

I.Miroliúbov, S.Engálichev, N.Serguévski,  
F.Almamétov, N.Kúritsin,  
K.Smirnov-Vasiliev, L.Yáshina

# **Problemas de resistencia de materiales**

EDITORIAL MIR · MOSCU





EDITORIAL

MIR

*И. Н. Миролубов, С. А. Енгалычев, Н. Д. Сергиевский,  
Ф. З. Алмаметов, Н. А. Курицын, К. Г. Смирнов-Васильев,  
Л. В. Яшина*

ПОСОБИЕ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ  
ПО СОПРОТИВЛЕНИЮ МАТЕРИАЛОВ

*Издательство «Высшая школа»*

*На испанском языке*

*I. Miroliúbov, S. Engálichev, N. Serguiévski,  
F. Almamétov, N. Kúritsin, K. Smirnov-Vasíliev,  
L. Yáshina*

# PROBLEMAS DE RESISTENCIA DE MATERIALES

*Traducido del ruso por  
Pedro Gutiérrez Mora*

*Candidato a doctor en ciencias  
técnicas*

*ESTIMADO LECTOR:*

La Editorial le quedará muy agradecida, si Ud nos manda su opinión acerca del libro que le ofrecemos, así como de la traducción y presentación del mismo.

Le agradeceremos también cualquier otra sugerencia respecto a la edición de libros que le interesan.

Dirija, por favor, su opinión y sugerencias a la Editorial Mir:

Editorial Mir, 1 Rizhski per., 2, Moscú, 129820, I-110, URSS.

Este manual de problemas que la editorial MIR ofrece a sus lectores se debe a la pluma de un grupo de profesores de la Cátedra de resistencia de materiales del Instituto mecánico de Leningrado.

El propósito fundamental del libro es facilitar el estudio de una asignatura tan compleja e importante para el ingeniero, como lo es la resistencia de materiales.

El libro está escrito de acuerdo con el programa de resistencia de materiales para las facultades de ingeniería mecánica de la URSS, que cubre tres semestres.

El círculo de cuestiones que se analizan en el libro es muy amplio y abarca todos los temas que caracterizan esta asignatura. Incluye los capítulos siguientes: tracción y compresión, estados tensionales e hipótesis de resistencia, recipientes de paredes delgadas, deslizamiento, cálculo de juntas, características geométricas de las secciones, torsión, flexión, resistencia compuesta, estabilidad de barras rectas, barras curvas planas, métodos energéticos de cálculo de sistemas elásticos, tubos de paredes gruesas, acción dinámica de las fuerzas y tensiones alternadas.

Para simplificar la labor del estudiante y con la finalidad de que asimile mejor la materia, en cada capítulo se exponen las bases teóricas del tema correspondiente y se analiza escrupulosamente toda una serie de ejemplos, numéricos unos y planteados en forma general otros, que, sin duda, facilitan la posterior solución de los problemas que se proponen.

El manual consta de 1028 problemas. Algunos de ellos se resuelven con relativa facilidad, otros requieren ciertos hábitos, pero todos contribuirán a que el estudiante apren-

da a aplicar los conocimientos teóricos adquiridos, a la resolución de los problemas que plantea la práctica del ingeniero y que no siempre son de solución única y fácil.

El ingeniero encontrará también en este libro muchas cosas útiles que le ayudarán en su trabajo.

La versión española de este manual será de un interés particular para el estudiante, el ingeniero y el profesor de habla castellana, ya que, de hecho, en este idioma no existen libros sobre problemas de resistencia de materiales que abarquen esta asignatura de una manera tan plena y profunda.

*Pedro Gutiérrez*

## INTRODUCCION

Las mayores dificultades que los estudiantes encuentran en el estudio de la resistencia de materiales surgen al resolver los problemas. Este libro de problemas tiene, como propósito, ayudar a los estudiosos de esta asignatura y, lo que es de suma importancia, ayudarles a asimilar los métodos de resolución de los problemas y a adquirir los hábitos necesarios en la solución de éstos.

El libro abarca los temas siguientes: tracción, compresión, deslizamiento, características geométricas de las figuras planas, torsión, flexión transversal plana, resistencia compuesta de barras rectas, flexión longitudinal, método energético de cálculo de sistemas elásticos, barras curvas, tubos de paredes gruesas y acción dinámica de las fuerzas.

El contexto incluye los fundamentos de la teoría, las indicaciones metodológicas necesarias, ejemplos de resolución de problemas típicos, problemas a resolver, las soluciones de estos problemas y un apéndice con el material de consulta necesario. Para mayor comodidad y para la mejor asimilación del material indicado, éste se distribuye de manera concéntrica en cada sección pequeña, pero independiente, del curso; las soluciones de los problemas y el material de consulta se dan al final del libro. Se considera que el estudiante, ante todo, debe familiarizarse con las bases teóricas, las indicaciones metodológicas y las resoluciones de los ejemplos típicos del capítulo correspondiente. Esto le permitirá memorizar y asimilar mejor las bases teóricas necesarias de la teoría, comprender el método de resolución de los problemas del tipo dado y adquirir conocimientos suficientes para resolver consciente e independientemente los problemas que se proponen.

Las condiciones de los problemas que se proponen a resolver están representadas por esquemas acompañados de los valores de las magnitudes necesarias. Puesto que cada esquema puede caracterizar el trabajo análogo de varias construcciones y no sólo de una, a veces de diferente destino, en la inmensa mayoría de los problemas no se dan condiciones verbales que limiten el empleo de tal o cual esquema para un caso concreto y que repitan el nombre de las mismas magnitudes dadas o por calcular.

En cada grupo de problemas que se refieren a un mismo tema y tienen igual propósito, se da una breve explicación del objetivo que se persigue al resolver el problema. Tal planteamiento de los problemas, sin afectar a la claridad del contenido, obliga al estudiante a plantear por su cuenta la condición del problema y, por lo tanto, contribuye a comprender mejor el sentido de las cuestiones que se resuelven y los datos originales. Al mismo tiempo, la ausencia del texto en las condiciones de los problemas permite aumentar considerablemente el número de esquemas de cálculo y analizar un número suficiente de cuestiones diversas sin incrementar el volumen del libro.

La explicación del sentido físico, mecánico o geométrico de las magnitudes que se anotan por los diversos símbolos se da en la tabla de las notaciones convencionales y en aquellas partes de cada parágrafo donde figuran las bases teóricas y las indicaciones metodológicas.

La segunda edición rusa del libro de problemas de resistencia de materiales incluye también la flexión longitudinal y transversal combinadas. El libro fue elaborado de acuerdo con las Normas Estatales Soviéticas (GOST) para el material laminado.

En la segunda edición se refleja el Sistema Internacional de Unidades (SI). En una serie de problemas se explican las peculiaridades de la resolución de los mismos en este sistema de unidades. Se dan también algunos problemas para resolver en este sistema. Para mayor comodidad, ha sido mantenida la misma numeración de la mayoría de los problemas que en la primera edición rusa.

En la comprobación de las soluciones y de las construcciones geométricas de los problemas, en esta segunda edición, tomaron parte los profesores de la cátedra de resistencia de materiales del Instituto mecánico de Leningrado, M. Vodopiánov, Yu. Poliakov y L. Rámsina.

Los autores están especialmente agradecidos al profesor N. Besújov por la minuciosa labor realizada al reseñar este libro, así como por sus válidas sugerencias sobre la primera edición. También se sienten complacidos de todos aquellos que enviaron sus observaciones.

Al mismo tiempo agradecen sinceramente al docente G. Itskóvich por el gran trabajo realizado al revisar la segunda edición y por toda una serie de observaciones y consejos.

Los autores agradecerán todas las observaciones críticas que contribuyan a la mejora del presente libro.

## NOTACIONES FUNDAMENTALES

- $A$ , reacción de apoyo; amplitud de las oscilaciones forzadas  
 $a$ , longitud del tramo de la barra; dimensión de la sección transversal; aceleración del centro de gravedad de la masa  
 $B$ , reacción de apoyo; anchura de la sección transversal; longitud de la riostra en columnas compuestas  
 $b$ , longitud del tramo de la barra; anchura de la sección  
 $C$ , rigidez de la barra (sistema)  
 $^{\circ}C$ , grados centígrados  
 $D$ ,  $d$ , diámetro  
 $E$ , módulo de elasticidad longitudinal del material  
 $e$ , distancia que determina la posición del centro de flexión; desplazamiento de la línea neutra respecto al centro de gravedad en la flexión de la barra curva  
 $F$ ,  $F_x$ , área de la sección transversal de la barra  
 $F_{c1z}$ ,  $F_{ap1}$ , áreas de cizallamiento y aplastamiento  
 $f$ ,  $f_x$ , flecha de la barra  
 $G$ , módulo de deslizamiento del material  
 $g$ , aceleración de la fuerza de gravedad  
 $h$ , altura de la sección rectangular, altura de caída del peso  
 $i_z$ ,  $i_y$ ,  $i_u$ ,  $i_v$ , radios de giro respecto a los ejes  $z$ ,  $y$ ,  $u$ ,  $v$   
 $i$ , radio de giro mínimo de la sección transversal  
 $I_z$ ,  $I_y$ ,  $I_u$ ,  $I_v$ , momentos axiales de inercia del área de una figura respecto a los ejes  $z$ ,  $y$ ,  $u$ ,  $v$   
 $J_p$ , momento polar de inercia del área de una figura  
 $I_{\max}$ , momentos principales de inercia del área de una figura  
 $I_{\min}$   
 $I_{\text{tor}}$ , característica geométrica de la rigidez a la torsión de la sección  
 $I_m$ , momento de inercia de una masa respecto al eje de rotación  
 $I_{zy}$ , producto de inercia del área de una figura respecto a los ejes  $z$ ,  $y$   
 $k$ , coeficiente que considera la influencia de la configuración de la sección transversal sobre el valor de la energía potencial debida a la fuerza cortante; coeficiente que considera el grado de curvatura de la espira de un resorte helicoidal y la influencia de la fuerza cortante  
 $k_d$ , coeficiente dinámico  
 $k_m$ , coeficiente de reducción de la masa

- $l$ , longitud de la barra o de su tramo  
 $l_{ef}$ , longitud efectiva de una barra comprimida  
 $\Delta l$ , variación absoluta de la longitud de la barra  
 $l_0$ , longitud (libre) de la rama de una columna entre riostras  
 $M$ , momento de un par exterior concentrado  
 $M_t$ , momento torsor  
 $d, M_x$ , momento flector  
 $M_{max}$ , momento flector máximo en valor absoluto  
 $M_F$ , momento flector en la viga conjugada  
 $M_z, M_y$ , momentos flectores respecto a los ejes centrales principales de inercia  $z$  y  $y$  de la sección  
 $M_{eI}, M_{eII}, M_{eIII}, M_{eIV}, M_{eV}$ , momentos flectores equivalentes según las hipótesis de resistencia  
 $\bar{M}, (\bar{M}_t)$  momento flector (torsor) originado por una fuerza generalizada unitaria  
 $M_C$ , momento convencional en vigas de sección variable;  
 $M_d$ , momento dinámico  
 $m$ , momento unitario de los pares de fuerzas exteriores, distribuidos uniformemente sobre la longitud; masa del peso, de la barra  
 $m_r$ , masa reducida  
 $N, N_x$ , esfuerzo axial; potencia en caballos de vapor, vatios, kilovatios; frecuencia de las oscilaciones (1/s); número de ciclos  
 $\bar{N}$ , esfuerzo originado por la fuerza unitaria generalizada;  
 $N_d$ , esfuerzo axial dinámico  
 $n$ , número de revoluciones por minuto; coeficiente de seguridad  
 $n_r, n_d$ , coeficientes de seguridad referidos al límite de fluencia y al de resistencia  
 $[n]$ , coeficiente de seguridad admisible  
 $n_e$ , coeficiente de seguridad por estabilidad (pandeo)  
 $P$ , fuerza concentrada  
 $P_{crit}$ , fuerza crítica  
 $P_i$ , fuerzas generalizadas  
 $P_F$ , fuerza generalizada ficticia  
 $P_d$ , fuerza dinámica  
 $P_D$ , fuerza perturbadora  
 $P_0$ , amplitud de la fuerza perturbadora  
 $p$ , intensidad de la carga distribuida sobre un área; presión, tensión completa (resultante);  
 $p_0$ , tensión resultante octaédrica; presión de contacto entre los tubos cilíndricos compuestos;  
 $p_{max}, p_{min}, p_m$ , tensión del ciclo máxima, mínima y media;  
 $P_C$ , amplitud del ciclo;  
 $P'_{max}, P'_{m}, P'_a$ , tensión máxima, media y amplitud del ciclo durante el trabajo en el límite de resistencia a la fatiga;

- $p_r$ , límite de resistencia a la fatiga;  
 $p_{-1}$ , límite de resistencia a la fatiga en el ciclo simétrico  
 $[p_r]$ , tensión admisible en el ciclo de coeficiente de asimetría  $r$   
 $[p_{-1}]$ , tensión admisible en el ciclo simétrico  
 $Q, Q_x$ , peso de la barra, de la carga; esfuerzo tangencial; fuerza cortante en la sección  
 $Q_F$ , fuerza cortante en la viga conjugada  
 $Q_y, Q_z$ , fuerzas cortantes orientadas según los ejes  $y, z$   
 $\bar{Q}$ , fuerza cortante originada por la fuerza generalizada unitaria  
 $Q_0$ , peso del cuerpo que golpea  
 $q, q_x$ , intensidad de la carga distribuida sobre la longitud  
 $q$ , coeficiente de sensibilidad del material a la concentración de las tensiones  
 $r$ , radio; radio de curvatura de la capa neutra de la barra curva; coeficiente de asimetría del ciclo  
 $S_z, S_y, (S)$ , momentos estáticos del área de la figura respecto a los ejes  $z, y$  (neutros)  
 $s$ , dimensión a lo largo del arco, longitud del arco  
 $ds$ , elemento de longitud del eje geométrico del tramo  
 $T$ , período de las oscilaciones; energía cinética  
 $t^\circ$ , temperatura del sistema, barra, en grados centígrados  
 $t$ , tiempo  
 $U$ , energía potencial de las deformaciones elásticas  
 $u, u_f, u_{vol}$ , energía potencial unitaria de la deformación elástica; sus partes debidas a la variación de la forma y del volumen  
 $V, v$ , volumen original, anotación del eje  
 $\Delta V, \frac{\Delta V}{V}$ , variación absoluta del volumen; variación unitaria  
 $W_p$ , módulo polar de la sección circular o anular  
 $W_{tor}$ , módulo de la sección en la torsión  
 $W (W_1, W_2)$ , módulo de la sección transversal de la viga respecto a la línea neutra (módulos axiales de la sección para la fibra traccionada, comprimida)  
 $X_1, X_2, \dots, X_n$ , incógnitas superfluas  
 $x, y, z$ , ejes; coordenadas  
 $\alpha$ , ángulo; coeficiente de dilatación lineal del material; coeficiente de distribución de las tensiones en la flexión de la barra curva; coeficiente de concentración de tensiones  
 $\alpha_e$ , coeficiente efectivo de concentración  
 $\beta$ , ángulo; coeficiente de crecimiento de las oscilaciones  
 $\gamma$ , peso por unidad de volumen del material; distorsión unitaria (deformación angular)  
 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ , deformaciones angulares principales  
 $\gamma_0$ , distorsión octaédrica  
 $\Delta$ , magnitud lineal que caracteriza el error cometido al elaborar el elemento elástico del sistema; apretura de los tubos compuestos

- $\delta$ , desplazamiento elástico generalizado; desplazamiento estático  
 $\delta_z, \delta_y, \delta_v, \delta_h$ , proyecciones del desplazamiento sobre los ejes  $z, y$ , sobre la vertical y sobre la horizontal  
 $[\delta]$ , desplazamiento admisible del punto  
 $\delta_{lp}, \delta_{ll}, \delta_{lh}$ , desplazamientos generalizados; coeficientes de las ecuaciones del método de las fuerzas  
 $\delta_d$ , desplazamiento dinámico  
 $\delta_o$ , desplazamiento generalizado del punto de suspensión del peso cuando la fuerza perturbadora actúa estáticamente  
 $\varepsilon$ , deformación lineal (deformación unitaria)  
 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ , deformaciones lineales principales  
 $\varepsilon'$ , deformación unitaria transversal  
 $\varepsilon_e$ , factor de escala  
 $\varepsilon_s$ , coeficiente de sensibilidad superficial  
 $\theta, \theta_x$ , ángulo de giro de la sección de la viga  
 $\theta_d$ , ángulo dinámico de giro  
 $K$ , módulo de elasticidad estérea del material  
 $\kappa$ , coeficiente de compresibilidad del material  
 $\lambda$ , esbeltez de la barra  
 $\lambda_c, \lambda_r$ , esbeltez de la columna, rama  
 $\mu$ , coeficiente de Poisson del material; coeficiente de la longitud de la barra comprimida en la flexión longitudinal (pandeo)  
 $\rho$ , distancia del centro; radio de curvatura del eje geométrico de la barra curva  
 $\rho_t, \rho_m$ , radios de curvatura de la sección circunferencial (anular) y meridional de la pared del recipiente  
 $\sigma, \sigma_x, \sigma_\alpha$ , tensiones normales  
 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , tensiones principales en el punto dado  
 $\sigma_p$ , límite de proporcionalidad  
 $\sigma_f$ , límite de fluencia  
 $\sigma_r$ , límite de resistencia  
 $[\sigma]$ , tensiones admisibles a tracción y compresión  
 $\sigma_o$ , tensión normal octaédrica  
 $[\sigma_{trac}], [\sigma_{com}], [\sigma_t], [\sigma_{apl}]$ , tensiones normales admisibles a tracción, compresión, flexión y aplastamiento  
 $\sigma_{eI}, \sigma_{eII}, \dots, \sigma_{eV}$ , tensiones equivalentes (efectivas) según las hipótesis de resistencia: primera, segunda, ... quinta (hipótesis de Mohr)  
 $\sigma_{crit}$ , tensión crítica  
 $[\sigma_e]$ , tensión admisible en el pandeo (estabilidad)  
 $\sigma_r, \sigma_t$ , tensiones normales radial y tangencial en los tubos de paredes gruesas  
 $\sigma_t, \sigma_m$ , tensiones circunferencial y meridional en los recipientes de paredes delgadas  
 $\sigma_r$ , límite de resistencia a la fatiga  
 $\sigma_{max}, \sigma_m, \sigma_a$ , tensión normal máxima, media y amplitud del ciclo

- $\sigma_{-1}$ , límite de resistencia a la fatiga en la flexión simétrica  
 $\sigma_{-1t}$ , límite de resistencia a la fatiga en la tracción-compresión axial simétrica  
 $[\sigma_r]$ , tensión normal admisible en el ciclo de coeficiente de asimetría  $r$   
 $[\sigma_{-1}]$ , tensión normal admisible en el ciclo simétrico  
 $\sigma_d$ , tensión normal dinámica  
 $\tau, \tau_\alpha$ , tensión tangencial;  $\tau_{\max}$ , tensión tangencial máxima  
 $\tau_1, \tau_2, \tau_3$ , tensiones tangenciales extremas  
 $\tau_0$ , tensión tangencial octaédrica  
 $[\tau]$ , tensión tangencial admisible  
 $\tau_d$ , tensión tangencial dinámica  
 $\tau_r$ , límite de resistencia a la fatiga en la torsión  
 $\tau_{\max}, \tau_m, \tau_a$ , tensión tangencial máxima, media y amplitud del ciclo  
 $\tau_{-1}$ , límite de resistencia a la fatiga en la torsión simétrica  
 $[\tau_r]$ , tensión admisible en la torsión en el caso del ciclo de coeficiente de asimetría  $r$   
 $[\tau_{-1}]$ , tensión admisible en el ciclo simétrico  
 $\varphi$ , ángulo de torsión; coeficiente de disminución de la tensión admisible en la flexión longitudinal  
 $[\varphi]$ , ángulo de torsión admisible  
 $\omega$ , área de los diagramas del momento flector; velocidad angular; frecuencia angular de las oscilaciones  
 $\omega_0$ , frecuencia angular de la variación de la fuerza perturbador

## UNIDADES DE MEDICION

### *Sistema internacional de unidades (SI)*

- $m, kg, s$  metro, kilogramo, segundo; unidades de longitud, de masa y del tiempo (unidades básicas);  
 $cm, mm$  unidades fraccionarias de longitud (centímetro, milímetro);  
 $N$ , newton, unidad de fuerza ( $1N \approx 1/9,81 \text{ kgf} = 0,102 \text{ kgf}$ );  
 $kN, MN, dN$ , unidades múltiples de fuerza kilonewton, meganewton, decanewton ( $1 \text{ kN} = 10^3 \text{ N}$ ;  $1 \text{ MN} = 10^6 \text{ N}$ ;  $1 \text{ dN} = 10 \text{ N} \approx 1,02 \text{ kgf}$ );  
 $N/m^2$ , unidad de tensión y presión ( $1 \text{ N/m}^2 \approx 1,02 \cdot 10^{-6} \text{ kgf/cm}^2$ );  
 $MN/m^2$ , unidad múltiple de tensión y presión ( $1 \text{ MN/m}^2 = 10^6 \text{ N/m}^2 = 10 \text{ dN/cm}^2 \approx 10,2 \text{ kgf/cm}^2$ );  
 $dN/cm^2, dN/mm^2$ , unidades de tensión y presión no previstas por el sistema de unidades ( $1 \text{ dN/cm}^2 = 10^5 \text{ N/m}^2 = 1 \text{ bar} \approx 1,02 \text{ kgf/cm}^2$ ;  $1 \text{ dN/mm}^2 = 10^7 \text{ N/m}^2 \approx 102 \text{ kgf/cm}^2 = 1,02 \text{ kgf/mm}^2$ );  
 $J$ , joule, unidad de trabajo ( $1J \approx 1/9,81 \text{ kgf} \cdot m \approx 0,102 \text{ kgf} \cdot m$ );  
 $W, kW$ , vatio, kilovatio; unidades de potencia ( $1 \text{ kW} \approx 102 \text{ kgf} \cdot m/s \approx 1,36 \text{ CV}$ ).

### *Sistema técnico de unidades (MKGFS)*

- m, kgf, s, metro, kilogramo fuerza, segundo ( $1 \text{ kgf} \approx 9,81 \text{ N} = 0,981 \text{ dN}$ );
- tf, tonelada fuerza ( $1 \text{ tf} = 10^3 \text{ kgf} \approx 9,81 \cdot 10^3 \text{ N} = 9,81 \text{ kN}$ );
- kgf/cm<sup>2</sup>, unidad de tensión y presión ( $1 \text{ kgf/cm}^2 \approx 9,81 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2 \approx 0,0981 \text{ MN/m}^2 \approx 0,981 \text{ dN/cm}^2$ );
- bar, unidad no prevista por el sistema de unidades ( $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ N/m}^2 = 1 \text{ dN/cm}^2 \approx 1,02 \text{ kgf/cm}^2$ );
- kgf·m, unidad de trabajo ( $1 \text{ kgf} \cdot \text{m} \approx 9,81 \text{ J}$ );
- CV, unidad de potencia no prevista por el sistema de unidades, caballo de vapor (H.P. caballo de fuerza) ( $1 \text{ CV} = 75 \text{ kgf} \cdot \text{m/s} \approx 0,736 \text{ kW}$ ).

### *Observaciones generales sobre las condiciones de los problemas*

1. Todas las magnitudes que se indican en los dibujos de los problemas se consideran dadas. Las magnitudes que se buscan van acompañadas del signo de interrogación (allí donde es necesario).
2. Los problemas cuyas condiciones se dan en el sistema internacional de unidades (SI) deben resolverse en este mismo sistema.
3. Si las dimensiones geométricas de los dibujos no se indican, se consideran dadas en milímetros.
4. Los elementos que se indican en los dibujos por dos líneas con rayado se consideran absolutamente rígidos.
5. Considérese garantizada la estabilidad de todos los elementos comprimidos de las construcciones (excluyendo los casos donde esto se indica especialmente).

# I. TRACCION Y COMPRESION

## § 1. Esfuerzo axial

La resultante de las fuerzas normales de elasticidad en la sección se denomina *esfuerzo axial*. El esfuerzo axial se determina por el método de las secciones. La magnitud del esfuerzo axial  $N_x$  en una sección transversal cualquiera de la barra es igual a la suma algebraica de todas las fuerzas axiales exteriores (concentradas  $P$  y distribuidas, según ley arbitraria, de intensidad  $q_x$ ) que actúan sobre la barra a uno u otro lado de la sección en cuestión. El esfuerzo de tracción se considera positivo y el de compresión, negativo.

La fórmula general, por la que se puede obtener la magnitud del esfuerzo axial en una sección transversal arbitraria de la barra, es la siguiente:

$$N_x = \Sigma P + \Sigma \int q_x dx. \quad (1)$$

La integración se lleva a cabo sobre los tramos solicitados por carga distribuida y la suma abarca todos los tramos situados a uno de los dos lados de la sección en cuestión.

Si dirigimos el vector del esfuerzo axial  $N_x$  hacia afuera de la sección, entonces las condiciones de equilibrio de la parte separada de la barra, es decir, la fórmula (1) nos darán la magnitud y el signo correspondiente del esfuerzo.

**Ejemplo 1.** Construir el diagrama de  $N$  si  $P_1 = P$ ,  $P_2 = 3P$ ,  $P_3 = 2P$  y la carga distribuida  $q_x$  varía linealmente de  $q = 0$  a  $q = P/a$  (fig. 1).

**Resolución.** Trazando una sección transversal arbitraria en cada tramo de la barra, se obtienen, por la fórmula (1), los siguientes valores de los esfuerzos axiales:

$$N_1 = -P_1 = -P; \quad N_2 = -P_1 + P_2 = -P + 3P = 2P;$$

$$N_3 = -P_1 + P_2 - \int_0^x P \frac{x}{2a^2} dx = -P + 3P - P \frac{x^2}{4a^2} = P \left( 2 - \frac{x^2}{4a^2} \right);$$

$$N_{3_{x=0}} = 2P; \quad N_{3_{x=a}} = \frac{7}{4}P; \quad N_4 = -P_1 + P_2 -$$

$$- \int_0^x P \frac{x}{2a^2} dx - P_3 = -P \frac{x^2}{4a^2};$$

$$N_{4_{x=a}} = -\frac{P}{4}; \quad N_{4_{x=2a}} = -P; \quad N_5 = -P_1 + P_2 -$$

$$- \int_0^{2a} P \frac{x}{2a^2} dx - P_3 = -P.$$

El diagrama de  $N$  está representado en la figura 1.

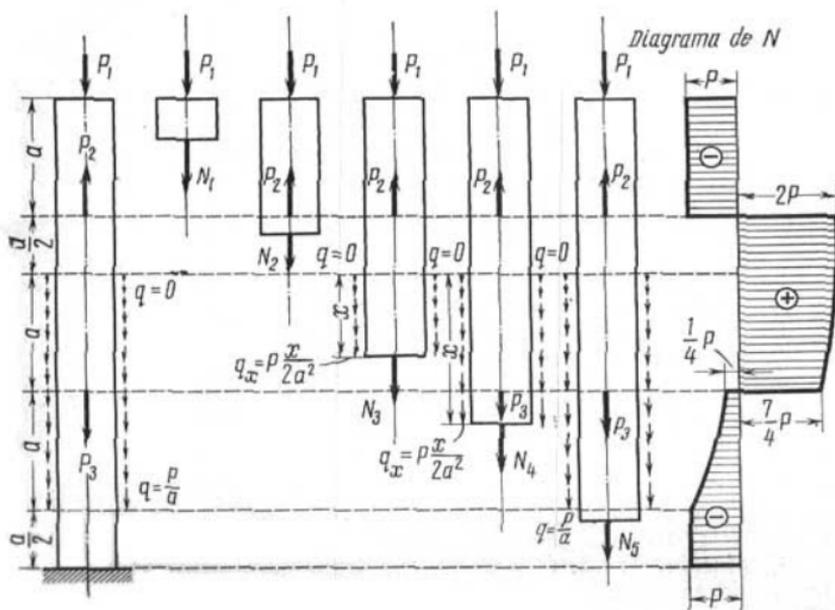
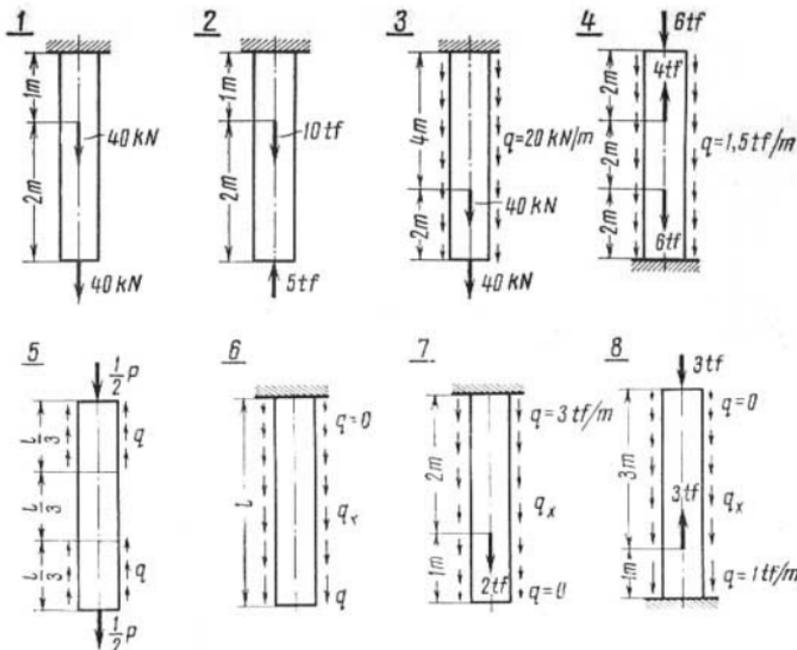


Fig. 1

**Problemas 1-8.** Construir los diagramas del esfuerzo axial  $N$ . En los problemas 6, 7, 8 se debe considerar que la intensidad de la carga distribuida  $q_x$  varía linealmente.



## § 2. Tensiones normales, alargamiento absoluto y energía potencial

Se admite que en todas las secciones transversales de las barras traccionadas o comprimidas (de una manera aproximada también en el caso de barras de sección variable) las tensiones normales  $\sigma_x$  se distribuyen uniformemente. Por consiguiente, la magnitud de la tensión normal en una sección transversal cualquiera de la barra se determinará por la razón entre el esfuerzo axial  $N_x$  en dicha sección y su área  $F_x$ , es decir,

$$\sigma_x = \frac{N_x}{F_x}. \quad (2)$$

Suponiendo que los materiales de las barras se atienen a la ley de Hooke, la magnitud del alargamiento absoluto de la barra se podrá obtener por la fórmula general siguiente:

$$\Delta l = \Sigma \int \frac{N_x dx}{EF_x}, \quad (3)$$

siendo  $E$  el módulo de elasticidad longitudinal del material de la barra.

La integración se lleva a cabo sobre cada tramo y la suma abarca todos los tramos de la barra.

Si en toda la longitud  $l$  de la barra  $N$  y  $F$  son constantes, entonces

$$\Delta l = \frac{Nl}{EF}.$$

La fórmula general para determinar la energía potencial de la deformación elástica  $U$ , acumulada en la barra durante la tracción y compresión, es la siguiente:

$$U = \Sigma \int \frac{N_x^2 dx}{2EF_x}. \quad (4)$$

La integración y suma se efectúan aquí de la misma forma que al hallar el alargamiento de la barra.

Puesto que dentro de los límites del dominio elástico puede considerarse que la energía potencial es igual al trabajo de las fuerzas

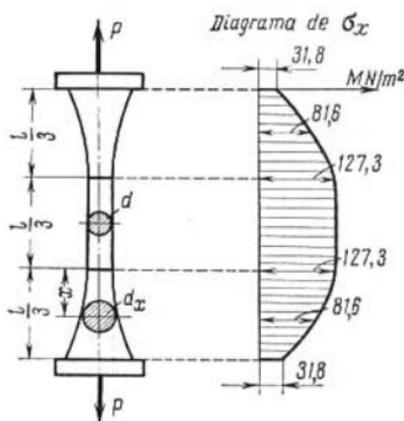


Fig. 2

exteriores, en el caso de barras traccionadas o comprimidas por fuerzas  $P$  aplicadas a los extremos, tendremos

$$U = \frac{1}{2} P \Delta l. \quad (5)$$

**Ejemplo 2.** Construir el diagrama de  $\sigma_x$ , calcular  $\Delta l$  y  $U$ , si  $P = 10 \text{ kN}$ ;  $l = 0,3 \text{ m}$ ;  $d = 0,01 \text{ m}$ ;  $d_x = (0,01 + x^2) \text{ m}$ ;  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MN/m}^2$  (fig. 2).

*Resolución.* El esfuerzo axial en cualquier sección transversal es  $N_x = P = 10 \text{ kN}$ . Las áreas de las secciones transversales son:

en la parte cilíndrica,

$$F = \frac{\pi d^2}{4} = 0,25\pi \cdot 10^{-4} \text{ m}^2,$$

en las partes de sección variable,

$$F_x = \frac{\pi d_x^2}{4} = \frac{\pi}{4} (0,01 + x^2)^2 \text{ m}^2.$$

Las tensiones normales serán:

en la parte cilíndrica,

$$\sigma_x = \frac{N_x}{F} = \frac{10^4}{0,25\pi \cdot 10^{-4}}, \quad \delta \quad \sigma_x \approx 1,273 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2 = 127,3 \text{ MN/m}^2,$$

en las partes de sección variable,

$$\sigma_x = \frac{N_x}{F_x} = \frac{4P}{\pi (0,01 + x^2)^2} = \frac{4 \cdot 10^4}{\pi (0,01 + x^2)^2} \text{ N/m}^2 \approx \frac{127,3}{(1 + 100x^2)^2} \text{ MN/m}^2,$$

$$\sigma_{x=0} = 127,3 \text{ MN/m}^2; \quad \sigma_{x=\frac{l}{6}} = \frac{127,3}{(1 + 100 \cdot 0,05^2)^2} \approx \\ \approx 81,6 \text{ MN/m}^2; \quad \sigma_{x=\frac{l}{6}} = 31,8 \text{ MN/m}^2.$$

El diagrama de  $\sigma_x$  está representado en la figura 2.

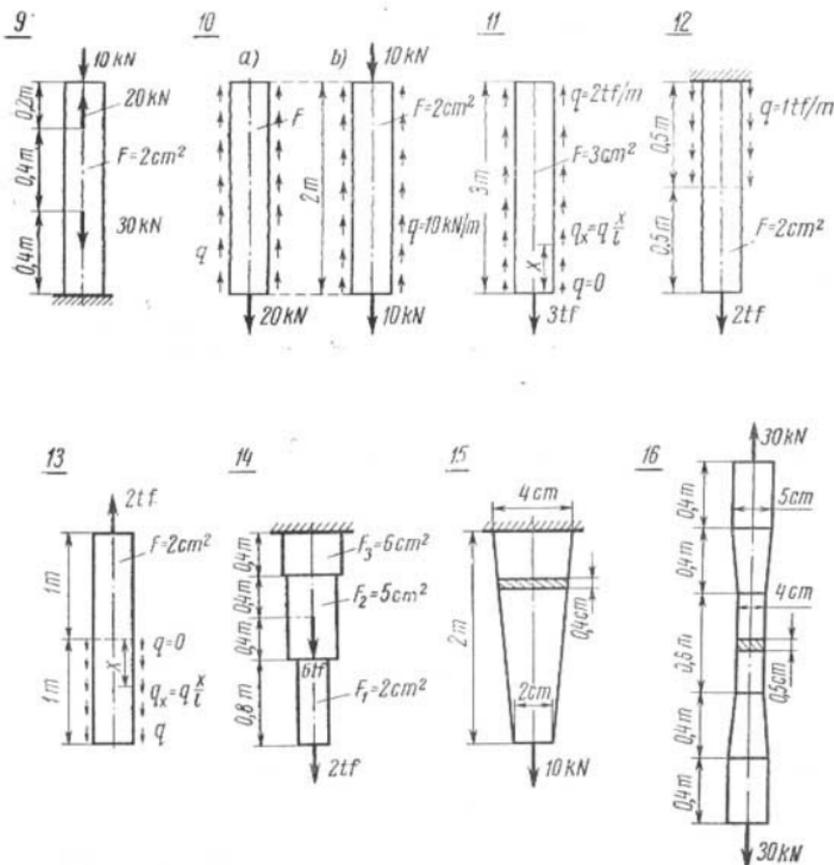
El alargamiento absoluto de la barra se obtiene por la fórmula (3),

$$\Delta l = \Sigma \int \frac{N_x dx}{EF_x} = \frac{Pl}{3EF} + \frac{2P \cdot 4}{\pi E} \int_0^{l/3} \frac{dx}{\pi (0,01 + x^2)^2} = \\ = \frac{Pl}{3EF} + \frac{8P}{\pi E} \left[ \frac{x}{2(0,01 + x^2)} \cdot \frac{1}{0,1^2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2 \cdot 0,1^3} \arctg \frac{x}{0,1} \right]_0^{0,1} = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 0,3}{3 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 0,25\pi \cdot 10^{-4}} + \\ + \frac{8 \cdot 10^4}{\pi \cdot 2 \cdot 10^{11}} \left( \frac{0,1}{2(0,01 + 0,1^2) \cdot 0,1^2} + \frac{1}{2 \cdot 0,1^3} \arctg 1 \right); \\ \Delta l \approx 1,46 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 0,0146 \text{ cm}.$$

La energía potencial de la deformación elástica acumulada en la barra se halla por la fórmula (5),

$$U = \frac{P\Delta l}{2} = \frac{10^4 \cdot 1,46 \cdot 10^{-4}}{2} = 0,73 \text{ j} \approx 7,45 \text{ kgf-cm}.$$

**Problemas 9-16.** Construir los diagramas de las tensiones normales  $\sigma$ , calcular las variaciones absolutas de las longitudes de las barras  $\Delta l$  y las energías potenciales de las deformaciones elásticas  $U$  acumuladas en las barras, si  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MN/m}^2$ . En los problemas 11-14 se debe admitir  $E = 2 \cdot 10^6 \text{ kgf/cm}^2$ .



### § 3. Deformación transversal y variación del volumen

La deformación unitaria longitudinal  $\varepsilon$  en el caso de tracción o compresión es, según la ley de Hooke,

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}, \quad (6)$$

y la deformación unitaria transversal,

$$\varepsilon' = -\mu\varepsilon = -\mu \frac{\sigma}{E}, \quad (7)$$

siendo  $\mu$  el coeficiente de Poisson del material.

La variación unitaria del área de la sección transversal de la barra puede calcularse por la fórmula,

$$\frac{\Delta F}{F} \approx -2\mu\varepsilon = -2\mu \frac{\sigma}{E}. \quad (8)$$

Para hallar la variación absoluta del volumen de la barra se emplea la expresión

$$\Delta V = \frac{(1 - 2\mu)}{E} \Sigma \int N_x dx. \quad (9)$$

La integración se realiza sobre cada tramo, la suma abarca todos los tramos.

Si la barra se tracciona o se comprime por las fuerzas  $P$ , aplicadas a los extremos, entonces

$$\Delta V = \frac{(1 - 2\mu)}{E} PL. \quad (10)$$

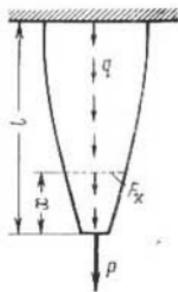


Fig. 3

**Ejemplo 3.** Dados  $P$ ,  $q$ ,  $l$ ,  $F_x$ ,  $E$  y  $\mu$ , (fig. 3), calcúlese  $\varepsilon_x$  y  $\Delta V$ .

*Resolución.* El esfuerzo axial y la tensión normal en una sección transversal arbitraria son, según las fórmulas (1) y (2),

$$N_x = P + qx; \quad \sigma_x = \frac{N_x}{F_x} = \frac{P + qx}{F_x}.$$

Puesto que, según la ley de Hooke, el alargamiento unitario vale  $\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{P + qx}{EF_x}$ , la variación unitaria del área de la sección transversal será, según la fórmula (8),

$$\frac{\Delta F_x}{F_x} = -2\mu \frac{\sigma_x}{E} = -2\mu \frac{P + qx}{EF_x}.$$

Por la fórmula (9) hallamos la variación absoluta del volumen de la barra

$$\Delta V = \frac{(1 - 2\mu)}{E} \int_0^l N_x dx = \frac{(1 - 2\mu)}{E} \int_0^l (P + qx) dx =$$

$$= \frac{(1 - 2\mu)}{E} \left( P + \frac{ql}{2} \right) l.$$

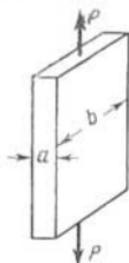
**Problemas 17-24.** Calcular las magnitudes indicadas en las condiciones de los problemas.

17



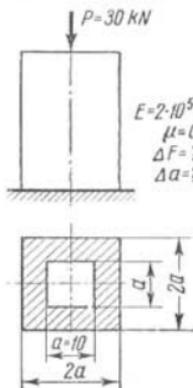
$E, \mu$   
 $\Delta d = ?$

18



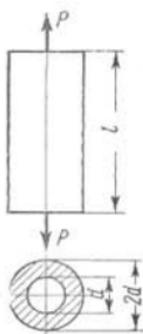
$E; \Delta b; \mu = ?; b = ?$

19



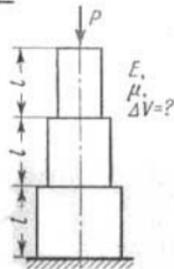
$E = 2 \cdot 10^5 \text{ MN/m}^2$   
 $\mu = 0,3$   
 $\Delta F = ?$   
 $\Delta a = ?$

20



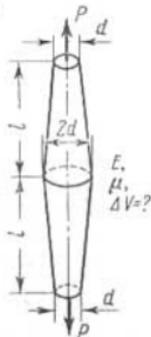
$E, \mu; \frac{\Delta V}{V} = ?$

21



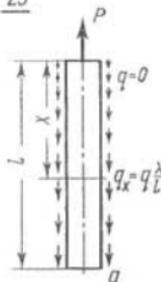
$E, \mu,$   
 $\Delta V = ?$

22



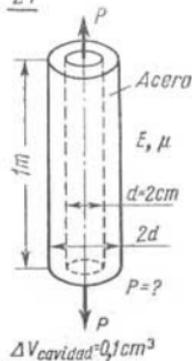
$E, \mu,$   
 $\Delta V = ?$

23



$E, \mu; \Delta V = ?$

24



$\Delta V_{cavidad} = 0,1 \text{ cm}^3$

En el problema 24 se debe considerar que para el acero  $E = 2 \cdot 10^6 \text{ kgf/cm}^2$  y  $\mu = 0,3$ .

#### § 4. Desplazamientos de los puntos de sistemas de barras articuladas

El cálculo de los desplazamientos elásticos de los puntos de sistemas de barras articuladas se realiza según el esquema general siguiente.

De las ecuaciones de la estática se calculan los esfuerzos axiales en todos los elementos elásticos del sistema. Por la ley de Hooke se hallan las magnitudes de los alargamientos absolutos de los elementos.

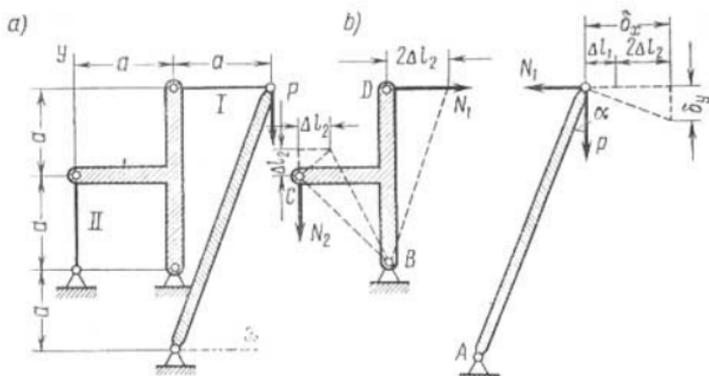


Fig. 4

Considerando que los elementos del sistema al deformarse no se separan, por el método de intersecciones, se plantean las condiciones de compatibilidad de los desplazamientos, es decir, las relaciones geométricas entre los desplazamientos de los elementos que constituyen el sistema. De las relaciones obtenidas se obtiene la magnitud del desplazamiento que se busca.

Al emplear el método de intersecciones debe tenerse en cuenta que cada elemento del sistema, aparte de sufrir la deformación axial, puede también girar respecto a la articulación correspondiente. Por esta razón, cada punto del elemento puede desplazarse a lo largo del eje del elemento y por el arco de la circunferencia de radio correspondiente. Estos arcos (intersecciones) pueden sustituirse por rectas perpendiculares a los radios de rotación, puesto que los alargamientos elásticos de los elementos son pequeños en comparación con las longitudes de éstos.

**Ejemplo 4.** Dados  $P$ ,  $a$ ,  $E_1$ ,  $F_1$ ,  $E_2$  y  $F_2$  (fig. 4, a), hallar las proyecciones vertical  $\delta_y$  horizontal  $\delta_x$  del desplazamiento  $\delta$  del punto de aplicación de la fuerza  $P$ .

**Resolución.** Descomponemos el sistema mediante las secciones I y II de los tirantes en dos sistemas (fig. 4, b).

De las ecuaciones de la estática  $\Sigma M_A = 0$  y  $\Sigma M_B = 0$  determinamos los esfuerzos en los tirantes  $N_1 = \frac{P}{3}$  y  $N_2 = \frac{2}{3}P$ . Por

la ley de Hooke  $\Delta l_1 = \frac{Pa}{3E_1F_1}$  y  $\Delta l_2 = \frac{2Pa}{3E_2F_2}$ .

Por el método de intersecciones (fig. 4, b) hallamos el desplazamiento horizontal del punto C igual a  $\Delta l_2$  y el desplazamiento del punto C perpendicular a la línea BC:  $\delta_C = \Delta l_2 \sqrt{2}$ .

El punto D solamente puede desplazarse por la horizontal. Este desplazamiento es:  $\delta_D = \delta_C \frac{2a}{a\sqrt{2}} = 2\Delta l_2$ .

El desplazamiento horizontal del punto de aplicación de la fuerza P se compone del desplazamiento horizontal del punto D y del alargamiento del 1er tirante, es decir,

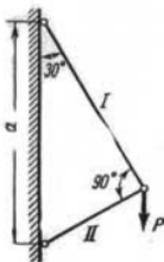
$$\delta_x = 2\Delta l_2 + \Delta l_1 = \frac{4Pa}{3E_2F_2} + \frac{1}{3} \frac{Pa}{E_1F_1} = \frac{Pa}{3} \left( \frac{4}{E_2F_2} + \frac{1}{E_1F_1} \right).$$

El desplazamiento vertical del punto de aplicación de la fuerza P será,

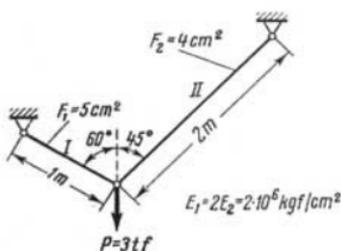
$$\delta_y = \delta_x \operatorname{tg} \alpha = \delta_x \frac{a}{3a} = \frac{Pa}{9} \left( \frac{4}{E_2F_2} + \frac{1}{E_1F_1} \right).$$

**Problemas 25-40.** Determinar los desplazamientos  $\delta$  de los puntos de aplicación de las fuerzas exteriores P (o de otros puntos que estén indicados en las condiciones de los problemas) y las tensiones normales en las secciones transversales de las barras elásticas. En los problemas con datos literales, donde no figuran los valores de E y F, éstos deben considerarse como dados e iguales para todos los elementos elásticos del sistema. En los problemas 37-40 debe admitirse para todas las barras  $E = 2 \cdot 10^6 \text{ MN/m}^2$ . En los problemas 35 y 36,  $E = 2 \cdot 10^6 \text{ kgf/cm}^2$ .

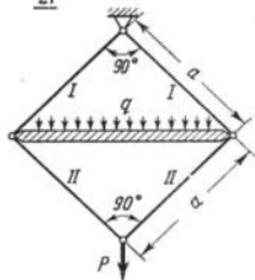
25



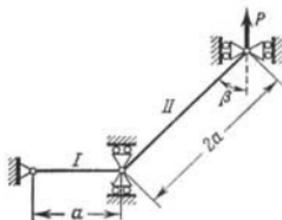
26



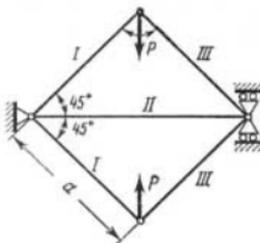
27



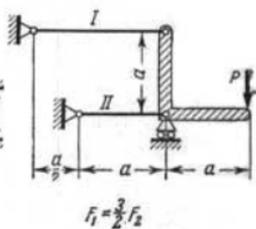
28



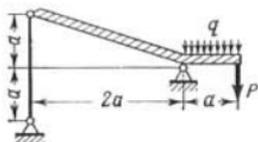
29



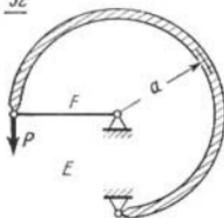
30



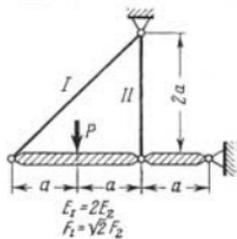
31



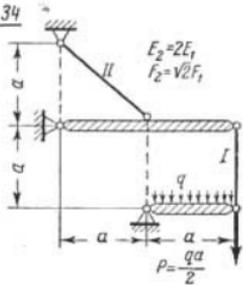
32



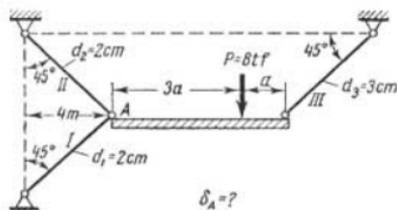
33



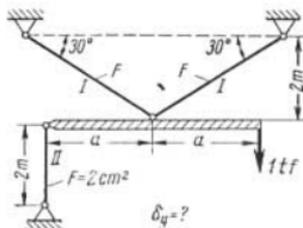
34



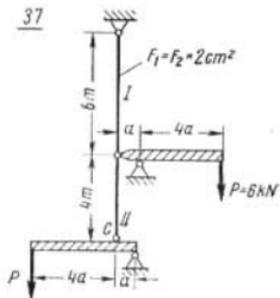
35

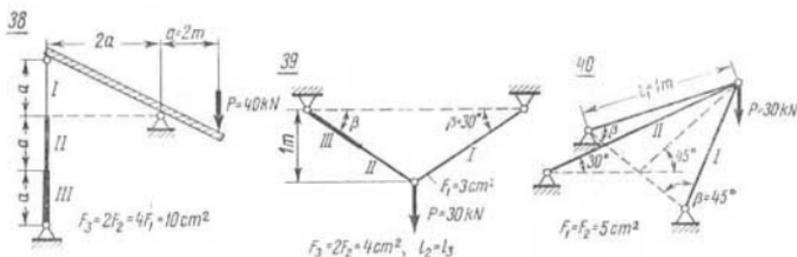


36



37





## § 5. Resistencia y rigidez

La determinación del valor necesario del área  $F$  de la sección transversal de una barra traccionada o comprimida de sección constante se realiza por la fórmula,

$$F = \frac{N_{\max}}{[\sigma]}, \quad (11)$$

donde  $N_{\max}$  es el esfuerzo axial máximo, en valor absoluto, en la barra que se calcula y  $[\sigma]$ , la tensión admisible a tracción o compresión para el material de la barra. También se designa la tensión admisible a tracción por  $[\sigma_t]$ , y a compresión, por  $[\sigma_c]$ .

En el caso de materiales de igual resistencia a tracción que a compresión (caso de materiales plásticos)

$$[\sigma_t] = [\sigma_c] = [\sigma] = \frac{\sigma_f}{n_f}, \quad (12)$$

siendo  $\sigma_f$  el límite de fluencia del material a la tracción (compresión) y

$n$  (f) el coeficiente de seguridad referido al límite de fluencia.

Si además se plantea la condición de que el desplazamiento elástico  $\delta$  de cierto punto del sistema no supere el valor admisible dado  $[\delta]$ , entonces se realiza también la comprobación de la rigidez, por la desigualdad

$$\delta \leq [\delta] \quad (13)$$

**Ejemplo 5.** Dado:  $P = 1$  tf;  $a = 1$  m;  $\alpha = 30^\circ$ ;  $[\sigma_t]_I = 1\,000$  kgf/cm<sup>2</sup>;  $E_1 = 2 \cdot 10^6$  kgf/cm<sup>2</sup>;  $[\sigma_c]_{II} = 100$  kgf/cm<sup>2</sup> y  $E_2 = 0,1 \cdot 10^6$  kgf/cm<sup>2</sup>; que las proyecciones horizontal  $[\delta_x]$  y vertical  $[\delta_y]$  admisibles del desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza  $P$  son:  $[\delta_x] = [\delta_y] = 1,3$  mm (fig. 5); calcular  $F_1$  y  $F_2$ .

