\dots\dots (a)$$

Por dato del problema:

$$\delta_a = \delta_{al} \quad \Rightarrow \quad \frac{30 \cdot 10^3 \cdot L_1}{30 \cdot 10^6 (\pi/4) \cdot 2^2} = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot L_2}{10 \cdot 10^6 (\pi/4) \cdot 2^2}$$

$$L_1 = 3L_2 \quad \dots\dots\dots (b)$$

Reemplazamos (b) en (a) y obtenemos:

$$L_1 = 27 \text{plg}$$

$$L_2 = 9 \text{plg}$$

b) El alargamiento total de la barra será:

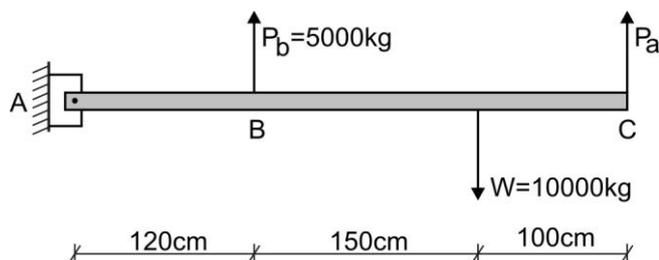
$$\delta = \delta_a + \delta_{al} = 2\delta_a = 2\delta_{al}$$

$$\delta = 2 \left[\frac{30 \cdot 10^3 \cdot 27}{30 \cdot 10^6 (\pi/4) \cdot 2^2} \right] = 0,017188 \text{plg} \cong 0,0172 \text{plg}$$

2. Calculamos la fuerza de tracción en el cable de bronce:

$$\sigma_b = \frac{P_b}{A_b} \quad \Rightarrow \quad P_b = \sigma_b A_b = 500 \cdot 10 = 5000 \text{kg}$$

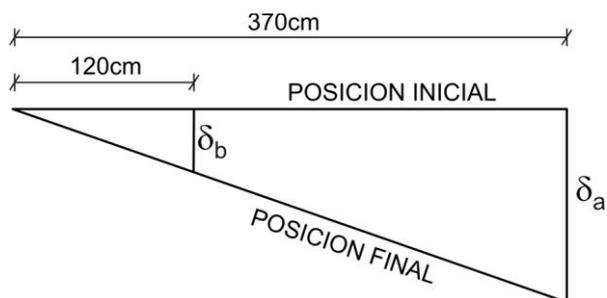
Analizamos el equilibrio de la barra rígida ABC



$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad 5000 \cdot 120 + 370 P_a - 10000 \cdot 270 = 0$$

$$P_a = 5675,67 \text{kg}$$

Como la barra es rígida, analizamos su diagrama de desplazamientos:



$$\frac{\delta_b}{120} = \frac{\delta_a}{370} \quad \Rightarrow \quad 370\delta_b = 120\delta_a$$

$$370(\delta_{P(b)} + \delta_{T(b)}) = 120(\delta_{P(a)} + \delta_{T(a)})$$

Reemplazamos valores y obtenemos:

$$370 \left[\frac{5000 \cdot 120}{8,5 \cdot 10^5 \cdot 10} + 1,95 \cdot 10^{-5} (\Delta T) \cdot 120 \right] = 120 \left[\frac{5675,67 \cdot 180}{2,1 \cdot 10^6 \cdot 5} + 1,2 \cdot 10^{-5} (\Delta T) \cdot 180 \right]$$

$$\Delta T = -23,8^\circ \text{C}$$

3. Determinamos los esfuerzos principales:

$$\sigma_1 = \frac{200 - 100}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(200 + 100)^2 + 4(200)^2} = 300 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_2 = \frac{200 - 100}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(200 + 100)^2 + 4(200)^2} = -200 \text{ kg/cm}^2$$

Determinamos los planos, donde el esfuerzo normal es igual a la sexta parte del esfuerzo principal máximo σ_1 , es decir:

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha = \frac{\sigma_1}{6} &\Rightarrow \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha = \frac{300}{6} \\ \frac{200 - 100}{2} + \frac{200 + 100}{2} \cos 2\alpha - 200(2 \sin \alpha \cos \alpha) &= 50 \\ 3 \cos^2 \alpha - 8 \sin \alpha \cos \alpha - 3 \sin^2 \alpha &= 0 \\ (3 \cos \alpha + \sin \alpha)(\cos \alpha - 3 \sin \alpha) &= 0 \end{aligned}$$

De donde:

$$1\text{ra solución: } 3 \cos \alpha + \sin \alpha = 0 \quad \therefore \alpha = -71,57^\circ$$

$$2\text{da solución: } \cos \alpha - 3 \sin \alpha = 0 \quad \therefore \alpha = 18,43^\circ$$

4. Del equilibrio estático:

$$T_L + T_a = T \quad \dots\dots\dots (a)$$

De la compatibilidad de rotaciones:

$$\phi = \phi_L = \phi_a$$

$$\frac{T_L L}{G_L I_{p(L)}} = \frac{T_a L}{G_a I_{p(a)}}$$

$$T_a = \frac{G_a I_{p(a)}}{G_L I_{p(L)}} T_L \quad \dots\dots\dots (b)$$

Reemplazamos (b) en (a) y obtenemos:

$$T_L + \frac{G_a I_{p(a)}}{G_L I_{p(L)}} T_L = T$$

$$T_L = T \left(\frac{G_L I_{p(L)}}{G_L I_{p(L)} + G_a I_{p(a)}} \right)$$

$$T_L = 900 \left(\frac{39 \cdot 10^9 (\pi/32) \cdot 25^4 \cdot 10^{-12}}{39 \cdot 10^9 (\pi/32) \cdot 25^4 \cdot 10^{-12} + 75 \cdot 10^9 (\pi/32) \cdot 40^4 \cdot 10^{-12} (1 - 0,625^4)} \right)$$

$$T_L = 77,055 \text{ N.m}$$

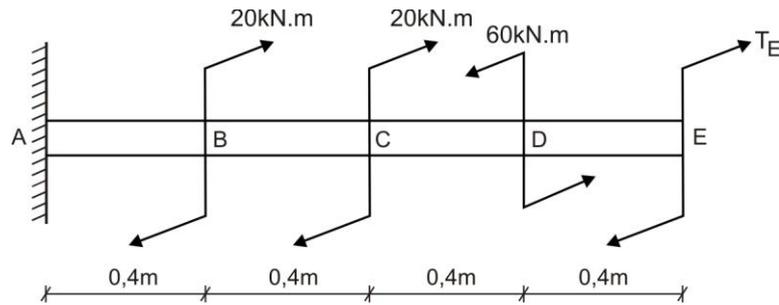
$$T_a = 900 - 77,055 = 822,945 \text{ N.m}$$

Luego:

$$\tau_a = \frac{T_a}{W_{p(a)}} = \frac{822,945}{(\pi/16) \cdot 40^3 \cdot 10^{-9} (1 - 0,625^4)} = 77,28 \text{ MPa}$$

$$\tau_L = \frac{T_L}{W_{p(L)}} = \frac{77,055}{(\pi/16) \cdot 25^3 \cdot 10^{-9}} = 25,12 \text{ MPa}$$

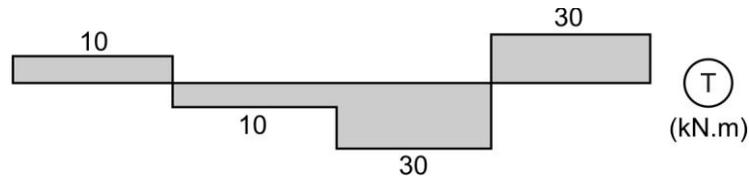
5. Eliminamos el empotramiento en E y lo reemplazamos por su momento torsor T_E



Sabemos que:

$$\phi_E = 0 \Rightarrow \frac{T_E \cdot 1,6}{GI_t} - \frac{60 \cdot 1,2}{GI_t} + \frac{20 \cdot 0,8}{GI_t} + \frac{20 \cdot 0,4}{GI_t} = 0 \quad \therefore T_E = 30 \text{ kN.m}$$

Con el valor obtenido, graficamos el diagrama de momento torsor:



Luego:

$$\tau_{\text{máx}} \leq [\tau] \Rightarrow \frac{30 \cdot 10^3}{0,246(2b)(b)^2} \leq 80 \cdot 10^6 \quad \therefore b \geq 0,0913 \text{ m}$$

Asumimos:

$$b = 9,13 \text{ cm}$$

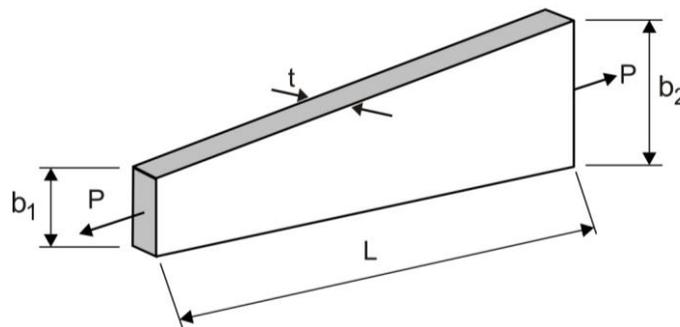
Calculamos el ángulo de giro en torsión en C

$$\phi_C = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 0,4}{8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \cdot 0,229(18,26 \cdot 10^{-2})(9,13 \cdot 10^{-2})^3} - \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 0,4}{8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \cdot 0,229(18,26 \cdot 10^{-2})(9,13 \cdot 10^{-2})^3} = 0$$

EVALUACIÓN	EXAMEN PARCIAL	SEM. ACADÉMICO	2008 – I
CURSO	RESISTENCIA DE MATERIALES I	SECCIÓN	26E
PROFESOR	Ph.D. GENNER VILLARREAL CASTRO	DURACIÓN	110m
ESCUELA	INGENIERIA CIVIL	CICLO	V

1. Una barra de sección variable está sometida a la acción de fuerzas de tracción “P” en sus extremos. Si el ancho de la barra varía linealmente desde b_1 en el extremo izquierdo hasta b_2 en el extremo derecho. Determinar el alargamiento de la barra, si $L = 1,5\text{m}$; $t = 25\text{mm}$; $P = 125\text{kN}$; $b_1 = 100\text{mm}$; $b_2 = 150\text{mm}$ y $E = 200\text{GPa}$

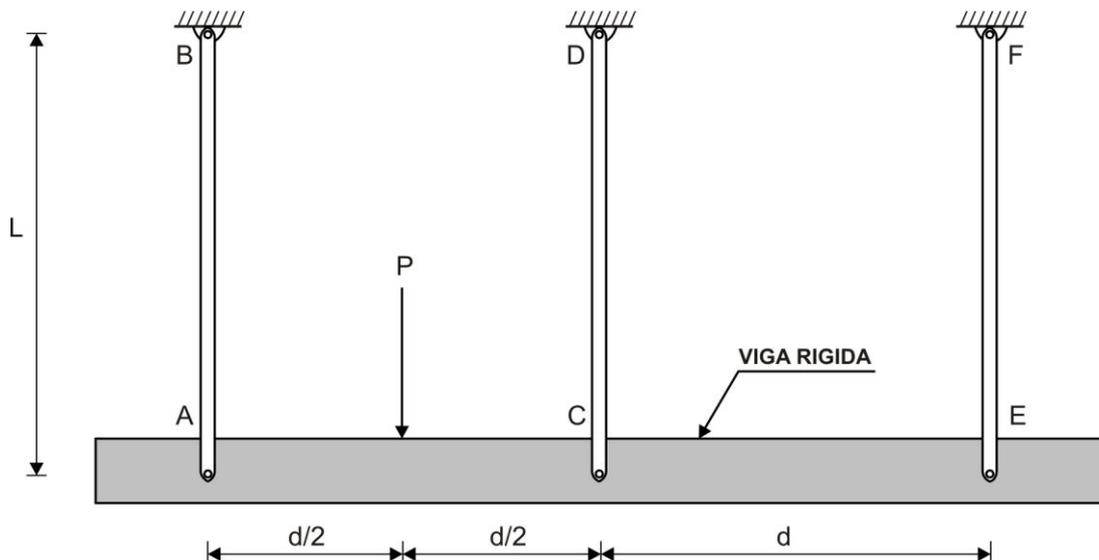
..... (4 puntos)



2. La figura muestra tres barras suspendidas hechas del mismo material “E” y con igual sección transversal “A”. Se pide:

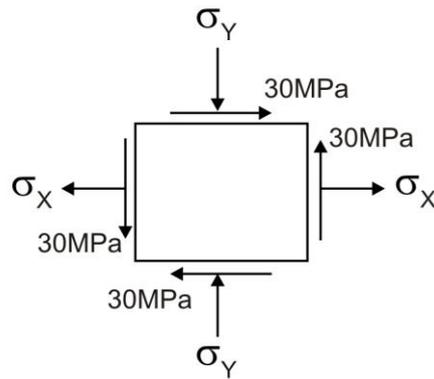
- Determinar los esfuerzos normales en cada una de las barras, si sobre la viga rígida ACE actúa una fuerza “P”
- Determinar el estado final de la estructura después de aplicada la carga “P” con sus respectivos desplazamientos

..... (5 puntos)



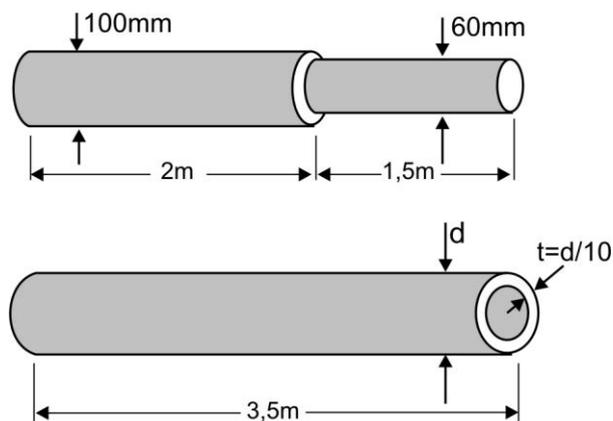
3. Dado el elemento de la figura, calcular los valores de σ_x y σ_y , sabiendo que los esfuerzos principales son 20MPa y -80MPa

..... (4 puntos)



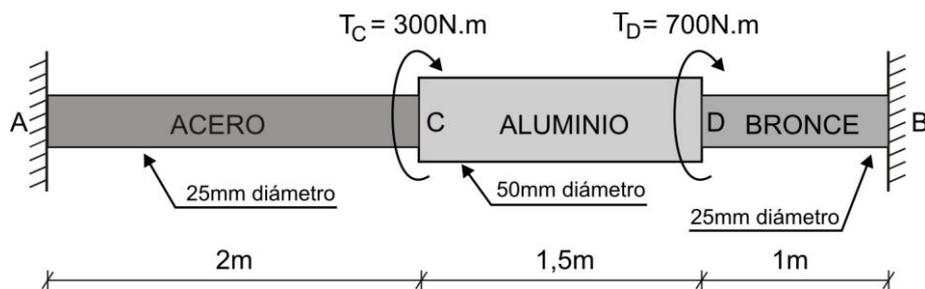
4. Una barra maciza de sección transversal circular con dos diámetros diferentes se muestra en la figura. Determinar el diámetro exterior "d" de una barra prismática hueca del mismo material y la misma longitud que tenga la misma rigidez torsional si el espesor de pared "t" de la barra hueca debe ser d/10

..... (3 puntos)



5. Una barra se compone de tres porciones AC, CD y DB soldadas entre sí y el conjunto firmemente empotrado en sus extremos, sometido a los momentos torsores $T_C = 300\text{N.m}$ y $T_D = 700\text{N.m}$. Considerar para el acero $G_a = 83000\text{MPa}$; para el aluminio $G_{al} = 28000\text{MPa}$ y para el bronce $G_b = 35000\text{MPa}$. Determinar el esfuerzo tangencial máximo.

..... (4 puntos)

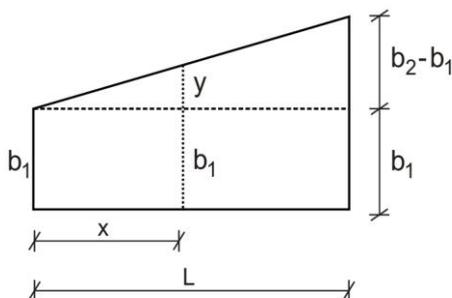


FECHA	La Molina, 30 de Abril del 2008
-------	---------------------------------

SOLUCIONARIO DE EXAMEN PARCIAL

CICLO 2008 – I

1. Esquematzamos la variación del ancho de la sección transversal:



Por relación de triángulos rectángulos:

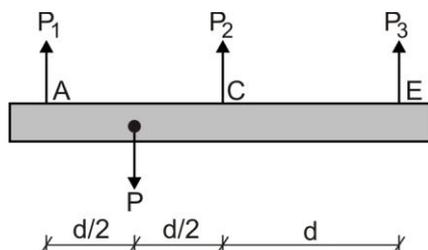
$$\frac{y}{x} = \frac{b_2 - b_1}{L} \Rightarrow y = \frac{(b_2 - b_1)x}{L} \quad \therefore \quad A_x = (b_1 + y)t = \left[b_1 + \frac{(b_2 - b_1)x}{L} \right] t$$

Luego:

$$\delta = \int_0^L \frac{P dx}{EA_x} = \int_0^L \frac{P dx}{E \left[b_1 + \frac{(b_2 - b_1)x}{L} \right] t} = \frac{PL}{Et} \int_0^L \frac{dx}{b_1 L + (b_2 - b_1)x} = \frac{PL}{Et(b_2 - b_1)} \ln \left(\frac{b_2}{b_1} \right)$$

$$\delta = \frac{125 \cdot 10^3 \cdot 1,5}{200 \cdot 10^9 \cdot 25 \cdot 10^{-3} (150 - 100) \cdot 10^{-3}} \ln \left(\frac{150}{100} \right) = 3,04 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 0,304 \text{ mm}$$

2. a) Esquematzamos el diagrama de cuerpo libre de la viga rígida ACE

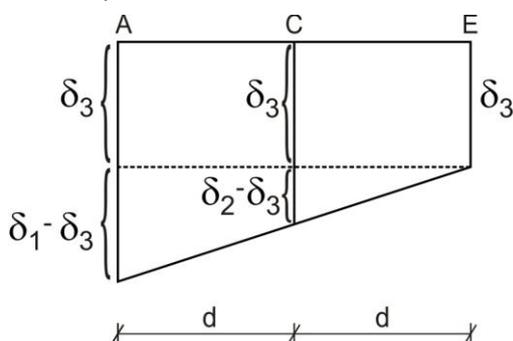


$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad P_1 + P_2 + P_3 = P \quad \dots\dots\dots (a)$$

$$\sum M_E = 0 \quad \Rightarrow \quad -P_1(2d) - P_2(d) + P(1,5d) = 0$$

$$2P_1 + P_2 = 1,5P \quad \dots\dots\dots (b)$$

Esquematzamos el diagrama de desplazamientos:



De donde:

$$\frac{\delta_2 - \delta_3}{d} = \frac{\delta_1 - \delta_3}{2d} \quad \Rightarrow \quad \delta_1 - 2\delta_2 + \delta_3 = 0$$

$$\frac{P_1 L}{EA} - 2 \frac{P_2 L}{EA} + \frac{P_3 L}{EA} = 0$$

$$P_1 - 2P_2 + P_3 = 0 \quad \dots\dots\dots (c)$$

Restamos (a) menos (c) y obtenemos:

$$3P_2 = P$$

$$P_2 = 0,333P$$

Reemplazamos en (b):

$$2P_1 + 0,333P = 1,5P$$

$$P_1 = 0,584P$$

Reemplazamos en (a):

$$0,584P + 0,333P + P_3 = P$$

$$P_3 = 0,083P$$

Luego:

$$\sigma_{AB} = \frac{P_{AB}}{A} = \frac{P_1}{A} = \frac{0,584P}{A} = 0,584 \frac{P}{A}$$

$$\sigma_{CD} = \frac{P_{CD}}{A} = \frac{P_2}{A} = \frac{0,333P}{A} = 0,333 \frac{P}{A}$$

$$\sigma_{EF} = \frac{P_{EF}}{A} = \frac{P_3}{A} = \frac{0,083P}{A} = 0,083 \frac{P}{A}$$

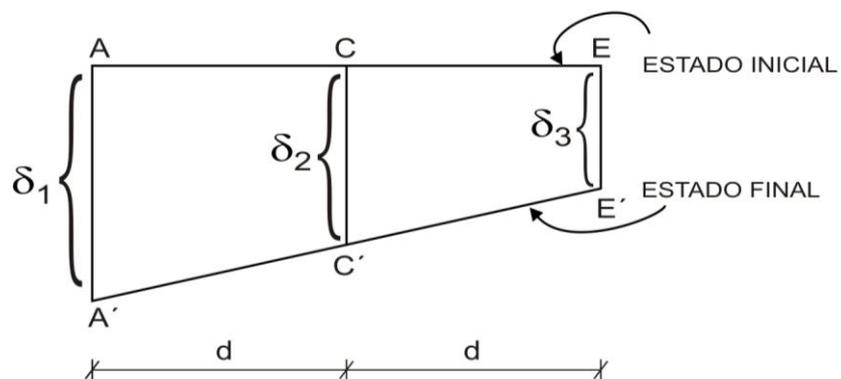
b) Calculamos los desplazamientos:

$$\delta_{AB} = \delta_1 = \frac{P_1 L}{EA} = 0,584 \frac{PL}{EA}$$

$$\delta_{CD} = \delta_2 = \frac{P_2 L}{EA} = 0,333 \frac{PL}{EA}$$

$$\delta_{EF} = \delta_3 = \frac{P_3 L}{EA} = 0,083 \frac{PL}{EA}$$

De esta manera, el diagrama de desplazamientos final coincide con el indicado anteriormente, el cual se muestra en la siguiente figura:



3. Por dato del problema:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = 20 \quad \dots\dots\dots (a)$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = -80 \quad \dots\dots\dots (b)$$

Sumamos (a) y (b), obteniendo:

$$\sigma_x + \sigma_y = -60 \quad \dots\dots\dots (c)$$

Reemplazamos (c) en (a):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} &= 50 \\ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4(-30)^2 &= 100^2 \\ \sigma_x - \sigma_y &= 80 \quad \dots\dots\dots (d) \end{aligned}$$

Resolvemos (c) y (d):

$$\sigma_x = 10\text{MPa}$$

$$\sigma_y = -70\text{MPa}$$

Como toda raíz cuadrada tiene dos soluciones, una positiva y otra negativa, en este caso la 2da solución no cumple, es decir, cuando $\sigma_x - \sigma_y = -80$, porque los esfuerzos son opuestos a los indicados en el gráfico inicial de distribución, según lo formulado en el problema.

4. Para la barra escalonada se tendrá:

$$\phi = \frac{2T}{G(\pi/32) \cdot 100^4 \cdot 10^{-12}} + \frac{1,5T}{G(\pi/32) \cdot 60^4 \cdot 10^{-12}} = \frac{32T}{\pi G} (135740,74)$$

Ahora, analizamos la barra hueca:

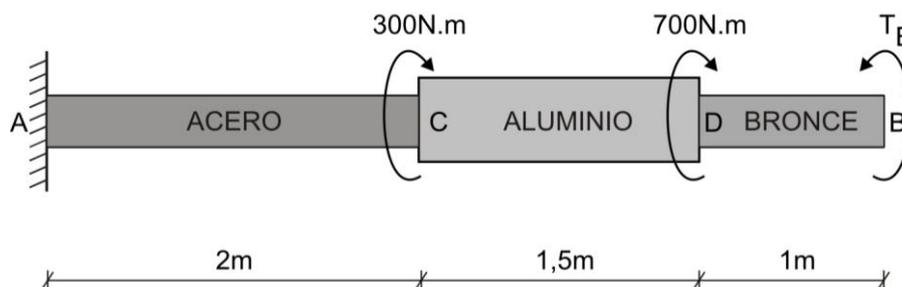
$$\phi = \frac{3,5T}{G(\pi/32) [d^4 - (4d/5)^4]} = \frac{32T}{\pi G} \left(\frac{2187,5}{369d^4} \right)$$

Por condición del problema:

$$\frac{32T}{\pi G} (135740,74) = \frac{32T}{\pi G} \left(\frac{2187,5}{369d^4} \right)$$

$$d = 0,08129\text{m} = 81,29\text{mm}$$

5. Eliminamos el empotramiento en B y lo reemplazamos por su momento torsor T_B



Sabemos que:

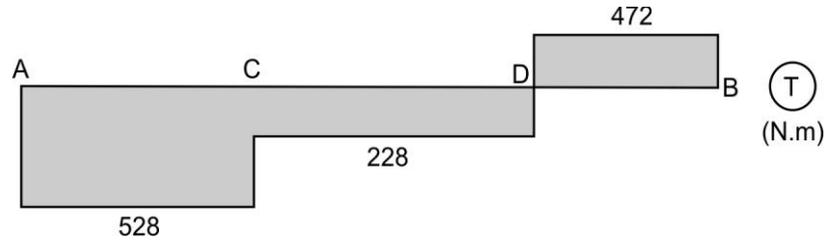
$$\phi_B = 0$$

$$\frac{T_B \cdot 1}{35000 \cdot 10^6 (\pi/32) \cdot 25^4 \cdot 10^{-12}} + \frac{T_B \cdot 1,5}{28000 \cdot 10^6 (\pi/32) \cdot 50^4 \cdot 10^{-12}} + \frac{T_B \cdot 2}{83000 \cdot 10^6 (\pi/32) \cdot 25^4 \cdot 10^{-12}} - \frac{700 \cdot 1,5}{28000 \cdot 10^6 (\pi/32) \cdot 50^4 \cdot 10^{-12}} - \frac{700 \cdot 2}{83000 \cdot 10^6 (\pi/32) \cdot 25^4 \cdot 10^{-12}} - \frac{300 \cdot 2}{83000 \cdot 10^6 (\pi/32) \cdot 25^4 \cdot 10^{-12}} = 0$$

De donde:

$$T_B = 472 \text{ N.m}$$

Graficamos el diagrama de momento torsor:



Calculamos los esfuerzos tangenciales para cada tramo, determinando de esta manera el esfuerzo tangencial máximo.

$$\tau_{\text{máx}} = \tau_{AC} = \tau_{\text{acero}} = \frac{16T_{AC}}{\pi d_{AC}^3} = \frac{16 \cdot 528}{\pi \cdot 25^3 \cdot 10^{-9}} = 172,10 \text{ MPa}$$

$$\tau_{CD} = \tau_{\text{aluminio}} = \frac{16T_{CD}}{\pi d_{CD}^3} = \frac{16 \cdot 228}{\pi \cdot 50^3 \cdot 10^{-9}} = 9,29 \text{ MPa}$$

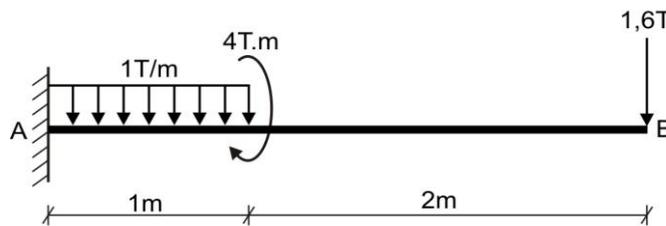
$$\tau_{DB} = \tau_{\text{bronce}} = \frac{16T_{DB}}{\pi d_{DB}^3} = \frac{16 \cdot 472}{\pi \cdot 25^3 \cdot 10^{-9}} = 153,85 \text{ MPa}$$



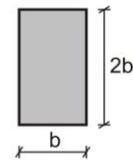
EVALUACIÓN	PRACTICA CALIFICADA N° 3	SEM. ACADÉMICO	2006 – I
CURSO	RESISTENCIA DE MATERIALES I	SECCIÓN	26E
PROFESOR	Ph.D. GENNER VILLARREAL CASTRO	DURACIÓN	110m
ESCUELA	INGENIERIA CIVIL	CICLO	V

1. Determinar el ancho “b” de la viga mostrada en la figura, si $[\sigma] = 100 \text{ kg/cm}^2$

..... (3 puntos)

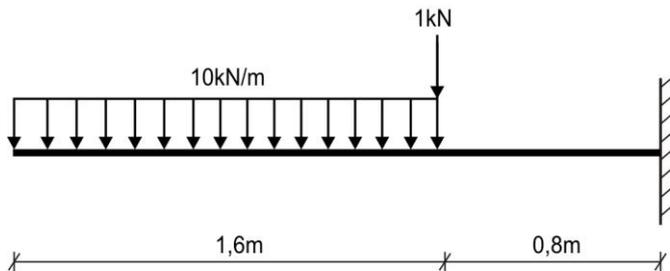


SECCION TRANSVERSAL

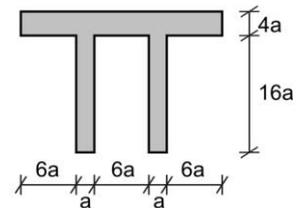


2. Determinar el valor de “a”, si $[\sigma]_{tr} = 30 \text{ MPa}$ y $[\sigma]_{comp} = 90 \text{ MPa}$, ubicando previamente la posición racional de la viga.

..... (4 puntos)

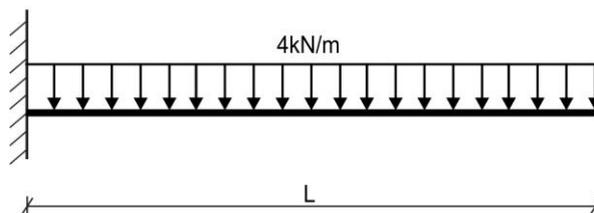


SECCION TRANSVERSAL

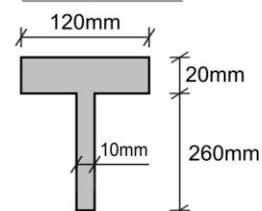


3. Determinar el valor de “L” y graficar el diagrama de esfuerzo tangencial para la sección de la viga mostrada en la figura, si $[\sigma]_{tr} = 40 \text{ MPa}$ y $[\sigma]_{comp} = 150 \text{ MPa}$. Previamente, ubique la posición racional de la viga.

..... (5 puntos)

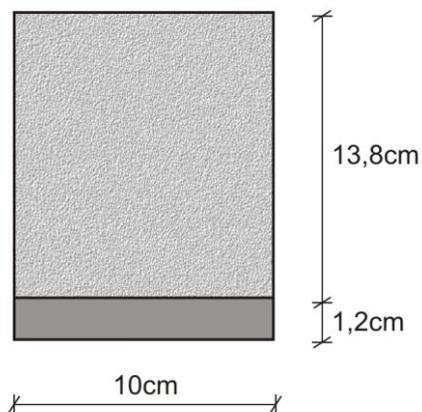


SECCION TRANSVERSAL



4. Una viga de madera reforzada con una plancha de acero en su cara inferior, está simplemente apoyada de 3m de longitud y soporta una carga concentrada "P" en su punto medio. Las dimensiones de la sección transversal se muestran en la figura. Considerar $P = 1000\text{kg}$ y $E_a / E_m = 20$. Determinar los esfuerzos máximos en el acero y la madera.

..... (4 puntos)



5. En una viga de concreto armado, $b = 15\text{cm}$, $d = 25\text{cm}$ y el área total de las varillas de acero es $4,62\text{cm}^2$. Considerar $n = 15$, $[\sigma]_c = 40\text{kg/cm}^2$, $[\sigma]_a = 1200\text{kg/cm}^2$ y determinar el momento flector máximo en kg.m que puede soportar la viga.

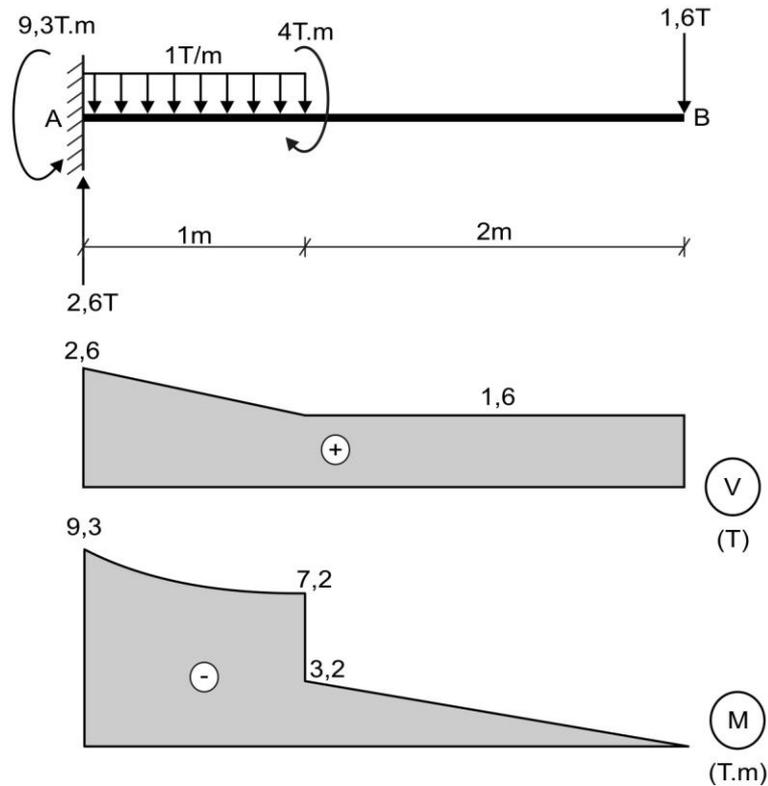
..... (4 puntos)

FECHA	La Molina, 22 de Mayo del 2006
-------	--------------------------------

SOLUCIONARIO DE PRÁCTICA CALIFICADA Nº 3

CICLO 2006 – I

1. Graficamos sus diagramas de fuerza cortante y momento flector:



Luego:

$$\sigma_{\text{máx}} \leq [\sigma] \quad \Rightarrow \quad \frac{M_{\text{máx}}}{I_z} y_{\text{máx}} \leq [\sigma] \quad \therefore \quad \frac{9,3 \cdot 10^3 \cdot 10^2}{b(2b)^3 / 12} (b) \leq 100$$

De donde:

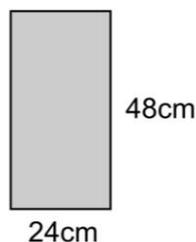
$$b \geq 24\text{cm}$$

Asumimos:

$$b = 24\text{cm}$$

$$h = 2b = 48\text{cm}$$

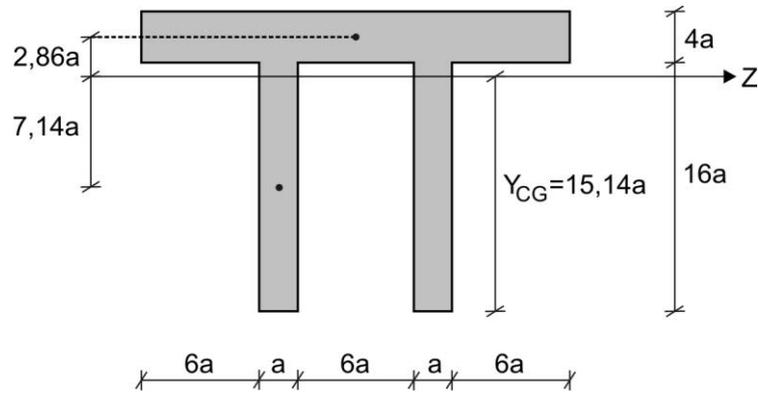
Quedando la sección transversal la mostrada en la figura:



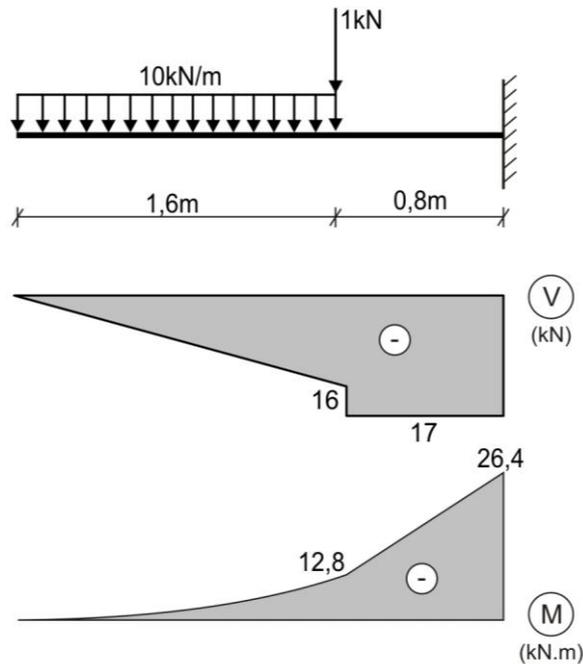
2. Determinamos la ubicación del centro de gravedad y calculamos su momento de inercia respecto al eje neutro.

$$Y_{\text{CG}} = \frac{(a)(16a)(8a) \cdot 2 + (20a)(4a)(18a)}{(a)(16a) \cdot 2 + (20a)(4a)} = 15,14a$$

$$I_z = \left[\frac{(a)(16a)^3}{12} + (a)(16a)(7,14a)^2 \right] \cdot 2 + \frac{(20a)(4a)^3}{12} + (20a)(4a)(2,86a)^2 = 3075,05a^4$$



Graficamos los diagramas de fuerza cortante y momento flector:



Determinamos la posición racional de la viga, utilizando momentos y áreas:

a) Momento flector máximo: $M_{\text{máx}} = -26,4 \text{ kN.m}$, implica que la zona superior al eje neutro es de tracción y la zona inferior de compresión.

b) Áreas de la sección transversal:

$$A_Z^{\text{sup}} = (20a)(4a) + 2(0,86a)(a) = 81,72a^2 \text{ (TRACCION)}$$

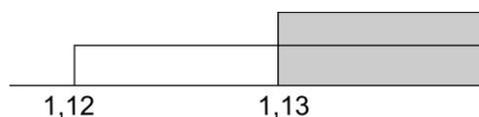
$$A_Z^{\text{inf}} = 2(a)(15,14a) = 30,28a^2 \text{ (COMPRESION)}$$

Como coincide la ubicación de las zonas de tracción y de compresión, tanto por momento flector, como por áreas, se concluye que dicha posición es la racional.

Aplicamos la condición de resistencia para cada zona:

$$\sigma_{\text{máx}}^{\text{tr}} = \frac{26,4 \cdot 10^3}{3075,05a^4} \cdot 4,86a \leq 30 \cdot 10^6 \quad \Rightarrow \quad a \geq 1,12 \cdot 10^{-2} \text{ m} \quad \therefore \quad a \geq 1,12 \text{ cm}$$

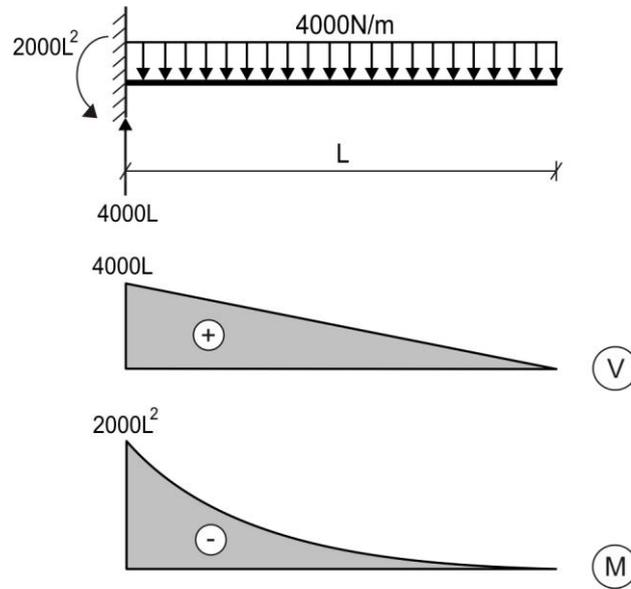
$$\sigma_{\text{máx}}^{\text{comp}} = \frac{26,4 \cdot 10^3}{3075,05a^4} \cdot 15,14a \leq 90 \cdot 10^6 \quad \Rightarrow \quad a \geq 1,13 \cdot 10^{-2} \text{ m} \quad \therefore \quad a \geq 1,13 \text{ cm}$$



Asumimos:

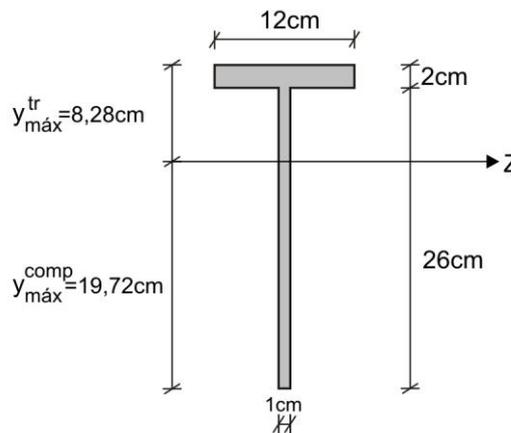
$$a_{\text{mín}} = 1,13\text{cm}$$

3. Graficamos los diagramas de fuerza cortante y momento flector:



Determinamos la ubicación del eje neutro:

$$Y_{\text{CG}} = \frac{1.26.13 + 12.2.27}{1.26 + 12.2} = 19,72\text{cm}$$



Determinamos la posición racional de la viga, utilizando momentos y áreas:

a) Momento flector máximo: $M_{\text{máx}} = -2000L^2$, implica que la zona superior al eje neutro es de tracción y la zona inferior de compresión.

b) Áreas de la sección transversal:

$$A_Z^{\text{sup}} = 12.2 + 1.6,28 = 30,28\text{cm}^2 \text{ (TRACCION)}$$

$$A_Z^{\text{inf}} = 1.19,72 = 19,72\text{cm}^2 \text{ (COMPRESION)}$$

Como coincide la ubicación de las zonas de tracción y de compresión, tanto por momento flector, como por áreas, se concluye que dicha posición es la racional.

Luego:

$$\sigma_{\text{máx}}^{\text{tr}} = \frac{M_{\text{máx}}}{I_Z} y_{\text{máx}}^{\text{tr}} \leq [\sigma]_{\text{tr}} \quad \Rightarrow \quad \frac{2000L^2}{3918,75.10^{-8}} . 8,28.10^{-2} \leq 40.10^6$$

$$L \leq 3,077\text{m}$$

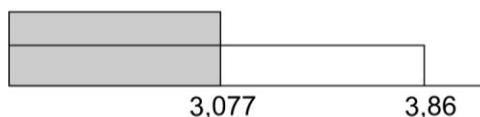
Donde:

$$I_Z = \frac{12.2^3}{12} + 12.2.7,28^2 + \frac{1.26^3}{12} + 1.26.6,72^2 = 3918,75\text{cm}^4$$

Ahora, analizamos el efecto de compresión:

$$\sigma_{\text{máx}}^{\text{comp}} = \frac{M_{\text{máx}}}{I_Z} y_{\text{máx}}^{\text{comp}} \leq [\sigma]_{\text{comp}} \Rightarrow \frac{2000L^2}{3918,75 \cdot 10^{-8}} \cdot 19,72 \cdot 10^{-2} \leq 150 \cdot 10^6$$

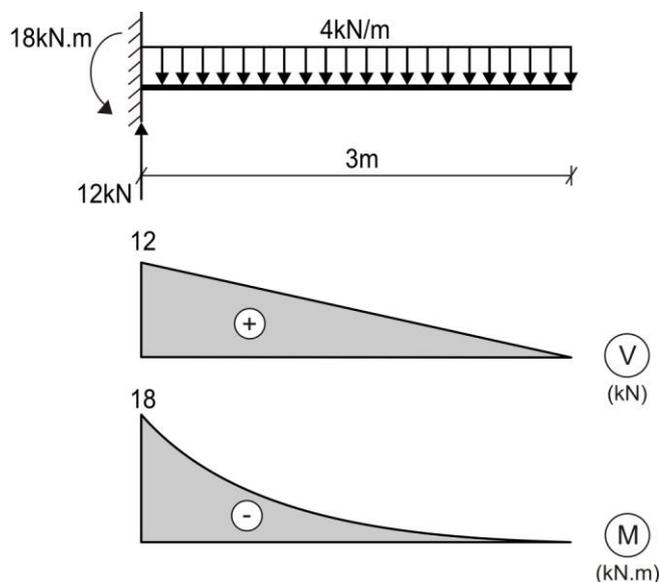
$$L \leq 3,86\text{m}$$



Asumimos:

$$L = 3\text{m}$$

Ahora, graficamos el diagrama final:



Graficamos el diagrama de esfuerzos tangenciales para la sección transversal.

$$\tau_A = 0$$

$$\tau_B = \frac{V_{\text{máx}} S_Z^B}{I_Z b_B} = \frac{12 \cdot 10^3 \cdot 174,72 \cdot 10^{-6}}{3918,75 \cdot 10^{-8} \cdot 12 \cdot 10^{-2}} = 0,45\text{MPa}$$

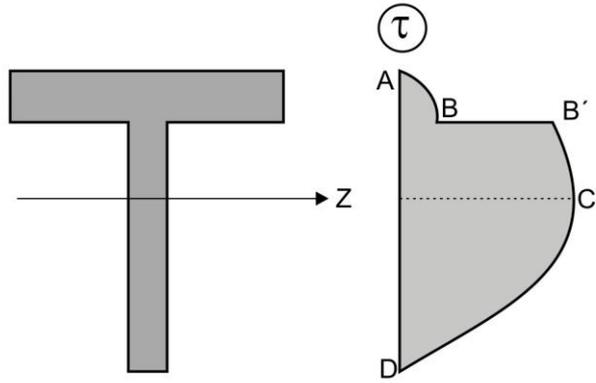
$$S_Z^B = 12.2.7,28 = 174,72\text{cm}^3$$

$$\tau_{B'} = \frac{V_{\text{máx}} S_Z^{B'}}{I_Z b_{B'}} = \frac{12 \cdot 10^3 \cdot 174,72 \cdot 10^{-6}}{3918,75 \cdot 10^{-8} \cdot 1 \cdot 10^{-2}} = 5,35\text{MPa}$$

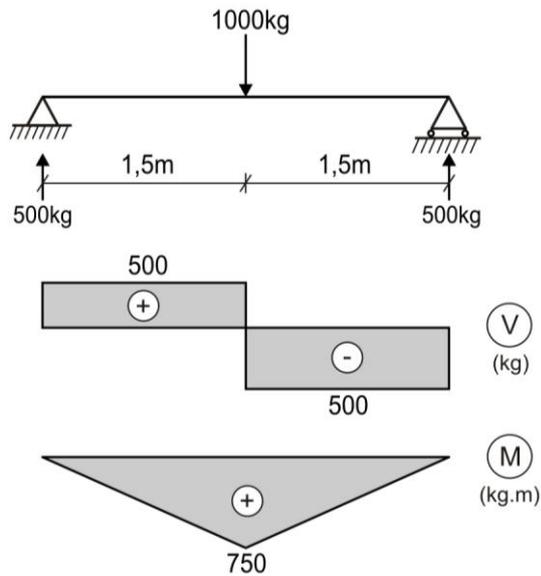
$$\tau_{\text{máx}} = \tau_C = \frac{V_{\text{máx}} S_Z^C}{I_Z b_C} = \frac{12 \cdot 10^3 \cdot 194,44 \cdot 10^{-6}}{3918,75 \cdot 10^{-8} \cdot 1 \cdot 10^{-2}} = 5,95\text{MPa}$$

$$S_Z^C = 174,72 + 1.6,28.3,14 = 194,44\text{cm}^3$$

$$\tau_D = 0$$



4. Graficamos los diagramas de fuerza cortante y momento flector:

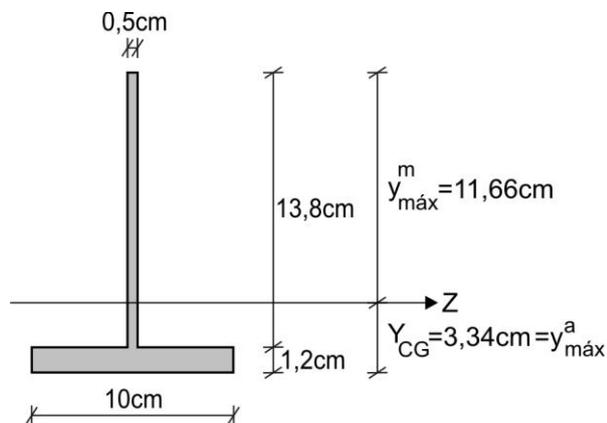


Transformamos la madera en acero:

$$b'_a = \frac{E_m}{E_a} b_m = \frac{1}{20} \cdot 10 = 0,5\text{cm}$$

Determinamos la ubicación del eje neutro:

$$Y_{CG} = \frac{10 \cdot 1,2 \cdot 0,6 + 0,5 \cdot 13,8 \cdot 8,1}{10 \cdot 1,2 + 0,5 \cdot 13,8} = 3,34\text{cm}$$



Calculamos el momento de inercia respecto al eje neutro:

$$I_z = \frac{10 \cdot 1,2^3}{12} + 10 \cdot 1,2 \cdot 2,74^2 + \frac{0,5 \cdot 13,8^3}{12} + 0,5 \cdot 13,8 \cdot 4,76^2 = 357,37\text{cm}^4$$

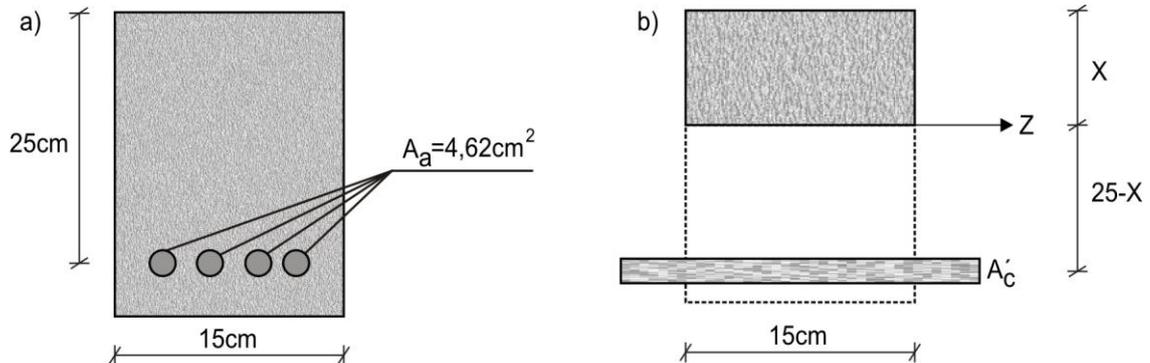
Determinamos los esfuerzos normales máximos en el acero y la madera:

$$\sigma_{\text{máx}}^a = \frac{M_{\text{máx}}}{I_z} y_{\text{máx}}^a = \frac{750 \cdot 10^2}{357,37} \cdot 3,34 = 700,95 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_{\text{máx}}^m = \frac{E_m}{E_a} \left(\frac{M_{\text{máx}}}{I_z} y_{\text{máx}}^m \right) = \frac{1}{20} \left(\frac{750 \cdot 10^2}{357,37} \cdot 11,66 \right) = 122,35 \text{ kg/cm}^2$$

5. Transformamos el acero en concreto:

$$A_c' = nA_a = 15 \cdot 4,62 = 69,3 \text{ cm}^2$$



Se sabe que:

$$S_Z^{\text{sup}} = S_Z^{\text{inf}} \Rightarrow 15X \left(\frac{X}{2} \right) = 69,3(25 - X)$$

$$7,5X^2 + 69,3X - 1732,5 = 0$$

$$X = 11,26 \text{ cm}$$

Luego:

$$I_z = \frac{15 \cdot 11,26^3}{12} + 15 \cdot 11,26 \cdot 5,63^2 + 69,3 \cdot 13,74^2 = 20221,12 \text{ cm}^4$$

Analizamos los esfuerzos en el concreto y el acero, comparándolos con los valores admisibles.

CONCRETO:

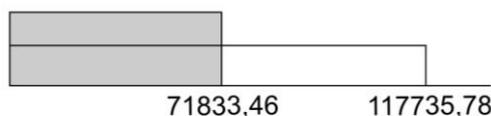
$$\sigma_{\text{máx}}^c = \frac{M_{\text{máx}}}{I_z} y_{\text{máx}}^c \leq [\sigma]_c \Rightarrow \frac{M_{\text{máx}}}{20221,12} \cdot 11,26 \leq 40$$

$$M_{\text{máx}} \leq 71833,46 \text{ kg.cm}$$

ACERO:

$$\sigma_{\text{máx}}^a = \frac{E_a}{E_c} \left(\frac{M_{\text{máx}}}{I_z} y_{\text{máx}}^a \right) \leq [\sigma]_a \Rightarrow 15 \cdot \frac{M_{\text{máx}}}{20221,12} \cdot 13,74 \leq 1200$$

$$M_{\text{máx}} \leq 117735,78 \text{ kg.cm}$$



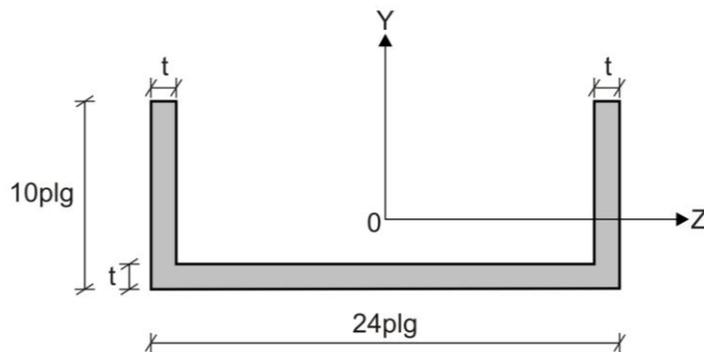
Asumimos:

$$M_{\text{máx}} = 71833,46 \text{ kg.cm} = 718,33 \text{ kg.m}$$

EVALUACIÓN	PRACTICA CALIFICADA N° 3	SEM. ACADÉMICO	2006 – II
CURSO	RESISTENCIA DE MATERIALES I	SECCIÓN	26E
PROFESOR	Ph.D. GENNER VILLARREAL CASTRO	DURACIÓN	110m
ESCUELA	INGENIERIA CIVIL	CICLO	V

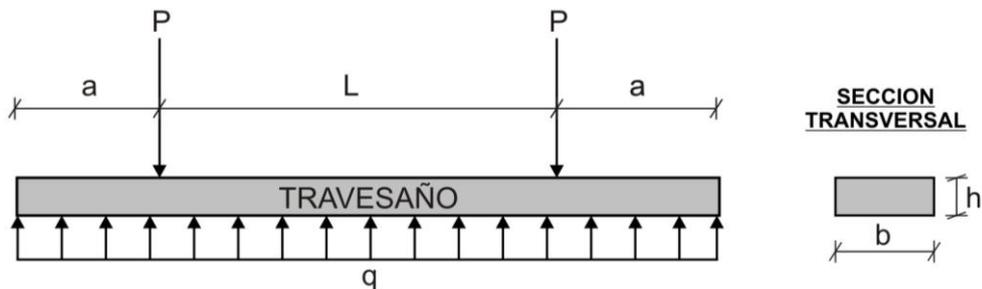
1. Una viga que tiene una sección transversal en forma de canal se somete a un momento flector que actúa respecto al eje OZ. Calcular el espesor "t" del canal a fin de que los esfuerzos por flexión en las partes superior e inferior de la viga estén en la relación 7:3

..... (3 puntos)



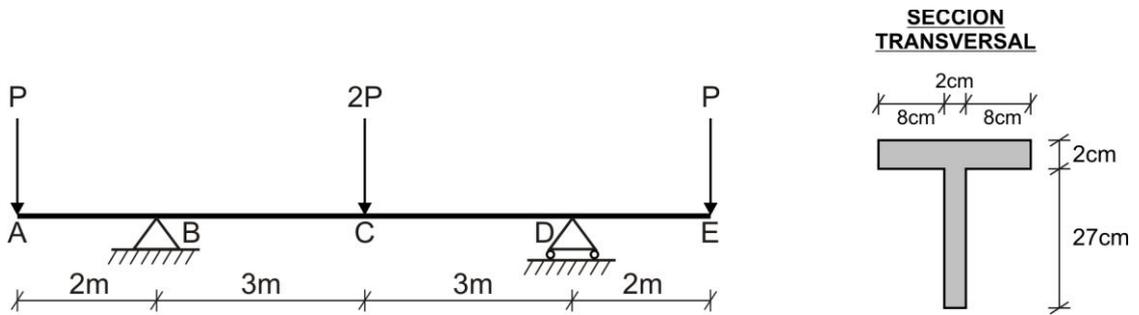
2. Un travesaño o durmiente de vía de ferrocarril está sometido a dos cargas concentradas $P = 50000\text{lb}$ y actúa como se muestra en la figura. La reacción "q" del balasto o cascajo puede suponerse uniformemente distribuida sobre la longitud del travesaño, el cual tiene dimensiones de sección transversal $b = 12\text{plg}$ y $h = 10\text{plg}$. Calcular el esfuerzo de flexión máximo $\sigma_{\text{máx}}$ en el durmiente, si se supone que $L = 57\text{plg}$ y $a = 19,5\text{plg}$

..... (3 puntos)



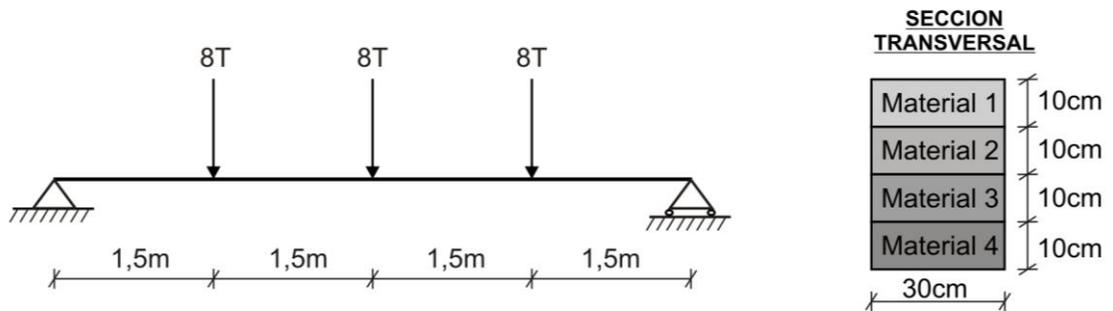
3. La viga mostrada, tiene la sección transversal indicada y se encuentra sujeta a las cargas concentradas señaladas. Considerando que el material del que está fabricada la viga no puede soportar esfuerzos normales mayores a 1200kg/cm^2 , ni esfuerzos tangenciales mayores a 60kg/cm^2 , calcular el máximo valor de la carga "P", expresada en toneladas, que puede aplicarse sobre dicho sistema y graficar el diagrama de esfuerzos tangenciales para la sección transversal.

..... (5 puntos)



4. Una viga compuesta por cuatro materiales ($E_1 = 150000 \text{kg/cm}^2$, $E_2 = 175000 \text{kg/cm}^2$, $E_3 = 250000 \text{kg/cm}^2$, $E_4 = 300000 \text{kg/cm}^2$), está sometida a las cargas mostradas en la figura. Determinar los esfuerzos normales máximos que se producen en cada material.

..... (5 puntos)



5. En una viga de concreto armado, $b = 38 \text{cm}$, $d = 70 \text{cm}$ y el área total de las varillas de acero es $19,48 \text{cm}^2$. Considerar $n = 20$, $[\sigma]_c = 31,5 \text{kg/cm}^2$, $[\sigma]_a = 875 \text{kg/cm}^2$. Determinar el momento flector máximo que puede soportar la viga. Considerar "d" la distancia desde el eje de las varillas de acero hasta la cara superior de la viga.

..... (4 puntos)

FECHA	La Molina, 23 de Octubre del 2006
--------------	-----------------------------------

SOLUCIONARIO DE PRÁCTICA CALIFICADA Nº 3

CICLO 2006 – II

1. Por dato del problema:

$$\frac{\sigma_{\text{sup}}}{\sigma_{\text{inf}}} = \frac{7}{3}$$

Además, se sabe que:

$$\sigma_{\text{sup}} = \frac{M}{I_z} y_{\text{sup}} \quad \dots\dots\dots (a)$$

$$\sigma_{\text{inf}} = \frac{M}{I_z} y_{\text{inf}} \quad \dots\dots\dots (b)$$

Dividimos (a) entre (b) y obtenemos:

$$\frac{y_{\text{sup}}}{y_{\text{inf}}} = \frac{7}{3}$$

Del gráfico del problema:

$$y_{\text{sup}} + y_{\text{inf}} = 10$$

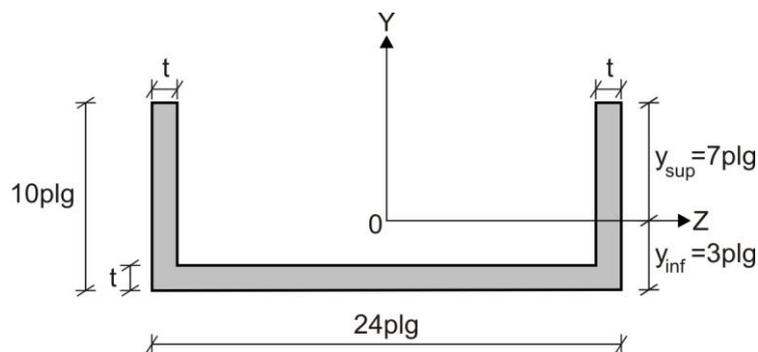
$$\frac{7}{3} y_{\text{inf}} + y_{\text{inf}} = 10$$

De donde:

$$y_{\text{inf}} = 3plg$$

$$y_{\text{sup}} = 7plg$$

De esta manera, la sección transversal quedará tal como se muestra en la siguiente figura:



Luego:

$$S_z^{\text{sup}} = S_z^{\text{inf}}$$

$$7.t..3,5.2 = 24t(3 - 0,5t) + t \cdot \frac{(3-t)^2}{2} \cdot 2$$

$$t^3 - 18t^2 + 32t = 0$$

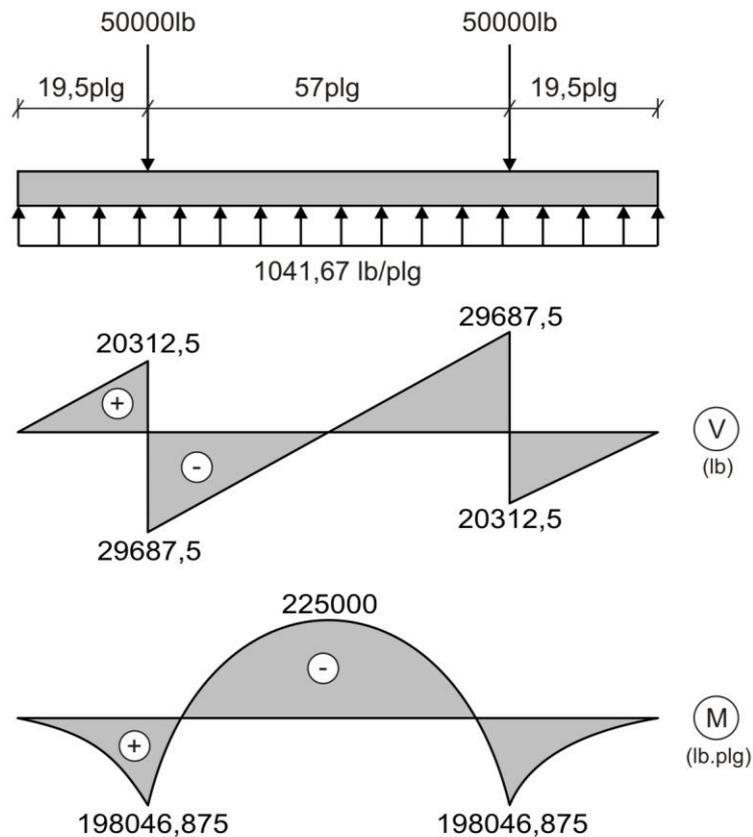
De esta ecuación se obtienen tres soluciones, siendo dos de ellas irreales y la tercera la correcta, cuyo valor es:

$$t = 2plg$$

2. Analizamos el equilibrio de la estructura:

$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad q(57 + 2 \cdot 19,5) = 2(50000) \quad \therefore \quad q = 1041,67 \text{ lb/plg}$$

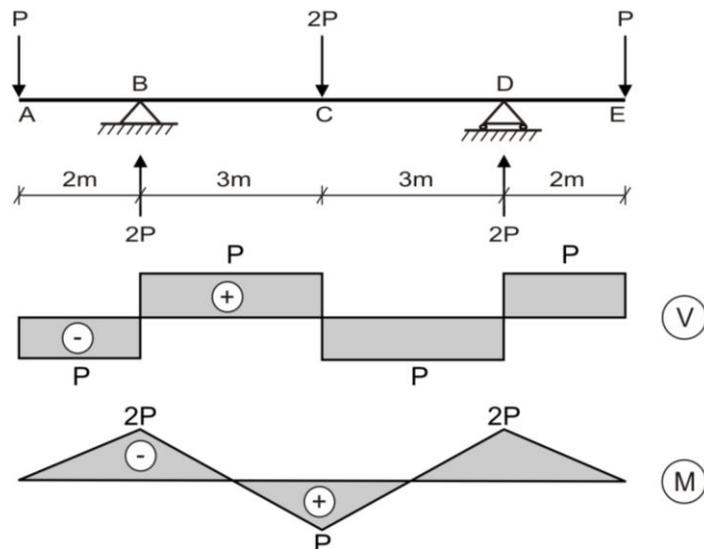
Graficamos los diagramas correspondientes:



Determinamos el esfuerzo normal máximo:

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{M_{\text{máx}}}{I_z} y_{\text{máx}} = \frac{225000}{12 \cdot 10^3 / 12} \cdot 5 = 1125 \text{ psi}$$

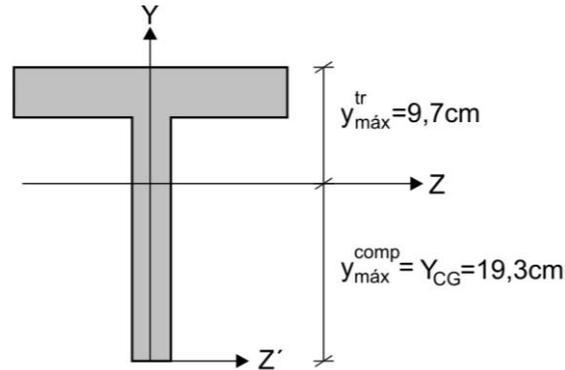
3. Graficamos los diagramas de fuerza cortante y momento flector.



Determinamos la ubicación del centro de gravedad y calculamos el momento de inercia respecto al eje neutro.

$$Y_{\text{CG}} = \frac{27 \cdot 2 \cdot 13,5 + 18 \cdot 2 \cdot 28}{27 \cdot 2 + 18 \cdot 2} = 19,3 \text{ cm}$$

$$I_z = \frac{2.27^3}{12} + 2.27 \cdot 5,8^2 + \frac{18.2^3}{12} + 18.2 \cdot 8,7^2 = 7833,9 \text{cm}^4$$



Determinamos la posición racional de la viga, utilizando momentos y áreas:

a) Momento flector máximo: $M_{\text{máx}} = -2P$, implica que la zona superior al eje neutro es de tracción y la zona inferior de compresión.

b) Áreas de la sección transversal:

$$A_z^{\text{sup}} = 18.2 + 7,7.2 = 51,4 \text{cm}^2 \text{ (TRACCION)}$$

$$A_z^{\text{inf}} = 2.19,3 = 38,6 \text{cm}^2 \text{ (COMPRESION)}$$

Como coincide la ubicación de las zonas de tracción y de compresión, tanto por momento flector, como por áreas, se concluye que dicha posición es la racional.

Comprobamos las condiciones para esfuerzos normales en tracción y compresión, así como para el esfuerzo tangencial.

$$\sigma_{\text{máx}}^{\text{tr}} = \frac{M_{\text{máx}}}{I_z} y_{\text{máx}}^{\text{tr}} \leq [\sigma] \Rightarrow \frac{2P}{7833,9 \cdot 10^{-8}} \cdot (9,7 \cdot 10^{-2}) \leq 12000 \quad \therefore P \leq 4,846T$$

$$\sigma_{\text{máx}}^{\text{comp}} = \frac{M_{\text{máx}}}{I_z} y_{\text{máx}}^{\text{comp}} \leq [\sigma] \Rightarrow \frac{2P}{7833,9 \cdot 10^{-8}} \cdot (19,3 \cdot 10^{-2}) \leq 12000 \quad \therefore P \leq 2,435T$$

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{V_{\text{máx}} S_z^{\text{sup}}}{I_z b} \leq [\tau] \Rightarrow \frac{P \cdot 372,49 \cdot 10^{-6}}{7833,9 \cdot 10^{-8} \cdot 2 \cdot 10^{-2}} \leq 600 \quad \therefore P \leq 2,524T$$

$$S_z^{\text{sup}} = 18.2 \cdot 8,7 + 7,7.2 \cdot 3,85 = 372,49 \text{cm}^3$$

Analizamos el rango que cumple con las tres condiciones, obteniendo:



Asumimos:

$$P_{\text{máx}} = 2,435T$$

Con este valor determinamos los valores para graficar el diagrama de esfuerzos tangenciales.

$$\tau_A = 0$$

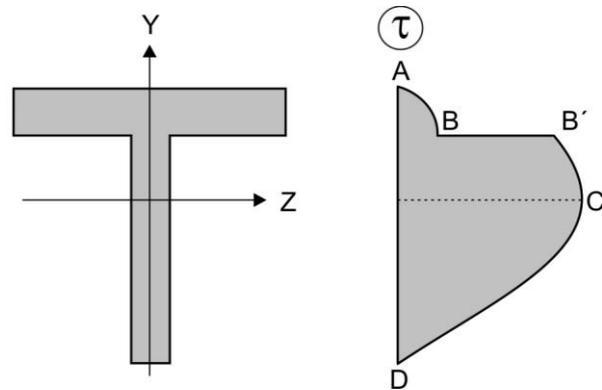
$$\tau_B = \frac{2,435 \cdot 313,2 \cdot 10^{-6}}{7833,9 \cdot 10^{-8} \cdot 18 \cdot 10^{-2}} = 54,08T / \text{m}^2$$

$$S_z^B = 18.2 \cdot 8,7 = 313,2 \text{cm}^3$$

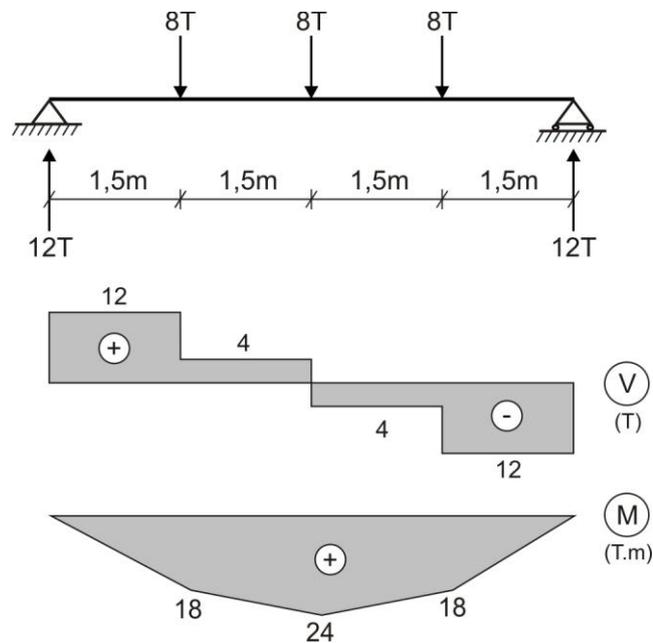
$$\tau_{B'} = \frac{2,435.313,2 \cdot 10^{-6}}{7833,9 \cdot 10^{-8} \cdot 2 \cdot 10^{-2}} = 486,76 \text{T/m}^2$$

$$\tau_{\text{máx}} = \tau_C = \frac{2,435.372,49 \cdot 10^{-6}}{7833,9 \cdot 10^{-8} \cdot 2 \cdot 10^{-2}} = 578,9 \text{T/m}^2$$

$$\tau_D = 0$$



4. Graficamos los diagramas de fuerza cortante y momento flector.



Ahora, transformamos todos los materiales al más rígido, calculando los anchos equivalentes de cada sección.

MATERIAL 1:

$$b_4' = \frac{E_1}{E_4} b_1 = \frac{150000}{300000} \cdot 30 = 15 \text{cm}$$

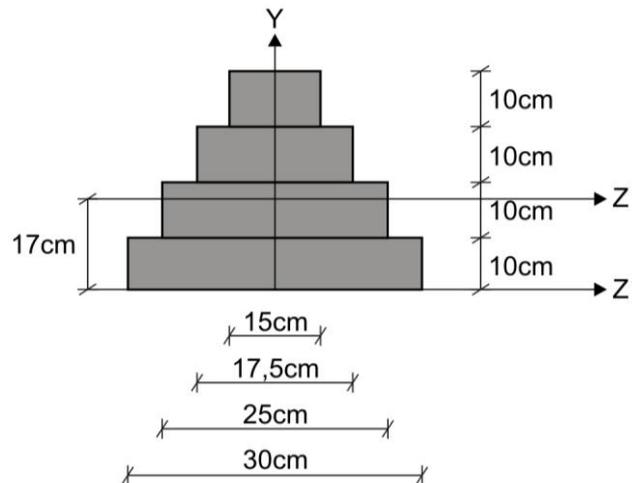
MATERIAL 2:

$$b_4' = \frac{E_2}{E_4} b_2 = \frac{175000}{300000} \cdot 30 = 17,5 \text{cm}$$

MATERIAL 3:

$$b_4' = \frac{E_3}{E_4} b_3 = \frac{250000}{300000} \cdot 30 = 25 \text{cm}$$

De esta manera, la sección transformada de la sección transversal de la viga será la mostrada en la figura.



Determinamos la ubicación del centro de gravedad y calculamos el momento de inercia respecto al eje neutro.

$$Y_{CG} = \frac{30 \cdot 10 \cdot 5 + 25 \cdot 10 \cdot 15 + 17,5 \cdot 10 \cdot 25 + 15 \cdot 10 \cdot 35}{300 + 250 + 175 + 150} = 17 \text{ cm}$$

$$I_Z = \frac{30 \cdot 10^3}{12} + 30 \cdot 10 \cdot 12^2 + \frac{25 \cdot 10^3}{12} + 25 \cdot 10 \cdot 2^2 + \frac{17,5 \cdot 10^3}{12} + 17,5 \cdot 10 \cdot 8^2 + \frac{15 \cdot 10^3}{12} + 15 \cdot 10 \cdot 18^2$$

$$I_Z = 111291,67 \text{ cm}^4$$

Calculamos los esfuerzos normales máximos para cada material.

MATERIAL 4:

$$\sigma_{m\acute{a}x}^4 = \frac{M_{m\acute{a}x}}{I_Z} y_{m\acute{a}x}^4 = \frac{24 \cdot 10^3 \cdot 10^2}{111291,67} \cdot 17 = 366,6 \text{ kg/cm}^2$$

MATERIAL 3:

$$\sigma_{m\acute{a}x}^3 = \left(\frac{E_3}{E_4} \right) \frac{M_{m\acute{a}x}}{I_Z} y_{m\acute{a}x}^3 = \left(\frac{250000}{300000} \right) \frac{24 \cdot 10^3 \cdot 10^2}{111291,67} \cdot 7 = 125,79 \text{ kg/cm}^2$$

MATERIAL 2:

$$\sigma_{m\acute{a}x}^2 = \left(\frac{E_2}{E_4} \right) \frac{M_{m\acute{a}x}}{I_Z} y_{m\acute{a}x}^2 = \left(\frac{175000}{300000} \right) \frac{24 \cdot 10^3 \cdot 10^2}{111291,67} \cdot 13 = 163,53 \text{ kg/cm}^2$$

MATERIAL 1:

$$\sigma_{m\acute{a}x}^1 = \left(\frac{E_1}{E_4} \right) \frac{M_{m\acute{a}x}}{I_Z} y_{m\acute{a}x}^1 = \left(\frac{150000}{300000} \right) \frac{24 \cdot 10^3 \cdot 10^2}{111291,67} \cdot 23 = 248 \text{ kg/cm}^2$$

5. Transformamos el área de acero en concreto.

$$A'_c = nA_a = 20 \cdot 19,48 = 389,6 \text{ cm}^2$$

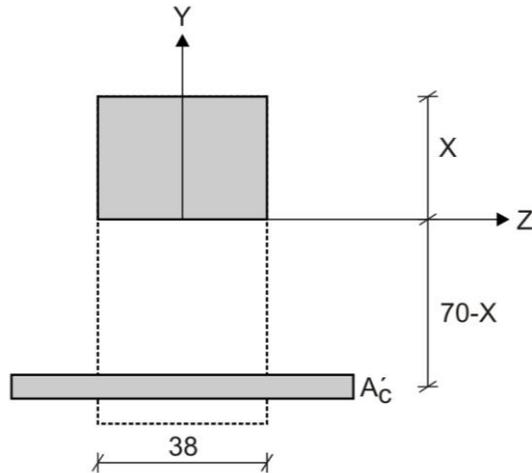
Determinamos la ubicación del eje neutro, utilizando el concepto de momento estático y de acuerdo a la figura mostrada, donde las medidas están en centímetros.

$$S_Z^{\text{sup}} = S_Z^{\text{inf}} \quad \Rightarrow \quad 38X \left(\frac{X}{2} \right) = 389,6(70 - X)$$

$$19X^2 + 389,6X - 27272 = 0$$

De donde:

$$X = 29\text{cm}$$



Calculamos el momento de inercia respecto al eje neutro.

$$I_Z = \frac{38 \cdot 29^3}{12} + 38 \cdot 29 \cdot 14,5^2 + 389,6 \cdot 41^2 = 963844,93\text{cm}^4$$

Aplicamos las condiciones de resistencia para el concreto y el acero.

CONCRETO:

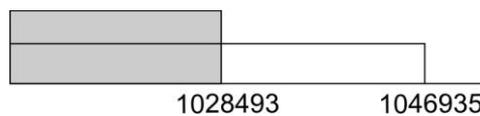
$$\sigma_{\text{máx}}^c = \frac{M_{\text{máx}}}{I_Z} y_{\text{máx}}^c \leq [\sigma]_c \quad \Rightarrow \quad \frac{M_{\text{máx}}}{963844,93} \cdot 29 \leq 31,5$$

$$M_{\text{máx}} \leq 1046935\text{kg.cm}$$

ACERO:

$$\sigma_{\text{máx}}^a = \left(\frac{E_a}{E_c} \right) \frac{M_{\text{máx}}}{I_Z} y_{\text{máx}}^a \leq [\sigma]_a \quad \Rightarrow \quad 20 \cdot \frac{M_{\text{máx}}}{963844,93} \cdot 41 \leq 875$$

$$M_{\text{máx}} \leq 1028493\text{kg.cm}$$



De donde:

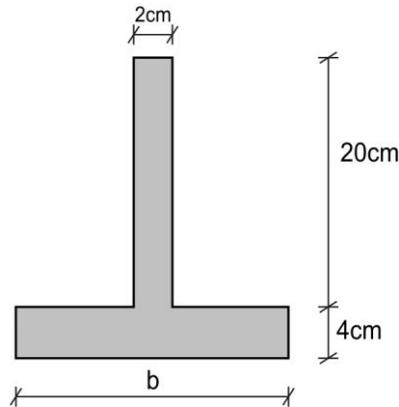
$$M_{\text{máx}} = 1028493\text{kg.cm} = 10284,93\text{kg.m}$$



EVALUACIÓN	PRACTICA CALIFICADA Nº 3	SEM. ACADÉMICO	2007 – I
CURSO	RESISTENCIA DE MATERIALES I	SECCIÓN	26E
PROFESOR	Ph.D. GENNER VILLARREAL CASTRO	DURACIÓN	110m
ESCUELA	INGENIERIA CIVIL	CICLO	V

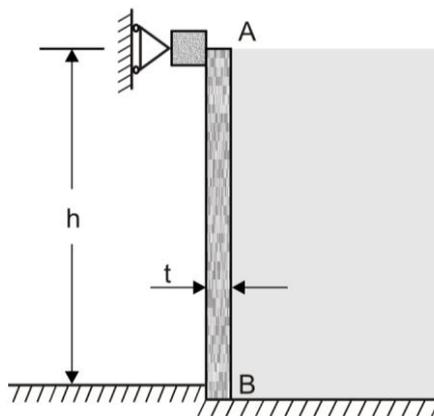
1. Determinar el valor de la dimensión “b” de la sección transversal de una viga sometida a flexión, si se cumple que $[\sigma]_{\text{comp}} = 3[\sigma]_{\text{tr}}$

..... (3 puntos)



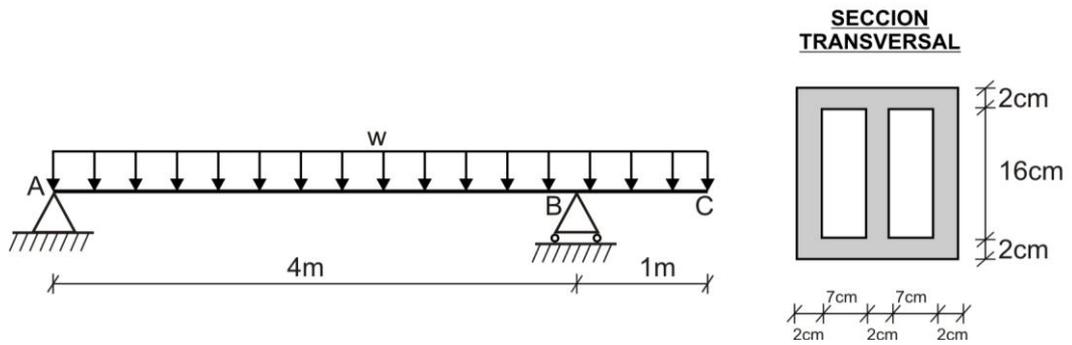
2. Una pequeña presa de altura $h = 2,4\text{m}$ se construye con vigas de madera verticales AB de espesor $t = 150\text{mm}$, como se muestra en la figura. Considerar que las vigas están simplemente apoyadas en sus partes superior e inferior. Determinar el esfuerzo por flexión máximo $\sigma_{\text{máx}}$ en las vigas, si el peso específico del agua es $\gamma = 9,81\text{kN/m}^3$

..... (3 puntos)



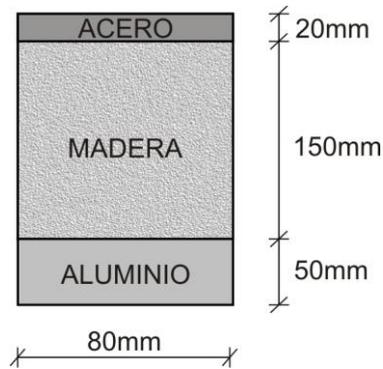
3. La viga mostrada en la figura está sometida a la acción de la carga distribuida “w” (kg/m). Calcular el valor máximo de “w”, si los esfuerzos admisibles son 140kg/cm^2 en tracción y compresión, 15kg/cm^2 en cortante. Graficar el diagrama de esfuerzos tangenciales para la sección transversal.

..... (5 puntos)



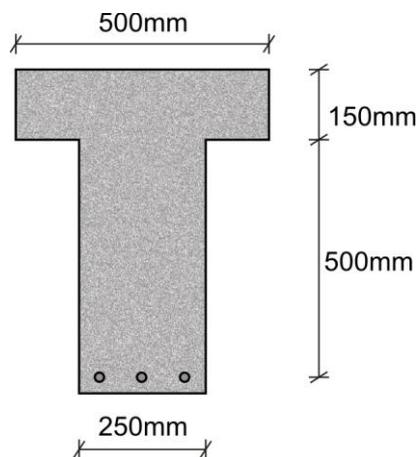
4. Una viga está compuesta de tres materiales, como se muestra en la figura. Las tres partes se hallan firmemente unidas entre si de manera que no existe posibilidad de deslizamiento entre ellas. Determinar el momento flector máximo que puede soportar si los esfuerzos admisibles son $[\sigma]_a = 120\text{MPa}$, $[\sigma]_{al} = 80\text{MPa}$, $[\sigma]_m = 10\text{MPa}$ y los módulos de elasticidad son $E_a = 200\text{GPa}$, $E_{al} = 70\text{GPa}$ y $E_m = 10\text{GPa}$

..... (5 puntos)



5. En la viga T de concreto armado, se tiene que el área de las varillas de acero es $A_a = 3000\text{mm}^2$ y la relación modular $n = 10$. Calcular los esfuerzos máximos en el concreto y en el acero, si el momento flector aplicado es 140kN.m

..... (4 puntos)



FECHA	La Molina, 21 de Mayo del 2007
-------	--------------------------------

SOLUCIONARIO DE PRÁCTICA CALIFICADA Nº 3

CICLO 2007 – I

1. Como sabemos que el eje neutro divide a la sección transversal en dos zonas, una de tracción y otra de compresión, tenemos que:

$$\frac{y_{\text{máx}}^{\text{tr}}}{y_{\text{máx}}^{\text{comp}}} = \frac{[\sigma]_{\text{tr}}}{[\sigma]_{\text{comp}}} \Rightarrow \frac{y_{\text{máx}}^{\text{tr}}}{y_{\text{máx}}^{\text{comp}}} = \frac{1}{3}$$

$$y_{\text{máx}}^{\text{comp}} = 3y_{\text{máx}}^{\text{tr}}$$

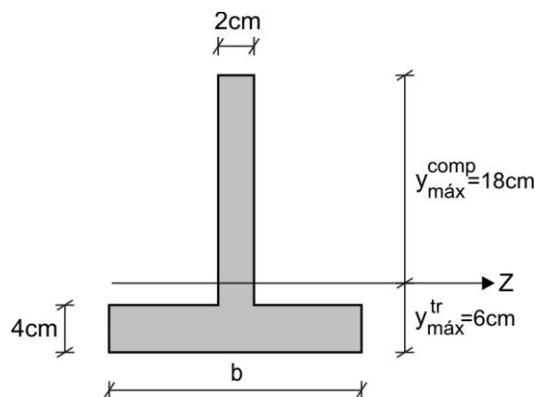
Asimismo:

$$y_{\text{máx}}^{\text{tr}} + y_{\text{máx}}^{\text{comp}} = 24$$

Reemplazamos datos y obtenemos:

$$y_{\text{máx}}^{\text{tr}} = 6\text{cm}$$

$$y_{\text{máx}}^{\text{comp}} = 18\text{cm}$$

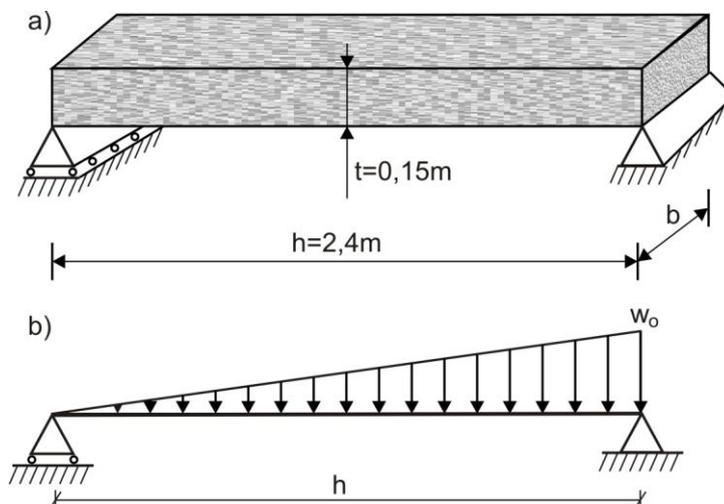


Determinamos el valor de “b”, a partir de la condición que el momento estático de la parte superior al eje neutro es igual al momento estático de la parte inferior.

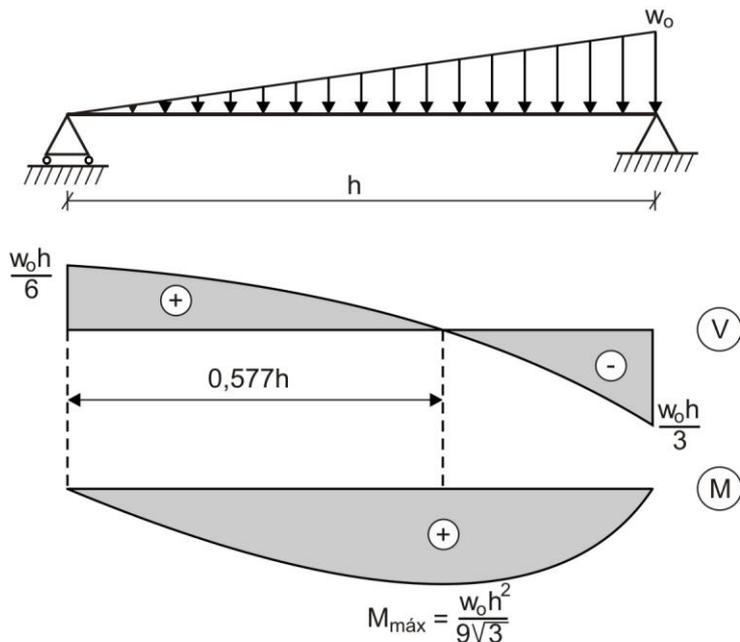
$$S_Z^{\text{sup}} = S_Z^{\text{inf}} \Rightarrow 2.18.9 = 2.2.1 + 4.(b).4$$

$$b = 20\text{cm}$$

2. Esquemmatizamos la viga y el efecto de cargas, siendo $w_o = \gamma hb$



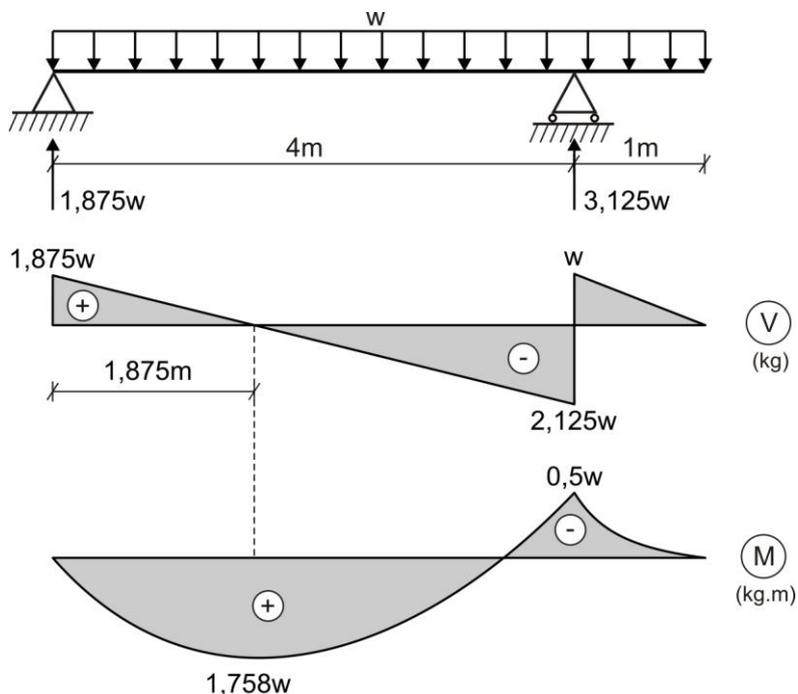
Graficamos los diagramas de fuerza cortante y momento flector:



Luego:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{I_z} y_{\max} = \frac{(w_0 h^2 / 9\sqrt{3})}{(bt^3 / 12)} (t/2) = \frac{2w_0 h^2}{3\sqrt{3}bt^2} = \frac{2(\gamma hb)h^2}{3\sqrt{3}bt^2} = \frac{2\gamma h^3}{3\sqrt{3}t^2} = \frac{2.9,81 \cdot 10^3 \cdot 2,4^3}{3\sqrt{3} \cdot 0,15^2} = 2,32 \text{MPa}$$

3. Graficamos los diagramas de fuerza cortante y momento flector:



Como la sección transversal es simétrica, calculamos su momento de inercia respecto al eje neutro, el cual pasa por el centro de la sección.

$$I_z = \frac{20 \cdot 20^3}{12} - 2 \left[\frac{7 \cdot 16^3}{12} \right] = 8554,67 \text{cm}^4$$

Aplicamos la condición de resistencia.

ESFUERZO NORMAL:

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{M_{\text{máx}}}{I_Z} y_{\text{máx}} \leq [\sigma] \Rightarrow \frac{1,758w}{8554,67 \cdot 10^{-8}} \cdot 10 \cdot 10^{-2} \leq 140 \cdot 10^4$$

$$w \leq 681,26 \text{ kg/m}$$

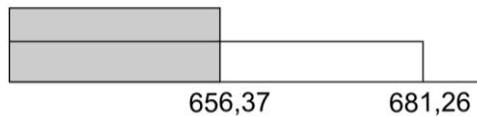
ESFUERZO TANGENCIAL:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{V_{\text{máx}} S_Z^{\text{sup}}}{I_Z b} \leq [\tau] \Rightarrow \frac{2,125w \cdot 552 \cdot 10^{-6}}{8554,67 \cdot 10^{-8} \cdot 6 \cdot 10^{-2}} \leq 15 \cdot 10^4$$

$$w \leq 656,37 \text{ kg/m}$$

Donde:

$$S_Z^{\text{sup}} = S_Z^{\text{C}} = 20 \cdot 10 \cdot 5 - 2 \cdot (7 \cdot 8 \cdot 4) = 552 \text{ cm}^3$$



Asumimos:

$$w_{\text{máx}} = 656,37 \text{ kg/m}$$

Graficamos el diagrama de esfuerzos tangenciales.

$$\tau_A = 0$$

$$\tau_B = \frac{1394,78 \cdot 360 \cdot 10^{-6}}{8554,67 \cdot 10^{-8} \cdot 20 \cdot 10^{-2}} = 2,93 \cdot 10^4 \text{ kg/m}^2 = 2,93 \text{ kg/cm}^2$$

$$V_{\text{máx}} = 2,125 \cdot 656,37 = 1394,78 \text{ kg}$$

$$S_Z^{\text{B}} = 20 \cdot 2,9 = 360 \text{ cm}^3$$

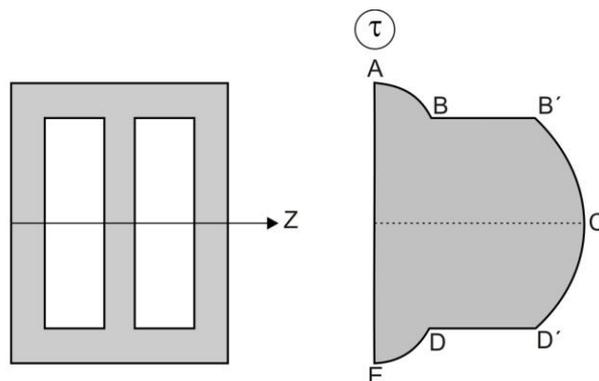
$$\tau_{\text{B}'} = \frac{1394,78 \cdot 360 \cdot 10^{-6}}{8554,67 \cdot 10^{-8} \cdot 6 \cdot 10^{-2}} = 9,78 \cdot 10^4 \text{ kg/m}^2 = 9,78 \text{ kg/cm}^2$$

$$\tau_{\text{máx}} = \tau_C = \frac{1394,78 \cdot 552 \cdot 10^{-6}}{8554,67 \cdot 10^{-8} \cdot 6 \cdot 10^{-2}} = 15 \cdot 10^4 \text{ kg/m}^2 = 15 \text{ kg/cm}^2$$

$$\tau_{\text{D}'} = \tau_{\text{B}'} = 9,78 \text{ kg/cm}^2$$

$$\tau_D = \tau_B = 2,93 \text{ kg/cm}^2$$

$$\tau_E = 0$$



4. Determinamos los anchos equivalentes de los materiales convertidos en acero.

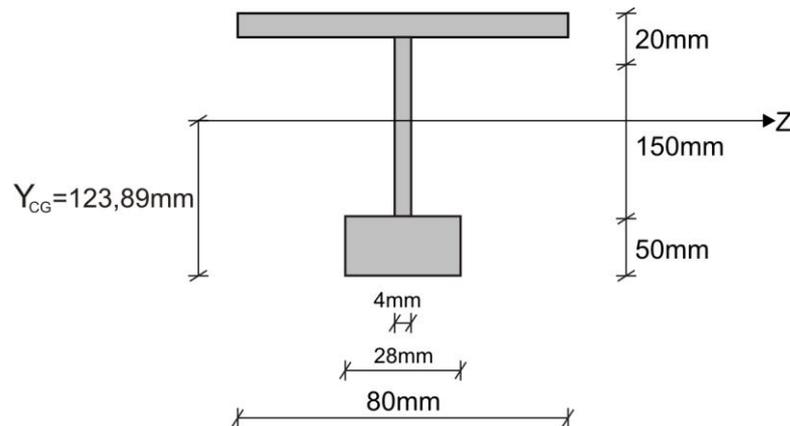
MADERA:

$$b'_a = \frac{E_m}{E_a} b_m = \frac{10 \cdot 10^9}{200 \cdot 10^9} \cdot 80 = 4 \text{ mm}$$

ALUMINIO:

$$b'_a = \frac{E_{al}}{E_a} b_{al} = \frac{70 \cdot 10^9}{200 \cdot 10^9} \cdot 80 = 28 \text{ mm}$$

De esta manera, la sección transformada de la viga es la mostrada en la figura:



Determinamos la ubicación de su centro de gravedad de la sección transformada y calculamos su momento de inercia respecto a dicho eje.

$$Y_{CG} = \frac{28 \cdot 50 \cdot 25 + 4 \cdot 150 \cdot 125 + 80 \cdot 20 \cdot 210}{28 \cdot 50 + 4 \cdot 150 + 80 \cdot 20} = 123,89 \text{ mm}$$

$$I_Z = \frac{28 \cdot 50^3}{12} + 28 \cdot 50 \cdot 98,89^2 + \frac{4 \cdot 150^3}{12} + 4 \cdot 150 \cdot 1,11^2 + \frac{80 \cdot 20^3}{12} + 80 \cdot 20 \cdot 86,11^2 = 27025555,56 \text{ mm}^4$$

Aplicamos la condición de resistencia para cada material.