**Resolución.** De las ecuaciones de la estática (fig. 5, a)  $\sum X = 0$  y  $\sum Y = 0$  resulta;  $N_1 = N_2 = N$  y  $N = P = 1$  tf. Por la fórmu-

la (11) hallamos

$$F_1 = \frac{N}{[\sigma_t]_I} = \frac{10^3}{10^3} = 1 \text{ cm}^2; \quad F_2 = \frac{N}{[\sigma_c]_{II}} = \frac{10^3}{10^2} = 10 \text{ cm}^2,$$

y por la ley de Hooke,

$$\Delta l_1 = \frac{Na}{E_1 F_1} = \frac{10^3 \cdot 10^2}{2 \cdot 10^6 \cdot 1} = 0,05 \text{ cm}; \quad \Delta l_2 = \frac{Na}{E_2 F_2} = \frac{10^3 \cdot 10^2}{0,1 \cdot 10^6 \cdot 10} = 0,1 \text{ cm}.$$

De la construcción geométrica obtenida por el método de intersecciones (fig. 5, b) se deduce que  $\Delta l_1$  es igual a la suma de las

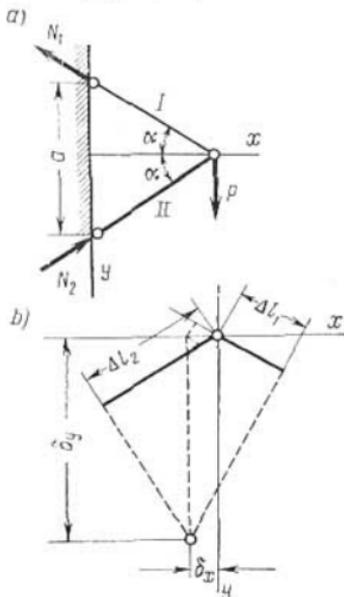


Fig. 5

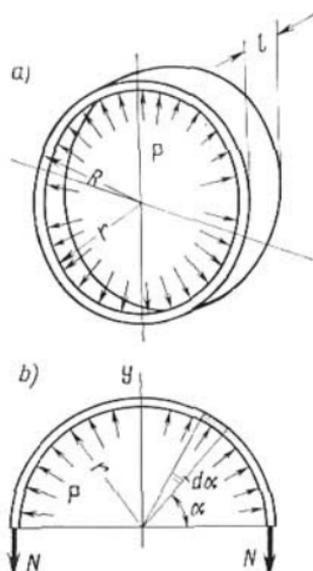


Fig. 6

proyecciones de  $\delta_x$  y  $\delta_y$  sobre la dirección de la barra I y  $\Delta l_2$  es igual a la suma de las proyecciones de  $\delta_x$  y  $\delta_y$  sobre la dirección de la barra II, es decir,

$$\Delta l_1 = \delta_y \operatorname{sen} \alpha - \delta_x \operatorname{cos} \alpha; \quad \Delta l_2 = \delta_y \operatorname{sen} \alpha + \delta_x \operatorname{cos} \alpha.$$

y por lo tanto,

$$\delta_y = \frac{\Delta l_1 + \Delta l_2}{2 \operatorname{sen} \alpha} = 1,5 \text{ mm}; \quad \delta_x = \frac{\Delta l_2 - \Delta l_1}{2 \operatorname{cos} \alpha} = 0,289 \text{ mm}.$$

Puesto que  $\delta_y > [\delta_y]$ , resulta necesario aumentar las áreas de las secciones de las barras.

Manteniendo invariable el área de la barra I,  $F_1 = 1 \text{ cm}^2$ , hallemos el área necesaria  $F_2$  de la barra II.

De la condición de rigidez resulta

$$\delta_y = \frac{1}{2 \operatorname{sen} 30^\circ} (\Delta l_1 + \Delta l_2) \leq [\delta_y]$$

o sea

$$0,05 + \Delta l_2 \leq 0,13 \text{ cm},$$

de donde se obtiene,

$$\Delta l_2 = \frac{Na}{E_2 F_2} \leq 0,08 \text{ cm y}$$

$$F_2 = \frac{Na}{0,08 E_2} = 12,5 \text{ cm}^2.$$

La tensión en la barra II, correspondiente al área obtenida, será

$$\sigma_{II} = \frac{N}{F_2} = 80 \text{ kgf/cm}^2$$

y los desplazamientos horizontal y vertical del punto de aplicación de la fuerza  $P$ ,

$$\delta_y = 1,3 \text{ mm}; \quad \delta_x = \frac{0,08 - 0,05}{\sqrt{3}} \approx 0,0173 \text{ cm} = 0,173 \text{ mm}.$$

**Ejemplo 6.** Un anillo circular de radio interior  $r = 100 \text{ mm}$ , radio exterior  $R = 101 \text{ mm}$  y de longitud  $l$  se somete a una presión interior uniforme radial  $p = 20 \text{ bar}$  (fig. 6, a).

Hallar el incremento del radio del anillo  $\Delta r$  y el coeficiente de seguridad  $n_t$  con que trabaja el anillo si el material de su pared tiene un módulo de elasticidad longitudinal  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MN/m}^2$  y un límite de fluencia  $\sigma_t = 300 \text{ MN/m}^2$ .

*Resolución.* Para determinar los esfuerzos axiales de tracción  $N$ , que se desarrollan en la pared del anillo, lo seccionamos por su diámetro (fig. 6, b). Planteamos la condición de equilibrio de la mitad del anillo como la suma de las proyecciones de las fuerzas y los esfuerzos, que serán fuerzas exteriores para la mitad del anillo sobre el eje  $y$ . Entonces obtendremos,

$$N = \int_0^{\pi/2} p l r \operatorname{sen} \alpha \, d\alpha = p r l.$$

La tensión normal en la pared del anillo será,

$$\sigma = \frac{N}{F} = \frac{p r l}{(R - r) l} = \frac{20 \cdot 10^5 \cdot 10 \cdot 10^{-2}}{0,1 \cdot 10^{-2}} = 2 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2 = 200 \text{ MN/m}^2,$$

y el coeficiente de seguridad  $n_f$  (referido al límite de fluencia del material),

$$n_f = \frac{\sigma_f}{\sigma} = \frac{300}{200} = 1,5.$$

El incremento absoluto del radio interior del anillo  $\Delta r$  se obtiene de la ley de Hooke. Puesto que,

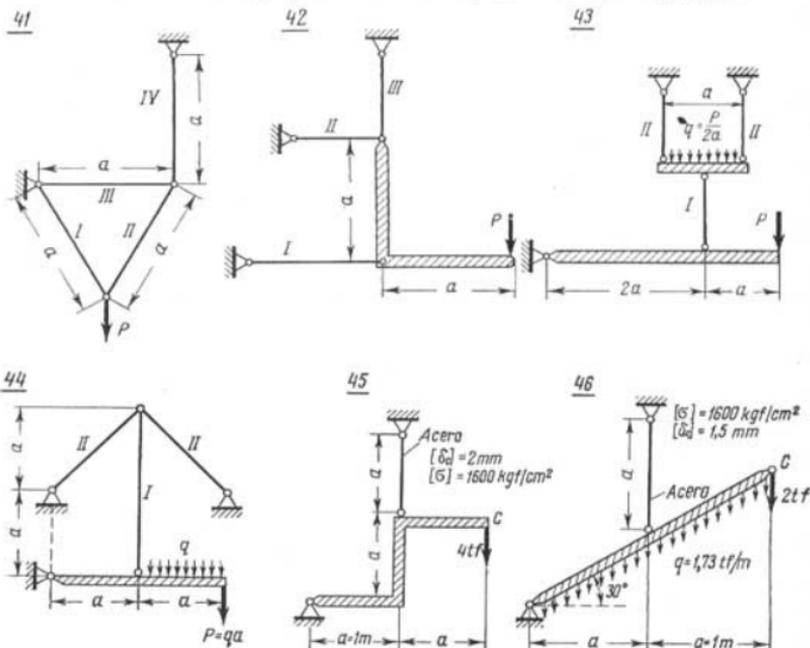
$$2\pi(r + \Delta r) - 2\pi r = \frac{N \cdot 2\pi r}{E(R - r)l}$$

resulta

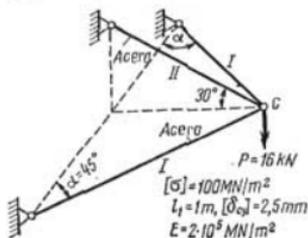
$$\Delta r = \frac{pr^2}{E(R - r)} = \frac{20 \cdot 10^5 \cdot 10^2 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 10^{11} \cdot 0,1 \cdot 10^{-2}} = 0,01 \cdot 10^{-2} m = 0,01 \text{ cm}.$$

**Problemas 41-48.** Calcular las dimensiones de las áreas  $F$  de las secciones transversales de los elementos elásticos de los sistemas.

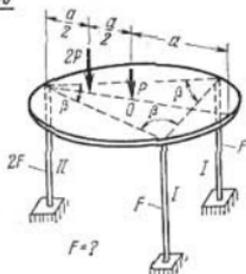
En los problemas con datos literales debe considerarse que la tensión admisible  $[\sigma]$  para el tracción es igual que para la compresión en todos los elementos elásticos del sistema. Si en las condiciones del problema no figura el valor del módulo de elasticidad  $E$ , debe considerársele dado e igual para todas las barras. En los problemas 45-46 admítase, para el acero,  $E = 2 \cdot 10^6 \text{ kgf/cm}^2$ .



47

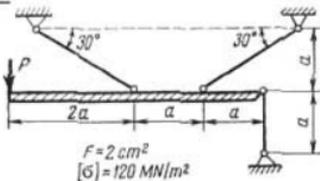


48

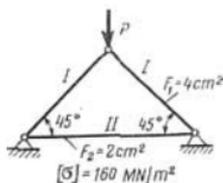


**Problemas 49-53.** Calcular la fuerza admisible  $P$  o las magnitudes indicadas en las condiciones de los problemas.

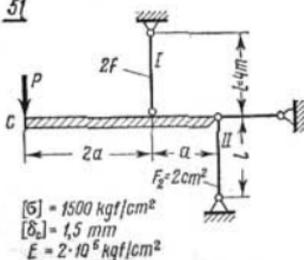
49



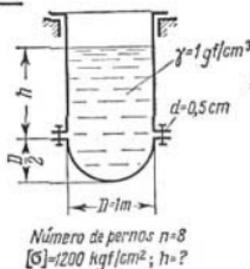
50



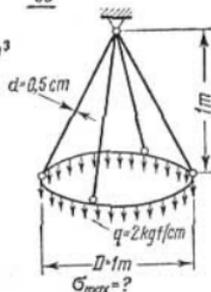
51



52



53



## § 6. Consideración del peso propio

En el caso de una barra prismática sometida a la acción de su propio peso y de una fuerza concentrada  $P$  aplicada sobre su extremo libre,

el esfuerzo axial en la sección transversal situada a una distancia  $x$  del extremo libre, se calcula por la fórmula,

$$N_x = P + \gamma Fx, \quad (14)$$

la tensión normal en la misma sección, por la fórmula

$$\sigma_x = \frac{P}{F} + \gamma x, \quad (15)$$

el área necesaria de la sección transversal, por la fórmula

$$F = \frac{P}{[\sigma] - \gamma l} \quad (16)$$

y el alargamiento absoluto, por la fórmula,

$$\Delta l = \frac{l}{EF} \left( P + \frac{Q}{2} \right), \quad (17)$$

siendo  $\gamma$  el peso por unidad de volumen del material de la barra,  $l$  la longitud de la barra y  $Q = \gamma Fl$  el peso de la barra.

En el caso de una barra de igual resistencia, es decir, cuando en todas las secciones transversales de la barra las tensiones normales son iguales, el cálculo del área de la sección transversal se realiza por la fórmula,

$$F_x = \frac{P}{[\sigma]} \cdot e^{\frac{\gamma}{[\sigma]} x}, \quad (18)$$

siendo  $e$  la base de los logaritmos naturales.

El alargamiento absoluto de la barra de igual resistencia se determina por la expresión siguiente:

$$\Delta l = \frac{[\sigma] l}{E}. \quad (19)$$

En el caso de una barra escalonada, el área del escalón «i» será

$$F_i = \frac{P [\sigma]^{i-1}}{([\sigma] - \gamma l_1) ([\sigma] - \gamma l_2) ([\sigma] - \gamma l_3) \dots ([\sigma] - \gamma l_i)} \quad (20)$$

y el alargamiento absoluto,

$$\Delta l = \frac{[\sigma]}{E} \sum l_i \left( 1 - \frac{\gamma l_i}{2[\sigma]} \right), \quad (21)$$

siendo  $l_1, l_2, l_3, \dots$  las longitudes de los correspondientes escalones de la barra.

**Ejemplo 7.** Dado:  $P = 16$  tf;  $\gamma = 8$  gf/cm<sup>3</sup>;  $[\sigma] = 1\ 600$  kgf/cm<sup>2</sup>;  $E = 2 \cdot 10^6$  kgf/cm<sup>2</sup>.  $l = 40$  m (fig. 7).

Determinar: el área  $F_p$ , el peso  $Q_p$  y el alargamiento absoluto  $\Delta l_p$  de la barra prismática; el área máxima  $F_e$ , el peso  $Q_e$  y el alargamiento absoluto  $\Delta l_e$  de la barra escalonada de 4 escalones de idéntica

longitud; el área máxima  $F_1$ , el peso  $Q_1$  y el alargamiento absoluto  $\Delta l_1$  de la barra de igual resistencia.

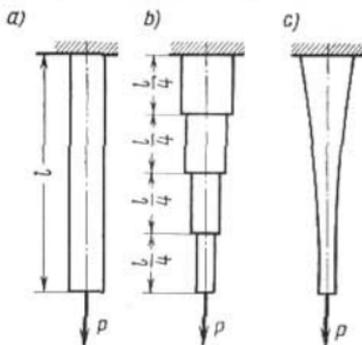


Fig. 7

*Resolución.* En el caso de la barra prismática (fig. 7, a) el área se calcula por la fórmula (16),

$$F_p = \frac{16 \cdot 10^3}{16 \cdot 10^2 - 8 \cdot 10^{-3} \cdot 4 \cdot 10^3} \approx 10,204 \text{ cm}^2,$$

el peso propio es

$$Q_p = \gamma F_p l = 8 \cdot 10^{-3} \cdot 10,204 \cdot 4 \cdot 10^3 \approx 326,53 \text{ kgf}$$

y el alargamiento absoluto, por la fórmula (17), será

$$\Delta l_p = \frac{4 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^6 \cdot 10,204} \left( 16 \cdot 10^3 + \frac{327}{2} \right) \approx 3,168 \text{ cm}.$$

En el caso de la barra escalonada (fig. 7, b): el área máxima, por la fórmula (20), resulta

$$\begin{aligned} F_e &= \frac{P[\sigma]^3}{\left([\sigma] - \frac{1}{4}\gamma l\right)^4} = \frac{P}{[\sigma] \left(1 - \frac{\gamma l}{4[\sigma]}\right)^4} = \\ &= \frac{16 \cdot 10^3}{16 \cdot 10^2 \left(1 - \frac{8 \cdot 10^{-3} \cdot 4 \cdot 10^3}{4 \cdot 16 \cdot 10^2}\right)^4} \approx 10,203 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

el peso,

$$Q_e = [\sigma] F_e - P = 16 \cdot 10^2 \cdot 10,203 - 16 \cdot 10^3 \approx 324,8 \text{ kgf}$$

y el alargamiento absoluto por la fórmula (21)

$$\Delta l_e = \frac{[\sigma] l}{E} \left( 1 - \frac{\gamma l}{2 \cdot 4 \cdot [\sigma]} \right) =$$

$$= \frac{16 \cdot 10^2 \cdot 4 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^6} \left( 1 - \frac{8 \cdot 10^{-3} \cdot 4 \cdot 10^3}{2 \cdot 4 \cdot 16 \cdot 10^2} \right) \approx 3,192 \text{ cm.}$$

En el caso de la barra de igual resistencia (fig. 7, c): el área máxima, por la fórmula (18), será

$$F_1 = \frac{P}{[\sigma]} e^{\frac{\gamma l}{[\sigma]}} = \frac{16 \cdot 10^3}{16 \cdot 10^2} e^{\frac{8 \cdot 10^{-3} \cdot 4 \cdot 10^3}{16 \cdot 10^2}} = 10 e^{0,02} \approx 10,202 \text{ cm}^2,$$

el peso

$$Q_1 = [\sigma] F_1 - P = 16 \cdot 10^2 \cdot 10,202 - 16 \cdot 10^3 \approx 323,3 \text{ kgf},$$

y el alargamiento absoluto, por la fórmula (19),

$$\Delta l_1 = \frac{[\sigma] l}{E} = \frac{16 \cdot 10^2 \cdot 4 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^6} = 3,2 \text{ cm.}$$

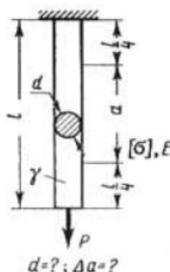
De los resultados obtenidos se desprende que en el caso de una barra de acero de 40 m de longitud, la diferencia entre la barra prismática, la escalonada y la de igual resistencia es insignificante.

De la fórmula (16) se deduce que la tensión originada por el peso propio en la barra prismática constituye el 5% de  $[\sigma]$ , cuando la longitud de la barra  $l \geq \frac{0,05 [\sigma]}{\gamma}$ . Si se tratase de una barra de acero, para  $[\sigma] = 1600 \text{ kgf/cm}^2$  y  $\gamma = 8 \text{ gf/cm}^3$ ,

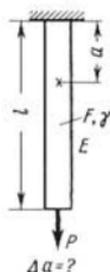
$$l \geq \frac{0,05 \cdot 16 \cdot 10^2}{8 \cdot 10^{-3}} = 10^4 \text{ cm} = 100 \text{ m.}$$

**Problemas 54-57.** Determinar las magnitudes indicadas en las condiciones de los problemas.

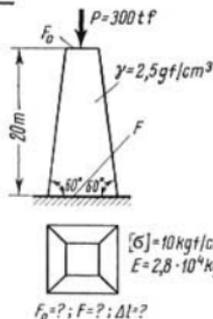
54



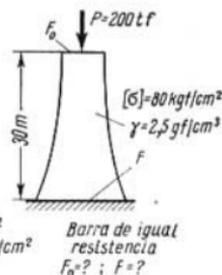
55



56



57



## § 7. *Sistemas estáticamente indeterminados (hiperestáticos)*

Se denominan *sistemas estáticamente indeterminados (hiperestáticos)* aquellos sistemas en los que no se pueden determinar los esfuerzos en todos los elementos, aplicando solamente las ecuaciones de la estática. Para el cálculo de los sistemas hiperestáticos se emplean las ecuaciones de la estática y las condiciones de compatibilidad de los desplazamientos. El cálculo se lleva a cabo en el orden siguiente. Se comienza por plantear las ecuaciones de la estática y se determina el grado de hiperestaticidad del sistema dado; después se plantean las condiciones de compatibilidad de los desplazamientos, es decir, las relaciones geométricas entre los alargamientos de los diversos elementos del sistema.

Los alargamientos de los elementos del sistema se expresan a través de los esfuerzos mediante la ley de Hooke y se introducen en las condiciones de compatibilidad de los desplazamientos.

Resolviendo las ecuaciones de la estática planteadas y las ecuaciones de compatibilidad de los desplazamientos, se obtienen los esfuerzos axiales en todos los elementos del sistema.

Al calcular las tensiones térmicas se mantiene el mismo esquema de cálculo. En este caso las ecuaciones de la estática se plantean solamente para los esfuerzos; las variaciones de las longitudes de las barras calentadas o enfriadas se determinan sumando algebraicamente los incrementos de las longitudes originados por los esfuerzos y por la variación de la temperatura. El alargamiento absoluto debido a la variación de la temperatura se calcula por la fórmula,

$$\delta l = l\alpha\Delta t, \quad (22)$$

siendo  $l$  la longitud de la barra,

$\alpha$  el valor medio del coeficiente de dilatación lineal del material de la barra,

$\Delta t$  la variación de la temperatura.

El cálculo de las tensiones de montaje se realiza también basándose en las ecuaciones de la estática y en las condiciones de compatibilidad de los desplazamientos. En este caso, al plantear las condiciones de compatibilidad de los desplazamientos se tiene en cuenta la existencia de errores dados en las longitudes de los elementos del sistema. Puesto que las longitudes reales de los elementos, que resultan durante la elaboración de éstos, se diferencian muy poco de las previstas en el proyecto, al calcular los alargamientos absolutos de los elementos por la ley de Hooke, se consideran las longitudes previstas en el proyecto y no las reales.

Al determinar la fuerza máxima de seguridad partiendo del cálculo por tensiones admisibles, se supone que en la barra más cargada la tensión es igual a la admisible. Partiendo del esfuerzo así obtenido, se establece la fuerza máxima de seguridad.

El cálculo de sistemas hiperestáticos por su capacidad resistente se lleva a cabo en virtud, solamente, de las ecuaciones de la estática. En estas condiciones los esfuerzos axiales se consideran iguales a los productos de las tensiones admisibles por las áreas de las secciones transversales en todos aquellos elementos, en los que, al alcanzar las tensiones el límite de fluencia del material, el sistema se transforma en cinemáticamente variable. Este método de cálculo se basa sobre la sustitución del diagrama real de tracción del material por el diagrama idealizado de Prandtl, en el cual el escalón de fluencia se considera ilimitado.

**Ejemplo 8.** Dado:

a)  $E_1 = E_2 = E_3 = E = 2 \cdot 10^6$  kgf/cm<sup>2</sup>;  $[\sigma] = 1\ 600$  kgf/cm<sup>2</sup>;  $a = 0,4$  m;  $b = 1,2$  m;  $c = 0,4$  m;  $\beta_1 = 45^\circ$ ;  $\beta_2 = 60^\circ$ ;  $\beta_3 = 30^\circ$ ;  $F_1 = 12$  cm<sup>2</sup>;  $F_2 = 14$  cm<sup>2</sup>;  $F_3 = 16$  cm<sup>2</sup> (fig. 8);

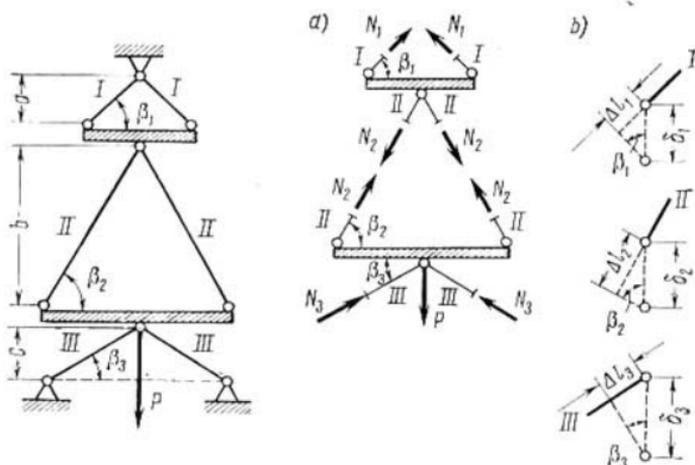


Fig. 8

b)  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha = 12,5 \cdot 10^{-6}$ ;  $\Delta l = 40^\circ$ ;

c)  $\Delta_2 = 1,2$  mm, magnitud que indica en cuánto las barras II resultaron ser más cortas de lo debido.

Determinar: a)  $P$ ;  $P_{\max}$ ; b)  $\sigma_{I, II, III}$ ; c)  $\sigma_{I, II, III}$ .

**Resolución.** a) **Cálculo por tensiones admisibles.** De la ecuación de la estática (suma de las proyecciones, sobre el eje vertical, de las fuerzas y esfuerzos que actúan sobre los nudos indicados en la figura 8, a) se obtiene:

$$2N_1 \operatorname{sen} \beta_1 = 2N_2 \operatorname{sen} \beta_2; \quad 2N_2 \operatorname{sen} \beta_2 + 2N_3 \operatorname{sen} \beta_3 = P.$$

De la condición de compatibilidad de los desplazamientos, es decir, de la igualdad de los desplazamientos del punto de aplicación

de la fuerza  $P$ , originados por la tracción de las barras  $I$  y  $II$  y por la compresión de las barras  $III$  (fig. 8, b), obtendremos,

$$\delta_1 + \delta_2 = \delta_3.$$

Según la ley de Hooke,

$$\delta_1 = \frac{\Delta l_1}{\text{sen } \beta_1} = \frac{N_1 l_1}{E_1 F_1 \text{sen } \beta_1}; \quad \delta_2 = \frac{\Delta l_2}{\text{sen } \beta_2} = \frac{N_2 l_2}{E_2 F_2 \text{sen } \beta_2};$$

$$\delta_3 = \frac{\Delta l_3}{\text{sen } \beta_3} = \frac{N_3 l_3}{E_3 F_3 \text{sen } \beta_3}.$$

De las propiedades geométricas del sistema, se obtiene

$$l_1 = \frac{a}{\text{sen } \beta_1}; \quad l_2 = \frac{b}{\text{sen } \beta_2}; \quad l_3 = \frac{c}{\text{sen } \beta_3}.$$

Una vez introducidas las magnitudes obtenidas, la condición de compatibilidad de los desplazamientos se escribirá así,

$$\frac{N_1 a}{E_1 F_1 \text{sen}^2 \beta_1} + \frac{N_2 b}{E_2 F_2 \text{sen}^2 \beta_2} = \frac{N_3 c}{E_3 F_3 \text{sen}^2 \beta_3}.$$

Para los valores numéricos dados tendremos,

$$\text{sen } \beta_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \text{sen } \beta_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \text{sen } \beta_3 = \frac{1}{2};$$

$$\frac{a}{F_1 \text{sen}^2 \beta_1} = \frac{40 \cdot 4}{12 \cdot 2} = \frac{20}{3} \text{ 1/cm}$$

$$\frac{b}{F_2 \text{sen}^2 \beta_2} = \frac{120 \cdot 4}{14 \cdot 3} = \frac{80}{7} \text{ 1/cm}; \quad \frac{c}{F_3 \text{sen}^2 \beta_3} = \frac{40 \cdot 4}{16 \cdot 4} = 10 \text{ 1/cm}.$$

Introduciendo estos valores en las ecuaciones de la estática y en las ecuaciones de compatibilidad de los desplazamientos, obtendremos el sistema de tres ecuaciones siguientes:

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{2} N_1 &= \sqrt{3} N_2, \\ \sqrt{3} N_2 + N_3 &= P, \\ 14 N_1 + 24 N_2 &= 21 N_3 \end{aligned} \right\}$$

cuya solución es,

$$N_1 = \sigma_I F_1 \approx 0,332P; \quad N_2 = \sigma_{II} F_2 \approx 0,27P;$$

$$N_3 = \sigma_{III} F_3 \approx 0,53P,$$

resultando

$$\sigma_I = \frac{0,332}{12} P \approx 0,0276P; \quad \sigma_{II} = \frac{0,27}{14} P \approx 0,0193P;$$

$$\sigma_{III} = \frac{0,53}{16} P \approx 0,0331P.$$

Puesto que la tensión máxima  $\sigma_{III}$  no debe superar  $[\sigma]$ , la carga admisible será,

$$P \leq \frac{[\sigma]}{0,0331} = \frac{1\,600}{0,0331} \approx 48\,340 \text{ kgf} \approx 48,3 \text{ tf}$$

y, por lo tanto, las tensiones en las barras del sistema resultarán

$$\sigma_I = 48\,300 \cdot 0,0276 \approx 1\,334 \text{ kgf/cm}^2;$$

$$\sigma_{II} = 48\,300 \cdot 0,0193 \approx 932 \text{ kgf/cm}^2;$$

$$\sigma_{III} = 1\,600 \text{ kgf/cm}^2.$$

**b) Cálculo por capacidad resistente.** El sistema se convierte en cinemáticamente variable, al fluir las barras primeras y terceras. La ecuación de la estática que une a los esfuerzos en estas barras es la siguiente:

$$2N_1 \text{ sen } \beta_1 + 2N_3 \text{ sen } \beta_3 = P.$$

Suponiendo  $N_1 = [\sigma] F_1$  y  $N_3 = [\sigma] F_3$  e introduciendo estas expresiones en la ecuación de la estática, obtendremos la fuerza máxima  $P_{\max}$ ,

$$\begin{aligned} P_{\max} &= 2[\sigma](F_1 \text{ sen } \beta_1 + F_3 \text{ sen } \beta_3) = \\ &= 2 \cdot 1\,600 \left( 12 \frac{\sqrt{2}}{2} + 16 \frac{1}{2} \right) \approx 52\,750 \text{ kgf} = 52,75 \text{ tf.} \end{aligned}$$

Así, pues, la capacidad de carga del sistema, al ser calculada por capacidad resistente, resultó mayor que la capacidad de carga obtenida por tensiones admisibles (considerando que los coeficientes de seguridad son iguales),

$$\frac{P_{\max} - P}{P} \cdot 100 = \frac{52,75 - 48,3}{48,3} 100 \approx 9,1\%.$$

**c) Cálculo de las tensiones térmicas.** De las ecuaciones de la estática (fig. 9, a) se obtiene,

$$2N_1 \text{ sen } \beta_1 = 2N_2 \text{ sen } \beta_2; \quad 2N_2 \text{ sen } \beta_2 = 2N_3 \text{ sen } \beta_3,$$

y de la condición de compatibilidad de los desplazamientos (condición de invariabilidad de la altura del sistema) (fig. 9, b),

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 0.$$

$$\text{Puesto que } \delta_1 = \frac{\Delta l_1}{\sin \beta_1}, \quad \delta_2 = \frac{\Delta l_2}{\sin \beta_2}, \quad \delta_3 = \frac{\Delta l_3}{\sin \beta_3},$$

$$\Delta l_1 = l_1 \alpha_1 \Delta t - \frac{N_1 l_1}{E_1 F_1}, \quad \Delta l_2 = l_2 \alpha_2 \Delta t - \frac{N_2 l_2}{E_2 F_2}, \quad \Delta l_3 = l_3 \alpha_3 \Delta t - \frac{N_3 l_3}{E_3 F_3},$$

la condición de compatibilidad de los desplazamientos será la siguiente:

$$\frac{a}{\sin^2 \beta_1} \left( \alpha \Delta t - \frac{N_1}{E F_1} \right) + \frac{b}{\sin^2 \beta_2} \left( \alpha \Delta t - \frac{N_2}{E F_2} \right) + \frac{c}{\sin^2 \beta_3} \left( \alpha \Delta t - \frac{N_3}{E F_3} \right) = 0.$$

Teniendo en cuenta que  $N_1 = \sigma_I F_1$ ,  $N_2 = \sigma_{II} F_2$ ,  $N_3 = \sigma_{III} F_3$  y considerando los valores numéricos dados, las ecuaciones de la

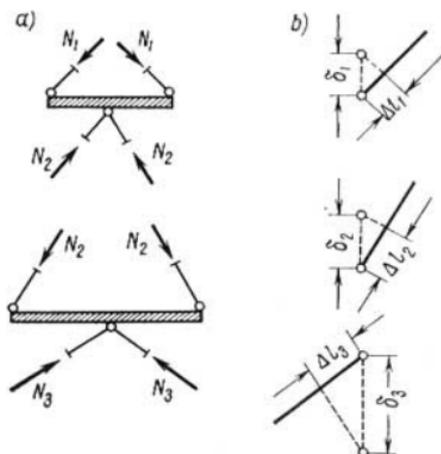


Fig. 9

estática y la condición de compatibilidad de los desplazamientos adquirirán la forma siguiente:

$$\left. \begin{aligned} 6\sqrt{2}\sigma_I &= 7\sqrt{3}\sigma_{II} \\ 7\sqrt{3}\sigma_{II} &= 8\sigma_{III} \\ \sigma_I + 2\sigma_{II} + 2\sigma_{III} &= 5000 \end{aligned} \right\}$$

Resolviendo este sistema, obtendremos,

$$\sigma_I \approx 1\,105 \text{ kgf/cm}^2, \quad \sigma_{II} \approx 774 \text{ kgf/cm}^2, \\ \sigma_{III} \approx 1\,172 \text{ kgf/cm}^2.$$

d) Cálculo de las tensiones de montaje (fig. 10, a). De las ecuaciones de la estática se obtiene (fig. 10, b),

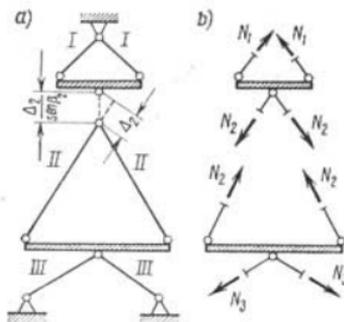


Fig. 10

De la condición de compatibilidad de los desplazamientos,

$$2N_1 \operatorname{sen} \beta_1 = 2N_2 \operatorname{sen} \beta_2; \quad 2N_2 \operatorname{sen} \beta_2 = 2N_3 \operatorname{sen} \beta_3.$$

De la condición de compatibilidad de los desplazamientos,

$$\frac{\Delta l_1}{\operatorname{sen} \beta_1} + \frac{\Delta l_2}{\operatorname{sen} \beta_2} + \frac{\Delta l_3}{\operatorname{sen} \beta_3} = \frac{\Delta_2}{\operatorname{sen} \beta_2},$$

ó

$$\frac{\sigma_I a}{\operatorname{sen}^2 \beta_1} + \frac{\sigma_{II} b}{\operatorname{sen}^2 \beta_2} + \frac{\sigma_{III} c}{\operatorname{sen}^2 \beta_3} = E \frac{\Delta_2}{\operatorname{sen}^2 \beta_2}.$$

Para los valores numéricos dados, las ecuaciones de la estática y la condición de compatibilidad de los desplazamientos serán,

$$\left. \begin{aligned} 6\sqrt{2}\sigma_I &= 7\sqrt{3}\sigma_{II} \\ 7\sqrt{3}\sigma_{II} &= 8\sigma_{III} \\ \sigma_I + 2\sigma_{II} + 2\sigma_{III} &= 4000 \end{aligned} \right\}$$

Resolviendo este sistema obtendremos,  $\sigma_I \approx 886 \text{ kgf/cm}^2$ ,  $\sigma_{II} \approx 620 \text{ kgf/cm}^2$ ,  $\sigma_{III} \approx 939 \text{ kgf/cm}^2$ .

**Ejemplo 9.** Sobre el tubo cilíndrico de acero I, de radio interior  $r_1 = 40 \text{ mm}$  y de radio exterior  $R_1 = 42 \text{ mm}$ , está colocado el tubo cilíndrico de acero II previamente calentado de radio interior  $r_2 = 41,96 \text{ mm}$  y de radio exterior  $R_2 = 43 \text{ mm}$  (fig. 11).

Calcular la tensión en la pared del tubo  $I$  ( $\sigma_I$ ) y en la pared del tubo  $II$  ( $\sigma_{II}$ ) que surge al enfriar el tubo exterior.

El módulo de elasticidad longitudinal del material del tubo es  $E = 2 \cdot 10^6$  kgf/cm<sup>2</sup>.

*Resolución.* Analizamos, en lugar de los tubos, los correspondientes anillos de longitud unitaria (véase el ejemplo 6). El anillo  $II$ ,



Fig. 11

al enfriarse, ocasionará una presión radial exterior uniforme  $p$  sobre el anillo  $I$ , mientras que éste, al ofrecer resistencia a la deformación, presionará igualmente pero desde dentro sobre el anillo  $II$ . La magnitud de la presión  $p$  se determina de la condición de que la suma del incremento del radio exterior del anillo  $I$  ( $\Delta R_1$ ) y del incremento del radio interior del anillo  $II$  ( $\Delta r_2$ ) deberá ser igual a la diferencia inicial  $R_1 - r_2$ .

Puesto que (véase el ejemplo 6)

$$\Delta R_1 = \frac{p}{E} \cdot \frac{R_1^2}{R_1 - r_1} \quad \text{y} \quad \Delta r_2 = \frac{p}{F} \cdot \frac{r_2^2}{R_2 - r_2},$$

la condición de compatibilidad de los desplazamientos será la siguiente:

$$\frac{p}{E} \left( \frac{R_1^2}{R_1 - r_1} + \frac{r_2^2}{R_2 - r_2} \right) = R_1 - r_2,$$

de donde resulta,

$$p = \frac{E(R_1 - r_2)}{\frac{R_1^2}{R_1 - r_1} + \frac{r_2^2}{R_2 - r_2}} = \frac{2 \cdot 10^6 \cdot 0,004}{\frac{4,2^2}{0,2} + \frac{4,196^2}{0,104}} \approx 31 \text{ kgf/cm}^2.$$

Las tensiones normales  $\sigma_I$  y  $\sigma_{II}$  se calculan por las fórmulas (véase el ejemplo 6),

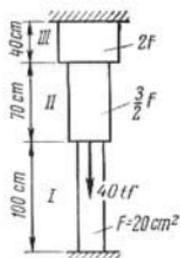
$$\sigma_I = \frac{pr_1}{R_1 - r_1} = \frac{31 \cdot 4,2}{0,2} = 651 \text{ kgf/cm}^2;$$

$$\sigma_{II} = \frac{pr_2}{R_2 - r_2} = \frac{31 \cdot 4,196}{0,104} \approx 1250 \text{ kgf/cm}^2.$$

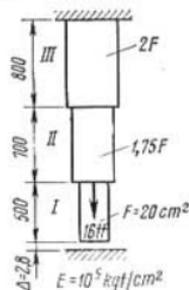
**Problemas 58-70.** Calcular las tensiones normales en los elementos elásticos de los sistemas sometidos a la acción de fuerzas.

Si en las condiciones del problema no está dado el módulo de elasticidad  $E$ , se le debe considerar igual para todos los elementos elásticos del sistema.

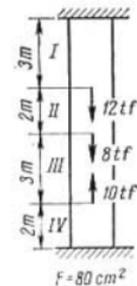
58



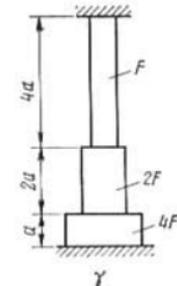
59



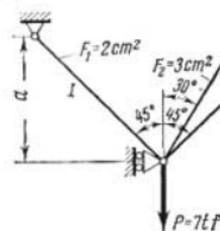
60



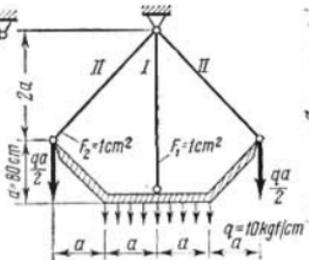
61



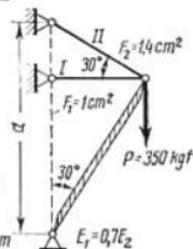
62



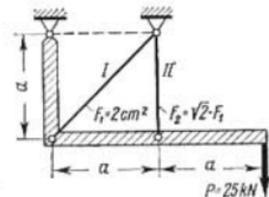
63



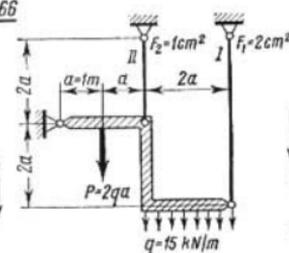
64



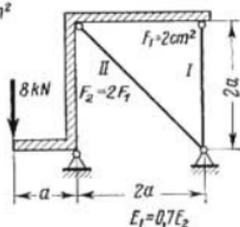
65



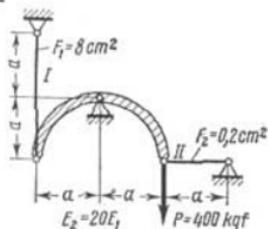
66



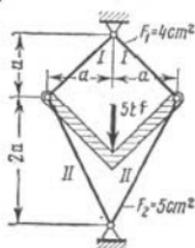
67



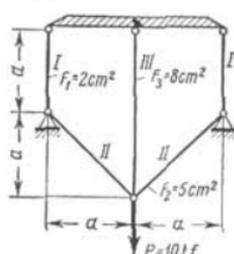
68



69

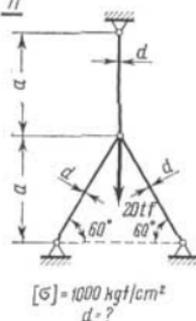


70

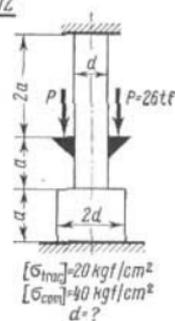


**Problemas 71-73.** Calcular las dimensiones de las secciones transversales de los elementos del sistema.

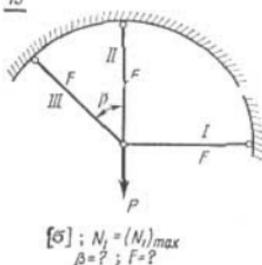
71



72

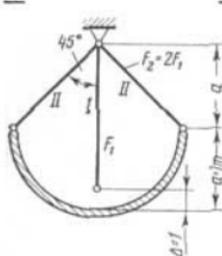


73

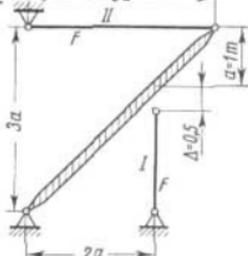


**Problemas 74-79.** Calcular las tensiones de montaje.  $\Delta$  es la magnitud lineal del error cometido al elaborar el elemento elástico del sistema. Para las barras debe considerarse que  $E = 2 \cdot 10^6$  kgf/cm<sup>2</sup>. En los problemas 78 y 79,  $E = 2 \cdot 10^5$  MN/m<sup>2</sup>.

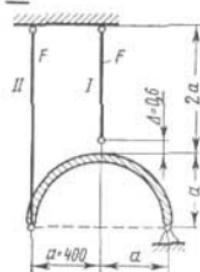
74



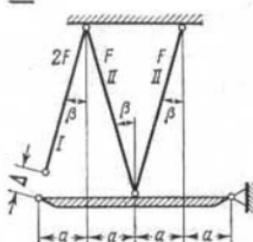
75



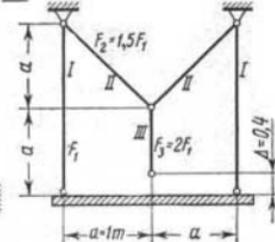
76



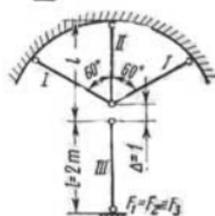
77



78



79

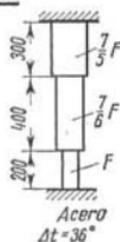


**Problemas 80-87.** Determinar las tensiones térmicas. Notaciones:  $\Delta t$ , variación de la temperatura de todo el sistema en grados entígrados;  $\Delta t_i$  variación de la temperatura del elemento «i» del sistema;  $ac$ , acero;  $c$ , cobre.

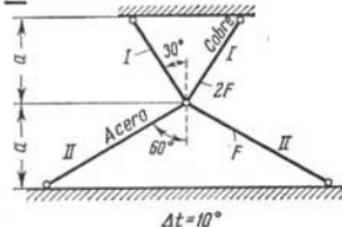
Considerar: para el acero  $E = 2 \cdot 10^6$  kgf/cm<sup>2</sup>,  $\alpha = 125 \cdot 10^{-7}$ ;  
para el cobre  $E = 1 \cdot 10^6$  kgf/cm<sup>2</sup>,  $\alpha = 165 \cdot 10^{-7}$ .

En los problemas 84, 86, 87 admitase para el acero  $E = 2 \cdot 10^5$  MN/m<sup>2</sup>.

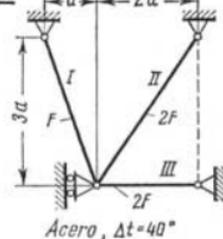
80



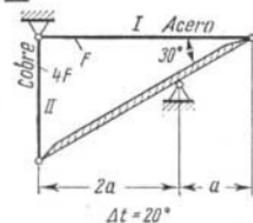
81



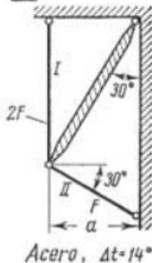
82



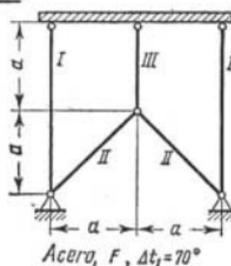
83

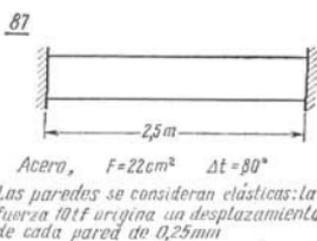
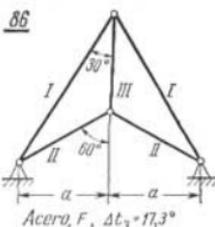


84



85

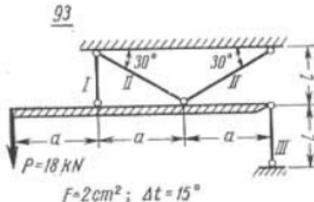
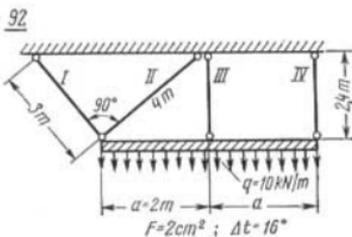
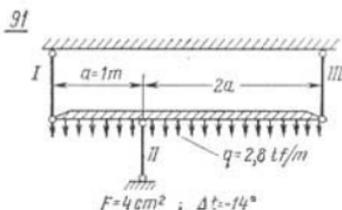
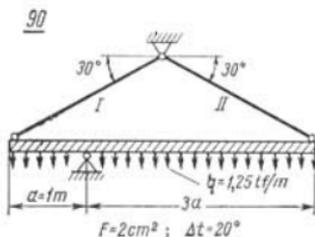
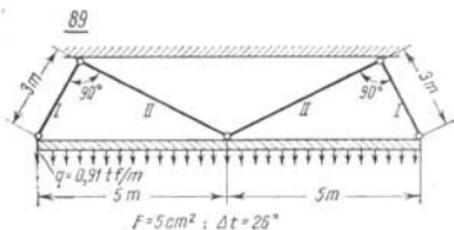
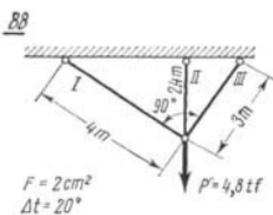




**Problemas 88-93.** Determinar las tensiones originadas por las fuerzas y las tensiones debidas a la variación de la temperatura.

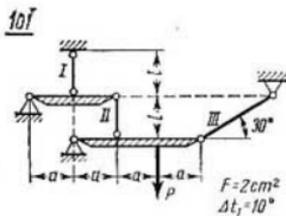
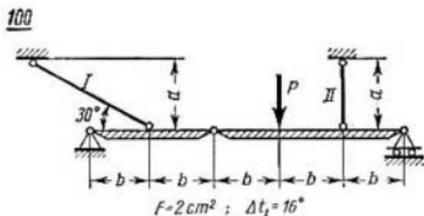
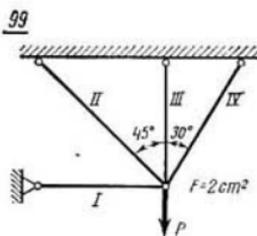
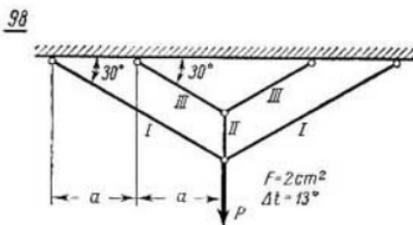
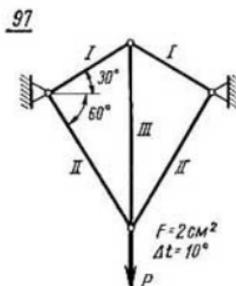
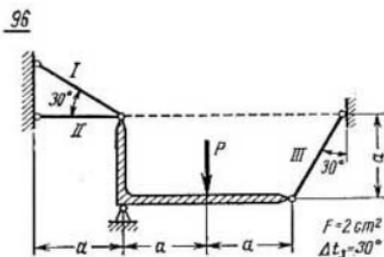
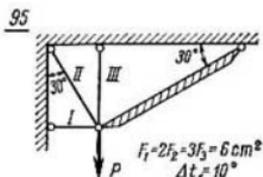
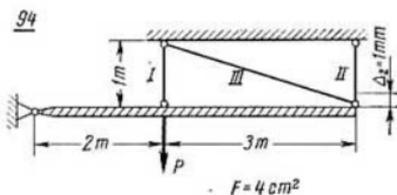
Notaciones:  $\sigma_{i_p}$  y  $\sigma_{i_t}$ , tensiones en la barra «i» debidas a la acción de las fuerzas y a la variación de la temperatura, respectivamente.

Considerar para las barras  $E = 2 \cdot 10^6 \text{ kgf/cm}^2$  y  $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}$ .  
 En los problemas 92 y 93 admítase  $E = 2 \cdot 10^6 \text{ MN/m}^2$ .



**Problemas 94-101.** Determinar la carga admisible partiendo del cálculo por tensiones admisibles  $[P]$  y del cálculo por capacidad resistente  $[P']$  y calcular las tensiones de montaje  $\sigma_{t_m}$  y las tensiones térmicas  $\sigma_{t_t}$ , de acuerdo con las condiciones dadas en el esquema.

Admitase para las barras  $[\sigma] = 1\,600\text{ kgf/cm}^2$ ,  $E = 2 \cdot 10^6\text{ kgf/cm}^2$ ,  $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}$ . En los problemas 99, 101 debe considerarse,  $[\sigma] = 160\text{ MN/m}^2$ ,  $E = 2 \cdot 10^5\text{ MN/m}^2$ .

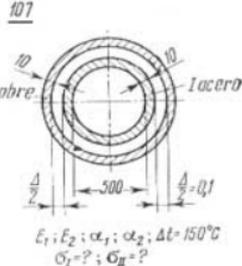
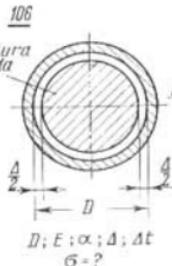
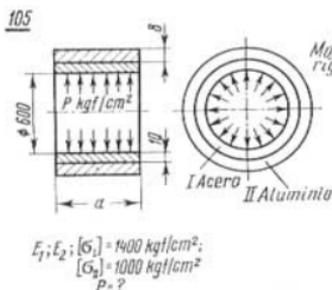
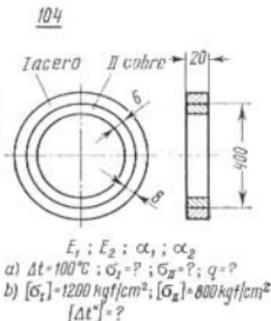
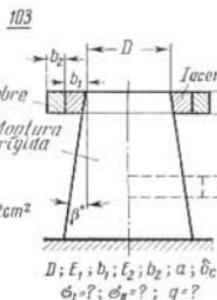


**Problemas 102-107.** Calcular las magnitudes indicadas en las condiciones de los problemas para los anillos y tubos cilíndricos de paredes delgadas.

Notaciones:  $p$ , presión por unidad de área;  $q$ , intensidad de la carga distribuida (kgf/cm) entre la montura y el anillo o entre los anillos.

Admitase, para el acero (ac)  $E = 2 \cdot 10^6$  kgf/cm<sup>2</sup>;  $\alpha = 125 \times 10^{-7}$ ; para el cobre (c)  $E = 1 \cdot 10^6$  kgf/cm<sup>2</sup>;  $\alpha = 165 \cdot 10^{-7}$  y para el aluminio (al)  $E = 0,7 \cdot 10^6$  kgf/cm<sup>2</sup>.

En los problemas 106 y 107 determinar  $\sigma$  partiendo de la condición de que al bajar la temperatura del sistema se cierra la ranura  $\Delta$ .



## II. ESTADOS TENSIONALES E HIPOTESIS DE RESISTENCIA

### § 1. Estados tensionales lineal, plano y de volumen

En el estado tensional de volumen, en las caras del elemento situado en la vecindad del punto del cuerpo en cuestión surgen tres tensiones principales  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ , no iguales a cero, (fig. 12, a).

Los planos donde actúan  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  y  $\sigma_3$  (libres de tensiones tangenciales) se denominan *planos principales de las tensiones*. Los ejes (*I, II, III*) ortogonales a estos planos se denominan *ejes principales de las tensiones*.

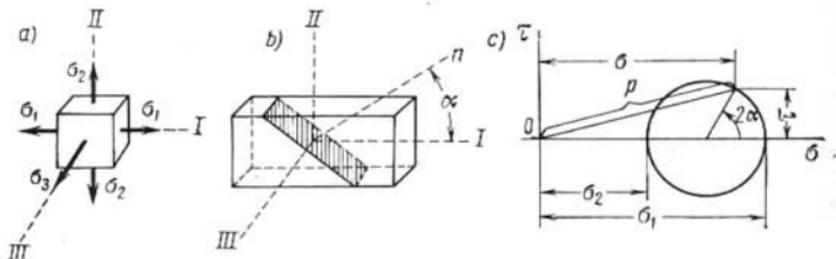


Fig. 12

Las tensiones normales  $\sigma$ , las tangenciales  $\tau$  y las resultantes  $p$  en los planos de las secciones inclinadas se determinan por las fórmulas siguientes:  
en los planos paralelos al eje *III* (fig. 12, c),

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha, \\ \tau &= \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha, \\ p &= \sqrt{\sigma^2 + \tau^2} = \sqrt{\sigma_1^2 \cos^2 \alpha + \sigma_2^2 \sin^2 \alpha}, \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

en los planos paralelos al eje *II* (fig. 13, a),

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_3 \sin^2 \alpha, \\ \tau &= \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\alpha, \\ p &= \sqrt{\sigma_1^2 \cos^2 \alpha + \sigma_3^2 \sin^2 \alpha}, \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

en los planos paralelos al eje *I* (fig. 14, a),

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \sigma_2 \cos^2 \beta + \sigma_3 \sin^2 \beta, \\ \tau &= \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \sin 2\beta, \\ p &= \sqrt{\sigma_2^2 \cos^2 \beta + \sigma_3^2 \sin^2 \beta}. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Gráficamente, estas tensiones se determinan por los diagramas circulares construidos de acuerdo con las figuras 12, c, 13, b y 14, b.

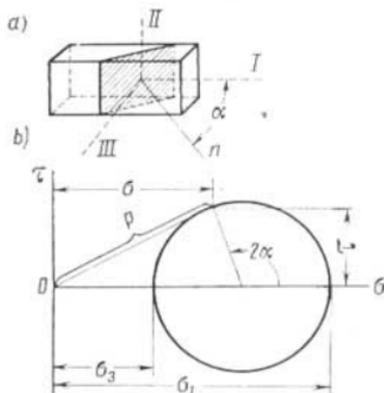


Fig 13.

El aspecto general del diagrama circular de las tensiones se obtiene sobreponiendo los tres diagramas representados en la figura 14, c.

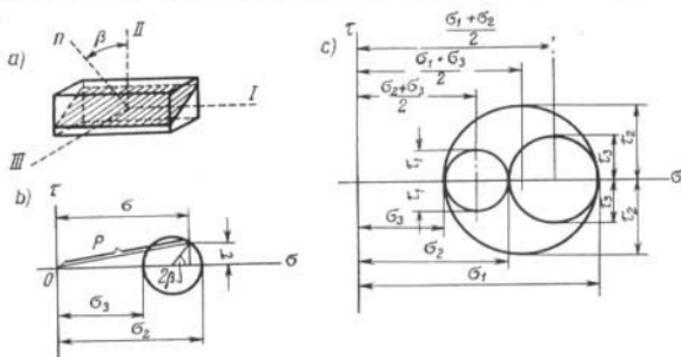


Fig. 14

Las tensiones tangenciales extremas valen:

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= \pm \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \\ \tau_2 &= \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \\ \tau_3 &= \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

La mayor de estas tensiones, en valor absoluto, es  $\tau_2$ . Estas tensiones surgen en los planos inclinados  $45^\circ$  respecto a las direcciones de las tensiones principales:

- $\tau_1$ , en dos planos ortogonales paralelos al eje *I* (fig. 15, a);
- $\tau_2$ , en dos planos ortogonales paralelos al eje *II* (fig. 15, b);
- $\tau_3$ , en dos planos ortogonales paralelos al eje *III* (fig. 15, c).

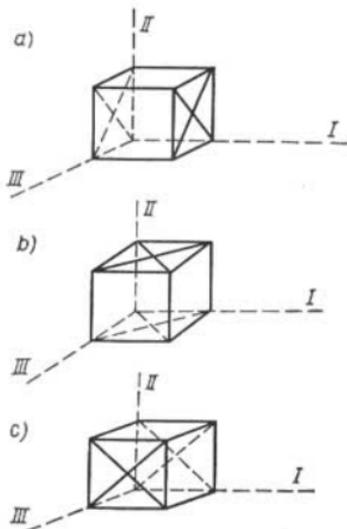


Fig. 15

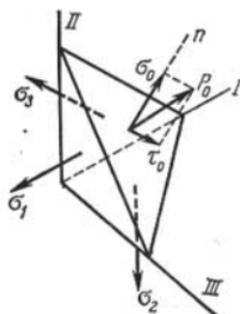


Fig. 16

Las tensiones octaédricas normales  $\sigma_0$ , tangenciales  $\tau_0$  y resultantes  $p_0$ , que actúan sobre el plano de igual inclinación respecto a los tres ejes principales de las tensiones, (fig. 16) se determinan por las fórmulas:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_0 &= \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3), \\ \tau_0 &= \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}, \\ p_0 &= \sqrt{\frac{1}{3} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2)}. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Las deformaciones lineales principales  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  (alargamientos unitarios que ocurren en las direcciones de las tensiones principales)

son:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu (\sigma_2 + \sigma_3)], \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu (\sigma_3 + \sigma_1)], \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu (\sigma_1 + \sigma_2)]. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Variación unitaria del volumen

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{1 - 2\mu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3). \quad (30)$$

La magnitud  $3 \frac{1 - 2\mu}{E} = \kappa$  se denomina *coeficiente de compresibilidad del material* y la magnitud inversa,  $\frac{E}{3(1 - 2\mu)} = K$ , *módulo de elasticidad estérea del material*.

La energía potencial unitaria de la deformación elástica vale,

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2} (\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3) = \\ &= \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1)]. \end{aligned} \quad (31)$$

La energía potencial unitaria, debida a la variación de la forma es,

$$u_t = \frac{1 + \mu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]. \quad (32)$$

y la energía potencial unitaria correspondiente a la variación del volumen,

$$u_{vol} = \frac{1 - 2\mu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2. \quad (33)$$

Todas las fórmulas correspondientes al estado tensional de volumen son aplicables también al estado tensional plano, igualando a cero una de las tensiones principales, y al estado tensional lineal, igualando a cero dos de las tensiones principales.

**Ejemplo 10.** Dado el estado tensional de la figura 17, el módulo de elasticidad  $E = 2 \cdot 10^6$  kgf/cm<sup>2</sup> y el coeficiente de Poisson  $\mu = 0,3$ ; determinar analítica y gráficamente  $\tau_{1, 2, 3}$   $\sigma'$  y  $\tau'$  en el plano paralelo al eje *I* para  $\beta = 30^\circ$ ;  $\sigma''$  y  $\tau''$  en el plano paralelo al eje *II*

para  $\alpha = 60^\circ$ ;  $\sigma''$  y  $\tau''$  en el plano paralelo al eje *III* para  $\alpha = 30^\circ$ ;  
 $p_0$ ,  $\sigma_0$ ;  $\tau_0$ ;  $\varepsilon_{1,2,3}$ ;  $\frac{\Delta V}{V}$ ;  $u$ ,  $u_t$ ,  $u_{vol}$ .

*Resolución.* Puesto que las tensiones principales son:

$\sigma_1 = 200 \text{ kgf/cm}^2$ ,  $\sigma_2 = -400 \text{ kgf/cm}^2$  y  $\sigma_3 = -800 \text{ kgf/cm}^2$ ,  
 por las fórmulas (27), obtendremos los valores extremos de las tensiones tangenciales,

$$\tau_1 = \pm \frac{-400 + 800}{2} = \pm 200 \text{ kgf/cm}^2;$$

$$\tau_2 = \pm \frac{200 + 800}{2} = \pm 500 \text{ kgf/cm}^2;$$

$$\tau_3 = \pm \frac{200 + 400}{2} = \pm 300 \text{ kgf/cm}^2.$$

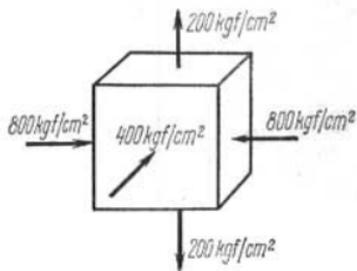


Fig. 17

Por las fórmulas (26), para el plano paralelo al eje *I* cuando  $\beta = 30^\circ$ , hallamos,

$$\sigma' = -400 \cos^2 30^\circ - 800 \sin^2 30^\circ = -500 \text{ kgf/cm}^2,$$

$$\tau' = \frac{-400 + 800}{2} \sin 60^\circ \approx 173 \text{ kgf/cm}^2.$$

Por las fórmulas (25), para el plano paralelo al eje *II* y para  $\alpha = 60^\circ$ ,

$$\sigma'' = 200 \cos^2 60^\circ - 800 \sin^2 60^\circ = -550 \text{ kgf/cm}^2,$$

$$\tau'' = \frac{200 + 800}{2} \sin 120^\circ \approx 433 \text{ kgf/cm}^2$$

y por las fórmulas (24), para el plano paralelo al eje *III*, cuando  $\alpha = 30^\circ$ ,

$$\sigma''' = 200 \cos^2 30^\circ - 400 \sin^2 30^\circ = 50 \text{ kgf/cm}^2,$$

$$\tau''' = \frac{200 + 400}{2} \sin 60^\circ = 260 \text{ kgf/cm}^2.$$

La determinación gráfica de las tensiones está dada en el diagrama circular de la figura 18.

Por las fórmulas (28) determinamos las tensiones octaédricas,

$$p_0 = 100 \sqrt{\frac{1}{3} (4 + 16 + 64)} \approx 529 \text{ kgf/cm}^2,$$

$$\sigma_0 = \frac{1}{3} (200 - 400 - 800) \approx -333 \text{ kgf/cm}^2,$$

$$\tau_0 = \frac{100}{3} \sqrt{9 + 4 + 100} \approx 354 \text{ kgf/cm}^2,$$

por las fórmulas (29), las deformaciones lineales principales,

$$\varepsilon_1 = \frac{100}{2 \cdot 10^6} (2 + 0,3 \cdot 1,2) = 2,8 \cdot 10^{-4},$$

$$\varepsilon_2 = \frac{100}{2 \cdot 10^6} (-4 + 0,3 \cdot 6) = -1,1 \cdot 10^{-4},$$

$$\varepsilon_3 = \frac{100}{2 \cdot 10^6} (-8 + 0,3 \cdot 2) = -3,7 \cdot 10^{-4}$$

y por la fórmula (30), la variación unitaria del volumen,

$$\frac{\Delta V}{V} = 10^{-4} (2,8 - 1,1 - 3,7) = -2 \cdot 10^{-4}.$$

La energía potencial unitaria de la deformación elástica y la

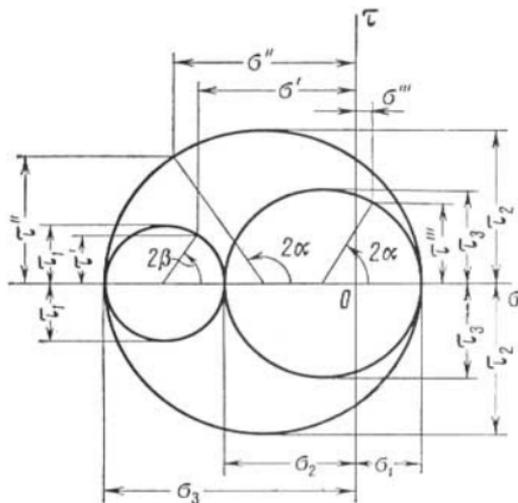


Fig. 18

energía correspondiente a la variación del volumen se hallan por las fórmulas (31) y (32),

$$u = 100 \cdot 10^{-4} \left( \frac{2 \cdot 2,8}{2} + \frac{4 \cdot 1,1}{2} + \frac{8 \cdot 3,7}{2} \right) = 19,8 \cdot 10^{-2} \text{ kgf} \cdot \text{cm/cm}^3.$$

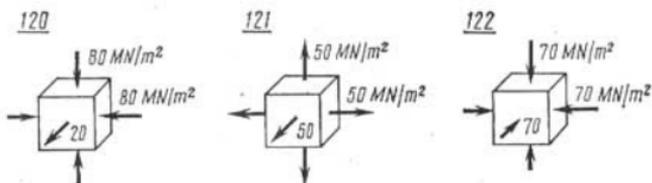
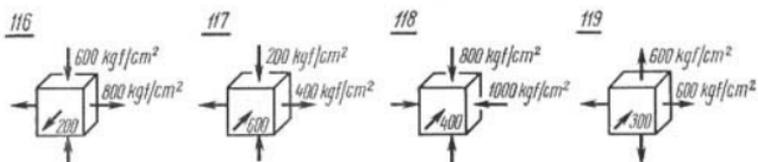
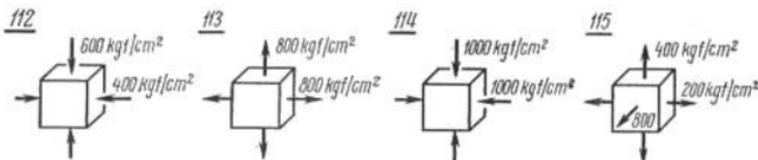
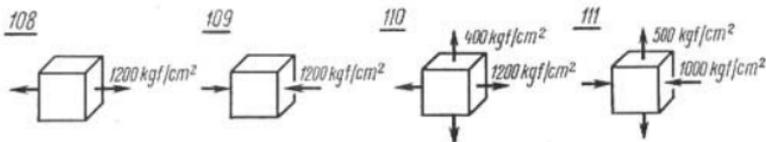
$$u_{\text{vol}} = \frac{1 - 0,6}{6 \cdot 2 \cdot 10^6} \cdot 10^4 (2 - 4 - 8)^2 \approx 3,3 \cdot 10^{-2} \text{ kgf} \cdot \text{cm/cm}^3.$$

La energía potencial unitaria debida a la variación de la forma será,

$$u_f = u - u_{v01} = (19,8 - 3,3) \cdot 10^{-2} = 16,5 \cdot 10^{-2} \text{ kgf} \cdot \text{cm/cm}^3.$$

**Problemas 108-122.** Determinar analíticamente y mediante los diagramas circulares las magnitudes siguientes:

1. Las tensiones tangenciales extremas  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  y  $\tau_3$ ,
2. Las tensiones normales  $\sigma_\alpha$  y tangenciales  $\tau_\alpha$ :
  - a) en el plano paralelo al eje *I*, cuya normal (al plano) forma un ángulo  $\beta = 30^\circ$  con el eje *II*,
  - b) en el plano paralelo al eje *II*, cuya normal forma un ángulo  $\alpha = 60^\circ$  con el eje *I*,
  - c) en el plano paralelo al eje *III*, cuya normal forma un ángulo  $\alpha = 30^\circ$  con el eje *I*.
3. Las tensiones octaédricas resultantes  $p_0$ , normales  $\sigma_0$  y tangenciales  $\tau_0$ .



**Problemas 108'-122'.** Calcular las deformaciones lineales principales  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ ; la variación unitaria del volumen  $\frac{\Delta V}{V}$ , la energía potencial unitaria de la deformación elástica  $u$  y sus componentes, correspondientes a la variación de la forma  $u_f$  y a la del volumen  $u_{vol}$ .

Analizar los estados tensionales indicados en los problemas 108-122.

Admitase  $E = 2 \cdot 10^8$  kgf/cm<sup>2</sup>,  $\mu = 0,3$ . En los problemas 120, 121, 122,  $E = 2 \cdot 10^5$  MN/m<sup>2</sup>.

## § 2. Hipótesis de resistencia y tensiones equivalentes

En las hipótesis de resistencia se plantean criterios que precisan la resistencia del elemento del material que se encuentra en un estado tensional complejo. De acuerdo a estos criterios se establecen las tensiones equivalentes ( $\sigma_e$ ), es decir, las tensiones de tracción monoaxial del elemento del material, que tiene igual resistencia que este mismo elemento, pero sometido a un estado tensional de volumen.

Independientemente de la hipótesis admitida, la condición de resistencia técnica del elemento del material para cualquier estado tensional es,

$$\sigma_e \leq [\sigma_t]. \quad (34)$$

En el caso del estado tensional de volumen de un elemento, las tensiones equivalentes serán las siguientes:

según la hipótesis de las tensiones normales máximas,

$$\sigma_{eI} = \sigma_1 \quad \text{cuando } \sigma_1 > 0^* \quad (35)$$

según la hipótesis de las deformaciones lineales máximas,

$$\sigma_{eII} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3), \quad (36)$$

según la hipótesis de las tensiones tangenciales máximas,

$$\sigma_{eIII} = \sigma_1 - \sigma_3, \quad (37)$$

según la hipótesis de la energía potencial específica de la variación de la forma,

$$\sigma_{eIV} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}, \quad (38)$$

según la hipótesis de los estados tensionales límites,

$$\sigma_{eV} = \sigma_1 - \nu\sigma_3 \quad (39)$$

\* A veces, en la práctica, en los casos cuando  $|\sigma_3| > \sigma_1$ , el cálculo de la resistencia por la primera hipótesis se lleva a cabo por las fórmulas,  $\sigma_1 \leq [\sigma_t]$ ;  $|\sigma_3| \leq [\sigma_c]$ .

siendo,

$$\nu = \frac{[\sigma_t]}{[\sigma_c]} \quad (40)$$

**Ejemplo 11.** Para el estado tensional de volumen (fig. 19),  $\sigma_1 = 200 \text{ kgf/cm}^2$ ,  $\sigma_2 = -400 \text{ kgf/cm}^2$ ,  $\sigma_3 = -800 \text{ kgf/cm}^2$  y  $\mu = 0,3$ .

Calcular las tensiones equivalentes por todas las hipótesis de resistencia.

Al calcular la tensión equivalente por la hipótesis de los estados tensionales límites debe admitirse  $\nu = 0,25$ .

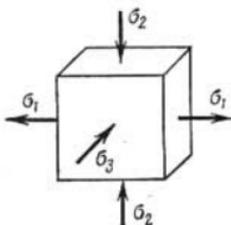


Fig. 19

*Resolución.*  $\sigma_{e_I} = 200 \text{ kgf/cm}^2$ ,  $\sigma_{e_{II}} = 200 + 0,3(400 + 800) = 560 \text{ kgf/cm}^2$ ,  $\sigma_{e_{III}} = 200 + 800 = 1\,000 \text{ kgf/cm}^2$ ,

$$\sigma_{e_{IV}} = 100 \sqrt{\frac{1}{2} [(2 + 4)^2 + (-4 + 8)^2 + (-8 - 2)^2]} \approx 872 \text{ kgf/cm}^2,$$

$$\sigma_{e_V} = 200 + 0,25 \cdot 800 = 400 \text{ kgf/cm}^2.$$

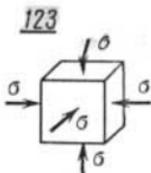
**Problemas 108<sup>o</sup>-122<sup>o</sup>.** Calcular las tensiones equivalentes por las hipótesis de resistencia correspondientes.

Analícense los estados tensionales indicados en los problemas 108-122. Admitase  $\mu = 0,3$ . En el caso de la 5<sup>a</sup> hipótesis (de los estados tensionales límites),  $\nu = 0,5$ .

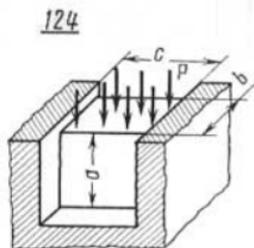
**Problemas 123-127.** Calcular las magnitudes indicadas en las condiciones de los problemas.

Notaciones:  $\alpha$ , coeficiente de compresibilidad del material;  $K$ , módulo de elasticidad estérea;  $p$ , intensidad de la carga distribuida sobre el área. En todos los casos debe prescindirse de la fricción.

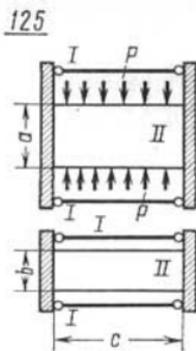
En el problema 123 debe admitirse: para el acero  $E = 2 \cdot 10^6 \text{ kgf/cm}^2$ ,  $\mu = 0,28$ ; para el cobre  $E = 1 \cdot 10^6 \text{ kgf/cm}^2$ ,  $\mu = 0,34$  y para el aluminio  $E = 0,7 \cdot 10^6 \text{ kgf/cm}^2$ ,  $\mu = 0,33$ .



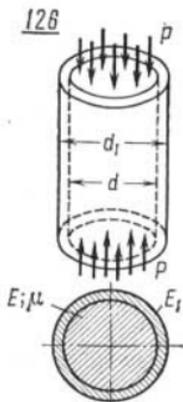
- a) Acero  
 b) Cobre  
 c) Aluminio  
 $\alpha = ?$ ;  $K = ?$



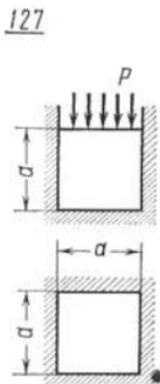
$p$ ;  $a$ ;  $b$ ;  $c$ ;  $\mu$ ;  $E$   
 $\sigma_{1,2,3} = ?$ ;  $\Delta a = ?$ ;  $\Delta b = ?$



$E_1$ ;  $F_1$ ;  $E_2$ ;  $\mu_2$   
 $\sigma_x = ?$ ;  $(\sigma_{1,2,3})_{\bar{x}} = ?$ ;  $(\frac{\Delta V}{V})_{\bar{x}} = ?$



en la barra:  
 $\sigma_1 = ?$ ;  $\sigma_2 = ?$ ;  $\sigma_3 = ?$



$p$ ;  $a$ ;  $E$ ;  $\mu$   
 $\sigma_{1,2,3} = ?$ ;  $\Delta a = ?$   
 $U = ?$

### III. RECIPIENTES DE PAREDES DELGADAS

Para los recipientes de forma de cuerpos de revolución, cuyas paredes son finas y no tienen cambios bruscos ni quebraduras, cuando actúa una presión interior normal a las paredes, que tiene simetría axial, se puede emplear la teoría membranar (que prescinde de los momentos flectores).

Según esta teoría, del equilibrio de un elemento situado alrededor del punto en cuestión de la pared del recipiente y determinado por secciones meridionales y perpendiculares infinitamente próximas

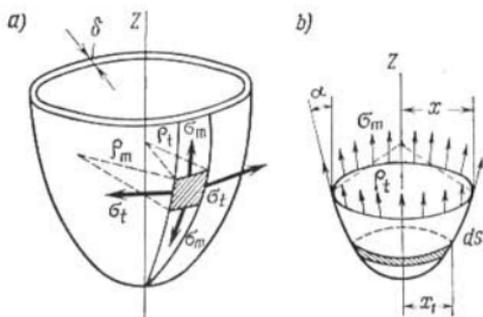


Fig. 20

(fig. 20, a), se obtiene una ecuación (ecuación de Laplace) para la determinación de las tensiones normales circunferencial  $\sigma_t$  y meridional  $\sigma_m$ ,

$$\frac{\sigma_t}{\rho_t} + \frac{\sigma_m}{\rho_m} = \frac{p}{\delta}, \quad (41)$$

siendo  $\rho_t$  y  $\rho_m$  los radios de curvatura de la sección circunferencial y meridional de la pared del recipiente al nivel del punto en cuestión;

$p$  la intensidad de la presión interior, que es función de la coordenada  $z$ ;

$\delta$  el espesor de la pared del recipiente.

De la condición de equilibrio de la parte del recipiente determinada por secciones perpendiculares al meridiano, al nivel del punto en cuestión (fig. 20, b), se obtiene la segunda ecuación,

$$\sigma_m \delta x \cos \alpha = Z, \quad (42)$$

siendo  $x$  el radio de la circunferencia de la sección a este nivel,  $\alpha$  el ángulo entre el eje  $z$  y la tangente al meridiano al mismo nivel y

$Z$  la suma de las proyecciones sobre el eje  $z$  de las fuerzas que actúan sobre la parte del recipiente separada ( $Z$  está referida al arco de longitud igual al radio),

$$Z = \int_0^x p x_1 dx_1. \quad (43)$$

Aquí  $x_1$  es el radio variable de la circunferencia de la sección del recipiente.

La resolución de las ecuaciones (41) y (42) nos dará los valores siguientes de las tensiones  $\sigma_t$  y  $\sigma_m$ ,

$$\left. \begin{aligned} \sigma_t &= \frac{p\rho_t}{\delta} - \frac{Z}{\delta\rho_m \cos^2 \alpha}, \\ \sigma_m &= \frac{Z}{\delta\rho_t \cos^2 \alpha}. \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

Casos particulares:

1.  $\rho_m = \infty$ ,  $\rho_t = \rho$ , recipiente de generatriz recta,

$$\left. \begin{aligned} \sigma_t &= \frac{p\rho}{\delta}, \\ \sigma_m &= \frac{Z}{\delta\rho \cos^2 \alpha}. \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

2.  $\rho_t = \rho_m = \rho$ , recipiente esférico,

$$\left. \begin{aligned} \sigma_t &= \frac{p\rho}{\delta} - \frac{Z}{\delta\rho \cos^2 \alpha}, \\ \sigma_m &= \frac{Z}{\delta\rho \cos^2 \alpha}. \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

a)  $p = \text{constante}$  (presión de un gas o vapor)

$$Z = \frac{px^2}{2} = \frac{1}{2}p\rho^2 \cos^2 \alpha, \quad (47)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_t &= \frac{p\rho_t}{2\delta} \left( 2 - \frac{\rho_t}{\rho_m} \right), \\ \sigma_m &= \frac{p\rho_t}{2\delta}. \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

$$\text{Cuando } \rho_m = \infty \text{ y } \rho_t = \rho, \sigma_t = 2\sigma_m = \frac{p\rho}{\delta}. \quad (49)$$

$$\text{Cuando } \rho_t = \rho_m = \rho, \sigma_t = \sigma_m = \frac{p\rho}{2\delta}. \quad (50)$$

b)  $p = \gamma(h - z)$  (presión de un líquido, fig. 21),  
siendo  $\gamma$  el peso por unidad de volumen del líquido;  
 $h$  la altura del líquido en el recipiente y  
 $z$  la ordenada variable,

$$Z = \gamma \left( \frac{h\rho_t^2 \cos^2 \alpha}{2} - Z_t \right) \quad (51)$$

La magnitud

$$Z_1 = \int_0^x zx \, dx \quad (52)$$

se calcula fácilmente si se conoce la ecuación de la generatriz del recipiente  $z = z(x)$ .

En la superficie interior de la pared del recipiente la tercera tensión normal principal es  $\sigma_r = -p$ . En la mayoría de los casos esta tensión es muy pequeña en comparación con  $\sigma_t$  y  $\sigma_m$  y se puede prescindir de ella al calcular la resistencia.

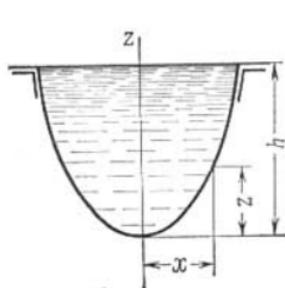


Fig. 21

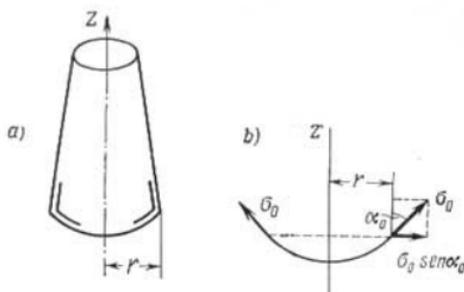


Fig. 22

Si la pared del recipiente tiene una quebradura brusca (fig. 22, a) entonces en la sección transitoria surgirán fuerzas de borde que pueden conducir a grandes sobretensiones que no capta la teoría que prescinde de los momentos. Para reducir la influencia de estas fuerzas, la sección de la junta se consolida con un anillo que absorbe el empuje.

Si las tensiones normales meridionales en la sección de la junta  $\sigma_m = \sigma_0$  (fig. 22, b), entonces la fuerza lineal de empuje, será

$$q_0 = \sigma_0 b \operatorname{sen} \alpha_0. \quad (53)$$

El área indispensable  $F$  del anillo de arriostamiento de radio  $r$  se puede obtener por la fórmula,

$$F = \frac{q_0 r}{[\sigma]} = \frac{\sigma_0 \delta r \operatorname{sen} \alpha_0}{[\sigma]}. \quad (54)$$

**Ejemplo 12.** Dado:  $\gamma = 1,2 \text{ g/cm}^3$ ;  $h_1 = 4 \text{ m}$ ;  $r = 1 \text{ m}$ ;  $\alpha = 60^\circ$ ;  $[\sigma] = 1\,000 \text{ kgf/cm}^2$  (fig. 23).

Calcular  $\delta$  y  $F$ .

**Resolución.** En la parte cónica del recipiente ( $0 \leq z \leq h_2$ )  $\rho_m = \infty$ ,  $\rho_t = \rho = \frac{x}{\cos \alpha}$ ,  $z = x \operatorname{ctg} \alpha$ ,  $p = \gamma (h - z) = \gamma (h - x \operatorname{ctg} \alpha)$ .

Por la fórmula (52) se obtiene,

$$Z_1 = \operatorname{ctg} \alpha \int_0^x x^2 dx = \frac{x^3}{3} \operatorname{ctg} \alpha.$$

Por la fórmula (51) se halla el peso del líquido ubicado en el volumen de la parte separada del recipiente,

$$Z = \gamma \left( \frac{hx^2}{2} - \frac{x^3}{3} \operatorname{ctg} \alpha \right) = \gamma x^2 \left( \frac{h}{2} - \frac{x}{3} \operatorname{ctg} \alpha \right).$$

Las tensiones normales circunferenciales  $\sigma_t$  y meridionales  $\sigma_m$  en los puntos de la pared de la parte cónica del recipiente a un nivel

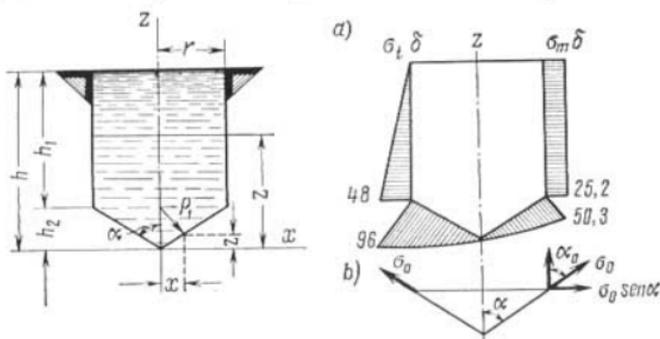


Fig. 23

arbitrario, determinado por la coordenada  $x$ , son, según las fórmulas (45),

$$\sigma_t = \frac{\gamma(h - x \operatorname{ctg} \alpha)x}{\delta \cos \alpha} = \frac{\gamma x}{\delta} \left( \frac{h}{\cos \alpha} - \frac{x}{\operatorname{sen} \alpha} \right),$$

$$\sigma_m = \frac{\gamma x^2 \left( \frac{h}{2} - \frac{x}{3} \operatorname{ctg} \alpha \right)}{\delta x \cos \alpha} = \frac{\gamma x}{\delta} \left( \frac{h}{2 \cos \alpha} - \frac{x}{3 \operatorname{sen} \alpha} \right).$$

Puesto que,

$$h = h_1 + r \operatorname{ctg} \alpha \quad \text{y} \quad \frac{h}{\cos \alpha} = \frac{h_1}{\cos \alpha} + \frac{r}{\operatorname{sen} \alpha},$$

obtendremos

$$\sigma_{t_{x=0}} = 0, \quad \sigma_{m_{x=0}} = 0, \quad \sigma_{t_{x=r}} = \frac{\gamma r}{\delta} \left( \frac{h}{\cos \alpha} - \frac{r}{\operatorname{sen} \alpha} \right) = \frac{\gamma r h_1}{\delta \cos \alpha},$$

$$\sigma_{m_{x=r}} = \frac{\gamma r}{2\delta} \left( \frac{h}{\cos \alpha} + \frac{r}{3 \operatorname{sen} \alpha} \right).$$

Para los valores numéricos dados,

$$\sigma_{t_{x=r}} = \frac{1,2 \cdot 10^{-3} \cdot 10^2 \cdot 4 \cdot 10^2 \cdot 2}{\delta} = \frac{96}{\delta} \text{ kgf/cm}^2,$$

$$\sigma_{m_{x=r}} = \frac{1,2 \cdot 10^{-3} \cdot 10^2}{2\delta} \left( \frac{4 \cdot 10^2 \cdot 2}{1} + \frac{10^2 \cdot 2}{3\sqrt{3}} \right) \approx \frac{50,3}{\delta} \text{ kgf/cm}^2.$$

En la parte cilíndrica del recipiente ( $h_2 \leq z \leq h$ )  $\rho_m = \infty$ ,  $\rho_t = \rho = r$ ,  $p = \gamma(h - z)$ ,  $\alpha = 0$  y  $Z$  es igual al valor de  $Z$  correspondiente a la parte cónica para  $x = r$ , es decir,  $Z = Z_{x=r} = \gamma r^2 \left( \frac{h}{2} - \frac{r}{3} \text{ctg } \alpha \right)$ .

Las tensiones normales circunferenciales  $\sigma_t$  y meridionales  $\sigma_m$  en los puntos de la pared de la parte cilíndrica, se obtienen por la fórmula (43),

$$\sigma_t = \frac{\gamma r}{\delta} (h - z),$$

$$\sigma_m = \frac{\gamma r}{2\delta} \left( h - \frac{2}{3} r \text{ctg } \alpha \right) = \frac{\gamma r}{2\delta} \left( h_1 + \frac{h_2}{3} \right) = \frac{\gamma r}{2\delta} \left( h_1 + \frac{r}{3} \text{ctg } \alpha \right),$$

$$\sigma_{t_{z=h_2}} = \frac{\gamma z}{\delta} h_1, \quad \sigma_{t_{z=h}} = 0, \quad \sigma_m = \text{const.}$$

Para los valores numéricos dados obtendremos,

$$\sigma_{t_{z=h_2}} = \frac{1,2 \cdot 10^{-3} \cdot 10^2 \cdot 4 \cdot 10^2}{\delta} = \frac{48}{\delta} \text{ kgf/cm}^2,$$

$$\sigma_m = \frac{1,2 \cdot 10^{-3} \cdot 10^2}{2\delta} \left( 4 \cdot 10^2 + \frac{10^2}{3} 0,577 \right) \approx \frac{25,2}{\delta} \text{ kgf/cm}^2.$$

En la figura 23, *a* están representados los diagramas de las tensiones  $\sigma_t$  y  $\sigma_m$ .

La sección peligrosa de la parte cónica del recipiente es la superior, donde  $\sigma_t = \frac{96}{\delta}$  y  $\sigma_m = \frac{50,3}{\delta}$ .

Calculamos el espesor  $\delta$  de la pared del recipiente por la tercera hipótesis de resistencia. Considerando  $\sigma_r = 0$ , obtendremos la ecuación,

$$\sigma_t = \frac{96}{\delta} = [\sigma]$$

de donde hallamos,  $\delta = \frac{96}{[\sigma]} = \frac{96}{1000} = 0,096 \text{ cm} = 0,96 \text{ mm}$ .

Admitimos  $\delta = 1 \text{ mm}$ .

En la sección de la junta de la parte cónica y la cilíndrica (fig. 23, b).

$$\sigma_0 = \sigma_m = 503 \text{ kgf/cm}^2.$$

Puesto que  $\alpha_0 = \alpha = 60^\circ$ , el área  $F$  del anillo de arriostamiento será, según la fórmula (52),

$$F = \frac{503 \cdot 0,1 \cdot 10^2 \cdot 0,87}{10^3} \approx 4,4 \text{ cm}^2.$$

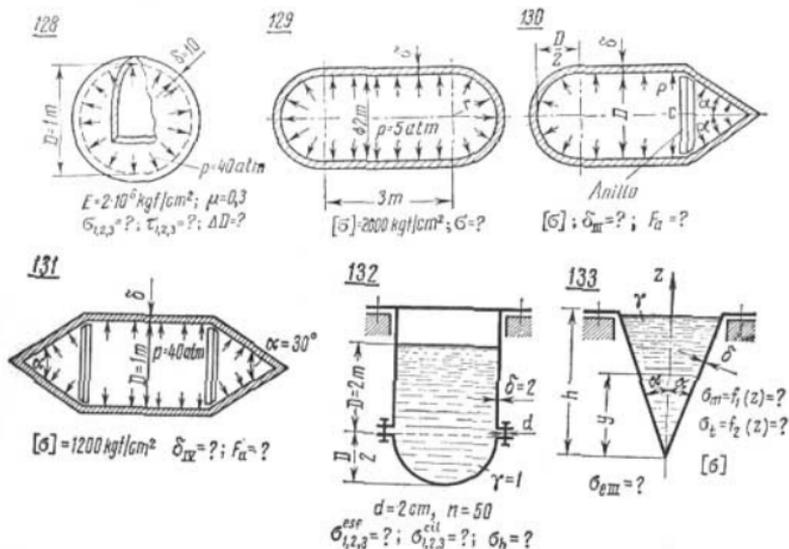
Los valores de  $\delta$  y  $F$  obtenidos deberán ser corregidos teniendo en cuenta ciertas consideraciones constructivas así como la estabilidad del anillo.

**Problemas 128-133.** Determinar las magnitudes indicadas en las condiciones de los problemas.

Notaciones:  $p$ , presión interior del gas;  $\gamma$ , peso específico del líquido;  $\delta$ , espesor de la pared ( $\delta_{III}$ , por la 3ª hipótesis de resistencia y  $\delta_{IV}$  por la 4ª);  $F_a$ , área del anillo;  $d$ , diámetro del perno;  $n$ , número de pernos;  $\sigma_{1, 2, 3}$ , tensiones principales en el punto peligroso de la parte esférica del recipiente;  $\sigma_{1, 2, 3}$  ídem en la parte cilíndrica.

Los cálculos se deben realizar por la teoría que prescinde de los momentos flectores (teoría membranar).

En el problema 133 analícese y constrúyanse los diagramas de las variaciones de la tensión meridional ( $\sigma_m$ ); y la tensión ( $\sigma_t$ ) ortogonal a la primera, así como también el diagrama de la tensión equivalente  $\sigma_{e_{III}}$  correspondiente a la tercera teoría de resistencia, en función de la coordenada  $z$ . Plantéese la condición de resistencia.



## VI. DESLIZAMIENTO

El estado tensional correspondiente al caso cuando sobre las caras del elemento separado actúan solamente tensiones tangenciales, se denomina *deslizamiento puro*. El deslizamiento puro va acompañado

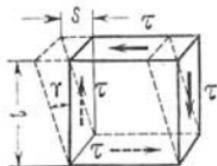


Fig. 24

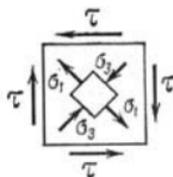


Fig. 25

de un desplazamiento lineal mutuo de las dos caras paralelas del elemento. La magnitud de este desplazamiento  $s$  se denomina *distorsión absoluta* (fig. 24).

La razón entre la distorsión absoluta  $s$  y la distancia  $l$  entre las caras que se desplazan

$$\frac{s}{l} = \operatorname{tg} \gamma \approx \gamma \quad (55)$$

se denomina *distorsión unitaria* o *ángulo de distorsión*.

Los ángulos de distorsión  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  y  $\gamma_3$  (variación de los ángulos rectos entre los planos de acción de tensiones tangenciales extremas  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  y  $\tau_3$ , de igual valor, pero de signo contrario) se determinan por la ley de Hooke. Estos ángulos son:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \varepsilon_2 - \varepsilon_3 = \frac{\tau_1}{G}, \\ \gamma_2 &= \varepsilon_1 - \varepsilon_3 = \frac{\tau_2}{G}, \\ \gamma_3 &= \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \frac{\tau_3}{G}, \end{aligned} \quad (56)$$

siendo

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)} \quad (57)$$

el módulo de deslizamiento o módulo de elasticidad tangencial del material.

La distorsión unitaria  $\gamma_0$  originada por la tensión tangencial octaédrica  $\tau_0$  se denomina *distorsión octaédrica*,

$$\gamma_0 = \frac{\tau_0}{G} = \frac{2}{3} \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2}. \quad (58)$$

En el estado tensional correspondiente al deslizamiento puro (fig. 25), en los planos inclinados  $45^\circ$ , surgen las tensiones principales,

$$\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau, \quad (59)$$

las deformaciones lineales principales,

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 = -\varepsilon_3 = \varepsilon = \frac{1 + \mu}{E} \tau, \\ \varepsilon_2 = 0, \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

y la distorsión angular principal,

$$\gamma = 2\varepsilon. \quad (61)$$

El centro del círculo de las tensiones se encuentra, en este caso, en el origen del sistema de coordenadas (fig. 26).

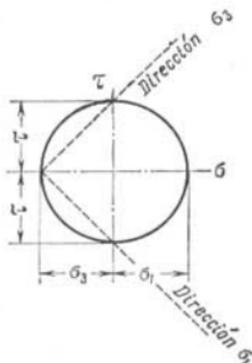


Fig. 26

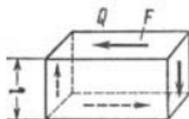


Fig. 27

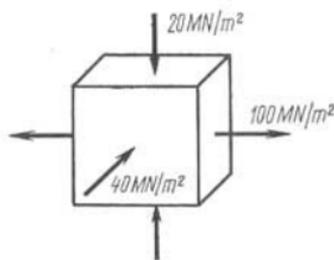


Fig. 28

Si consideramos que las tensiones tangenciales se distribuyen uniformemente sobre el área  $F$  donde están aplicadas (fig. 27), entonces el esfuerzo tangencial será,

$$Q = \tau F \quad (62)$$

Teniendo en cuenta las fórmulas (55) y (56), podremos escribir la ley de Hooke para el deslizamiento en la forma siguiente,

$$\Delta s = \frac{Ql}{GF}. \quad (63)$$

La energía potencial de la deformación elástica del deslizamiento se obtiene por la fórmula,

$$U = \frac{Q^2 l}{2GF} = \frac{\Delta s^2 GF}{2l} = \frac{Q \Delta s}{2} \quad (64)$$

y la energía potencial unitaria, por la fórmula,

$$u = \frac{\tau \gamma}{2} = \frac{\tau^2}{2G}. \quad (65)$$

**Ejemplo 13.** Para el estado tensional dado (fig. 28) calcular  $\gamma_{1, 2, 3}$  y  $\gamma_0$ , considerando que  $E = 2 \cdot 10^5$  MN/m<sup>2</sup> y  $\mu = 0,25$ .

*Resolución.* Las tensiones principales en el estado tensional de volumen dado son:  $\sigma_1 = 100$  MN/m<sup>2</sup>,  $\sigma_2 = -20$  MN/m<sup>2</sup> y  $\sigma_3 = -40$  MN/m<sup>2</sup>.

Las tensiones tangenciales extremas tienen, según las fórmulas (27), los valores siguientes:

$$\tau_1 = \frac{-20 + 40}{2} = 10 \text{ MN/m}^2,$$

$$\tau_2 = \frac{100 + 40}{2} = 70 \text{ MN/m}^2,$$

$$\tau_3 = \frac{100 + 20}{2} = 60 \text{ MN/m}^2.$$

El módulo de elasticidad tangencial del material es, según la fórmula (57),

$$G = \frac{2 \cdot 10^5}{2(1 + 0,25)} = 8 \cdot 10^4 \text{ MN/m}^2.$$

De la expresión (56) se obtienen las distorsiones angulares principales,

$$\gamma_1 = \frac{10}{8 \cdot 10^4} = 1,25 \cdot 10^{-4},$$

$$\gamma_2 = \frac{70}{8 \cdot 10^4} = 8,75 \cdot 10^{-4},$$

$$\gamma_3 = \frac{60}{8 \cdot 10^4} = 7,5 \cdot 10^{-4}.$$

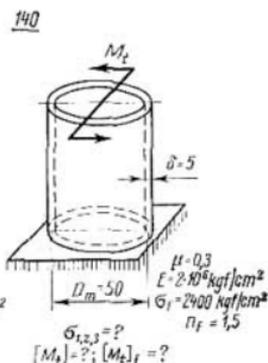
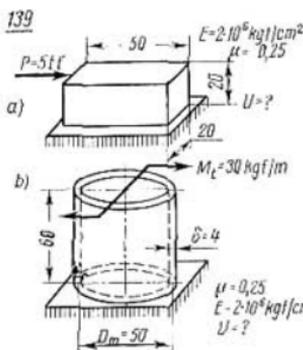
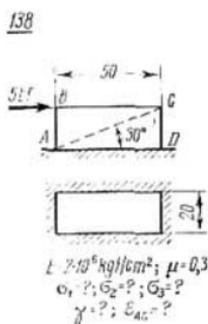
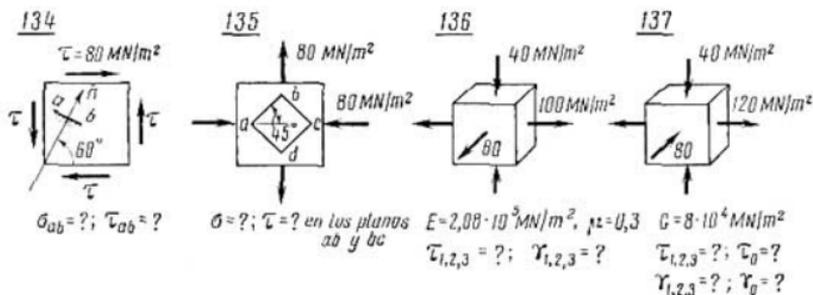
La distorsión octaédrica será, por la fórmula (58),

$$\gamma_0 = \frac{2}{3} \cdot 10^{-4} \sqrt{1,25^2 + 8,75^2 + 7,5^2} \approx 7,72 \cdot 10^{-4}.$$

**Problemas 134-140.** Calcular las magnitudes indicadas en las condiciones de los problemas.

Notaciones:  $\sigma_f$ , límite de fluencia;  $n_f$  coeficiente de seguridad (reserva de resistencia);  $(M_f)_f$  magnitud del momento correspondiente al estado de fluencia del material.

Prescíndase de la flexión y considérese que las tensiones tangenciales se distribuyen uniformemente sobre la pared de los tubos.



## V. CALCULO DE LAS JUNTAS MAS SIMPLES DE LOS ELEMENTOS DE LAS CONSTRUCCIONES

En las diversas juntas (a base de pernos, de espárragos, de chavetas, de cuñas, de remaches, soldadas, de esparras en madera etc.) los elementos sufren tracción, compresión, deslizamiento y aplastamiento en los diferentes planos.

Si la tracción y compresión ocurren generalmente de una manera pura, el deslizamiento puro, prácticamente, no existe. El deslizamiento siempre va acompañado de flexión, o de tracción o compresión, y por lo tanto, en los planos de deslizamiento, aparte de las tensiones tangenciales, actuarán también tensiones normales. Sin embargo, puesto que las magnitudes de estas tensiones normales son pequeñas en comparación con las tangenciales, los cálculos técnicos se realizan solamente por deslizamiento, que en el caso de elementos metálicos se denomina cizallamiento y en el de elementos de madera, cortadura ( $F_{ciz}$ ). El error que así se comete, se compensa con la magnitud de la tensión tangencial admisible  $[\tau]$ .

El aplastamiento constituye una compresión local (superficial) de los elementos que presionan uno sobre el otro. Puesto que no se conoce la ley exacta de distribución de la presión sobre la superficie de aplastamiento, para simplificar los cálculos técnicos, se admite convencionalmente que la presión se distribuye uniformemente, no sobre la superficie de aplastamiento, sino sobre el área ( $F_{ap}$ ) igual a la proyección de la superficie de aplastamiento sobre el plano perpendicular a la línea de acción de la fuerza de presión  $P_{ap}$ .

Este error también se tiene en cuenta por la magnitud de la tensión admisible al aplastamiento  $[\sigma_{ap}]$ .

Para un aprovechamiento racional del material, el cálculo de las juntas se lleva a cabo de la condición de igual resistencia de los elementos que forman la junta. Para el cálculo se emplean las fórmulas siguientes:

1) tracción y compresión,

$$F \geq \frac{N}{[\sigma]}; \quad (66)$$

2) cizallamiento y cortadura

$$F_{ciz} \geq \frac{Q}{[\tau]}; \quad (67)$$

3) aplastamiento

$$F_{ap} \geq \frac{P_{ap}}{[\sigma_{ap}]}. \quad (68)$$

Las áreas que figuran en estas fórmulas son las netas, es decir, aquellas que se obtienen después de considerar el posible debilitamiento debido a diferentes agujeros, acuerdos, ranuras, etc.

Si una misma área se calcula por cizallamiento y por aplastamiento, entonces se escoge la mayor de las dos obtenidas.

Prácticamente, no siempre es posible atenerse a la condición de igual resistencia de los elementos de las juntas. Generalmente entran

en vigor razones constructivas suplementarias, que se estudian en los cursos de piezas de máquinas, estructuras metálicas y de madera.

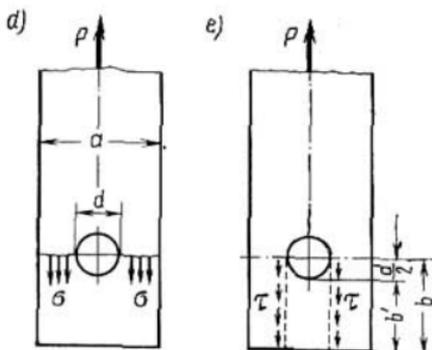
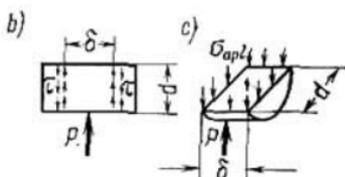
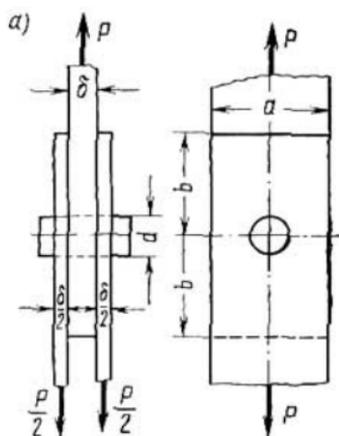


Fig. 29

lámina de la condición de resistencia al cizallamiento (fig. 29, e):

$$2b'\delta \geq \frac{P}{[\tau]}; \quad b' = \frac{P}{2\delta[\tau]} = \frac{4 \cdot 10^3}{2 \cdot 0,86 \cdot 12 \cdot 10^2} \approx 1,94 \text{ cm.}$$

**Ejemplo 14.** Dado:  $P = 4 \text{ tf}$ ;

$$[\sigma] = 1\,600 \text{ kgf/cm}^2; \quad [\tau] = 1\,200 \text{ kgf/cm}^2; \quad [\sigma_{\text{apl}}] = 3\,200 \text{ kgf/cm}^2 \text{ (fig. 29, a).}$$

Hallar  $d$ ,  $\delta$ ,  $a$ ,  $b$ .

**Resolución.** 1. Determinación del diámetro  $d$  del perno, de la condición de resistencia al cizallamiento (fig. 29, b):

$$2 \frac{\pi d^2}{4} \geq \frac{P}{[\tau]}; \quad d \geq \sqrt{\frac{2P}{\pi[\tau]}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4 \cdot 10^3}{\pi \cdot 12 \cdot 10^2}} \approx 1,46 \text{ cm.}$$

2. Determinación del espesor de la lámina  $\delta$  de la condición de resistencia al aplastamiento (fig. 29, c):

$$\delta d \geq \frac{P}{[\sigma_{\text{apl}}]}; \quad \delta \geq \frac{P}{d[\sigma_{\text{apl}}]} = \frac{4 \cdot 10^3}{1,46 \cdot 32 \cdot 10^2} \approx 0,86 \text{ cm.}$$

3. Determinación de la anchura de la lámina  $a$  de la condición de resistencia a tracción (fig. 29, d):

$$(a-d)\delta \geq \frac{P}{[\sigma]}; \quad a = \frac{P}{\delta[\sigma]} + d = \frac{4 \cdot 10^3}{0,86 \cdot 16 \cdot 10^2} + 1,46 \approx 2,92 \text{ cm;}$$

4. Determinación de la longitud  $b$  del extremo de la

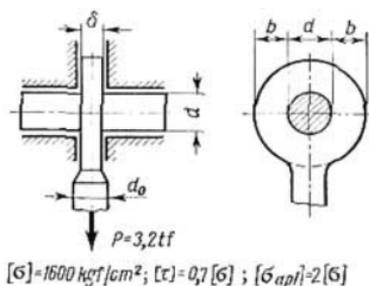
de donde se obtiene,

$$b = b' + \frac{d}{2} = 1,94 + 0,73 = 2,67 \text{ cm.}$$

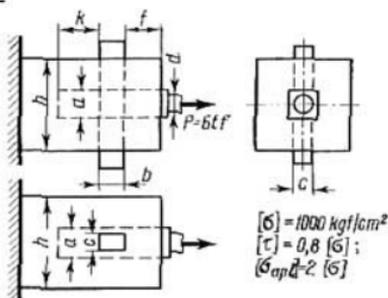
**Problemas 141-149.** Calcular todas las dimensiones de los elementos de las juntas representadas en las figuras.

Realizar los cálculos partiendo de la condición de igual resistencia de los elementos. En los problemas 146-148 admítase  $[\sigma] = 1\ 600 \text{ kgf/cm}^2$ ;  $[\tau] = 1\ 200 \text{ kgf/cm}^2$ ;  $[\sigma_{ap}] = 3\ 200 \text{ kgf/cm}^2$ . En los problemas 144, 145, 149,  $[\sigma] = 160 \text{ MN/m}^2$ ;  $[\tau] = 120 \text{ MN/m}^2$ ;  $[\sigma_{ap}] = 320 \text{ MN/m}^2$ .