ACERO:

$$\sigma_{m\acute{a}x}^a = \frac{M_{m\acute{a}x}}{I_Z} y_{m\acute{a}x}^a \leq [\sigma]_a \Rightarrow M_{m\acute{a}x} \leq \frac{120 \cdot 10^6 \cdot 27025555,56 \cdot 10^{-12}}{96,11 \cdot 10^{-3}}$$

$$M_{m\acute{a}x} \leq 33,74 \text{ kN.m}$$

MADERA:

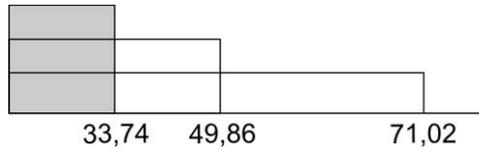
$$\sigma_{m\acute{a}x}^m = \left(\frac{E_m}{E_a} \right) \frac{M_{m\acute{a}x}}{I_Z} y_{m\acute{a}x}^m \leq [\sigma]_m \Rightarrow M_{m\acute{a}x} \leq \frac{10 \cdot 10^6 \cdot 27025555,56 \cdot 10^{-12} \left(\frac{200}{10} \right)}{76,11 \cdot 10^{-3}}$$

$$M_{m\acute{a}x} \leq 71,02 \text{ kN.m}$$

ALUMINIO:

$$\sigma_{m\acute{a}x}^{al} = \left(\frac{E_{al}}{E_a} \right) \frac{M_{m\acute{a}x}}{I_Z} y_{m\acute{a}x}^{al} \leq [\sigma]_{al} \Rightarrow M_{m\acute{a}x} \leq \frac{80 \cdot 10^6 \cdot 27025555,56 \cdot 10^{-12} \left(\frac{200}{70} \right)}{123,89 \cdot 10^{-3}}$$

$$M_{m\acute{a}x} \leq 49,86 \text{ kN.m}$$



Asumimos:

$$M_{\text{máx}} = 33,74 \text{ kN.m}$$

5. Calculamos el área del acero transformado en concreto.

$$A'_c = nA_a = 10 \cdot 3000 = 30000 \text{ mm}^2 = 300 \text{ cm}^2$$

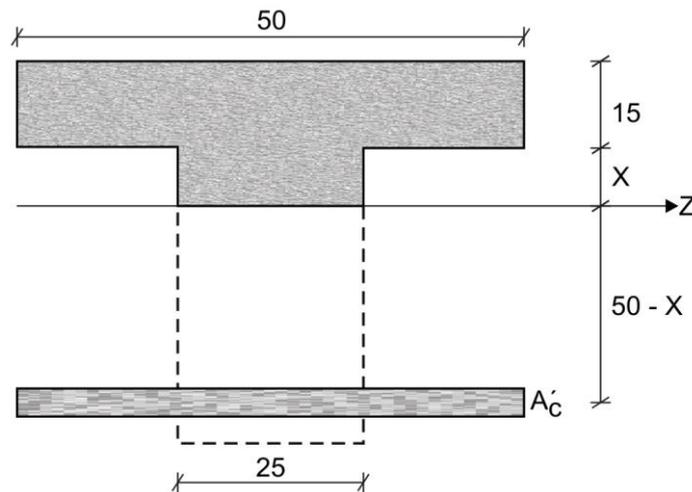
Determinamos la ubicación del eje neutro, a través del momento estático.

$$S_Z^{\text{sup}} = S_Z^{\text{inf}} \Rightarrow 50 \cdot 15 \cdot (7,5 + X) + 25X \left(\frac{X}{2} \right) = 300 \cdot (50 - X)$$

$$12,5X^2 + 1050X - 9375 = 0$$

De donde:

$$X = 8,14 \text{ cm}$$



Determinamos el momento de inercia respecto al eje neutro:

$$I_Z = \frac{50 \cdot 15^3}{12} + 50 \cdot 15 \cdot 15,64^2 + \frac{25 \cdot 8,14^3}{12} + 25 \cdot 8,14 \cdot 4,07^2 + 300 \cdot 41,86^2 = 727692,19 \text{ cm}^4$$

Calculamos los esfuerzos máximos para ambos materiales.

CONCRETO:

$$\sigma_{\text{máx}}^c = \frac{M_{\text{máx}}}{I_Z} y_{\text{máx}}^c = \frac{140 \cdot 10^3}{727692,19 \cdot 10^{-8}} \cdot 23,14 \cdot 10^{-2} = 4,45 \text{ MPa}$$

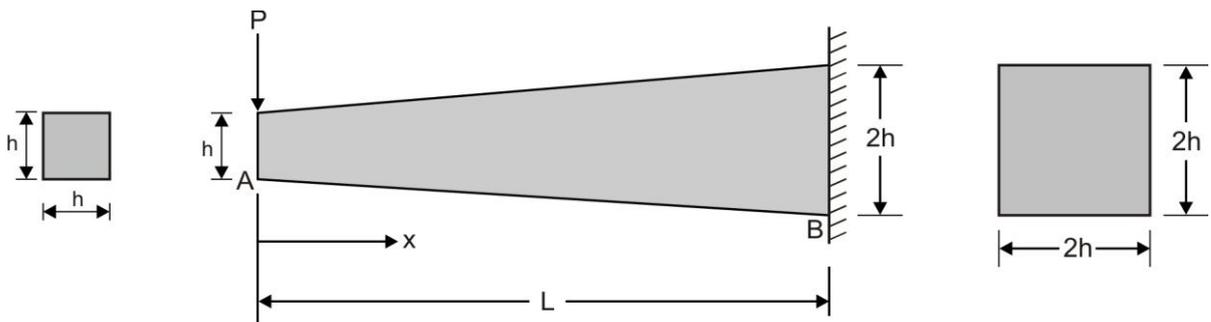
ACERO:

$$\sigma_{\text{máx}}^a = n \left(\frac{M_{\text{máx}}}{I_Z} y_{\text{máx}}^a \right) = 10 \cdot \left(\frac{140 \cdot 10^3}{727692,19 \cdot 10^{-8}} \cdot 41,86 \cdot 10^{-2} \right) = 80,53 \text{ MPa}$$

EVALUACIÓN	PRACTICA CALIFICADA N° 3	SEM. ACADÉMICO	2007 – II
CURSO	RESISTENCIA DE MATERIALES I	SECCIÓN	26E
PROFESOR	Ph.D. GENNER VILLARREAL CASTRO	DURACIÓN	110m
ESCUELA	INGENIERIA CIVIL	CICLO	V

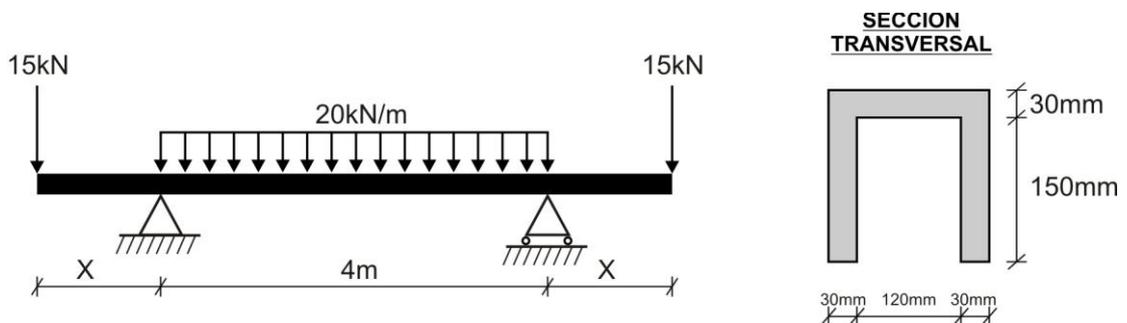
1. Una viga ahusada en voladizo AB de longitud L tiene secciones transversales cuadradas y soporta una carga concentrada P en su extremo libre, tal como se muestra en la figura. El ancho y la altura de la viga varían linealmente desde h en el extremo libre hasta 2h en el empotramiento. ¿Cuál es la distancia x desde el extremo libre a la sección de esfuerzo normal máximo debido a flexión? ¿Cuál es el esfuerzo normal máximo $\sigma_{\text{máx}}$? ¿Cuál es la relación de este esfuerzo al esfuerzo σ_B en el empotramiento?

..... (5 puntos)

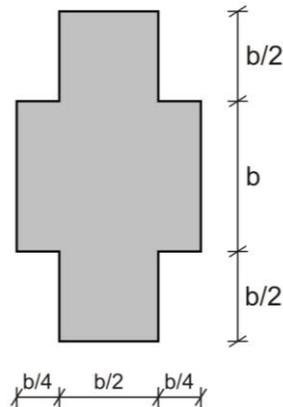


2. La viga de hierro fundido soporta las cargas mostradas en la figura. Si los esfuerzos admisibles son de 48MPa y 120MPa en tracción y compresión, respectivamente, determinar el valor máximo de la longitud del voladizo, sabiendo que la posición racional de la sección transversal de la viga es la mostrada en la figura.

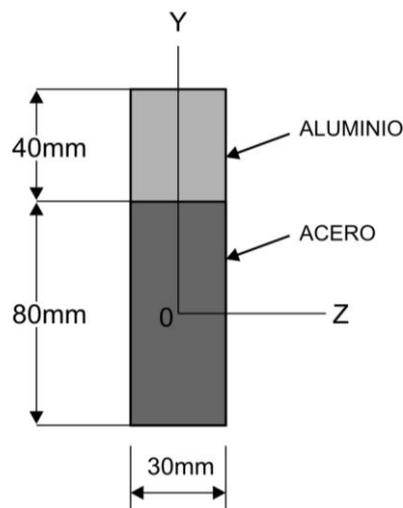
..... (5 puntos)



3. Graficar el diagrama de esfuerzos tangenciales en función del esfuerzo tangencial máximo $\tau_{\text{máx}} = \tau_o$
 (4 puntos)



4. La sección transversal de una viga compuesta hecha de aluminio y acero se muestra en la figura. Los módulos de elasticidad son $E_{\text{al}} = 70\text{GPa}$ y $E_{\text{a}} = 210\text{GPa}$. Bajo la acción de un momento flector que produce un esfuerzo máximo de 60MPa en el aluminio, ¿cuál es el esfuerzo máximo en el acero?
 (3 puntos)



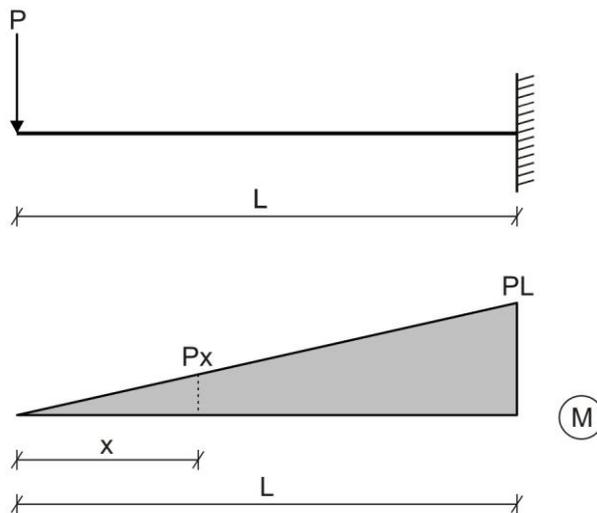
5. Calcular los esfuerzos máximos en el concreto y en el acero en una viga de concreto armado en la que $b = 300\text{mm}$, $d = 500\text{mm}$, $A_a = 1200\text{mm}^2$ y $n = 8$, si el momento flector es 70kN.m . Considerar "d" la distancia desde el eje de las varillas de acero hasta la cara superior de la viga.
 (3 puntos)

FECHA	La Molina, 22 de Octubre del 2007
-------	-----------------------------------

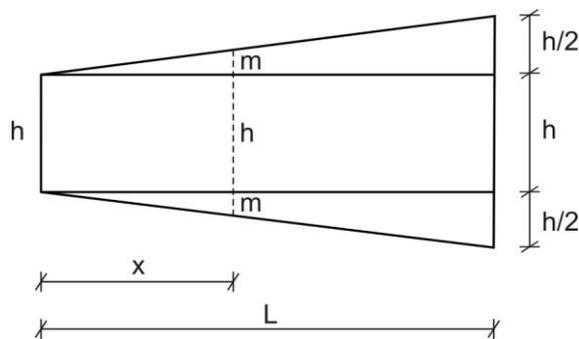
SOLUCIONARIO DE PRÁCTICA CALIFICADA Nº 3

CICLO 2007 – II

1. Graficamos el diagrama de momento flector:



Analizamos la variación de la sección transversal:



$$\frac{m}{x} = \frac{h/2}{L} \quad \Rightarrow \quad m = \frac{hx}{2L}$$

Luego:

$$h_x = h + 2m = h + 2\left(\frac{hx}{2L}\right) = h\left(1 + \frac{x}{L}\right)$$

Calculamos el momento de inercia a una longitud "x", siendo:

$$I_z^{(x)} = \frac{[h(1+x/L)][h(1+x/L)]^3}{12} = \frac{h^4(1+x/L)^4}{12}$$

En consecuencia, se tendrá:

$$y_{(x)} = \frac{h}{2}\left(1 + \frac{x}{L}\right)$$

$$\sigma_{(x)} = \frac{M_x}{I_z^{(x)}} y_{(x)} = \frac{12Px}{h^4(1+x/L)^4} \left[\frac{h}{2}\left(1 + \frac{x}{L}\right) \right] = \frac{6Px}{h^3(1+x/L)^3}$$

El esfuerzo normal máximo se obtendrá al derivar $\frac{d\sigma_{(x)}}{dx} = 0$

En consecuencia:

$$\frac{d\sigma_{(x)}}{dx} = \frac{6Ph^3(1+x/L)^3 - 3h^3(1+x/L)^2(1/L)6Px}{h^6(1+x/L)^6} = 0$$

De donde:

$$x = L/2$$

De esta manera:

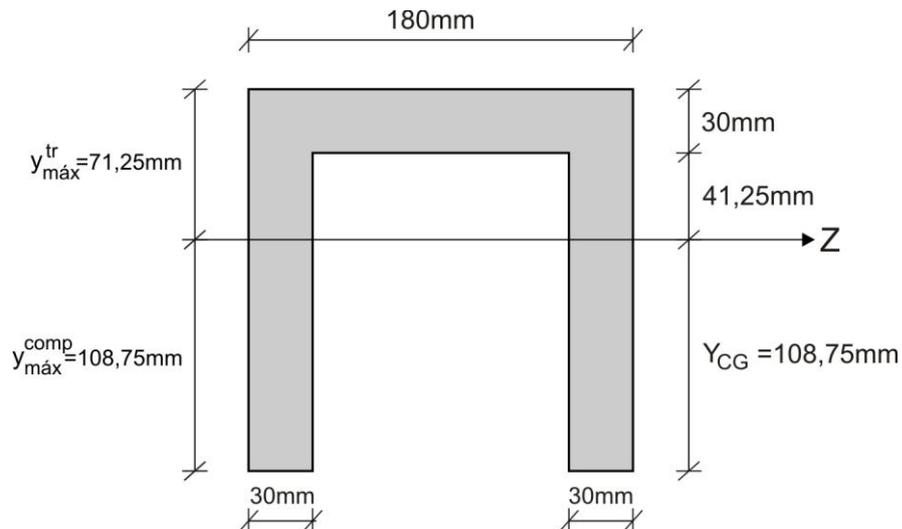
$$\sigma_{\text{máx}} = \sigma_{x=L/2} = \frac{6P\left(\frac{L}{2}\right)}{h^3\left(1+\frac{L/2}{L}\right)^3} = \frac{8PL}{9h^3}$$

$$\sigma_B = \sigma_{x=L} = \frac{6PL}{h^3(1+L/L)^3} = \frac{3PL}{4h^3}$$

Luego:

$$\frac{\sigma_{\text{máx}}}{\sigma_B} = \frac{8PL/9h^3}{3PL/4h^3} = \frac{32}{27}$$

2. Determinamos las características geométricas de la sección transversal de la viga.



$$Y_{CG} = \frac{2 \cdot 30 \cdot 150 \cdot 75 + 180 \cdot 30 \cdot 165}{2 \cdot 30 \cdot 150 + 180 \cdot 30} = 108,75 \text{ mm}$$

Comprobamos las áreas de las zonas, para conocer la zona de tracción y de compresión, y como se trata de hierro fundido el área mayor será de tracción.

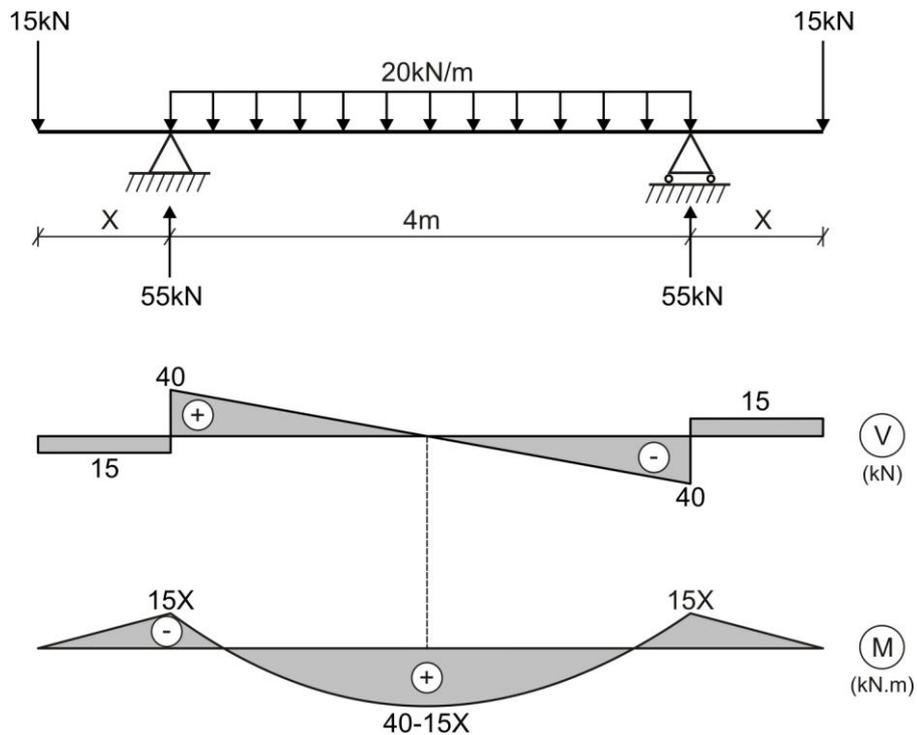
$$A_Z^{\text{sup}} = 180 \cdot 30 + 2 \cdot 30 \cdot 41,25 = 7875 \text{ mm}^2 \text{ (TRACCION)}$$

$$A_Z^{\text{inf}} = 2 \cdot 30 \cdot 108,75 = 6525 \text{ mm}^2 \text{ (COMPRESION)}$$

Calculamos el momento de inercia respecto al eje neutro.

$$I_Z = \frac{180 \cdot 30^3}{12} + 180 \cdot 30 \cdot 56,25^2 + 2 \cdot \left[\frac{30 \cdot 150^3}{12} + 30 \cdot 150 \cdot 33,75^2 \right] = 44617500 \text{ mm}^4$$

Graficamos los diagramas de fuerza cortante y momento flector.



Por condición del problema, nos indica que la posición de la viga es la correcta, significa que por momento flector máximo será negativo e igual a \$15X\$

Aplicamos la condición de resistencia:

TRACCION:

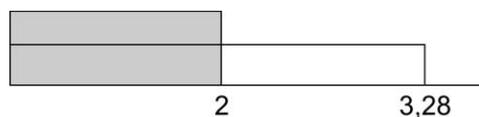
$$\sigma_{\text{máx}}^{\text{tr}} = \frac{M_{\text{máx}}}{I_z} y_{\text{máx}}^{\text{tr}} \leq [\sigma]_{\text{tr}} \quad \Rightarrow \quad \frac{15X}{44617500 \cdot 10^{-12}} \cdot 71,25 \cdot 10^{-3} \leq 48 \cdot 10^3$$

$$X \leq 2m$$

COMPRESION:

$$\sigma_{\text{máx}}^{\text{comp}} = \frac{M_{\text{máx}}}{I_z} y_{\text{máx}}^{\text{comp}} \leq [\sigma]_{\text{comp}} \quad \Rightarrow \quad \frac{15X}{44617500 \cdot 10^{-12}} \cdot 108,75 \cdot 10^{-3} \leq 120 \cdot 10^3$$

$$X \leq 3,28m$$



Asumimos:

$$X_{\text{máx}} = 2m$$

Comprobamos que la zona más peligrosa es la de tracción, aplicando la fórmula:

$$\frac{y_{\text{máx}}^{\text{tr}}}{y_{\text{máx}}^{\text{comp}}} > \frac{[\sigma]_{\text{tr}}}{[\sigma]_{\text{comp}}} \quad \Rightarrow \quad \frac{71,25}{108,75} > \frac{48}{120} \quad \therefore \quad 0,655 > 0,4$$

De esta manera, no es necesario comprobar a través del momento positivo máximo.

3. Graficamos el diagrama de esfuerzos tangenciales:

$$\tau_A = 0$$

$$\tau_B = \frac{VS_Z^B}{I_Z b_B} = \frac{V \cdot (0,1875b^3)}{(0,375b^4)(0,5b)} = \frac{V}{b^2} = \tau_o$$

$$S_Z^B = (0,5b)(0,5b)(0,75b) = 0,1875b^3$$

$$I_Z = 2 \left[\frac{(0,5b)(0,5b)^3}{12} + (0,5b)(0,5b)(0,75b)^2 \right] + \frac{b(b)^3}{12} = 0,375b^4$$

$$b_B = 0,5b$$

$$\tau_{B'} = \frac{VS_Z^{B'}}{I_Z b_{B'}} = \frac{V \cdot (0,1875b^3)}{(0,375b^4)(b)} = 0,5 \frac{V}{b^2} = 0,5\tau_o$$

$$\tau_C = \frac{VS_Z^C}{I_Z b_C} = \frac{V \cdot (0,3125b^3)}{(0,375b^4)(b)} = 0,833 \frac{V}{b^2} = 0,833\tau_o$$

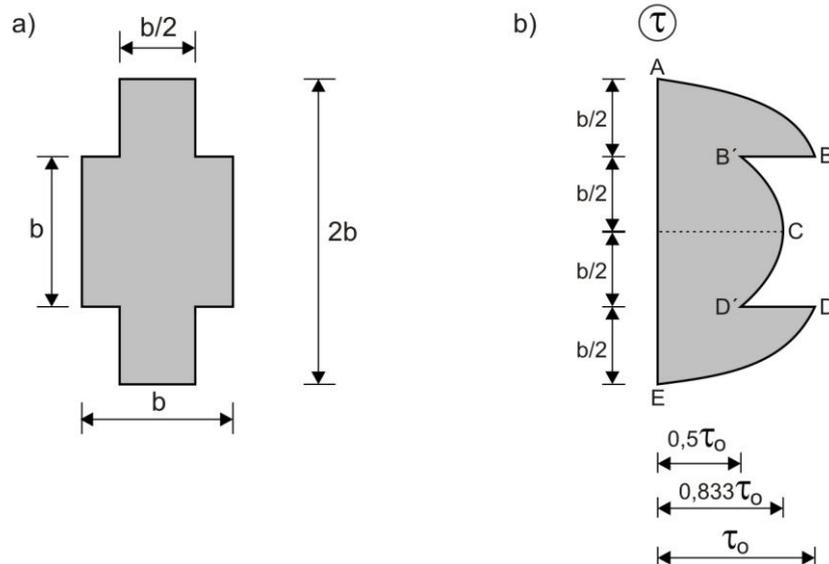
$$S_Z^C = 0,1875b^3 + (b)(0,5b)(0,25b) = 0,3125b^3$$

En la parte inferior por simetría, el diagrama será el mismo, es decir:

$$\tau_{D'} = \tau_{B'} = 0,5\tau_o$$

$$\tau_D = \tau_B = \tau_{\text{máx}} = \tau_o$$

$$\tau_E = 0$$

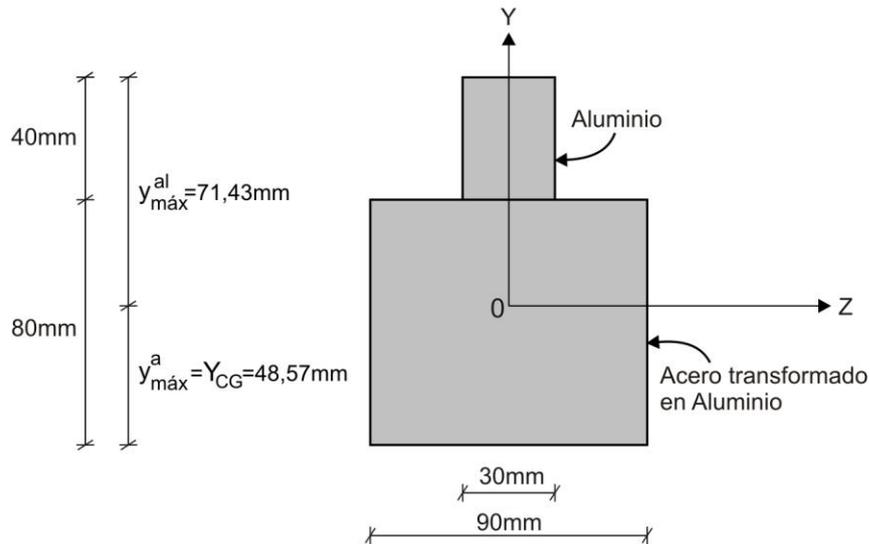


4. Calculamos el ancho equivalente del acero transformado en aluminio.

$$b'_{al} = \frac{E_a}{E_{al}} b_a = \frac{210}{70} \cdot 30 = 90\text{mm}$$

Determinamos la ubicación del centro de gravedad de la sección transformada.

$$Y_{CG} = \frac{90 \cdot 80 \cdot 40 + 30 \cdot 40 \cdot 100}{90 \cdot 80 + 30 \cdot 40} = 48,57\text{mm}$$



Calculamos el momento de inercia respecto al eje neutro:

$$I_Z = \frac{30 \cdot 40^3}{12} + 30 \cdot 40 \cdot 51,43^2 + \frac{90 \cdot 80^3}{12} + 90 \cdot 80 \cdot 8,57^2 = 7702857,16 \text{mm}^4$$

Determinamos el valor del momento flector máximo:

$$\sigma_{\text{máx}}^{\text{al}} = \frac{M_{\text{máx}}}{I_Z} y_{\text{máx}}^{\text{al}} \quad \Rightarrow \quad 60 \cdot 10^6 = \frac{M_{\text{máx}}}{7702857,16 \cdot 10^{-12}} \cdot 71,43 \cdot 10^{-3}$$

$$M_{\text{máx}} = 6470,27 \text{N.m}$$

Ahora, calculamos el esfuerzo normal máximo en el acero:

$$\sigma_{\text{máx}}^{\text{a}} = \left(\frac{E_a}{E_{\text{al}}} \right) \frac{M_{\text{máx}}}{I_Z} y_{\text{máx}}^{\text{a}} = \left(\frac{210}{70} \right) \frac{6470,27}{7702857,16 \cdot 10^{-12}} \cdot 48,57 \cdot 10^{-3} = 122,39 \text{MPa}$$

5. Calculamos el área de acero transformado en concreto:

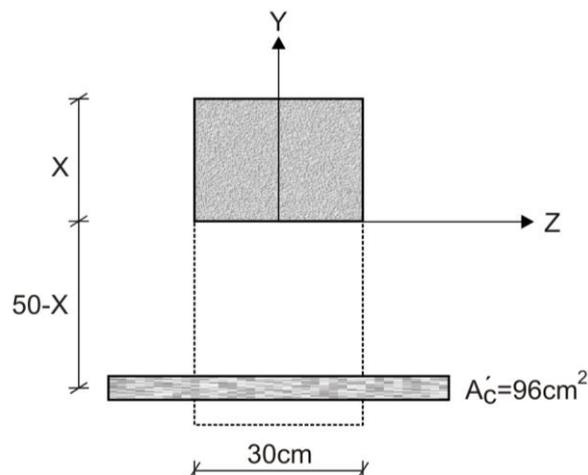
$$A'_c = n A_a = 8 \cdot 1200 = 9600 \text{mm}^2 = 96 \text{cm}^2$$

Determinamos la ubicación del eje neutro, a través de los momentos estáticos:

$$S_Z^{\text{sup}} = S_Z^{\text{inf}} \quad \Rightarrow \quad 30X \left(\frac{X}{2} \right) = 96(50 - X)$$

$$5X^2 + 32X - 1600 = 0$$

$$X = 14,97 \text{cm}$$



Calculamos el momento de inercia respecto al eje neutro:

$$I_z = \frac{30.14,97^3}{12} + 30.14,97.7,485^2 + 96.35,03^2 = 151349,59\text{cm}^4$$

Determinamos los esfuerzos máximos en el concreto y acero:

$$\sigma_{\text{máx}}^c = \frac{M_{\text{máx}}}{I_z} y_{\text{máx}}^c = \frac{70.10^3}{151349,59.10^{-8}} \cdot 14,97.10^{-2} = 6,92\text{MPa}$$

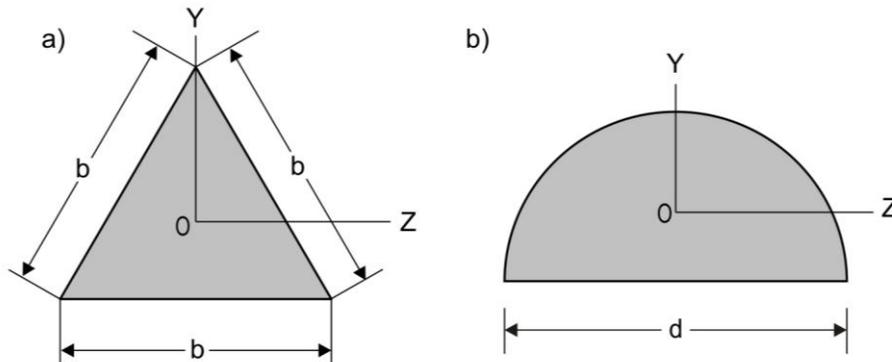
$$\sigma_{\text{máx}}^a = n \frac{M_{\text{máx}}}{I_z} y_{\text{máx}}^a = 8 \cdot \frac{70.10^3}{151349,59.10^{-8}} \cdot 35,03.10^{-2} = 129,61\text{MPa}$$



EVALUACIÓN	PRACTICA CALIFICADA Nº 3	SEM. ACADÉMICO	2008 – I
CURSO	RESISTENCIA DE MATERIALES I	SECCIÓN	26E
PROFESOR	Ph.D. GENNER VILLARREAL CASTRO	DURACIÓN	110m
ESCUELA	INGENIERIA CIVIL	CICLO	V

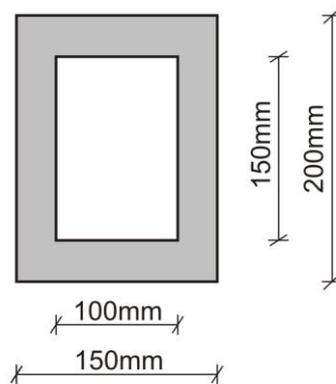
1. Una viga está sometida a flexión pura, siendo su momento flector máximo M_o . Determinar la relación $\sigma_{tr} / \sigma_{comp}$ de los esfuerzos de tracción y compresión máximos, si las secciones transversales son las mostradas en la figura.

..... (3 puntos)

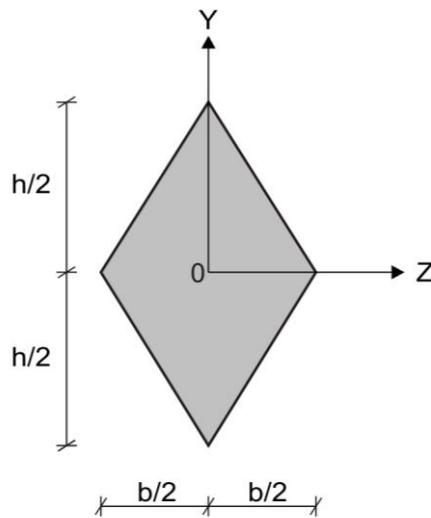


2. Una viga simplemente apoyada de 4m de longitud tiene la sección transversal mostrada en la figura. Determinar la máxima carga uniformemente distribuida que puede aplicarse a todo lo largo de la viga, si el esfuerzo tangencial está limitado a 1,2MPa

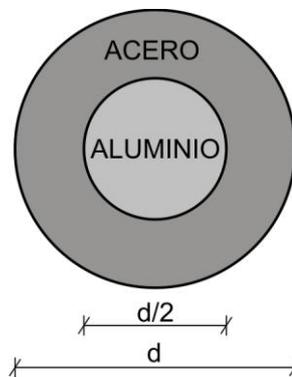
..... (3 puntos)



3. Graficar el diagrama de esfuerzos tangenciales para la sección transversal mostrada en la figura, correspondiente a una viga que trabaja a flexión. Considerar que la fuerza cortante es V (5 puntos)



4. Un tubo de acero con diámetro exterior "d" y un núcleo de aluminio de diámetro $d/2$, se unen para formar una viga compuesta, como se muestra en la figura. Obtener una fórmula para el momento flector máximo $M_{m\acute{a}x}$ que puede soportar la viga si se considera que el esfuerzo normal permisible en el acero es $[\sigma]_a$. Considerar que los m\u00f3dulos de elasticidad para el acero y el aluminio son E_a y E_{al} , respectivamente. (5 puntos)



5. En una viga de concreto armado, $b = 20\text{cm}$, $d = 40\text{cm}$, $A_a = 14\text{cm}^2$. Determinar los esfuerzos normales en el concreto y acero, para los casos (a) $n = 6$ y (b) $n = 10$, si el momento flector m\u00e1ximo es $1,5\text{T.m}$. Considerar "d" como la distancia desde la ubicaci\u00f3n del acero de refuerzo hasta la cara superior de la viga. (4 puntos)

FECHA	La Molina, 19 de Mayo del 2008
-------	--------------------------------

SOLUCIONARIO DE PRÁCTICA CALIFICADA Nº 3

CICLO 2008 – I

1. Se sabe que:

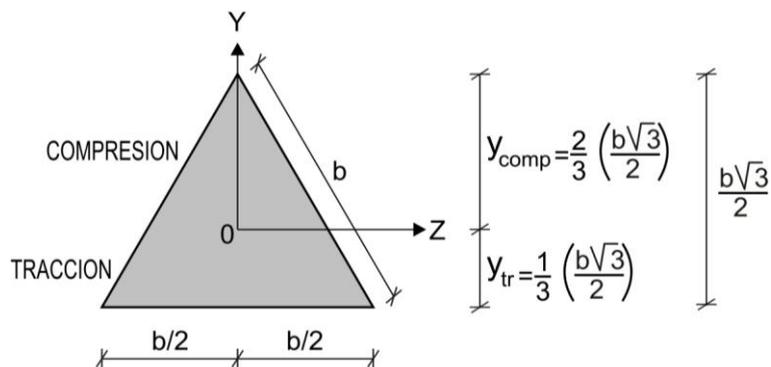
$$\sigma_{tr} = \frac{M_o}{I_Z} y_{tr}$$

$$\sigma_{comp} = \frac{M_o}{I_Z} y_{comp}$$

Luego:

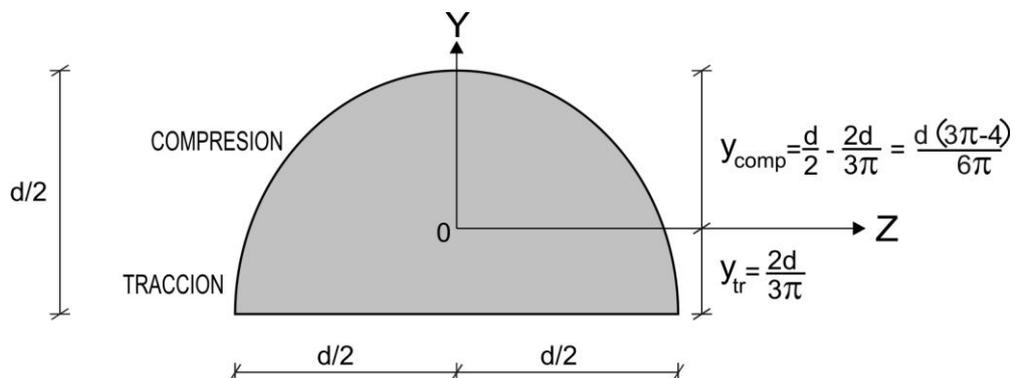
a) TRIANGULO EQUILATERO:

$$\frac{\sigma_{tr}}{\sigma_{comp}} = \frac{y_{tr}}{y_{comp}} = \frac{\frac{1}{3} \left(\frac{b\sqrt{3}}{2} \right)}{\frac{2}{3} \left(\frac{b\sqrt{3}}{2} \right)} = 0,5$$



b) SEMICIRCULO:

$$\frac{\sigma_{tr}}{\sigma_{comp}} = \frac{y_{tr}}{y_{comp}} = \frac{\frac{2d}{3\pi}}{\frac{d(3\pi-4)}{6\pi}} = 0,7374$$



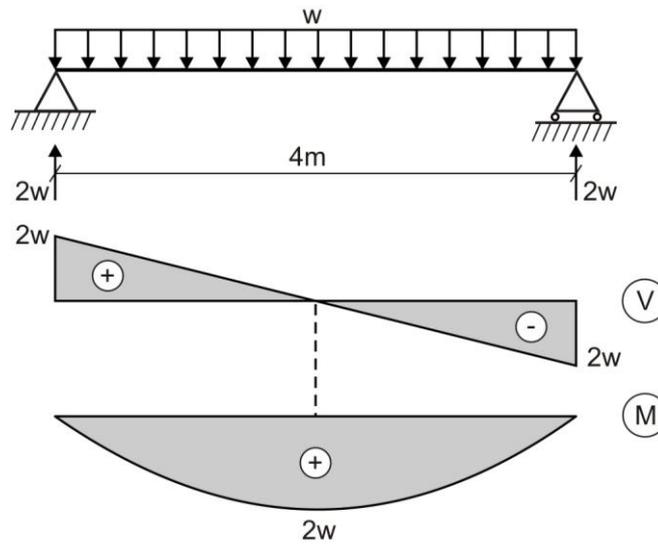
2. Esquematizamos la viga con la carga uniformemente distribuida y graficamos los diagramas de fuerza cortante y momento flector, para luego determinar el esfuerzo tangencial máximo.

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{V_{m\acute{a}x} S_Z^{sup}}{I_Z b_{m\acute{i}n}} \leq [\tau] \quad \Rightarrow \quad \frac{2w(0,15 \cdot 0,1 \cdot 0,05 - 0,1 \cdot 0,075 \cdot 0,0375)}{\left[\frac{0,15 \cdot 0,2^3}{12} - \frac{0,1 \cdot 0,15^3}{12} \right] \cdot 0,050} \leq 1,2 \cdot 10^6$$

$$w \leq 4600 \text{ N/m}$$

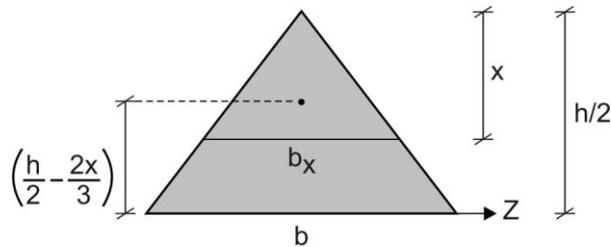
Asumimos:

$$w = 4,6 \text{ kN/m}$$



3. Analizamos la parte superior de la sección transversal.

$$\frac{b_x}{x} = \frac{b}{h/2} \Rightarrow b_x = \frac{2bx}{h}$$



En la figura, el punto del triángulo superior, corresponde al centro de gravedad de dicho triángulo.

Determinamos el momento estático respecto al eje neutro Z

$$S_Z^{\text{sup}(x)} = \frac{1}{2}(b_x)(x) \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{2x}{3}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{2bx}{h}\right)(x) \left(\frac{h}{2} - \frac{2x}{3}\right) = \frac{bx^2}{h} \left(\frac{h}{2} - \frac{2x}{3}\right)$$

Ahora, calculamos el momento de inercia de toda la sección transversal de la viga, respecto al eje neutro Z

$$I_Z = 2 \cdot \left[\frac{b(h/2)^3}{36} + \frac{1}{2}(b) \left(\frac{h}{2}\right) \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{h}{2}\right)^2 \right] = \frac{bh^3}{48}$$

Luego:

$$\tau_{(x)} = \frac{VS_Z^{\text{sup}(x)}}{I_Z b_x} = \frac{V \cdot \frac{bx^2}{h} \left(\frac{h}{2} - \frac{2x}{3}\right)}{\frac{bh^3}{48} \cdot \frac{2bx}{h}} = \frac{24Vx \left(\frac{h}{2} - \frac{2x}{3}\right)}{bh^3}$$

El esfuerzo tangencial máximo se obtendrá al derivar $\frac{d\tau_{(x)}}{dx} = 0$

En consecuencia:

$$\frac{d\tau_{(x)}}{dx} = \frac{24V}{bh^3} \left(\frac{h}{2} - \frac{2x}{3} \right) + \left(-\frac{2}{3} \right) \left(\frac{24Vx}{bh^3} \right) = 0$$

De donde:

$$x = \frac{3h}{8}$$

Luego, graficamos el diagrama de esfuerzo tangencial.

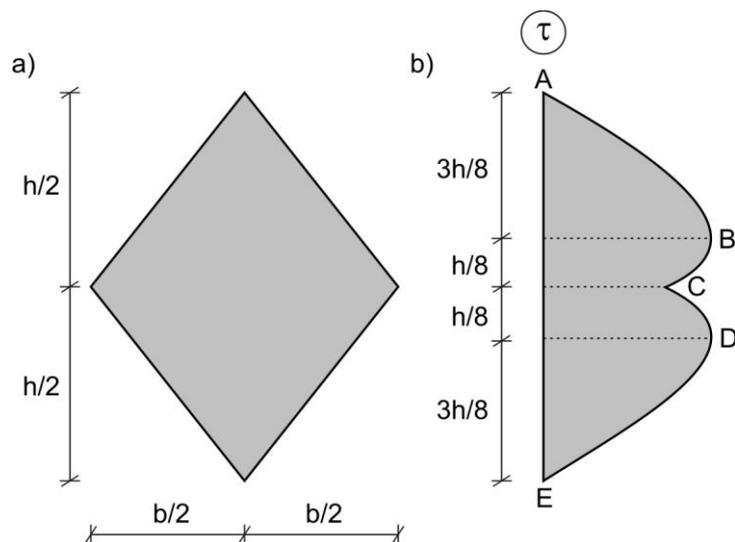
$$\tau_A = 0$$

$$\tau_B = \tau_{x=3h/8} = \frac{2w \left(\frac{3h}{8} \right) \left(\frac{h}{2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{3h}{8} \right)}{bh^3} = \frac{9V}{4bh}$$

$$\tau_C = \tau_{x=h/2} = \frac{24V \left(\frac{h}{2} \right) \left(\frac{h}{2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{h}{2} \right)}{bh^3} = \frac{2V}{bh}$$

$$\tau_D = \tau_B = \tau_{\text{máx}} = \frac{9V}{4bh}$$

$$\tau_E = 0$$



4. Existe una fórmula conocida para esfuerzos de dos materiales, expresada en función de sus módulos de elasticidad e inercias, cuya deducción la realizamos a continuación.

Se sabe que:

$$\sigma_a = \frac{M}{I_z} y_a$$

Siendo:

$$I_z = I_a + n \cdot I_{al} = I_a + \frac{E_{al}}{E_a} I_{al} = \frac{E_a I_a + E_{al} I_{al}}{E_a}$$

Reemplazamos valores:

$$\sigma_a = \frac{M y_a E_a}{E_a I_a + E_{al} I_{al}} \leq [\sigma]_a$$

$$\frac{M \left(\frac{d}{2} \right) E_a}{E_a \frac{\pi}{64} \left[d^4 - \left(\frac{d}{2} \right)^4 \right] + E_{al} \frac{\pi}{64} \left(\frac{d}{2} \right)^4} \leq [\sigma]_a$$

Efectuando cálculos obtenemos:

$$\frac{ME_a}{\frac{\pi d^3}{512} (15E_a + E_{al})} \leq [\sigma]_a$$

De donde:

$$M \leq \frac{\pi d^3 [\sigma]_a}{512} \left(\frac{15E_a + E_{al}}{E_a} \right)$$

De esta manera, el momento flector máximo será:

$$M_{\text{máx}} = \frac{\pi d^3 [\sigma]_a}{512} \left(15 + \frac{E_{al}}{E_a} \right)$$

5. a) Calculamos el área del acero transformado en concreto.

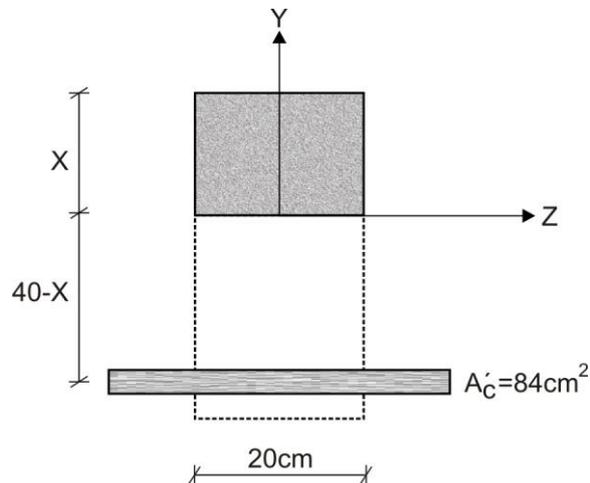
$$A'_c = nA_a = 6.14 = 84\text{cm}^2$$

Determinamos la ubicación del eje neutro:

$$S_Z^{\text{sup}} = S_Z^{\text{inf}} \Rightarrow 20X \left(\frac{X}{2} \right) = 84(40 - X)$$

$$10X^2 + 84X - 3360 = 0$$

$$X = 14,6\text{cm}$$



Calculamos el momento de inercia respecto al eje neutro:

$$I_Z = \frac{20 \cdot 14,6^3}{12} + 20 \cdot 14,6 \cdot 7,3^2 + 84 \cdot 25,4^2 = 74941\text{cm}^4$$

Determinamos los esfuerzos normales máximos para el concreto y acero:

$$\sigma_{\text{máx}}^c = \frac{M_{\text{máx}}}{I_Z} y_{\text{máx}}^c = \frac{1500 \cdot 100}{74941} \cdot 14,6 = 29,22\text{kg/cm}^2$$

$$\sigma_{\text{máx}}^a = n \frac{M_{\text{máx}}}{I_Z} y_{\text{máx}}^a = 6 \left(\frac{1500.100}{74941} \cdot 25,4 \right) = 305,04 \text{ kg/cm}^2$$

b) Calculamos el área del acero transformado en concreto.

$$A_c' = nA_a = 10.14 = 140 \text{ cm}^2$$

Determinamos la ubicación del eje neutro:

$$S_Z^{\text{sup}} = S_Z^{\text{inf}} \quad \Rightarrow \quad 20X \left(\frac{X}{2} \right) = 140(40 - X)$$

$$10X^2 + 140X - 5600 = 0$$

$$X = 17,68 \text{ cm}$$

Calculamos el momento de inercia respecto al eje neutro:

$$I_Z = \frac{20.17,68^3}{12} + 20.17,68.8,84^2 + 140.22,32^2 = 106588,58 \text{ cm}^4$$

Determinamos los esfuerzos normales máximos para el concreto y acero:

$$\sigma_{\text{máx}}^c = \frac{M_{\text{máx}}}{I_Z} y_{\text{máx}}^c = \frac{1500.100}{106588,58} \cdot 17,68 = 24,88 \text{ kg/cm}^2$$

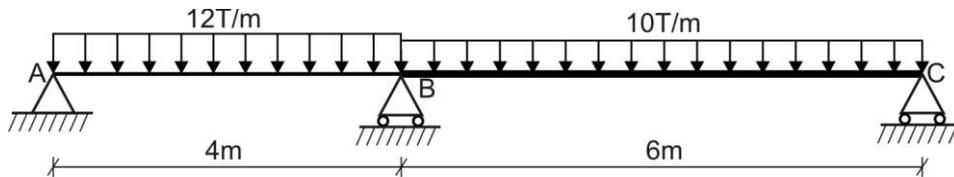
$$\sigma_{\text{máx}}^a = n \frac{M_{\text{máx}}}{I_Z} y_{\text{máx}}^a = 10 \left(\frac{1500.100}{106588,58} \cdot 22,32 \right) = 314,10 \text{ kg/cm}^2$$



EVALUACIÓN	PRACTICA CALIFICADA N° 4	SEM. ACADÉMICO	2006 – I
CURSO	RESISTENCIA DE MATERIALES I	SECCIÓN	26E
PROFESOR	Ph.D. GENNER VILLARREAL CASTRO	DURACIÓN	110m
ESCUELA	INGENIERIA CIVIL	CICLO	V

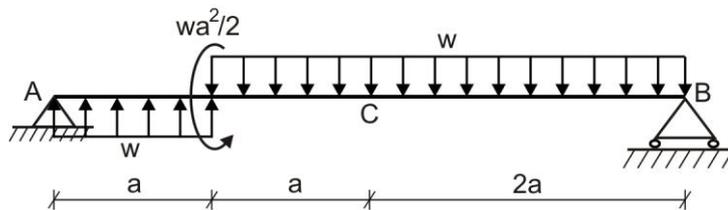
1. METODO DE LA DOBLE INTEGRACION. Resolver la viga mostrada en la figura, graficando los diagramas de fuerza cortante, momento flector y refuerzo. Determinar la deflexión máxima, si $E = 3.10^6 T/m^2$ y las secciones de la viga en el tramo AB es 30cm x 40cm y en el tramo BC de 40cm x 60cm

..... (6 puntos)



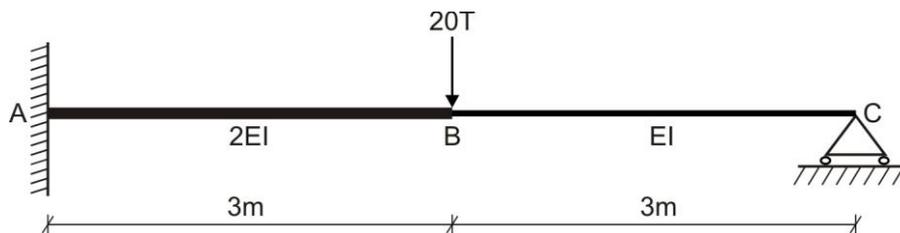
2. METODO DE LOS PARAMETROS INICIALES. Determinar la deflexión en el punto C y la pendiente en el apoyo A, si la sección transversal es constante.

..... (4 puntos)



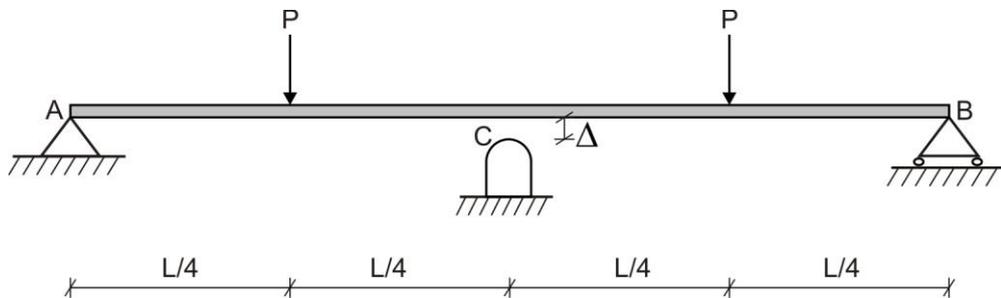
3. METODO DEL AREA DE MOMENTOS. Resolver la viga mostrada en la figura, graficando los diagramas de fuerza cortante, momento flector y refuerzo. Determinar la pendiente en C y la deflexión en B. Considerar $E = 3.10^6 T/m^2$ e $I = 0,0054m^4$

..... (6 puntos)



4. METODO DE LA VIGA CONJUGADA. Una viga simplemente apoyada AB soporta dos cargas concentradas P en las posiciones mostradas en la figura. Un apoyo C en el punto medio de la viga se sitúa a una distancia Δ por debajo de la viga antes de aplicarse las cargas. Considerar $\Delta = 0,5plg$; $L = 20plc$; $E = 30 \cdot 10^6 \text{ psi}$ e $I = 396plg^4$. Determinar la magnitud de las cargas P de tal forma que la viga tenga contacto con el soporte C

..... (4 puntos)



FECHA	La Molina, 19 de Junio del 2006
-------	---------------------------------

SOLUCIONARIO DE PRÁCTICA CALIFICADA Nº 4

CICLO 2006 – I

1. Analizamos las inercias para cada parte de la viga:

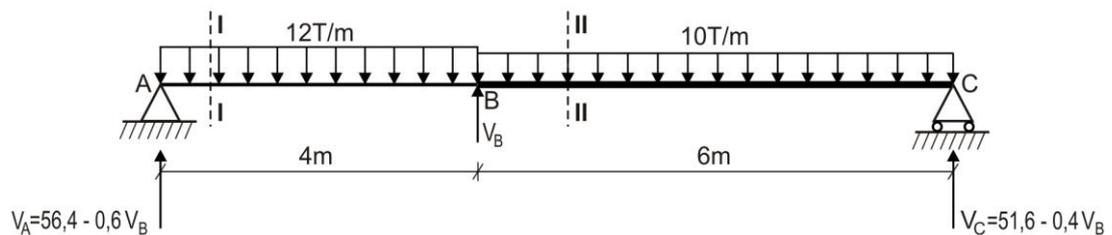
$$EI_{AB} = EI_1 = 3 \cdot 10^6 \cdot \left(\frac{0,3 \cdot 0,4^3}{12} \right) = 4800 T \cdot m^2$$

$$EI_{BC} = EI_2 = 3 \cdot 10^6 \cdot \left(\frac{0,4 \cdot 0,6^3}{12} \right) = 21600 T \cdot m^2$$

Luego:

$$\frac{EI_{BC}}{EI_{AB}} = \frac{EI_2}{EI_1} = \frac{21600}{4800} = 4,5$$

Eliminamos el apoyo en B y lo reemplazamos por V_B , calculando las reacciones en los otros apoyos.



$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad V_C(10) - 12(4)(2) - 10(6)(7) + V_B(4) = 0$$

$$V_C = 51,6 - 0,4V_B$$

$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad V_A + V_B + (51,6 - 0,4V_B) - 12(4) - 10(6) = 0$$

$$V_A = 56,4 - 0,6V_B$$

Ahora, analizamos tramo por tramo en forma consecutiva.

TRAMO I-I ($0 \leq x \leq 4$)

$$EI_1 y'' = (56,4 - 0,6V_B)x - 6x^2$$

$$EI_1 y' = (56,4 - 0,6V_B) \frac{x^2}{2} - 2x^3 + C_1$$

$$EI_1 y = (56,4 - 0,6V_B) \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{2} + C_1 x + C_2$$

Luego, aplicamos las condiciones de borde, con la finalidad de determinar las constantes de integración.

$$\text{a) Si } x = 0 \quad \Rightarrow \quad y_A = y_{x=0} = 0 \quad \therefore \quad C_2 = 0$$

$$\text{b) Si } x = 4m \quad \Rightarrow \quad y_B = y_{x=4} = 0 \quad \therefore \quad C_1 = 1,6V_B - 118,4$$

TRAMO II-II ($4 \leq x \leq 10$)

$$EI_2 y'' = (56,4 - 0,6V_B)x - 48(x-2) + V_B(x-4) - 5(x-4)^2$$

$$EI_2 y' = (56,4 - 0,6V_B) \frac{x^2}{2} - 24(x-2)^2 + V_B \frac{(x-4)^2}{2} - \frac{5(x-4)^3}{3} + C_3$$

$$EI_2 y = (56,4 - 0,6V_B) \frac{x^3}{6} - 8(x-2)^3 + V_B \frac{(x-4)^3}{6} - \frac{5(x-4)^4}{12} + C_3 x + C_4$$

PRINCIPIO DE CONTINUIDAD

c) Si $x = 4\text{m} \Rightarrow \theta_{x=4}^I = \theta_{x=4}^{II}$

$$\frac{1}{EI_1} \left[(56,4 - 0,6V_B) \frac{4^2}{2} - 2(4)^3 + (1,6V_B - 118,4) \right] = \frac{1}{EI_2} \left[(56,4 - 0,6V_B) \frac{4^2}{2} - 24(2)^2 + C_3 \right]$$

$$C_3 = 566,4 - 9,6V_B$$

d) Si $x = 4\text{m} \Rightarrow y_{x=4}^I = y_{x=4}^{II}$

$$\frac{1}{EI_1} \left[(56,4 - 0,6V_B) \frac{4^3}{6} - \frac{4^4}{2} + 4C_1 \right] = \frac{1}{EI_2} \left[(56,4 - 0,6V_B) \frac{4^3}{6} - 8(2)^3 + 4C_3 + C_4 \right]$$

Reemplazamos C_1 y C_3 por los valores calculados anteriormente, obteniendo:

$$C_4 = 44,8V_B - 2803,2$$

CONDICION ADICIONAL

e) Si $x = 10\text{m} \Rightarrow y_C = y_{x=10} = 0$

$$(56,4 - 0,6V_B) \frac{10^3}{6} - 8(8)^3 + \frac{V_B(6)^3}{6} - \frac{5(6)^4}{12} + (566,4 - 9,6V_B)(10) + (44,8V_B - 2803,2) = 0$$

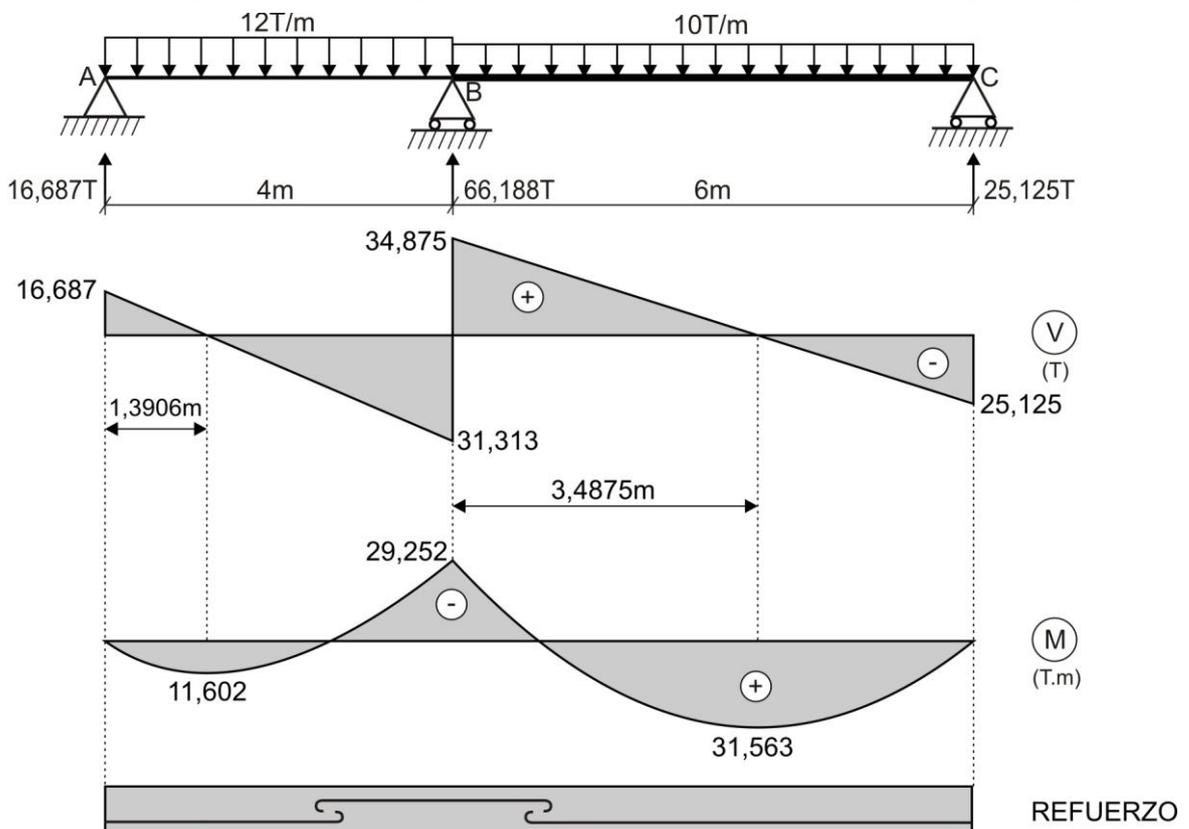
De donde:

$$V_B = 66,188\text{T} \uparrow$$

$$V_A = 16,687\text{T} \uparrow$$

$$V_C = 25,125\text{T} \uparrow$$

Con estos valores graficamos los diagramas finales, los cuales se muestran en la siguiente figura.



Para calcular la deflexión máxima, debemos de analizar cada tramo en forma independiente, porque no sabemos en que tramo será donde ocurra e igualamos a cero la ecuación de la pendiente.

TRAMO I-I ($0 \leq x \leq 4$)

$$16,687 \frac{x^2}{2} - 2x^3 - 12,499 = 0$$

Esta ecuación tiene tres soluciones, siendo válidas las dos primeras por encontrarse en el tramo analizado y la tercera es inválida por ser negativo.

$$x_1 = 3,720\text{m}$$

$$x_2 = 1,541\text{m}$$

$$x_3 = -1,089\text{m}$$

Luego:

$$y_1 = y_{x=3,720} = \frac{1}{4800} \left[16,687 \cdot \frac{3,720^3}{6} - \frac{3,720^4}{2} - 12,499 \cdot 3,720 \right] = 1,9 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 0,19\text{mm} \uparrow$$

$$y_2 = y_{x=1,541} = \frac{1}{4800} \left[16,687 \cdot \frac{1,541^3}{6} - \frac{1,541^4}{2} - 12,499 \cdot 1,541 \right] = -2,48 \cdot 10^{-3} \text{ m} = -2,48\text{mm} \downarrow$$

TRAMO II-II ($4 \leq x \leq 10$)

$$16,687 \frac{x^2}{2} - 24(x-2)^2 + 66,188 \frac{(x-4)^2}{2} - \frac{5(x-4)^3}{3} - 69,005 = 0$$

Esta ecuación también tiene tres soluciones, siendo válida la que se encuentra en el tramo analizado y las otras dos soluciones son inválidas por encontrarse fuera del tramo.

$$x_4 = 3,266\text{m}$$

$$x_5 = 7,238\text{m}$$

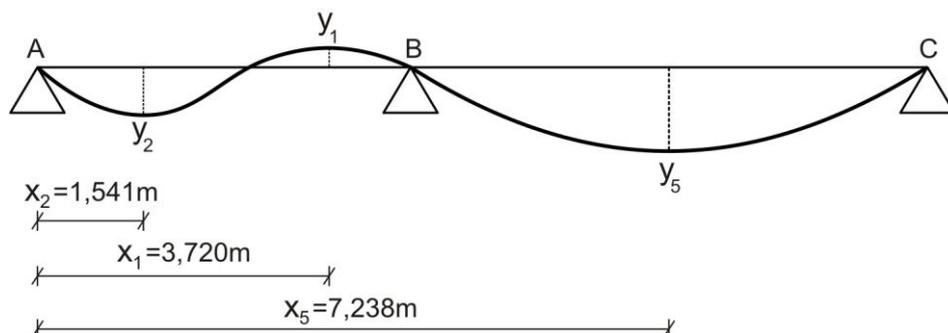
$$x_6 = 11,956\text{m}$$

Luego:

$$y_5 = y_{x=7,238} = \frac{1}{21600} \left[16,687 \cdot \frac{7,238^3}{6} - 8,5 \cdot 238^3 + \frac{66,188 \cdot 3,238^3}{6} - \frac{5 \cdot 3,238^4}{12} - 69,005 \cdot 7,238 + 162,022 \right]$$

$$y_5 = y_{x=7,238} = -4,81 \cdot 10^{-3} \text{ m} = -4,81\text{mm} \downarrow$$

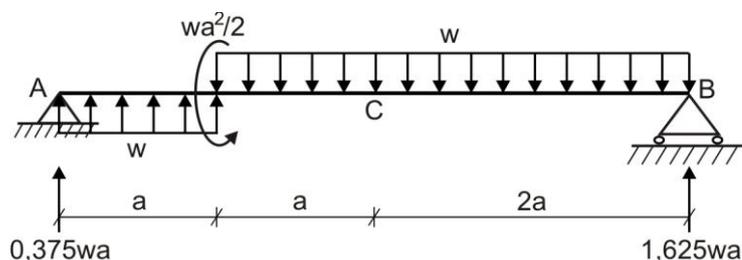
Con este resultado, graficamos la deformada de la viga, la cual se muestra en la siguiente figura, siendo la deflexión máxima $y_{\text{máx}} = y_{x=7,238} = -4,81\text{mm} \downarrow$



2. Calculamos las reacciones en la viga:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_B(4a) + \frac{wa^2}{2} + wa\left(\frac{a}{2}\right) - w(3a)(2,5a) = 0 \quad \therefore V_B = 1,625wa \uparrow$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow V_A + 1,625wa + wa - 3wa = 0 \quad \therefore V_A = 0,375wa \uparrow$$



Planteamos la ecuación universal:

$$y = \theta_o x + \frac{0,375wax^3}{6EI} - \frac{0,5wa^2(x-a)^2}{2EI} + \frac{wx^4}{24EI} - \frac{w(x-a)^4}{24EI} - \frac{w(x-a)^4}{24EI} + \frac{w(x-4a)^4}{24EI}$$

Aplicamos la condición de borde o extremo:

$$\text{Si } x = 4a \Rightarrow y_B = y_{x=4a} = 0$$

$$\theta_o(4a) + \frac{0,375wa(4a)^3}{6EI} - \frac{0,5wa^2(3a)^2}{2EI} + \frac{w(4a)^4}{24EI} - \frac{w(3a)^4}{24EI} - \frac{w(3a)^4}{24EI} = 0$$

De donde:

$$\theta_o = -\frac{17wa^3}{12EI}$$

En consecuencia:

$$\theta_A = \theta_o = -\frac{17wa^3}{12EI} = -1,417 \frac{wa^3}{EI}$$

La orientación de la pendiente en A es en sentido horario.

Ahora, analizamos el punto C, calculando la deflexión en dicho punto.

$$y_C = y_{x=2a} = -\frac{1,417wa^3(2a)}{EI} + \frac{0,375wa(2a)^3}{6EI} - \frac{0,5wa^2(a)^2}{2EI} + \frac{w(2a)^4}{24EI} - \frac{w(a)^4}{24EI} - \frac{w(a)^4}{24EI} = -\frac{2wa^4}{EI} \downarrow$$

3. Eliminamos el apoyo en C y lo reemplazamos por su reacción vertical V_C , analizando la viga a través del Principio de Superposición de Cargas, cuya figura se muestra en la siguiente página.

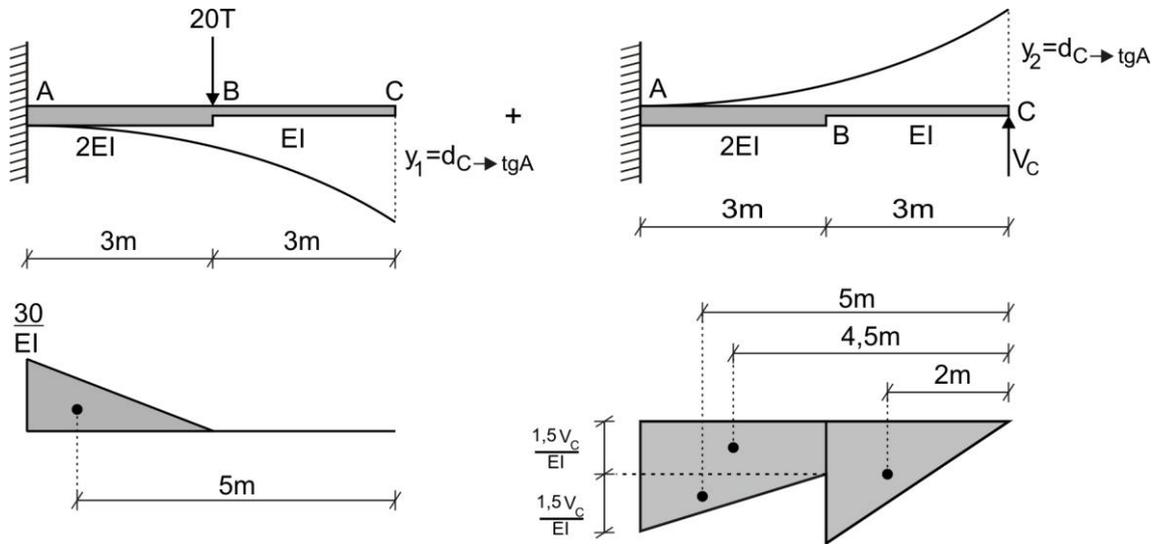
Como la deflexión en C es cero, se debe de cumplir:

$$y_1 + y_2 = 0$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{30}{EI}\right)(3)(5) + \frac{1}{2}(3)\left(\frac{3V_C}{EI}\right)(2) + \left(\frac{1,5V_C}{EI}\right)(3)(4,5) + \frac{1}{2}(3)\left(\frac{1,5V_C}{EI}\right)(5) = 0$$

De donde:

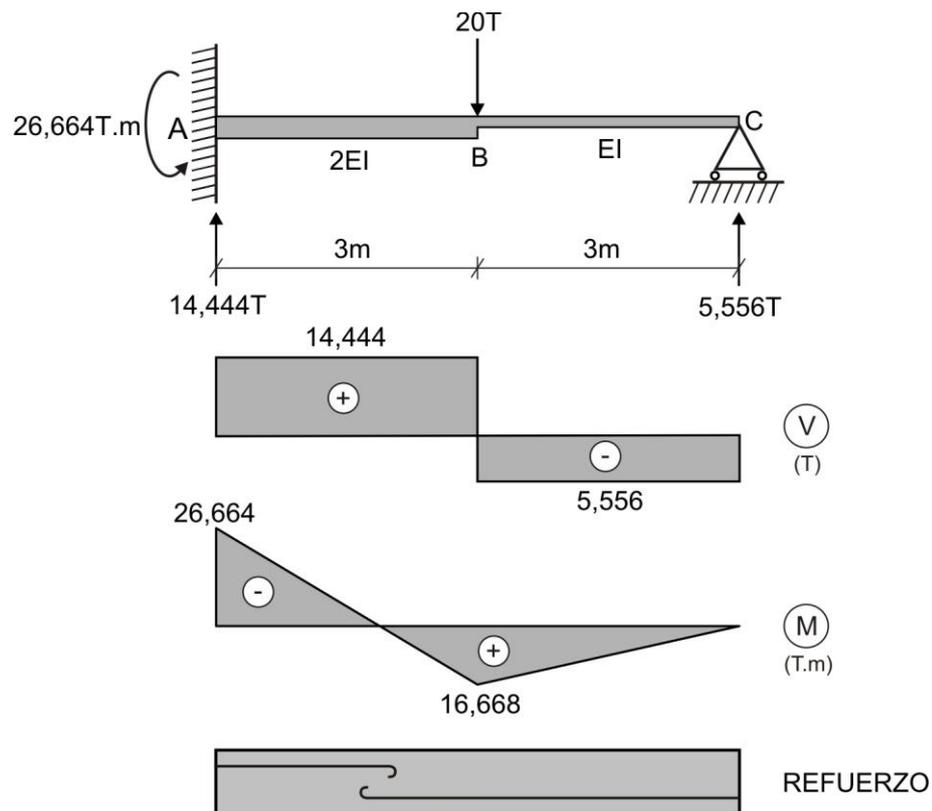
$$V_C = 5,556T \uparrow$$



Luego, determinamos las reacciones en el empotramiento A y graficamos los diagramas correspondientes de fuerza cortante, momento flector y refuerzo para la viga hiperestática.

$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad V_A + 5,556 - 20 = 0 \quad \therefore \quad V_A = 14,444T \uparrow$$

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad M_A + 5,556(6) - 20(3) = 0 \quad \therefore \quad M_A = 26,664T.m$$



Ahora, calculamos la pendiente en C, sabiendo que la pendiente en A es cero por ser empotramiento.

$$\theta_C - \theta_A = \text{AREA}_{(M/EI)}^{A,C}$$

$$\theta_C = -\frac{1}{2} \left(\frac{30}{EI} \right) (3) + \frac{1}{2} (3) \left(\frac{3.5,556}{EI} \right) + (3) \left(\frac{1.5,556}{EI} \right) + \frac{1}{2} (3) \left(\frac{1.5,556}{EI} \right)$$

$$\theta_c = \frac{17,505}{EI} = \frac{17,505}{3 \cdot 10^6 \cdot 0,0054} = 1,08 \cdot 10^{-3} \text{ rad} = 0,06^\circ$$

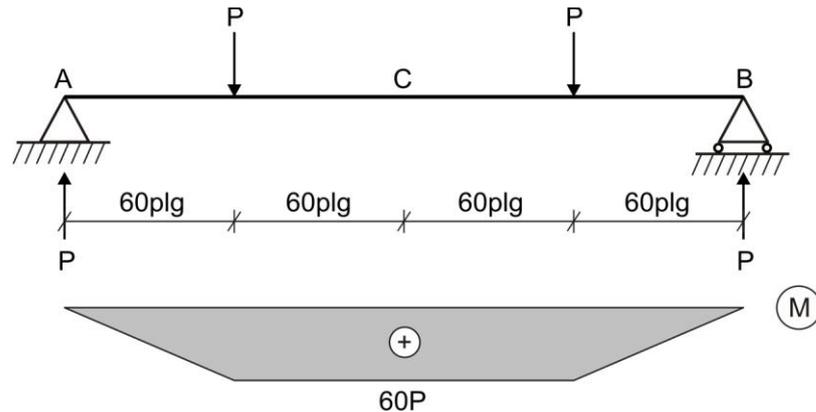
La pendiente en C va en sentido antihorario.

Luego, determinamos la deflexión en el punto B

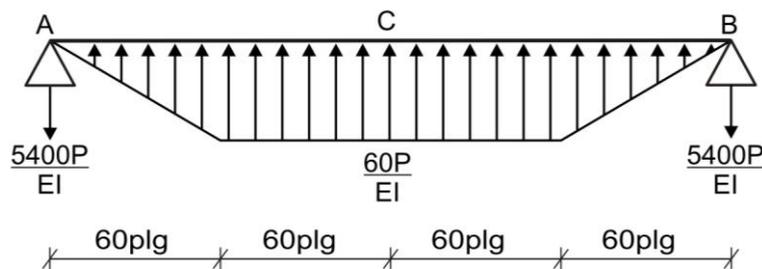
$$y_B = d_{B \rightarrow \text{igA}} = -\frac{1}{2}(3)\left(\frac{30}{EI}\right)(2) + (3)\left(\frac{1,5 \cdot 5,556}{EI}\right)(1,5) + \frac{1}{2}(3)\left(\frac{1,5 \cdot 5,556}{EI}\right)(2) = -\frac{27,495}{EI}$$

$$y_B = -\frac{27,495}{3 \cdot 10^6 \cdot 0,0054} = -1,7 \cdot 10^{-3} \text{ m} = -1,7 \text{ mm} \downarrow$$

4. Esquematizamos la viga y calculamos sus reacciones, graficando su diagrama de momento flector.



Ahora, transformamos la viga real en viga conjugada, calculando sus reacciones en los apoyos.



Por dato del problema $y_c = -0,5 \text{ plg} \downarrow$

Luego, como $y_c = \bar{M}_c$ tendremos:

$$-\frac{5400P}{EI}(120) + \frac{1}{2}\left(\frac{60P}{EI}\right)(60)(80) + \left(\frac{60P}{EI}\right)(60)(30) = -0,5$$

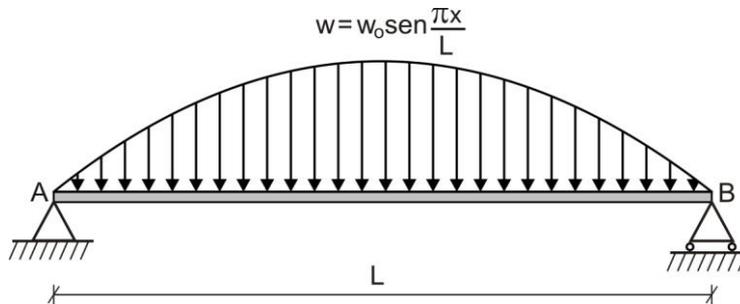
De donde:

$$P = \frac{0,5EI}{396000} = \frac{0,5 \cdot 30 \cdot 10^6 \cdot 396}{396000} = 15000 \text{ lb} = 15 \text{ k}$$

EVALUACIÓN	PRACTICA CALIFICADA N° 4	SEM. ACADÉMICO	2006 – II
CURSO	RESISTENCIA DE MATERIALES I	SECCIÓN	26E
PROFESOR	Ph.D. GENNER VILLARREAL CASTRO	DURACIÓN	110m
ESCUELA	INGENIERIA CIVIL	CICLO	V

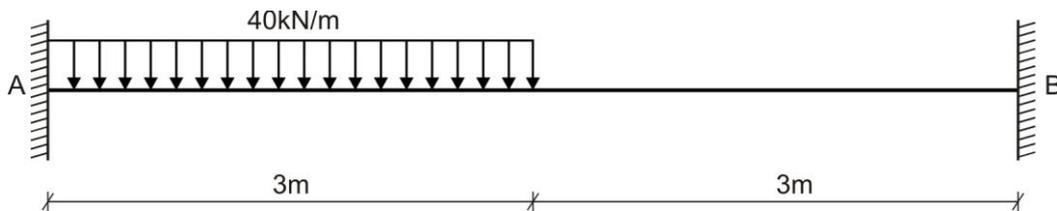
1. METODO DE LA DOBLE INTEGRACION. Una viga simplemente apoyada AB se somete a una carga distribuida de intensidad variable $w = w_0 \text{sen} \frac{\pi x}{L}$. Determinar la deflexión máxima si es de sección constante.

..... (5 puntos)



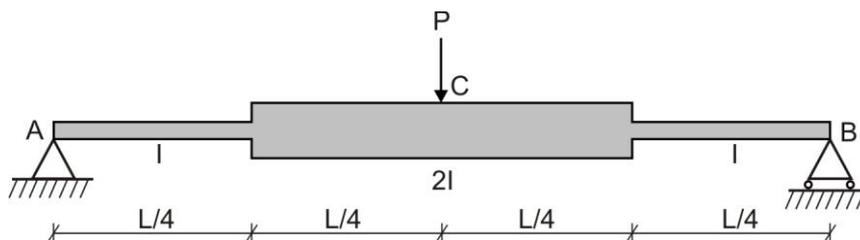
2. METODO DE LOS PARAMETROS INICIALES. Resolver la viga mostrada en la figura y graficar los diagramas de fuerza cortante, momento flector y refuerzo, sabiendo que es de sección constante.

..... (5 puntos)



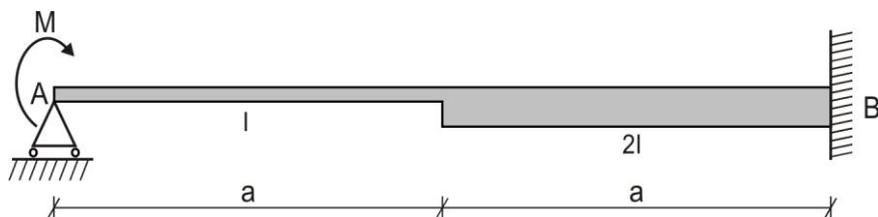
3. METODO DEL AREA DE MOMENTOS. La viga simplemente apoyada AB mostrada en la figura está cargada en su punto medio. Calcular la pendiente en el apoyo A y la deflexión en C. Considerar que la viga es de un solo material.

..... (5 puntos)



4. METODO DE LA VIGA CONJUGADA. La aplicación de un momento puntual M en el extremo A de la viga mostrada en la figura ocasiona en el extremo B un momento βM . Calcular el valor del coeficiente β y graficar los diagramas de fuerza cortante y momento flector.

..... (5 puntos)



FECHA	La Molina, 20 de Noviembre del 2006
-------	-------------------------------------

SOLUCIONARIO DE PRÁCTICA CALIFICADA Nº 4

CICLO 2006 – II

1. Se sabe que:

$$EIy^{IV} = -w$$

$$EIy^{III} = V$$

$$EIy^{II} = M$$

Luego:

$$EIy^{IV} = -w_0 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L}$$

Integramos una vez:

$$EIy^{III} = \frac{w_0 L}{\pi} \cos \frac{\pi x}{L} + C_1$$

CONDICIONES:

a) Si $x = L/2 \Rightarrow V_{x=L/2} = 0$

Luego, el término del lado derecho de la igualdad es cero.

$$\frac{w_0 L}{\pi} \cos 90^\circ + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

De esta manera, la ecuación quedará así:

$$EIy^{III} = \frac{w_0 L}{\pi} \cos \frac{\pi x}{L}$$

Integramos otra vez:

$$EIy^{II} = \frac{w_0 L^2}{\pi^2} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} + C_2$$

b) Si $x = 0 \Rightarrow M_{x=0} = 0$

Luego, el término del lado derecho de la igualdad es cero.

$$\frac{w_0 L^2}{\pi^2} \operatorname{sen} 0^\circ + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

De esta manera, la ecuación quedará así:

$$EIy^{II} = \frac{w_0 L^2}{\pi^2} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L}$$

Integramos otra vez y obtenemos:

$$EIy' = -\frac{w_0 L^3}{\pi^3} \cos \frac{\pi x}{L} + C_3$$

c) Si $x = L/2 \Rightarrow \theta_{x=L/2} = 0$

$$-\frac{w_0 L^3}{\pi^3} \cos 90^\circ + C_3 = 0 \Rightarrow C_3 = 0$$

De esta manera, la ecuación quedará así:

$$EIy' = -\frac{w_0 L^3}{\pi^3} \cos \frac{\pi x}{L}$$

Integramos otra vez:

$$EIy = -\frac{w_0 L^4}{\pi^4} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} + C_4$$

d) Si $x = 0 \Rightarrow y_{x=0} = 0$

$$-\frac{w_0 L^4}{\pi^4} \operatorname{sen} 0^\circ + C_4 = 0 \Rightarrow C_4 = 0$$

De esta manera, la ecuación quedará así:

$$EIy = -\frac{w_0 L^4}{\pi^4} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L}$$

Calculamos la deflexión máxima:

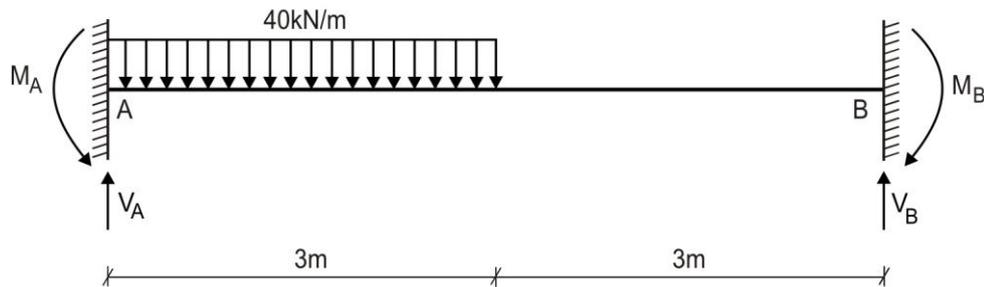
$$y_{\text{máx}} = y_{x=L/2} = \frac{1}{EI} \left[-\frac{w_0 L^4}{\pi^4} \operatorname{sen} 90^\circ \right] = -\frac{w_0 L^4}{\pi^4 EI} \downarrow$$

2. Determinamos el grado de indeterminación:

$$G.I. = 6 - 3 = 3$$

La viga es tres veces hiperestática.

La viga quedará así:



Aplicamos la ecuación universal, obteniéndose:

$$y = -\frac{M_A x^2}{2EI} + \frac{V_A x^3}{6EI} - \frac{40x^4}{24EI} + \frac{40(x-3)^4}{24EI}$$

$$\theta = \frac{dy}{dx} = -\frac{M_A x}{EI} + \frac{V_A x^2}{2EI} - \frac{40x^3}{6EI} + \frac{40(x-3)^3}{6EI}$$

CONDICIONES:

a) Si $x = 6m \Rightarrow y_B = y_{x=6} = 0$

$$-\frac{18M_A}{EI} + \frac{36V_A}{EI} - \frac{2160}{EI} + \frac{135}{EI} = 0$$

$$M_A - 2V_A = -112,5 \quad \dots\dots\dots (1)$$

b) Si $x = 6m \Rightarrow \theta_B = \theta_{x=6} = 0$

$$-\frac{6M_A}{EI} + \frac{18V_A}{EI} - \frac{1440}{EI} + \frac{180}{EI} = 0$$

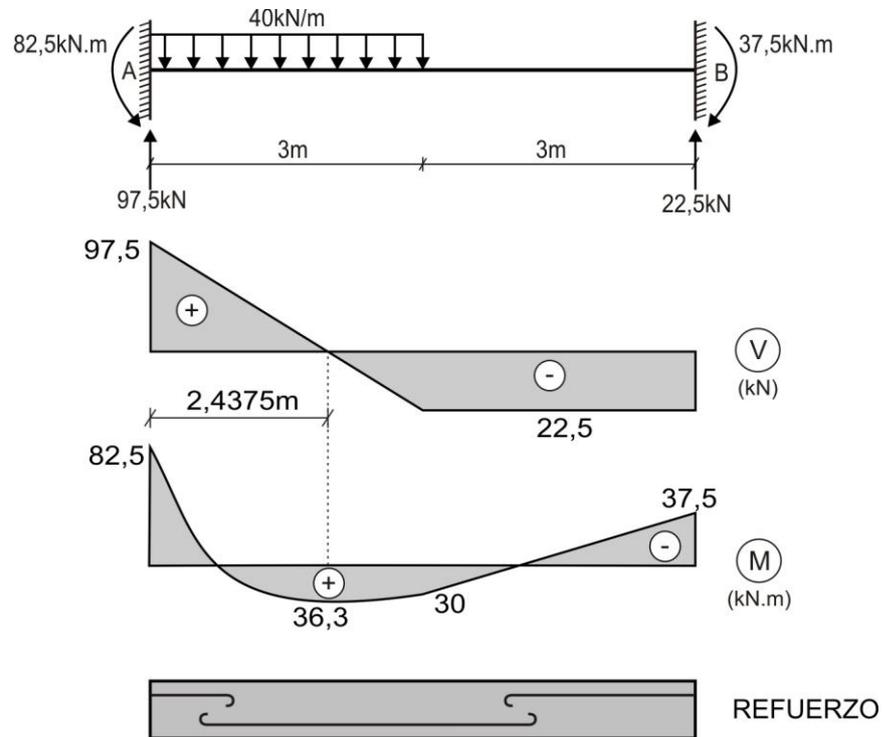
$$M_A - 3V_A = -210 \quad \dots\dots\dots (2)$$

Resolvemos las ecuaciones (1) y (2), obteniendo:

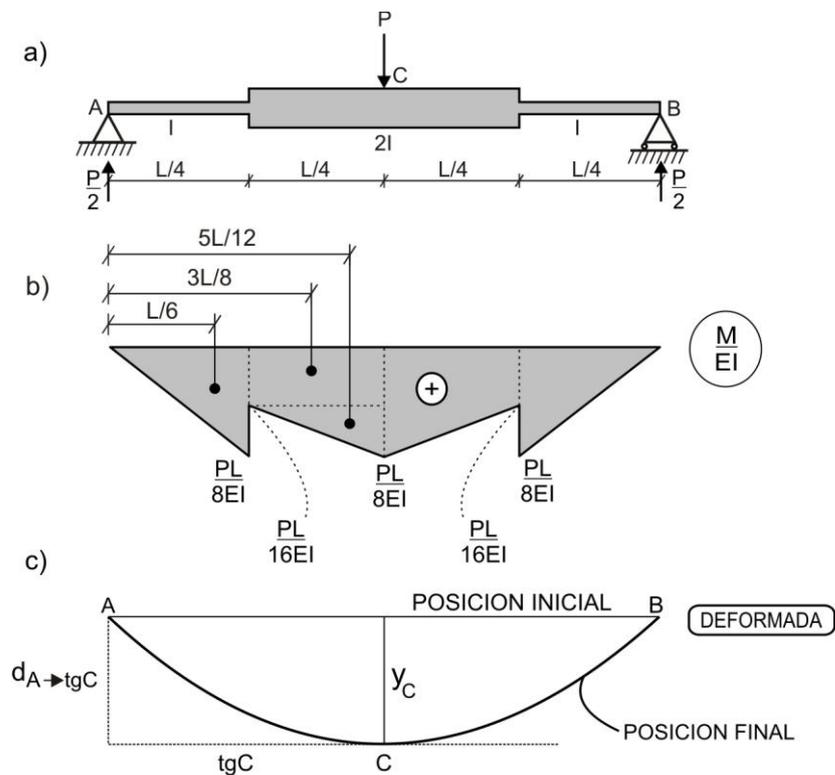
$$V_A = 97,5\text{kN} \uparrow$$

$$M_A = 82,5\text{kN.m}$$

Con estos valores graficamos los diagramas finales de fuerza cortante, momento flector y refuerzo.



3. Graficamos el diagrama M/EI para la viga, así como su deformada.



TEOREMA 1:

$$\theta_C - \theta_A = \text{AREA}_{M/EI}^{A,C}$$

$$-\theta_A = \frac{1}{2} \left(\frac{L}{4} \right) \left(\frac{PL}{8EI} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{PL}{16EI} + \frac{PL}{8EI} \right) \left(\frac{L}{4} \right)$$

$$\theta_A = -\frac{5PL^2}{128EI}$$

La orientación de la pendiente en A es en sentido horario.

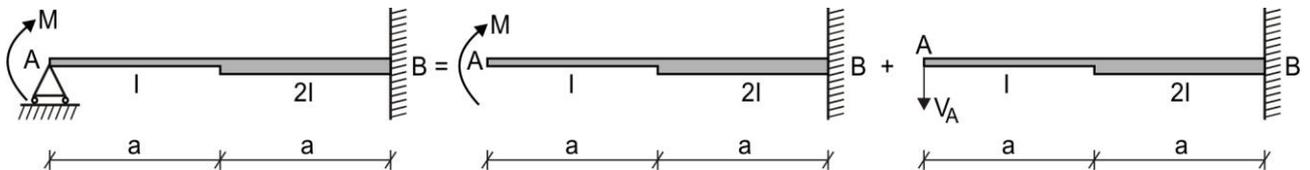
TEOREMA 2:

$$y_C = d_{A \rightarrow \text{tg}C} = \frac{1}{2} \left(\frac{L}{4} \right) \left(\frac{PL}{8EI} \right) \left(\frac{L}{6} \right) + \left(\frac{L}{4} \right) \left(\frac{PL}{16EI} \right) \left(\frac{3L}{8} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{L}{4} \right) \left(\frac{PL}{16EI} \right) \left(\frac{5L}{12} \right)$$

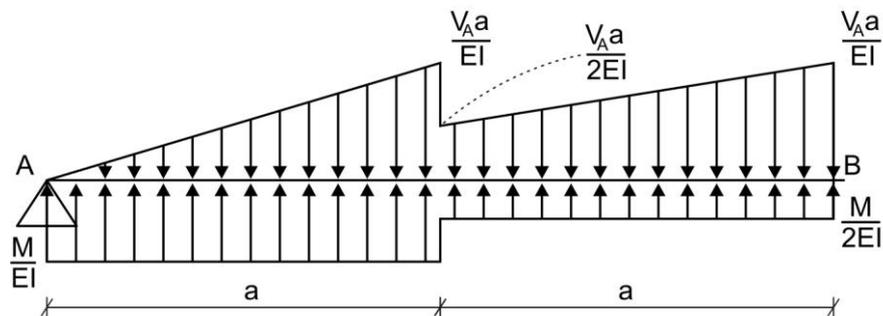
$$y_C = \frac{3PL^3}{256EI} \downarrow$$

Indica que el punto A está por encima de la tangente en C

4. Reemplazamos la reacción en A por V_A y aplicamos el Principio de Superposición de Cargas.



Aplicamos la viga conjugada y lo cargamos con los diagramas correspondientes:



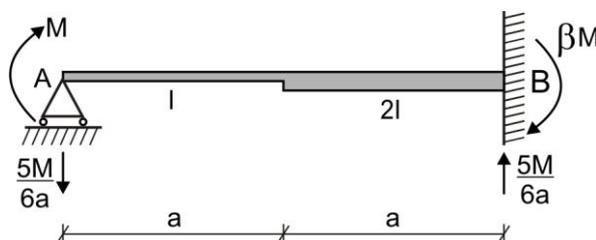
Se sabe que:

$$y_A = \bar{M}_A = 0$$

$$\left(\frac{M}{EI} \right) (a) \left(\frac{a}{2} \right) + \left(\frac{M}{2EI} \right) (a) \left(\frac{3a}{2} \right) - \frac{1}{2} (a) \left(\frac{V_A a}{EI} \right) \left(\frac{2a}{3} \right) - (a) \left(\frac{V_A a}{2EI} \right) \left(\frac{3a}{2} \right) - \frac{1}{2} (a) \left(\frac{V_A a}{2EI} \right) \left(\frac{5a}{3} \right) = 0$$

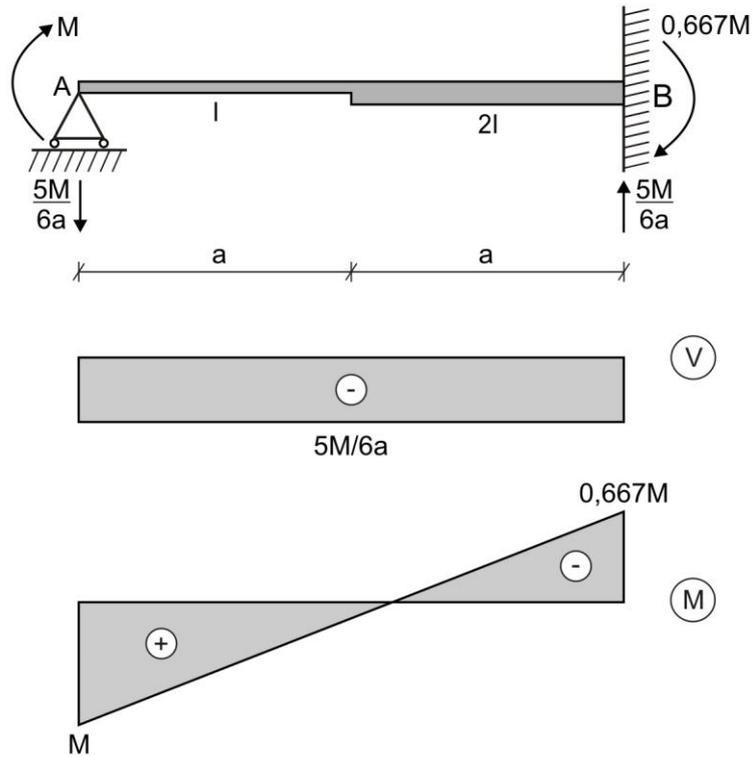
$$V_A = \frac{5M}{6a} \downarrow$$

Retornamos a la viga original, la cual quedará así:



$$\sum M_B = 0 \quad \Rightarrow \quad -M - \beta M + \left(\frac{5M}{6a}\right)(2a) = 0 \quad \therefore \quad \beta = 0,667$$

De esta manera, los diagramas finales de fuerza cortante y momento flector serán los mostrados en la siguiente figura.

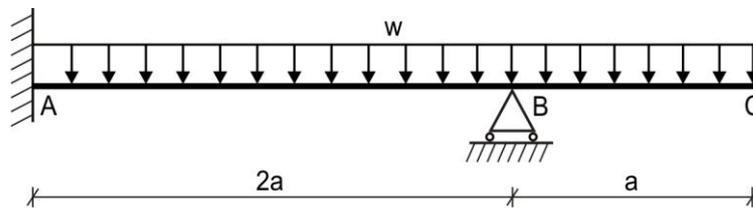




EVALUACIÓN	PRACTICA CALIFICADA Nº 4	SEM. ACADÉMICO	2007 – I
CURSO	RESISTENCIA DE MATERIALES I	SECCIÓN	26E
PROFESOR	Ph.D. GENNER VILLARREAL CASTRO	DURACIÓN	110m
ESCUELA	INGENIERIA CIVIL	CICLO	V

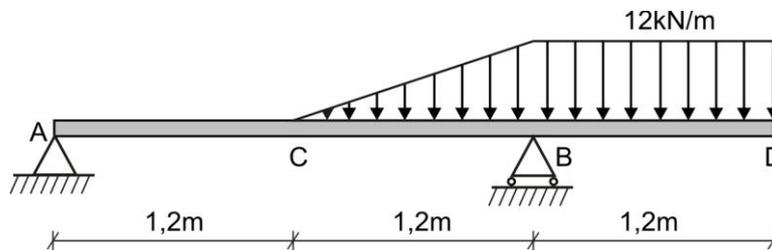
1. METODO DE LA DOBLE INTEGRACION. Resolver la viga mostrada en la figura, graficando sus diagramas de fuerza cortante, momento flector y refuerzo, así como determinar la deflexión en el extremo libre C. Considerar que la sección transversal es constante.

..... (6 puntos)



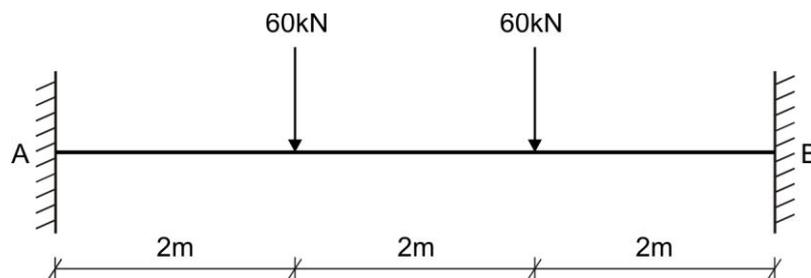
2. METODO DE LOS PARAMETROS INICIALES. La viga con un voladizo mostrada en la figura está simplemente apoyada en A y B. Calcular las deflexiones en C y D, considerando $E = 200\text{GPa}$ e $I = 12 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$

..... (5 puntos)



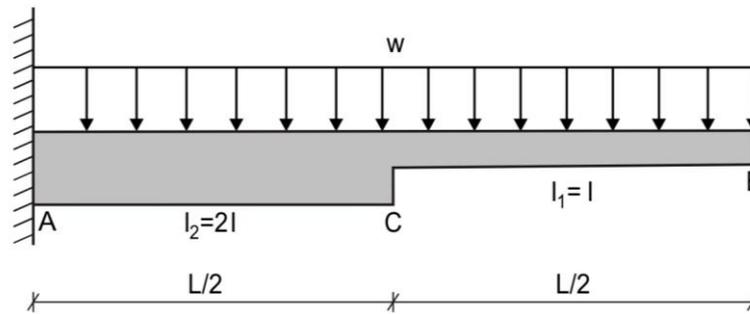
3. METODO DEL AREA DE MOMENTOS. Resolver la viga, graficando los diagramas de fuerza cortante, momento flector y refuerzo. Determinar la deflexión máxima, considerando $E = 19000\text{N/mm}^2$, $b = 400\text{mm}$ y $h = 600\text{mm}$

..... (5 puntos)



4. METODO DE LA VIGA CONJUGADA. Determinar la deflexión δ_B en el extremo libre B de la viga en voladizo AB mostrada en la figura. La viga soporta una carga uniforme de intensidad "w" y tiene momentos de inercia $I_2 = 2I$ e $I_1 = I$ en las porciones AC y CB, respectivamente.