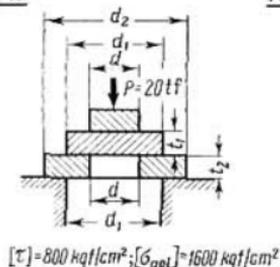
141



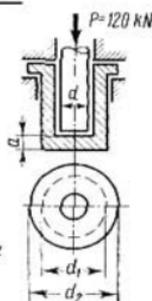
142



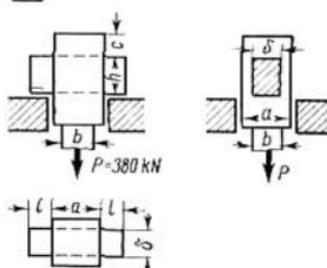
143



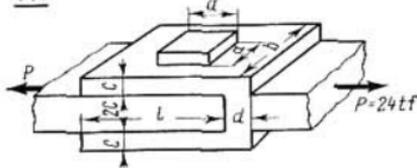
144



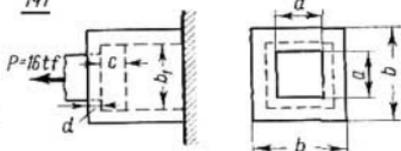
145



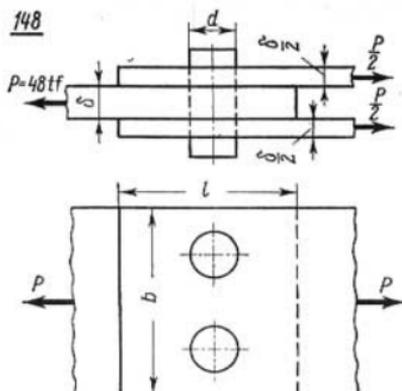
146



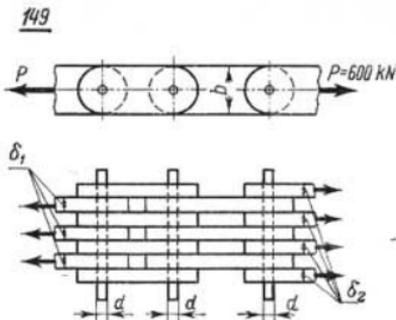
147



148



149



## VI. CARACTERISTICAS GEOMETRICAS DE LAS FIGURAS PLANAS

### § 1. Areas y sus momentos estáticos

Se denominan *momentos estáticos del área de una figura respecto a los ejes z y y* (fig. 30) las integrales determinadas,

$$\left. \begin{aligned} S_z &= \int_F y dF, \\ S_y &= \int_F z dF, \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

siendo  $F$  el área de la figura,  $dF$ , su elemento  $z$  y  $y$ , las coordenadas de este elemento.

Las coordenadas del centro de gravedad de la figura  $z_c$  y  $y_c$  se obtienen por las fórmulas,

$$\left. \begin{aligned} z_c &= \frac{S_y}{F}, \\ y_c &= \frac{S_z}{F}. \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

Los momentos estáticos del área de una figura respecto a los ejes centrales son iguales a cero.

**Ejemplo 15.** Determinar las coordenadas del centro de gravedad del área de la figura limitada por los segmentos rectos  $b$  y  $c$  y por la parábola  $y = az^n$  (fig. 31).

*Resolución.* Escogiendo el elemento de área de la figura,  $dF = ydz = az^n dz$ , obtendremos para el área,

$$F = \int_F dF = a \int_0^b z^n dz = \frac{ab^{n+1}}{n+1} = \frac{bc}{n+1}.$$

El momento estático del área  $F$  respecto al eje  $y$  se calcula por la fórmula (69),

$$S = \int_F z dF = a \int_0^b z^{n+1} dz = \frac{ab^{n+2}}{n+2} = \frac{b^2 c}{n+2}.$$

Para hallar el momento estático del área de la figura respecto

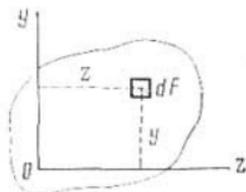


Fig. 30

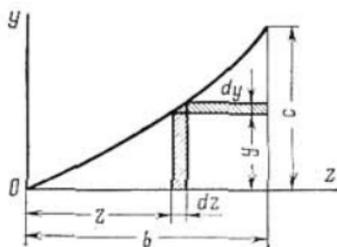


Fig. 31

al eje  $z$  escogemos el elemento de área siguiente,

$$dF = (b - z) dy = an (b - z) z^{n-1} dz$$

obteniendo así, por la fórmula (69),

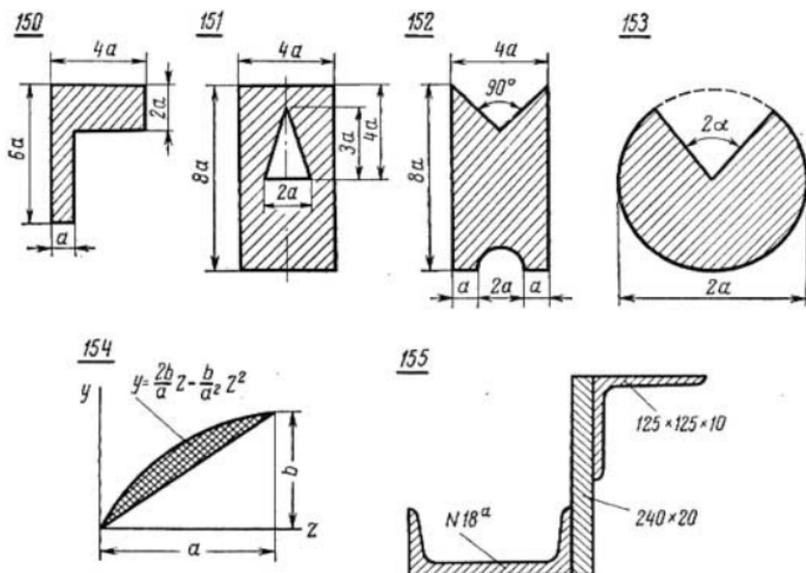
$$\begin{aligned} S_z = \int_F y dF &= a^n \int_0^b z^{2n-1} (b - z) dz = a^n b^{2n+1} \left( \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1} \right) = \\ &= \frac{a^2 b^{2n+1}}{2(2n+1)} = \frac{bc^2}{2(2n+1)}. \end{aligned}$$

De las expresiones (70) para las coordenadas del centro de gravedad de la figura se obtiene,

$$z_c = \frac{S_y}{F} = \frac{b^2 c (n+1)}{(n+2) bc} = \frac{n+1}{n+2} b,$$

$$y_c = \frac{S_z}{F} = \frac{bc^2}{2(2n+1)} \cdot \frac{n+1}{bc} = \frac{n+1}{2(2n+1)} c.$$

**Problemas 150-155.** Hallar la posición del centro de gravedad de las figuras.



## § 2. Momentos de inercia del área de la figura

Las integrales definidas,

$$\left. \begin{aligned} I_z &= \int_F y^2 dF, \\ I_y &= \int_F z^2 dF, \end{aligned} \right\}$$

se denominan *momentos de inercia axiales, lineales o ecuatoriales* (fig. 32) del área de la figura respecto a los ejes  $z$  e  $y$ ;

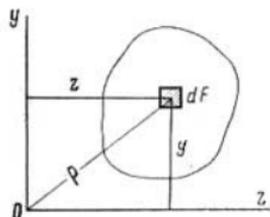


Fig. 32

$$I_{yz} = \int_F yz dF, \quad (72)$$

es el producto de inercia del área de la figura respecto a los ejes ortogonales  $z$  e  $y$ ;

$$I_p = \int_F \rho^2 dF = I_y + I_z, \quad (73)$$

es el momento polar de inercia del área de la figura respecto al origen del sistema de coordenadas  $O$ .

Los momentos de inercia respecto a los ejes paralelos, unos de los cuales ( $z_0O_0y_0$ ) son centrales (fig. 33), son

$$\left. \begin{aligned} I_z &= I_{z_0} + a^2 F, \\ I_y &= I_{y_0} + b^2 F, \\ I_{yz} &= I_{y_0 z_0} + abF, \\ I_p &= I_{p_0} + (a^2 + b^2) F. \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

Los momentos de inercia respecto a ejes girados son (fig. 34),

$$\left. \begin{aligned} I_u &= \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\alpha - I_{yz} \sin 2\alpha \\ I_v &= \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\alpha + I_{yz} \sin 2\alpha, \\ I_{uv} &= \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{yz} \cos 2\alpha, \\ I_{p_{uv}} &= I_{p_{yz}}. \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

Los ejes principales de inercia de una figura plana, es decir, dos ejes ortogonales, respecto a los cuales es nulo el producto de inercia

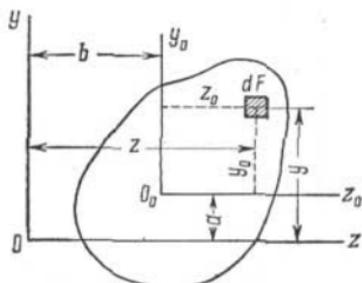


Fig. 33

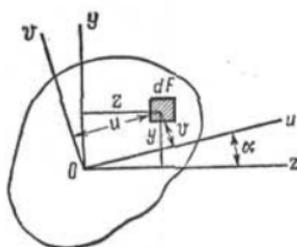


Fig. 34

del área de la figura, ocupan la posición que se determina por la ecuación,

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2I_{yz}}{I_y - I_x}. \quad (76)$$

Los momentos principales de inercia del área de una figura, es decir, los momentos axiales de inercia respecto a los ejes principales de inercia, tienen los valores extremos siguientes:

$$I_{\max}^{\min} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{yz}^2}. \quad (77)$$

Si  $I_{yz} < 0$ , entonces el eje principal, respecto al cual el momento de inercia es máximo, cruzará los cuadrantes *I* y *III*.

Si  $I_{yz} > 0$ , el eje principal, respecto al cual el momento de inercia es máximo, cruzará los cuadrantes *II* y *IV*.

Los ejes principales trazados por el centro de gravedad del área de la figura se denominan *ejes principales centrales* y los momentos de inercia respecto a estos ejes, *momentos de inercia principales centrales*.

Los valores positivos de

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{F}}; \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{F}}; \quad i_u = \sqrt{\frac{I_u}{F}}; \quad \text{etc.}, \quad (78)$$

se denominan *radios de giro* de la figura plana respecto al eje correspondiente.

La elipse correspondiente a la ecuación

$$\frac{z^2}{i_y^2} + \frac{y^2}{i_z^2} = 1, \quad (79)$$

se denomina *elipse de inercia de la figura*. En esta expresión  $y$  y  $z$  son los ejes principales de inercia de la figura. Generalmente la elipse de inercia se construye sobre los ejes principales centrales de la figura plana.

El eje de simetría de una figura plana es siempre eje principal de inercia de esta figura. Todo eje, perpendicular al de simetría, será el segundo eje principal de inercia de la figura correspondiente al punto de intersección de estos ejes.

Si la figura plana tiene por lo menos dos ejes de simetría, que no son ortogonales entre sí, entonces todos los ejes que pasan por el centro de gravedad de esta figura serán ejes principales centrales de inercia. Los momentos axiales de inercia del área de la figura respecto a estos ejes son iguales.

**Ejemplo 16.** Para el polígono regular de  $n$  lados de longitud  $a$  (fig. 35), calcular los momentos principales centrales de inercia, el momento polar de inercia y construir la elipse central de inercia.

*Resolución.* El ángulo central que se apoya sobre el lado  $a$  es,

$$\alpha = \frac{2\pi}{n},$$

el radio de la circunferencia circunscrita,

$$R = \frac{a}{2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}}$$

y el de la circunferencia inscrita,

$$r = R \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Veamos el triángulo de ángulo  $\alpha$  en el vértice (fig. 36, a) y calculemos los momentos axiales de inercia  $I'_u$ ,  $I'_v$  y el momento polar de inercia  $I'_p$ .

El área de la banda elemental de espesor  $dv$ , es

$$dF = a_1 dv = \frac{a}{r} v dv.$$

El momento axial de inercia del área del triángulo respecto al eje  $u$  será,

$$I'_u = \int_F v^2 dF = \frac{a}{r} \int_0^r v^3 dv = \frac{ar^3}{4},$$

el área de la banda elemental de espesor  $du$  (fig. 36, b),

$$dF = r_1 du = \frac{r}{a} (a - 2u) du$$

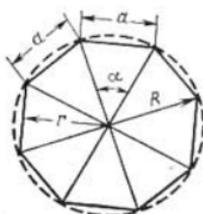


Fig. 35

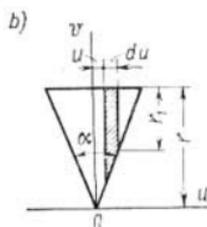
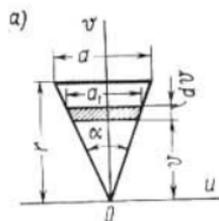


Fig. 36

y el momento axial de inercia del área del triángulo respecto al eje  $v$ ,

$$I'_v = 2 \int_{F/2} u^2 dF = 2 \frac{r}{a} \int_0^{a/2} u^2 (a - 2u) du = \frac{a^3 r}{48}.$$

El momento polar de inercia del área del triángulo respecto al punto  $O$  será,

$$\begin{aligned} I'_p = I'_u + I'_v &= \frac{ar^3}{4} + \frac{a^3 r}{48} = \frac{2R \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} R^3 \cos^3 \frac{\alpha}{2}}{4} + \\ &+ \frac{8R^3 \operatorname{sen}^3 \frac{\alpha}{2} R \cos \frac{\alpha}{2}}{48} = \frac{R^4}{6} \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \left( 3 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \right) = \\ &= \frac{R^4}{12} \operatorname{sen} \alpha (2 + \cos \alpha). \end{aligned}$$

Puesto que todos los triángulos en que se divide el polígono de  $n$  lados son iguales y se apoyan con sus vértices sobre el punto  $O$ , el momento polar de inercia del área del polígono de  $n$  lados respecto al punto  $O$ , será

$$I_p = nI_p = \frac{nR^4}{12} \operatorname{sen} \alpha (\cos \alpha + 2) = \frac{\pi R^4}{6\alpha} \operatorname{sen} \alpha (\cos \alpha + 2).$$

El polígono regular de  $n$  lados tiene no menos de dos ejes de simetría no ortogonales entre sí, por lo tanto, todos los ejes centrales serán ejes principales de inercia y los momentos de inercia del área del polígono, iguales entre sí e iguales a  $I$ . De aquí se obtiene,

$$I = \frac{1}{2} I_p = \frac{nR^4}{24} \operatorname{sen} \alpha (\cos \alpha + 2) = \frac{\pi R^4}{12\alpha} \operatorname{sen} \alpha (\cos \alpha + 2).$$

Puesto que el área del polígono de  $n$  lados, es

$$F = \frac{n ar}{2} = \frac{n}{2} 2R^2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{n}{2} R^2 \operatorname{sen} \alpha,$$

los radios de giro principales del polígono serán,

$$i = \sqrt{\frac{I}{F}} = \frac{R}{2\sqrt{3}} \sqrt{2 + \cos \alpha}.$$

La elipse de inercia degenera en una circunferencia de radio  $i$ .

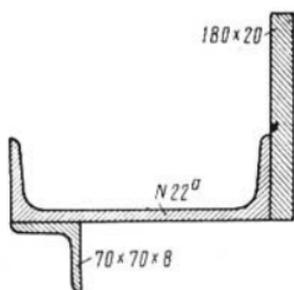


Fig. 37

**Ejemplo 17.** Para la figura compuesta representada en la figura 37 construir la elipse central de inercia.

*Resolución.* Referimos la figura dibujada a escala (fig. 38) a los ejes de coordenadas  $z, y$  paralelos a los lados del contorno de la figura.

Cada elemento de la figura (angular 1, canal 2 y rectángulo 3) se refiere a los ejes centrales  $z_i, y_i$  paralelos a los ejes  $zy$ . El centro de gravedad del rectángulo se obtiene directamente y las coordenadas de los centros de gravedad del angu-

lar  $z_0 = 2,02$  cm y del canal  $z_0 = 2,46$  cm se obtienen del surtido de perfiles de acero laminados.

Los cálculos que siguen conviene realizar en forma de tabla. Las magnitudes del rectángulo necesarias se obtienen fácilmente y las correspondientes al angular y al canal se hallan del surtido. Así, por ejemplo, para el angular de lados iguales,  $70 \times 70 \times 8$  mm

1. Determinación de las coordenadas del centro de gravedad de la figura respecto a los ejes  $z, y$

Número del elemento	Área del elemento $F_i$	Coordenadas del centro de gravedad del elemento respecto a los ejes $z, y$		Momentos estáticos del elemento respecto a los ejes $z, y$	
		$z_i$	$y_i$	$S_{z_i} = F_i y_i$	$S_{y_i} = F_i z_i$
	cm <sup>2</sup>	cm		cm <sup>3</sup>	
1	10,7	4,98	4,98	53,4	53,4
2	28,8	11	9,46	272,4	316,8
3	36	23	16	576	828
	75,5 Área de toda la figura			901,8	1198,2
				Para el área de toda la figura	

del surtido hallamos  $F_1 = 10,7 \text{ cm}^2$ , para el canal N° 22,  $F_2 = 28,8 \text{ cm}^2$  y para el rectángulo,  $F_3 = 18 \times 2 = 36 \text{ cm}^2$ . Las

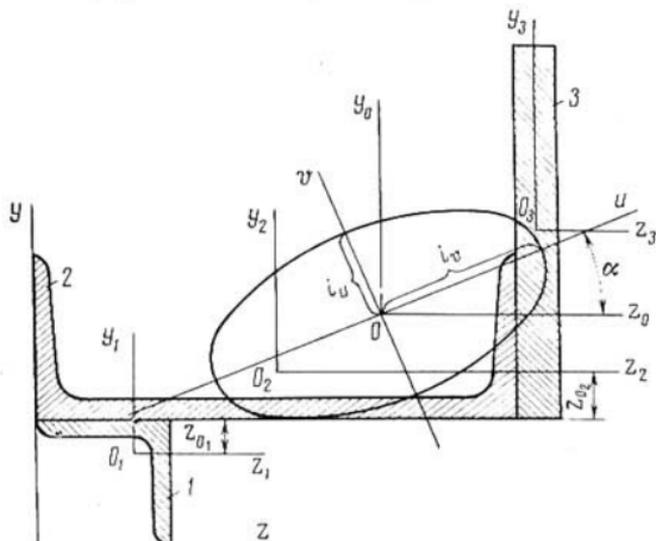


Fig. 38

coordenadas de los centros de gravedad de cada elemento, respecto a los ejes  $yz$  son:

para el angular,  $z_1 = y_1 = 7 - 2,02 = 4,98$  cm,

para el canal,  $z_2 = 11$  cm,  $y_2 = 7 + 2,46 = 9,46$  cm,

para el rectángulo,  $z_3 = 22 + 1 = 23$  cm,  $y_3 = 7 + 9 = 16$  cm.

Las coordenadas del centro de gravedad de la figura son:

$$z_c = \frac{S_y}{F} = \frac{1198,2}{75,5} \approx 15,87 \text{ cm}; \quad y_c = \frac{S_z}{F} = \frac{901,8}{75,5} \approx 11,94 \text{ cm}.$$

Referimos ahora la figura a los ejes centrales  $z_0y_0$  paralelos a los ejes  $zy$ .

Para las coordenadas de los centros de gravedad de los elementos de la figura  $z_{0i}$  y  $y_{0i}$  respecto a los ejes  $z_0$  y  $y_0$  obtendremos:

para el angular,

$$z_{01} = 4,98 - 15,87 = -10,89 \text{ cm},$$

$$y_{01} = 4,98 - 11,94 = -6,96 \text{ cm},$$

para el canal,

$$z_{02} = 11 - 15,87 = -4,87 \text{ cm},$$

$$y_{02} = 9,46 - 11,94 = -2,48 \text{ cm},$$

para el rectángulo,

$$z_{03} = 23 - 15,87 = 7,13 \text{ cm},$$

$$y_{03} = 16 - 11,94 = 4,06 \text{ cm}.$$

Hallamos los momentos de inercia de los elementos de la figura respecto a los ejes centrales  $z_1y_1$ . En el caso del angular (fig. 39) se obtiene del surtido,

$$I_{z_1} = I_{y_1} = 48,2 \text{ cm}^4.$$

Por las fórmulas para los momentos de inercia respecto a ejes girados hallamos,

$$\begin{aligned} I_{z_1y_1} &= \frac{I_{u_1} - I_{v_1}}{2} \sin 2(-45^\circ) = \\ &= \frac{76,4 - 20}{2} (-1) = -28,2 \text{ cm}^4. \end{aligned}$$

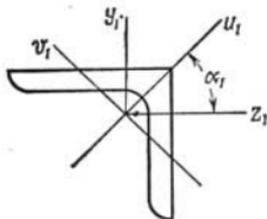


Fig. 39

Los ejes  $u_1v_1$  son, para el angular, ejes de inercia principales puesto que el eje  $u_1$  es un eje de simetría y por lo tanto  $I_{u_1v_1} = 0$ . Los valores  $I_{u_1} = 76,4 \text{ cm}^4$  y  $I_{v_1} = 20 \text{ cm}^4$  vienen en el surtido.

Para el perfil canal del surtido obtenemos  $I_{z_2} = 187 \text{ cm}^4$ ,  $I_{u_2} = 2330 \text{ cm}^4$ ;  $I_{z_2y_2} = 0$ , ya que los ejes  $z_2y_2$  son ejes principales de inercia del canal.

Para el rectángulo se obtiene,

$$I_{z_3} = \frac{2 \cdot 18^3}{12} = 972 \text{ cm}^4; \quad I_{y_3} = \frac{18 \cdot 2^3}{12} = 12 \text{ cm}^4;$$

$$I_{z_3y_3} = 0.$$

2. Determinación de los momentos de inercia de la figura respecto a los ejes  $z_0, y_0$

Número del elemento	$F_i$	$z_{0i}$	$y_{0i}$	$I_{z_i}$	$I_{y_i}$	$I_{x_i y_i}$	$F_i^2 z_{0i}$	$F_i^2 y_{0i}$	$F_i^2 z_{0i} y_{0i}$	$I_{z_{0i}} = I_{z_i} + F_i^2 y_{0i}^2$	$I_{y_{0i}} = I_{y_i} + F_i^2 z_{0i}^2$	$I_{x_{0i} y_{0i}} = I_{x_i y_i} + F_i^2 z_{0i} y_{0i}$
	cm <sup>2</sup>	cm		cm <sup>4</sup>								
1	10,7	-10,89	-6,96	48,2	48,2	-28,2	1 269	518,3	811	566,5	1317,2	782,8
2	28,8	-4,87	-2,48	187	2 330	0	683	177,1	347,8	364,1	3 013	347,8
3	36	7,13	4,06	972	12	0	1 830	1 042	1 042	1565,3	1 842	1 042
										2 496	6 172	2 173
										Para el área de toda la figura		

3. Determinación de la posición de los ejes principales de inercia de la figura  $uv$ .

Por la fórmula (76) se obtiene,

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2I_{z_0 y_0}}{I_{y_0} - I_{z_0}} = \frac{2 \cdot 2173}{6172 - 2496} = 1,182.$$

De las tablas de las funciones trigonométricas hallamos  $2\alpha = 49^\circ 46'$ , es decir  $\alpha = 24^\circ 53'$ .

Puesto que  $\alpha > 0$ , situamos este ángulo a partir del eje  $z$  en dirección opuesta a la de las manecillas del reloj y trazamos los ejes principales centrales de inercia de la figura  $u$  y  $v$ .

Puesto que  $I_{z_0 y_0} > 0$ , el eje correspondiente al momento máximo de inercia, eje  $v$ , pasará por los cuadrantes *II* y *IV*.

4. Cálculo de los momentos principales centrales de inercia de la figura.

De acuerdo con la fórmula (77),

$$I_{\max} = I_{\frac{v}{u}} = \frac{I_{z_0} + I_{y_0}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_{z_0} - I_{y_0})^2 + 4I_{z_0 y_0}^2} = \frac{2496 + 6172}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(2496 - 6172)^2 + 4 \cdot 2173^2} = 4334 \pm 2846 \text{ cm}^4.$$

Así, pues,

$$I_{\max} = I_v = 7180 \text{ cm}^4; \quad I_{\min} = I_u = 1488 \text{ cm}^4.$$

5. Cálculo de los radios de giro principales de la figura y construcción de la elipse central de inercia.

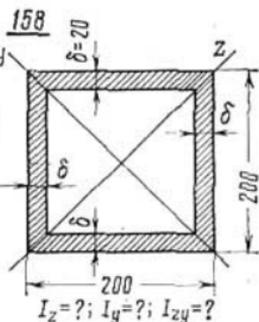
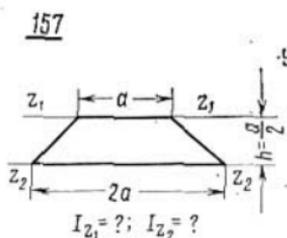
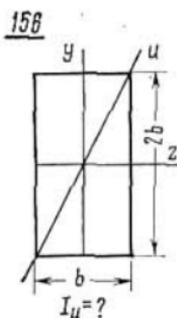
Por las fórmulas (78) hallamos los radios de giro principales,

$$i_{\max} = i_v = \sqrt{\frac{I_v}{F}} = \sqrt{\frac{7180}{75,5}} \approx 9,75 \text{ cm,}$$

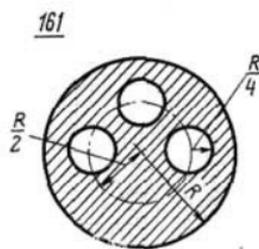
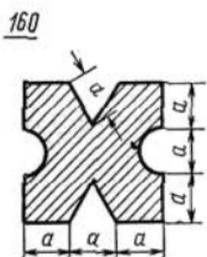
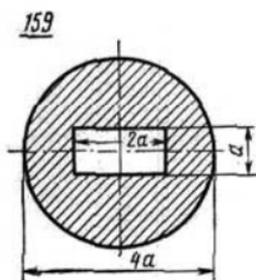
$$i_{\min} = i_u = \sqrt{\frac{I_u}{F}} = \sqrt{\frac{1488}{75,5}} \approx 4,44 \text{ cm.}$$

Puesto que la ecuación de la elipse de inercia es  $\frac{u^2}{i_u^2} + \frac{v^2}{i_v^2} = 1$ , sus semiejes serán los radios de giro  $i_u$  sobre el eje  $v$  e  $i_v$  sobre el eje  $u$ . Ubicando los valores obtenidos  $i_u$  y  $i_v$  se construye sobre ellos la elipse de inercia (fig. 38).

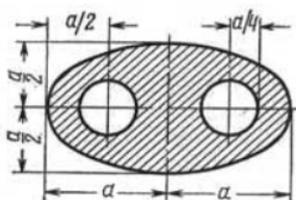
**Problemas 156-158.** Determinar los momentos de inercia de las figuras respecto a los ejes indicados en las condiciones de los problemas.



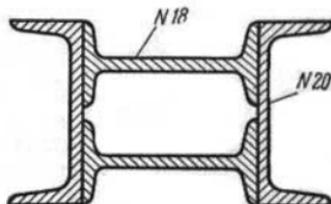
**Problemas 159-163.** Calcúlense los momentos principales centrales de inercia.



162



163



## VII. TORSION

### § 1. Momento torsor

El momento torsor se obtiene por el método de las secciones. El valor del momento torsor  $M_t$  en cierta sección transversal de la barra es igual a la suma algebraica de los momentos de los pares de fuerzas exteriores (concentrados  $M$  y distribuidos en dirección longitudinal de intensidad  $m$ ) que actúan respecto al eje geométrico de la barra a un lado de la sección en cuestión.

La fórmula general por la que se puede calcular la magnitud del momento torsor en una sección transversal arbitraria de la barra es la siguiente:

$$M_t = \sum M + \sum \int m dx. \quad (80)$$

La integración se lleva a cabo sobre cada tramo donde actúa un momento distribuido y la suma, sobre todos los tramos, situados a un lado de la sección que se analiza.

El momento torsor, visto desde la normal exterior a la sección se considerará, convencionalmente, positivo si gira en sentido opuesto al de las manecillas del reloj.

Entre el momento  $M$  del par de fuerzas en  $\text{kgf} \cdot \text{cm}$ , el número de revoluciones por minuto  $n$  y la potencia  $N$  existe la relación siguiente:

$$M = 71\,620 \frac{N}{n}, \quad (81, a)$$

$$M = 97\,360 \frac{N}{n}. \quad (81, b)$$

En la fórmula (81, a) la potencia está dada en caballos de vapor y en la fórmula (81, b), en kilovatios.

En el Sistema Internacional de Unidades (SI) la relación entre el momento  $M$  en newtones por metro ( $\text{N} \cdot \text{m}$ ), la velocidad angular de

rotación  $\omega/s$  y la potencia  $N$  en vatios se da por la fórmula

$$M = \frac{N}{\omega}. \quad (81,c)$$

Puesto que el momento de giro es proporcional a la potencia, en el caso de árboles que giran uniformemente y que transmiten ciertas potencias a las máquinas, se puede, en lugar del diagrama de los momentos torsores, construir el de la distribución de la potencia a lo largo del eje del árbol.

**Ejemplo 18.** Dado  $M$  (fig. 40), construir el diagrama de  $M_t$ .

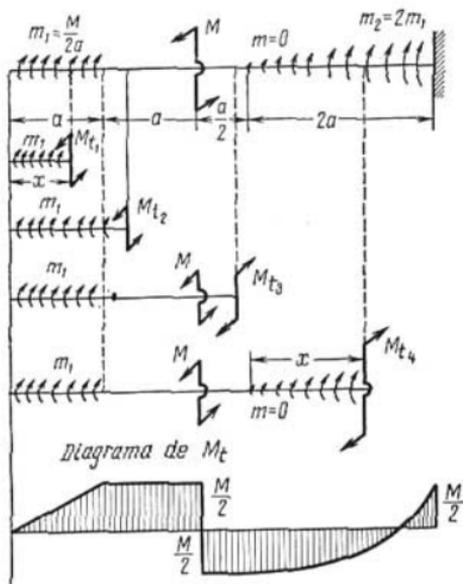


Fig. 40

**Resolución.** Trazando secciones en cada tramo de la barra, por la fórmula (80) teniendo en cuenta la regla admitida para los signos, hallaremos:

$$M_{t_1} = m_1 x = \frac{M}{2a} x, \quad M_{t_1} = 0, \quad M_{t_1} = \frac{M}{2},$$

$$M_{t_2} = m_1 a = \frac{M}{2}, \quad M_{t_3} = m_1 a - M = \frac{M}{2} - M = -\frac{M}{2},$$

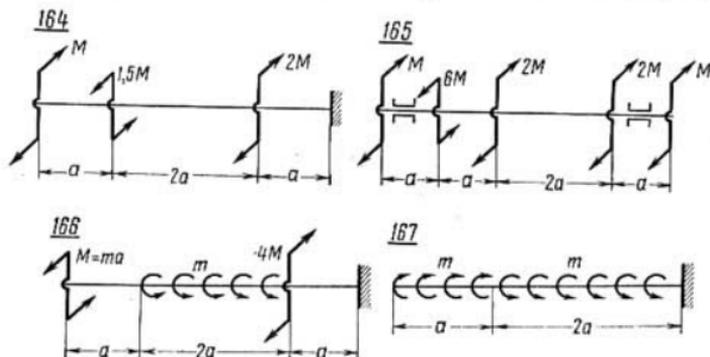
$$M_{t_x} = m_1 a - M + \int_0^x \frac{2m_1}{2a} x dx =$$

$$= \frac{M}{2} - M + \frac{M}{2a^2} \int_0^x x dx = -\frac{M}{2} + \frac{Mx^2}{4a^2},$$

$$M_{t_x=0} = -\frac{M}{2}, \quad M_{t_x=2a} = \frac{M}{2}.$$

El gráfico de  $M_t$  está representado en la figura 40.

Problemas 164-167. Construir el gráfico del momento torsor



## § 2. Tensiones tangenciales, ángulo de torsión y energía potencial de la deformación elástica

En el caso de una barra cilíndrica de sección transversal circular, de diámetro  $d = 2r$ , las tensiones tangenciales  $\tau$  en un punto arbitrario de la sección transversal, situado a una distancia  $\rho$  del centro, se calcularán por la fórmula,

$$\tau = \frac{M_t \rho}{I_p}, \quad (82)$$

siendo  $I_p = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0,1 d^4$  el momento polar de inercia de la sección circular.

Las tensiones tangenciales máximas en los puntos más alejados del centro valen,

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_p}, \quad (83)$$

siendo  $W_p = \frac{I_p}{r} = \frac{\pi r^3}{2} = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0,2 d^3$  el módulo polar de la resistencia de la sección circular.

En el caso de barras de sección transversal no circular las tensiones tangenciales máximas se obtienen por la fórmula,

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t}, \quad (84)$$

siendo  $W_t$  el módulo de la sección en la torsión cuyo valor, para las secciones de diversa configuración, figura en los correspondientes manuales y en los textos de resistencia de materiales.

El ángulo de torsión  $\varphi$  en el tramo de longitud  $l$  en el que el momento torsor  $M_t$  permanece constante, se determina por la fórmula de la ley de Hooke,

$$\varphi = \frac{M_t l}{GI_t}, \quad (85)$$

siendo  $I_t$  el «momento de inercia» de la sección transversal de la barra en la torsión, que en el caso de una sección circular es igual a  $I_p$  y en el de otras secciones es diferente y viene en los manuales y textos de resistencia de materiales.

Si la barra tiene varios tramos en los que  $M_t$  varía según una u otra ley, entonces el ángulo completo de torsión (el ángulo de giro mutuo de las secciones extremas de la barra) se hallará de la expresión,

$$\varphi = \Sigma \int \frac{M_t dx}{GI_t}. \quad (86)$$

La integración se realiza sobre la longitud de cada tramo y la suma, sobre todos los tramos de la barra.

En los árboles conviene medir los ángulos de torsión desde la sección donde se encuentra la polea motriz del árbol hacia los dos lados.

La fórmula general para la determinación de la energía potencial de la deformación elástica acumulada en la barra durante la torsión es,

$$U = \Sigma \int \frac{M_t^2 dx}{2GI_t}. \quad (87)$$

La integración y la suma se realizan aquí igual que al determinar el ángulo de torsión.

**Ejemplo 19.** Dado:  $M$ ,  $a$ ,  $d$  y  $G$  (fig. 41), construir los diagramas de  $M_t$  y  $\varphi$  y calcular  $\tau_{\max}$ ,  $\varphi$  y  $U$ .

*Resolución.* El momento torsor en el tramo I es  $M_{t_1} = -M$ .  
El momento torsor en una sección cualquiera del tramo II será,

$$M_{t_{11}} = -M + 2M - m(2a - x_2) = \\ = M - \frac{2M}{a}(2a - x_2) = M \left( \frac{2x_2}{a} - 3 \right);$$

$$M_{t_{11}, x_2=0} = -3M; \quad M_{t_{11}, x_2=2a} = M; \quad \tau_{\max_1} = \frac{M}{W_t}.$$

Para una sección cuadrada de lado  $c$ ,  $W_t \approx 0,208 c^3$ .

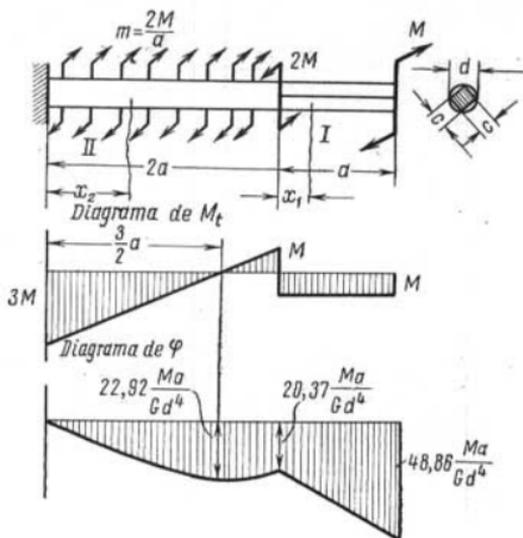


Fig. 41

Puesto que  $c = \frac{d}{\sqrt{2}}$ ,  $W_t \approx 0,208 \frac{d^3}{2\sqrt{2}} \approx 0,0736 d^3$ .

Por lo tanto,

$$\tau_{\max_1} = \frac{M}{0,0736d^3} \approx 13,6 \frac{M}{d^3}; \quad \tau_{\max_{11}} = \frac{3M}{W_p} = \frac{3M}{\pi d^3} 16 \approx 15,3 \frac{M}{d^3}.$$

Como la sección empotrada izquierda no gira, conviene medir el ángulo de torsión desde extremo izquierdo de la barra.

Para una sección arbitraria del tramo II

$$\varphi_{II} = \frac{M}{GI_p} \int_0^{x_2} \left( \frac{2x_2}{a} - 3 \right) dx_2 = \frac{M}{GI_p} \left( \frac{x_2^2}{a} - 3x_2 \right); \quad \varphi_{II} \Big|_{x_2=0} = 0;$$

$$\varphi_{II} \Big|_{x_2=2a} = \frac{M}{GI_p} (4a - 6a) = -\frac{2Ma}{GI_p} = -\frac{2Ma}{G \cdot \pi d^4} \cdot 32 \approx -20,37 \frac{Ma}{Gd^4}.$$

Hallamos el valor extremo del ángulo  $\varphi_{II}$

$$\frac{d\varphi_{II}}{dx_2} = \frac{M}{GI_p} \left( 2 \frac{x_2}{a} - 3 \right) = 0; \quad x_2 = \frac{3}{2} a;$$

$$\begin{aligned} \varphi_{II} \Big|_{x_2 = \frac{3}{2}a} &= \frac{M}{GI_p} \left( \frac{9a}{4} - \frac{9a}{2} \right) = -\frac{9}{4} \frac{Ma}{GI_p} = \\ &= -\frac{9}{4} \frac{Ma}{G \pi d^4} \cdot 32 \approx -22,92 \frac{Ma}{Gd^4}. \end{aligned}$$

Para una sección arbitraria del tramo I,

$$\varphi_I \Big|_{x_1} = \varphi_{II} \Big|_{x_2=2a} - \frac{Mx_1}{GI_t}; \quad \varphi_I \Big|_{x_1=0} = \varphi_{II} \Big|_{x_2=2a};$$

$$\varphi_I \Big|_{x_1=a} = -\frac{2Ma}{GI_p} - \frac{Ma}{GI_t}.$$

Puesto que

$$I_t \approx 0,1404c^4 = 0,1404 \frac{d^4}{4} \approx 0,351d^4, \quad y$$

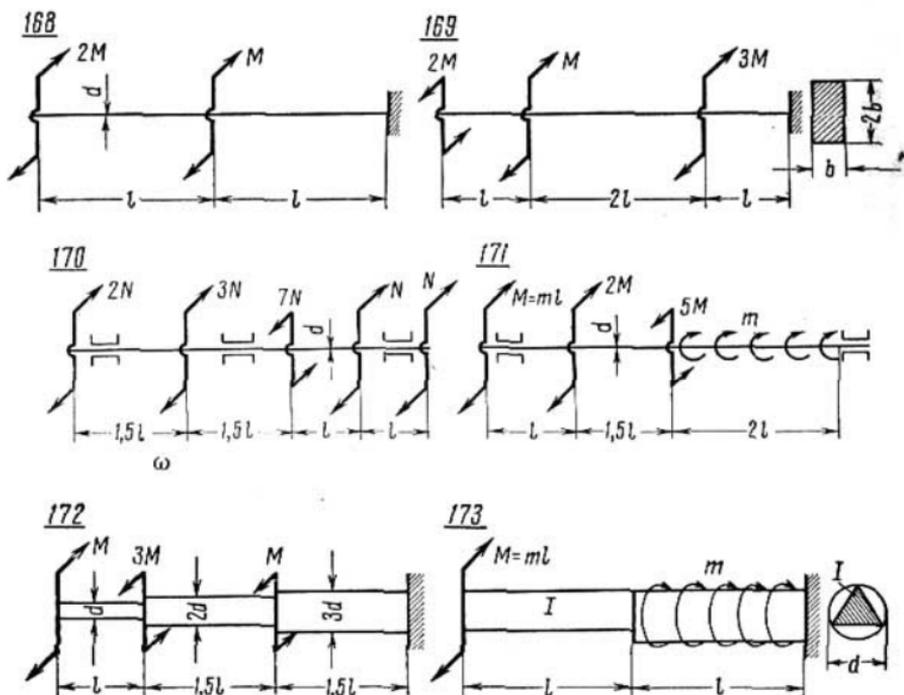
$$\frac{1}{I_t} \approx \frac{1}{0,351d^4} \approx \frac{28,49}{d^4},$$

$$\text{resulta } \varphi_I \Big|_{x_1=a} = -(20,37 + 28,49) \frac{Ma}{Gd^4} = -48,86 \frac{Ma}{Gd^4}.$$

La energía potencial de la deformación elástica acumulada en la barra torsionada se obtiene por la fórmula (87),

$$\begin{aligned} U &= U_I + U_{II} = \frac{M^2 a}{2GI_t} + \frac{M^2}{2GI_p} \int_0^{2a} \left( \frac{2x_2}{a} - 3 \right) dx = \\ &= \frac{M^2 a}{Gd^4} \left[ 14,25 + 5,1 \left( \frac{32}{3} - 24 + 18 \right) \right] \approx 38 \frac{M^2 a}{Gd^4} \end{aligned}$$

**Problemas 168-173.** Construir los diagramas del momento torsor  $M_t$ , del ángulo de torsión  $\varphi$  y calcular las tensiones tangenciales máximas  $\tau_{\max}$  y la energía potencial de la deformación  $U$ , acumulada en la barra. Resolver el problema 170 en el sistema SI.



### § 3. Resistencia y rigidez

En el caso de una barra de sección transversal constante en la torsión las dimensiones de la sección se obtienen por la fórmula

$$W_{\text{tor}} \geq \frac{\max M_t}{[\tau]}, \quad (88)$$

siendo  $\max M_t$  el momento torsor máximo en valor absoluto.

Si además se plantea la condición de que el ángulo de torsión máximo  $\varphi_{\max}$  no sea superior al ángulo de torsión admisible  $[\varphi]$ , entonces la rigidez de la sección, obtenida se comprueba por la expresión,

$$I_{\text{tor}} \geq \frac{\max M_t l_e}{G [\varphi]}, \quad (89)$$

siendo  $l_e$  la longitud efectiva correspondiente al ángulo de torsión admisible.

En el caso cuando el ángulo de torsión admisible está dado en grados por metro de longitud  $[\varphi^\circ]$ , se le debe introducir en la fórmula (89) en radianes ( $[\varphi] = [\varphi^\circ] \frac{\pi}{180}$ ), y considerar que  $l_e = 100$  cm.

Si se calcula un árbol de sección constante que transmite cierta potencia entonces en las fórmulas (88) y (89), en lugar de  $\max M_t$ , se introduce una de las dos expresiones (81) en la cual por potencia efectiva  $N_e$  se entiende la mayor del diagrama de las potencias.

En el caso de barras de sección circular maciza o anular  $W_{tor} = W_p$  y  $I_{tor} = I_p$ .

**Ejemplo 20.** Dado  $N_1 = 40$  C.V.,  $N_2 = 20$  C.V.,  $N_3 = 30$  C.V.,  $n = 1\ 000$  r.p.m.,  $\alpha = \frac{d}{D} = 0,6$ ,  $[\tau] = 450$  kgf/cm<sup>2</sup>,  $[\varphi^\circ] = 2$  grad/m,  $G = 8 \cdot 10^6$  kgf/cm<sup>2</sup> (fig. 42).

Determinar  $D$  y  $d$ .

*Resolución.* Por el gráfico de las potencias (fig. 42), la potencia efectiva resulta  $N_e = 50$  C.V.

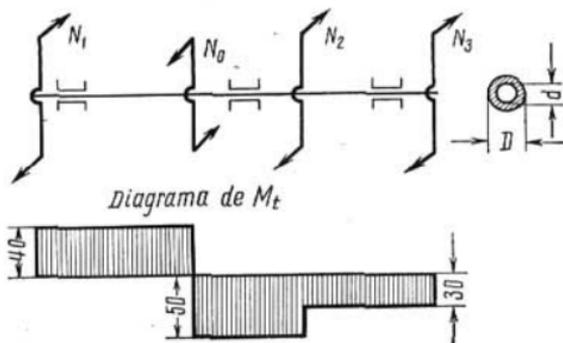


Fig. 42

Puesto que el módulo polar de la sección anular circular es,

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4); \text{ siendo } \alpha = \frac{d}{D},$$

teniendo en cuenta la relación (81, a), la fórmula (88) se escribirá así,

$$\frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4) \geq \frac{71\ 620}{n [\tau]} N_e$$

de donde se obtiene,

$$D = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi} \frac{71\,620 N_e}{n[\tau](1-\alpha^4)}} \approx 71,4 \sqrt[3]{\frac{50}{10^3 \cdot 450 \cdot 0,87}} \approx 3,64 \text{ cm.}$$

Puesto que el ángulo de torsión admisible está dado en grados por metro de longitud, la fórmula (89) se escribirá ahora así,

$$I_p = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4) \geq \frac{71\,620 N_e \cdot 100 \cdot 180}{nG[\varphi^\circ]\pi},$$

de donde se obtiene,

$$\begin{aligned} D &= \sqrt[4]{\frac{71\,620 \cdot 100 \cdot 180 \cdot 32 N_e}{\pi^2 nG[\varphi^\circ](1-\alpha^4)}} \approx 253,4 \sqrt[4]{\frac{N_e}{nG[\varphi^\circ](1-\alpha^4)}} = \\ &= 253,4 \sqrt[4]{\frac{50}{10^3 \cdot 8 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 0,87}} \approx 3,49 \text{ cm.} \end{aligned}$$

Se deben escoger definitivamente las dimensiones siguientes:

$$D = 3,64 \text{ cm, } d = 0,6 \cdot 3,64 \approx 2,18 \text{ cm.}$$

**Ejemplo 21.** Dado  $d = 4 \text{ cm}$ ,  $\omega = 80 \text{ rad/s}$ ,  $G = 8 \cdot 10^4 \text{ MN/m}^2$ ,  $[\tau] = 60 \text{ MN/m}^2$ ,  $[\varphi] = 2 \cdot 10^{-2} \text{ rad/m}$  (fig. 43).

Determinar  $N_0$  (kilovatios).

*Resolución.* De la condición de resistencia (88), teniendo en cuenta (81, c), se obtiene para la potencia efectiva,

$$\begin{aligned} N_e \leq W_p[\tau]\omega &= \frac{\pi d^3[\tau]\omega}{16} = \frac{\pi(4 \cdot 10^{-2})^3 \cdot 60 \cdot 10^6 \cdot 80}{16} \approx \\ &\approx 60\,300 \text{ vatios} = 60,3 \text{ kilovatios.} \end{aligned}$$

De la condición de rigidez (89), teniendo en cuenta (81, c), hallaremos,

$$\begin{aligned} N_e \leq \frac{G[\varphi]I_{\text{tor}}\omega}{l_e} &= \frac{G[\varphi]\pi d^4\omega}{32l_e} = \frac{8 \cdot 10^{10} \cdot 2 \cdot 10^{-2} \pi (4 \cdot 10^{-2})^4 \cdot 80}{32} \approx \\ &\approx 32\,200 \text{ vatios} = 32,2 \text{ kilovatios.} \end{aligned}$$

Puesto que del diagrama de las potencias (fig. 43) se deduce  $N_e = 5N = \frac{1}{2}N_0$  resultará que  $N_0 \leq 2N_e = 2 \cdot 32,2 = 64,4$  kilovatios.

**Ejemplo 22.** Dado:  $d = 4 \text{ cm}$ ,  $a = 40 \text{ cm}$ ,  $G = 8 \cdot 10^5 \text{ kgf/cm}^2$  y  $\varphi_{B-C}^\circ = 1^\circ$  (fig. 44).

Determinar  $\tau_{\text{máx}}$  y  $\varphi_{A-C}^\circ$ .

*Resolución.* Construimos el diagrama del momento torsor (fig. 44). El ángulo de giro de la sección B respecto a la sección C se obtiene de la expresión,

$$\varphi_{B-C} = 1 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{Ma}{GI_t} + \frac{2Ma}{GI_t} = \frac{3Ma}{GI_t},$$

de donde se obtiene,

$$M = \frac{\pi GI_t}{3 \cdot 180 \cdot a}.$$

Puesto que  $I_t \approx 0,1404d^4$ ,  $W_t \approx 0,208 d^3$ ,  $I_p = \frac{\pi d^4}{32}$ ,  $W_p = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0,2d^3$ , es decir,  $W_t \approx W_p$ , el tramo peligroso será aquel

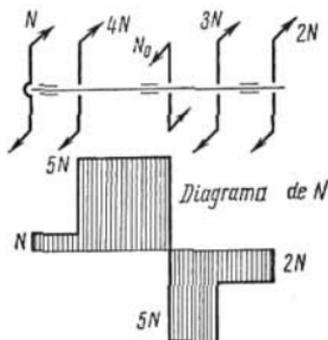


Fig. 43

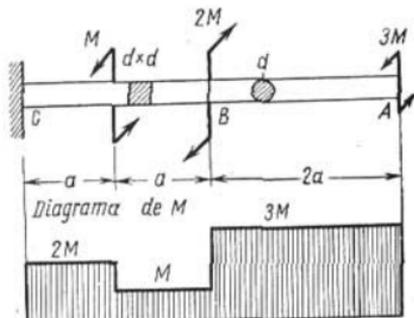


Fig. 44

donde  $M_t = 3M$ . Así, pues,

$$\begin{aligned} \tau_{\max} &= \frac{3M}{W_p} = \frac{3\pi G \cdot 0,1404d^4 \cdot 16}{3 \cdot 180 \cdot a \cdot \pi d^3} = \frac{G \cdot 0,1404 \cdot d \cdot 16}{180a} = \\ &= \frac{8 \cdot 10^5 \cdot 0,1404 \cdot 4 \cdot 16}{180 \cdot 40} \approx 1000 \text{ kgf/cm}^2. \end{aligned}$$

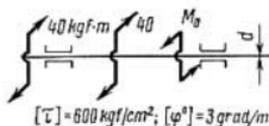
El ángulo de giro de la sección A respecto a la sección C será,

$$\begin{aligned} \varphi_{A-C}^{\circ} &= \varphi_{B-C}^{\circ} + \varphi_{A-B}^{\circ} = 1^{\circ} + \frac{3M \cdot 2a \cdot 180}{GI_p \pi} = \\ &= 1^{\circ} + \frac{2I_{\text{tor}}}{I_p} \approx 1^{\circ} + 2,86^{\circ} = 3,86^{\circ}. \end{aligned}$$

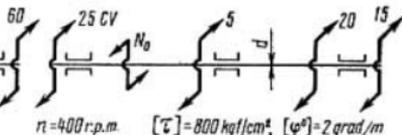
**Problemas 174-177.** Calcular las dimensiones necesarias de las secciones transversales de las barras de las condiciones de resistencia y de rigidez.

En todos los problemas de este párrafo y los siguientes, excluyendo los problemas que se resuelven en el sistema SI cuando se da la magnitud  $G$  en el dibujo, se debe admitir  $G = 8 \cdot 10^5 \text{ kgf/cm}^2$ .

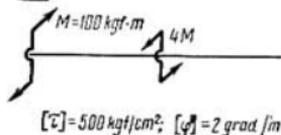
174



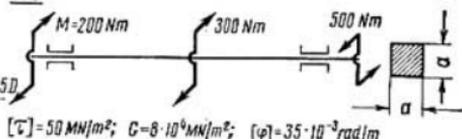
175



176



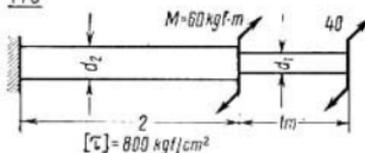
177



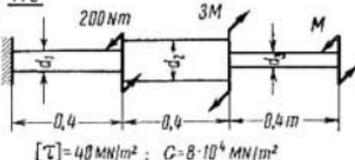
**Problemas 178-183.** Calcular las dimensiones necesarias de las secciones transversales de las barras y el ángulo total de torsión.

En todos los problemas de este párrafo y los siguientes los valores numéricos de las longitudes de los tramos de las barras se dan en metros.