..... (4 puntos)



FECHA	La Molina, 18 de Junio del 2007
-------	---------------------------------

SOLUCIONARIO DE PRÁCTICA CALIFICADA Nº 4

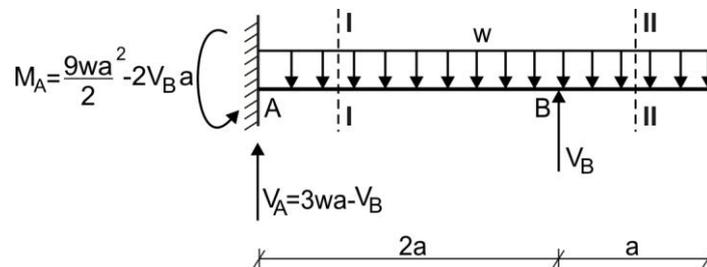
CICLO 2007 – I

1. Calculamos el grado de indeterminación:

$$G.I. = 4 - 3 = 1$$

La viga es una vez hiperestática.

Eliminamos el apoyo en B y lo reemplazamos por V_B , calculando las reacciones en A



$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad V_A + V_B - 3wa = 0 \quad \therefore \quad V_A = 3wa - V_B$$

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad M_A + V_B(2a) - w(3a)(3a/2) = 0 \quad \therefore \quad M_A = \frac{9wa^2}{2} - 2V_B a$$

TRAMO I-I ($0 \leq x \leq 2a$)

$$EIy'' = (3wa - V_B)x - \left(\frac{9wa^2}{2} - 2V_B a \right) - \frac{wx^2}{2}$$

$$EIy' = (3wa - V_B) \frac{x^2}{2} - \left(\frac{9wa^2}{2} - 2V_B a \right) x - \frac{wx^3}{6} + C_1$$

$$EIy = (3wa - V_B) \frac{x^3}{6} - \left(\frac{9wa^2}{2} - 2V_B a \right) \frac{x^2}{2} - \frac{wx^4}{24} + C_1 x + C_2$$

Luego, aplicamos las condiciones de borde, con la finalidad de determinar las constantes de integración.

a) Si $x = 0 \quad \Rightarrow \quad y_A = y_{x=0} = 0 \quad \therefore \quad C_2 = 0$

b) Si $x = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta_A = \theta_{x=0} = 0 \quad \therefore \quad C_1 = 0$

c) Si $x = 2a \quad \Rightarrow \quad y_B = y_{x=2a} = 0$

$$(3wa - V_B) \frac{(2a)^3}{6} - \left(\frac{9wa^2}{2} - 2V_B a \right) \frac{(2a)^2}{2} - \frac{w(2a)^4}{24} = 0$$

De donde:

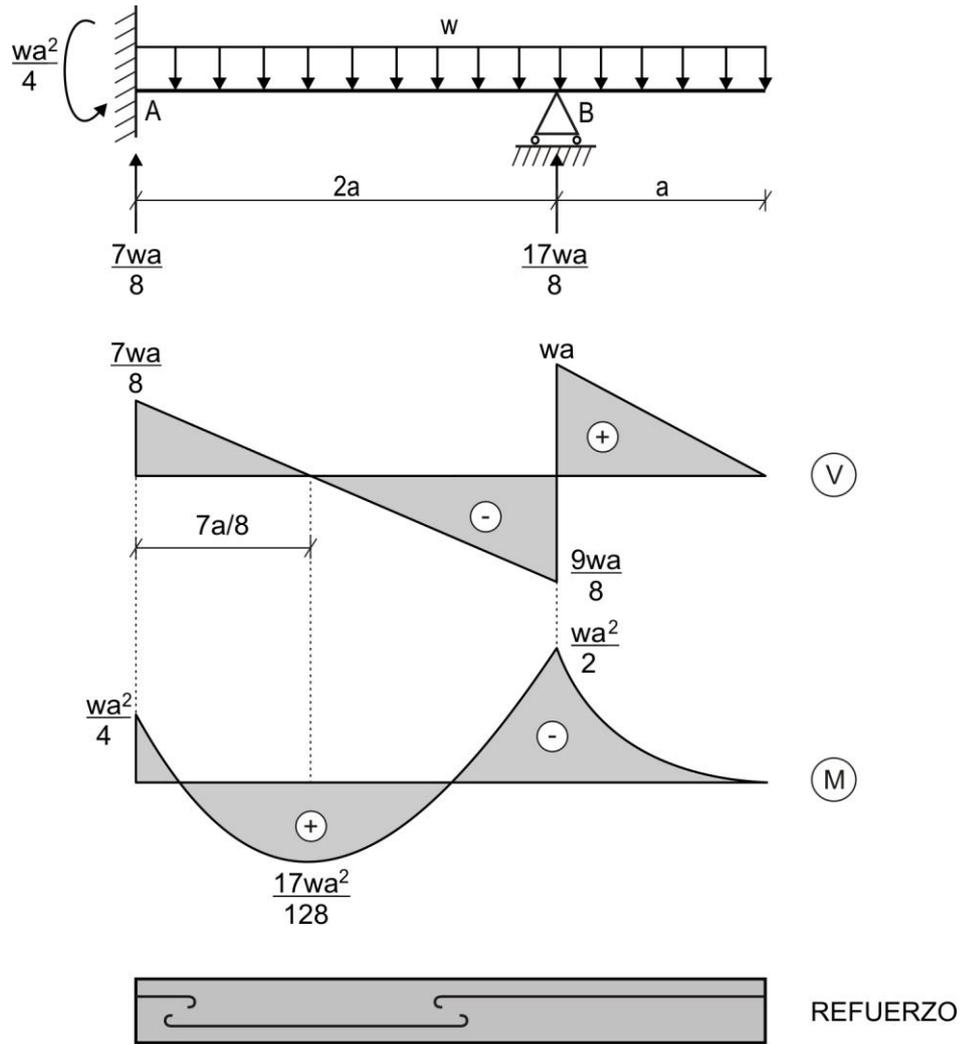
$$V_B = \frac{17wa}{8} \uparrow$$

De esta manera, calculamos las otras reacciones y graficamos los diagramas de fuerza cortante, momento flector y refuerzo.

Las ecuaciones finales para el tramo I-I serán:

$$EIy' = \frac{7wax^2}{16} - \frac{wa^2x}{4} - \frac{wx^3}{6}$$

$$EIy = \frac{7wax^3}{48} - \frac{wa^2x^2}{8} - \frac{wx^4}{24}$$



TRAMO II-II ($2a \leq x \leq 3a$)

$$EIy'' = \frac{7wa}{8}x - \frac{wa^2}{4} - \frac{wx^2}{2} + \frac{17wa}{8}(x - 2a)$$

$$EIy' = \frac{7wax^2}{16} - \frac{wa^2x}{4} - \frac{wx^3}{6} + \frac{17wa(x - 2a)^2}{16} + C_3$$

$$EIy = \frac{7wax^3}{48} - \frac{wa^2x^2}{8} - \frac{wx^4}{24} + \frac{17wa(x - 2a)^3}{48} + C_3x + C_4$$

Aplicamos el Principio de Continuidad, para determinar los coeficientes C_3 y C_4

PRINCIPIO DE CONTINUIDAD:

d) Si $x = 2a \Rightarrow \theta_{x=2a}^I = \theta_{x=2a}^{II}$

$$\frac{7wa(2a)^2}{16} - \frac{wa^2(2a)}{4} - \frac{w(2a)^3}{6} = \frac{7wa(2a)^2}{16} - \frac{wa^2(2a)}{4} - \frac{w(2a)^3}{6} + C_3$$

De donde:

$$C_3 = 0$$

$$e) \text{ Si } x = 2a \quad \Rightarrow \quad y_{x=2a}^I = y_{x=2a}^{II}$$

$$\frac{7wa(2a)^3}{48} - \frac{wa^2(2a)^2}{8} - \frac{w(2a)^4}{24} = \frac{7wa(2a)^3}{48} - \frac{wa^2(2a)^2}{8} - \frac{w(2a)^4}{24} + 0 + 0 + C_4$$

De donde:

$$C_4 = 0$$

De esta manera, las ecuaciones finales para el tramo II-II serán:

$$EIy' = \frac{7wax^2}{16} - \frac{wa^2x}{4} - \frac{wx^3}{6} + \frac{17wa(x-2a)^2}{16}$$

$$EIy = \frac{7wax^3}{48} - \frac{wa^2x^2}{8} - \frac{wx^4}{24} + \frac{17wa(x-2a)^3}{48}$$

Determinamos la deflexión en el extremo libre C

$$y_C = y_{x=3a} = \frac{1}{EI} \left[\frac{7wa(3a)^3}{48} - \frac{wa^2(3a)^2}{8} - \frac{w(3a)^4}{24} + \frac{17wa^4}{48} \right] = -\frac{5wa^4}{24EI} \downarrow$$

2. Calculamos las reacciones en los apoyos:

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad V_B(2,4) - \frac{1}{2}(1,2)(12)(2) - (1,2)(12)(3) = 0 \quad \therefore \quad V_B = 24\text{kN} \uparrow$$

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad H_A = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -V_A + 24 - \frac{1}{2}(1,2)(12) - (1,2)(12) = 0 \quad \therefore \quad V_A = 2,4\text{kN} \downarrow$$

Planteamos la ecuación universal:

$$y = \theta_o x - \frac{2,4x^3}{6EI} + \frac{24(x-2,4)^3}{6EI} + \frac{12(x-2,4)^4}{24EI} - \frac{10(x-1,2)^5}{120EI} + \frac{10(x-2,4)^5}{120EI} - \frac{12(x-2,4)^4}{24EI}$$

Aplicamos la condición de borde o extremo:

$$\text{Si } x = 2,4\text{m} \quad \Rightarrow \quad y_{x=2,4} = 0$$

$$2,4\theta_o - \frac{2,4(2,4)^3}{6EI} - \frac{10(1,2)^5}{120EI} = 0$$

De donde:

$$\theta_o = \frac{2,3904}{EI}$$

Por lo tanto, la ecuación universal quedará así:

$$y = \frac{2,3904}{EI} x - \frac{2,4x^3}{6EI} + \frac{24(x-2,4)^3}{6EI} + \frac{12(x-2,4)^4}{24EI} - \frac{10(x-1,2)^5}{120EI} + \frac{10(x-2,4)^5}{120EI} - \frac{12(x-2,4)^4}{24EI}$$

Calculamos las deflexiones en C y D

$$y_C = y_{x=1,2} = \frac{2,3904}{EI} (1,2) - \frac{2,4(1,2)^3}{6EI} = \frac{2,1773}{EI} = \frac{2,1773}{200 \cdot 10^6 \cdot 12 \cdot 10^{-6}} = 9,07 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 0,907 \text{ mm} \uparrow$$

$$y_D = y_{x=3,6} = \frac{2,3904}{EI} (3,6) - \frac{2,4(3,6)^3}{6EI} + \frac{24(1,2)^3}{6EI} + \frac{12(1,2)^4}{24EI} - \frac{10(2,4)^5}{120EI} + \frac{10(1,2)^5}{120EI} - \frac{12(1,2)^4}{24EI}$$

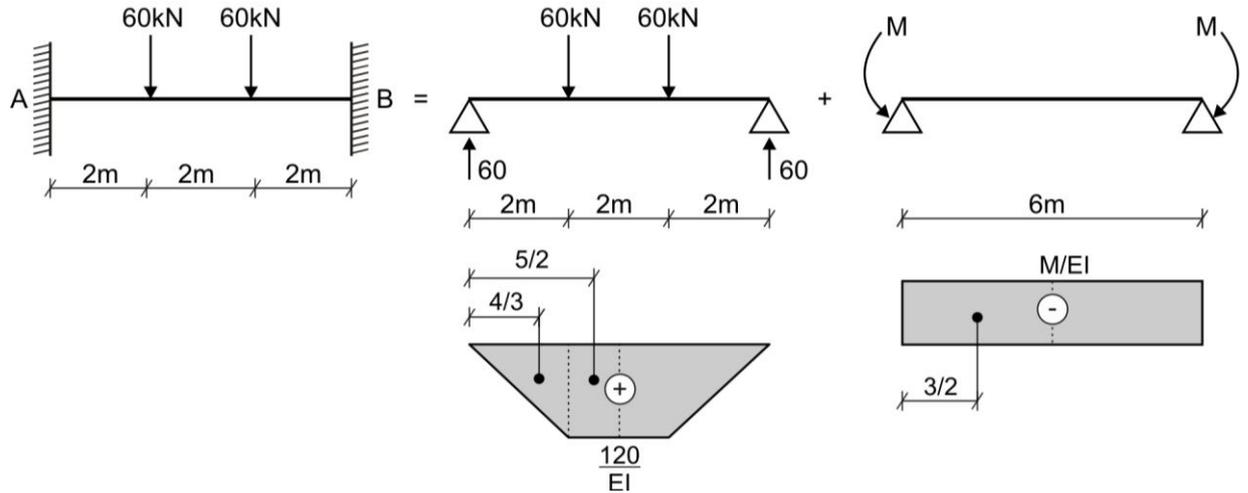
$$y_D = y_{x=3,6} = -\frac{9,5731}{EI} = -\frac{9,5731}{200 \cdot 10^6 \cdot 12 \cdot 10^{-6}} = -3,989 \cdot 10^{-3} \text{ m} = -3,989 \text{ mm} \downarrow$$

3. Determinamos el grado de indeterminación:

$$G.I. = 6 - 3 = 3$$

La viga es tres veces hiperestática.

Aplicamos el Principio de Superposición de Cargas y graficamos el diagrama M/EI



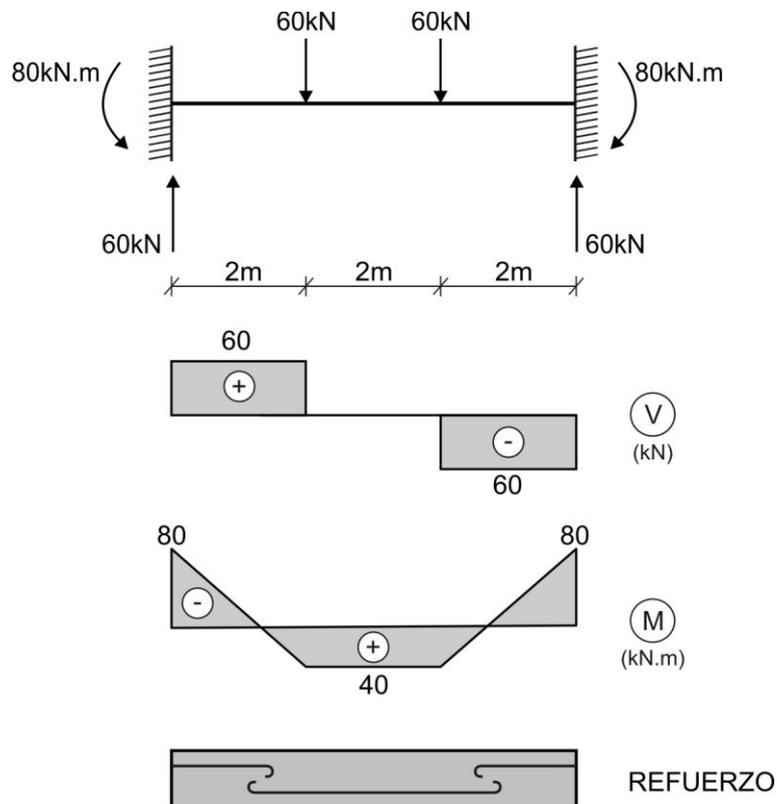
TEOREMA 1:

$$\theta_B - \theta_A = \text{AREA}_{M/EI}^{A,B}$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{120}{EI} \right) (2)(2) + \left(\frac{120}{EI} \right) (2) - \left(\frac{M}{EI} \right) (6) = 0$$

$$M = 80 \text{ kN.m}$$

De esta manera, los diagramas finales son los mostrados en el gráfico.

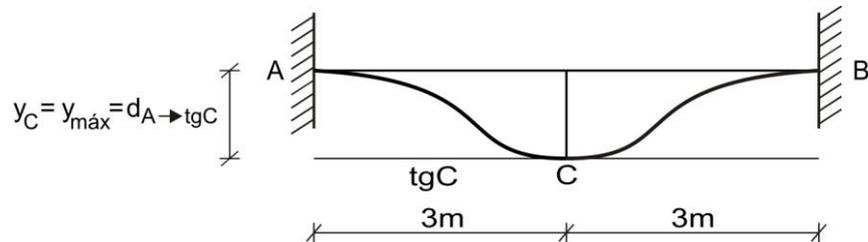


TEOREMA 2:

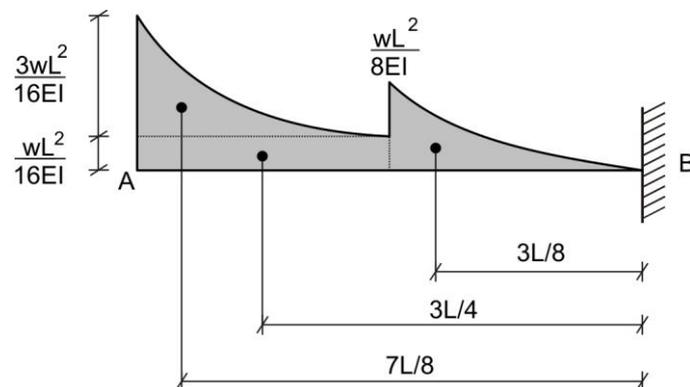
$$y_{\text{máx}} = d_{A \rightarrow \text{tg}C} = \frac{1}{2} \left(\frac{120}{EI} \right) (2) \left(\frac{4}{3} \right) + \left(\frac{120}{EI} \right) (1) \left(\frac{5}{2} \right) - \left(\frac{80}{EI} \right) (3) \left(\frac{3}{2} \right) = \frac{100}{EI} = \frac{100}{19 \cdot 10^6 \cdot (0,40,6^3 / 12)}$$

$$y_{\text{máx}} = 7,3 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 0,73 \text{ mm} \downarrow$$

La deformada después de la acción de las cargas es la mostrada en la figura.



4. Aplicamos la viga conjugada con el diagrama M/EI correspondiente a cada tramo.



Ahora, determinamos la deflexión en B

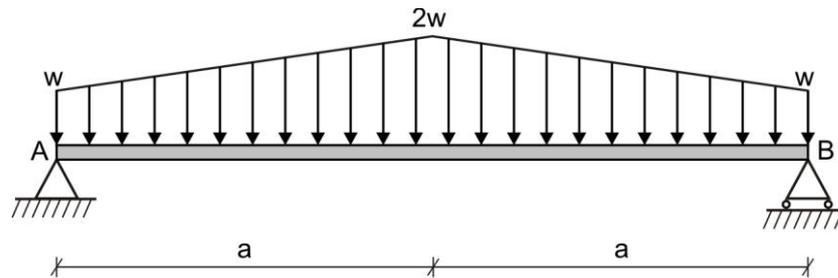
$$y_B = \bar{M}_B = -\frac{1}{3} \left(\frac{L}{2} \right) \left(\frac{wL^2}{8EI} \right) \left(\frac{3L}{8} \right) - \left(\frac{L}{2} \right) \left(\frac{wL^2}{16EI} \right) \left(\frac{3L}{4} \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{L}{2} \right) \left(\frac{3wL^2}{16EI} \right) \left(\frac{7L}{8} \right) = -\frac{15wL^4}{256EI} \downarrow$$



EVALUACIÓN	PRACTICA CALIFICADA N° 4	SEM. ACADÉMICO	2007 – II
CURSO	RESISTENCIA DE MATERIALES I	SECCIÓN	26E
PROFESOR	Ph.D. GENNER VILLARREAL CASTRO	DURACIÓN	110m
ESCUELA	INGENIERIA CIVIL	CICLO	V

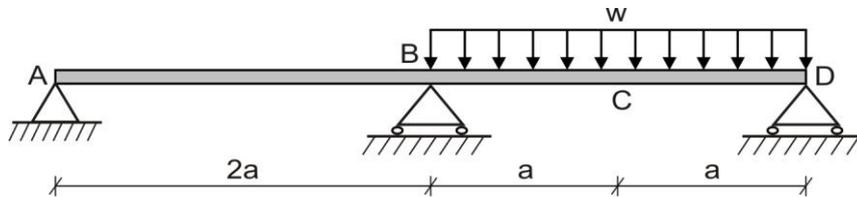
1. METODO DE LA DOBLE INTEGRACION. Determinar la deflexión máxima para la viga mostrada en la figura, si es de sección constante.

..... (5 puntos)



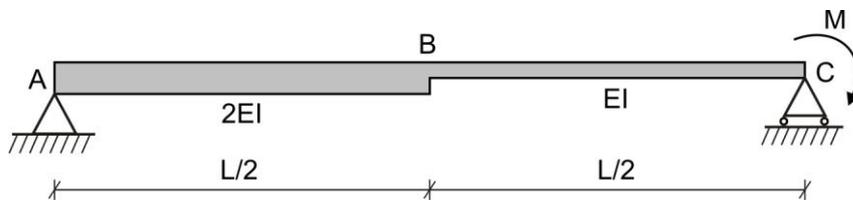
2. METODO DE LOS PARAMETROS INICIALES. Resolver la viga, graficando los diagramas de fuerza cortante, momento flector, refuerzo y determinar la deflexión en C

..... (5 puntos)

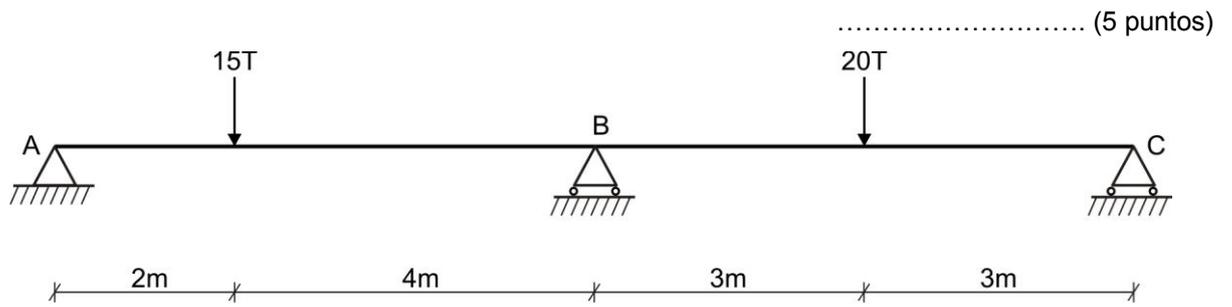


3. METODO DEL AREA DE MOMENTOS. Determinar la pendiente en A y la deflexión en B

..... (5 puntos)



4. METODO DE LA VIGA CONJUGADA. Resolver la siguiente viga y graficar los diagramas de fuerza cortante, momento flector y refuerzo. Considerar que la viga es de sección constante.

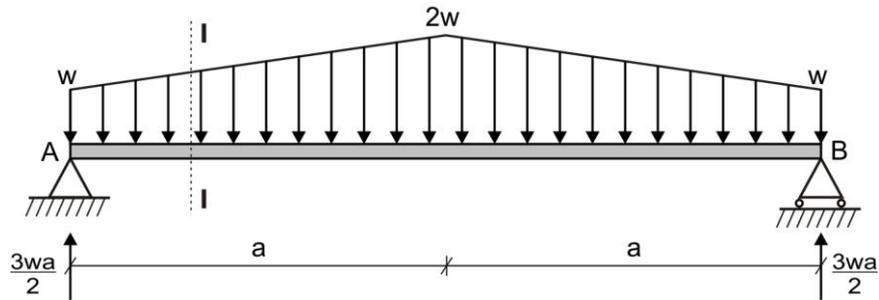


FECHA	La Molina, 19 de Noviembre del 2007
-------	-------------------------------------

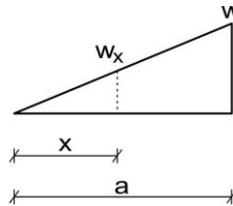
SOLUCIONARIO DE PRÁCTICA CALIFICADA Nº 4

CICLO 2007 – II

1. Calculamos las reacciones en los apoyos A y B, los cuales deben ser iguales por la simetría de la viga.



Analizamos el tramo I-I, debiendo para ello, determinar el valor de w_x en el sector triangular mostrado en la figura.



$$\frac{w_x}{x} = \frac{w}{a} \Rightarrow w_x = \frac{wx}{a}$$

TRAMO I-I ($0 \leq x \leq a$)

$$EIy'' = \frac{3wax}{2} - \frac{wx^2}{2} - \frac{1}{2}(x)\left(\frac{wx}{a}\right)\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{3wax}{2} - \frac{wx^2}{2} - \frac{wx^3}{6a}$$

$$EIy' = \frac{3wax^2}{4} - \frac{wx^3}{6} - \frac{wx^4}{24a} + C_1$$

$$EIy = \frac{wax^3}{4} - \frac{wx^4}{24} - \frac{wx^5}{120a} + C_1x + C_2$$

Aplicamos las condiciones de borde o extremos:

a) Si $x = 0 \Rightarrow y_{x=0} = 0 \therefore C_2 = 0$

b) Si $x = a \Rightarrow \theta_{x=a} = 0 \therefore C_1 = -\frac{13wa^3}{24}$

De esta manera, las ecuaciones finales serán:

$$EIy' = \frac{3wax^2}{4} - \frac{wx^3}{6} - \frac{wx^4}{24a} - \frac{13wa^3}{24}$$

$$EIy = \frac{wax^3}{4} - \frac{wx^4}{24} - \frac{wx^5}{120a} - \frac{13wa^3x}{24}$$

Determinamos la deflexión máxima, la cual sucede en el centro de la viga, debido a la simetría.

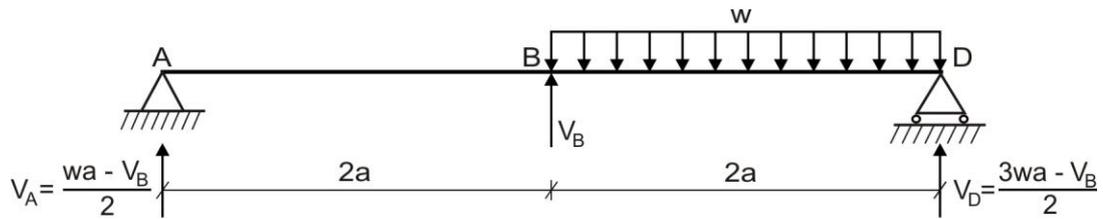
$$y_{\text{máx}} = y_{x=a} = \frac{1}{EI} \left[\frac{wa^4}{4} - \frac{wa^4}{24} - \frac{wa^4}{120} - \frac{13wa^4}{24} \right] = -\frac{41wa^4}{120EI} \downarrow$$

2. Determinamos el grado de indeterminación:

$$G.I. = 4 - 3 = 1$$

La viga es una vez hiperestática.

Eliminamos el apoyo en B y lo reemplazamos por su reacción, calculando las otras reacciones en función de V_B



$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad V_B(2a) + V_D(4a) - w(2a)(3a) = 0 \quad \therefore \quad V_D = \frac{3wa - V_B}{2}$$

$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad V_A + V_B + \frac{3wa - V_B}{2} - w(2a) = 0 \quad \therefore \quad V_A = \frac{wa - V_B}{2}$$

Planteamos la ecuación de la elástica:

$$y = \theta_o x + \frac{\left(\frac{wa - V_B}{2}\right)x^3}{6EI} + \frac{V_B(x - 2a)^3}{6EI} - \frac{w(x - 2a)^4}{24EI}$$

CONDICIONES:

$$\begin{aligned} \text{a) Si } x = 2a \quad \Rightarrow \quad y_B = y_{x=2a} = 0 \quad \therefore \quad \theta_o(2a) + \frac{\left(\frac{wa - V_B}{2}\right)(2a)^3}{6EI} &= 0 \\ \theta_o &= -\frac{(wa - V_B)a^2}{3EI} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) Si } x = 4a \quad \Rightarrow \quad y_D = y_{x=4a} = 0 \\ -\frac{(wa - V_B)a^2}{3EI}(4a) + \frac{(wa - V_B)(4a)^3}{12EI} + \frac{V_B(2a)^3}{6EI} - \frac{w(2a)^4}{24EI} &= 0 \end{aligned}$$

De donde:

$$V_B = \frac{5wa}{4} \uparrow$$

Luego, reemplazamos valores y obtenemos:

$$V_A = -\frac{wa}{8} \downarrow$$

$$V_D = \frac{7wa}{8} \uparrow$$

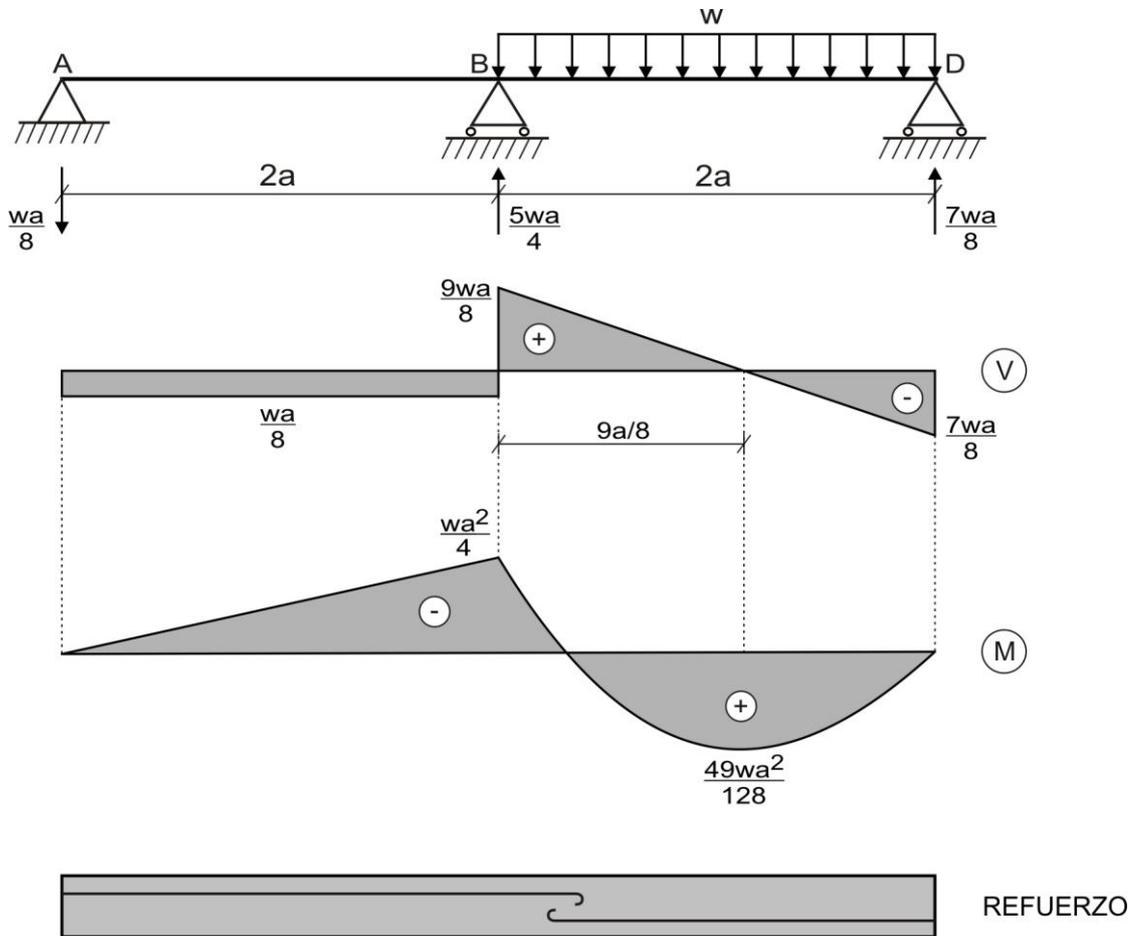
De acuerdo a los resultados obtenidos, graficamos los diagramas de fuerza cortante, momento flector y refuerzo.

Determinamos la deflexión vertical en C

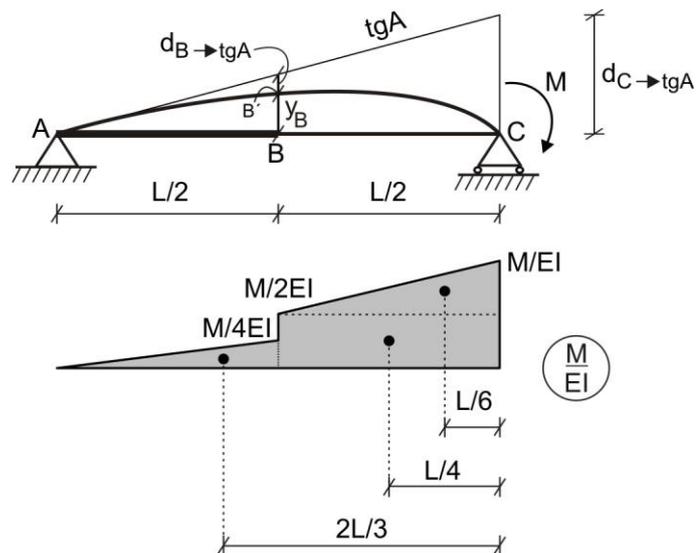
$$y_C = y_{x=3a} = \frac{wa^3}{12EI}(3a) - \frac{\left(\frac{wa}{8}\right)(3a)^3}{6EI} + \frac{\left(\frac{5wa}{4}\right)(a)^3}{6EI} - \frac{wa^4}{24EI} = -\frac{7wa^4}{48EI} \downarrow$$

Donde:

$$\theta_o = -\frac{\left(wa - \frac{5wa}{4}\right)(a)^2}{3EI} = \frac{wa^3}{12EI}$$



3. Graficamos la deformada de la viga, así como su diagrama M/EI



Del gráfico, se tiene que:

$$\operatorname{tg}\theta_A = \frac{d_{C \rightarrow \operatorname{tg}A}}{L}$$

Como θ_A es muy pequeño, se cumplirá que $\operatorname{tg}\theta_A \cong \theta_A$

Luego:

$$\theta_A = \frac{ML^2}{8EI} = \frac{ML}{8EI}$$

La pendiente en A está orientada en sentido antihorario.

Siendo:

$$d_{C \rightarrow \operatorname{tg}A} = -\frac{1}{2} \left(\frac{L}{2} \right) \left(\frac{M}{4EI} \right) \left(\frac{2L}{3} \right) - \left(\frac{L}{2} \right) \left(\frac{M}{2EI} \right) \left(\frac{L}{4} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{L}{2} \right) \left(\frac{M}{2EI} \right) \left(\frac{L}{6} \right) = -\frac{ML^2}{8EI}$$

Además:

$$d_{B \rightarrow \operatorname{tg}A} = -\frac{1}{2} \left(\frac{L}{2} \right) \left(\frac{M}{4EI} \right) \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{L}{2} \right) = -\frac{ML^2}{96EI}$$

Del gráfico tenemos que:

$$d_{B \rightarrow \operatorname{tg}A} + y_B = \frac{1}{2} d_{C \rightarrow \operatorname{tg}A}$$

Ahora, reemplazamos valores:

$$\frac{ML^2}{96EI} + y_B = \frac{ML^2}{16EI}$$

Obtenemos, el valor de la deflexión en B

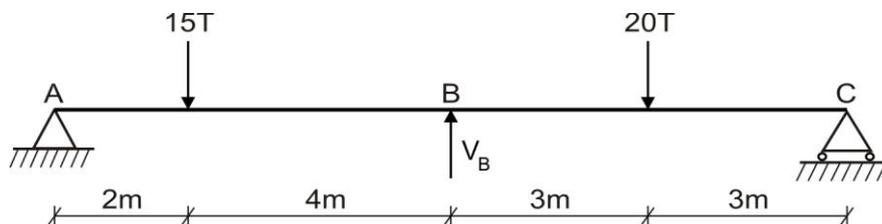
$$y_B = \frac{5ML^2}{96EI} \uparrow$$

4. Determinamos el grado de indeterminación:

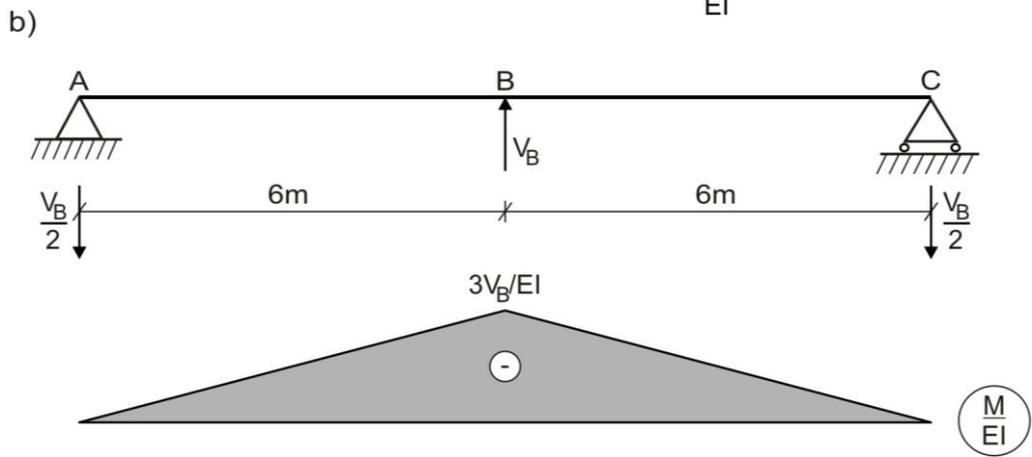
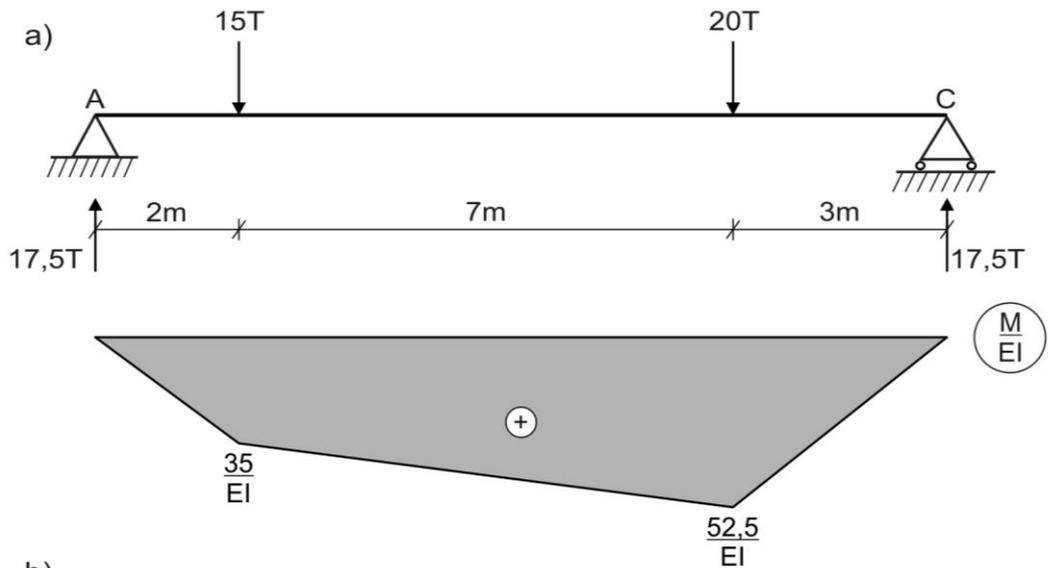
$$\text{G.I.} = 4 - 3 = 1$$

La viga es una vez hiperestática.

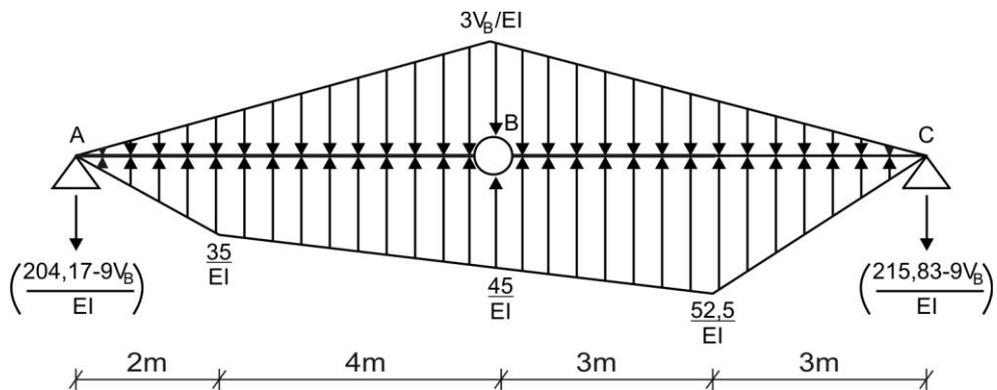
Eliminamos el apoyo en B y lo reemplazamos por V_B



Luego, convertimos la viga real en viga conjugada, aplicando como cargas los diagramas M/EI de los casos, cuando la viga está sometida a las cargas reales y cuando está sometida a la acción de V_B , es decir lo mostrado en la siguiente figura, en cuyos diagramas, el caso a) es el de las cargas reales y el caso b) el de la reacción vertical en B



De esta manera, la viga conjugada será la mostrada en la figura, en la cual calculamos sus reacciones.



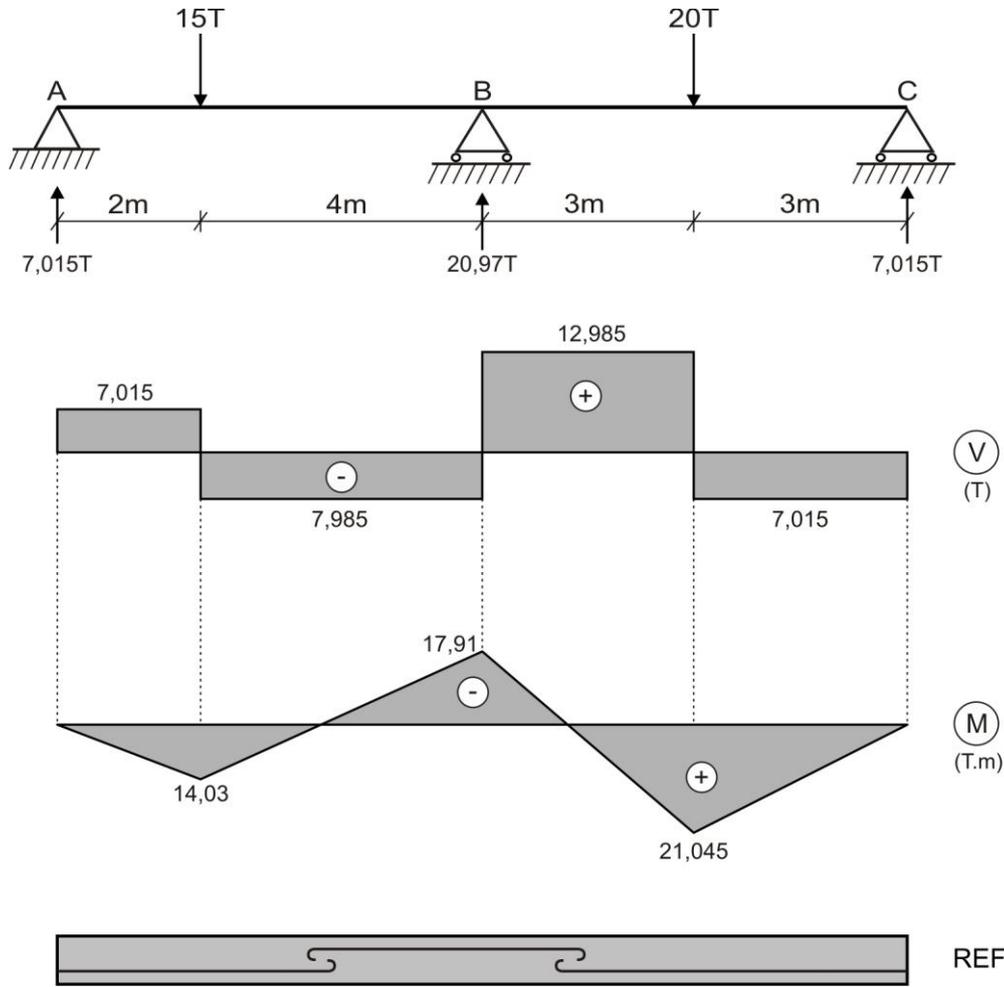
Se sabe que:

$$y_B = \bar{M}_B^{izq} = 0$$

$$-\left(\frac{204,17 - 9V_B}{EI}\right)(6) + \frac{1}{2}\left(\frac{35}{EI}\right)(2)\left(\frac{14}{3}\right) + \left(\frac{35}{EI}\right)(4)(2) + \frac{1}{2}\left(\frac{10}{EI}\right)(4)\left(\frac{4}{3}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{3V_B}{EI}\right)(6)(2) = 0$$

$$V_B = 20,97T \uparrow$$

Con este valor, graficamos los diagramas finales de fuerza cortante, momento flector y refuerzo, los cuales se muestran en la siguiente figura.

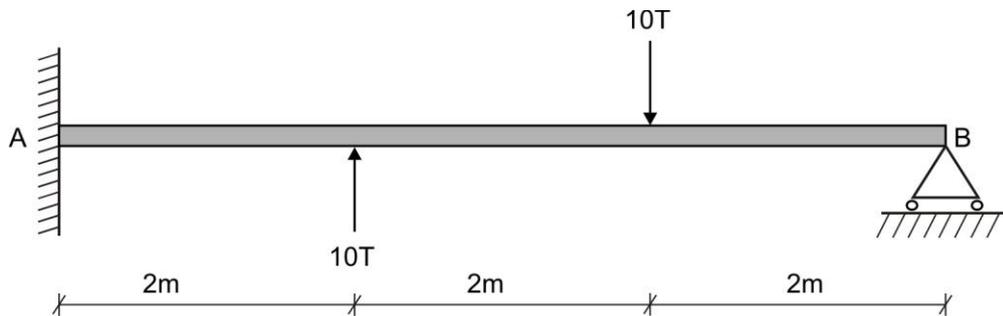




EVALUACIÓN	PRACTICA CALIFICADA N° 4	SEM. ACADÉMICO	2008 – I
CURSO	RESISTENCIA DE MATERIALES I	SECCIÓN	26E
PROFESOR	Ph.D. GENNER VILLARREAL CASTRO	DURACIÓN	110m
ESCUELA	INGENIERIA CIVIL	CICLO	V

1. METODO DE LA DOBLE INTEGRACION. Resolver la siguiente viga y determinar el valor de la deflexión máxima. Considerar $b = 30\text{cm}$, $h = 60\text{cm}$ y $E = 2345000\text{T/m}^2$

..... (6 puntos)

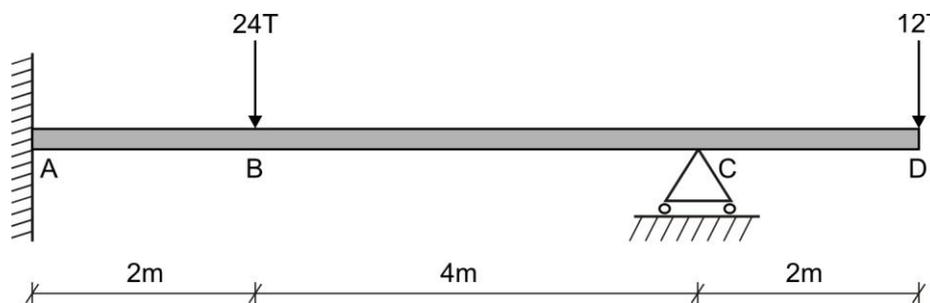


2. METODO DE LOS PARAMETROS INICIALES. Una viga de acero de sección transversal rectangular de proporción de lados 1:2, está cargada uniformemente en toda su longitud y simplemente apoyada en sus extremos. La deflexión en el centro de la viga es $9,375\text{mm}$ y la pendiente en los extremos es $0,01\text{rad}$. Determinar las dimensiones de la sección transversal de la viga, así como su longitud y la carga a la que está sometida. Considerar $E = 2 \cdot 10^6 \text{kg/cm}^2$ y $[\sigma] = 1400\text{kg/cm}^2$

..... (5 puntos)

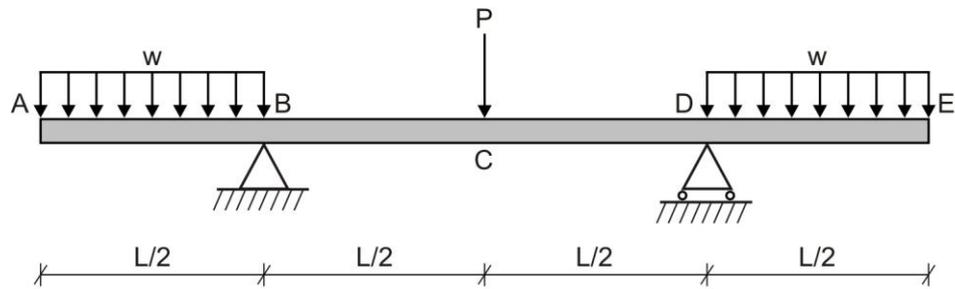
3. METODO DEL AREA DE MOMENTOS. Resolver la viga mostrada en la figura y determinar la deflexión en D. Considerar $b = 30\text{cm}$, $h = 60\text{cm}$ y $E = 2345000\text{T/m}^2$

..... (5 puntos)



4. METODO DE LA VIGA CONJUGADA. La viga mostrada en la figura tiene voladizos en ambos extremos y soporta una carga uniforme “w” en cada voladizo ¿Cuál debe ser la carga “P” en términos de wL , a fin de que no ocurra deflexión en el punto medio de la viga?