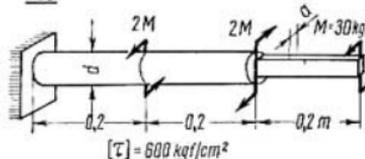
178



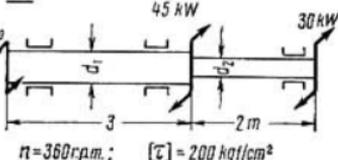
179

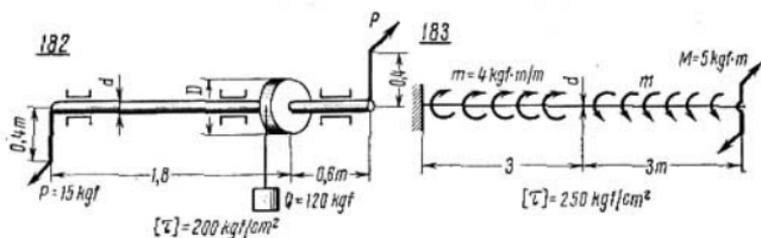


180



181





**Problemas 184-201.** Calcular las magnitudes indicadas en las condiciones de los problemas.

En el problema 193 la barra  $AB$  gira con velocidad constante en un ambiente que ofrece resistencia y que origina un momento reactivo distribuido uniformemente, sobre la longitud de la barra.

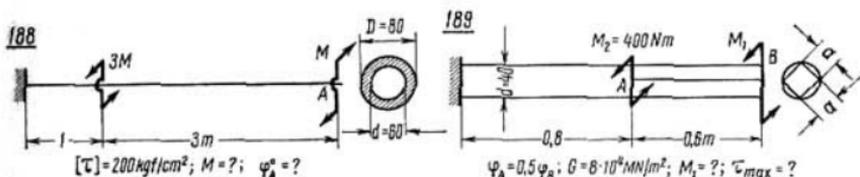
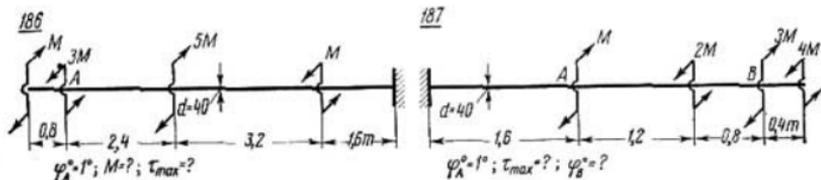
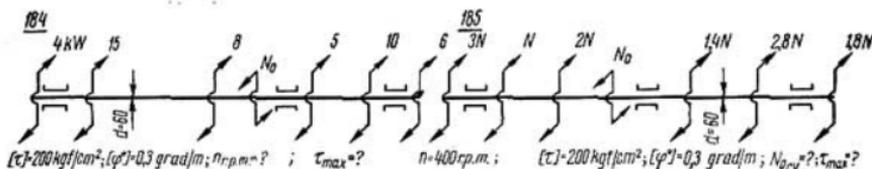
En el problema 194 el punto  $C$  situado sobre la superficie recibe un desplazamiento de 0,5 mm.

En el problema 197 el peso  $Q$  se desplaza 2 cm.

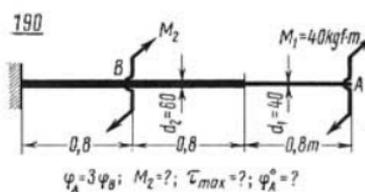
En el problema 198 las barras  $AB$  y  $CD$  son absolutamente rígidas.

En el problema 200 la resistencia técnica de las barras es igual.

En el problema 201 el punto  $A$  está situado en la sección inclinada.

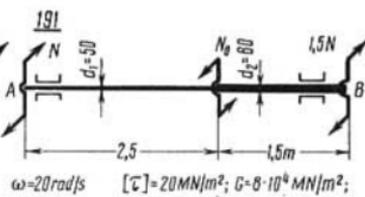


190



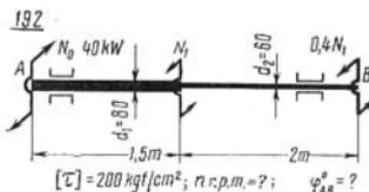
$$\varphi_A = 3\varphi_B; M_2 = ?; \tau_{max} = ?; \varphi_A^0 = ?$$

191



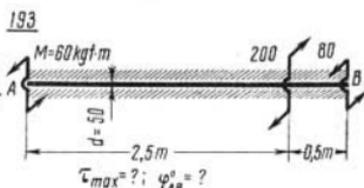
$$\omega = 20 \text{ rad/s} \quad [\tau] = 20 \text{ MN/m}^2; G = 8 \cdot 10^4 \text{ MN/m}^2; N_0 = ?; \varphi_{AB} = ?$$

192



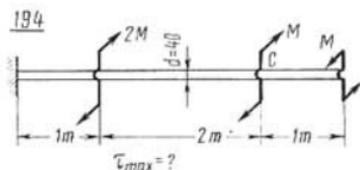
$$[\tau] = 200 \text{ kgf/cm}^2; n; r; p; m; = ?; \varphi_{AB}^0 = ?$$

193



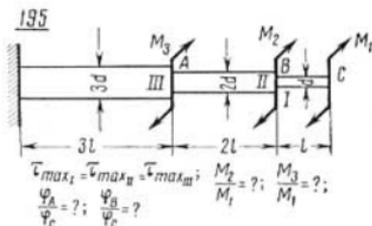
$$\tau_{max} = ?; \varphi_{AB}^0 = ?$$

194



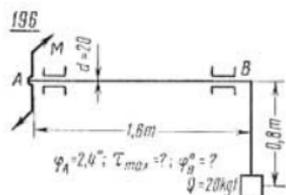
$$\tau_{max} = ?$$

195



$$\tau_{max} = \tau_{max_{II}} = \tau_{max_{III}}; M_2 = ?; M_3 = ?; \frac{\varphi_{AB}}{\varphi_C} = ?; \frac{\varphi_B}{\varphi_C} = ?$$

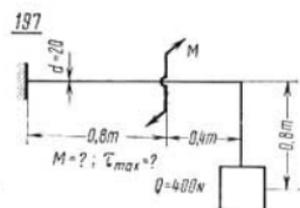
196



$$\varphi_A = 2.4\varphi_B; \tau_{max} = ?; \varphi_B^0 = ?$$

$$Q = 20 \text{ kgf}$$

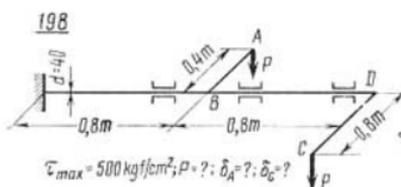
197



$$M = ?; \tau_{max} = ?$$

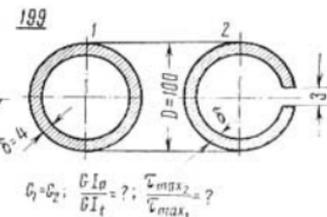
$$Q = 400 \text{ N}$$

198



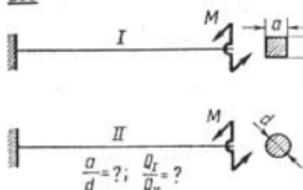
$$\tau_{max} = 500 \text{ kgf/cm}^2; P = ?; \delta_A = ?; \delta_C = ?$$

199

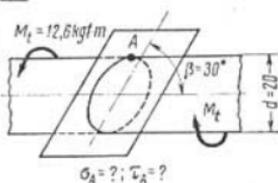


$$G_1 = G_2; \frac{G I_p}{G I_t} = ?; \tau_{max_{II}} = ?$$

200



201



#### § 4. Problemas hiperestáticos

Los problemas hiperestáticos en la torsión, al igual que en la tracción y compresión, incluyen sistemas en los cuales las reacciones de los apoyos y los esfuerzos interiores no se pueden obtener de las ecuaciones de la estática.

El cálculo de estos sistemas se realiza empleando las condiciones adecuadas de la estática y las condiciones de compatibilidad de los desplazamientos. Estas últimas se basan en la continuidad de los elementos que forman el sistema y representan relaciones geométricas entre los desplazamientos de los elementos que componen el sistema.

Si las ligaduras suplementarias (superfluas) son absolutamente rígidas, entonces sus deformaciones serán nulas, mientras que si son elásticas, sus desplazamientos se determinarán a través de las deformaciones de acuerdo con la ley de Hooke.

Si todos los elementos del sistema hiperestático trabajan exclusivamente a torsión, entonces los desplazamientos elásticos se obtendrán a través de los ángulos de torsión. Si parte de los elementos trabaja a torsión y parte a tracción o compresión, entonces en el primer grupo de elementos los desplazamientos se obtendrán a través de los ángulos de torsión y en el segundo, a través de las deformaciones lineales longitudinales.

Las ecuaciones de la estática y las condiciones de compatibilidad de los desplazamientos son diferentes para cada tipo de sistema hiperestático. Sin embargo, para algunos de ellos, estas condiciones son de hecho idénticas y pueden ser representadas en forma de ecuaciones, en principio, iguales.

Así, por ejemplo, en el caso de sistemas compuestos por ciertos elementos rectos unidos axialmente unos con otros, empotrados rigidamente en sus extremos y solicitados exclusivamente por pares de fuerzas exteriores torsionantes (fig. 45), las ecuaciones de la estática constituyen la suma algebraica de los momentos de todos los pares de fuerzas dados y reactivos respecto al eje geométrico de los elementos. Esta suma deberá ser igual a cero.

La condición de compatibilidad de los desplazamientos estará representada por la suma algebraica de los ángulos de torsión de todos

los tramos, que en virtud de que las secciones extremas no giran, también será nula.

Si uno de los empotramientos de la barra no es rígido, sino elástico, entonces el ángulo de giro de la sección empotrada elástica-

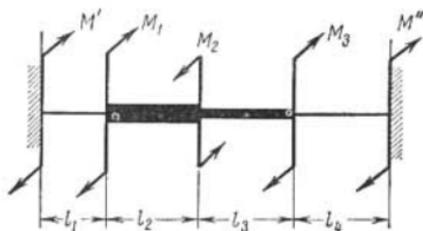


Fig. 45

mente no será ya igual a cero, sino que será proporcional a la magnitud del momento reactivo. Si ninguno de los dos empotramientos es rígido, sino elástico, entonces el ángulo total de torsión deberá ser igual a la diferencia de los ángulos de giro de las secciones empotradas.

**Ejemplo 23.** Dado:  $M$ ,  $d$ ,  $l$  y  $G$  (fig. 46); obtener  $\tau_{\max}$  y  $\varphi_A^*$ .

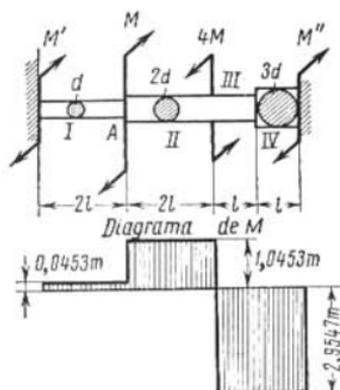


Fig. 46

**Resolución.** En los tramos I, II, III y IV los momentos polares de inercia de las secciones circulares son:

$$I_{p1} = I_p = \frac{\pi d^4}{32}; \quad I_{p_{II}} = I_{p_{III}} = 16I_p; \quad I_{p_{IV}} = 81I_p,$$

y los ángulos de torsión,

$$\varphi_I = \frac{M' 2l}{GI_p}; \quad \varphi_{II} = \frac{(M' + M) 2l}{16GI_p};$$

$$\varphi_{III} = \frac{(M' + M - 4M) l}{16GI_p}; \quad \varphi_{IV} = \frac{(M' + M - 4M) l}{81GI_p}.$$

Partiendo de la condición de que el ángulo de giro mutuo de las secciones extremas es nulo, obtendremos,

$$\varphi_I + \varphi_{II} + \varphi_{III} + \varphi_{IV} = \frac{l}{GI_p} \left[ 2M' + 2(M' + M) \frac{1}{16} + (M' - 3M) \frac{1}{16} + (M' - 3M) \frac{1}{81} \right] = 0.$$

De aquí se obtiene,

$$M' = \frac{129}{2851} M \approx 0,0453M.$$

De la ecuación de la estática hallamos  $M'' = 3M - M' = 2,9547 M$ .

El diagrama de los momentos torsores está dado en la figura 46. Puesto que,

$$\frac{M_{I_{III}}}{M_{I_I}} = \frac{2,9547}{0,0453} \approx 65, \quad \text{y} \quad \frac{W_{P_{III}}}{W_{P_I}} = \frac{\pi (2d)^3}{\pi d^3} = 8,$$

la tensión tangencial máxima ocurrirá en la sección de diámetro  $2d$  en el tramo *III*.

La magnitud de la tensión tangencial se obtendrá por la fórmula

$$\tau_{\max} = \frac{M_{I_{III}}}{W_{P_{III}}} = \frac{2,9547M}{\pi d^3} \cdot 2 \approx 5,909 \frac{M}{\pi d^3} \approx 1,88 \frac{M}{d^3}.$$

El ángulo de giro en grados de la sección *A* es el siguiente,

$$\varphi_A = \frac{M_{I_I} 2l}{GI_p} \cdot \frac{180}{\pi} = \frac{0,0453M \cdot 2l \cdot 180 \cdot 32}{G\pi d^4 \pi} \approx 52,2 \frac{M}{Gd^4}.$$

**Ejemplo 24.** Dado:  $m = 80 \text{ N} \cdot \text{m/m}$ ,  $M = 400 \text{ N} \cdot \text{m}$ ,  $a = 0,5 \text{ m}$ ,  $[\tau] = 40 \text{ MN/m}^2$  y  $G = 8 \cdot 10^4 \text{ MN/m}^2$  (fig. 47); determinar  $d$  y construir el gráfico de  $\varphi$ .

*Resolución.* La ecuación de equilibrio es la siguiente:

$$M' + ma - M + M'' = 0$$

y la condición de los desplazamientos,

$$\varphi_I + \varphi_{II} + \varphi_{III} = 0.$$

Puesto que la rigidez de la sección de la barra es constante, la última ecuación se podrá escribir en la forma siguiente,

$$M'a + m \int_0^a x dx + (M' + ma)a + (M' + ma - M)a = 0,$$

de donde se obtiene  $3M'a = Ma - 2ma^2 - m \frac{a^2}{2}$

y

$$M' = \frac{1}{3} (M - 2,5ma) = \frac{1}{3} (400 - 2,5 \cdot 80 \cdot 0,5) \approx 10 \text{ N.m.}$$

Introduciendo  $M'$  en la ecuación de equilibrio hallaremos,

$$M'' = \frac{1}{3} (2M - 0,5ma) = \frac{1}{3} (800 - 0,5 \cdot 80 \cdot 0,5) \approx 260 \text{ N.m.}$$

Construimos ahora el diagrama de los momentos torsores (fig. 47), del que se desprende que  $\max M_t = 260 \text{ N} \cdot \text{m}$ .

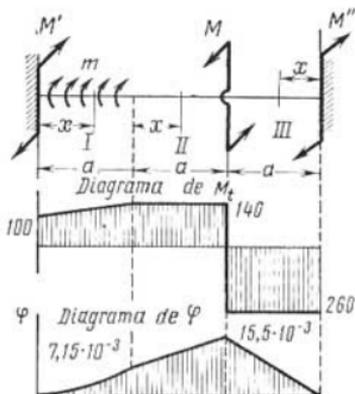


Fig. 47

Por la fórmula

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} \geq \frac{\max M_t}{[\tau]}$$

obtenemos,

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 \max M_t}{\pi [\tau]}} \approx 1,72 \sqrt[3]{\frac{\max M_t}{[\tau]}} = 1,72 \sqrt[3]{\frac{260}{400 \cdot 10^6}} \approx$$

$$\approx 3,2 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 3,2 \text{ cm.}$$

Hallamos los ángulos de torsión,

$$\varphi_{Ix} = \frac{1}{GI_p} \int_0^x (M' + mx) dx = \frac{M'x + \frac{mx^2}{2}}{GI_p};$$

$$\varphi_{I_{x=0}} = 0; \quad \varphi_{I_{x=a}} = \frac{M'a + \frac{ma^2}{2}}{GI_p} = \frac{100 \cdot 0,5 + \frac{1}{2} 80 \cdot 0,25}{8 \cdot 10^{10} \cdot 0,1 \cdot 3,2^4 \cdot 10^{-8}} \approx 0,00715;$$

$$\varphi_{IIx} = \varphi_{I_{x=a}} + \frac{M' + ma}{GI_p} x; \quad \varphi_{II_{x=0}} = \varphi_{I_{x=a}};$$

$$\varphi_{II_{x=a}} = \varphi_{I_{x=a}} + \frac{M'a + ma^2}{GI_p} = 0,00715 + \frac{100 \cdot 0,5 + 80 \cdot 0,25}{8 \cdot 10^{10} \cdot 0,1 \cdot 3,2^4 \cdot 10^{-8}} =$$

$$= 0,00715 + 0,00835 = 0,0155; \quad \varphi_{IIIx} = \frac{M''x}{GI_p}; \quad \varphi_{III_{x=0}} = 0;$$

$$\varphi_{III_{x=a}} = \frac{M''a}{GI_p} = \frac{26 \cdot 10^2 \cdot 50}{8 \cdot 10^5 \cdot 0,1 \cdot 3,2^4} \approx 0,0155.$$

Construimos con los resultados obtenidos el diagrama de los ángulos de torsión (fig. 47).

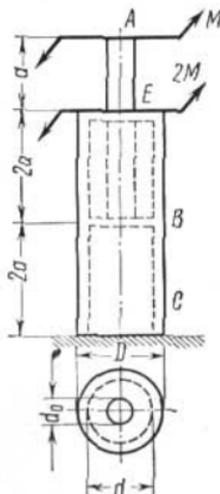


Fig. 48

**Ejemplo 25.** Un tubo de longitud  $4a$ , de diámetros  $D$  y  $d$ , está empotrado en su extremo inferior  $C$  (fig. 48). En la parte superior del tubo se introduce el extremo inferior de longitud  $2a$  de una barra de sección circular de diámetro  $d_0 = \frac{D}{2} = \frac{d}{16}$ . El extremo inferior  $B$  de la barra se empotra rigidamente en el tubo y el extremo superior  $E$  del tubo, en la barra. Alrededor del eje geométrico del sistema, en la sección extrema  $A$  de la parte sobresaliente de la barra actúa un par de momento  $M$  y sobre la sección superior  $E$  del tubo, un par de momento  $2M$ .

Determinar  $\tau_{\max I}$  en la barra,  $\tau_{\max II}$  en el tubo y  $\varphi_{A-C}$ , si se conoce el valor de  $G$  del material de la barra y del tubo.

**Resolución.** En el tramo  $A - E$  de la barra el momento torsor es,

$$M_{t_{AE}} = M.$$

Puesto que en el empotramiento  $C$  el momento reactivo  $M_C = 3M$ , el momento torsor en el tramo  $B - C$  del tubo será  $M_{t_{BC}} = 3M$ .

El sistema hiperestático constituido por la barra y el tubo en el tramo  $B - E$  se somete, en sus extremos, a la acción de los momentos  $3M$ . De la ecuación de la estática se obtiene  $M_I + M_{II} = 3M$ , siendo  $M_I$ , el momento que se transmite por la barra y  $M_{II}$  el que se transmite por el tubo.

De la condición de compatibilidad de los desplazamientos se deduce que los ángulos de torsión de la barra  $\varphi_I$  y del tubo  $\varphi_{II}$  en el tramo  $B - E$  serán iguales, es decir,

$$\frac{M_I 2a}{GI_{pI}} = \frac{M_{II} 2a}{GI_{pII}},$$

de donde se obtiene,

$$M_{II} = M_I \frac{I_{pII}}{I_{pI}}.$$

Introduciendo este valor en la ecuación de la estática hallaremos,

$$M_I \left( 1 + \frac{I_{pII}}{I_{pI}} \right) = 3M \quad \text{ó} \quad M_I = \frac{3M}{1 + \frac{I_{pII}}{I_{pI}}}; \quad M_{II} = \frac{3M}{1 + \frac{I_{pI}}{I_{pII}}}.$$

Puesto que,

$$I_{pI} = \frac{\pi d_0^4}{32}, \quad \text{y} \quad I_{pII} = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4) = \frac{16\pi d_0^4}{32} (1 - 0,8^4) \approx 9,45 I_{pI},$$

resulta,

$$M_I = \frac{3M}{1 + 9,45} \approx 0,287M \quad \text{y} \quad M_{II} \approx 2,713M.$$

Las tensiones tangenciales máximas serán:

en el tramo  $A - E$  de la barra,  $\tau_{\max I} = \frac{M}{W_{pI}} = \frac{16M}{\pi d_0^3} \approx 5,09 \frac{M}{d_0^3}$ , en el tramo  $B - C$  del tubo

$$\tau_{\max II} = \frac{3M}{\frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4)} = \frac{3M}{\frac{8\pi d_0^3}{16} \cdot 0,58} \approx 0,636 \tau_{\max I} = 3,24 \frac{M}{d_0^3}.$$

El ángulo de giro de la sección  $A$  respecto a la sección  $C$  es,

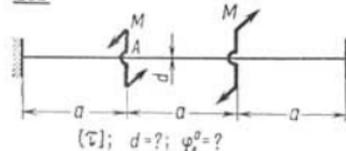
$$\begin{aligned} \varphi_{A-C} = \varphi_{A-E} + \varphi_{E-B} + \varphi_{B-C} &= \frac{Ma}{GI_{pI}} + 0,287 \frac{M2a}{GI_{pI}} + \\ &+ \frac{3M2a}{G \cdot 9,45 \cdot I_{pI}} = 2,21 \frac{Ma}{GI_{pI}} \approx 22,5 \frac{Ma}{Gd_0^4}. \end{aligned}$$

**Problemas 202-221.** Determinar las magnitudes indicadas en las condiciones de los problemas.

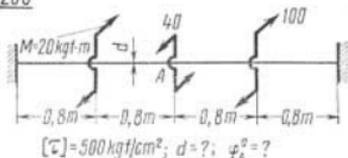
En los problemas 216-221 se debe considerar que  $E = 2 \cdot 10^6 \text{ kgf/cm}^2$  y  $G = 8 \cdot 10^3 \text{ kgf/cm}^2$ .

En el problema 215 los tubos cilíndricos están situados concéntricamente con cierta holgura y se empotran rígidamente el uno con el otro solamente en sus extremos.

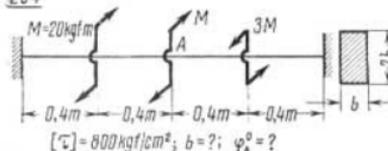
202



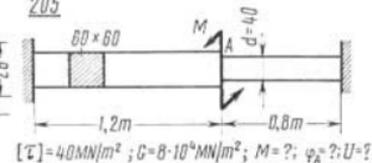
203



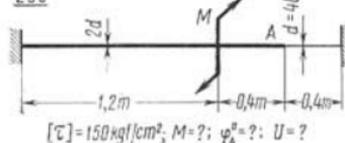
204



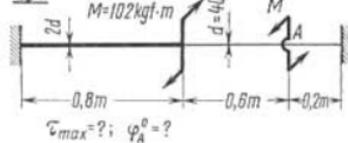
205



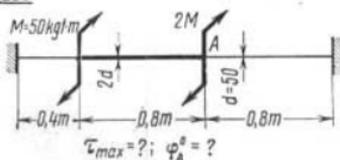
206



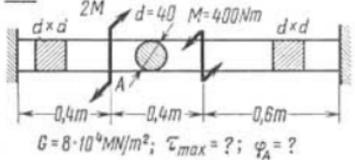
207



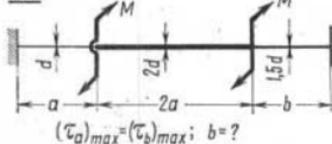
208



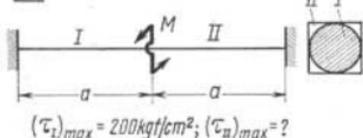
209

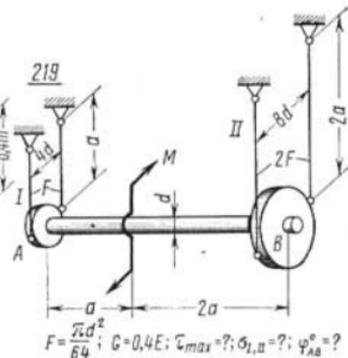
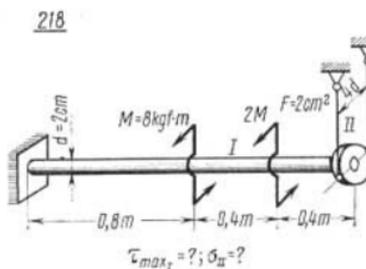
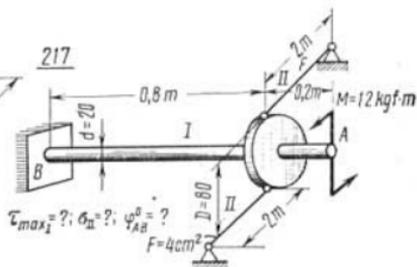
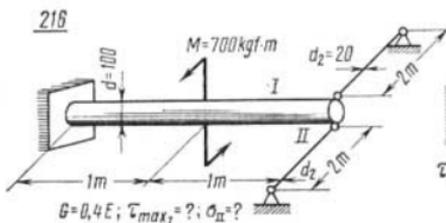
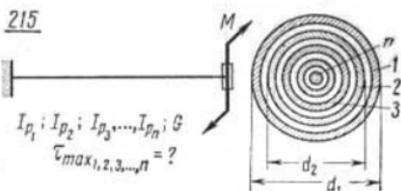
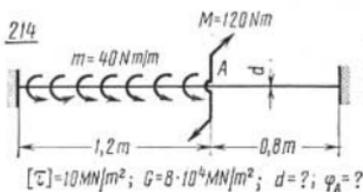
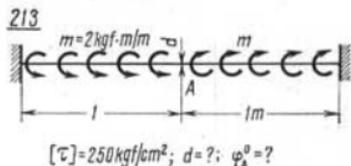
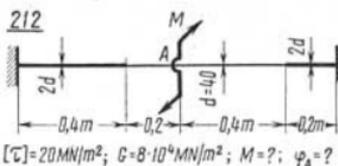


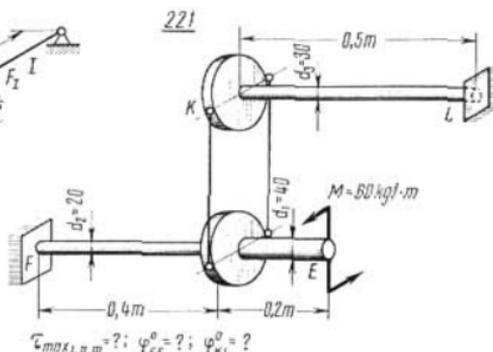
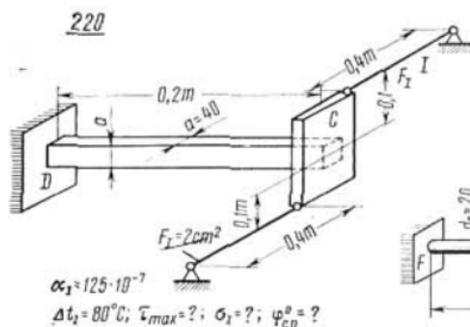
210



211







## VIII. FLEXION RECTA TRANSVERSAL

### § 1. Fuerza cortante y momento flector

La fuerza cortante y el momento flector se determinan por el método de las secciones.

La magnitud de la fuerza cortante  $Q_x$  en una sección arbitraria de la viga es igual a la suma algebraica de las proyecciones de todas las fuerzas exteriores (concentradas y distribuidas), que actúan sobre la viga a uno de los lados de la sección en cuestión, sobre uno de los ejes centrales principales de inercia de la sección.

La magnitud del momento flector  $M_x$  en una sección arbitraria de la viga es igual a la suma algebraica de los momentos de todas las fuerzas exteriores aplicadas sobre la viga, a uno de los lados de la sección en cuestión, respecto a uno de los ejes principales centrales de inercia de la sección.

Se consideran positivos o negativos los valores de  $Q$  y  $M$  según correspondan o no a las direcciones indicadas en la figura 49.

Si la carga distribuida se termina antes de llegar a la sección que se analiza (fig. 50), entonces se la puede sustituir por una fuerza concentrada numéricamente igual al área del diagrama de la carga y aplicada en la sección que pasa por el centro de gravedad del área del diagrama de la carga distribuida.

En el caso de cargas que varían linealmente, las áreas y las posiciones de los centros de gravedad de las partes separadas se obtienen muy fácilmente por las conocidas fórmulas geométricas. Si la carga varía según una parábola cuadrática  $ABC$  (fig. 51), entonces conviene tener en cuenta los resultados siguientes de la geometría

analítica. El área de la parábola  $ABC$  es  $\frac{2}{3}lh$ ; el centro de gravedad  $O$  de este área descansa sobre la vertical  $BD$ ; el área del segmento parabólico  $FBE$   $\frac{2}{3}l_1h_1$  su centro de gravedad  $O_1$  se encuentra a una distan-

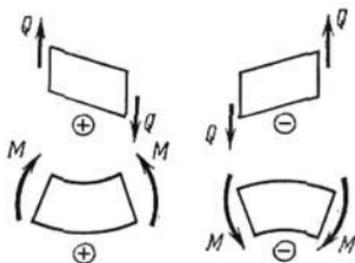


Fig. 49

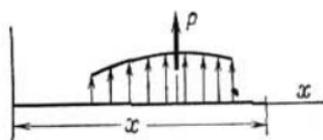


Fig. 50

cia  $\frac{1}{2}l_1$  de la vertical  $FH$ ; el área de la mitad de la parábola  $ABD$  y  $DBC$  es  $\frac{2}{3} \cdot \frac{l}{2}h = \frac{1}{3}lh$ , su centro de gravedad  $O_2$  se encuentra a una distancia  $\frac{3}{8} \cdot \frac{l}{2} = \frac{3}{16}l$  de la línea  $BD$  y el área del triángulo rectán-

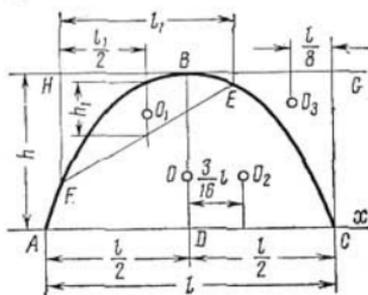


Fig. 51

gulo  $CBG$  de hipotenusa parabólica  $BC$  es  $\frac{1}{3} \cdot \frac{l}{2}h = \frac{1}{6}l \cdot h$ , su centro de gravedad  $O_3$  se encuentra a una distancia  $\frac{1}{4} \cdot \frac{l}{2} = \frac{1}{8}l$  de la vertical  $CG$ .

Se puede recomendar aproximarse a la sección por el lado de la viga que está menos solicitada y construir primero el diagrama de  $Q$  y después el de  $M$ .

De la definición de  $Q$  y  $M$ , de acuerdo con la regla de los signos admitida, se desprende que en el caso de vigas de sollicitación y apo-

yo simétricos, el diagrama de la fuerza cortante será antisimétrico y el diagrama de los momentos flectores, simétrico (fig. 52, a).

En el caso de vigas antisimétricas, al revés, el diagrama de las fuerzas cortantes será simétrico y el de los momentos flectores, antisimétrico (fig. 52, b).

De la definición de  $Q$  se deduce que en la sección donde se aplica una fuerza concentrada, en el diagrama de la fuerza cortante, deberá aparecer un salto brusco de magnitud igual a la de la fuerza exterior (fig. 52, a y 52, b).

De la definición del momento flector  $M$  se desprende que en la sección donde se aplica un par de fuerzas, en el diagrama de los momentos flectores, deberá aparecer un salto brusco de magnitud igual a la de este par de fuerzas exterior (fig. 53).

En el caso de vigas que no están solicitadas por pares de fuerzas

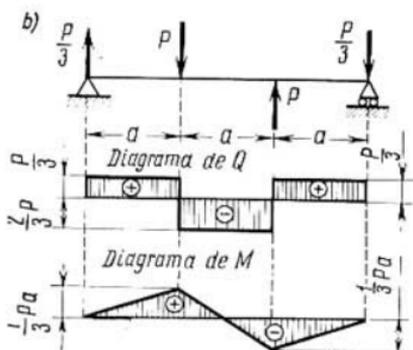
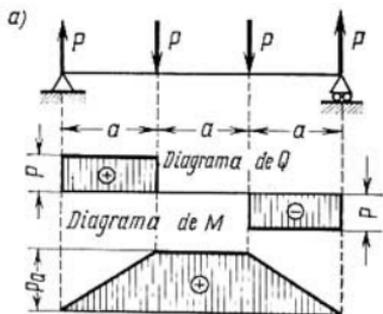


Fig. 52

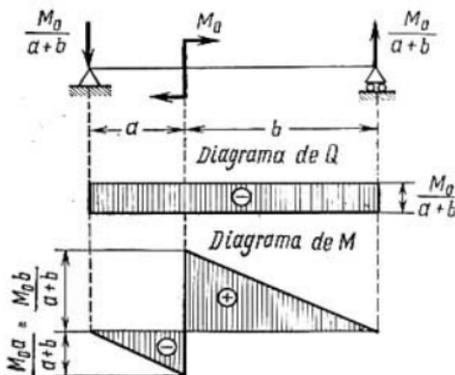


Fig. 53

distribuidos que originan flexión, al construir los diagramas de  $Q$  y  $M$ , así como al comprobarlos, se debe emplear las relaciones diferenciales (90) y (91) entre  $M$ ,  $Q$  y  $q$  y las que de éstas se deducen,

$$Q = \frac{dM}{dx}, \quad (90)$$

$$q = \frac{dQ}{dx} = \frac{d^2M}{dx^2}. \quad (91)$$

Deducciones esenciales de las relaciones (90) y (91):

1. La fuerza cortante se interpreta geoméricamente como el tangente del ángulo entre la tangente al diagrama de los momentos flectores en la sección dada y el eje  $x$  (eje de la viga) y la intensidad de la carga distribuida, como el tangente del ángulo entre este mismo eje y la tangente al diagrama de la fuerza cortante.

2. Si las funciones de variación de las cargas distribuidas son algebraicas, entonces en cada tramo de la viga, la función de la fuerza cortante será un orden superior al de la función de la carga distribuida en este tramo y el orden de la función del momento flector, una unidad superior al de la función de la fuerza cortante.

3. En la sección de la viga donde la fuerza cortante es igual a cero el momento flector tiene su valor extremo y en la sección donde la fuerza cortante súbitamente pasa por su valor nulo, el gráfico de los momentos flectores pierde su monotonía.

4. En la sección de la viga donde la fuerza cortante varía súbitamente, pero no pasa por el valor nulo, el diagrama del momento flector tiene un pico.

5. Si en toda la longitud de la viga, o en una de sus partes, el diagrama de las fuerzas cortantes es antisimétrico, entonces en el correspondiente tramo el gráfico de los momentos flectores será simétrico y viceversa.

6. En cada tramo de la viga la variación de la magnitud del momento flector entre dos secciones cualquiera es igual al área del diagrama de las fuerzas cortantes entre estas dos secciones\*.

7. Si el eje  $x$  está dirigido hacia la izquierda desde el extremo derecho de la viga, entonces

$$Q = -\frac{dM}{dx}.$$

8. La convexidad del diagrama curvilíneo de los momentos flectores va dirigida al encuentro de la carga distribuida.

Es útil tener en cuenta que en la sección transversal que coincide con el eje de simetría de la viga, la fuerza cortante (fuerza antisimétrica) es igual a cero y en la sección que coincide con el eje de antisimetría de la viga, el momento flector (momento simétrico) será igual a cero. Si en el eje de simetría sobre la viga actúa una fuerza concentrada exterior, entonces las fuerzas cortantes en las secciones a la izquierda y a la derecha del eje de simetría serán numéricamente iguales a la mitad de esta fuerza.

#### Construcción de los diagramas de $Q$ y $M$ partiendo de sus ecuaciones

**Ejemplo 26.** Dado:  $M_1 = 2 \text{ tf}\cdot\text{m}$ ,  $M_2 = 12 \text{ tf}\cdot\text{m}$ ,  $q_1 = 2 \text{ tf/m}$ ,  $q_2 = 4 \text{ tf/m}$ ,  $P = 12 \text{ tf}$ ,  $a = 3 \text{ m}$ ,  $b = 2 \text{ m}$ ,  $c = 1 \text{ m}$ ,  $d = 4 \text{ m}$  (fig. 54). Construir los diagramas de  $Q$  y  $M$ .

\* Siempre y cuando no actúan sobre este tramo pares concentrados exteriores (*N. del T.*).

*Resolución.* De las ecuaciones de la estática hallamos las reacciones  $A$  y  $B$  en los apoyos como la suma de los momentos respecto a los apoyos derecho e izquierdo:

$$A(a + b + c + d) - q_1 b \left( \frac{b}{2} + c + d \right) - M_2 + Pd - q_2 d \frac{d}{2} = 0;$$

$$A \cdot 10 - 2 \cdot 2 \cdot 6 - 12 + 12 \cdot 4 - 4 \cdot 4 \cdot 2 = 0; \quad A = 2 \text{ tf};$$

$$B(d + c + b + a) - q_2 d \left( \frac{d}{2} + c + b + a \right) + P(c + b + a) + M_2 - q_1 b \left( \frac{b}{2} + a \right) = 0;$$

$$B \cdot 10 - 4 \cdot 4 \cdot 8 + 12 \cdot 6 + 12 - 2 \cdot 2 \cdot 4 = 0; \quad B = 6 \text{ tf}.$$

Para simplificar las expresiones que determinan  $Q$  y  $M$ , analizamos las partes izquierdas, cuando las secciones se encuentran en

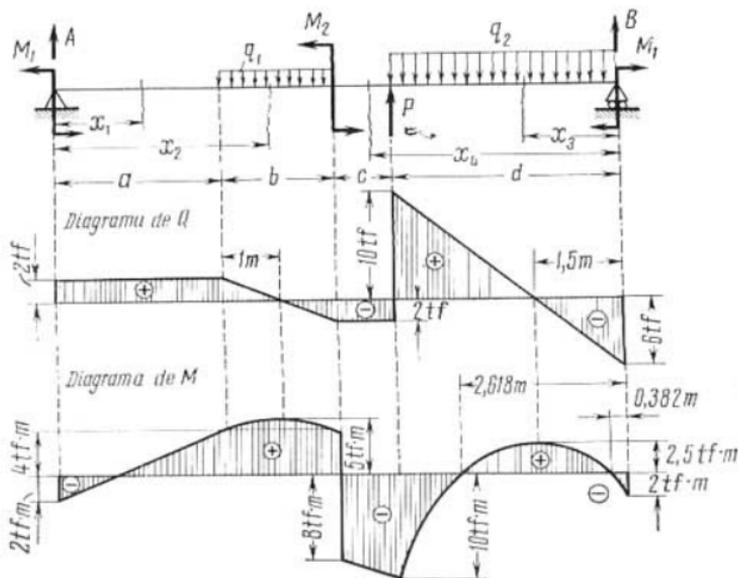


Fig. 54

los tramos de longitud  $a$  y  $b$ , y las derechas cuando se encuentran en los tramos  $c$  y  $d$

$$0 \leq x_1 \leq a;$$

$$Q_{x_1} = A = 2 \text{ tf}; \quad M_{x_1} = -M_1 + Ax_1 = -2 + 2x_1;$$

$$M_{x_1=0} = -2 \text{ tf}\cdot\text{m};$$

$$M_{x_1=a=3} = -2 + 2 \cdot 3 = 4 \text{ tf} \cdot \text{m};$$

$$a \leq x_2 \leq a + b;$$

$$Q_{x_2} = A - q_1(x_2 - a) = 2 - 2(x_2 - 3); \quad Q_{x_2=a=3} = 2 \text{ tf};$$

$$Q_{x_2=a+b=5} = 2 - 2 \cdot 2 = -2 \text{ tf};$$

$$M_{x_2} = -M_1 + Ax_2 - q_1 \frac{(x_2 - a)^2}{2} = -2 + 2x_2 - (x_2 - 3)^2;$$

$$M_{x_2=a=3} = -2 + 6 = 4 \text{ tf} \cdot \text{m}; \quad M_{x_2=a+b=5} =$$

$$= -2 + 2 \cdot 5 - 2^2 = 4 \text{ tf} \cdot \text{m}.$$

Puesto que,

$$Q_{x_2} = -2x_2 + 8 = 0 \text{ cuando } x_2 = 4 \text{ m},$$

$$\text{resulta que } \max M_{x_2=4} = -2 + 2 \cdot 4 - 1 = 5 \text{ tf} \cdot \text{m}.$$

$$0 \leq x_3 \leq d;$$

$$Q_{x_3} = -B + q_2x_3 = -6 + 4x_3; \quad Q_{x_3=0} = -6 \text{ tf};$$

$$Q_{x_3=d=4} = -6 + 4 \cdot 4 = 10 \text{ tf};$$

$$M_x = -M_1 + Bx_3 - q_2 \frac{x_3^2}{2} = -2 + 6x_3 - 2x_3^2;$$

$$M_{x_3=0} = -2 \text{ tf} \cdot \text{m};$$

$$M_{x_3=d=4} = -2 + 6 \cdot 4 - 2 \cdot 4^2 = -10 \text{ tf} \cdot \text{m}.$$

Puesto que,

$$Q_{x_3} = -6 + 4x_3 = 0, \text{ cuando } x_3 = \frac{3}{2} \text{ m, resulta que}$$

$$\max M_{x_3=\frac{3}{2}} = -2 + 6 \cdot \frac{3}{2} - 2 \cdot \frac{9}{4} = 2,5 \text{ tf} \cdot \text{m};$$

$$d \leq x_4 \leq d + c;$$

$$Q_{x_4} = -B + q_2d - P = -6 + 4 \cdot 4 - 12 = -2 \text{ tf};$$

$$M_{x_4} = -M_1 + Bx_4 - q_2d \left( x_4 - \frac{d}{2} \right) + P(x_4 - d) =$$

$$= -2 + 6x_4 - 16(x_4 - 2) + 12(x_4 - 4);$$

$$M_{x_4=d=4} = -2 + 6 \cdot 4 - 16 \cdot 2 = -10 \text{ tf} \cdot \text{m};$$

$$M_{x_4=d+c=5} = -2 + 6 \cdot 5 - 16 \cdot 3 + 12 \cdot 1 = -8 \text{ tf} \cdot \text{m}.$$

Veamos en que secciones  $M_{x_3} = -2 + 6x_3 - 2x_3^2 = 0$ ;

$$x_3^2 - 3x_3 + 1 = 0; \quad x_3 = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 1} = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1,5 \pm 1,118;$$

$$x_{3_1} = 2,618 \text{ m}, \quad x_{3_2} = 0,382 \text{ m}.$$

Con los resultados obtenidos se construyen los diagramas de  $Q$  y  $M$  (fig. 54).

**Ejemplo 27.** Dado:  $q, l, P = 0,2 ql$  (fig. 55).

Determinar la longitud  $a$  más favorable del voladizo y construir los diagramas de  $Q$  y  $M$ .

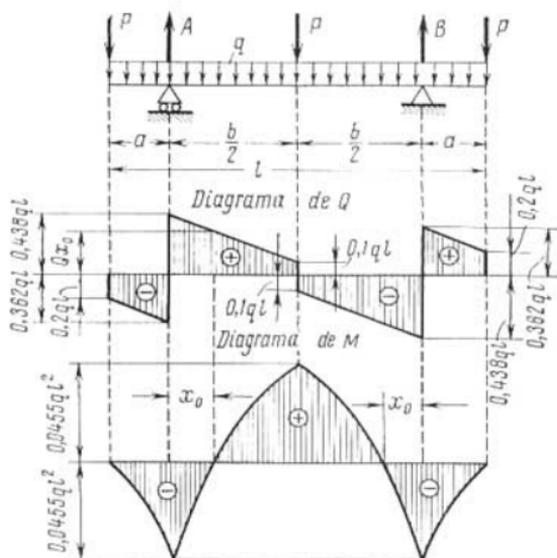


Fig. 55

**Resolución.** Se considera *la más favorable la longitud del voladizo* para la cual el momento flector máximo adquiere el valor mínimo posible. La longitud más favorable del voladizo se obtiene de la condición de igualdad de los valores absolutos del momento flector en la sección que se encuentra sobre el apoyo ( $M_{ap}$ ) y el momento flector máximo en el vano de la viga ( $M_{max}$ ).

Puesto que la viga es simétrica respecto a la sección media,  $M_{max}$  en el vano ocurrirá en la sección media y las magnitudes de los momentos flectores  $M_{ap}$  en las secciones sobre los apoyos serán iguales.

La condición que sirve para determinar la longitud del voladizo más conveniente se escribe así,  $|M_{ap}| = |M|_{max}$ . Hallemos ahora los momentos. Las reacciones en los apoyos son:

$$A = B = \frac{3}{2}P + \frac{ql}{2}.$$

$$\begin{aligned} M_{ap} &= -Pa - \frac{qa^2}{2}; \quad M_{max} = -P \frac{l}{2} - \frac{ql^2}{8} + A \frac{l-2a}{2} = \\ &= -\frac{Pl}{2} - \frac{ql^2}{8} + \left(\frac{3}{2}P + \frac{ql}{2}\right) \frac{l-2a}{2} = \\ &= \frac{Pl}{4} + \frac{ql^2}{8} - \frac{3Pa}{2} - \frac{qla}{2}. \end{aligned}$$

De la condición  $|M_{ap}| = |M|_{max}$  se obtiene,

$$Pa + \frac{qa^2}{2} = \frac{Pl}{4} + \frac{ql^2}{8} - \frac{3Pa}{2} - \frac{qla}{2}$$

o sea

$$\frac{a^2}{l^2} + \left(\frac{5P}{ql} + 1\right) \frac{a}{l} - \frac{1}{4} \left(\frac{2P}{ql} + 1\right) = 0.$$

De aquí se obtiene,

$$\frac{a}{l} = \frac{1}{2} \left[ -\left(\frac{5P}{ql} + 1\right) + \sqrt{\left(\frac{5P}{ql} + 1\right)^2 + \frac{2P}{ql} + 1} \right].$$

El signo «menos» ante la raíz cuadrada no se considera puesto que  $\frac{a}{l}$  no puede ser negativo.

Construyamos los diagramas de  $Q$  y  $M$ .

Puesto que  $\frac{P}{ql} = 0,2$ ,

$$a = \frac{\sqrt{5,4} - 2}{2} l \approx 0,162l, \quad b = l - 2a \approx l(1 - 0,324) = 0,676l$$

$$\text{y } A = B = \frac{3}{2} 0,2ql + \frac{ql}{2} = 0,8ql.$$

Como sobre la longitud de la viga actúa una carga uniformemente distribuida, en todos los tramos el diagrama de  $Q$  será lineal y el de  $M$ , parabólico. Debido a la simetría de la viga, el diagrama de  $Q$  será antisimétrico y el de  $M$ , simétrico.

En el extremo libre izquierdo de la viga  $Q = -P = -0,2 \text{ ql}$ .  
 En la sección extrema derecha del voladizo izquierdo,

$$Q = -P - qa \approx -(0,2 + 0,162) \text{ ql} = -0,362 \text{ ql}.$$

Sobre el apoyo, en el diagrama de  $Q$ , aparece un salto brusco debido a la reacción  $A$ . Por lo tanto, en el extremo izquierdo del vano la de viga obtendremos,

$$Q = 0,362 \text{ ql} + 0,8 \text{ ql} = 0,438 \text{ ql}.$$

Al acercarnos a la sección media de la viga por la izquierda

$$Q = -0,2 \text{ ql} + 0,8 \text{ ql} - 0,5 \text{ ql} = 0,1 \text{ ql}.$$

Con los valores obtenidos se construye el diagrama de  $Q$  (fig. 55).

En el extremo izquierdo libre de la viga el momento flector es  $M = 0$  y en la sección sobre el apoyo,

$$M_{ap} \approx -0,2 \text{ ql} \cdot 0,162 \text{ l} - \frac{q}{2} (0,162 \text{ l})^2 = -0,0455 \text{ ql}^2.$$

En la sección media,

$$M_{max} = |M_{ap}| = 0,0455 \text{ ql}^2.$$

El valor de  $x_0$  para el cual en el vano de la viga  $M = 0$  se obtiene de manera siguiente.

De la semejanza de los triángulos hallamos,

$$\frac{Q_{x_0} - 0,1 \text{ ql}}{0,438 \text{ ql} - 0,1 \text{ ql}} = \frac{\frac{b}{2} - x_0}{\frac{b}{2}}$$

ó

$$\frac{Q_{x_0} - 0,1 \text{ ql}}{0,338 \text{ ql}} = \frac{0,338 \text{ l} - x_0}{0,338 \text{ l}},$$

es decir,

$$Q_{x_0} = (0,438 \text{ l} - x_0) q.$$

El área trapezoidal del gráfico de  $Q$  de altura  $x_0$  es igual a la variación de  $M$  al pasar de la sección sobre el apoyo a la que se encuentra a una distancia  $x_0$  del éste, es decir,

$$\frac{0,438 \text{ ql} - Q_{x_0}}{2} \cdot x_0 = 0,0455 \text{ ql}^2$$

ó

$$(0,438 \text{ l} + 0,438 \text{ l} - x_0) x_0 = 0,091 \text{ l}^2,$$

de donde se obtiene,

$$x_0^2 - 0,876 \text{ l} x_0 + 0,091 \text{ l}^2 = 0$$

y

$$x_0 = l(0,438 \pm \sqrt{0,438^2 - 0,091}) = l(0,438 \pm \sqrt{0,101}).$$

Puesto que  $x_0$  no puede ser mayor que  $\frac{b}{2} = 0,338l$ , a las condiciones del problema satisface solamente la raíz  $x_0 = l(0,438 - \sqrt{0,101}) \approx 0,122l$ . Con estos valores se ha constituido el diagrama de  $M$  en la figura 55.

**Ejemplo 28.** Dado:  $P$ ,  $a$  (fig. 56, a). Construir los diagramas de  $Q$  y  $M$ .

*Resolución.* Puesto que en la sección  $B$  que pasa por la articulación flotante el momento flector es nulo, la viga puede ser descompuesta en dos (fig. 56, b): la izquierda  $AB$  y la derecha  $BC$ , en forma de voladizo.

La primera en su extremo derecho  $B$  se apoya sobre el extremo libre  $B$  del voladizo. Estas dos vigas se pueden considerar por separado (fig. 56, c). En la viga  $AB$  las reacciones de apoyo son:  $A = B = P$ . La influencia de esta viga sobre el voladizo se expresa por la acción sobre su extremo izquierdo  $B = P$  dirigida de arriba abajo.

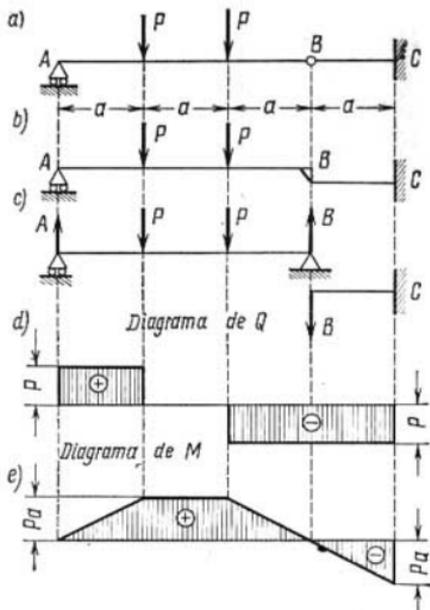


Fig. 56

En adelante el problema se resuelve por separado para cada viga.

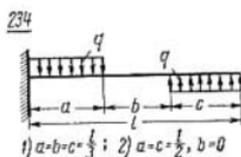
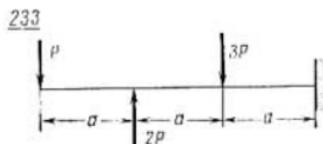
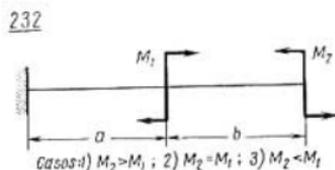
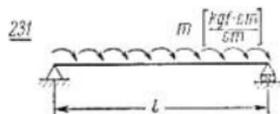
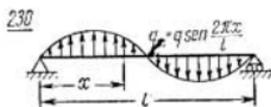
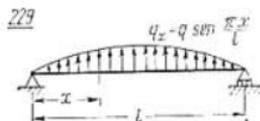
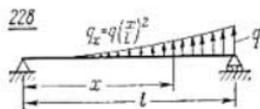
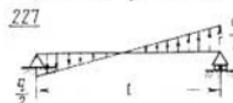
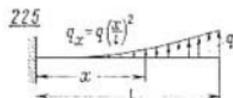
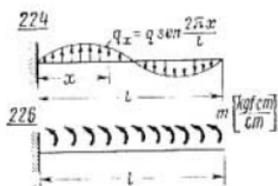
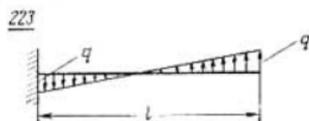
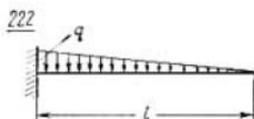
En el tramo izquierdo de la viga  $AB$ ,  $Q = A = P$ . En el tramo central,  $Q = 0$  y en el derecho,  $Q = -P$ . En el voladizo  $Q = -P$ . El diagrama de  $Q$  está representado en la figura 56, d.