..... (4 puntos)

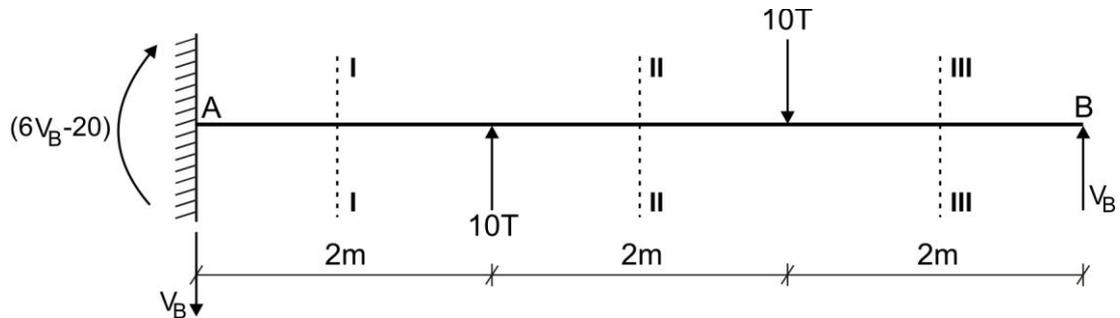


FECHA	La Molina, 16 de Junio del 2008
-------	---------------------------------

SOLUCIONARIO DE PRÁCTICA CALIFICADA Nº 4

CICLO 2008 – I

1. Eliminamos el apoyo en B y lo reemplazamos por V_B , calculando las otras reacciones en función de V_B , quedando la viga así:



Planteamos las ecuaciones tramo por tramo y aplicamos las condiciones de borde o extremos, así como el Principio de Continuidad, con la finalidad de determinar los coeficientes del proceso de integración.

TRAMO I-I ($0 \leq x \leq 2$)

$$EIy'' = (6V_B - 20) - V_B x$$

$$EIy' = (6V_B - 20)x - \frac{V_B x^2}{2} + C_1$$

$$EIy = (6V_B - 20)\frac{x^2}{2} - \frac{V_B x^3}{6} + C_1 x + C_2$$

CONDICIONES:

a) Si $x = 0 \Rightarrow \theta_{x=0} = 0 \quad \therefore \quad C_1 = 0$

b) Si $x = 0 \Rightarrow y_{x=0} = 0 \quad \therefore \quad C_2 = 0$

TRAMO II-II ($2 \leq x \leq 4$)

$$EIy'' = (6V_B - 20) - V_B x + 10(x - 2)$$

$$EIy' = (6V_B - 20)x - \frac{V_B x^2}{2} + 5(x - 2)^2 + C_3$$

$$EIy = (6V_B - 20)\frac{x^2}{2} - \frac{V_B x^3}{6} + \frac{5(x - 2)^3}{3} + C_3 x + C_4$$

PRINCIPIO DE CONTINUIDAD:

c) Si $x = 2m \Rightarrow \theta_{x=2}^I = \theta_{x=2}^{II} \quad \therefore \quad C_3 = 0$

d) Si $x = 2m \Rightarrow y_{x=2}^I = y_{x=2}^{II} \quad \therefore \quad C_4 = 0$

TRAMO III-III ($4 \leq x \leq 6$)

$$EIy'' = (6V_B - 20) - V_B x + 10(x - 2) - 10(x - 4)$$

$$EIy' = (6V_B - 20)x - \frac{V_B x^2}{2} + 5(x - 2)^2 - 5(x - 4)^2 + C_5$$

$$EIy = (6V_B - 20)\frac{x^2}{2} - \frac{V_B x^3}{6} + \frac{5(x-2)^3}{3} - \frac{5(x-4)^3}{3} + C_5 x + C_6$$

PRINCIPIO DE CONTINUIDAD:

e) Si $x = 4\text{m} \Rightarrow \theta_{x=4}^{\text{II}} = \theta_{x=4}^{\text{III}} \therefore C_5 = 0$

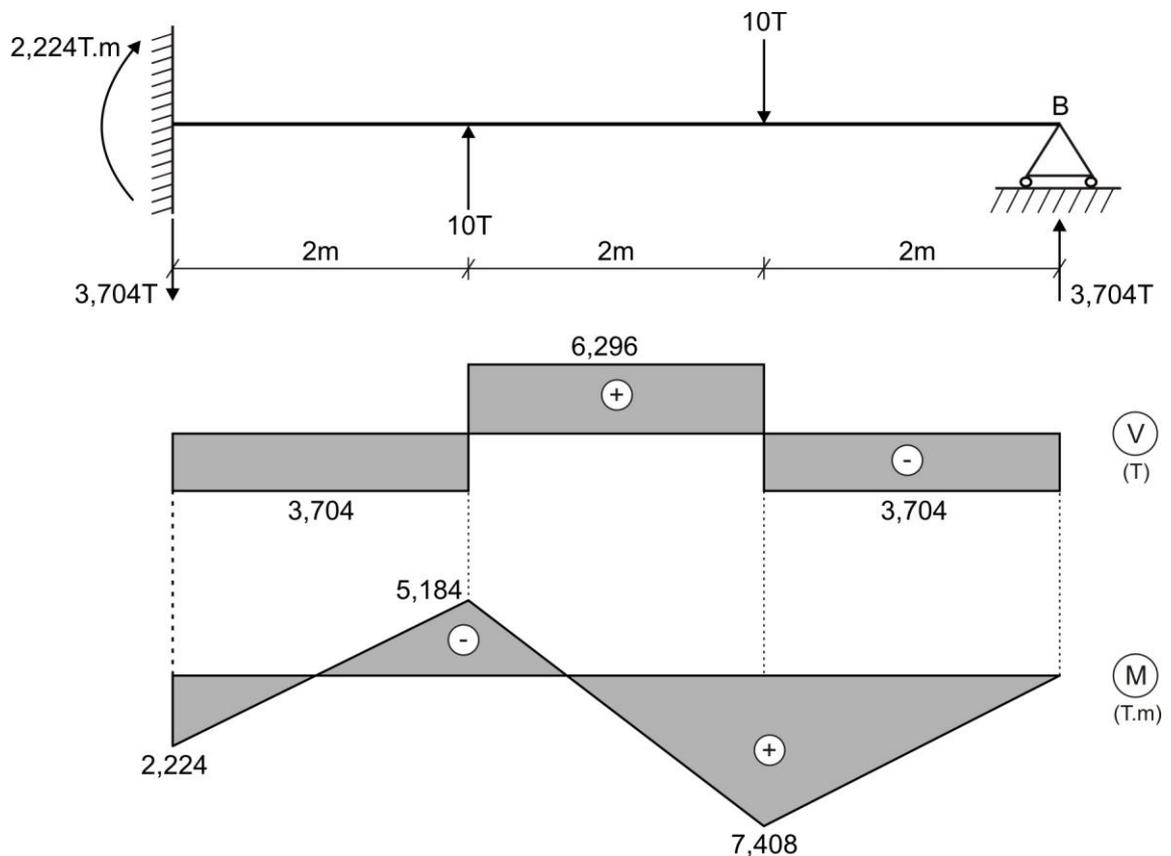
f) Si $x = 4\text{m} \Rightarrow y_{x=4}^{\text{II}} = y_{x=4}^{\text{III}} \therefore C_6 = 0$

CONDICION ADICIONAL:

g) Si $x = 6\text{m} \Rightarrow y_{x=6}^{\text{III}} = 0 \therefore (6V_B - 20)\frac{6^2}{2} - \frac{V_B(6)^3}{6} + \frac{5(4)^3}{3} - \frac{5(2)^3}{3} = 0$

$$V_B = 3,704T \uparrow$$

Con este valor, determinamos las reacciones en A y graficamos los diagramas correspondientes.



De esta manera, las ecuaciones finales serán:

TRAMO I-I ($0 \leq x \leq 2$)

$$EIy' = 2,224x - 1,852x^2$$

$$EIy = 1,112x^2 - 0,617x^3$$

TRAMO II-II ($2 \leq x \leq 4$)

$$EIy' = 2,224x - 1,852x^2 + 5(x-2)^2$$

$$EIy = 1,112x^2 - 0,617x^3 + \frac{5(x-2)^3}{3}$$

TRAMO III-III ($4 \leq x \leq 6$)

$$EIy' = 2,224x - 1,852x^2 + 5(x-2)^2 - 5(x-4)^2$$

$$EIy = 1,112x^2 - 0,617x^3 + \frac{5(x-2)^3}{3} - \frac{5(x-4)^3}{3}$$

Para calcular la deflexión máxima, debemos de analizar cada tramo en forma independiente, porque no sabemos en que tramo será donde ocurra e igualamos a cero la ecuación de la pendiente.

TRAMO I-I ($0 \leq x \leq 2$)

$$2,224x - 1,852x^2 = 0$$

Esta ecuación tiene dos soluciones, siendo válida la segunda por encontrarse en el tramo analizado y la primera es inválida por ser empotramiento perfecto.

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 1,2\text{m}$$

Luego:

$$y_2 = y_{x=1,2} = \frac{1}{EI} [1,112 \cdot 1,2^2 - 0,617 \cdot 1,2^3] = \frac{0,535}{EI} = \frac{0,535}{2345000 \cdot (0,3 \cdot 0,6^3 / 12)} = 4,22 \cdot 10^{-5} \text{ m} = 0,042\text{mm} \uparrow$$

TRAMO II-II ($2 \leq x \leq 4$)

$$2,224x - 1,852x^2 + 5(x-2)^2 = 0$$

$$3,148x^2 - 17,776x + 20 = 0$$

Esta ecuación también tiene dos soluciones, no siendo válidas ninguna de ellas, por encontrarse fuera del tramo analizado.

$$x_3 = 4,1\text{m}$$

$$x_4 = 1,55\text{m}$$

TRAMO III-III ($4 \leq x \leq 6$)

$$2,224x - 1,852x^2 + 5(x-2)^2 - 5(x-4)^2 = 0$$

$$1,852x^2 - 22,224x + 60 = 0$$

Esta ecuación tiene dos soluciones, siendo válida la que se encuentra en el tramo analizado y la otra es inválida por ser irreal, al encontrarse fuera de la viga.

$$x_5 = 7,9\text{m}$$

$$x_6 = 4,1\text{m}$$

Luego:

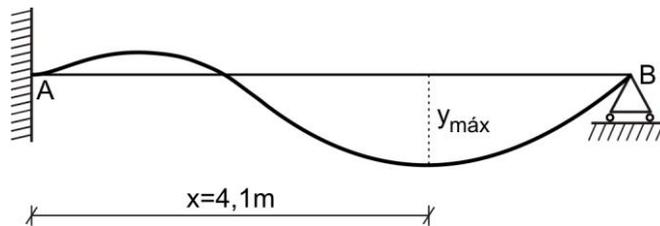
$$y_6 = y_{x=4,1} = \frac{1}{EI} \left[1,112 \cdot 4,1^2 - 0,617 \cdot 4,1^3 + \frac{5 \cdot 2,1^3}{3} - \frac{5 \cdot 0,1^3}{3} \right] = -\frac{8,398}{EI} = -\frac{8,398}{2345000 \cdot (0,3 \cdot 0,6^3 / 12)}$$

$$y_6 = y_{x=4,1} = -6,63 \cdot 10^{-4} \text{ m} = -0,663\text{mm} \downarrow$$

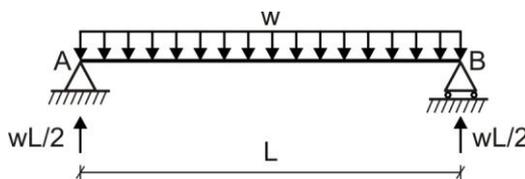
De esta manera:

$$y_{\text{máx}} = y_{x=4,1} = -0,663\text{mm} \downarrow$$

La forma como se va a deformar la viga es la mostrada en la siguiente figura:



2. Esquematizamos la viga con la carga uniformemente distribuida y calculamos las reacciones en los apoyos, para luego plantear la ecuación universal.



ECUACION UNIVERSAL:

$$y = \theta_o x + \frac{(wL/2).x^3}{6EI} - \frac{wx^4}{24EI} = \theta_o x + \frac{wLx^3}{12EI} - \frac{wx^4}{24EI}$$

CONDICION:

Si $x = L \Rightarrow y_{x=L} = 0 \quad \therefore \theta_o(L) + \frac{wL^3}{12EI} - \frac{wL^4}{24EI} = 0$

$$\theta_o = -\frac{wL^3}{24EI}$$

La pendiente en el inicio de la viga, es decir en el apoyo A, va en sentido horario.

Por dato del problema, se sabe que $\theta_A = 0,01\text{rad}$, de donde se desprende la siguiente igualdad:

$$\frac{wL^3}{24EI} = 0,01 \quad \dots\dots\dots (1)$$

Planteamos la ecuación para la deflexión máxima (centro de la viga)

$$y_{\text{máx}} = y_{x=L/2} = -\frac{wL^3}{24EI} \left(\frac{L}{2}\right) + \frac{wL}{12EI} \left(\frac{L}{2}\right)^3 - \frac{w}{24EI} \left(\frac{L}{2}\right)^4 = -\frac{5wL^4}{384EI} \downarrow$$

Por dato del problema, se tiene que $y_{\text{máx}} = 9,375\text{mm}$, de donde se desprende la otra igualdad:

$$\frac{5wL^4}{384EI} = 9,375.10^{-3} \quad \dots\dots\dots (2)$$

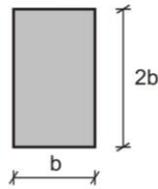
Reemplazamos (1) en (2) y obtenemos:

$$\frac{5}{16} \left(\frac{wL^3}{24EI} \right) L = 9,375.10^{-3}$$

$$\frac{5}{16} (0,01)L = 9,375.10^{-3}$$

$$L = 3\text{m}$$

Por dato del problema, sabemos que la sección transversal de la viga es rectangular con proporción de lados 1:2, tal como se muestra en la figura:



Aplicamos la condición de resistencia en flexión:

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{M}{I_z} y_{\text{máx}} \leq [\sigma]$$

Esforzamos al máximo la viga, igualando la expresión:

$$\frac{wL^2/8}{b(2b)^3/12}(b) = 14000 \Rightarrow \frac{w \cdot 3^2/8}{8b^3/12} = 14000$$

De donde:

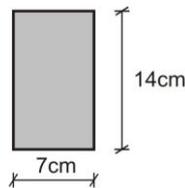
$$\frac{w}{b^3} = 8296,3 \dots\dots\dots (3)$$

Reemplazamos (3) en (1) y obtenemos:

$$\frac{w \cdot 3^3}{24 \cdot 2 \cdot 10^7 \cdot b \cdot (2b)^3 / 12} = 0,01$$

$$b = \frac{8296,3 \cdot 3^3 \cdot 12}{24 \cdot 2 \cdot 10^7 \cdot 8 \cdot 0,01} = 0,07\text{m} = 7\text{cm}$$

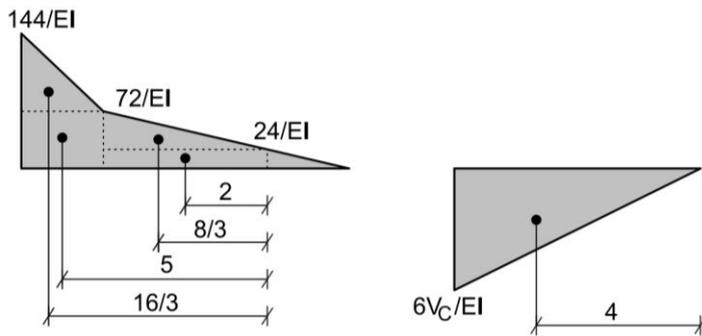
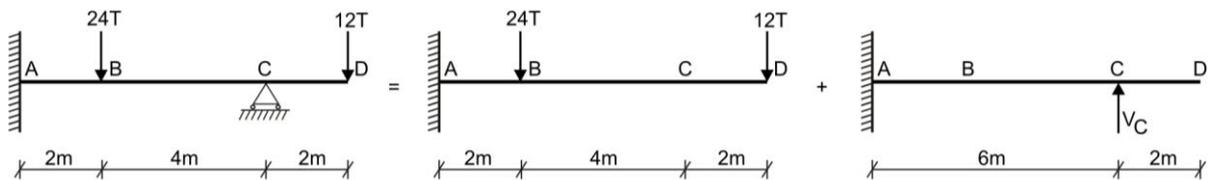
De esta manera, las dimensiones de la sección transversal de la viga son 7cm x 14cm



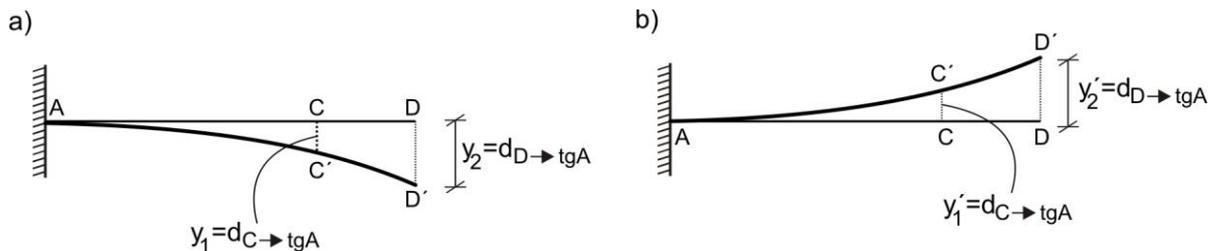
Reemplazamos el valor de "b" en la ecuación (3) obteniendo:

$$w = 8296,3 \cdot 0,07^3 = 2,8456\text{T/m}$$

3. Aplicamos el Principio de Superposición de Cargas y graficamos los diagramas M/EI para cada caso, tal como se muestra en la figura:



Las deformadas de las vigas son:



Como el apoyo C es móvil, se cumplirá:

$$y_1 + y_1' = 0$$

$$-\frac{72}{EI}(2)(5) - \frac{1}{2}(2)\left(\frac{72}{EI}\right)\left(\frac{16}{3}\right) - \left(\frac{24}{EI}\right)(4)(2) - \frac{1}{2}(4)\left(\frac{48}{EI}\right)\left(\frac{8}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{6V_C}{EI}\right)(6)(4) = 0$$

$$V_C = 21,555T \uparrow$$

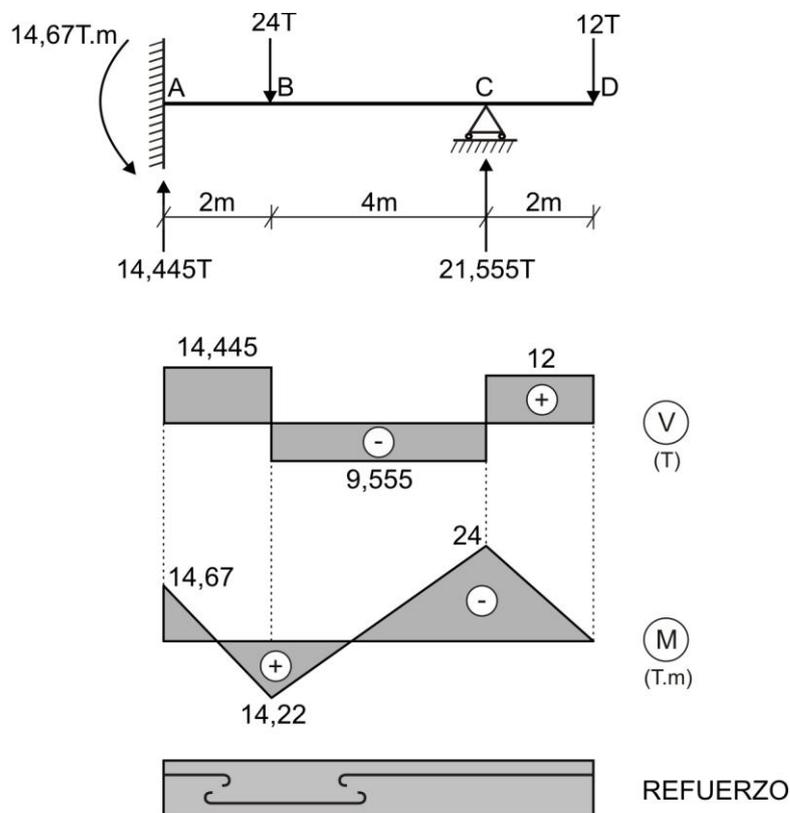
Con el valor obtenido, calculamos las reacciones en el apoyo A

$$V_A = 14,445T \uparrow$$

$$M_A = -14,67T.m$$

La orientación del momento en A es en sentido antihorario.

Ahora, graficamos los diagramas de fuerza cortante, momento flector y refuerzo, tal como se muestra en la siguiente figura:



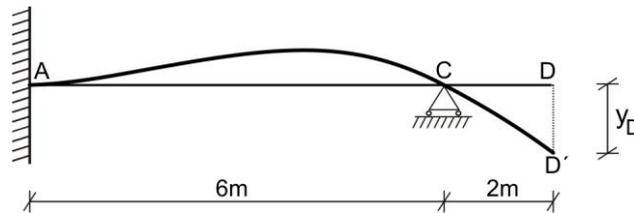
Ahora, determinamos la deflexión vertical en D

$$y_D = d_{D \rightarrow tgA} = y_2 + y_2'$$

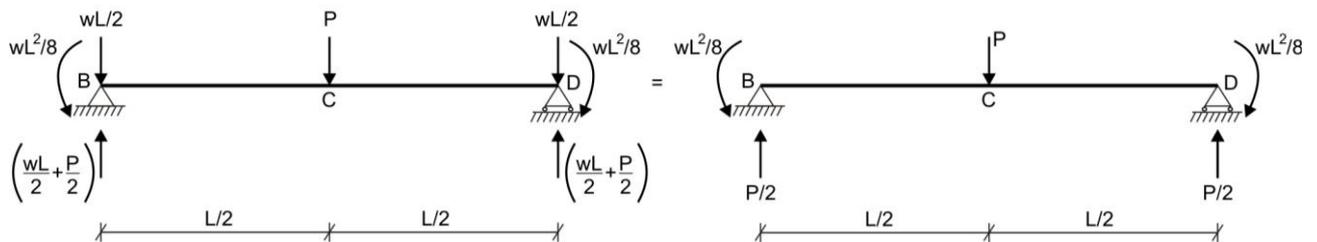
$$y_D = -\frac{72}{EI}(2)(7) - \frac{1}{2}(2)\left(\frac{72}{EI}\right)\left(\frac{22}{3}\right) - \left(\frac{24}{EI}\right)(4)(4) - \frac{1}{2}(4)\left(\frac{48}{EI}\right)\left(\frac{14}{3}\right) - \frac{1}{2}(2)\left(\frac{24}{EI}\right)\left(\frac{4}{3}\right) + \frac{1}{2}(6)\left(\frac{6.21,555}{EI}\right) \quad (6)$$

$$y_D = -\frac{72,06}{EI} = -\frac{72,06}{2345000.0,3.0,6^3 / 12} = -0,0057m = -5,7mm \downarrow$$

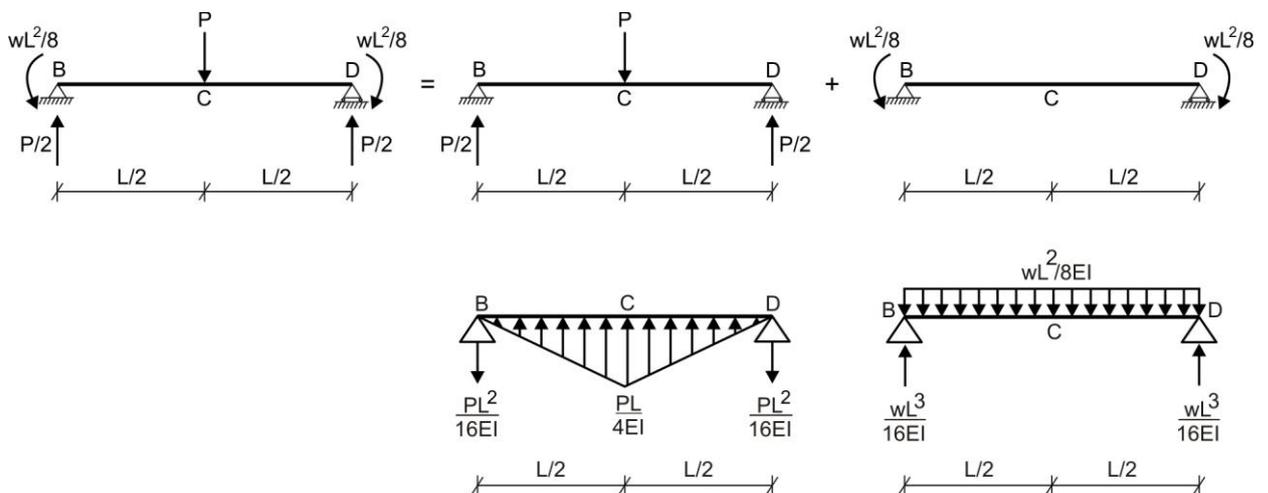
Esto indica, que el punto D está debajo de tgA y el esquema de deformada de la viga es la mostrada en la figura:



4. Transformamos las cargas de los voladizos en sus acciones equivalentes, calculando sus reacciones en los apoyos y luego eliminamos $wL/2$ en los apoyos, debido a que existe $wL/2$ hacia abajo y hacia arriba.



Aplicamos el Principio de Superposición de Cargas y esquemizamos las vigas como viga conjugada, calculando las reacciones en los apoyos.



Luego, por dato del problema, se sabe que la deflexión en C es cero.

$$y_C = \bar{M}_C = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{PL^2}{16EI} \left(\frac{L}{2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{L}{2} \right) \left(\frac{PL}{4EI} \right) \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{L}{2} \right) + \frac{wL^3}{16EI} \left(\frac{L}{2} \right) - \frac{wL^2}{8EI} \left(\frac{L}{2} \right) \left(\frac{L}{4} \right) = 0$$

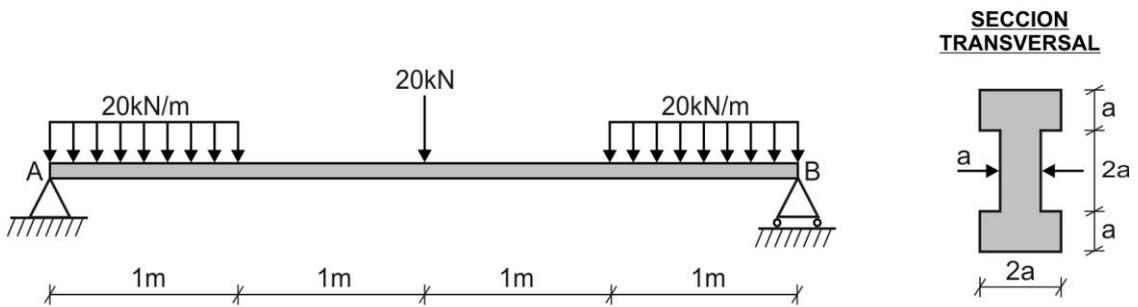
De donde:

$$P = \frac{3wL}{4}$$

EVALUACIÓN	EXAMEN FINAL	SEM. ACADÉMICO	2006 – I
CURSO	RESISTENCIA DE MATERIALES I	SECCIÓN	26E
PROFESOR	Ph.D. GENNER VILLARREAL CASTRO	DURACIÓN	110m
ESCUELA	INGENIERIA CIVIL	CICLO	V

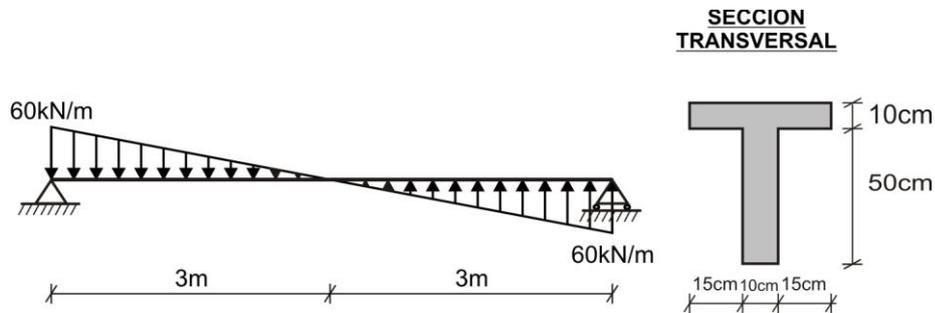
1. Para la viga mostrada en la figura, determinar el valor de “a” de la sección transversal, si el esfuerzo normal admisible es $[\sigma] = 150\text{MPa}$

..... (3 puntos)



2. Para la viga mostrada en la figura, graficar los diagramas de fuerza cortante, momento flector y esfuerzos tangenciales.

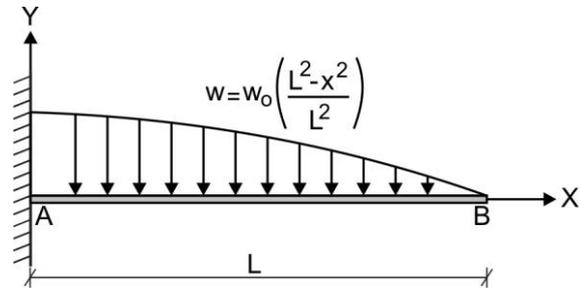
..... (5 puntos)



3. METODO DE LA DOBLE INTEGRACION. Una viga en voladizo AB está sometida a una carga parabólica que varía de intensidad según la ley $w = w_0 \left(\frac{L^2 - x^2}{L^2} \right)$, tal como se muestra en la figura.

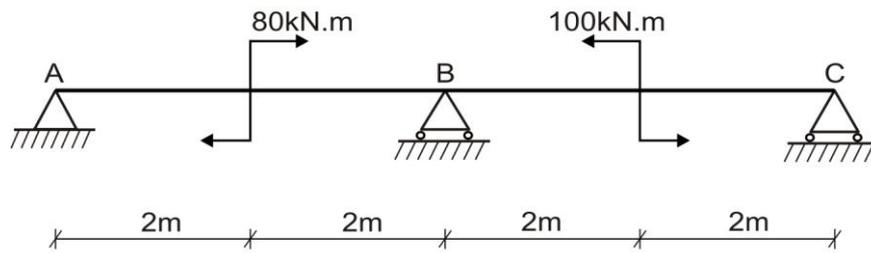
Determinar la deflexión δ_B y la pendiente θ_B en el extremo libre.

..... (6 puntos)



4. METODO DE LA VIGA CONJUGADA. Graficar los diagramas de fuerza cortante, momento flector y de refuerzo para la viga mostrada en la figura, considerando que es de sección constante.

..... (6 puntos)

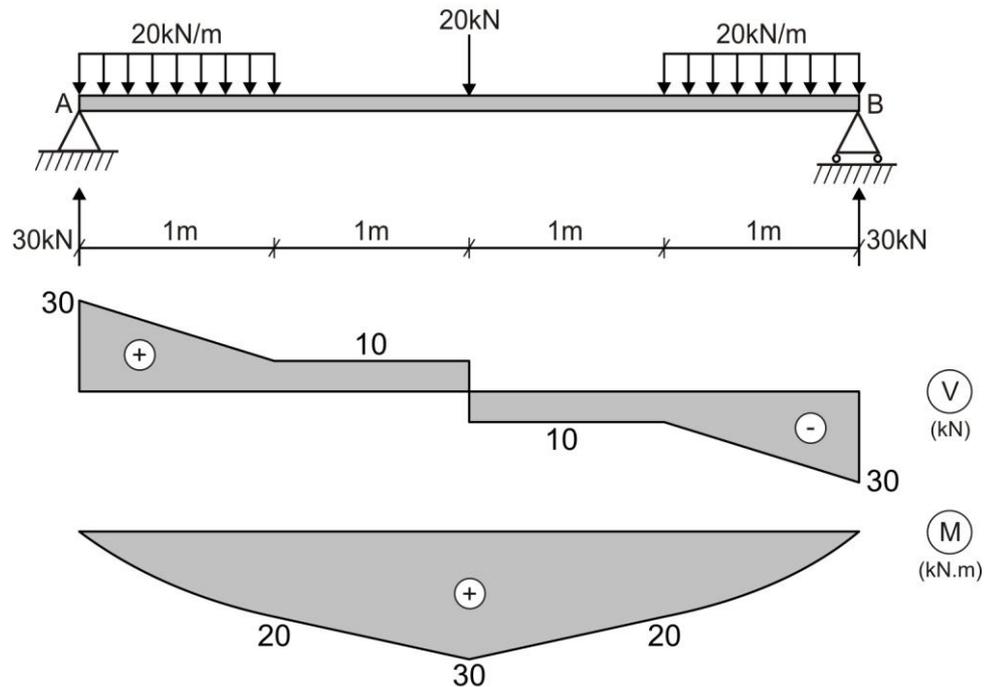


FECHA	La Molina, 26 de Junio del 2006
--------------	---------------------------------

SOLUCIONARIO DE EXAMEN FINAL

CICLO 2006 – I

1. Graficamos los diagramas de fuerza cortante y momento flector.



Determinamos el momento de inercia de la sección transversal, la cual es simétrica.

$$I_z = \left[\frac{2a \cdot a^3}{12} + 2a \cdot a(1,5a)^2 \right] \cdot 2 + \frac{a(2a)^3}{12} = 10a^4$$

Aplicamos la condición de resistencia de esfuerzo normal para flexión.

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{30 \cdot 10^3}{10a^4} (2a) \leq 150 \cdot 10^6 \Rightarrow a \geq 3,42 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$a \geq 3,42 \text{ cm}$$

Asumimos:

$$a_{\text{mín}} = 3,42 \text{ cm}$$

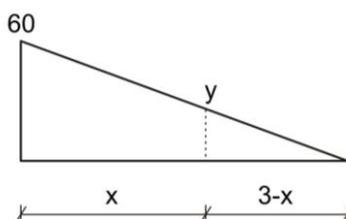
2. Calculamos las reacciones en los apoyos:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -V_B(6) + \frac{1}{2}(3)(60)(5) - \frac{1}{2}(3)(60)(1) = 0 \quad \therefore V_B = 60 \text{ kN} \downarrow$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow V_A - \frac{1}{2}(3)(60) + \frac{1}{2}(3)(60) - 60 = 0 \quad \therefore V_A = 60 \text{ kN} \uparrow$$

Planteamos las ecuaciones de fuerza cortante y momento flector:

$$\frac{y}{3-x} = \frac{60}{3} \Rightarrow y = 20(3-x) = 60 - 20x$$



$$V_x = 60 - \frac{(60 + 60 - 20x)x}{2} = 60 - 60x + 10x^2$$

Como se sabe, la cortante será cero, donde $60 - 60x + 10x^2 = 0$, obteniendo las siguientes soluciones:

$$x_1 = 1,268\text{m}$$

$$x_2 = 4,732\text{m}$$

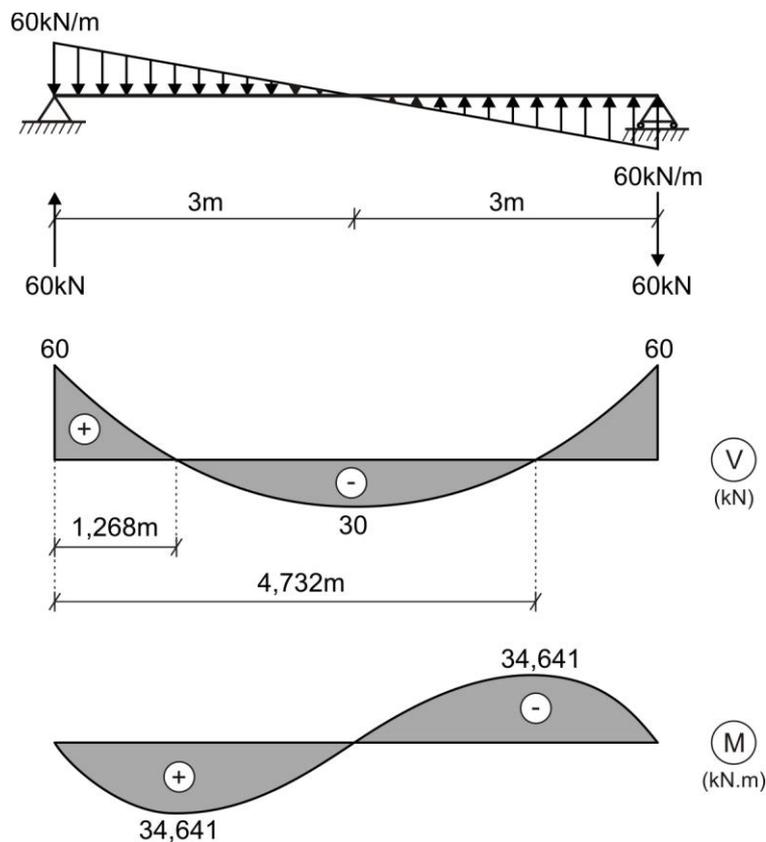
$$M_x = 60x - \frac{(60 - 20x)x^2}{2} - \frac{1}{2}(x)(60 - 60 + 20x)\left(\frac{2}{3}x\right) = 60x - 30x^2 + \frac{10}{3}x^3$$

Luego:

$$M_{\text{máx}} = M_{x=1,268} = 60 \cdot 1,268 - 30 \cdot 1,268^2 + \frac{10}{3} \cdot 1,268^3 = 34,641\text{kN.m}$$

$$M_{\text{mín}} = M_{x=4,732} = 60 \cdot 4,732 - 30 \cdot 4,732^2 + \frac{10}{3} \cdot 4,732^3 = -34,641\text{kN.m}$$

Con los valores obtenidos graficamos los diagramas de fuerza cortante y momento flector, los cuales se muestran en la figura.



Ahora, determinamos la ubicación del eje neutro:

$$Y_{\text{CG}} = \frac{10 \cdot 50 \cdot 25 + 40 \cdot 10 \cdot 55}{10 \cdot 50 + 40 \cdot 10} = 38,33\text{cm}$$

Calculamos el momento de inercia respecto al eje neutro:

$$I_z = \frac{10 \cdot 50^3}{12} + 10 \cdot 50 \cdot 13,33^2 + \frac{40 \cdot 10^3}{12} + 40 \cdot 10 \cdot 16,67^2 = 307500\text{cm}^4$$

Graficamos el diagrama de esfuerzos tangenciales:

$$\tau_A = 0$$

$$\tau_B = \frac{60 \cdot 10^3 \cdot 6668 \cdot 10^{-6}}{307500 \cdot 10^{-8} \cdot 40 \cdot 10^{-2}} = 0,325 \text{MPa}$$

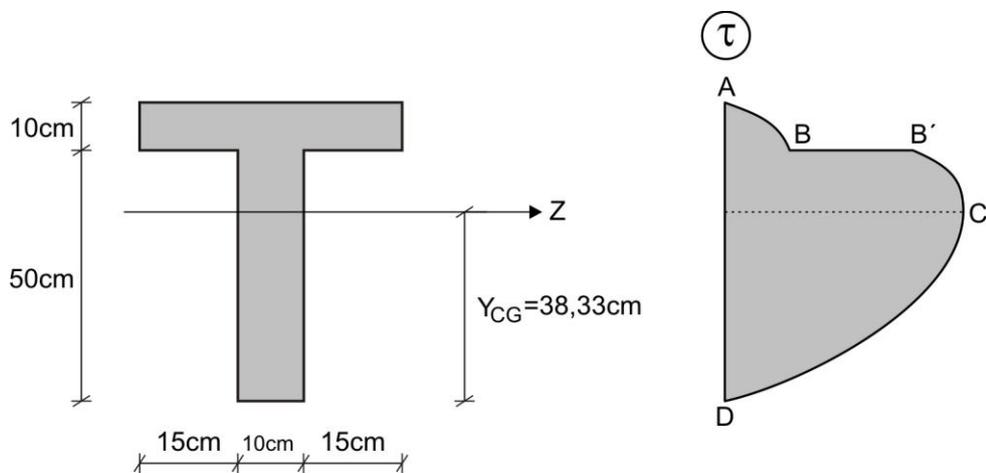
$$S_Z^{\text{sup}B} = 40 \cdot 10 \cdot 16,67 = 6668 \text{cm}^3$$

$$\tau_{B'} = \frac{60 \cdot 10^3 \cdot 6668 \cdot 10^{-6}}{307500 \cdot 10^{-8} \cdot 10 \cdot 10^{-2}} = 1,301 \text{MPa}$$

$$\tau_{\text{máx}} = \tau_C = \frac{60 \cdot 10^3 \cdot 7348,94 \cdot 10^{-6}}{307500 \cdot 10^{-8} \cdot 10 \cdot 10^{-2}} = 1,434 \text{MPa}$$

$$S_Z^{\text{sup}C} = 6668 + 10 \cdot 11,67 \cdot 5,835 = 7348,94 \text{cm}^3$$

$$\tau_D = 0$$



3. Sabemos que:

$$EIy^{IV} = -w$$

$$EIy^{IV} = -w_o \left(\frac{L^2 - x^2}{L^2} \right)$$

$$EIy^{IV} = -w_o + \frac{w_o x^2}{L^2}$$

Integramos una vez y obtenemos:

$$EIy^{III} = -w_o x + \frac{w_o x^3}{3L^2} + C_1$$

CONDICIONES:

$$\text{a) Si } x = L \quad \Rightarrow \quad V_{x=L} = 0 \quad \therefore \quad -w_o L + \frac{w_o L}{3} + C_1 = 0$$

De donde:

$$C_1 = \frac{2w_o L}{3}$$

La ecuación quedará así:

$$EIy''' = -w_0x + \frac{w_0x^3}{3L^2} + \frac{2w_0L}{3}$$

Integramos otra vez y obtenemos:

$$EIy'' = -\frac{w_0x^2}{2} + \frac{w_0x^4}{12L^2} + \frac{2w_0Lx}{3} + C_2$$

b) Si $x = L \Rightarrow M_{x=L} = 0 \quad \therefore -\frac{w_0L^2}{2} + \frac{w_0L^2}{12} + \frac{2w_0L^2}{3} + C_2 = 0$

De donde:

$$C_2 = -\frac{w_0L^2}{4}$$

De esta manera, la ecuación quedará así:

$$EIy'' = -\frac{w_0x^2}{2} + \frac{w_0x^4}{12L^2} + \frac{2w_0Lx}{3} - \frac{w_0L^2}{4}$$

Integramos otra vez, obteniendo:

$$EIy' = -\frac{w_0x^3}{6} + \frac{w_0x^5}{60L^2} + \frac{w_0Lx^2}{3} - \frac{w_0L^2x}{4} + C_3$$

c) Si $x = 0 \Rightarrow \theta_{x=0} = 0 \quad \therefore C_3 = 0$

La ecuación de la pendiente quedará así:

$$EIy' = -\frac{w_0x^3}{6} + \frac{w_0x^5}{60L^2} + \frac{w_0Lx^2}{3} - \frac{w_0L^2x}{4}$$

De donde:

$$\theta_B = \theta_{x=L} = \frac{1}{EI} \left[-\frac{w_0L^3}{6} + \frac{w_0L^3}{60} + \frac{w_0L^3}{3} - \frac{w_0L^3}{4} \right] = -\frac{w_0L^3}{15EI}$$

La pendiente en B va en sentido horario.

Integramos una vez más y obtenemos:

$$EIy = -\frac{w_0x^4}{24} + \frac{w_0x^6}{360L^2} + \frac{w_0Lx^3}{9} - \frac{w_0L^2x^2}{8} + C_4$$

d) Si $x = 0 \Rightarrow y_{x=0} = 0 \quad \therefore C_4 = 0$

Luego, la ecuación de la deflexión será:

$$EIy = -\frac{w_0x^4}{24} + \frac{w_0x^6}{360L^2} + \frac{w_0Lx^3}{9} - \frac{w_0L^2x^2}{8}$$

De donde:

$$y_B = y_{x=L} = \frac{1}{EI} \left[-\frac{w_0L^4}{24} + \frac{w_0L^4}{360} + \frac{w_0L^4}{9} - \frac{w_0L^4}{8} \right] = -\frac{19w_0L^4}{360EI} \downarrow$$

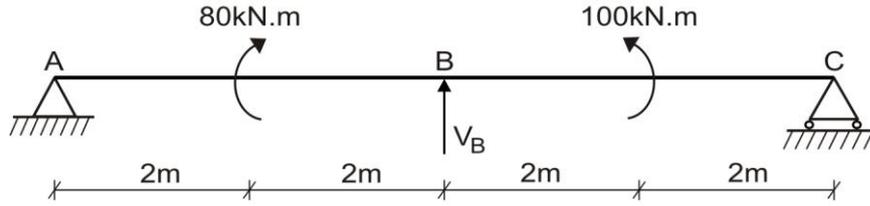
Como se podrá entender la deflexión en B va verticalmente hacia abajo.

4. Determinamos el grado de indeterminación:

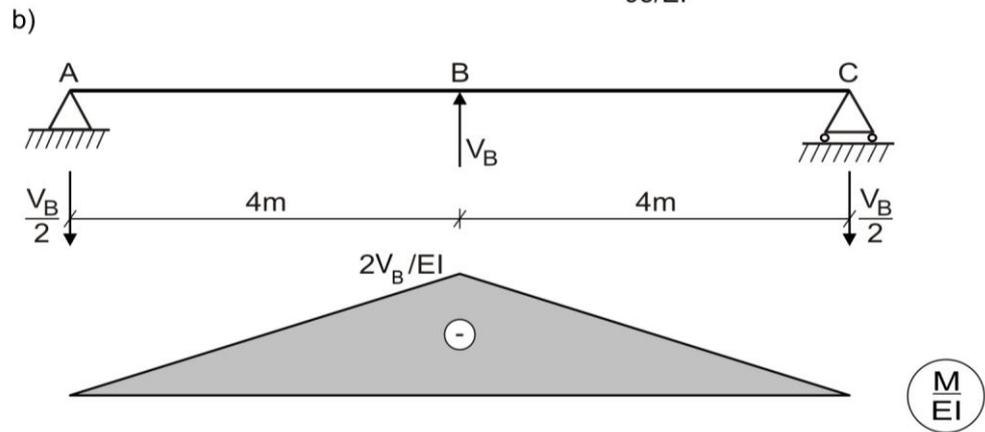
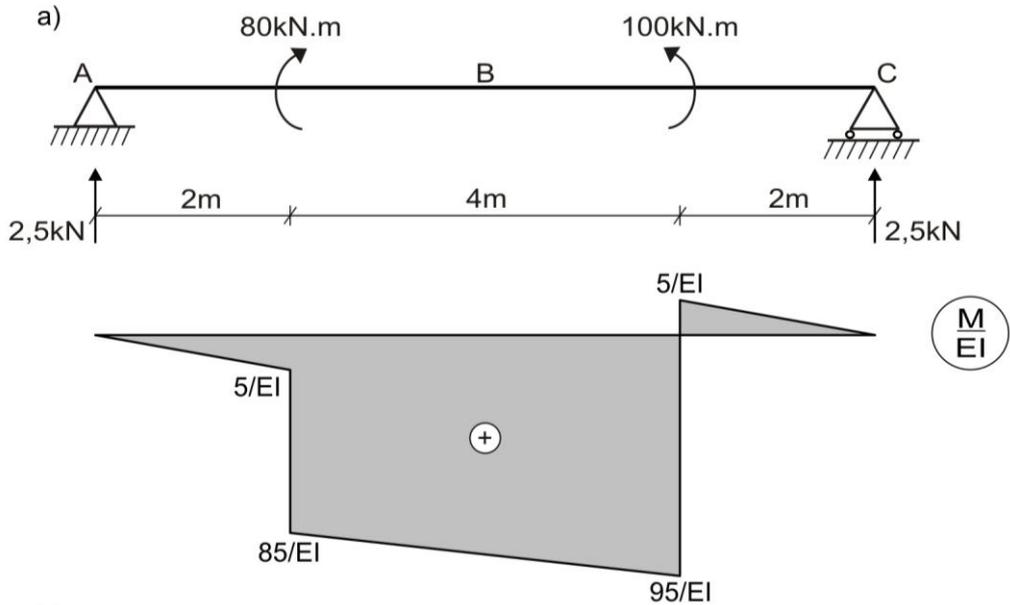
$$G.I. = 4 - 3 = 1$$

La viga es una vez hiperestática.

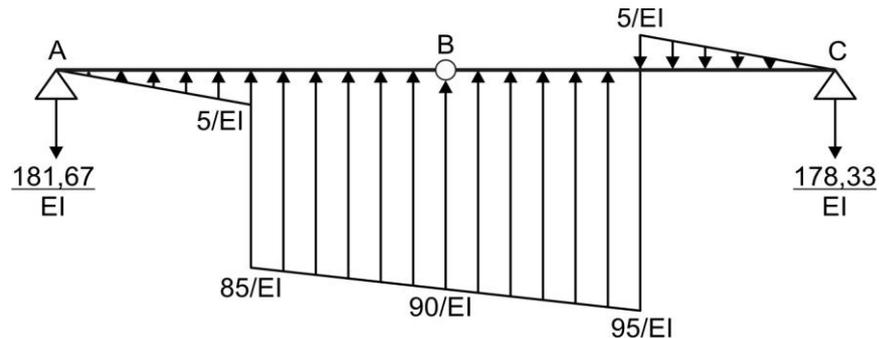
Eliminamos el apoyo B y lo reemplazamos por su reacción V_B , tal como se muestra en la figura.