En los tramos donde  $Q = \text{const}$  el momento flector varía linealmente y en el tramo donde  $Q = 0$ ,  $M = \text{const}$ . Las variaciones de los momentos flectores  $M$  en los tramos se determinan fácilmente por las áreas del diagrama de  $Q$ . En la figura 56, e está dado el diagrama de los momentos flectores.

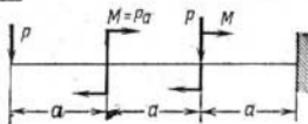
**Problemas 222-270.** Construir los diagramas de la fuerza cortante  $Q$  y los momentos flectores  $M$ .

En los problemas 251, 253, 255, 256 y 260 los diagramas de  $Q$  y  $M$  se deben construir para las longitudes más favorables de los voladizos  $a$ .

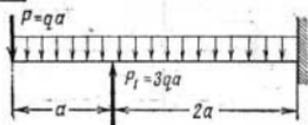
En el problema 251 constrúyase el diagrama de  $M$  sin calcular previamente las reacciones en los apoyos y las fuerzas cortantes  $Q$ .



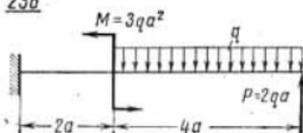
236



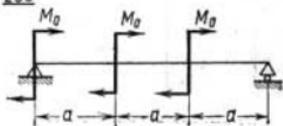
237



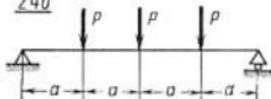
238



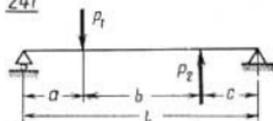
239



240

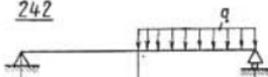


241



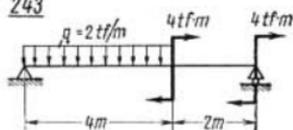
- 1)  $P_1 = P_2 = P$ ,  $a = b = c = \frac{l}{3}$
- 2)  $P_1 = 2P_2$ ,  $a = c$ ,  $b = 2a$

242

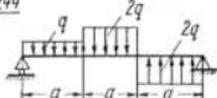


- 1)  $a = b = \frac{l}{2}$ ; 2)  $a = \frac{l}{4}$ ;  $b = \frac{3}{4}l$ ;
- 3)  $a = \frac{3}{4}l$ ,  $b = \frac{l}{4}$

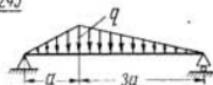
243



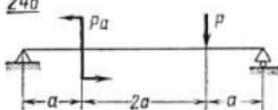
244



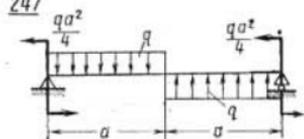
245



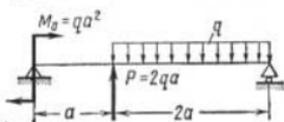
246



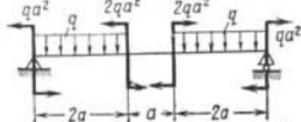
247



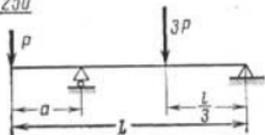
248



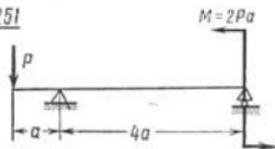
249



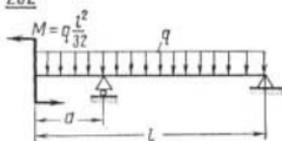
250



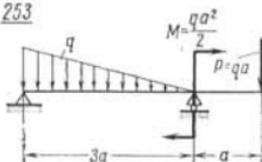
251



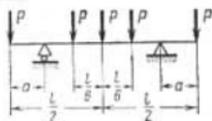
252



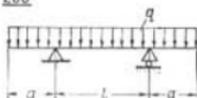
253



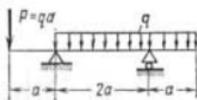
254



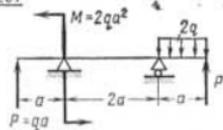
255



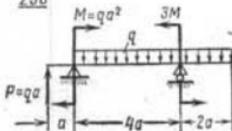
256



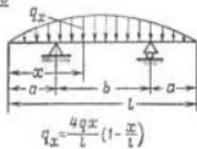
257



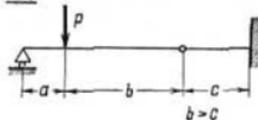
258



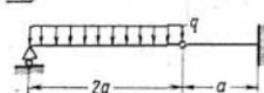
259



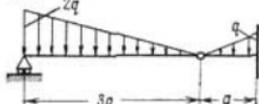
260



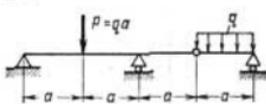
281



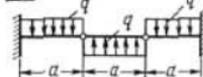
262



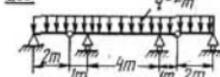
263



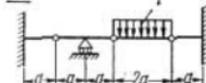
264



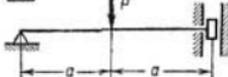
265



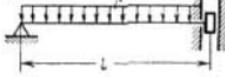
266



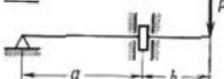
267



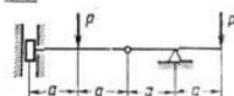
268



269



270



### Construcción de los diagramas de $Q$ y $M$ por el método gráfico.

Los diagramas de los momentos flectores y las fuerzas cortantes se pueden construir también por el método gráfico. Este método es particularmente cómodo, cuando sobre la viga actúa un sistema complejo de fuerzas exteriores.

Realizando minuciosamente los dibujos y escogiendo debidamente las escalas, el método gráfico da una exactitud suficiente para los cálculos prácticos. Este método de construcción de los diagramas de  $Q$  y  $M$  se basa en las conocidas, en la mecánica, propiedades del plano de fuerzas paralelas y del polígono funicular.

Al determinar gráficamente el momento flector  $M_x$  y la fuerza cortante  $Q_x$  en una sección cualquiera de la viga se debe tener en cuenta la escala de las longitudes  $\frac{1}{\xi}$  a que ha sido dibujada la viga (a  $\xi$  cm de longitud de la viga corresponde 1 cm de longitud en el dibujo) y la escala de las fuerzas  $\frac{1}{\eta}$  a que está representado el plano de las fuerzas (a  $\eta$  kgf corresponde 1 cm del vector en el plano de las fuerzas).

Puesto que la distancia polar  $H$  en el plano de las fuerzas se mide en la escala de las fuerzas y el segmento vertical  $y$  entre el polígono funicular y la línea que lo cierra en la sección en cuestión de la viga, en la escala de las longitudes, los valores verdaderos de  $M_x$  y  $Q_x$  serán:

$$M_x = y(\xi) H(\eta) \text{ kgf}\cdot\text{cm}; \quad Q_x = \bar{Q}_x(\eta) \text{ kgf},$$

siendo  $Q_x$  el vector del plano de las fuerzas correspondiente a la suma algebraica de los vectores de las fuerzas exteriores que se encuentran a un lado de la sección en cuestión de la viga.

La línea (líneas) de cierre del polígono funicular se traza (se trazan) de acuerdo a las reglas siguientes, teniendo en cuenta el tipo de apoyo de la viga:

1) en el extremo libre de la viga la línea de cierre es tangente al polígono funicular;

2) en el apoyo articulado situado en el extremo de la viga, así como en la articulación «flotante», la línea de cierre cruza el polígono funicular;

3) en el apoyo articulado situado en el vano de la viga la línea de cierre se quiebra (las líneas de cierre que concurren en la sección de apoyo por la derecha y por la izquierda se cruzan sobre ésta).

Si para la carga dada se construye el polígono funicular y se traza la línea de cierre (líneas de cierre) de acuerdo con el tipo de apoyo de la viga, se obtendrá entonces el gráfico de los momentos flectores.

Servirá de escala la magnitud que indica que a 1 cm del segmento vertical del diagrama corresponde  $H(\xi\eta)$  kgf·cm del momento flector.

Antes de construir el diagrama de las fuerzas cortantes se deben determinar los vectores correspondientes a las reacciones de los apoyos. En el plano de las fuerzas, estos vectores se cortan por líneas paralelas a la de cierre (a las de cierre) del polígono funicular, trazadas (trazada) por el polo. El gráfico de las fuerzas cortantes se construye desplazando los vectores del plano de las fuerzas a los correspondientes puntos de la línea de los valores nulos de  $Q$  paralela al eje geométrico de la viga. La escala de este diagrama es la magni-

**Ejemplo 29.** (fig. 57).

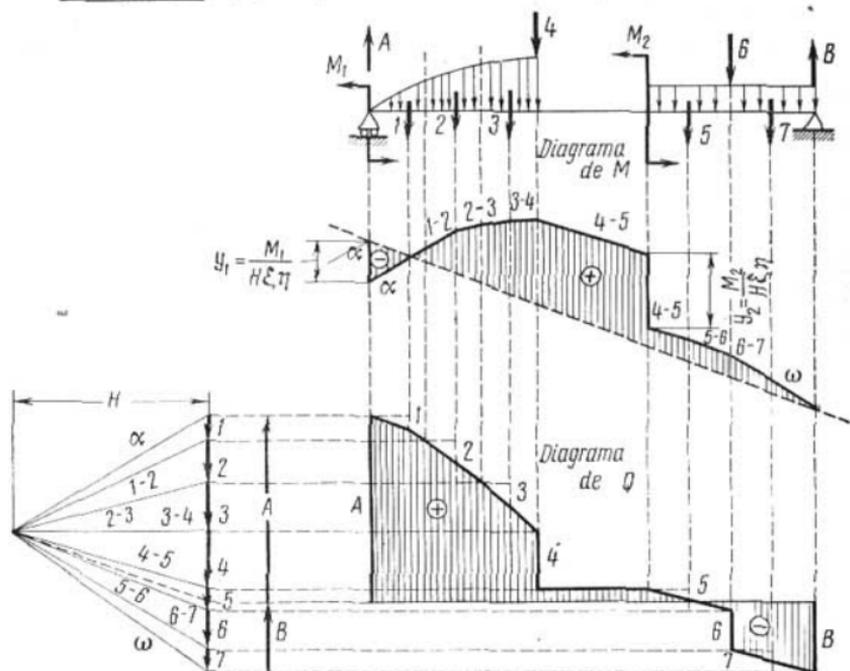


Fig. 57

**Ejemplo 30.** (fig. 58).

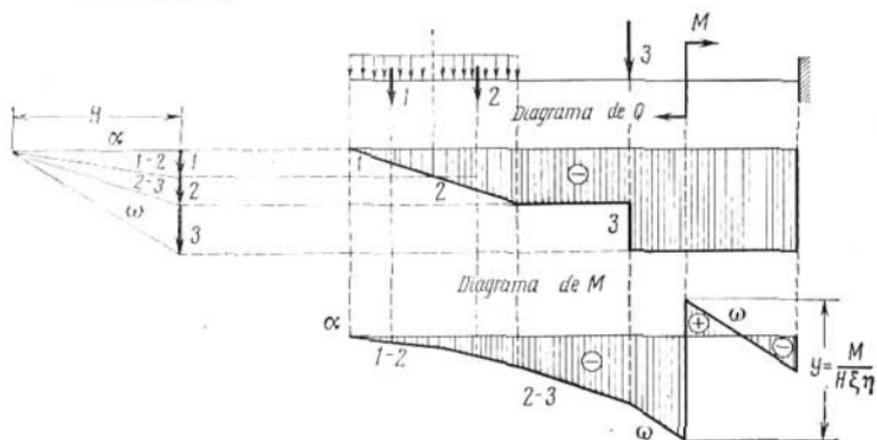


Fig. 58

**Ejemplo 31.** (fig. 59).

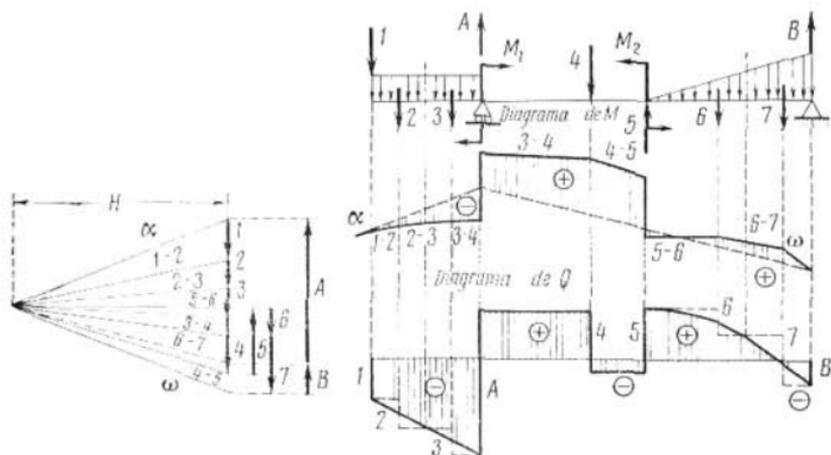


Fig. 59

**Ejemplo 32.** (fig. 60).

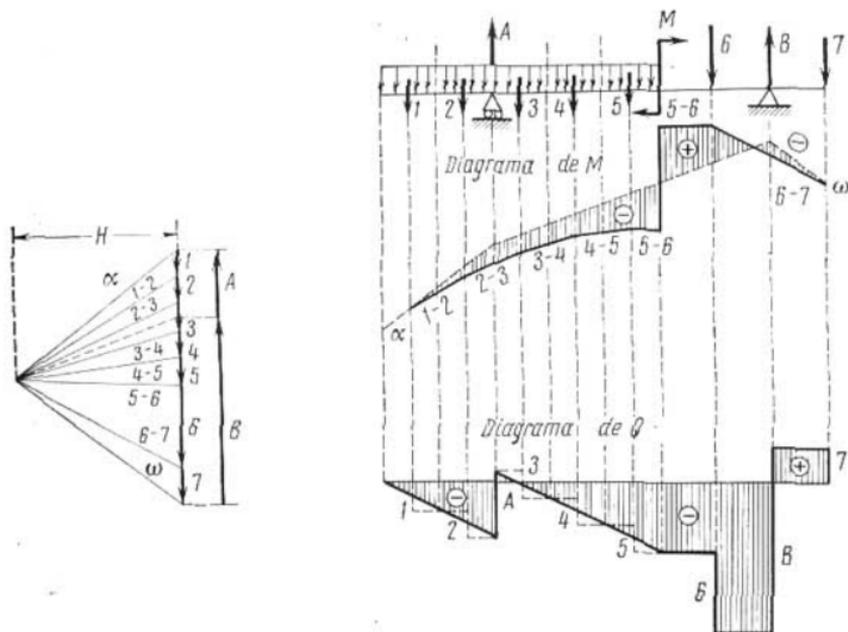


Fig. 60

**Ejemplo 33.** (fig. 61).

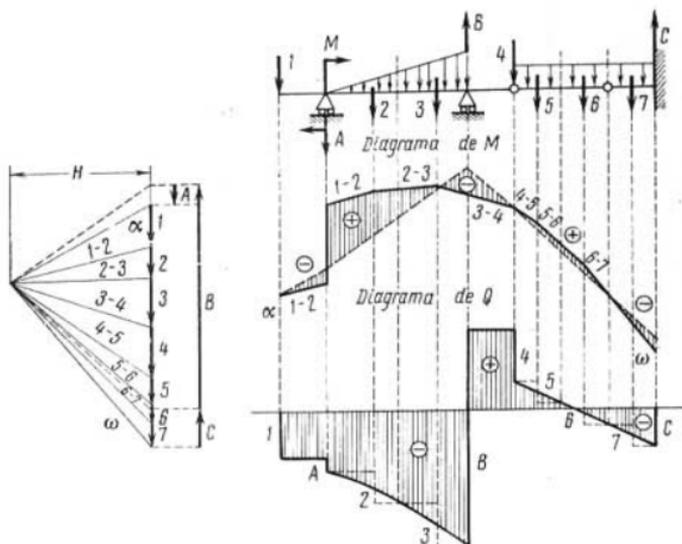


Fig. 61

tud  $\frac{1}{\eta}$  que indica que 1 cm de la longitud del segmento vertical del gráfico corresponde a  $\eta$  kgf de la fuerza cortante.

Cuando sobre la viga actúa una carga distribuida, ésta se divide en partes por líneas perpendiculares al eje geométrico de la viga. El área de cada una de estas partes se representa por un vector aplicado en el centro de gravedad. Con estos vectores, correspondientes a los de las fuerzas concentradas, se construye el plano de las fuerzas y el polígono funicular. El diagrama poligonal de  $M$  obtenido se corrige trazando una curva inscrita en el polígono y el diagrama escalonado de  $Q$ , trazando una recta o curva (según sea el orden de la carga distribuida) que pase por los puntos de los segmentos horizontales del diagrama escalonado que se encuentran enfrente del origen y el extremo de cada parte del área de la carga distribuida.

Cuando sobre la viga actúan momentos concentrados  $M$ , éstos se sitúan en el diagrama de los momentos flectores en las secciones correspondientes en forma de segmentos verticales de longitud  $y = \frac{M}{H(\xi\eta)}$ .

Para coincidir con el método analítico, al construir gráficamente los diagramas de  $M$  y  $Q$  consideraremos magnitudes positivas los segmentos verticales que se encuentran sobre la línea de cierre del polígono funicular en el caso de  $M$  y sobre la paralela al eje

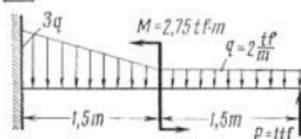
geométrico de la viga que se interpreta como la línea de valores nulos de  $Q$ , en el caso de  $Q$ .

Si acordamos acercarnos a la sección de la viga en cuestión por la izquierda y ubicar los vectores de la carga sobre el plano de las fuerzas en este mismo orden, entonces, para obtener en los diagramas los signos de  $M$  y  $Q$  admitidos, será suficiente situar el polo a la izquierda del plano de las fuerzas.

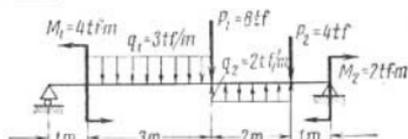
En los ejemplos 29, 30, 31, 32 y 33 se ilustra el método de construcción gráfica de los diagramas de  $M$  y  $Q$  para vigas de diversos apoyos y con diferentes cargas.

**Problemas 271-275.** Construir gráficamente los diagramas de la fuerza cortante  $Q$  y del momento flector  $M$ .

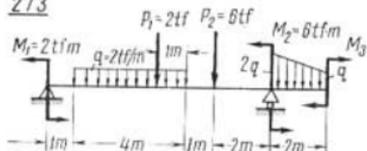
271



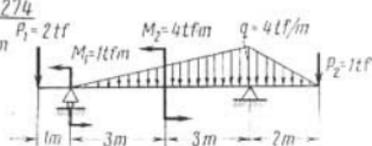
272



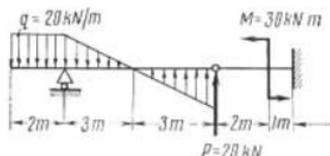
273



274

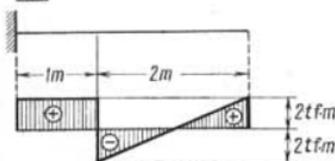


275

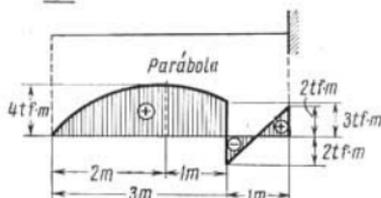


**Problemas 276-285.** Construir los diagramas de las fuerzas cortantes  $Q$  y calcular las cargas que actúan sobre las vigas, dados los diagramas de los momentos flectores  $M$ .

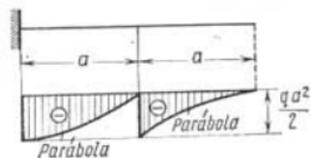
276



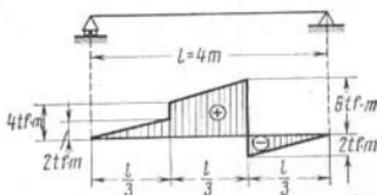
277



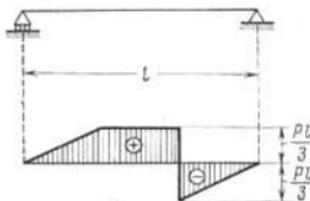
278



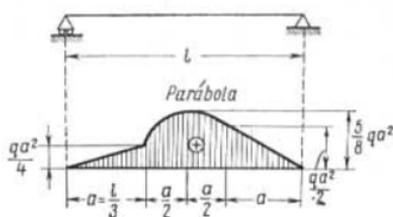
279



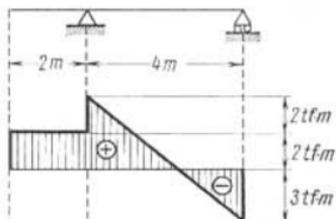
280



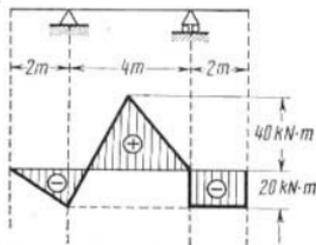
281



282



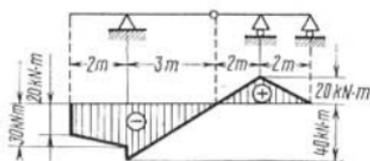
283



284



285



## § 2. Tensiones normales y cálculo de la sección transversal de la viga

Las tensiones normales en un punto cualquiera de la sección transversal de la viga en la flexión se determinan por la fórmula,

$$\sigma = \frac{My}{I}, \quad (92)$$

siendo  $M$  el momento flector en la sección transversal en cuestión,  
 $I$  el momento de inercia del área de esta sección respecto a la línea neutra;  
 $y$  la coordenada del punto en cuestión de la sección hasta la línea neutra.

Las tensiones normales máximas de tracción y compresión en la sección transversal dada de la viga aparecen en los puntos más alejados de la línea neutra.

Se obtienen por las fórmulas,

$$\sigma_{\max} = \frac{M y_1}{I} = \frac{M}{W_1}, \quad (93)$$

$$\sigma_{\min} = -\frac{M y_2}{I} = -\frac{M}{W_2}, \quad (94)$$

siendo

$y_1$  y  $y_2$  las distancias de las fibras traccionadas o comprimidas más alejadas, a la línea neutra;

$W_1 = \frac{I}{y_1}$  y  $W_2 = \frac{I}{y_2}$  los módulos axiales o ecuatoriales de la sección transversal de la viga (o los módulos de la sección transversal de la viga en la flexión) correspondientes respectivamente a la fibra traccionada y a la comprimida.

Si en la sección transversal,

$$y_1 = y_2 = \frac{h}{2},$$

siendo  $h$  la altura de la sección (por ejemplo, en el caso de secciones simétricas respecto a la línea neutra o de secciones cuyo centro de gravedad se encuentra en la mitad de la altura-sección del raíl), entonces,

$$W_1 = W_2 = W = \frac{2I}{h} \quad \text{y} \quad \sigma_{\max} = -\sigma_{\min} = \frac{M}{W}.$$

Las dimensiones necesarias de las secciones transversales de las vigas en la flexión se obtienen partiendo de las tensiones normales que se desarrollan en los puntos más alejados de la línea neutra.

En el caso de vigas cuyo material se resiste igual a la tracción que a la compresión, es decir, cuando  $[\sigma_{\text{trac}}] = [\sigma_{\text{com}}]$ , la fórmula para el cálculo de la sección por flexión se escribe en la forma siguiente:

$$W = \frac{M_{\max}}{[\sigma_f]}, \quad (95)$$

siendo  $W$  el módulo mínimo de la sección transversal de la barra respecto al eje neutro;

$M_{\max}$  el momento flector máximo en valor absoluto;

$[\sigma_f]$  la tensión admisible del material de la viga en la flexión.

El error en la igualdad (95) no deberá superar el  $\pm 5\%$ . Al calcular la sección de vigas laminadas, se admiten errores mayores, si conducen éstas al aumento de la reserva de resistencia. En el caso de vigas de diferente resistencia a la tracción y a la compresión, se deberán satisfacer las dos condiciones siguientes:

$$W_1 = \frac{M_{\max}}{[\sigma_{\text{trac}}]}, \quad (96)$$

$$W_2 = \frac{M_{\max}}{[\sigma_{\text{com}}]}. \quad (97)$$

La condición racional de igual resistencia del material de la viga en las fibras extremas de la sección peligrosa exige que la sección transversal de la viga, cuyo material se resiste igual a la tracción que a la compresión, sea simétrica respecto a la línea neutra y que la sección transversal de la viga, cuyo material ofrece diferente resistencia a la tracción y a la compresión, no sea simétrica respecto a la línea neutra. Conviene atenerse a la proporción siguiente:

$$\frac{[\sigma_{\text{com}}]}{[\sigma_{\text{trac}}]} = \frac{W_1}{W_2} = \frac{y_2}{y_1}. \quad (98)$$

Además de la condición de resistencia, la viga deberá ser también económica.

Puesto que la resistencia de la sección transversal de la viga en la flexión se determina por la magnitud de su módulo de la sección  $W$  y el peso de la viga es proporcional al área de la sección transversal  $F$ , el grado de economía de la sección transversal de la viga se puede valorar por la fracción  $\xi = \frac{W}{F^{3/2}}$  que se denomina *módulo unitario de la sección*. Cuanto mayor sea esta fracción, para áreas iguales, tanto más económica será la sección.

**Ejemplo 34.** Dado:  $q = 11 \text{ kgf/cm}$ ;  $P = 1 \text{ tf}$ ;  $l = 4 \text{ m}$ ;  $c = 1 \text{ m}$ ;  $[\sigma_f] = 1600 \text{ kgf/cm}^2$  (fig. 62).

Calcular las dimensiones necesarias de la sección circular, cuadrada, rectangular y de doble te (laminada); la relación de los pesos de estas secciones; la tensión normal en el punto  $A$  indicado de la sección situada debajo de la fuerza, en el caso de la viga de sección de doble te.

*Resolución.* Puesto que la viga es simétrica respecto a la sección media, el momento flector máximo ocurrirá en esta sección.

El gráfico de los momentos  $M$  originados por la carga distribuida es parabólico con el máximo  $M_{\max q} = \frac{ql^2}{8}$  y el diagrama debido

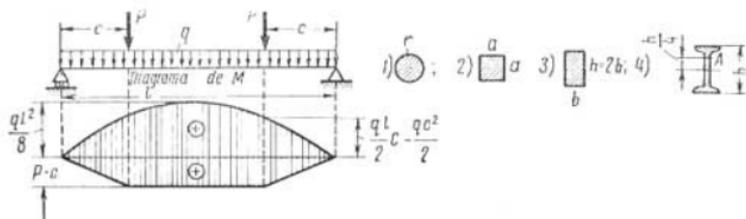


Fig. 62

a las fuerzas concentradas  $M$ , trapezoidal con el máximo  $M_{\max p} = Pc$ . Por lo tanto,

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{8} + Pc = \frac{1,1 \cdot 4^2}{2} + 1 \cdot 1 = 3,2 \text{ tf} \cdot \text{m}.$$

Por la fórmula (95), el módulo de la sección necesario resulta,

$$W = \frac{M_{\max}}{[\sigma_r]} = \frac{3,2 \cdot 10^5}{16 \cdot 10^2} = 200 \text{ cm}^3.$$

1. En el caso de la sección circular,

$$W_1 = \frac{\pi d^3}{32} = 200 \text{ cm}^3; \quad d = \sqrt[3]{\frac{6400}{\pi}} = 12,68 \text{ cm}; \quad F = \frac{\pi d^2}{4} = 126,8 \text{ cm}^2.$$

2. En el caso de la sección cuadrada,

$$W_2 = \frac{a^3}{6} = 200 \text{ cm}^3; \quad a = \sqrt[3]{200 \cdot 6} = 10,63 \text{ cm};$$

$$F = a^2 \approx 113 \text{ cm}^2.$$

3. En el caso de la sección rectangular,

$$W_3 = \frac{bh^2}{6} = \frac{h^3}{12} = 200 \text{ cm}^3; \quad h = \sqrt[3]{2400} = 13,39 \text{ cm};$$

$$F = bh = \frac{h^2}{2} = 89,6 \text{ cm}^2.$$

4. Por la tabla del surtido de vigas doble te hallamos: para el N°20,  $W = 184 \text{ cm}^3$  y para el N°20<sup>a</sup>,  $W = 203 \text{ cm}^3$ .

Comprobamos la viga N°20,

$$\frac{\sigma_{\max} - [\sigma_f]}{[\sigma_f]} 100 = \frac{\frac{M_{\max}}{W_{N^{\circ}20}} - \frac{M_{\max}}{W}}{\frac{M_{\max}}{W}} 100 = \frac{W - W_{N^{\circ}20}}{W_{N^{\circ}20}} 100 =$$

$$= \frac{200 - 184}{184} 100 = 8,7\% \text{ (sobretensión).}$$

Puesto que la sobretensión es superior al 5%, el perfil N°20 no vale.

Comprobamos la viga N°20<sup>a</sup>,

$$\frac{\sigma_{\max} - [\sigma_f]}{[\sigma_f]} 100\% = \frac{W - W_{N^{\circ}20^a}}{W_{N^{\circ}20^a}} 100\% =$$

$$= \frac{200 - 203}{203} \cdot 100\% = -1,5\% \text{ (subtension).}$$

Admitimos pues, la viga N°20<sup>a</sup>, para la cual  $F_4 = 28,9 \text{ cm}^2$ , el momento de inercia respecto al eje neutro es  $I = 2\,030 \text{ cm}^4$  y la altura  $h = 20 \text{ cm}$ .

Puesto que el peso de la viga es proporcional al área de su sección transversal, la relación de los pesos de las vigas será igual a la de las áreas de sus secciones.

Considerando el área de la sección circular igual a la unidad obtendremos:  $F_1 : F_2 : F_3 : F_4 \approx 1 : 0,89 : 0,71 : 0,23$ .

Así, pues, la viga de sección doble te, incluso siendo excesiva su área (se admitió una subtensión del 1,5%), es aproximadamente 4,4 veces más ligera que la viga de sección transversal circular.

Hallamos el momento flector en la sección de la viga, en el lugar de aplicación de la fuerza,

$$M = \frac{ql}{2} c - \frac{qc^2}{2} + Pc = \frac{1,1 \cdot 4 \cdot 1}{2} - \frac{1,1 \cdot 1}{2} + 1 \cdot 1 = \frac{5,3}{2} \text{ tf} \cdot \text{m}.$$

En el punto A de esta sección, donde  $y = \frac{h}{4} = 5 \text{ cm}$ , la tensión normal es de compresión (la viga se flexa hacia abajo) y se obtiene por la fórmula (92),

$$\sigma_A = \frac{M_y}{I} = \frac{-5,3 \cdot 10^5 \cdot 5}{2 \cdot 2\,030} \approx -653 \text{ kgf/cm}^2.$$

**Ejemplo 35.** Las tensiones admisibles del material de la viga de sección  $\Pi$  (fig. 63) son:  $[\sigma_c] = 3[\sigma_t]$ . Dadas las dimensiones  $b = 20$  cm y  $t = 1$  cm, determinar la altura racional  $h$  de la sección.

*Resolución.* Sea el eje  $z$  la línea neutra y  $h_1$  y  $h_2$  las distancias a las fibras extremas.

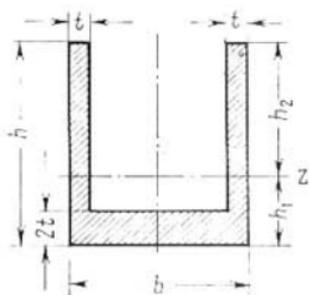


Fig. 63

Partiendo de la condición de un aprovechamiento racional del material (98) (condición de igualdad de resistencia de las fibras extremas) obtendremos,

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{[\sigma_t]}{[\sigma_c]} = \frac{1}{3}.$$

Puesto que,  $h_1 + h_2 = h$ , resulta  $h_1 = \frac{h}{4}$  y  $h_2 = \frac{3}{4}h$ .

Como la línea neutra  $z$  es un eje central y, por lo tanto, el momento estático del área de la sección respecto a la línea neutra será igual a cero, es decir,

$$\begin{aligned} S_z &= -(b-2t)2t\left(\frac{h}{4}-t\right) + 2ht\left(\frac{h}{2}-\frac{h}{4}\right) = \\ &= -36\left(\frac{h}{4}-1\right) + \frac{h^2}{2} = 0. \end{aligned}$$

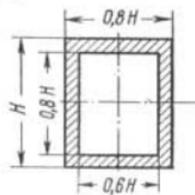
De aquí se obtiene,

$$h^2 - 18h + 72 = 0 \quad \text{y} \quad h = 9 \pm \sqrt{9} = 9 \pm 3.$$

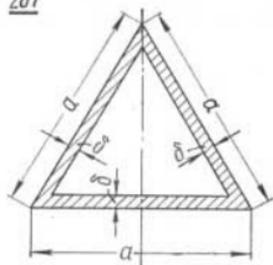
Por lo tanto la altura de la sección deberá ser igual a  $h = 12$  cm ó a  $h = 6$  cm.

**Problemas 286-306.** Determinar los módulos de las secciones  $W_z$  ( $z$  es un eje horizontal central) transversales de las vigas. Escójanse para el problema 306 las dimensiones correspondientes al problema 301.

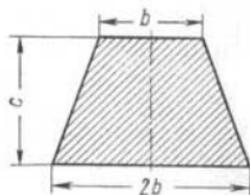
286



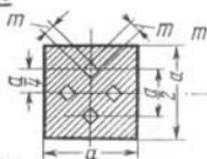
287



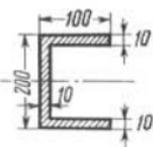
288



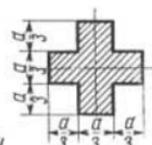
289



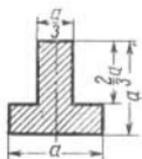
290



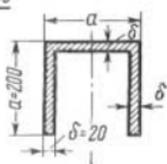
291



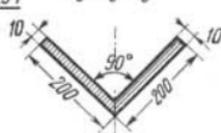
292



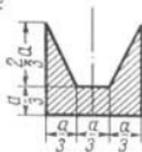
293



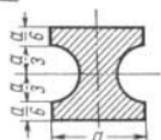
294



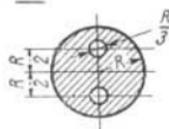
295



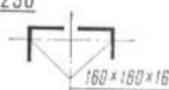
296



297



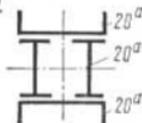
298



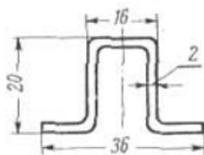
299



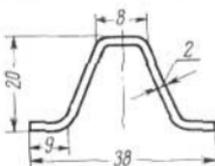
300



301



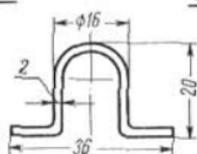
302



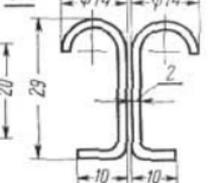
303



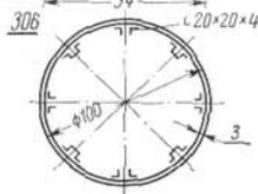
304



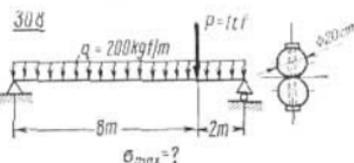
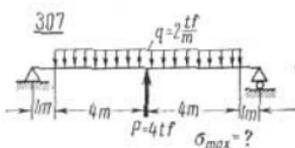
305



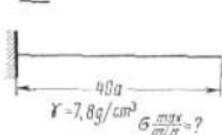
306



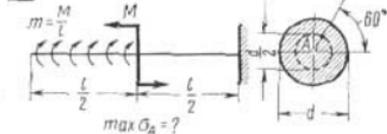
**Problemas 307-313.** Determinar las tensiones normales en los puntos de las secciones transversales de las vigas (los puntos y las secciones están indicados en las condiciones de los problemas).



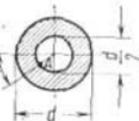
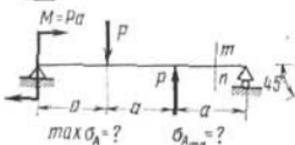
309



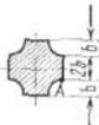
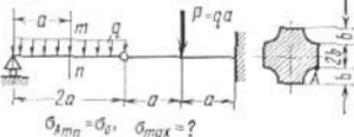
310



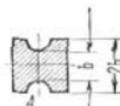
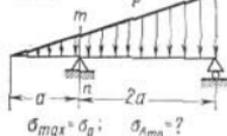
311



312



313



**Notaciones:**

$\sigma_{\max}$  tensiones normales máxima y mínima en la sección peligrosa,

$\sigma_{\min}$  tensión normal en el punto  $A$  de la sección peligrosa,

$\sigma_{A_{mn}}$  tensión normal en el punto  $A$  de la sección  $mn$ ,

$\gamma$  peso por unidad de volumen del material de la viga.

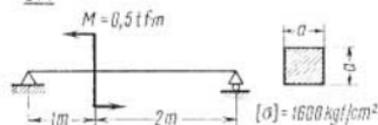
**Problemas 314-329.** Calcular las dimensiones necesarias de las secciones transversales de las vigas.

En el problema 319 se debe determinar el número necesario de barras de sección rectangular dada, situadas paralelamente.

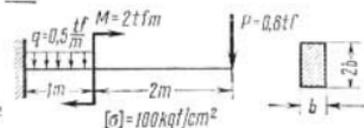
En el problema 325 se debe hallar el número del perfil de las vigas doble te correspondiente a la posición más desfavorable de la carga móvil.

En los problemas 327-328 determinar respectivamente las dimensiones  $b$  y  $h$  partiendo de la condición de igual resistencia de las fibras traccionadas y comprimidas.

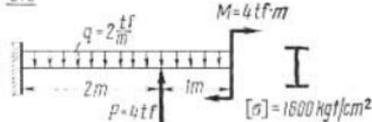
314



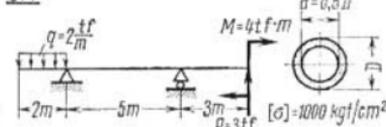
315



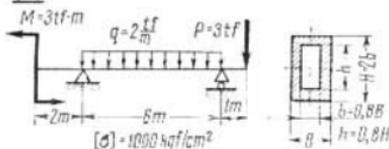
316



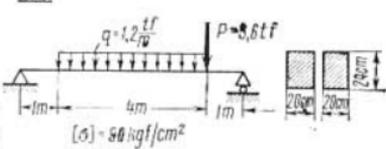
317



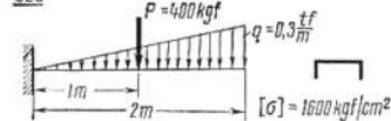
318



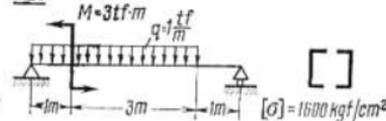
319



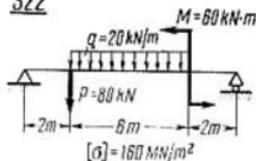
320



321

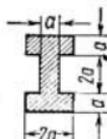
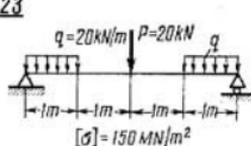


322

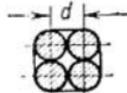
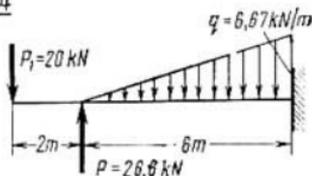


II

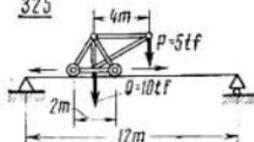
323



324

[σ] = 10 MN/m<sup>2</sup>

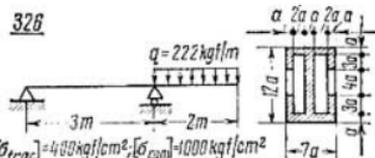
325



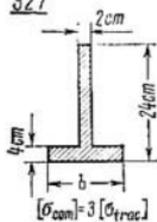
II

[σ] = 1500 kgf/cm<sup>2</sup>

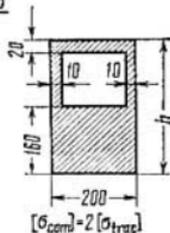
326

[σ<sub>tracc</sub>] = 400 kgf/cm<sup>2</sup>; [σ<sub>comp</sub>] = 1000 kgf/cm<sup>2</sup>

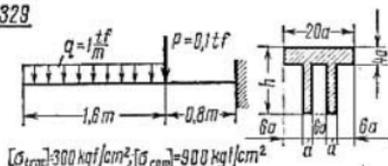
327

[σ<sub>comp</sub>] = 3 [σ<sub>tracc</sub>]

328

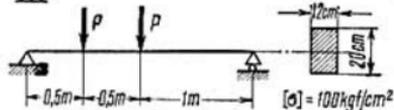
[σ<sub>comp</sub>] = 2 [σ<sub>tracc</sub>]

329

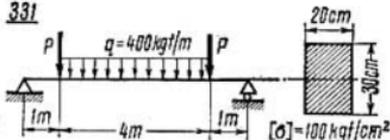
[σ<sub>tracc</sub>] = 300 kgf/cm<sup>2</sup>; [σ<sub>comp</sub>] = 900 kgf/cm<sup>2</sup>

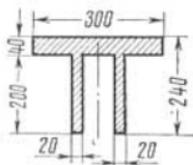
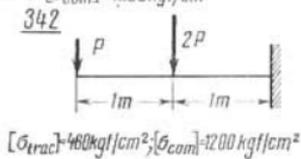
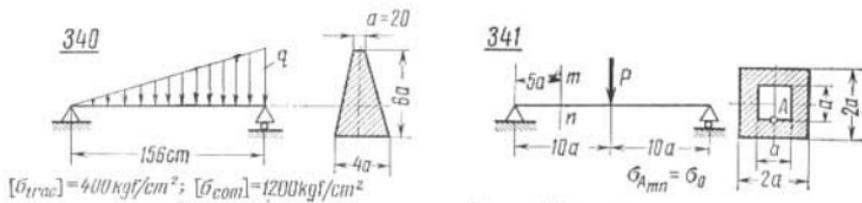
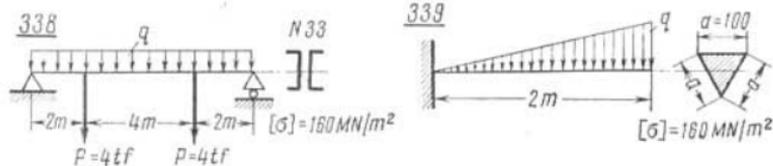
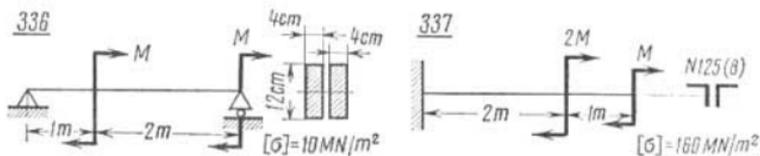
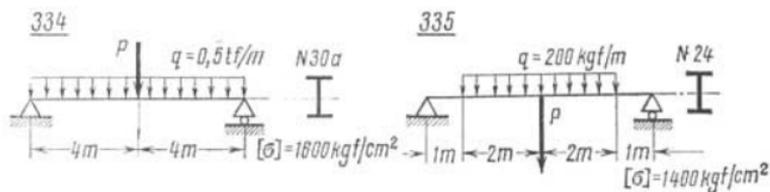
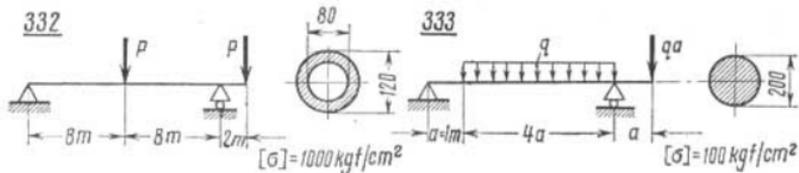
**Problemas 330-342.** Determinar las magnitudes de las cargas admisibles que actúan sobre las vigas de las dimensiones dadas.

330

[σ] = 100 kgf/cm<sup>2</sup>

331

[σ] = 100 kgf/cm<sup>2</sup>



### § 3. Tensiones tangenciales, centro de flexión y comprobación de la resistencia de las vigas por tensiones tangenciales

En un punto arbitrario de la sección rectangular de la viga (fig. 64) la magnitud de la tensión tangencial se determina por la fórmula de D. Zhuravski,

$$\tau = \frac{QS}{bI}, \quad (99)$$

siendo  $Q$  la fuerza cortante en la sección en cuestión,  $S = \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right)$  el momento estático respecto a la línea neutra  $z$  de la parte de la sección que se encuentra a un lado del nivel  $y$ , donde se determina la tensión tangencial;  $b$  anchura de la sección;

$I = \frac{bh^3}{12}$  el momento de inercia del área de la sección respecto al eje  $z$ .

Las tensiones tangenciales máximas resultan en los puntos de la línea neutra. Estas valen,

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{Q}{F}, \quad (100)$$

siendo  $F = bh$  el área de la sección transversal de la viga.

Por la fórmula (99) se pueden calcular, de manera aproximada, también las componentes de las tensiones tangenciales perpendicu-

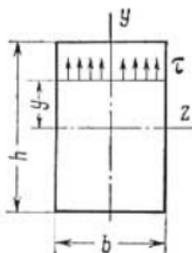


Fig. 64

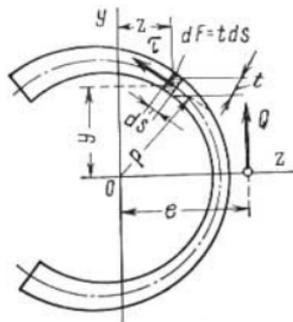


Fig. 65

lares al eje neutro, en el caso de vigas de sección no rectangular, entendiéndose por  $b$  el ancho de la sección al nivel del punto en cuestión. Las tensiones tangenciales resultantes en los puntos del contorno de la sección están dirigidas tangencialmente al contorno y en los

otros puntos de la sección, inclinadas hacia el plano de acción de las fuerzas.

Hallar exactamente las tensiones tangenciales en vigas de una sección cualquiera es muy complicado. La determinación aproximada se basa en suposiciones arbitrarias sobre la dirección de las tensiones tangenciales dentro de la sección.

Para vigas de sección transversal en forma de perfil abierto de paredes delgadas (fig. 65) se admite que las tensiones tangenciales se orientan tangencialmente a la línea media de la pared de la sección y que normalmente ( $t$ ) a esta línea, se distribuyen uniformemente. La fórmula que determina la tensión tangencial es, en este caso,

$$\tau = \frac{QS}{tI}, \quad (101)$$

siendo  $S$  el momento estático respecto al eje neutro  $z$ , de la parte de la sección que se encuentra a un lado de la normal  $t$  a la línea media, al nivel  $y$  del punto en cuestión.

Si la sección de la viga no es simétrica respecto al eje central principal  $y$  perpendicular a la línea neutra  $z$ , entonces aparecen tensiones tangenciales que originan en esta sección un momento torsor. Para que desaparezca la torsión de la viga, la fuerza cortante se deberá aplicar no en el centro de gravedad de la sección, sino en el punto denominado *centro de flexión*.

Para una forma cualquiera de la sección transversal de la viga la determinación de la posición del centro de flexión representa grandes dificultades. En el caso de una sección de paredes delgadas, simétrica respecto a la línea neutra  $z$  (fig. 65), el centro de flexión se ubica sobre el eje  $z$  y su distancia al centro de gravedad de la sección es,

$$e = \frac{1}{I} \int_F \frac{S}{t} \rho dF, \quad (102)$$

siendo  $\rho$  el brazo del esfuerzo elemental tangencial  $\tau dF$  respecto al centro de gravedad de la sección;

$F$  el área de toda la sección.

Si el espesor de la pared del perfil  $t$  es constante, entonces la expresión (102) adquiere la forma siguiente:

$$e = \frac{1}{I^s} \int_s S^{s'} \rho ds, \quad (103)$$

siendo  $I^s$  el momento de inercia del arco de la línea media de toda la sección respecto al eje  $z$ ;

$S^{s'}$  el momento estático respecto al eje  $z$  del arco  $s'$  de la parte de la línea media de la sección situado a un lado del nivel  $y$  del punto arbitrario.

La integración se lleva a cabo no sobre el área de la sección, sino sobre el arco  $s$ . Si el perfil está compuesto por varias partes de diferente, pero constante espesor  $t$ , entonces  $e$  se podrá obtener sumando las expresiones (102) para cada parte por separado.

La resistencia de la viga por tensiones tangenciales se comprueba en los puntos donde actúan las tensiones tangenciales máximas de la sección transversal donde aparece la fuerza cortante máxima  $Q_{\max}$  en valor absoluto.

La comprobación se debe realizar en el caso de vigas cortas, de vigas de alma delgada y alta, en vigas confeccionadas de material que resiste mal el cizallamiento y de vigas solicitadas en las proximidades de los apoyos por grandes cargas.

La fórmula para comprobar las tensiones es:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_0}{b_0 I} \leq [\tau], \quad (104)$$

siendo  $S_0$  el momento estático respecto al eje neutro de la parte de la sección transversal que se encuentra a un lado de la línea de acción de  $\tau_{\max}$ ,

$b_0$  la anchura de la sección al nivel de la línea de acción de  $\tau_{\max}$ .

En la mayoría de las secciones que se comprueban,  $\tau_{\max}$  actúa en los puntos situados sobre la línea neutra.

La tensión tangencial admisible  $[\tau]$  se escoge generalmente igual a  $(0,5-0,7) [\sigma]$ . Por ejemplo, en el caso del acero Cr. OC y Cr. 2,  $[\tau] = 900 \text{ kgf/cm}^2$ , en el del acero Cr. 3,  $[\tau] = 1\,000 \text{ kgf/cm}^2$ ; en el caso de materiales como el pino y el abeto,  $[\tau] = 20 \text{ kgf/cm}^2$ .

**Ejemplo 36.** Dado:  $M_1 = 40 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $M_2 = 20 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $M_3 = 10 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $a = 1 \text{ m}$ ,  $b = 4 \text{ cm}$  y  $h = 12 \text{ cm}$  (fig. 66).

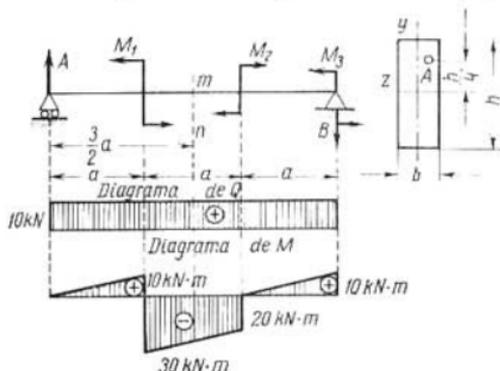


Fig. 66

Determinar  $\sigma_A$  y  $\tau_A$  en la sección  $mn$ .

*Resolución.* Las reacciones en los apoyos son,

$$A = B = \frac{M_1 - M_2 + M_3}{3a} = \frac{40 - 20 + 10}{3} = 10 \text{ kN.}$$

Los diagramas de  $Q$  y  $M$  están representados en la figura 66.

En la sección  $mn$ ,  $M = -\frac{30 + 20}{2} = -25 \text{ kN}\cdot\text{m}$  y  $Q = 10 \text{ kN}$ .

Puesto que el punto  $A$  se encuentra en la zona traccionada de la sección, por la fórmula (92) obtendremos,

$$\sigma_A = \frac{|M|y}{I}.$$

En el caso de una sección rectangular,

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{4 \cdot 12^3}{12} = 576 \text{ cm}^4.$$

Para el punto  $A$  en cuestión

$$y = \frac{h}{4} = 3 \text{ cm,}$$

por lo tanto,

$$\sigma_A = \frac{25 \cdot 10^3 \cdot 0,03}{576 \cdot 10^{-8}} \approx 130 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2 = 130 \text{ MN/m}^2.$$

Por la fórmula (99) hallamos

$$\begin{aligned} \tau_A &= \frac{6Q}{bh^3} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right) = \frac{6Q}{h^3b} \left( \frac{h^2}{4} - \frac{h^2}{16} \right) = \\ &= \frac{9}{8} \frac{Q}{bh} = \frac{9}{8} \cdot \frac{10 \cdot 10^3}{0,04 \cdot 0,12} = 2,34 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2 = 2,34 \text{ MN/m}^2 \end{aligned}$$

**Ejemplo 37.** Dado:  $Q = 8 \text{ tf}$ ,  $h = 12 \text{ cm}$ ,  $h_0 = 8 \text{ cm}$ ,  $b = 6 \text{ cm}$  y  $b_0 = 4 \text{ cm}$  (fig. 67).

Construir el diagrama de las tensiones tangenciales convencionales perpendiculares a la línea neutra (por la fórmula de Zhuravski).

*Resolución.* Hallemos los valores de las tensiones tangenciales en los puntos 1 de las fibras extremas de la sección, en los puntos 2 de las fibras extremas de la cavidad, en los puntos 3, más alejados de la línea neutra situados en las paredes de la cavidad y, por fin, en los puntos 4 de la línea neutra  $z$  (fig. 67). Para ello recurrimos a la fórmula (99).