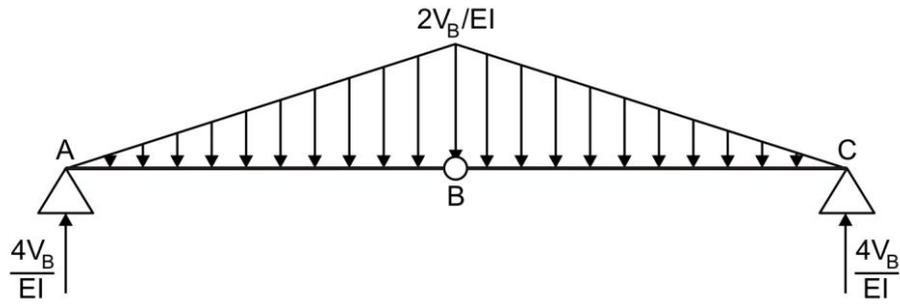


Aplicamos el Principio de Superposición de Cargas, analizando dos vigas, una bajo las cargas externas (figura a) y la otra debido a la acción de la reacción (figura b), graficando para ambos casos sus diagramas M/EI



Aplicamos viga conjugada, convirtiendo la viga y lo analizamos por separado, con la finalidad de evitar la superposición de diagramas y determinamos las reacciones para ambos casos.





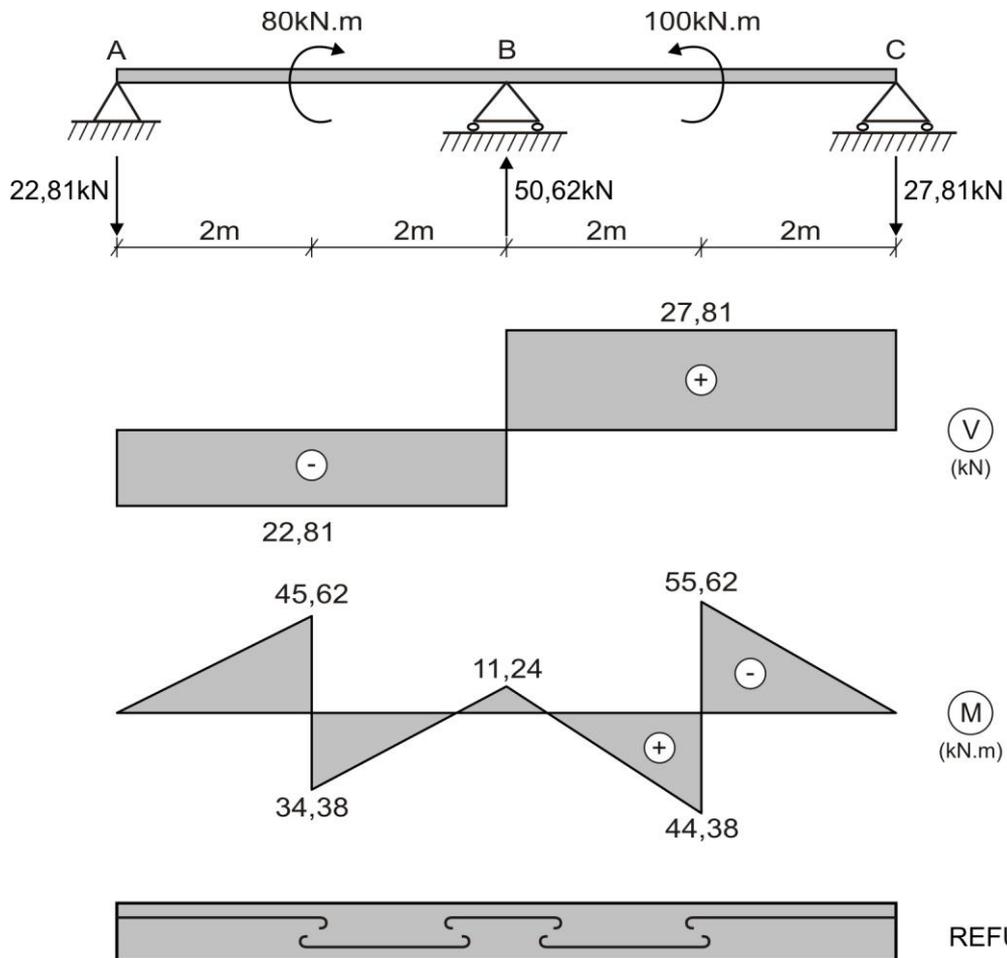
Se sabe que:

$$y_B = \bar{M}_B = 0$$

$$\left(\frac{4V_B}{EI}\right)(4) - \frac{1}{2}(4)\left(\frac{2V_B}{EI}\right)\left(\frac{4}{3}\right) - \left(\frac{181,67}{EI}\right)(4) + \frac{1}{2}(2)\left(\frac{5}{EI}\right)\left(\frac{8}{3}\right) + \left(\frac{85}{EI}\right)(2)(1) + \frac{1}{2}\left(\frac{5}{EI}\right)(2)\left(\frac{2}{3}\right) = 0$$

$$V_B = 50,62\text{kN} \uparrow$$

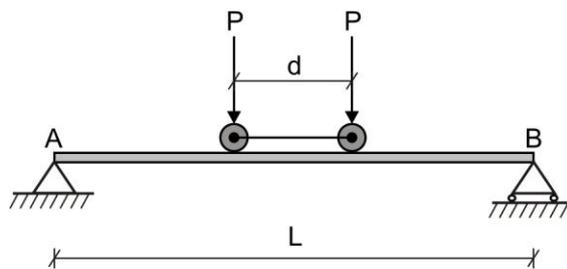
Con este valor determinamos las otras reacciones y graficamos los diagramas finales de fuerza cortante, momento flector y refuerzo.



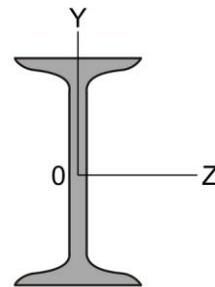
EVALUACIÓN	EXAMEN FINAL	SEM. ACADÉMICO	2006 – II
CURSO	RESISTENCIA DE MATERIALES I	SECCIÓN	26E
PROFESOR	Ph.D. GENNER VILLARREAL CASTRO	DURACIÓN	110m
ESCUELA	INGENIERIA CIVIL	CICLO	V

1. Una viga simple AB con una longitud entre apoyos $L = 24\text{pie}$ se somete a dos cargas rodantes separadas entre si una distancia $d = 6\text{pie}$, tal como se muestra en la figura. Cada rueda transmite una carga $P = 3\text{k}$ y el conjunto puede ocupar cualquier posición sobre la viga. Determinar el esfuerzo por flexión máximo sobre la viga $\sigma_{\text{máx}}$, debido a las cargas rodantes si la viga es un perfil I con módulo de resistencia $W_z = 16,2\text{plg}^3$

..... (5 puntos)

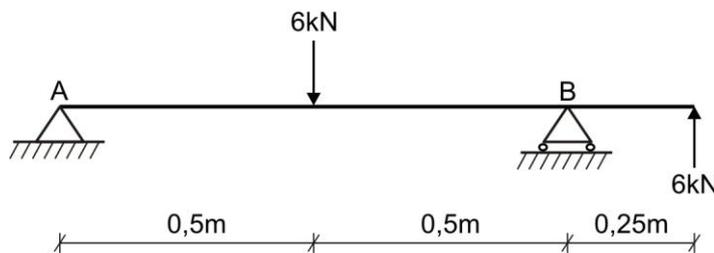


SECCION TRANSVERSAL

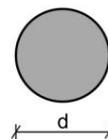


2. Determinar el diámetro “d” de la sección transversal de la viga, así como el esfuerzo tangencial máximo, si el esfuerzo normal admisible es $[\sigma] = 45\text{MPa}$

..... (3 puntos)

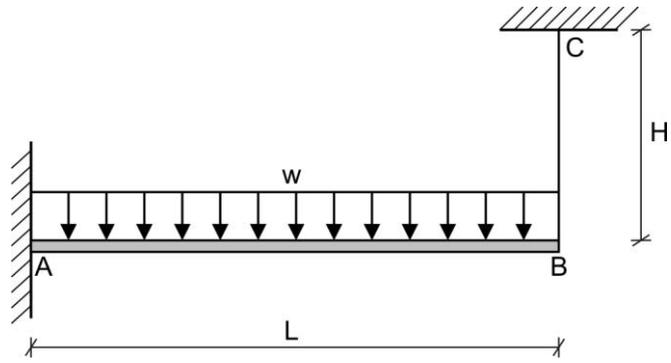


SECCION TRANSVERSAL



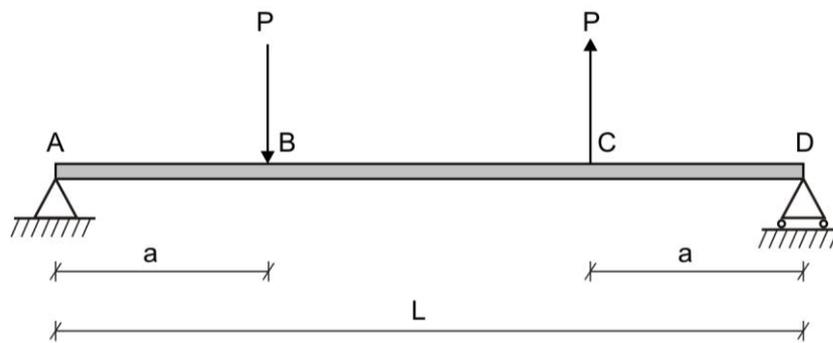
3. METODO DE LA DOBLE INTEGRACION. La viga en voladizo AB mostrada en la figura está sostenida por el cable BC en su extremo libre. Antes de que se aplique la carga, el cable está estirado pero no existe ninguna fuerza en el. Determinar la fuerza “T” en el cable debida a la carga uniforme de intensidad “w”. Suponer que EI es la rigidez a flexión de la viga y EA es la rigidez axial del cable.

..... (6 puntos)



4. METODO DEL AREA DE MOMENTOS. La viga simplemente apoyada AB mostrada en la figura soporta dos cargas concentradas P, una actuando hacia abajo y la otra hacia arriba. Determinar la pendiente θ_A en el extremo izquierdo y la deflexión y_B bajo la carga P hacia abajo.

..... (6 puntos)



FECHA	La Molina, 27 de Noviembre del 2006
-------	-------------------------------------

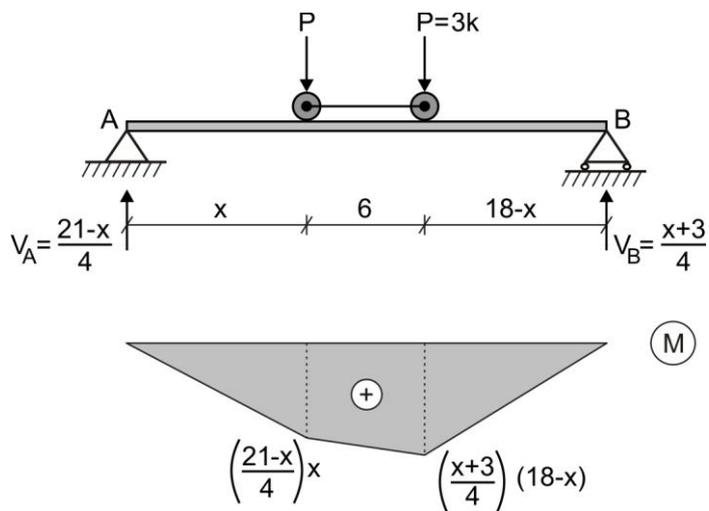
SOLUCIONARIO DE EXAMEN FINAL

CICLO 2006 – II

1. Analizamos la posición crítica de las cargas rodantes, determinando previamente las reacciones en los apoyos y graficando luego su diagrama de momento flector.

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad -3x - 3(x+6) + V_B(24) = 0 \quad \therefore \quad V_B = \frac{x+3}{4}$$

$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x+3}{4} + V_A - 6 = 0 \quad \therefore \quad V_A = \frac{21-x}{4}$$



Determinamos la distancia "x", a través de la intersección de rectas:

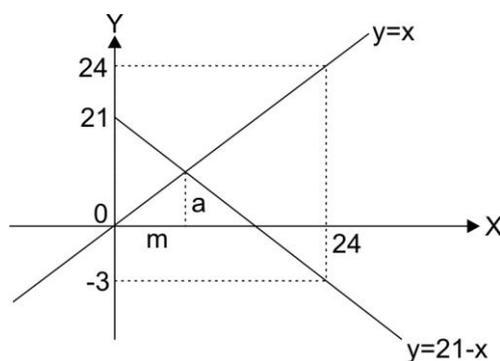
CASO 1: Intersección de las rectas $y = x$ e $y = 21 - x$

$$\text{Recta } y = x \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{m} = \frac{24}{24} \quad \therefore \quad a = m$$

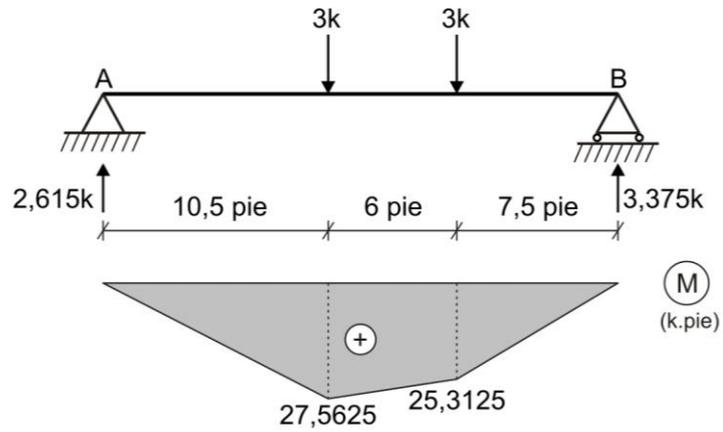
$$\text{Recta } y = 21 - x \quad \Rightarrow \quad \frac{a+3}{24-m} = \frac{24}{24} \quad \therefore \quad a+3 = 24-m$$

$$m+3 = 24-m$$

$$m = 10,5 \text{ pie}$$



De esta manera, conociendo el valor de "x", graficamos el diagrama de momento flector, el cual se muestra en la siguiente figura.



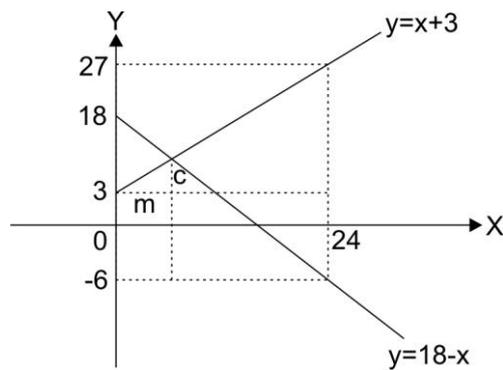
CASO 2: Intersección de las rectas $y = x + 3$ e $y = 18 - x$

$$\text{Recta } y = x + 3 \Rightarrow \frac{c}{m} = \frac{24}{24} \quad \therefore c = m$$

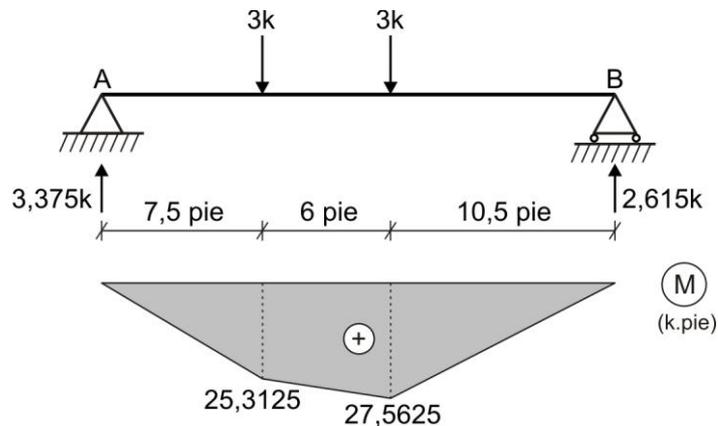
$$\text{Recta } y = 18 - x \Rightarrow \frac{c + 9}{24 - m} = \frac{24}{24} \quad \therefore c + 9 = 24 - m$$

$$m + 9 = 24 - m$$

$$m = 7,5 \text{ pie}$$



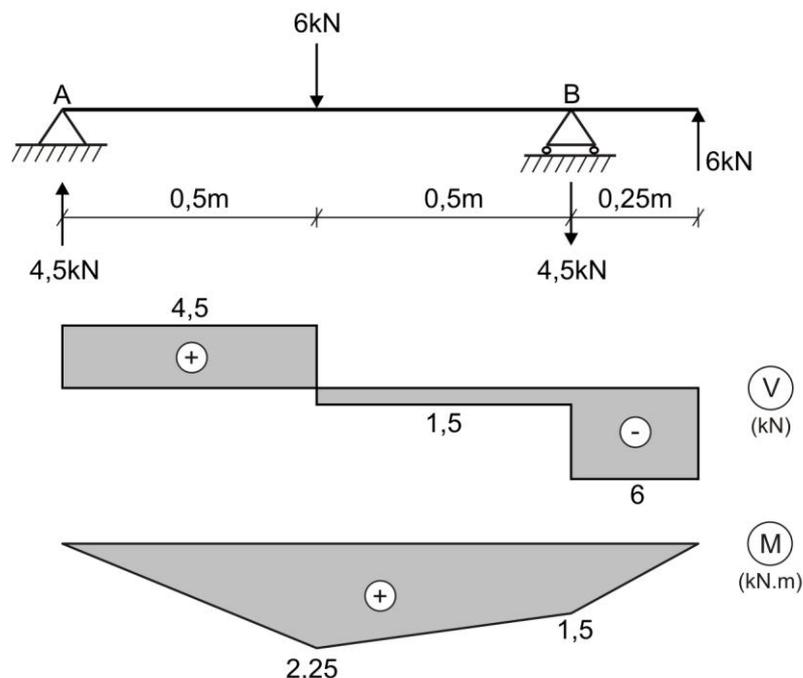
Para este caso, el diagrama de momento flector, será el mostrado en la figura.



Ambas posiciones son peligrosas, siendo el momento flector máximo $M_{\text{máx}} = 27,5625 \text{ k.pie}$, luego el esfuerzo normal máximo será:

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{M_{\text{máx}}}{W_z} = \frac{27,5625 \cdot 12}{16,2} = 20,42 \text{ ksi}$$

2. Graficamos los diagramas de fuerza cortante y momento flector.



Luego, determinamos el esfuerzo normal máximo, aplicando la condición de resistencia:

$$\sigma_{\text{máx}} \leq [\sigma] \quad \Rightarrow \quad \frac{2,25 \cdot 10^3}{(\pi/64)d^4} \left(\frac{d}{2}\right) \leq 45 \cdot 10^6 \quad \therefore \quad d \geq 7,99\text{cm}$$

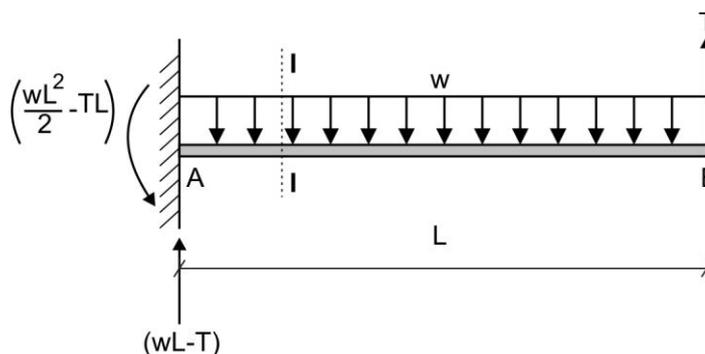
Asumimos:

$$d = 8\text{cm}$$

En consecuencia:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{4V_{\text{máx}}}{3A} = \frac{4 \cdot 6 \cdot 10^3}{3(\pi/4)(0,08)^2} = 1,59 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 1,59\text{MPa}$$

3. Analizamos la viga AB



TRAMO I-I ($0 \leq x \leq L$)

$$EIy'' = (wL - T)x - \left(\frac{wL^2}{2} - TL\right) - \frac{wx^2}{2}$$

$$EIy' = (wL - T)\frac{x^2}{2} - \left(\frac{wL^2}{2} - TL\right)x - \frac{wx^3}{6} + C_1$$

$$EIy = (wL - T)\frac{x^3}{6} - \left(\frac{wL^2}{2} - TL\right)\frac{x^2}{2} - \frac{wx^4}{24} + C_1x + C_2$$

CONDICIONES:

a) Si $x = 0 \Rightarrow \theta_{x=0} = 0 \therefore C_1 = 0$

b) Si $x = 0 \Rightarrow y_{x=0} = 0 \therefore C_2 = 0$

De esta manera, las ecuaciones serán:

$$EIy' = (wL - T) \frac{x^2}{2} - \left(\frac{wL^2}{2} - TL \right) x - \frac{wx^3}{6}$$

$$EIy = (wL - T) \frac{x^3}{6} - \left(\frac{wL^2}{2} - TL \right) \frac{x^2}{2} - \frac{wx^4}{24}$$

Luego:

$$y_B = y_{x=L} = \frac{1}{EI} \left[(wL - T) \frac{L^3}{6} - \left(\frac{wL^2}{2} - TL \right) \frac{L^2}{2} - \frac{wL^4}{24} \right] = \frac{1}{EI} \left[-\frac{wL^4}{8} + \frac{TL^3}{3} \right] \downarrow$$

El desplazamiento y_B hacia abajo debido a la flexión de la viga, será igual al desplazamiento δ_B del cable que trabaja en tracción. Hay que indicar que y_B debe ser con signo negativo para que se trate de una dimensión (longitud).

Determinamos el alargamiento del cable, utilizando la fórmula de tracción.

$$\delta_B = \frac{TH}{EA} \downarrow$$

Por geometría se tendrá:

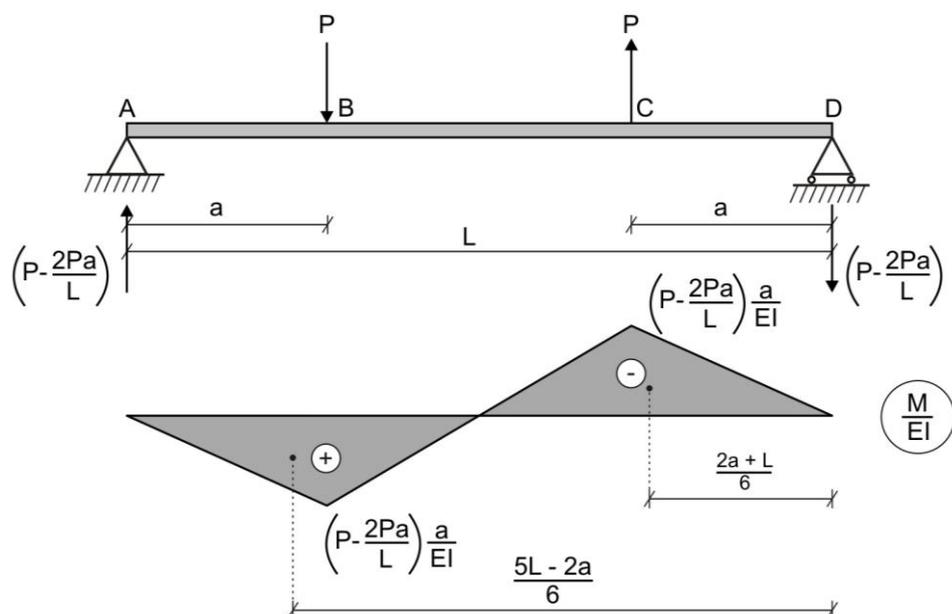
$$y_B = \delta_B$$

$$-\frac{1}{EI} \left[-\frac{wL^4}{8} + \frac{TL^3}{3} \right] = \frac{TH}{EA}$$

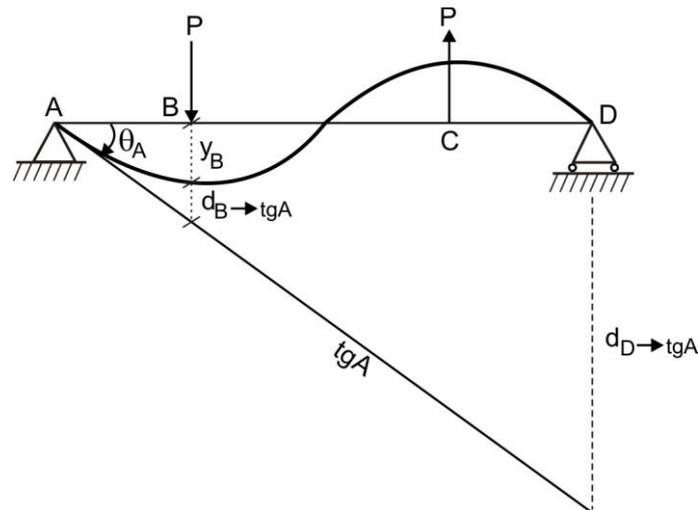
De donde:

$$T = \frac{3wAL^4}{8AL^3 + 24HI}$$

4. Graficamos su diagrama M/EI , calculando previamente las reacciones en los apoyos.



Luego, graficamos la deformada de la viga, la cual se muestra en la figura.



$$d_{D \rightarrow tgA} = \frac{1}{2} \left(P - \frac{2Pa}{L} \right) \left(\frac{a}{EI} \right) \left(\frac{L}{2} \right) \left(\frac{5L-2a}{6} \right) - \frac{1}{2} \left(P - \frac{2Pa}{L} \right) \left(\frac{a}{EI} \right) \left(\frac{L}{2} \right) \left(\frac{2a+L}{6} \right) = \frac{Pa}{6EI} (L-a)(L-2a)$$

Además, del gráfico tenemos:

$$\operatorname{tg} \theta_A = \frac{d_{D \rightarrow tgA}}{L}$$

Como θ_A es muy pequeño, entonces:

$$\theta_A = \frac{d_{D \rightarrow tgA}}{L} = \frac{Pa}{6LEI} (L-a)(L-2a)$$

La pendiente en A va en sentido horario.

Ahora, determinamos la deflexión en B

$$\frac{y_B + d_{B \rightarrow tgA}}{a} = \frac{d_{D \rightarrow tgA}}{L}$$

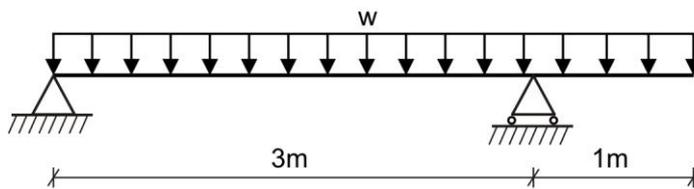
$$y_B = d_{D \rightarrow tgA} \left(\frac{a}{L} \right) - d_{B \rightarrow tgA} = \frac{Pa^2}{6LEI} (L-a)(L-2a) - \frac{1}{2} \left(P - \frac{2Pa}{L} \right) \left(\frac{a}{EI} \right) \left(a \right) \left(\frac{a}{3} \right)$$

$$y_B = \frac{Pa^2}{6LEI} (L-2a)^2 \downarrow$$

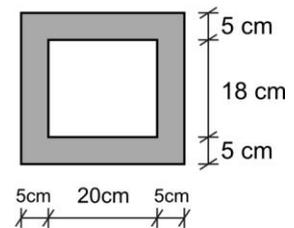
EVALUACIÓN	EXAMEN FINAL	SEM. ACADÉMICO	2007 – I
CURSO	RESISTENCIA DE MATERIALES I	SECCIÓN	26E
PROFESOR	Ph.D. GENNER VILLARREAL CASTRO	DURACIÓN	110m
ESCUELA	INGENIERIA CIVIL	CICLO	V

1. La viga de la figura tiene la sección que se muestra. Determinar el máximo valor de “w” si los esfuerzos admisibles son $[\sigma] = 130 \text{ kg/cm}^2$ y $[\tau] = 12 \text{ kg/cm}^2$

..... (5 puntos)

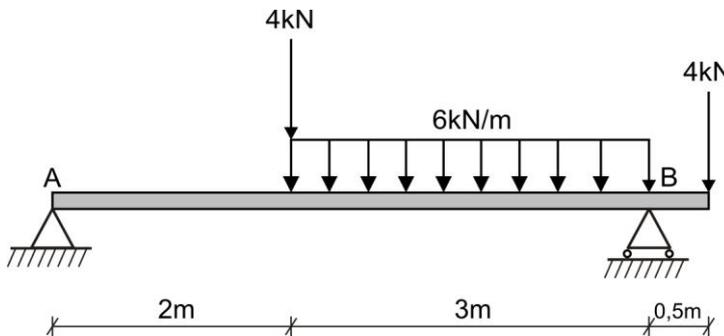


SECCION TRANSVERSAL

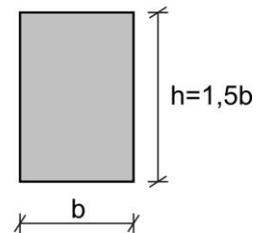


2. Para la siguiente viga, determinar los valores “b”, “h” y el esfuerzo tangencial máximo $\tau_{\text{máx}}$, si el esfuerzo normal admisible es $[\sigma] = 10 \text{ MPa}$

..... (3 puntos)

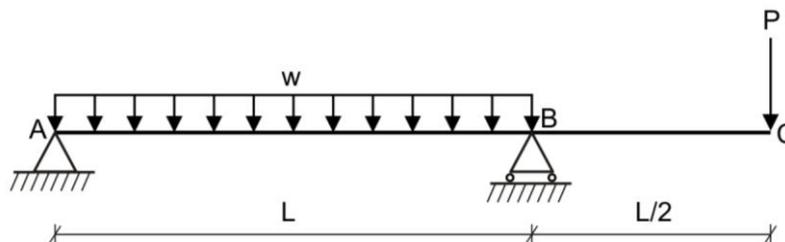


SECCION TRANSVERSAL



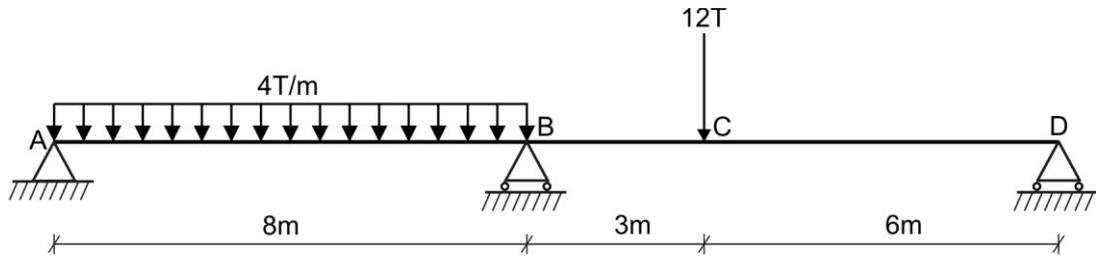
3. METODO DE LA DOBLE INTEGRACION. ¿Con qué relación entre las cargas “w” y “P” la deflexión vertical en el punto de aplicación de la carga P será igual a cero?

..... (6 puntos)



4. METODO DE LA VIGA CONJUGADA. Resolver la siguiente viga y graficar los diagramas de fuerza cortante y momento flector. Determinar la deflexión en C, considerando que la viga es de sección constante, siendo $E = 2100T/cm^2$ e $I = 40000cm^4$

..... (6 puntos)

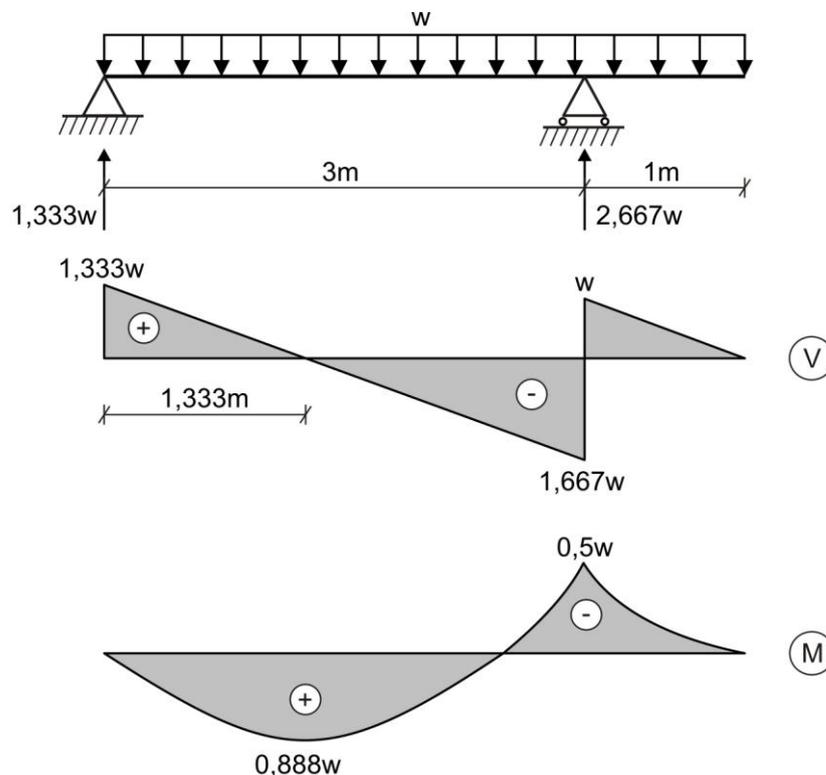


FECHA	La Molina, 25 de Junio del 2007
-------	---------------------------------

SOLUCIONARIO DE EXAMEN FINAL

CICLO 2007 – I

1. Graficamos los diagramas de fuerza cortante y momento flector.



Determinamos el momento de inercia y momento estático, necesarios para el análisis.

$$I_z = \frac{30 \cdot 28^3}{12} - \frac{20 \cdot 18^3}{12} = 45160 \text{ cm}^4$$

$$S_z^{\text{sup}} = 30 \cdot 14,7 - 20 \cdot 9,45 = 2130 \text{ cm}^3$$

Aplicamos las condiciones de resistencia para los esfuerzos normal y tangencial.

ESFUERZO NORMAL:

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{M_{\text{máx}}}{I_z} y_{\text{máx}} \leq [\sigma] \Rightarrow \frac{0,888w}{45160 \cdot 10^{-8}} \cdot 14 \cdot 10^{-2} \leq 1300 \quad \therefore w \leq 4,722 \text{ T/m}$$

ESFUERZO TANGENCIAL:

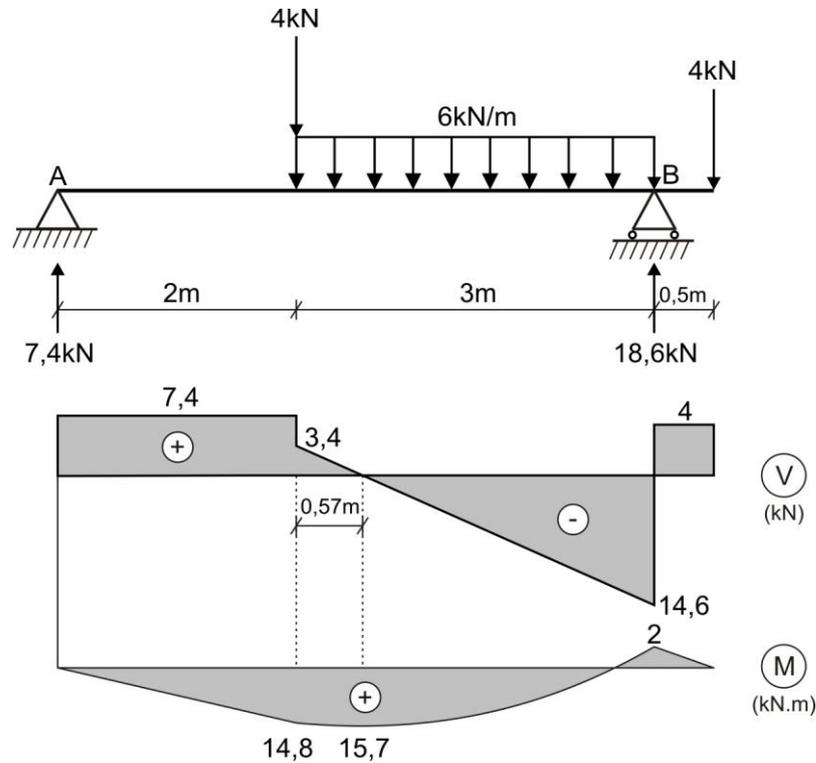
$$\tau_{\text{máx}} = \frac{V_{\text{máx}} S_z^{\text{sup}}}{I_z b_{\text{mín}}} \leq [\tau] \Rightarrow \frac{1,667w \cdot 2130 \cdot 10^{-6}}{45160 \cdot 10^{-8} \cdot 10 \cdot 10^{-2}} \leq 120 \quad \therefore w \leq 1,526 \text{ T/m}$$



De donde:

$$w_{\text{máx}} = 1,526 \text{ T/m} = 1526 \text{ kg/m}$$

2. Graficamos los diagramas de fuerza cortante y momento flector, los cuales se muestran en la siguiente figura:



Aplicamos la condición de resistencia para el esfuerzo normal en flexión.

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{M_{\text{máx}}}{I_z} y_{\text{máx}} \leq [\sigma] \Rightarrow \frac{15,7 \cdot 10^3}{(b)(1,5b)^3 / 12} \cdot (0,75b) \leq 10 \cdot 10^6 \quad \therefore \quad b \geq 16,12 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$b \geq 16,12 \text{ cm}$$

Asumimos:

$$b = 16,2 \text{ cm}$$

$$h = 24,3 \text{ cm}$$

Determinamos el esfuerzo tangencial máximo:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{3V_{\text{máx}}}{2A} = \frac{3 \cdot 14,6 \cdot 10^3}{2 \cdot 0,162 \cdot 0,243} = 556317,6 \text{ Pa} \approx 0,56 \text{ MPa}$$

3. Calculamos las reacciones en los apoyos:

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad V_B(L) - P\left(\frac{3L}{2}\right) - wL\left(\frac{L}{2}\right) = 0 \quad \therefore \quad V_B = \frac{3P + wL}{2} \uparrow$$

$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad V_A + \frac{3P + wL}{2} - wL - P = 0 \quad \therefore \quad V_A = \frac{wL - P}{2} \uparrow$$

TRAMO I-I ($0 \leq x \leq L$)

$$EIy'' = \left(\frac{wL - P}{2}\right)x - \frac{wx^2}{2}$$

$$EIy' = \left(\frac{wL - P}{2}\right)\frac{x^2}{2} - \frac{wx^3}{6} + C_1$$

$$EIy = \left(\frac{wL - P}{2}\right)\frac{x^3}{6} - \frac{wx^4}{24} + C_1x + C_2$$

CONDICIONES:

a) Si $x = 0 \Rightarrow y_{x=0} = 0 \quad \therefore C_2 = 0$

b) Si $x = L \Rightarrow y_{x=L} = 0 \quad \therefore C_1 = \frac{2PL^2 - wL^3}{24}$

De esta manera, las ecuaciones para este tramo son:

$$EIy' = \left(\frac{wL - P}{2}\right) \frac{x^2}{2} - \frac{wx^3}{6} + \frac{2PL^2 - wL^3}{24}$$

$$EIy = \left(\frac{wL - P}{2}\right) \frac{x^3}{6} - \frac{wx^4}{24} + \left(\frac{2PL^2 - wL^3}{24}\right)x$$

TRAMO II-II ($L \leq x \leq 3L/2$)

$$EIy'' = \left(\frac{wL - P}{2}\right)x - wL\left(x - \frac{L}{2}\right) + \left(\frac{3P + wL}{2}\right)(x - L)$$

$$EIy' = \left(\frac{wL - P}{2}\right) \frac{x^2}{2} - \frac{wL}{2}\left(x - \frac{L}{2}\right)^2 + \left(\frac{3P + wL}{2}\right) \frac{(x - L)^2}{2} + C_3$$

$$EIy = \left(\frac{wL - P}{2}\right) \frac{x^3}{6} - \frac{wL}{6}\left(x - \frac{L}{2}\right)^3 + \left(\frac{3P + wL}{2}\right) \frac{(x - L)^3}{6} + C_3x + C_4$$

PRINCIPIO DE CONTINUIDAD:

c) Si $x = L \Rightarrow \theta_{x=L}^I = \theta_{x=L}^{II} \quad \therefore C_3 = \frac{PL^2 - wL^3}{12}$

d) Si $x = L \Rightarrow y_{x=L}^I = y_{x=L}^{II} \quad \therefore C_4 = \frac{wL^4}{48}$

De esta manera, las ecuaciones para el tramo II-II quedarán así:

$$EIy' = \left(\frac{wL - P}{2}\right) \frac{x^2}{2} - \frac{wL}{2}\left(x - \frac{L}{2}\right)^2 + \left(\frac{3P + wL}{2}\right) \frac{(x - L)^2}{2} + \frac{PL^2 - wL^3}{12}$$

$$EIy = \left(\frac{wL - P}{2}\right) \frac{x^3}{6} - \frac{wL}{6}\left(x - \frac{L}{2}\right)^3 + \left(\frac{3P + wL}{2}\right) \frac{(x - L)^3}{6} + \left(\frac{PL^2 - wL^3}{12}\right)x + \frac{wL^4}{48}$$

Por condición del problema:

$$y_C = y_{x=3L/2} = 0$$

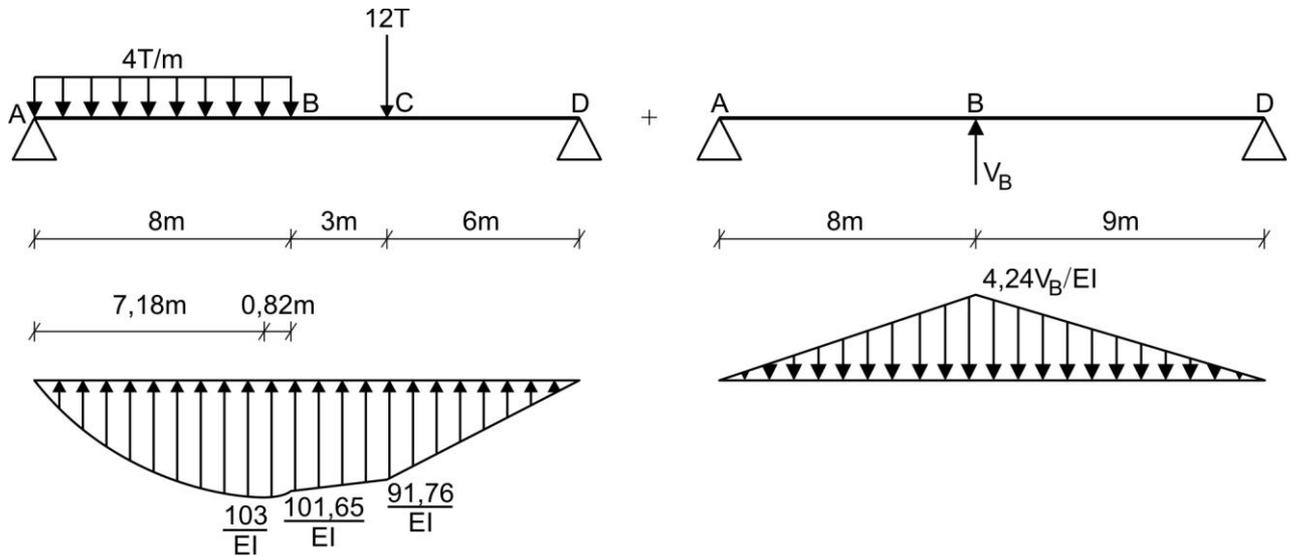
Luego:

$$\frac{1}{6}\left(\frac{wL - P}{2}\right)\left(\frac{3L}{2}\right)^3 - \frac{wL}{6}(L)^3 + \left(\frac{3P + wL}{12}\right)\left(\frac{L}{2}\right)^3 + \left(\frac{PL^2 - wL^3}{12}\right)\left(\frac{3L}{2}\right) + \frac{wL^4}{48} = 0$$

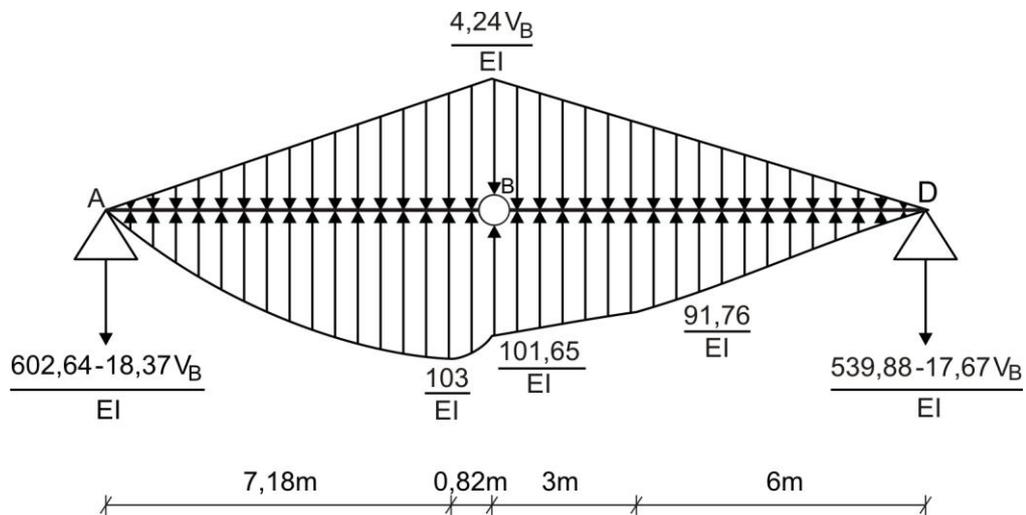
De donde:

$$w = \frac{6P}{L}$$

4. Eliminamos el apoyo B y lo reemplazamos por su reacción V_B , así como aplicamos el Principio de Superposición de Cargas.



Ahora, retornamos a la viga real, convirtiéndola en viga conjugada.



$$\sum M_B^{izq} = 0 \Rightarrow -\frac{602,64 - 18,37V_B}{EI} (8) - \frac{1}{2} (8) \left(\frac{4,24V_B}{EI} \right) \left(\frac{8}{3} \right) + \frac{2}{3} (7,18) \left(\frac{103}{EI} \right) (3,51) + (0,82) \left(\frac{101,65}{EI} \right) (0,41) + \frac{2}{3} (0,82) \left(\frac{1,35}{EI} \right) \left(\frac{5}{8} \cdot 0,82 \right) = 0$$

De donde:

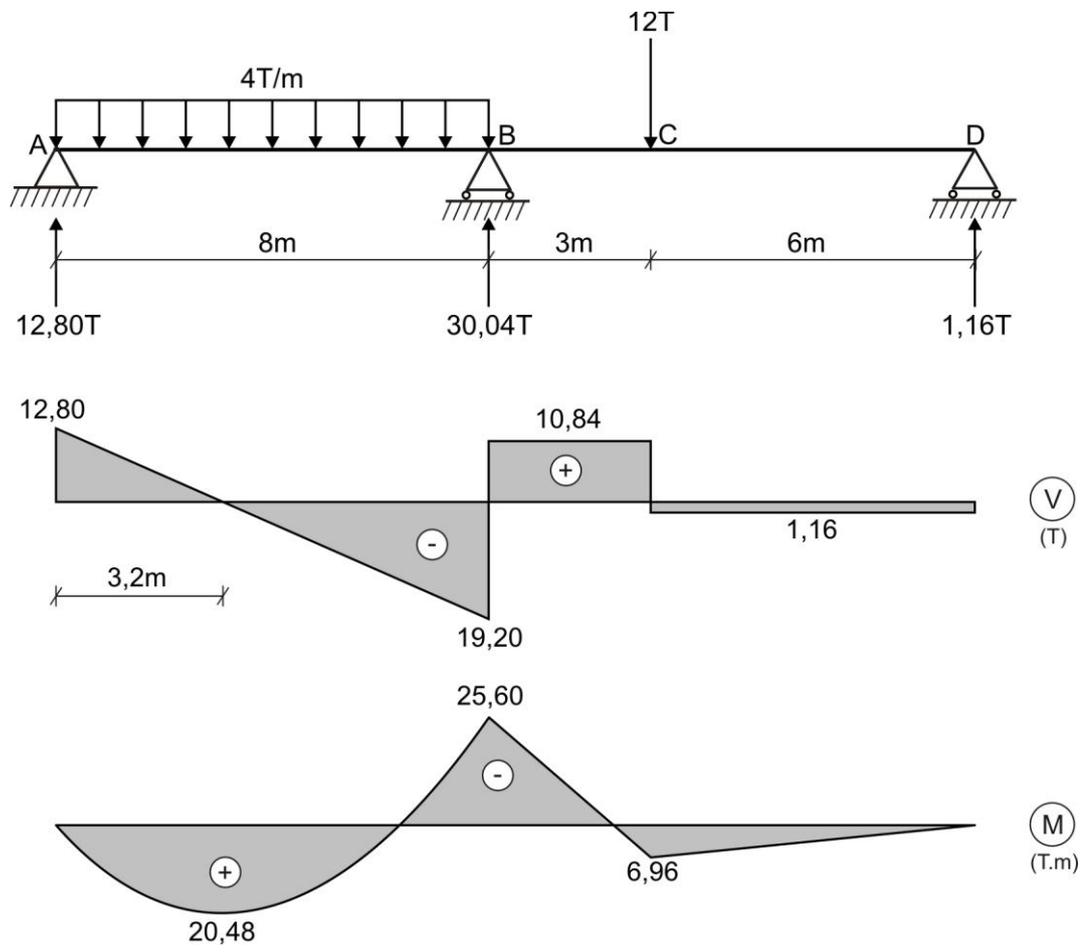
$$V_B = 30,04T \uparrow$$

En base a este valor podemos determinar las otras reacciones y graficar los diagramas de fuerza cortante y momento flector, los cuales se muestran en la figura de la siguiente página.