El momento de inercia del área de la sección de la configuración dada respecto al eje neutro  $z$  es

$$I = \frac{bh^3}{12} - \frac{b_0h_0^3}{12} = \frac{1}{12} (6 \cdot 12^3 - 4 \cdot 8^3) = \frac{2080}{3} \text{ cm}^4.$$

Para los puntos  $I$ ,  $S_1 = 0$  y, por lo tanto, también  $\tau_{(1)} = 0$ .

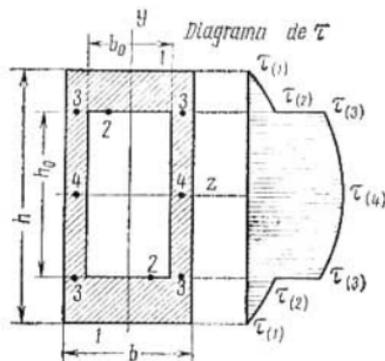


Fig. 67

Para los puntos 2,

$$S_{(2)} = b \frac{h - h_0}{2} \left( \frac{h}{2} - \frac{h - h_0}{4} \right) = 6 \cdot 2 (6 - 1) = 60 \text{ cm}^3,$$

y

$$\tau_{(2)} = \frac{QS_{(2)}}{bI} = \frac{8 \cdot 10^3 \cdot 60 \cdot 3}{6 \cdot 2080} \approx 115,4 \text{ kgf/cm}^2.$$

Puesto que la anchura de la sección en los puntos 3 es  $b - b_0$ ,

$$\tau_{(3)} = \frac{QS_{(2)}}{(b - b_0)} = \tau_{(2)} \frac{b}{b - b_0} \approx 115,4 \cdot \frac{6}{2} = 346,2 \text{ kgf/cm}^2.$$

Para los puntos 4 hallaremos,

$$S_{(4)} = S_{(2)} + (b - b_0) \frac{h_0}{2} \cdot \frac{h_0}{4} = 60 + 2 \cdot 4 \cdot 2 = 76 \text{ cm}^3$$

y

$$\tau_{(4)} = \frac{QS_{(4)}}{(b - b_0)I} = \frac{8 \cdot 10^3 \cdot 76 \cdot 3}{2 \cdot 2080} \approx 438,5 \text{ kgf/cm}^2.$$

Basándonos en los resultados obtenidos construimos el diagrama de  $\tau$  (fig. 67).

**Ejemplo 38.** Dado: una sección de paredes delgadas en forma de anillo circular de ángulo central  $2\alpha$  de radio de la línea media  $r$  y de espesor constante  $t$  (fig. 68).

Calcular la posición del centro de flexión  $A$ .

*Resolución.* De la figura se deduce que el elemento del arco de la línea media del anillo es  $ds = r d\varphi$ ; el elemento del área de la pared

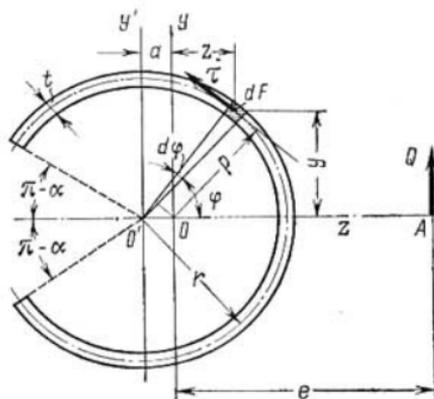


Fig. 68

del anillo,  $dF = t ds = r t d\varphi$  y las coordenadas del centro de gravedad del elemento del área  $dF$  en el sistema de coordenadas central  $yo z$  son:

$$y = r \operatorname{sen} \varphi; \quad z = r \cos \varphi - a,$$

siendo  $a$  la distancia entre ejes  $y$  e  $y'$  que pasa, este último, por el centro de curvatura  $O_1$  de la sección.

Determinamos la posición del centro de gravedad  $O$  de la sección situado sobre el eje  $z$ . Puesto que el eje  $y$  es central, el momento estático del área de la sección será,

$$S_y = \int_F z dF = 2 r t \int_0^\alpha (r \cos \varphi - a) d\varphi = 2 r t (r \operatorname{sen} \alpha - a \alpha) = 0,$$

y por lo tanto,

$$a = \frac{r \operatorname{sen} \alpha}{\alpha}.$$

El brazo  $\rho$  del esfuerzo tangencial  $\tau t ds$  respecto al centro de gravedad de la sección vale,

$$\rho = r - a \cos \varphi = r \left( 1 - \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\alpha} \cos \varphi \right).$$

El momento de inercia  $I^s$  del arco de la línea media de la sección respecto a la línea neutra  $z$  es,

$$I^s = \int_s y^2 ds = 2r^3 \int_0^\alpha \text{sen}^2 \varphi d\varphi = \frac{r^3}{2} (2\alpha - \text{sen } 2\alpha).$$

El momento estático  $S^{s'}$  respecto al eje  $z$  de la parte del arco de la línea media de la sección, situada a un lado del elemento arbitrario determinado por el ángulo  $\varphi$  será,

$$S^{s'} = \int_{s'} y ds = r^2 \int_\varphi^\alpha \text{sen } \varphi d\varphi = r^2 (\cos \varphi - \cos \alpha).$$

Por la fórmula (103) se halla la distancia  $e$  del centro de gravedad de la sección al centro de flexión  $A$ ,

$$e = \frac{1}{I^s} \int_s S^{s'} \rho ds = \frac{2}{r^2 (2\alpha - \text{sen } 2\alpha)} 2 \cdot r^4 \int_0^\alpha \left( 1 - \frac{\text{sen } \alpha}{\alpha} \cos \varphi \right) \times \\ \times (\cos \varphi - \cos \alpha) d\varphi,$$

ó

$$e = \frac{2r}{2\alpha - \text{sen } 2\alpha} \left( \text{sen } \alpha - 2\alpha \cos \alpha + \frac{1}{2} \text{sen}^2 \alpha \cos \alpha \right).$$

La distancia del centro de curvatura  $O'$  de la sección al centro de flexión  $A$ , es,

$$a + e = \frac{r}{\alpha} \text{sen } \alpha + \frac{2r}{2\alpha - \text{sen } 2\alpha} \left( \text{sen } \alpha - 2\alpha \cos \alpha + \right. \\ \left. + \frac{1}{\alpha} \text{sen}^2 \alpha \cos \alpha \right) = r \frac{4(\text{sen } \alpha - \alpha \cos \alpha)}{2\alpha - \text{sen } 2\alpha}.$$

**Ejemplo 39.** Dado:  $P = 4$  tf,  $M = 2$  tf·m,  $a = 0,5$  m,  $l = 4$  m,  $[\sigma] = 1\ 600$  kgf/cm<sup>2</sup> y  $[\tau] = 1\ 000$  kgf/cm<sup>2</sup> (fig. 69). Determinar el número del perfil doble te.

*Resolución.* El diagrama de los momentos flectores  $M$  se construye fácilmente, sin necesidad de cálculos, como está indicado en la figura 69.

En el voladizo,  $Q = \text{const} = -4$  tf. En el vano, entre los apoyos,  $Q = \text{const} < 0$ . Del diagrama de  $M$  hallamos,

$$\Delta M = 2 \text{ tf} \cdot \text{m} = -Q \cdot 2 \text{ m},$$

de donde se deduce que,  $Q = -1$  tf.

El diagrama de  $Q$  está representado en la figura 69. Así, pues,

$$M_{\text{max}} = 2 \text{ tf} \cdot \text{m}, \quad |Q|_{\text{max}} = 4 \text{ tf}.$$

Por la fórmula, hallamos,

$$W = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{2 \cdot 10^5}{16 \cdot 10^2} = 125 \text{ cm}^3.$$

Según el surtido: para el perfil doble te N°16,  $W = 109 \text{ cm}^3$  y para el perfil doble te N°18,  $W = 143 \text{ cm}^3$ .

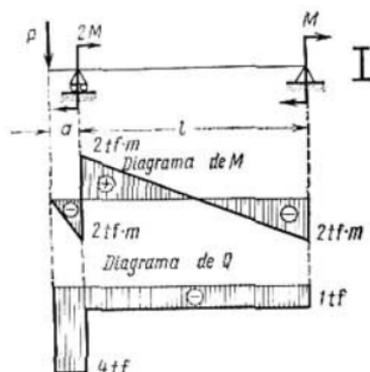


Fig. 69

Verificamos el perfil doble te N°16. Tendremos:

$$\frac{\sigma_{\max} - [\sigma]}{[\sigma]} \cdot 100 = \left( \frac{125}{109} - 1 \right) \cdot 100 \approx 15\% \text{ (sobretensión).}$$

Verificamos ahora el perfil doble te N° 18:

$$\frac{\sigma_{\max} - [\sigma]}{[\sigma]} \cdot 100 = \left( \frac{125}{143} - 1 \right) \cdot 100 \approx -12,5\% \text{ (subtensión).}$$

Escogemos el perfil N° 18 para el cual,

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{2 \cdot 10^5}{143} \approx 1400 \text{ kgf/cm}^2.$$

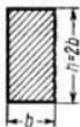
Según el surtido  $S = 81,4 \text{ cm}^3$ ;  $I = 1290 \text{ cm}^4$  y  $d = 0,51 \text{ cm}$ .  
Por lo tanto,

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S}{dI} = \frac{4 \cdot 10^3 \cdot 81,4}{0,51 \cdot 1290} \approx 495 \text{ kgf/cm}^2 < [\tau],$$

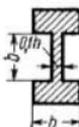
es decir, el perfil doble te escogido N° 18 es suficientemente resistente tanto por tensiones normales como por tangenciales.

**Problemas 343-351.** Construir los diagramas de las tensiones tangenciales  $\tau$  perpendiculares a la línea neutra (horizontal) en partes del valor máximo  $\tau_{\max} = \tau_0$  para las formas indicadas de la sección transversal de las vigas.

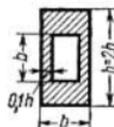
343



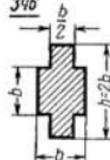
344



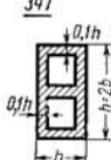
345



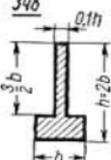
346



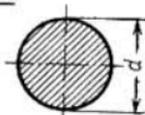
347



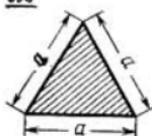
348



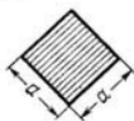
349



350

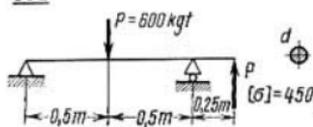


351

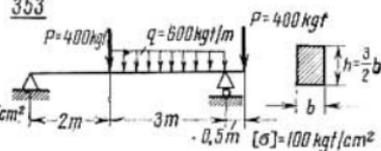


**Problemas 352-357.** Determinar las tensiones tangenciales máximas  $\tau_{\max}$  estableciendo previamente (donde sea necesario) las dimensiones necesarias de las vigas o las cargas seguras correspondientes a las tensiones normales admisibles dadas.

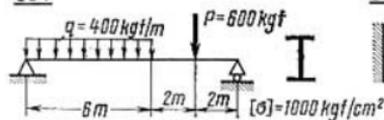
352



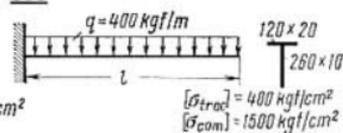
353



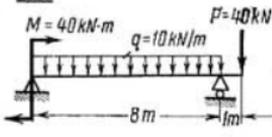
354



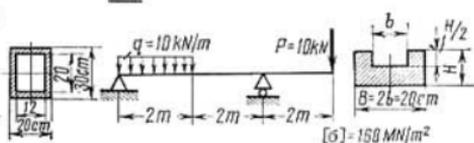
355



356

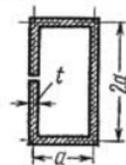


357

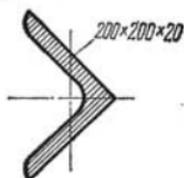


**Problemas 358-363.** Calcular la distancia  $e$  del centro de flexión al de gravedad de la sección (considérese que las secciones son de paredes delgadas).

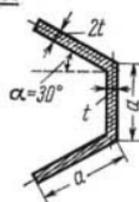
358



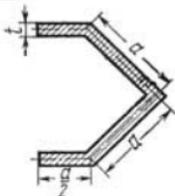
359



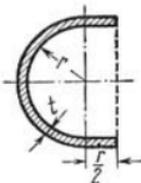
360



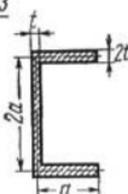
361



362



363



#### § 4. Tensiones principales y comprobación de la resistencia de la viga

En un punto cualquiera de la sección transversal de la viga situada a una distancia  $y$  de la línea neutra  $z$ , la tensión normal  $\sigma$  y la tangencial  $\tau$  se determinan por las fórmulas (92) y (99).

El elemento escogido alrededor de este punto y formado por dos secciones transversales situadas a una distancia infinitamente

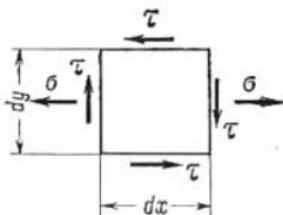


Fig. 70

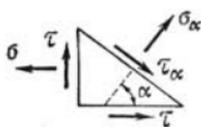


Fig. 71

pequeña  $dx$  una de otra y por dos secciones longitudinales paralelas a la capa neutra también infinitamente cerca la una de la otra  $dy$  está sometido al estado tensional plano representado en la figura 70.

Las tensiones normales  $\sigma_\alpha$  y tangenciales  $\tau_\alpha$  en el plano inclinado de la sección que pasa por este punto (fig. 71), son las siguientes:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\alpha &= \sigma \cos^2 \alpha - \tau \sin 2\alpha, \\ \tau_\alpha &= \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha + \tau \cos 2\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (105)$$

Dos planos inclinados ortogonales entre sí son planos principales de las tensiones en el punto dado de la viga cuando,

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = -\frac{2\tau}{\sigma}. \quad (106)$$

Las magnitudes de las tensiones principales  $\sigma_1$  y  $\sigma_3$  se obtienen por la expresión,

$$\sigma_{\frac{3}{1}} = \frac{1}{2} (\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}). \quad (107)$$

Las tensiones tangenciales extremas valen

$$\tau_{\frac{\max}{\min}} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}. \quad (108)$$

En la figura 72 está representada la determinación gráfica de las magnitudes y las direcciones de las tensiones principales para los cuatro posibles variantes de estados tensionales de los elementos escogidos de la viga.

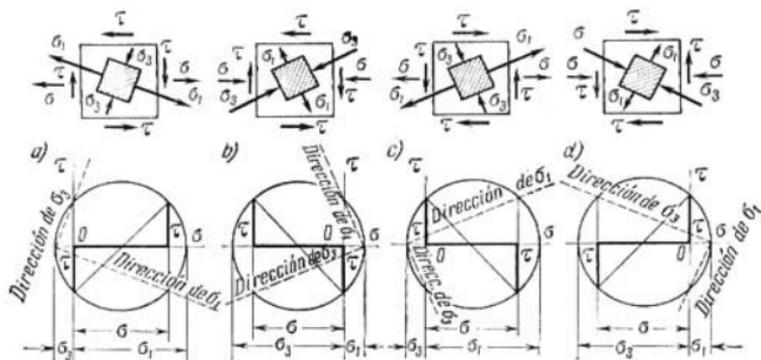


Fig. 72

Si en una misma sección transversal de la viga actúan simultáneamente el momento flector máximo y la fuerza cortante máxima o  $M$  y  $Q$  próximos a los máximos, entonces en esta sección se deberá comprobar la resistencia de la viga, partiendo de las tensiones principales.

La resistencia por tensiones principales se comprueba solamente en el caso de vigas cuyas secciones transversales tienen un alma delgada que se ensancha bruscamente en las proximidades de las fibras extremas.

La resistencia se comprueba en los puntos donde la anchura de la viga aumenta súbitamente.

Las vigas de material plástico se comprueban por la tercera hipótesis de resistencia, es decir por la fórmula,

$$\sigma_{e_{III}} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (109)$$

Las vigas de material frágil se comprueban por la primera hipótesis de resistencia, según la relación,

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} (\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}) \leq [\sigma_t]. \quad (110)$$

El cálculo completo de la resistencia de una viga isostática se da en el ejemplo 40.

**Ejemplo 40.** Dado:  $P = 4 \text{ tf}$ ,  $q = 3 \text{ tf/m}$ ,  $a = 0,8 \text{ m}$ ,  $l = 4 \text{ m}$ ,  $[\sigma] = 1\,600 \text{ kgf/cm}^2$  y  $[\tau] = 1\,000 \text{ kgf/cm}^2$  (fig. 73).

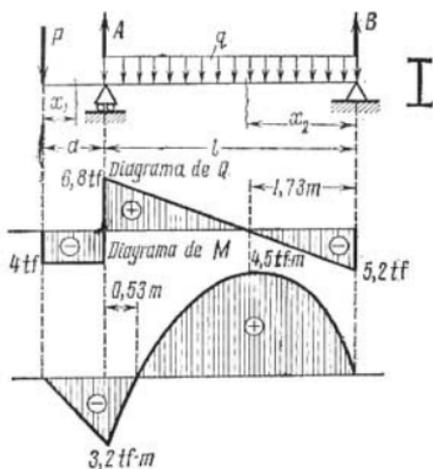


Fig. 73

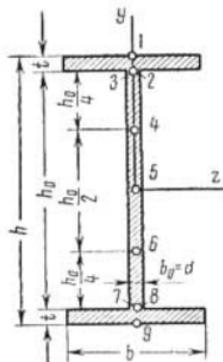


Fig. 74

Determinar el número de la viga doble T.

*Resolución.* 1. Determinamos las reacciones de apoyo. Obtenemos,

$$A = \frac{P(a+l) + \frac{q}{2} l^2}{l} = \frac{4 \cdot 4,8 + 3 \cdot 8}{4} = 10,8 \text{ tf},$$

$$B = \frac{\frac{q}{2} l^2 - Pa}{l} = \frac{3 \cdot 8 - 4 \cdot 0,8}{4} = 5,2 \text{ tf}.$$

## 2. Construcción de los diagramas de $Q$ y $M$ .

En el voladizo,  $0 \leq x_1 \leq a$ :

$$Q_{x_1} = -P = -4 \text{ tf}; \quad M_{x_1} = -Px_1 = -4x_1; \quad M_{x_1=0} = 0;$$

$$M_{x_1=a} = -4 \cdot 0,8 = -3,2 \text{ tf} \cdot \text{m}.$$

En el vano entre los apoyos  $0 \leq x_2 \leq l$ ,

$$Q_{x_2} = -B + qx_2 = -5,2 + 3x_2; \quad Q_{x_2=0} = -5,2 \text{ tf};$$

$$Q_{x_2=l} = -5,2 + 3 \cdot 4 = 6,8 \text{ tf},$$

$$M_{x_2} = Bx_2 - \frac{q}{2} x_2^2 = 5,2x_2 - \frac{3}{2} x_2^2; \quad M_{x_2=0} = 0;$$

$$M_{x_2=l} = 5,2 \cdot 4 - \frac{3}{2} \cdot 16 = -3,2 \text{ tf} \cdot \text{m}.$$

Puesto que  $Q_{x_2} = -5,2 + 3x_2 = 0$ , cuando  $x_2 = \frac{5,2}{3} \approx 1,73 \text{ m}$ ,

obtendremos,  $M_{\max} = 5,2 \cdot 1,73 - 3 \cdot \frac{1,73^2}{2} \approx 4,5 \text{ tf} \cdot \text{m}$ . Para  $x_2 = \frac{5,2 \cdot 2}{3} = 3,47 \text{ m}$ , hallaremos  $M_{x_2} = 5,2 x_2 - \frac{3}{2} x_2^2 = 0$ . Con estos

resultados se ha construido los gráficos de  $Q$  y  $M$  en la figura 73.

### 3. Cálculo de la sección de la viga doble te.

Puesto que  $M_{\max} = 4,5 \text{ tf} \cdot \text{m}$  obtendremos,  $W = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{4,5 \cdot 10^5}{16 \cdot 10^2} \approx 281 \text{ cm}^3$ .

Por el surtido hallamos el perfil doble te N° 22a,  $W = 254 \text{ cm}^3$ , y por lo tanto

$$\frac{\sigma_{\max} - [\sigma]}{[\sigma]} \cdot 100 = \frac{W - W_{N^{\circ} 22a}}{W_{N^{\circ} 22a}} \cdot 100 = \frac{281 - 254}{254} \cdot 100 = 10,6\% > 5\% \quad (\text{sobretensión}).$$

En el caso del perfil N° 24,  $W = 289 \text{ cm}^3$

$$\frac{\sigma_{\max} - [\sigma]}{[\sigma]} \cdot 100 = \frac{W - W_{N^{\circ} 24}}{W_{N^{\circ} 24}} \cdot 100 = \frac{281 - 289}{289} \cdot 100 \approx -2,77\% \quad (\text{subtensión}).$$

Escogemos el perfil doble te N°24, para el cual  $W = 289 \text{ cm}^3$ ,  $I = 3460 \text{ cm}^4$ ,  $S_0 = 163 \text{ cm}^3$ ,  $h = 24 \text{ cm}$ ,  $b = 11,5 \text{ cm}$ ,  $t = 0,95 \text{ cm}$ ,  $d = b_0 = 0,56 \text{ cm}$ ,  $h_0 = h - 2t = 22,1 \text{ cm}$  (fig. 74). Este perfil doble te trabajará con la siguiente tensión normal máxima en la fibra extrema de la sección peligrosa

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{4,5 \cdot 10^5}{289} \approx 1560 \text{ kgf/cm}^2.$$

4. Comprobación de la sección de la viga por tensiones tangenciales.

Puesto que,  $Q_{\max} = 6,8$  tf, obtendremos,

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_0}{b_0 I} = \frac{6,8 \cdot 10^3 \cdot 163}{0,56 \cdot 3460} \approx 570 \text{ kgf/cm}^2 < [\tau].$$

5. Construcción de los diagramas de las tensiones normales  $\sigma$ , tangenciales  $\tau$ , principales  $\sigma_{1,3}$  y tangenciales extremas  $\tau_{\max}^{\min}$  en la sección más desfavorable de la viga y determinación de sus orientaciones.

En lo que se refiere a las tensiones principales, la sección desfavorable es la situada sobre el apoyo izquierdo (al acercarse a éste por la derecha) en la cual  $M = -3,2$  tf·m y  $Q = 6,8$  tf.

Calculamos las tensiones en los nueve puntos de la sección, indicados en la figura 74.

La tensión normal en un punto cualquiera situado a una distancia  $y$  de la línea neutra es

$$\sigma = -\frac{My}{I} = \frac{3,2 \cdot 10^5}{3460} \approx 92,5y. \quad (\text{a})$$

El momento estático del área del ala respecto al eje  $z$

$$S_a = bt \frac{h-t}{2} = 11,5 \cdot 0,95 \frac{24-0,95}{2} \approx 126 \text{ cm}^3.$$

El momento estático de la parte del área de la pared del alma, situada a un lado de la ordenada  $y$

$$S_c = \frac{b_0}{2} \left( \frac{h_0^2}{4} - y^2 \right) = \frac{0,56}{2} \left( \frac{22,4^2}{4} - y^2 \right) = 0,28 (122 - y^2).$$

El momento estático de la parte de la sección ubicada a un lado de la ordenada  $y$ ,

$$S = S_a + S_c = 126 + 0,28 (122 - y^2) \approx 160 - 0,28 y^2.$$

Las tensiones tangenciales en los puntos del ala, según la fórmula (99),

$$\tau = \frac{Q \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right)}{2I} \quad (\text{b})$$

y en los puntos del alma,

$$\tau = \frac{QS}{b_0 I}. \quad (\text{c})$$

Por las fórmulas (a), (b), (c), (108), (107) y (106) se calculan los valores de  $\sigma$ ,  $\tau$ ,  $\tau_{\max}$ ,  $\sigma_{1,3}$ ,  $\operatorname{tg} 2\alpha$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  para las ordenadas  $y$  correspondientes a los nueve puntos de la sección.

Los valores obtenidos se dan en la tabla siguiente:

Nº del punto	$y$ en cm	$\sigma$	$\tau$	$\tau_{\max}$ min	$\sigma_1$	$\sigma_3$	$\operatorname{tg} 2\alpha$	$\alpha_1$	$\alpha_2$
1	12,00	1 110	0	$\pm 555$	1 110	0	0,00	0°0'	90°0'
2	11,05	1 020	20	$\pm 510$	1 020	0	-0,0392	-1°07'	88°53'
3	11,05	1 020	440	$\pm 670$	1 180	-160	-0,863	-20°24'	69°36'
4	5,52	510	530	$\pm 590$	840	-340	-2,08	-32°10'	57°50'
5	0,00	0	560	$\pm 560$	560	-560	$\infty$	-45°0'	45°0'
6	-5,52	-510	530	$\pm 590$	340	-840	2,08	32°10'	122°10'
7	-11,05	-1 020	440	$\pm 670$	160	-1 180	0,863	20°24'	110°24'
8	-11,05	-1 020	20	$\pm 510$	0	-1 020	0,0392	1°07'	91°07'
9	-12,00	-1 110	0	$\pm 555$	0	-1 110	0,00	0 0	90°0'

Los diagramas de las tensiones están representados en la figura 75. Las orientaciones de las tensiones principales en los puntos de la sección que se analizan se dan en la figura 76.

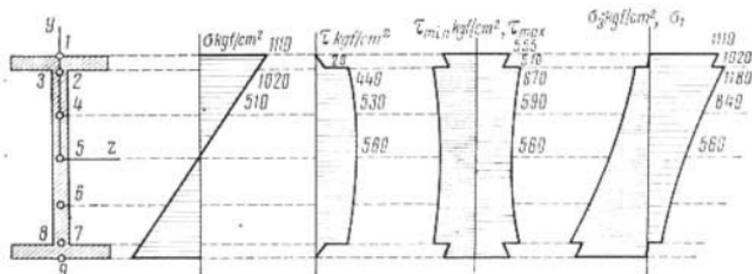


Fig. 75

En la figura 77 está representada la determinación gráfica de las magnitudes y orientaciones de las tensiones principales  $\sigma_1$  y  $\sigma_3$  en los puntos 4, 5 y 6.

6. Comprobación de la resistencia de la viga por tensiones principales.

El punto 3 es el más peligroso de la sección desfavorable, donde,  $\sigma_1 = 1\,180$  kgf/cm<sup>2</sup> y  $\sigma_3 = -160$  kgf/cm<sup>2</sup>. Comprobamos la resis-

tencia en este punto por la tercera hipótesis de resistencia,

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma].$$

Puesto que  $1\ 180 + 160 = 1\ 340 < 1\ 600$ , la sección escogida resulta resistente también por tensiones principales.

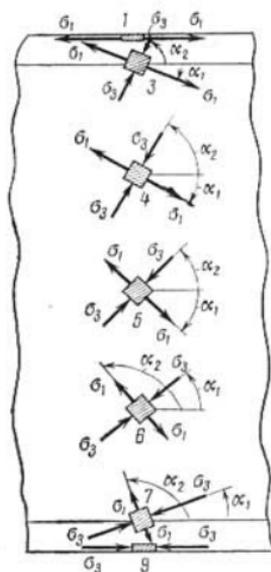


Fig. 76

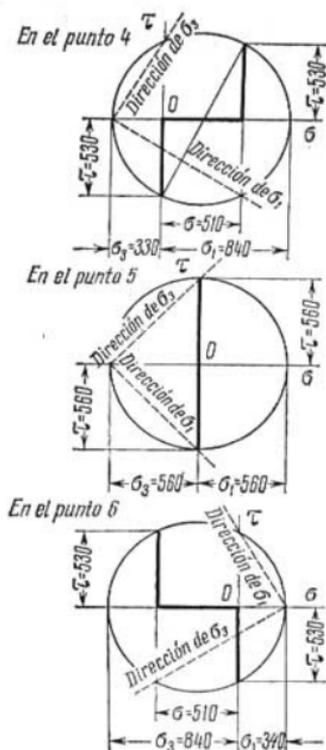


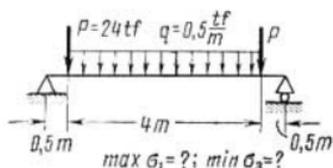
Fig. 77

**Problemas 364-367.** Determinar (analítica y gráficamente) las magnitudes y orientaciones de las tensiones principales máximas y mínimas  $\sigma_1$  y  $\sigma_3$  en las secciones indicadas de las vigas.

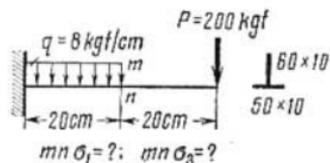
Notaciones:  $\max \sigma_1$  y  $\min \sigma_3$  son las tensiones principales máxima y mínima en la sección más desfavorable de la viga, donde la anchura de la sección varía bruscamente;  $\sigma_{1mn}$  y  $\sigma_{3mn}$ , las tensiones principales en los mismos puntos de la sección  $mn$ .

En el problema 366 el plano de la carga pasa por la línea de los centros de flexión de las secciones transversales.

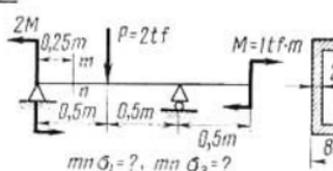
364



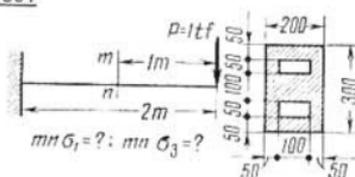
365



366



367

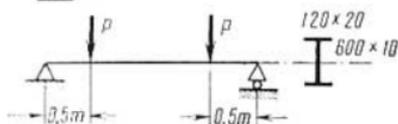


**Problemas 368-373.** Calcular las secciones transversales de las vigas y realizar la comprobación completa de su resistencia.

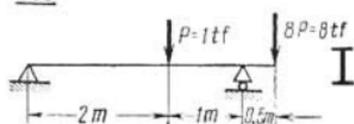
Admitase  $[\sigma] = 1\ 600\ \text{kgf/cm}^2$ ,  $[\tau] = 1\ 000\ \text{kgf/cm}^2$ . Compruébase, por la tercera hipótesis, la resistencia por tensiones principales.

En los problemas 372 y 373 admitase  $[\sigma] = 1\ 600\ \text{MN/m}^2$ ,  $[\tau] = 100\ \text{MN/m}^2$ . En el problema 368 obténgase la carga admisible y realícese la comprobación completa de la resistencia de la viga.

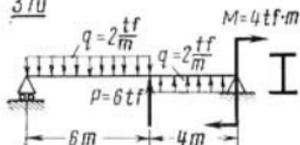
368



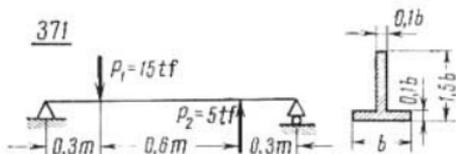
369



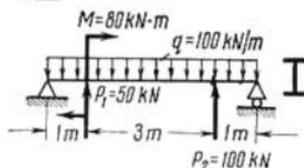
370



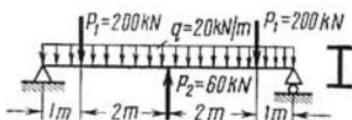
371



372



373



### § 5. Fundamentos del cálculo de la resistencia de las vigas por capacidad resistente

La diferencia entre el cálculo de la resistencia por tensiones admisibles y por capacidad resistente, en el caso de materiales plásticos, radica en las diferentes etapas del estado de deformación de la viga que se consideran como estado peligroso.

El cálculo por capacidad resistente se realiza generalmente por las tensiones normales, sin considerar el endurecimiento del

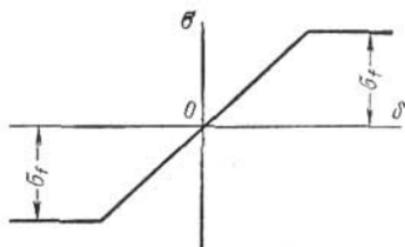


Fig. 78

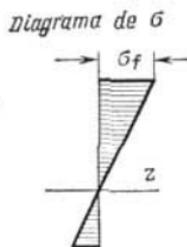


Fig. 79

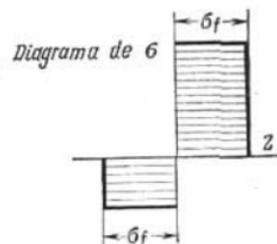


Fig. 80

material de la viga originado por la deformación plástica. Se escoge como base el diagrama de tracción y compresión idealizado del material de la viga (fig. 78).

Al calcular por tensiones admisibles se considera peligroso el estado de la viga cuando en la fibra extrema más tensada, la tensión normal alcanza el valor del límite de fluencia del material  $\sigma_f$  (fig. 79).

De acuerdo con el gráfico de  $\sigma$  (fig. 79), el momento flector correspondiente al estado peligroso de la viga será

$$M_f = \sigma_f W. \quad (111)$$

Introduciendo el coeficiente de seguridad, se obtiene la siguiente fórmula para la determinación del momento flector admisible,

$$M_{\max} = [\sigma] W. \quad (112)$$

Al calcular por la capacidad resistente, se considera peligroso el estado de la viga cuando en todos los puntos de la sección peligrosa las tensiones normales alcanzan valores iguales al límite de fluencia del material (fig. 80).

Este estado de acuerdo con el diagrama de  $\sigma$  (fig. 80) corresponde al valor siguiente del momento flector,

$$M_f' = 2\sigma_f S, \quad (113)$$

siendo  $S$  el momento estático de la mitad del área de la sección transversal de la viga respecto al eje central  $z$ .

Puesto que el aumento posterior del momento flector en esta sección es imposible, se dice que en la sección surge una «articulación plástica» y la viga se convierte así en un sistema cinemáticamente variable.

La fórmula para la determinación del momento flector admisible se obtiene, introduciendo el coeficiente de seguridad,

$$M'_{\max} = 2 [\sigma] S. \quad (114)$$

Comparando las fórmulas (112) y (114) se puede advertir que, en el caso de coeficientes de seguridad iguales, el momento flector

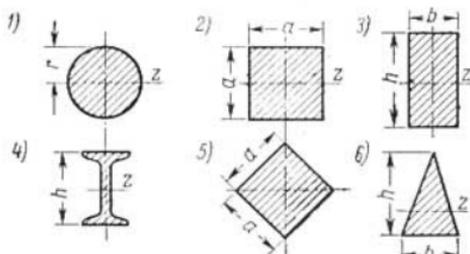


Fig. 81

admisibles  $M'_{\max}$  al calcular por capacidad resistente es  $\eta$  veces mayor que el admisible  $M_{\max}$  obtenido del cálculo por tensiones admisibles, siendo

$$\eta = \frac{M'_{\max}}{M_{\max}} = \frac{2S}{W}. \quad (115)$$

La magnitud  $\eta$  depende solamente de la configuración de la sección transversal de la viga.

**Ejemplo 41.** Dadas las formas de las secciones indicadas en la figura 81, determinar el valor del coeficiente  $\eta$ .

*Resolución.*

$$1) W = \frac{\pi r^3}{4}; S = \frac{2}{3} r^3; \eta = \frac{4r^3 \cdot 4}{3\pi r^3} = \frac{16}{3\pi} \approx 1,697.$$

$$2) W = \frac{a^3}{6}; S = \frac{a^3}{8}; \eta = \frac{3}{2} = 1,5.$$

$$3) W = \frac{bh^2}{6}; S = \frac{bh^2}{8}; \eta = 1,5.$$

$$4) \text{ Puesto que } W = \frac{2I}{h} \text{ resulta } \eta = \frac{2S}{W} = \frac{S}{I} h.$$

Del surtido, por ejemplo, para el perfil doble te N° 20a, se obtiene

$$I = 2030 \text{ cm}^4; S = 114 \text{ cm}^3; h = 20 \text{ cm}; \eta = \frac{114 \cdot 20}{2030} \approx 1,12.$$

$$5) W = \frac{a^4 2}{12 \cdot a \sqrt{2}} = \frac{a^3}{6 \sqrt{2}}; S = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{a \sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3;$$

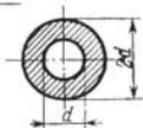
$$\eta = \frac{\sqrt{2} a^3 6 \sqrt{2}}{6 a^3} = 2.$$

$$6) W = \frac{bh^3}{36} \cdot \frac{3}{2 \cdot h} = \frac{bh^2}{24}; S = \frac{bh}{4} \left( \frac{2}{3} h - \frac{2}{3} \frac{h}{\sqrt{2}} \right) =$$

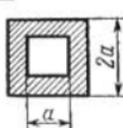
$$= \frac{bh^2}{12} (2 - \sqrt{2}); \eta = \frac{bh^2 (2 - \sqrt{2}) 24}{6bh^2} \approx 2,344.$$

**Problemas 374-379.** Calcular la fracción  $\eta = \frac{M'_{\max}}{M_{\max}}$  de los momentos flectores máximos  $M'_{\max}$  y  $M_{\max}$  correspondientes a los cálculos por capacidad resistente y por tensiones admisibles para las configuraciones indicadas de las secciones transversales de las vigas.

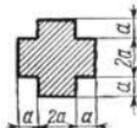
374



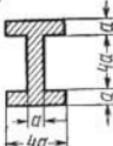
375



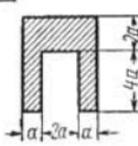
376



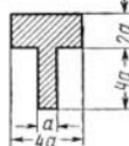
377



378



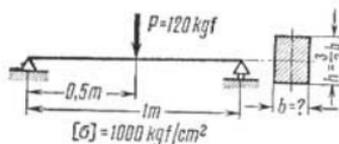
379



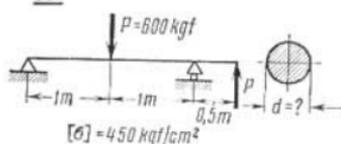
**Problemas 380-385.** Calcular las dimensiones necesarias de las vigas o las cargas admisibles partiendo del cálculo por tensiones admisibles y por capacidad resistente.

Notaciones:  $b, d, h, P_{\max}, q_{\max}$ , son las dimensiones necesarias de las secciones transversales de las vigas y las cargas admisibles correspondientes al cálculo por tensiones admisibles y  $b', d', h', P'_{\max}, q'_{\max}$ , las correspondientes al cálculo por capacidad resistente.

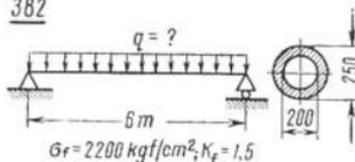
380



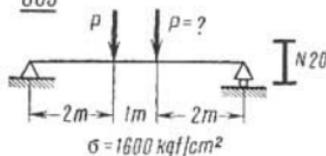
381



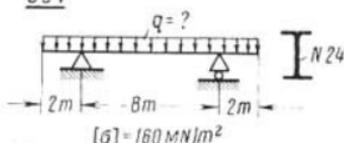
382



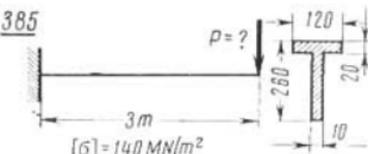
383



384



385



## § 6. Desplazamientos en la flexión

Los desplazamientos de las secciones de las vigas se caracterizan por:

1) los desplazamientos lineales de los centros de gravedad de las secciones transversales en dirección perpendicular al eje geométrico de la viga  $x$ , que se denominan *flechas* ( $f_x$ ).

2) los desplazamientos angulares de las secciones transversales, respecto a la línea neutra  $z$ , que se denominan *ángulos de giro de las secciones* ( $\theta_x$ ).

La flecha  $f_x$  se considera positiva si su dirección coincide con la dirección positiva del eje  $y$  perpendicular al eje geométrico de la viga  $x$ .

El ángulo de giro  $\theta_x$  se considera positivo, si el giro de la sección transversal de la viga alrededor de la línea neutra  $z$  ocurre en dirección opuesta a la de las manecillas del reloj.

Las flechas máximas y mínimas  $f_{\max}$ ,  $f_{\min}$ , así como los ángulos de giro  $\theta_{\max}$ ,  $\theta_{\min}$  se evalúan por sus valores absolutos.

Puesto que la fuerza cortante influye sensiblemente sobre la deformación solamente en el caso de vigas cortas, generalmente  $f$  y  $\theta$  se calculan considerando solamente el momento flector.

$f$  y  $\theta$  se pueden obtener por el método de los parámetros de origen, gráficamente, por el método de la viga conjugada y por otros métodos.

### Método de los parámetros de origen

Se consideran parámetros de origen la flecha  $f_0$  y el ángulo de giro  $\theta_0$  de la sección transversal de la viga en cuyo centro de gravedad se ubica el origen de las coordenadas.

Conviene situar el origen de las coordenadas en el centro de gravedad de la sección transversal extrema de la viga.

Las ecuaciones que determinan  $f_x$  y  $\theta_x$  en una sección arbitraria de la viga, situada a una distancia  $x$  del origen de las coordenadas (si las intensidades de las cargas distribuidas  $q_x$  son funciones potenciales) son las siguientes:

$$\begin{aligned}
 EI f_x = & EI f_0 + EI \theta_0 \frac{x}{1!} + \Sigma M \frac{(x - a_m)^2}{2!} + \Sigma P \frac{(x - a_p)^3}{3!} + \\
 & + \Sigma q_a \frac{(x - a_q)^4}{4!} - \Sigma q_b \frac{(x - b_q)^4}{4!} + \\
 & + \Sigma q'_a \frac{(x - a_q)^5}{5!} - \Sigma q'_b \frac{(x - b_q)^5}{5!} + \dots, \quad (116)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 EI \theta_x = & EI \theta_0 + \Sigma M \frac{(x - a_m)}{1!} + \Sigma P \frac{(x - a_p)^2}{2!} + \\
 & + \Sigma q_a \frac{(x - a_q)^3}{3!} - \Sigma q_b \frac{(x - b_q)^3}{3!} + \\
 & + \Sigma q'_a \frac{(x - a_q)^4}{4!} - \Sigma q'_b \frac{(x - b_q)^4}{4!} + \dots, \quad (117)
 \end{aligned}$$

siendo  $E$  el módulo de elasticidad longitudinal del material de la viga;

$I$  el momento de inercia de la sección transversal de la viga respecto al eje neutro  $z$ ;

$M$  el momento de los pares de fuerzas exteriores;

$a_m$  la distancia del origen de coordenadas a las secciones de aplicación de los pares de fuerzas (fig. 82, *a*);

$P$  las fuerzas cortantes concentradas (incluyendo las reactivas también);

$a_p$  las distancias de los puntos de aplicación de estas fuerzas situados sobre el eje de la viga, al origen de coordenadas (fig. 82, *b*);

$q_{a_q}, q'_{a_q}$  respectivamente, los valores de  $q_x$ , la primera, etc., derivadas de  $q_x$  respecto a  $x$ , para  $x = a_q$ , es decir, para las secciones transversales donde comienza la acción de las fuerzas distribuidas (fig. 82, *c*)

$q_{bq}$ ,  $q'_{bq}$  respectivamente, los valores de  $q_x$ , de la primera, etc., derivadas de  $q_x$  respecto a  $x$ , para  $x = b_q$ , es decir, para las secciones transversales donde termina la acción de las fuerzas distribuidas que se encuentran antes de las secciones que se analizan (fig. 82, c).

Si el origen de coordenadas se sitúa en el centro de gravedad de la sección extrema derecha de la viga y se dirige el eje  $x$  hacia la izquierda, entonces para la dirección indicada de las cargas, en las

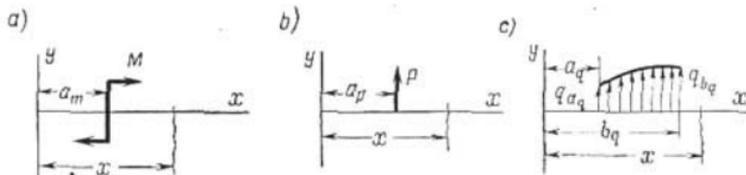


Fig. 82

fórmulas (116) y (117), los términos que reflejan la influencia de los momentos de los pares exteriores figurarán con signo negativo y las direcciones de los giros de las secciones de las vigas obtenidas por la fórmula (117) serán opuestas a las admitidas anteriormente.

Es suficiente recordar únicamente la fórmula (116), de la cual, derivando, se obtiene la fórmula (117).

Los dos parámetros de origen  $f_0$  y  $\theta_0$  se obtienen de las siguientes condiciones de apoyo de la viga:

- 1) en el empotramiento tanto la flecha como el ángulo de giro de la sección son nulos;
- 2) en los apoyos articulados las flechas son iguales a cero.

En el caso de vigas simétricas, se analiza solamente una mitad y se utiliza la condición de simetría que consiste en que el ángulo de giro de la sección que coincide con el eje de simetría de la viga es igual a cero, o en que la flecha de la sección que coincide con el eje de antisimetría de la viga, es nula.

Conviene plantear solamente una de las ecuaciones (116) y (117) para una sección cualquiera del último tramo de la viga, incluyendo la carga en el mismo orden que se encuentra a partir del origen de coordenadas. Cada una de estas ecuaciones vale también para determinar  $f_x$  y  $\theta_x$  en cualquier tramo de la viga, si se excluyen los miembros correspondientes alas cargas ubicadas en los tramos posteriores.

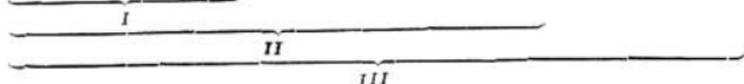
**Ejemplo 42.** Dado:  $q$ ,  $a$ ,  $P = 4qa$ ,  $M = qa^2$ ,  $EI$  (fig. 83). Determinar  $f_x$  y  $\theta_x$ .

*Resolución.* De la ecuación de la estática  $\Sigma M_B = 0$  obtenemos,

$$-qa \cdot \frac{5}{2}a + A \cdot 2a - 4qa \cdot a + qa^2 = 0; \quad A = \frac{11}{4}qa.$$

De la ecuación (116) hallamos para el último tramo de la derecha de la viga,

$$EI f_x = EI f_0 + EI \theta_0 x - q \frac{x^4}{24} + \frac{11}{4} qa \frac{(x-a)^3}{24} + q \frac{(x-a)^4}{24} - 4qa \frac{(x-2a)^3}{6}.$$



Para el tramo I,  $0 \leq x \leq a$ .  
 Para el tramo II,  $a \leq x \leq 2a$ .  
 Para el tramo III,  $2a \leq x \leq 3a$ .

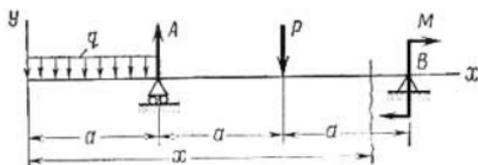


Fig. 83

De acuerdo con las condiciones de apoyo tendremos: en el apoyo izquierdo,

$$EI f_a = EI f_0 + EI \theta_0 a - \frac{qa^4}{24} = 0,$$

en el derecho,

$$EI f_{3a} = EI f_0 + EI \theta_0 3a + \frac{88}{24} qa^4 - \frac{2}{3} qa^4 - \frac{81}{24} qa^4 + \frac{16}{24} qa^4 = 0,$$

es decir,

$$\left. \begin{aligned} EI f_0 + EI \theta_0 a - \frac{qa^4}{24} &= 0, \\ EI f_0 + 3EI \theta_0 + \frac{7}{24} qa^4 &= 0, \end{aligned} \right\}$$

de donde se obtiene,

$$2EI \theta_0 a + \frac{8}{24} qa^4 = 0 \quad \text{y} \quad \theta_0 = -\frac{1}{6} \frac{qa^3}{EI}.$$

Introduciendo este valor en la primera ecuación hallaremos,

$$EI f_0 - \frac{1}{6} qa^4 - \frac{1}{24} qa^4 = 0,$$

obteniendo  $f_0 = \frac{5}{24} \frac{qa^4}{EI}$ .

Las ecuaciones que determinan  $f_x$  y  $\theta_x$  en una sección arbitraria de un tramo cualquiera, serán

$$EI f_x = \frac{5}{24} qa^4 - \frac{1}{6} qa^3 x - \frac{1}{24} qx^4 + \frac{11}{24} qa(x-a)^3 +$$

$$| \quad 0 \leq x \leq a \quad |$$

$$+ \frac{1}{24} q(x-a)^4 - \frac{2}{3} qa(x-2a)^3.$$

$$\| \quad a \leq x \leq 2a \quad | \quad 2a \leq x \leq 3a \quad |$$

$$EI \theta_x = -\frac{1}{6} qa^3 - \frac{1}{6} qx^3 + \frac{11}{8} qa(x-a)^2 +$$

$$0 \leq x \leq a \quad |$$

$$+ \frac{1}{6} q(x-a)^3 - 2qa(x-2a)^2.$$

$$a \leq x \leq 2a \quad | \quad 2a \leq x \leq 3a \quad |$$

Por ejemplo, el ángulo de giro de la sección sobre el apoyo izquierdo es,

$$\theta_a = \frac{1}{EI} \left( -\frac{1}{6} qa^3 - \frac{1}{6} qa^3 \right) = -\frac{qa^3}{3EI};$$

el ángulo de giro de la sección sobre el apoyo derecho,

$$\theta_{3a} = \frac{qa^3}{EI} \left( -\frac{1}{6} - \frac{27}{6} + \frac{44}{8} + \frac{8}{6} - 2 \right) = \frac{1}{6} \frac{qa^3}{EI},$$

y la flecha de la viga en el lugar de aplicación de la fuerza concentrada,

$$f_{2a} = \frac{qa^4}{EI} \left( \frac{5}{24} - \frac{2}{6} - \frac{16}{24} + \frac{11}{24} + \frac{1}{24} \right) = -\frac{7}{24} \frac{qa^4}{EI}.$$

En la figura 84 está representada la configuración aproximada de la línea elástica de la viga (línea de puntos) así como las flechas y los ángulos de giro de las secciones.

Se debe tener en cuenta que en aquellas secciones de la viga donde el momento flector es igual a cero, en la línea elástica deberá existir un punto de inflexión. En los tramos de la viga donde el momento flector es positivo, la convexidad de la línea elástica estará dirigida hacia abajo y allí donde el momento flector es negativo, hacia arriba (esto se señala en la figura 84).

**Problemas 386-387.** En el problema 386 determínese la flecha  $f$  y los ángulos de giro  $\theta$  de las secciones de las vigas integrando las ecuaciones diferenciales de la línea elástica:

1) en los problemas 222-226, las flechas y ángulos de giro de los extremos libres;

2) en los problemas 228, 229 y 231, las flechas en las secciones medias de los vanos y los ángulos de giro en los apoyos;

3) en los problemas 227 y 230, las flechas máximas, en valor absoluto, y los ángulos de giro en los apoyos.

Las cargas, longitudes y rigideces de las secciones de las vigas se consideran conocidas.

En el problema 387 hállese la diferencia, en por ciento, entre la flecha en la sección media del vano de la viga representada en la

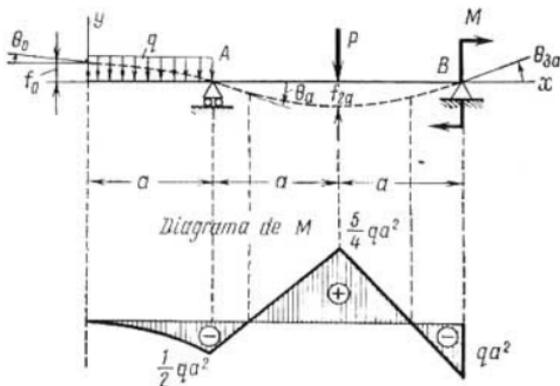


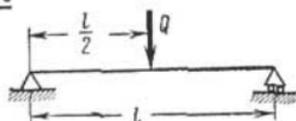
Fig. 84

figura, determinada por la ecuación aproximada de la línea elástica y la flecha en el mismo lugar, pero obtenida por la ecuación del arco de la circunferencia.

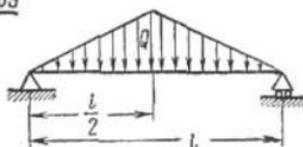


**Problemas 388-391.** Determinar en cuanto por ciento el momento flector máximo y la flecha en las vigas representadas en las figuras 388-391 son mayores que en el caso de una viga de dos apoyos solidada por la misma carga  $Q$ , pero distribuida uniformemente sobre la longitud.

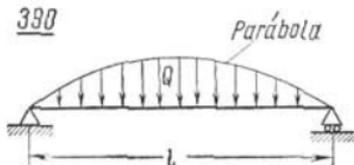
388



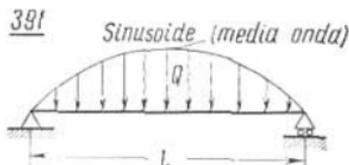
389



390

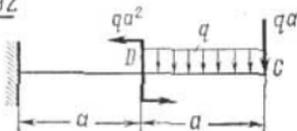


391

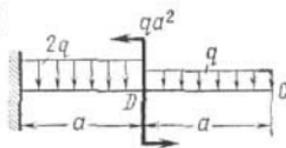


**Problemas 392-409.** Calcular las flechas  $f_c$  de las secciones  $C$  y los ángulos de giro  $\theta_D$  de las secciones  $D$  de las vigas. Considérese que  $q$ ,  $a$ ,  $E$  y  $I$  son conocidos.