Ahora, calculamos la deflexión en el punto C, pero debemos de elegir el tramo más fácil, es por eso, que elegimos del lado derecho hacia el izquierdo.

$$y_C = \overline{M}_C^{\text{der}} = \frac{1}{2} (6) \left(\frac{91,76}{EI} \right) (2) - \frac{1}{2} (6) \left(\frac{2,83 \cdot 30,04}{EI} \right) (2) - \left(\frac{539,88 - 17,67 \cdot 30,04}{EI} \right) (6) = -\frac{13,96}{EI}$$

$$y_C = -\frac{13,96}{2100 \cdot 10^4 \cdot 40000 \cdot 10^{-8}} = -1,66 \cdot 10^{-3} \text{ m} = -1,66 \text{ mm} \downarrow$$

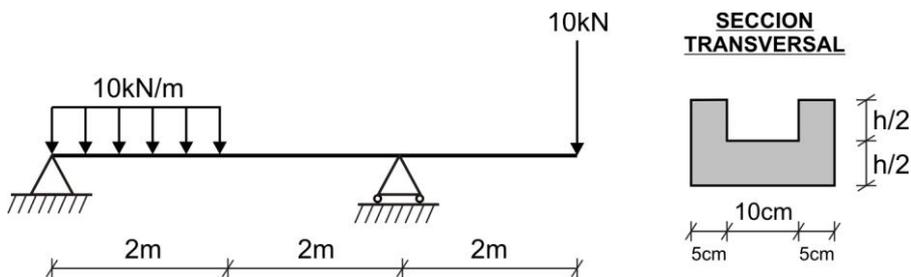




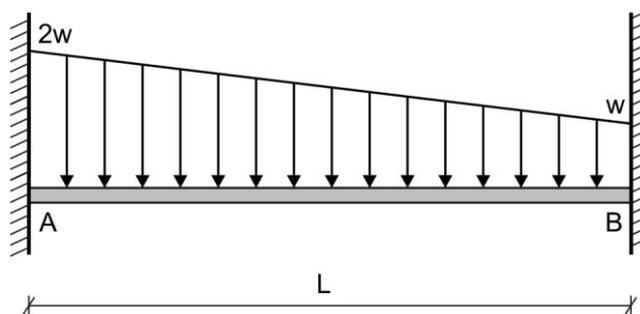
EVALUACIÓN	EXAMEN FINAL	SEM. ACADÉMICO	2007 – II
CURSO	RESISTENCIA DE MATERIALES I	SECCIÓN	26E
PROFESOR	Ph.D. GENNER VILLARREAL CASTRO	DURACIÓN	110m
ESCUELA	INGENIERIA CIVIL	CICLO	V

1. Una barra de 40mm de diámetro se emplea como viga simplemente apoyada sobre un claro de 2m. Determinar la máxima carga uniformemente distribuida que puede aplicarse a lo largo de la mitad derecha de la viga si el esfuerzo normal está limitado a un valor de 60MPa
..... (3 puntos)

2. Para la viga mostrada en la figura, determinar el valor de “h” y el esfuerzo tangencial máximo, si $[\sigma] = 160\text{MPa}$
..... (5 puntos)

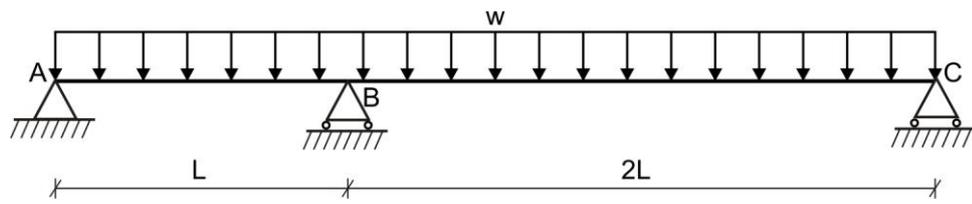


3. METODO DE LOS PARAMETROS INICIALES. La viga que se muestra en la figura está sometida a una carga trapezoidal ¿Qué desplazamiento vertical y_0 debe darse en el apoyo A, de tal manera que la fuerza cortante en A sea igual a la fuerza cortante en B? Considerar que la rigidez EI es constante en toda la viga
..... (6 puntos)



4. METODO DE LA VIGA CONJUGADA. Resolver la viga continua ABC y graficar los diagramas de fuerza cortante, momento flector y refuerzo.

..... (6 puntos)

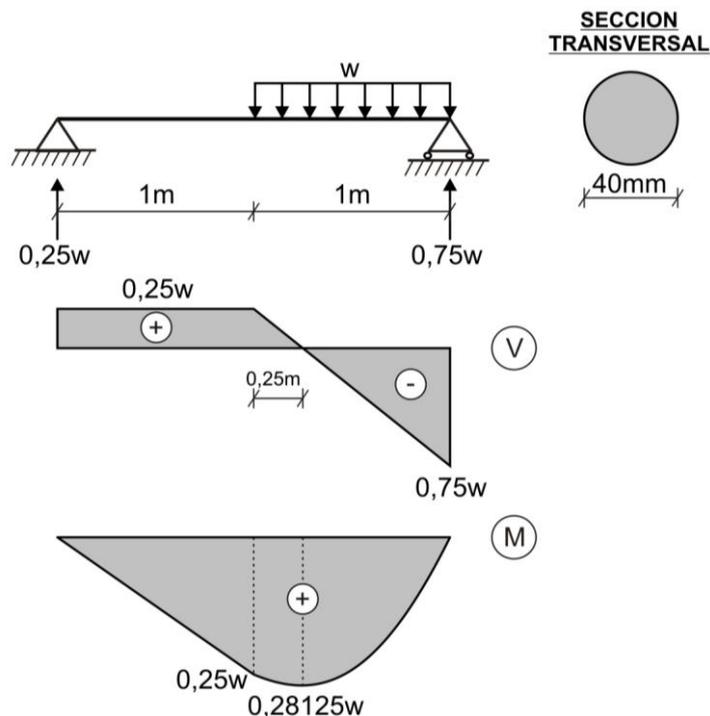


FECHA	La Molina, 26 de Noviembre del 2007
-------	-------------------------------------

SOLUCIONARIO DE EXAMEN FINAL

CICLO 2007 – II

1. Esquematzamos la viga y carga, calculando las reacciones en los apoyos y graficando los diagramas de fuerza cortante y momento flector, los cuales se muestran en la figura.



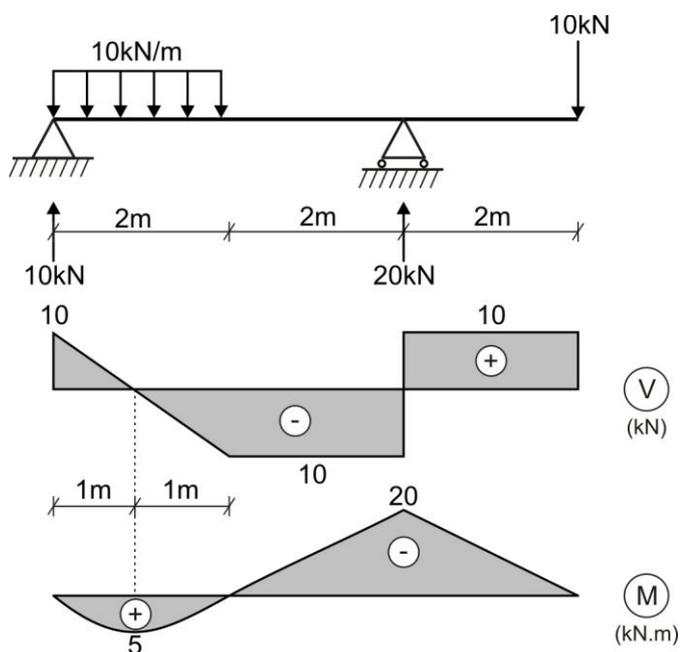
Aplicamos la condición de resistencia para el esfuerzo normal en flexión.

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{M_{\text{máx}}}{W_z} \leq [\sigma] \quad \Rightarrow \quad \frac{0,28125w}{(\pi/32) \cdot 40^3 \cdot 10^{-9}} \leq 60 \cdot 10^6 \quad \therefore \quad w \leq 1340,4 \text{ N/m}$$

Asumimos:

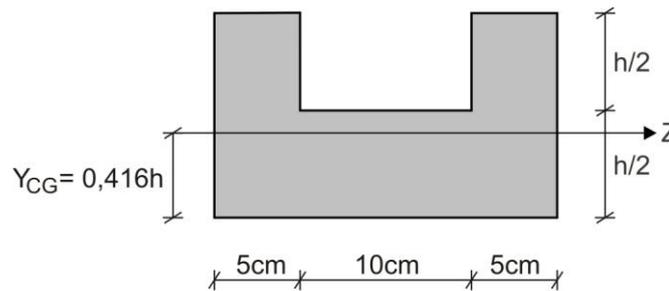
$$w_{\text{máx}} = 1340,4 \text{ N/m}$$

2. Determinamos las reacciones en los apoyos y graficamos los diagramas de fuerza cortante y momento flector.



Calculamos la ubicación del centro de gravedad.

$$Y_{CG} = \frac{(5h \cdot 0,5h) \cdot 2 + 10 \cdot 0,5h \cdot 0,25h}{(5 \cdot h) \cdot 2 + 10 \cdot 0,5h} = 0,416h$$



Determinamos el momento de inercia respecto al eje neutro.

$$I_z = 2 \left[\frac{5h^3}{12} + 5h(0,084h)^2 \right] + \frac{10(0,5h)^3}{12} + 10 \cdot 0,5h(0,166h)^2 = 1,14584h^3$$

Aplicamos la condición de resistencia para el esfuerzo normal.

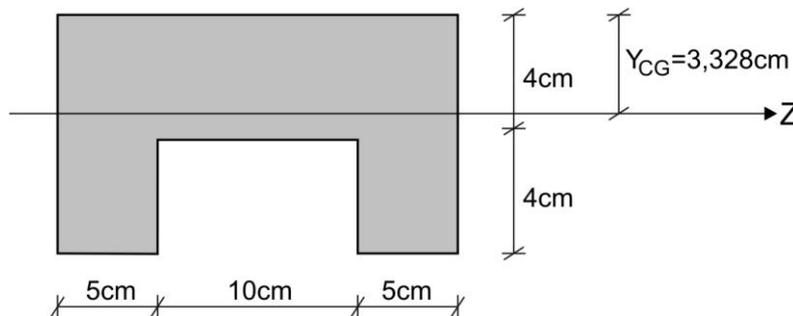
$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{I_z} \cdot y_{\max} \leq [\sigma] \Rightarrow \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 10^2}{1,14584h^3} \cdot 0,584h \leq 16000 \quad \therefore \quad h \geq 7,98\text{cm}$$

Asumimos:

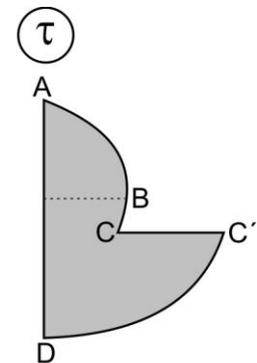
$$h = 8\text{cm}$$

De acuerdo a los resultados obtenidos, se debe de invertir la sección transversal, de tal manera que coincidan las zonas de tracción y compresión, efectuando el diagrama de esfuerzo tangencial.

a)



b)



Siendo:

$$\tau_A = 0$$

$$\tau_B = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 110,75 \cdot 10^{-6}}{586,67 \cdot 10^{-8} \cdot 20 \cdot 10^{-2}} = 0,944\text{MPa}$$

$$S_z^{\text{sup}B} = 20 \cdot 3,328 \cdot 1,664 = 110,75\text{cm}^3$$

$$I_z = 1,14584 \cdot 8^3 = 586,67\text{cm}^4$$

$$\tau_C = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 106,23 \cdot 10^{-6}}{586,67 \cdot 10^{-8} \cdot 20 \cdot 10^{-2}} = 0,905\text{MPa}$$

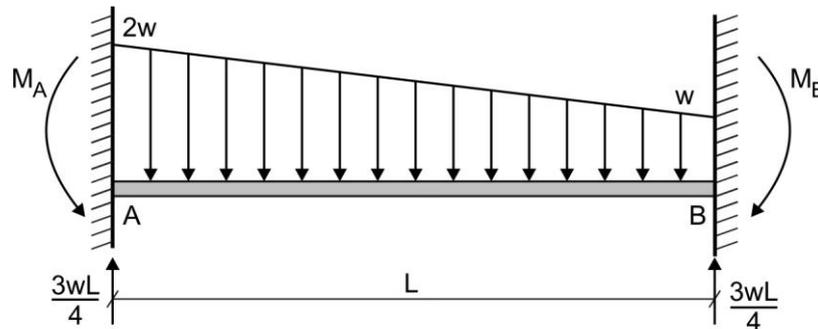
$$S_z^{\text{sup},C} = 110,75 - 20 \cdot 0,672 \cdot 0,336 = 106,23 \text{cm}^3$$

$$\tau_{\text{máx}} = \tau_C = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 106,23 \cdot 10^{-6}}{586,67 \cdot 10^{-8} \cdot 10 \cdot 10^{-2}} = 1,810 \text{MPa}$$

$$\tau_D = 0$$

3. Analizamos el equilibrio de la viga, considerando la condición del problema:

$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad V_A + V_B = \frac{(2w + w)L}{2} \quad \therefore \quad V_A = V_B = \frac{3wL}{4} \uparrow$$



ECUACION UNIVERSAL:

$$y = y_o - \frac{M_A x^2}{2EI} + \frac{(3wL/4)}{6EI} x^3 - \frac{2wx^4}{24EI} + \frac{(w/L)}{120EI} x^5$$

$$y = y_o - \frac{M_A x^2}{2EI} + \frac{wLx^3}{8EI} - \frac{wx^4}{12EI} + \frac{wx^5}{120EI}$$

$$\theta = \frac{dy}{dx} = -\frac{M_A x}{EI} + \frac{3wLx^2}{8EI} - \frac{wx^3}{3EI} + \frac{wx^4}{24EI}$$

CONDICIONES:

$$\text{a) Si } x = L \quad \Rightarrow \quad \theta_{x=L} = 0 \quad \therefore \quad -\frac{M_A L}{EI} + \frac{3wL^3}{8EI} - \frac{wL^3}{3EI} + \frac{wL^3}{24EI} = 0$$

$$M_A = \frac{wL}{12} \quad (\text{sentido antihorario})$$

$$\text{b) Si } x = L \quad \Rightarrow \quad y_{x=L} = 0 \quad \therefore \quad y_o - \left(\frac{wL^2}{12} \right) \frac{L^2}{2EI} + \frac{wL^4}{8EI} - \frac{wL^4}{12EI} + \frac{wL^4}{120EI} = 0$$

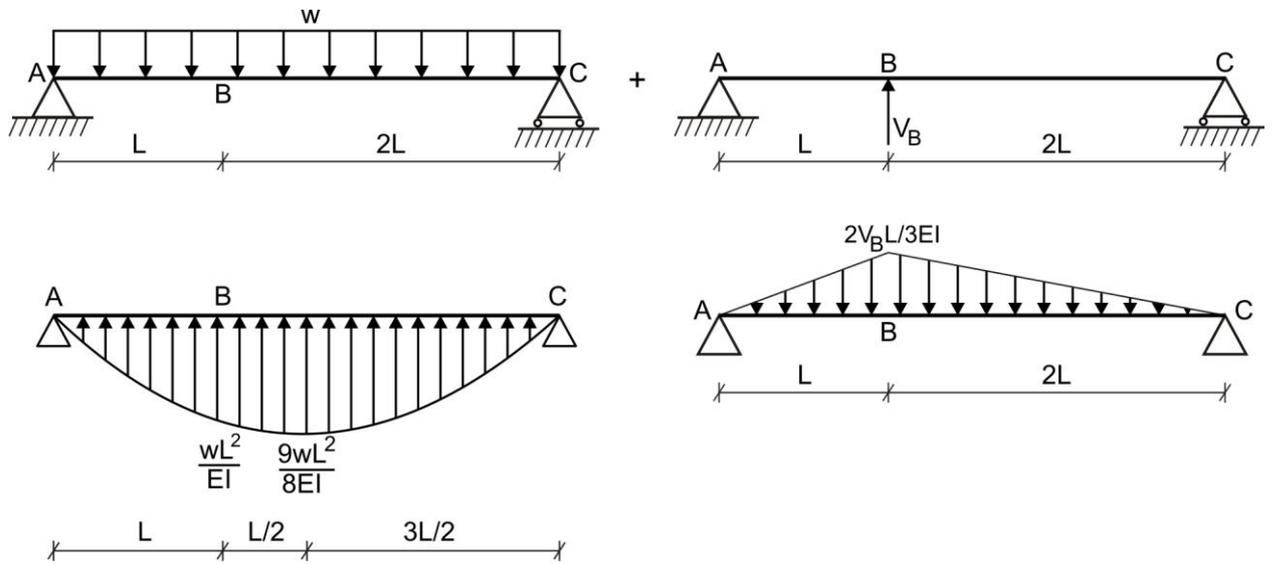
$$y_o = -\frac{wL^4}{120EI} \downarrow$$

4. Determinamos el grado de indeterminación:

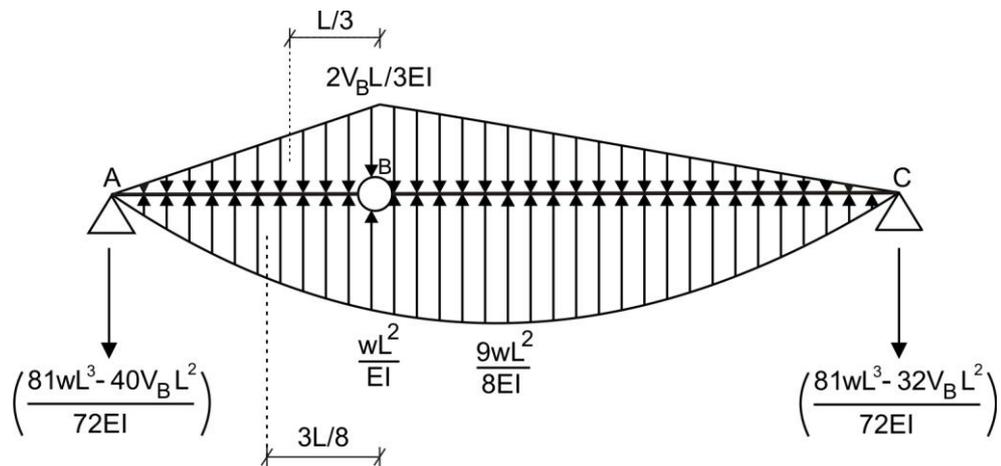
$$G.I. = 4 - 3 = 1$$

La viga es una vez hiperestática.

Convertimos la viga hiperestática en isostática, aplicando el Principio de Superposición de Cargas. Para ello, eliminamos el apoyo B y lo reemplazamos por su reacción V_B , analizando cada viga en forma separada y sometida a las cargas M/EI de las vigas reales correspondientes, tal como se muestra en la figura.



Ahora, regresamos a la viga real y lo convertimos en viga conjugada, calculando las reacciones en los apoyos sin considerar la rótula en B, sino efectuando $\sum \bar{M}_A = 0$ y luego $\sum \bar{F}_Y = 0$



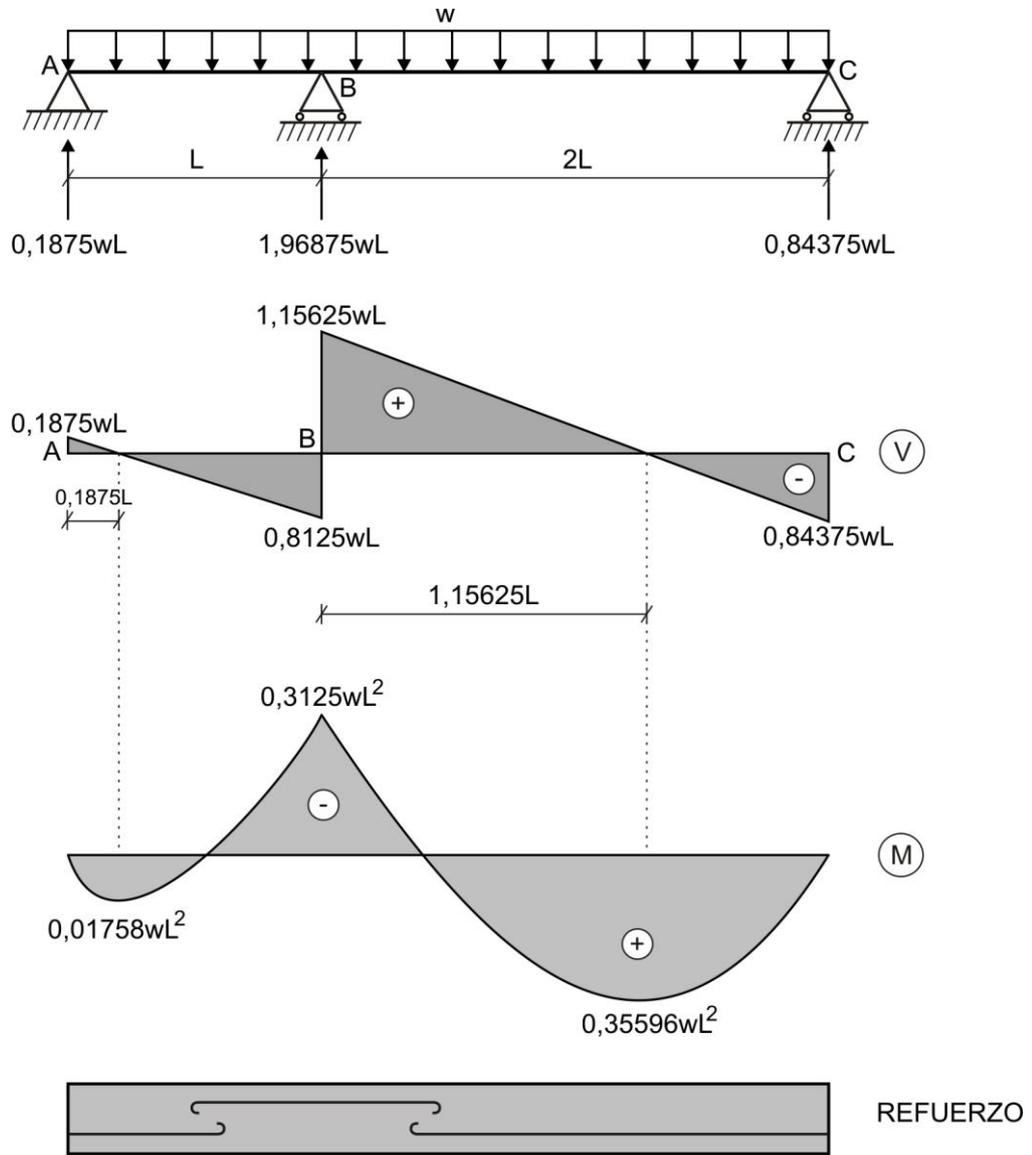
Como el apoyo B es móvil, entonces su deflexión será cero, quedando así:

$$y_B = \bar{M}_B = 0 \Rightarrow -\left(\frac{81wL^3 - 40V_B L^2}{72EI}\right)(L) - \frac{1}{2}(L)\left(\frac{2V_B L}{3EI}\right)\left(\frac{L}{3}\right) + \frac{2}{3}(L)\left(\frac{wL^2}{EI}\right)\left(\frac{3L}{8}\right) = 0$$

De donde:

$$V_B = 1,96875wL \uparrow$$

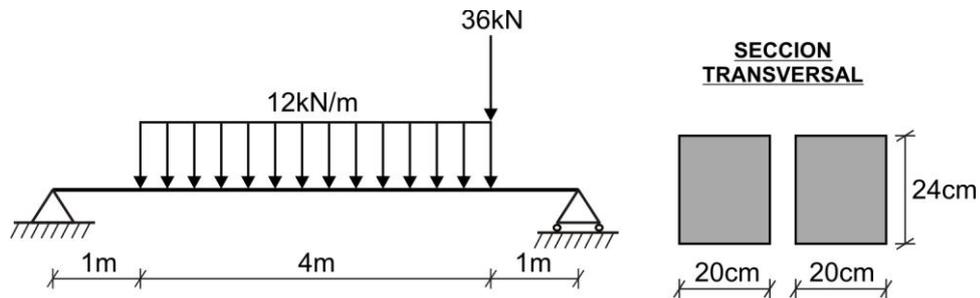
En base al resultado obtenido, determinamos las otras reacciones y graficamos los diagramas de fuerza cortante, momento flector y refuerzo, los cuales se muestran en la figura de la siguiente página.



EVALUACIÓN	EXAMEN FINAL	SEM. ACADÉMICO	2008 – I
CURSO	RESISTENCIA DE MATERIALES I	SECCIÓN	26E
PROFESOR	Ph.D. GENNER VILLARREAL CASTRO	DURACIÓN	110m
ESCUELA	INGENIERIA CIVIL	CICLO	V

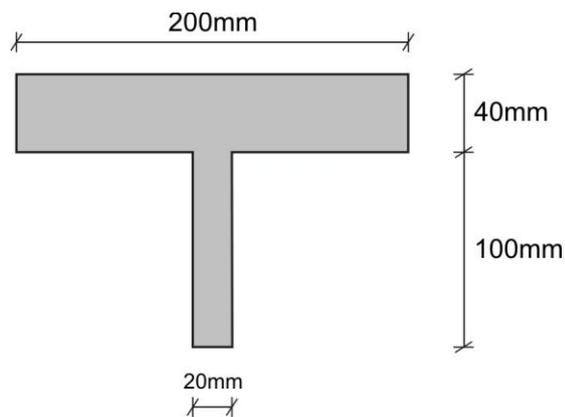
1. Determinar el número de secciones rectangulares de 20cm x 24cm necesarios para que la viga mostrada en la figura no colapse. Considerar $[\sigma] = 9\text{MPa}$

..... (3 puntos)



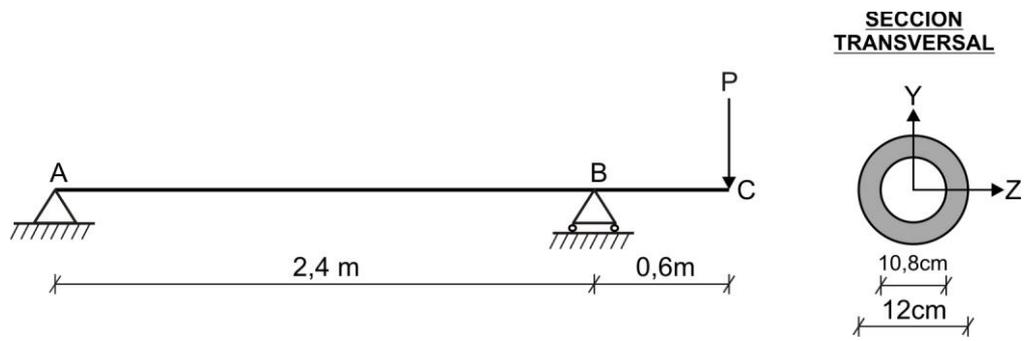
2. La sección mostrada en la figura corresponde a una viga de madera. La viga está sometida a una fuerza cortante máxima de 60kN. Demostrar que el eje neutro está localizado 34mm abajo del borde superior y que su momento de inercia es $I_z = 10573333,33\text{mm}^4$. Usando estos valores, graficar el diagrama de esfuerzos tangenciales.

..... (5 puntos)



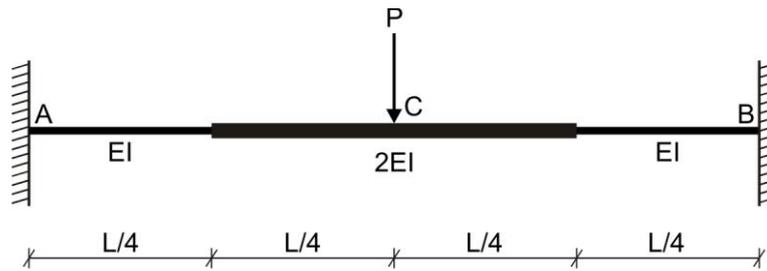
3. METODO DE LA DOBLE INTEGRACION. La viga de acero mostrada en la figura tiene una deflexión vertical en el centro del tramo AB igual a 0,4cm. Determinar la magnitud de la carga "P" y el esfuerzo normal máximo, si el módulo de elasticidad del acero es $E_a = 2,1 \cdot 10^5 \text{MPa}$

..... (6 puntos)



4. METODO DE LA VIGA CONJUGADA. Resolver la viga mostrada en la figura, graficando los diagramas de fuerza cortante, momento flector y refuerzo. Determinar la deflexión máxima.

..... (6 puntos)

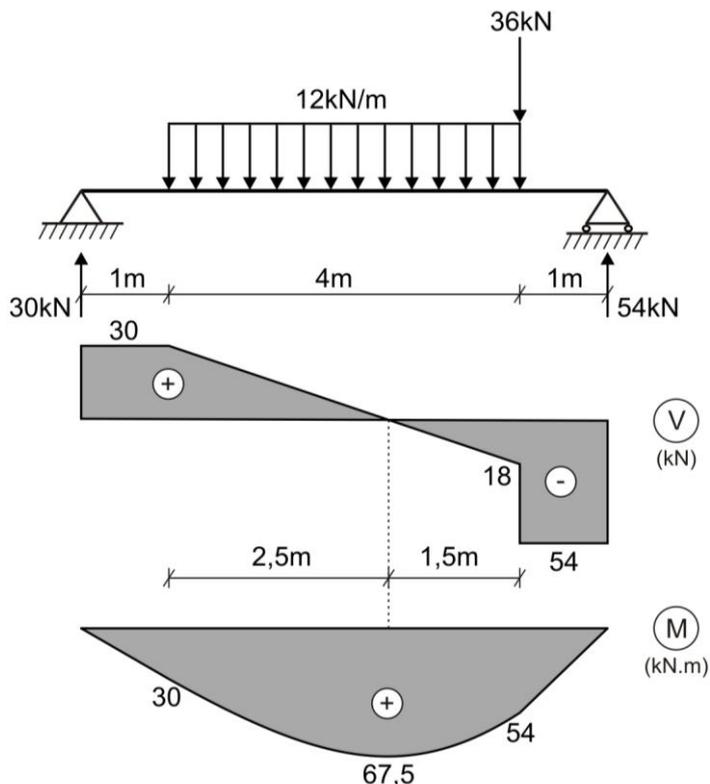


FECHA	La Molina, 23 de Junio del 2008
-------	---------------------------------

SOLUCIONARIO DE EXAMEN FINAL

CICLO 2008 – I

- Determinamos las reacciones en los apoyos y graficamos los diagramas de fuerza cortante y momento flector, tal como se muestra en la figura.



Aplicamos la condición de resistencia para el esfuerzo normal en flexión.

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{M_{\text{máx}}}{I_Z} \cdot y_{\text{máx}} \leq [\sigma] \Rightarrow \frac{67,5 \cdot 10^3}{n(0,2 \cdot 0,24^3 / 12)} \cdot 0,12 \leq 9 \cdot 10^6 \quad \therefore n \geq 3,9$$

Asumimos:

$$n = 4$$

Siendo:

n - número de secciones rectangulares.

- Determinamos la ubicación del centro de gravedad de la sección transversal.

$$Y_{\text{CG}} = \frac{20 \cdot 100 \cdot 50 + 200 \cdot 40 \cdot 120}{20 \cdot 100 + 200 \cdot 40} = 106 \text{ mm}$$

Calculamos el momento de inercia respecto al eje neutro.

$$I_Z = \frac{200 \cdot 40^3}{12} + 200 \cdot 40 \cdot 14^2 + \frac{20 \cdot 100^3}{12} + 20 \cdot 100 \cdot 56^2 = 10573333,33 \text{ mm}^4$$

De esta manera, se demuestra que el centro de gravedad se encuentra 34 mm abajo del borde superior

(figura a) y que su momento de inercia es $I_Z = 10573333,33 \text{ mm}^4$

Graficamos el diagrama de esfuerzo tangencial (figura b)

$$\tau_A = 0$$

$$\tau_B = \frac{60 \cdot 10^3 \cdot 115600 \cdot 10^{-9}}{10573333,33 \cdot 10^{-12} \cdot 200 \cdot 10^{-3}} = 3,28 \text{ MPa}$$

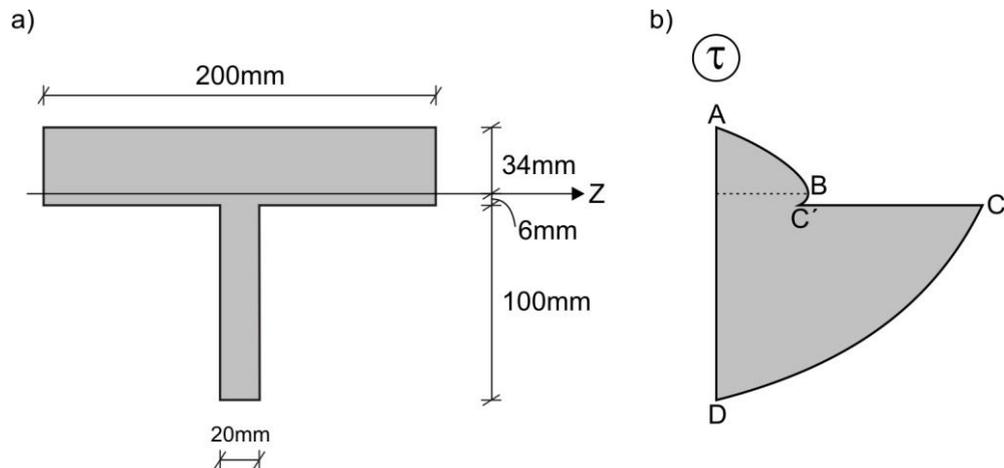
$$S_Z^{\text{sup}B} = 200 \cdot 34 \cdot 17 = 115600 \text{mm}^3$$

$$\tau_C = \frac{60 \cdot 10^3 \cdot 112000 \cdot 10^{-9}}{10573333,33 \cdot 10^{-12} \cdot 200 \cdot 10^{-3}} = 3,18 \text{MPa}$$

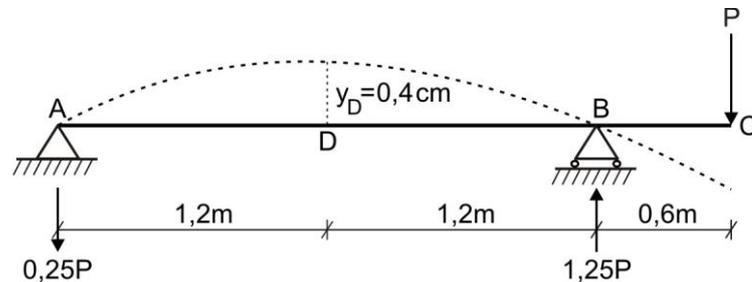
$$S_Z^{\text{sup}C'} = 115600 - 200 \cdot 6 \cdot 3 = 112000 \text{mm}^3$$

$$\tau_{\text{máx}} = \tau_C = \frac{60 \cdot 10^3 \cdot 112000 \cdot 10^{-9}}{10573333,33 \cdot 10^{-12} \cdot 20 \cdot 10^{-3}} = 31,8 \text{MPa}$$

$$\tau_D = 0$$



3. Calculamos las reacciones en los apoyos y esquemizamos la forma de la deformada de la viga.



TRAMO I-I ($0 \leq x \leq 2,4$)

$$EIy'' = -0,25Px$$

$$EIy' = -0,125Px^2 + C_1$$

$$EIy = -\frac{0,125Px^3}{3} + C_1x + C_2$$

CONDICIONES:

a) Si $x = 0 \Rightarrow y_{x=0} = 0 \quad \therefore C_2 = 0$

b) Si $x = 2,4 \text{m} \Rightarrow y_{x=2,4} = 0 \quad \therefore C_1 = 0,24P$

c) Por condición del problema $y_D = 0,4 \text{cm}$

$$EIy_D = -\frac{0,125P(1,2)^3}{3} + 0,24P(1,2)$$

$$2,1 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot \frac{\pi}{64} (0,12^4 - 0,108^4) \cdot 0,4 \cdot 10^{-2} = 0,216P$$

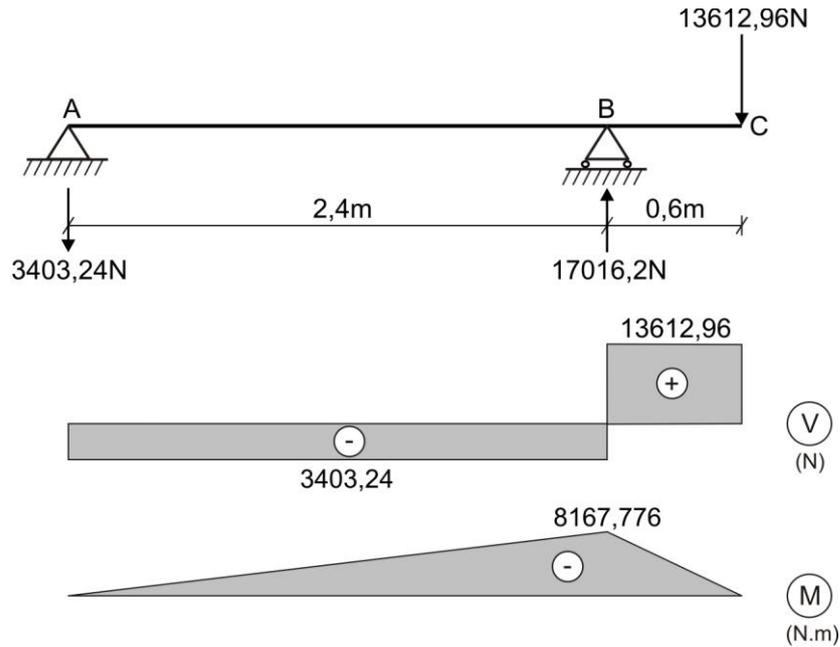
De donde:

$$P = 13612,96N$$

Luego, determinamos el esfuerzo normal máximo.

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{M_{\text{máx}}}{I_z} \cdot y_{\text{máx}} = \frac{8167,776}{(\pi/64)(0,12^4 - 0,108^4)} \cdot 0,06 = 140\text{MPa}$$

Siendo sus diagramas de fuerza cortante y momento flector los mostrados en la figura.

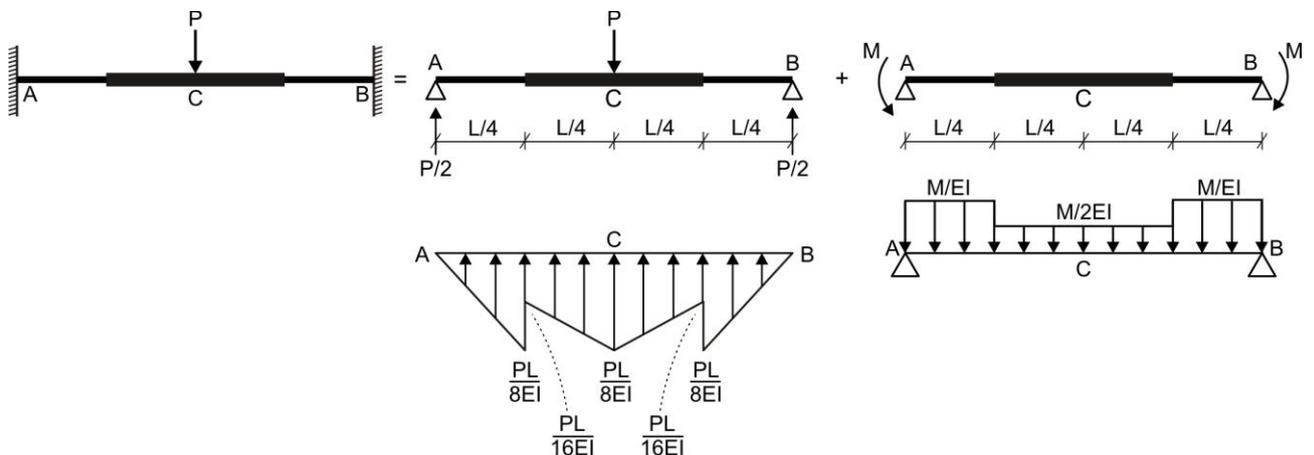


4. Determinamos el grado de indeterminación:

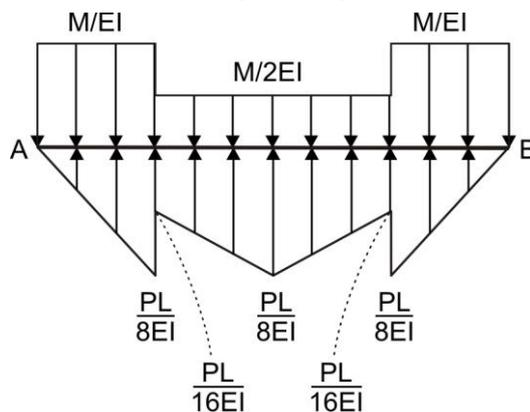
$$G.I. = 6 - 3 = 3$$

La viga es tres veces hiperestática.

Aplicamos el Principio de Superposición de Cargas, graficando los diagramas M/EI para cada caso.



Luego, retornamos a la viga inicial y aplicamos viga conjugada, quedando así:



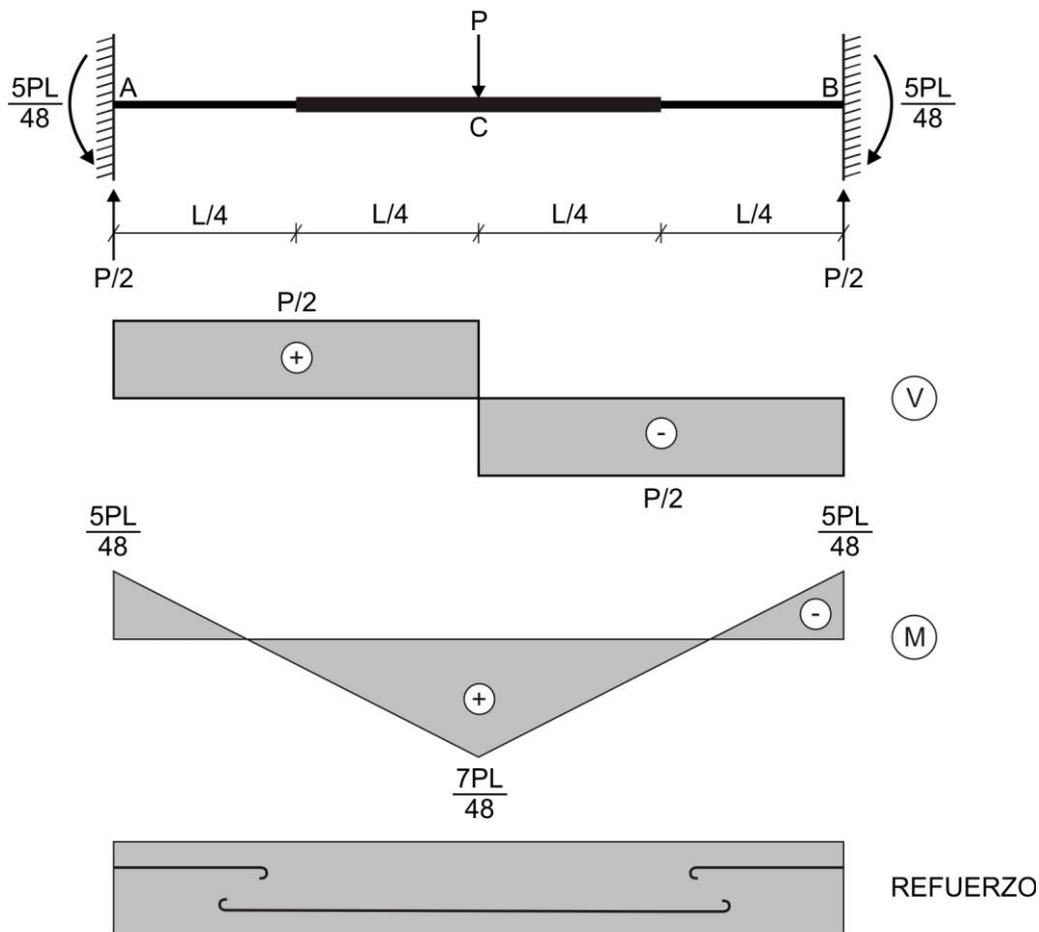
Como el apoyo A es un empotramiento perfecto, se tendrá que su deflexión en dicho apoyo debe ser igual a cero, esto es:

$$y_A = \bar{M}_A = 0 \Rightarrow -\frac{M}{EI} \left(\frac{L}{4}\right) \left(\frac{L}{8}\right) - \frac{M}{2EI} \left(\frac{L}{2}\right) \left(\frac{L}{2}\right) - \frac{M}{EI} \left(\frac{L}{4}\right) \left(\frac{7L}{8}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{L}{4}\right) \left(\frac{PL}{8EI}\right) \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{L}{4}\right) + \left(\frac{L}{2}\right) \left(\frac{PL}{16EI}\right) \left(\frac{L}{2}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{L}{2}\right) \left(\frac{PL}{16EI}\right) \left(\frac{L}{2}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{L}{4}\right) \left(\frac{PL}{8EI}\right) \left(\frac{3L}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{L}{4}\right) = 0$$

De donde:

$$M = \frac{5PL}{48}$$

Ahora, graficamos los diagramas de fuerza cortante, momento flector y refuerzo.



Determinamos la deflexión máxima, la cual se producirá en el centro de la viga, debido a la simetría.

$$y_{\text{máx}} = y_{\text{C}} = \bar{M}_{\text{C}} = \frac{1}{2} \left(\frac{L}{4} \right) \left(\frac{PL}{8EI} \right) \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{L}{4} + \frac{L}{4} \right) + \left(\frac{L}{4} \right) \left(\frac{PL}{16EI} \right) \left(\frac{L}{8} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{L}{4} \right) \left(\frac{PL}{16EI} \right) \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{L}{4} \right) - \left(\frac{L}{4} \right) \left(\frac{5PL}{48EI} \right) \left(\frac{L}{8} + \frac{L}{4} \right) - \left(\frac{L}{4} \right) \left(\frac{5PL}{96EI} \right) \left(\frac{L}{8} \right)$$

De donde:

$$y_{\text{máx}} = -\frac{11PL^3}{3072EI} \downarrow$$

BIBLIOGRAFIA

1. **Gere James – Timoshenko Stephen.** Mecánica de materiales. Grupo Editorial Iberoamericana. México, 1986. – 825p.
2. **Miroliubov I.N. y otros.** Problemas de resistencia de materiales. Editorial Escuela Superior. Moscú, 2005. – 396p.
3. **Nelson James – McCormac Jack.** Análisis de estructuras. Editorial Alfaomega. México, 2006. – 582p.
4. **Popov Egor.** Mecánica de sólidos. Pearson Educación. México, 2000. – 864p.
5. **Pytel Andrew – Singer Ferdinand.** Resistencia de materiales. Editorial Oxford. México, 2006. – 584p.
6. **Uribe Escamilla Jairo.** Análisis de estructuras. Editorial Uniandes. Colombia, 2004. – 840p.
7. **Villarreal Castro Genner.** Interacción sísmica suelo-estructura en edificaciones con zapatas aisladas. Asamblea Nacional de Rectores. Lima, 2006. – 125p.
8. **Villarreal Castro Genner.** Análisis de estructuras con el programa LIRA 9.0. Lima, 2006. – 115p.
9. **Villarreal Castro Genner.** Interacción suelo-estructura en edificios altos. Asamblea Nacional de Rectores. Lima, 2007. – 142p.
10. **Villarreal Castro Genner.** Análisis estructural. Lima, 2008. – 335p.
11. **Villarreal Castro Genner – Oviedo Sarmiento Ricardo.** Edificaciones con disipadores de energía. Asamblea Nacional de Rectores. Lima, 2009. – 159p.
12. **Villarreal Castro Genner.** Resistencia de materiales. Lima, 2009. – 336p.
13. **Villarreal Castro Genner.** Estática: Problemas resueltos. Lima, 2011. – 227p.
14. **Volmir A.** Problemas de resistencia de materiales. Editorial MIR. Moscú, 1986. – 478p.

INDICE

PROLOGO.....	02
PRACTICA CALIFICADA Nº 1.....	04
PRACTICA CALIFICADA Nº 2.....	33
EXAMEN PARCIAL.....	62
PRACTICA CALIFICADA Nº 3.....	90
PRACTICA CALIFICADA Nº 4.....	128
EXAMEN FINAL.....	168
BIBLIOGRAFIA.....	204