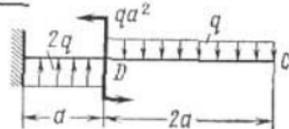
392



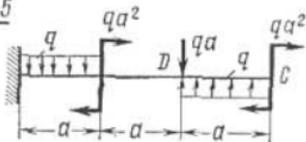
393



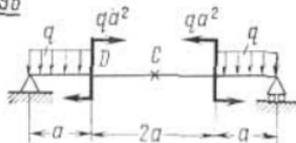
394



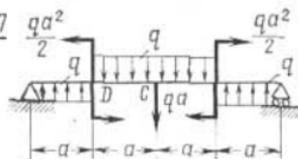
395



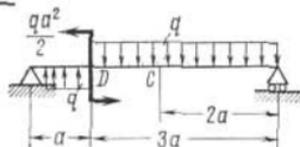
396



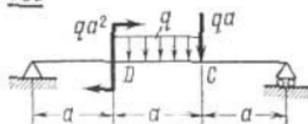
397

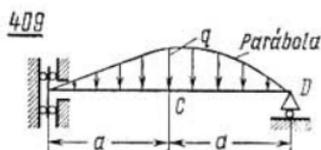
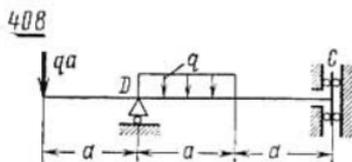
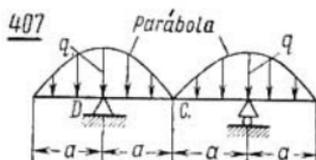
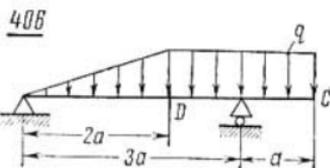
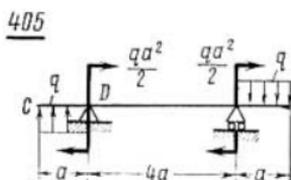
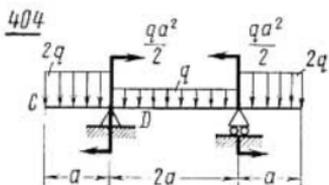
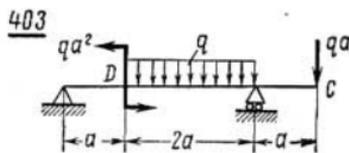
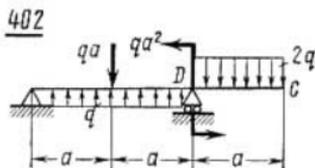
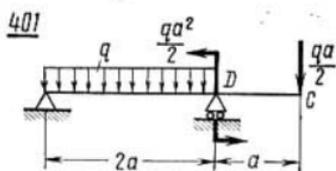
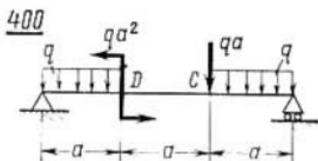


398



399





### Método de la viga conjugada

En la viga dada se construye el diagrama de los momentos flectores que se interpreta como una carga distribuida ficticia aplicada a la viga conjugada. El ángulo de giro  $\theta_x$  de una sección de la viga dada se determina como la razón entre la fuerza cortante  $Q_{F_x}$  en la misma sección de la viga conjugada y la rigidez de la sección de la viga dada, es decir,

$$\theta_x = \frac{Q_{F_x}}{EI}. \quad (118)$$

La flecha  $f_x$  de una sección cualquiera de la viga dada se determina como la razón entre el momento flector  $M_{F_x}$  en la misma sección de la viga conjugada y la rigidez  $EI$  de la viga dada, es decir,

$$f_x = \frac{M_{F_x}}{EI}. \quad (119)$$

Según las fórmulas (118) y (119) las condiciones de deformación en los apoyos y en los límites de la viga deberán transformarse en condiciones para  $Q_F$  y  $M_F$  de la viga conjugada.

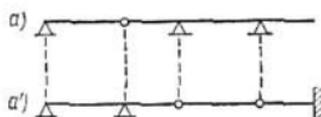


Fig. 85

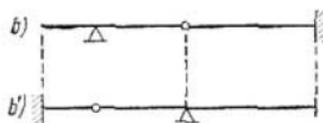


Fig. 86

Para obtener la viga conjugada correspondiente a la viga dada será necesario seguir las reglas siguientes:

- 1) el apoyo articulado en el extremo de la viga dada permanece siendo apoyo articulado en el extremo de la viga conjugada;
- 2) el apoyo articulado que no está situado en el extremo de la viga dada pasa a ser una articulación flotante de la viga conjugada;
- 3) el extremo empotrado de la viga dada pasa a ser extremo libre de la viga conjugada;
- 4) el extremo libre de la viga dada pasa a ser extremo empotrado de la viga conjugada;
- 5) la articulación flotante de la viga dada se transforma en un apoyo articulado de la viga conjugada.

En las figuras 85 y 86 se ilustra el empleo de estas reglas para la obtención de las vigas conjugadas:  $a$  y  $b$  son las vigas dadas,  $a'$  y  $b'$ , las correspondientes vigas conjugadas.

El método de la viga conjugada es cómodo para la determinación de desplazamientos de secciones aisladas de la viga, cuando es fácil de obtener las áreas y los centros de gravedad de los diagramas de los momentos flectores correspondientes a la carga dada.

Para que se mantengan las reglas admitidas para los signos de las flechas y los ángulos de giro de la sección, el diagrama positivo de los momentos flectores en la viga dada se debe interpretar como carga ficticia que actúa de abajo arriba y el diagrama de los momentos flectores negativo de la viga dada, como carga ficticia que actúa sobre la viga conjugada de arriba abajo.

**Ejemplo 43.** Dado:  $P$ ,  $l$ ,  $E$  e  $I$  (fig. 87), determinar  $\theta_C$ ,  $\theta_A$  y  $f_A$ .

**Resolución.** El diagrama de los momentos flectores en la viga dada  $ABC$  está representado por el triángulo negativo de altura  $Pl$  en la sección  $B$ .

Interpretamos este gráfico como una carga ficticia para la viga conjugada  $A'B'C'$ .

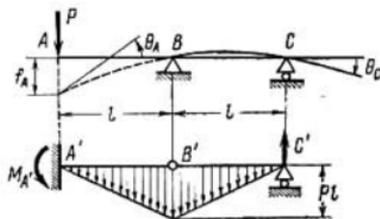


Fig. 87

De la suma de los momentos respecto a la articulación flotante  $B'$  (de las fuerzas situadas a la derecha de ésta) obtenemos la reacción

$$C' = \frac{1}{l} Pl \frac{l}{2} \frac{l}{3} = \frac{Pl^2}{6}.$$

Por lo tanto

$$Q_{F_{C'}} = -C' = -\frac{Pl^2}{6}.$$

Puesto que

$$Q_{F_{A'}} = -\frac{Pl^2}{6} + Pl = \frac{5}{6} Pl^2$$

y

$$M_{F_{A'}} = \frac{Pl^2}{6} 2l - Pl^2 l = -\frac{2}{3} Pl^3,$$

resulta

$$\theta_C = \frac{Q_{F_{C'}}}{EI} = -\frac{Pl^2}{6EI}; \quad \theta_A = \frac{Q_{F_{A'}}}{EI} = \frac{5}{6} \frac{Pl^2}{EI};$$

$$j_A = \frac{M_{F_{A'}}}{EI} = -\frac{2}{3} \frac{Pl^3}{EI}.$$

**Ejemplo 44.** Dados  $M$ ,  $a$ ,  $E$  e  $I$  (fig. 88), determinar  $f_{\max}$ .

*Resolución.* La viga conjugada constituye una viga de dos apoyos solicitada por la carga ficticia uniformemente distribuida de intensidad  $M$  en el segundo tramo.

De la suma de los momentos de las fuerzas respecto a los apoyos  $A'$  y  $B'$  determinamos las reacciones ficticias,

$$B' = \frac{6}{5} Ma \quad \text{y} \quad A' = \frac{4}{5} Ma.$$

El diagrama de  $Q_F$  está representado en la figura 88. En la sección donde  $Q_F = 0$ ,  $M_F = M_{F_{\max}}$ .

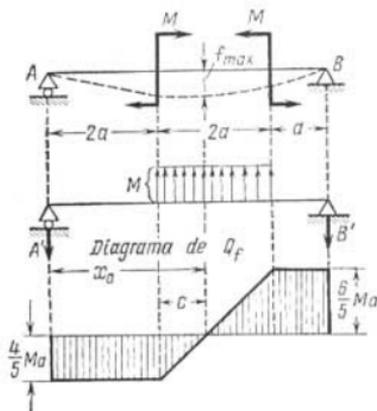


Fig. 38

Puesto que,

$$|Q_F| = A' - Mc = \frac{4}{5} Ma - Mc = 0$$

resulta,

$$c = \frac{4}{5} a$$

y por lo tanto,

$$x_0 = 2a + c = \frac{14}{5} a.$$

Hallamos  $M_{F_{\max}}$ ,

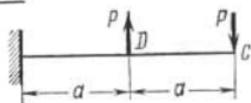
$$M_{F_{\max}} = -A'x_0 + M \frac{c^2}{2} = -\frac{4}{5} Ma \frac{14}{5} a + \frac{M}{2} \cdot \frac{16}{25} a^2 = -\frac{48}{25} Ma^2.$$

La flecha máxima es,

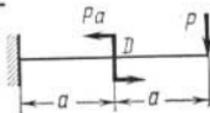
$$f_{\max} = \frac{M_{F_{\max}}}{EI} = -\frac{48}{25} \frac{Ma^2}{EI}.$$

**Problemas 410-421.** Determinar las flechas  $f_c$  en las secciones  $C$  y los ángulos de giro  $\theta_D$  en las secciones  $D$  de las vigas. Considérese que tanto en este párrafo como en los siguientes  $P$ ,  $q$ ,  $M$ ,  $a$   $E$  e  $I$  son magnitudes conocidas.

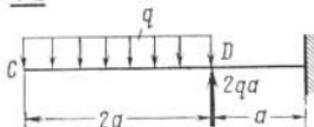
410



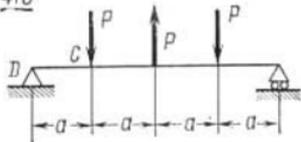
411



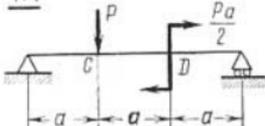
412



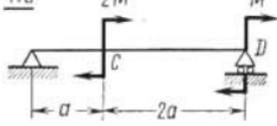
413



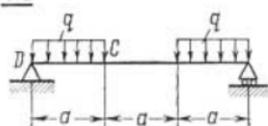
414



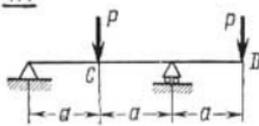
415



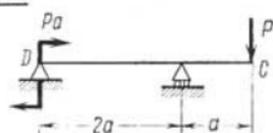
416



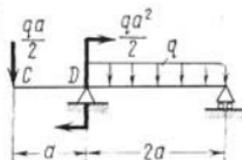
417



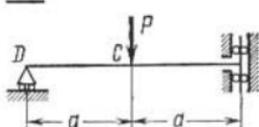
418



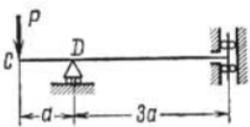
419



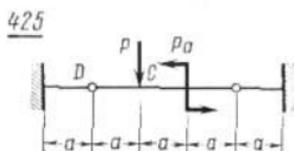
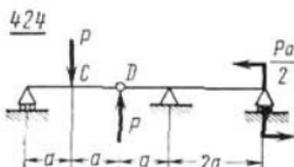
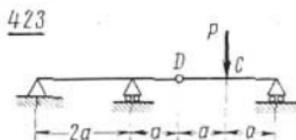
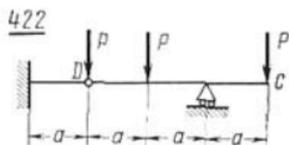
420



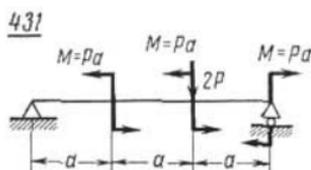
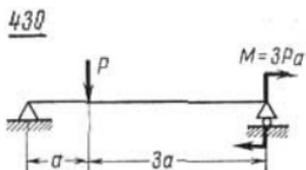
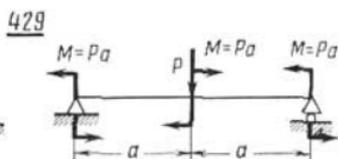
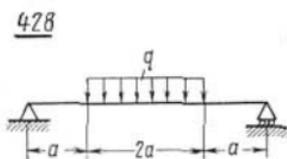
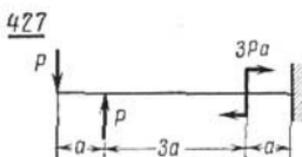
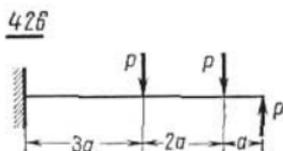
421



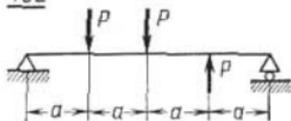
**Problemas 422-425.** Determinar las flechas  $f_c$  de las secciones  $C$  y los ángulos de giro  $\theta_{D_1}$  y  $\theta_{D_2}$  de las secciones situadas a la derecha y a la izquierda de la articulación  $D$  de las vigas.



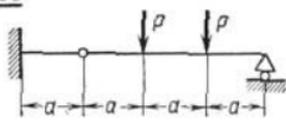
**Problemas 426-433.** Determinar las flechas máximas, en valor absoluto,  $|f|_{\max}$  y los ángulos de giro  $|\theta|_{\max}$  de las secciones de las vigas. Representar la configuración de las líneas elásticas de las vigas.



432

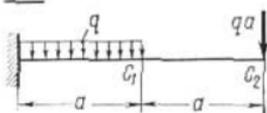


433

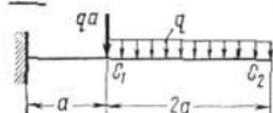


**Problemas 434-443.** Determinar las flechas  $f$ ,  $f_1$  y  $f_2$  de las secciones  $C$ ,  $C_1$  y  $C_2$  de las vigas empleando para ello los valores de las flechas y ángulos de giro de las vigas más simples, dados en la figura 99.

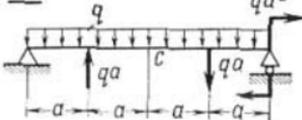
434



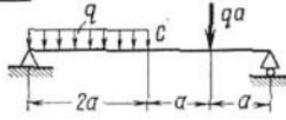
435



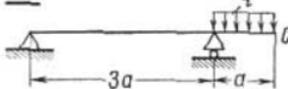
436



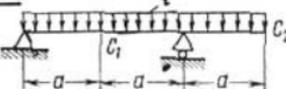
437



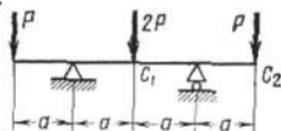
438



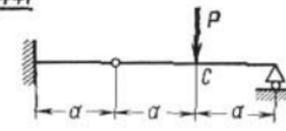
439



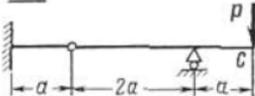
440



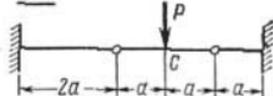
441



442

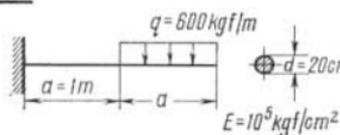


443

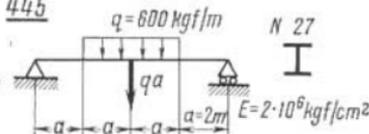


**Problemas 444-448.** Determinar, por cualquier método, las flechas máximas, en valor absoluto,  $|f|_{\max}$  de las vigas.

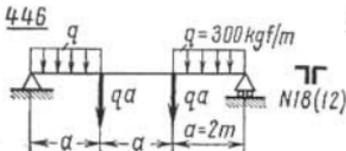
444



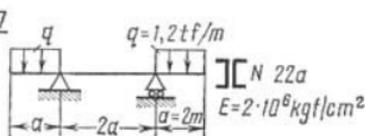
445



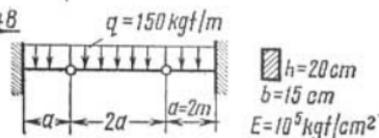
446



447

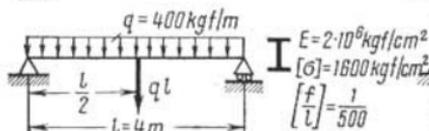


448

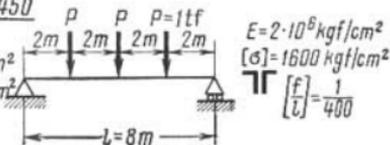


**Problemas 449-453.** Escoger las dimensiones de las secciones transversales de las vigas que satisfagan las condiciones de resistencia y de rigidez.

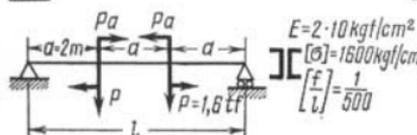
449



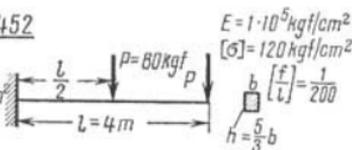
450



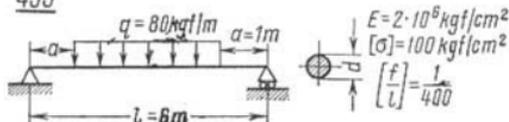
451



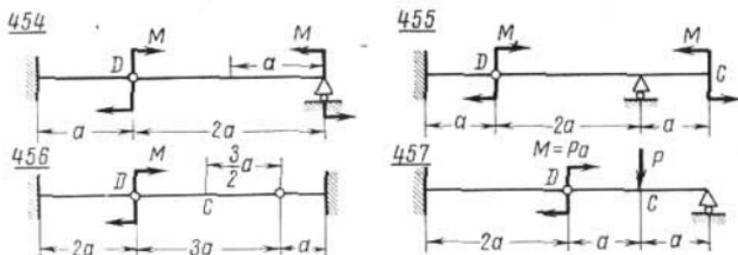
452



453



**Problemas 454-457.** Determinar la relación de las flechas de las secciones  $C$  de las vigas que resultan según se encuentre el momento  $M$  a la derecha o a la izquierda de la articulación  $D$ .



### Método gráfico

Si se construye gráficamente en la viga conjugada el diagrama de los momentos flectores ficticios  $M_{F_x}$  y de la fuerza cortante, ficticia también,  $Q_{F_x}$ , entonces la curva funicular (de manera aproximada, el polígono funicular) representará la línea elástica de la viga dada y la línea de la fuerza cortante, la de la variación del ángulo de giro de las secciones.

Los segmentos verticales  $y_x$  entre la curva funicular y su línea de cierre darán magnitudes proporcionales a las flechas  $f_x$  de la viga dada y los segmentos verticales  $y'_x$  entre la línea de la fuerza cortante ficticia y la de sus valores nulos, magnitudes proporcionales a los ángulos de giro  $\theta_x$  de las secciones.

Puesto que,

$$f_x = \frac{M_{F_x}}{EI} = y_x \frac{H(\xi\eta)}{EI}, \quad (120)$$

y

$$\theta_x = \frac{Q_{F_x}}{EI} = y'_x \frac{(\eta)}{EI}, \quad (121)$$

siendo  $H$  la distancia polar del plano de los vectores;  $\frac{1}{\xi}$ , la escala lineal de la viga;  $\frac{1}{\eta}$ , la escala de los vectores que determinan las áreas de las partes de los diagramas de los momentos flectores de la viga dada y  $EI$ , la rigidez de la sección de la viga; la escala de las flechas será  $\frac{EI}{H(\xi\eta)}$  y la de los ángulos de giro,  $\frac{EI}{\eta}$ . Las magnitudes

$H$ ,  $\xi$  y  $\eta$  se deben escoger de tal manera que en el dibujo  $y_x$  y  $y'_x$  se puedan medir con suficiente exactitud.

Generalmente por el método gráfico se construye solamente la línea elástica de la viga. En el método gráfico, la carga ficticia se puede aplicar (lo que es más cómodo) no a la viga conjugada, sino a la dada. Entonces para trazar la línea de cierre (líneas de cierre) del polígono funicular es necesario atenerse a las siguientes reglas que se deducen de las condiciones de apoyo de la viga:

- 1) en el empotramiento la línea de cierre es tangente al polígono funicular;
- 2) en el apoyo articulado la línea de cierre cruza el polígono funicular;
- 3) en la articulación flotante la línea de cierre se quiebra (al acercarnos a la articulación flotante por la derecha y por la izquierda las líneas de cierre se cruzan).

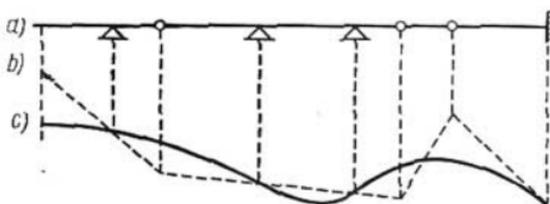


Fig. 89

En la figura 89 se ilustra el empleo de estas reglas para el trazado de la línea de cierre (líneas de cierre). En ella, a) corresponde a la viga dada, b) a la línea funicular y c) a la de cierre.

En los ejemplos 45 y 46 se ilustra la construcción gráfica de la línea elástica de las vigas.

### Ejemplo 45.

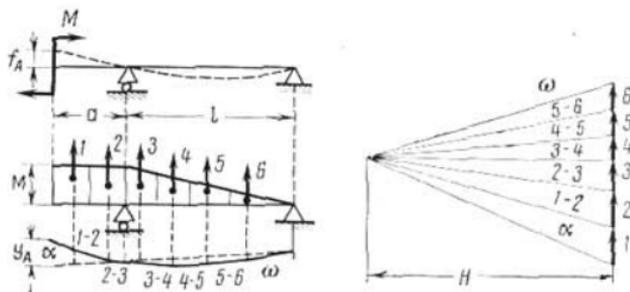


Fig. 90

### Ejemplo 46.

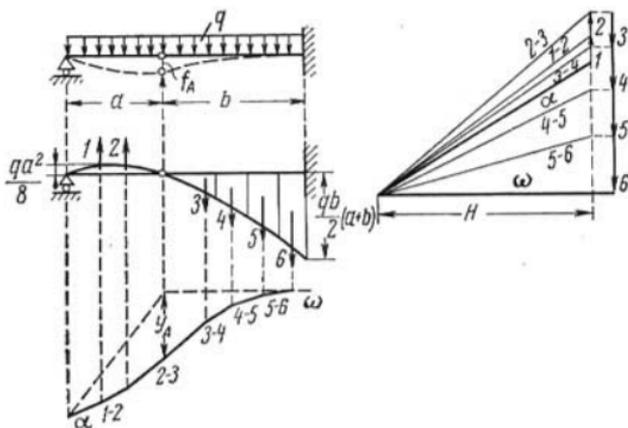


Fig. 91

En algunos casos, además de la condición de resistencia, se plantea también la condición de rigidez de la viga. Esta condición consiste en que la relación del valor máximo absoluto de la flecha  $|f|_{\max}$  a la luz de la viga  $l$  deberá ser inferior a la magnitud dada  $\frac{1}{n}$  es decir,

$$\frac{|f|_{\max}}{l} \leq \frac{1}{n}. \quad (122)$$

Según sea el destino de la viga y su material, la magnitud admisible de  $\frac{1}{n}$  es diferente. Por ejemplo, en el caso de vigas metálicas se admite,

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{200} \div \frac{1}{4000}.$$

### § 7. Vigas de sección variable

Si las dimensiones de la sección transversal de la viga varían de una manera insignificante y suave en el sentido longitudinal, entonces se puede calcular las tensiones por las fórmulas deducidas para la viga de sección constante.

Se consideran racionales las vigas de igual resistencia en las cuales, en las fibras extremas de cada sección transversal las tensiones normales son iguales.

### Diseño de vigas de igual resistencia

En el caso de flexión pura, la viga de igual resistencia es de sección constante. En el caso general de la flexión, la viga de igual resistencia tendrá ya sección variable, que varía según la ecuación,

$$W_x = \frac{|M_x|}{[\sigma]}, \quad (123)$$

siendo  $M_x$  el momento flector en una sección arbitraria;

$W_x$  el módulo de la sección.

Si en alguna sección transversal de la viga, el momento flector resulta igual a cero o es de magnitud muy pequeña, mientras que la fuerza cortante es diferente de cero o tiene magnitud considerable, entonces la forma de la viga de igual resistencia obtenida por la ecuación (123) se corrige con la condición de resistencia (104) por tensiones tangenciales.

Seguidamente se dan algunos ejemplos de construcción de vigas de igual resistencia.

**Ejemplo 47.** Dado:  $P$ ,  $l$ ,  $h = \text{const}$ ,  $[\sigma]$ ,  $[\tau]$  (fig. 92). Determinar  $b_x$ .

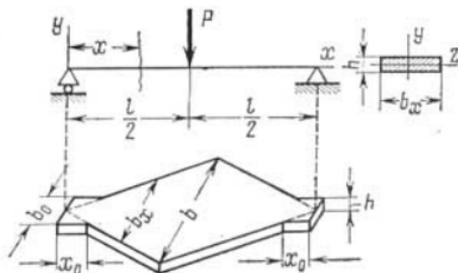


Fig. 92

*Resolución.* El momento flector en una sección arbitraria es,

$$M_x = \frac{Px}{2}.$$

y el módulo de esta sección,

$$W_x = \frac{b_x h^2}{6}.$$

Según la ecuación (123),

$$\frac{b_x h^2}{6} = \frac{Px}{2[\sigma]}$$

de donde se obtiene,

$$b_x = \frac{3Px}{h^2[\sigma]}; \quad b_{x=0} = 0; \quad b_{x=\frac{l}{2}} = \frac{3}{2} \frac{Pl}{h^2[\sigma]}.$$

Puesto que en las secciones situadas sobre los apoyos,  $M = 0$  y  $Q = \frac{P}{2}$ , no se puede admitir aquí una anchura igual a cero. La anchura de la sección  $b_0$  se determina de la condición de resistencia por tensiones tangenciales,

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{Q}{F} = \frac{3}{4} \frac{P}{b_0 h} \leq [\tau],$$

obteniendo

$$b_0 \geq \frac{3}{4} \frac{P}{h[\tau]}.$$

La configuración de la viga de igual resistencia se da en la figura 92.

La longitud  $x_0$  de los extremos de la viga de anchura constante  $b_0$  se obtiene de la condición siguiente:

$$b_0 = \frac{3}{4} \frac{P}{h[\tau]} = \frac{3Px_0}{h^2[\sigma]},$$

de donde

$$x_0 = \frac{h}{4} \frac{[\sigma]}{[\tau]}.$$

Puesto que  $[\tau] = (0,5 \div 0,6) [\sigma]$ , resulta que  $x_0 \approx (0,5 \div 0,42) h$ .

**Ejemplo 48.** Dado:  $P$ ,  $l$ ,  $[\sigma]$ ,  $[\tau]$  (fig. 93). Determinar  $d_x$ .

*Resolución.*  $M_x = -Px$ ;  $W_x = \frac{\pi d_x^3}{32}$ .

De la ecuación (118) hallamos,

$$\frac{\pi d_x^3}{32} = \frac{Px}{[\sigma]},$$

por lo tanto,

$$d_x = 2 \sqrt[3]{\frac{4Px}{\pi[\sigma]}}; \quad d_{x=0} = 0; \quad d_{x=l} = 2 \sqrt[3]{\frac{4Pl}{\pi[\sigma]}}.$$

Puesto que cuando  $x = 0$ ,  $M = 0$  y  $Q = -P$ , corregimos la forma de la viga de igual resistencia partiendo de la condición de

resistencia por tensiones tangenciales, es decir,

$$\tau_{\max} = \frac{4}{3} \frac{|Q|}{F} = \frac{4P}{3 \frac{\pi d_0^2}{4}} \leq [\tau].$$

obteniendo

$$d_0 \geq 4 \sqrt{\frac{P}{3\pi[\tau]}}.$$

La configuración obtenida de la viga de igual resistencia está representada en la figura 93, a.

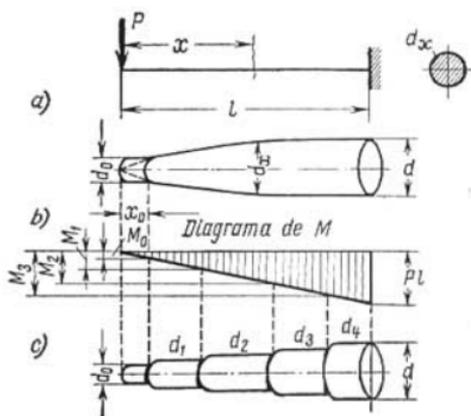


Fig. 93

La longitud  $x_0$  del extremo de la viga de diámetro constante  $d_0$  se obtiene de la condición,

$$d_0 = 4 \sqrt{\frac{P}{3\pi[\tau]}} = 2 \sqrt[3]{\frac{4Px_0}{\pi[\sigma]}}$$

de donde hallamos,

$$x_0 = \frac{a_0}{6} \frac{[\sigma]}{[\tau]} \approx (0,33 \div 0,26) d_0.$$

Si la viga de igual resistencia tiene configuración compleja entonces se sustituye por una viga escalonada circunscrita en la viga de igual resistencia. Conociendo las magnitudes de  $d_0$  y  $d$  se escogen valores intermedios arbitrarios del diámetro, por ejemplo,

$$d_0 < d_1 < d_2 < d_3 < d,$$

se determina después,

$$W_0 = \frac{\pi d_0^3}{32}, \quad W_1 = \frac{\pi d_1^3}{32}, \quad W_2 = \frac{\pi d_2^3}{32}, \quad W_3 = \frac{\pi d_3^3}{32}$$

y los momentos

$$M_0 = W_0 [\sigma], \quad M_1 = W_1 (\sigma), \quad M_2 = W_2 (\sigma), \quad M_3 = W_3 (\sigma),$$

para los cuales  $d_0$ ,  $d_1$ ,  $d_2$  y  $d_3$  garantizan la resistencia.

Ubicando sobre el diagrama de los momentos flectores (fig. 93, b)  $M_0$ ,  $M_1$ ,  $M_2$  y  $M_3$  se obtienen las longitudes de los correspondientes escalones de la viga (fig. 93, c).

#### Determinación de los desplazamientos en las vigas de sección variable

Los desplazamientos en vigas de sección variable se pueden obtener analíticamente, por el método de la viga conjugada o gráficamente.

En el *método analítico* se plantea para cada tramo de la viga la ecuación diferencial de la línea elástica,

$$Ey'' = \frac{M_x}{I_x},$$

siendo  $I_x$  el momento de inercia variable de la sección de la viga respecto a la línea neutra.

Con una doble integración se hallan las funciones de las variaciones de los ángulos de giro  $\theta_x$  de las secciones y de las flechas  $f_x$

$$E\theta_x = Ey' = \int \frac{M_x}{I_x} dx + C_1 \quad (125)$$

y

$$Ef_x = Ey = \int \left[ \int \frac{M_x}{I_x} dx \right] dx + C_1 x + C_2. \quad (126)$$

Las constantes de integración  $C_1$  y  $C_2$  se determinan de las condiciones de apoyo de la viga. En el caso de varios tramos se emplean también las condiciones de borde, es decir, las condiciones de igualdad de los ángulos de giro y de las flechas al acercarnos al límite entre dos tramos por la derecha y por la izquierda. Los tramos se caracterizan, no solamente por la carga, sino también por las leyes de variación de las secciones transversales de la viga.

En lugar de la ecuación (124) se puede emplear también la ecuación siguiente:

$$EI_0 y'' = M_x \frac{I_0}{I_x} = M_c, \quad (127)$$

siendo  $I_0$  el momento de inercia de la sección constante a la que convencionalmente se reduce la viga,

$$M_c = M_x \frac{I_0}{I_x} \text{ el momento flector convencional.}$$

**Ejemplo 49.** Dado:  $P$ ,  $l$ ,  $h = \text{const}$  (viga de igual resistencia de sección rectangular de altura  $h$  constante y de anchura  $b_x$  variable, vease ejemplo 47),  $E$  (fig. 94).

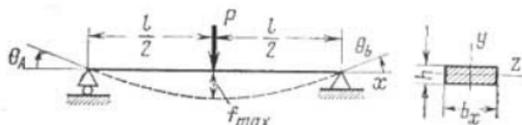


Fig. 94

Determinar  $\theta_{\max}$  y  $f_{\max}$ .

*Resolución.* De acuerdo con el ejemplo 47,

$$M_x = \frac{P}{2} x \text{ e } I_x = \frac{b_x h^3}{12} = \frac{Phx}{4[\sigma]}$$

por lo tanto la ecuación (124) será,

$$Ey'' = \frac{M_x}{I_x} = \frac{2[\sigma]}{h} \quad \text{ó} \quad \frac{Eh}{2[\sigma]} y'' = 1.$$

Después de una doble integración,

$$\frac{Eh}{2[\sigma]} y' = x + C_1 \quad \text{y} \quad \frac{Eh}{2[\sigma]} y = \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2.$$

Puesto que cuando  $x = 0$ ,  $y = 0$  y cuando  $x = \frac{l}{2}$ ,  $y' = 0$ , resulta  $C_2 = 0$  y  $C_1 = -\frac{l}{2}$ .

Por lo tanto,

$$\theta_{\max} = \theta_A = -\theta_B = (y')_{x=0} = \frac{2C_1[\sigma]}{Eh} = -\frac{l[\sigma]}{Eh}$$

y

$$f_{\max} = (y)_{x=\frac{l}{2}} = -\frac{l^2[\sigma]}{4Eh}.$$

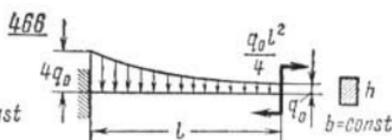
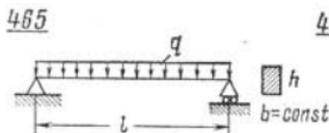
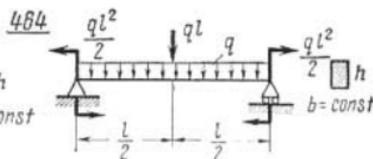
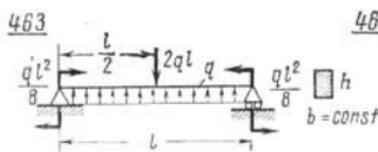
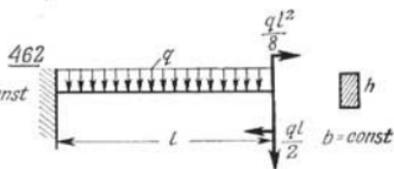
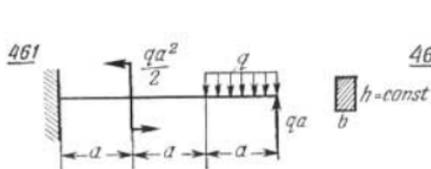
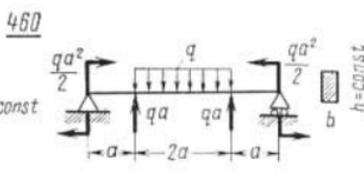
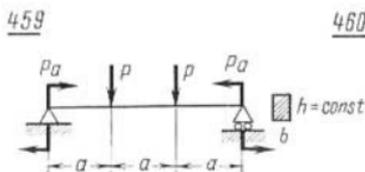
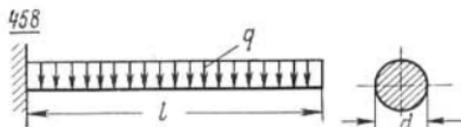
Del ejemplo 47 se sabe que,

$$[\sigma] = \frac{3}{2} \frac{Pl}{h^2 l}$$

y como consecuencia,

$$\theta_{\max} = -\frac{3 Pl^2}{2 Eh^3b} \quad \text{y} \quad f_{\max} = -\frac{3 Pl^3}{8 Eh^3b}.$$

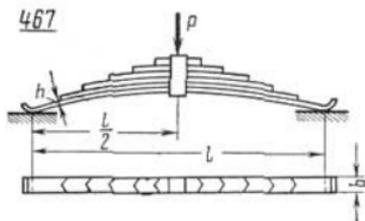
**Problemas 458-466.** Determinar la configuración de las vigas de igual resistencia y las flechas máximas en valor absoluto.



*Carga parabólica de vértice en el extremo libre*

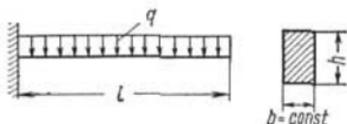
**Problema 467.** Dado:  $l = 1$  m,  $b = 60$  mm,  $h = 5$  mm;  $n = 10$  láminas,  $[\sigma] = 1\ 600$  kgf/cm<sup>2</sup> y  $E = 2 \cdot 10^6$  kgf/cm<sup>2</sup>.

Determinar  $P_{\max}$  y  $|f|_{\max}$ . Prescindase de la fricción entre las hojas de la ballesta.

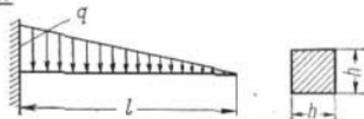


**Problemas 468-469.** Obtener la configuración de las vigas de igual resistencia; determinar la influencia de las tensiones tangenciales sobre la configuración de las vigas; las flechas de los extremos libres de las vigas; los ángulos de giro de las secciones extremas de las vigas (interpretar los resultados obtenidos). Considérese que  $q$ ,  $l$ ,  $h_{\max}$ ,  $E$ ,  $I_{\max}$  son conocidos.

468

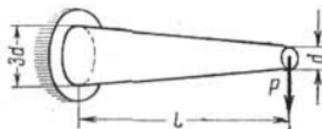


469

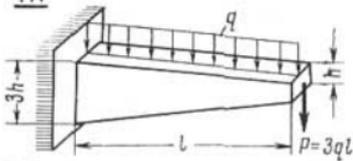


**Problemas 470-475.** Determinar la sección de la viga en la que surgen las tensiones normales máximas y calcular cuántas veces son mayores aquí  $\sigma_{\max}$ ,  $|f|_{\max}$  y  $|\theta|_{\max}$  que en las vigas análogas pero de sección constante (máxima).

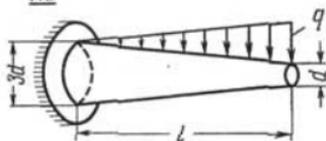
470



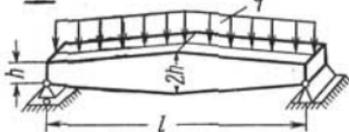
471

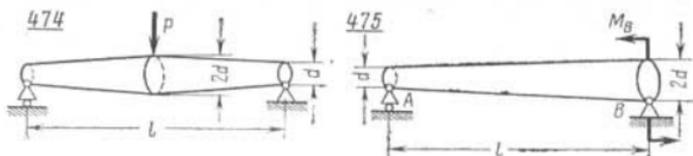


472

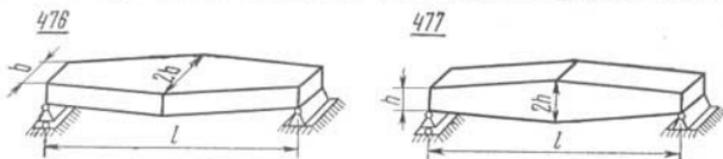


473



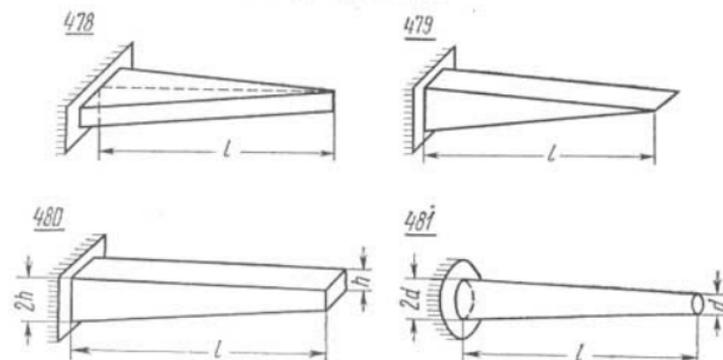


**Problemas 476-477.** Determinar las tensiones normales máximas  $\sigma_{\max}$  originadas por el peso propio de las vigas y la posición de la sección peligrosa. Considerar que  $M_{\max}$  y  $W_{\max}$  son conocidos.



**Problemas 478-481.** Determinar las flechas de los extremos libres de las vigas, originadas por el peso propio.

Considérense conocidos  $Q$ ,  $l$ ,  $E$  e  $I$ .



En el método de la viga conjugada para la determinación de las deformaciones de la viga de sección variable, se entiende por carga ficticia no ya el valor verdadero del momento flector  $M_x$ , sino el convencional,

$$M_c = M_x \frac{I_0}{I_x}$$

de acuerdo con la ecuación (127).

El ángulo de giro y la flecha de una sección arbitraria se calculan por las fórmulas,

$$\theta_x = \frac{Q_{Fx}}{EI_0} \quad (128)$$

$$f_x = \frac{M_{Fx}}{EI_0}, \quad (129)$$

siendo  $Q_{Fx}$  y  $M_{Fx}$  la fuerza cortante ficticia y el momento flector ficticio en la viga conjugada;

$EI_0$  la rigidez de la sección constante a la que, convencionalmente, se reduce la viga dada.

En el caso de vigas de igual resistencia de altura constante, si se considera que el momento de inercia de la sección transversal donde actúa  $M_{\max}$  es  $I_0$ , entonces el momento flector convencional será,

$$M_C = M_{\max} = \text{const.}$$

**Ejemplo 50.** Dado:  $P$ ,  $a$ ,  $M = 2Pa$ ,  $E$ ,  $I$  (fig. 95).  
Determinar  $\theta_A$ ,  $\theta_B$ ,  $f_A$  y  $f_C$ .

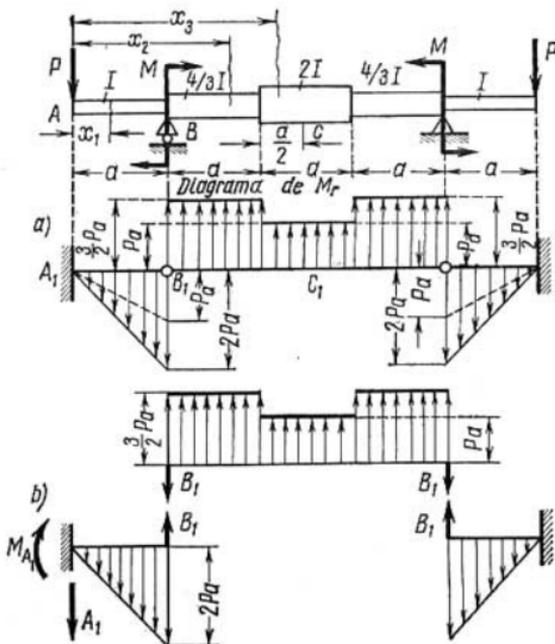


Fig. 95

**Resolución.** Los momentos flectores en los tramos de la viga dada son:  $M_{x_1} = -Px_1$ ,  $M_{x_2} = M_{x_3} = Pa$ .

Escogemos  $I_0 = 2I$  y hallamos los momentos flectores convencionales en los tramos correspondientes:

$$M_{c_1} = M_{x_1} \frac{2I}{I} = -2Px_1,$$

$$M_{c_2} = M_{x_2} \frac{2I}{\frac{4}{3}I} = \frac{3}{2}Pa; \quad M_{c_3} = M_{x_3} = Pa.$$

Interpretamos el gráfico de los momentos convencionales como una carga ficticia aplicada a la viga conjugada (fig. 95, a).

Descomponemos la viga conjugada en dos voladizos básicos y una viga secundaria (fig. 95, b). Puesto que

$$B_1 = \frac{3}{2}Pa \cdot a + Pa \cdot \frac{a}{2} = 2Pa^2;$$

$$Q_{F_A} = -2Pa^2 + 2Pa \cdot \frac{a}{2} = -Pa^2; \quad Q_{F_{B_1}} = -B_1 = -2Pa^2;$$

$$M_{F_{A_1}} = 2Pa^2 \cdot a - Pa^2 \cdot \frac{2}{3}a = \frac{4}{3}Pa^3;$$

$$M_{F_{C_1}} = -2Pa^2 \cdot \frac{3}{2}a + \frac{3}{2}Pa^2 \cdot a + \frac{1}{2}Pa^2 \cdot \frac{1}{4}a = -\frac{11}{8}Pa^3,$$

resulta,

$$\theta_A = \frac{Q_{F_{A_1}}}{2EI} = -\frac{Pa^2}{2EI}; \quad \theta_B = \frac{Q_{F_{B_1}}}{2EI} = -\frac{Pa^2}{EI};$$

$$f_A = \frac{M_{F_{A_1}}}{2EI} = \frac{2Pa^3}{3EI}; \quad f_C = \frac{M_{F_{C_1}}}{EI} = -\frac{11}{16} \frac{Pa^3}{EI}.$$

**Ejemplo 51.** Dado:  $q, l, E, d = \text{const}$ , y una viga de igual resistencia, de sección rectangular, de altura  $h$  constante y de anchura variable  $b_x$  (fig. 96).

Determinar  $\theta_A$  y  $f_A$ .

*Resolución.* Consideramos

$$I_0 = \frac{bh^3}{12}$$

entonces

$$M_c = M_{\max} = -\frac{ql^2}{2}; \quad Q_{F_{A_1}} = -\frac{ql^2}{2} \cdot l = -\frac{ql^3}{2};$$

$$M_{F_{A_1}} = -\frac{ql^2}{2} \cdot l \cdot \frac{l}{2} = -\frac{ql^4}{4}.$$

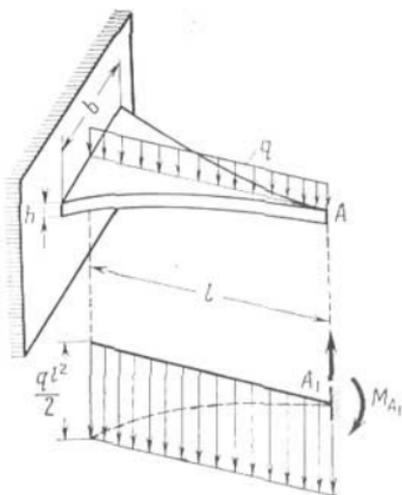


Fig. 96

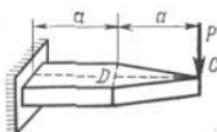
Los desplazamientos que se buscan serán:

$$\theta_A = \frac{Q_{F_{A_1}}}{EI_0} = -\frac{ql^3}{2EI_0}; \quad f_A = \frac{M_{F_{A_1}}}{EI_0} = -\frac{ql^4}{4EI_0}.$$

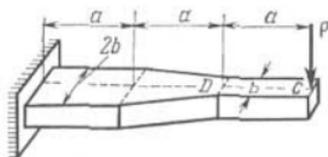
**Problemas 482-485.** Determinar las flechas  $f_C$  de las secciones  $C$  y los ángulos de giro  $\theta_D$  de las secciones  $D$  de las vigas.

$P$ ,  $a$ ,  $E$  e  $I_{\max}$  se consideran dados.

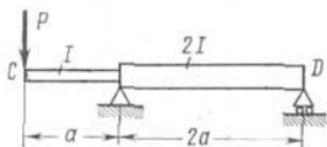
482



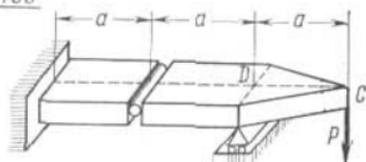
483



484

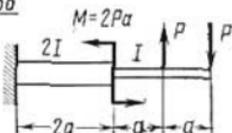


485

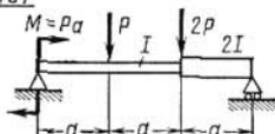


**Problemas 486-491.** Determinar las flechas máximas en valor absoluto y los ángulos de giro de las secciones de las vigas.  $P$ ,  $M$ ,  $a$ ,  $E$  e  $I_{\max}$  se estiman ya conocidos.

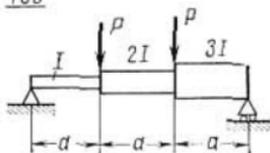
486



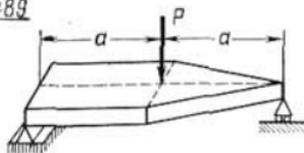
487



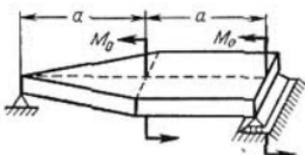
488



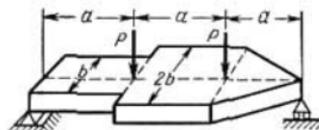
489



490



491



El método gráfico de determinación de los desplazamientos en las vigas de sección variable se emplea de la misma forma que en el caso de vigas de sección constante.

La diferencia consiste en que en el caso de vigas de sección variable se entiende por carga ficticia de la viga conjugada o de la real, no el momento flector verdadero  $M_x$  sino el convencional  $M_c$ . Las reglas para el trazado de la línea de cierre (líneas de cierre) del polígono funicular son las mismas.

La escala de las flechas será  $\frac{EI_0}{H(\xi\eta)}$ , siendo  $I_0$  el momento de inercia de la sección transversal constante, a la que, convencionalmente, se reduce la viga.

Se puede entender por carga ficticia también el momento flector verdadero, bajo condición de que la distancia polar del plano de los vectores sea variable e igual a

$$H_x = H_0 \frac{I_x}{I_0}, \quad (130)$$

siendo  $H_0$  una distancia polar arbitraria correspondiente a la sección escogida de momento de inercia  $I_0$ .

**Ejemplo 52.** En la figura 97,  $a, b, c$  está representada la construcción gráfica de la línea elástica de una viga escalonada a través del momento flector convencional, considerando  $I_0 = I$ .

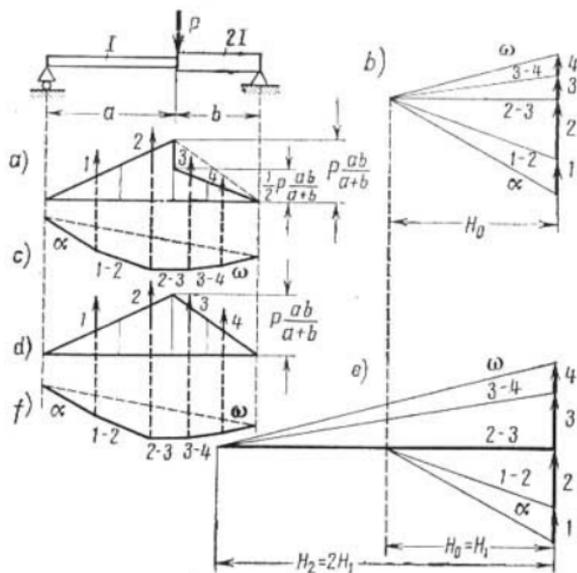


Fig. 97

En la figura 97,  $d, e, f$  se da la construcción gráfica de la línea elástica de la misma viga a través del momento flector verdadero y de la distancia polar variable del plano de los vectores.

Se admitió que,

$$H_0 = H_1 \quad \text{y} \quad H_2 = H_0 \frac{2I}{I} = 2H_1.$$

## § 8. Vigas hiperestáticas

Se denominan *hiperestáticas* aquellas vigas en las cuales de las ecuaciones de la estática no se pueden obtener todas las componentes reactivas que surgen en los apoyos.

El grado de hiperestaticidad de la viga se establece por el número de incógnitas superfluas que no se pueden obtener de las ecuaciones de la estática.

## Métodos para vencer la hiperestaticidad de las vigas

*Método de los parámetros de origen.* Para la viga hiperestática dada se plantean las integrales generales de las ecuaciones diferenciales de la línea elástica a través de los parámetros de origen. Estos parámetros, así como las componentes reactivas, se determinan de las condiciones de apoyo de la viga y de las ecuaciones de la estática.

**Ejemplo 53.** Dado:  $q$ ,  $l$ ,  $E$  e  $I$  (fig. 98), determinar  $A$ ,  $B$ ,  $M_B$ ,  $f_x$ ,  $\theta_x$ ,  $Q_x$ ,  $M_x$ .

*Resolución.* Puesto que en el apoyo izquierdo  $f_0 = 0$ , de acuerdo con las ecuaciones (116) y (117), la función de las flechas y los ángulos de giro se escribirán en la forma siguiente,

$$EI f_x = EI \theta_0 x + A \frac{x^3}{6} - \frac{qx^5}{120};$$

$$EI \theta_x = EI \theta_0 + A \frac{x^2}{2} - \frac{q}{l} \frac{x^4}{24}.$$

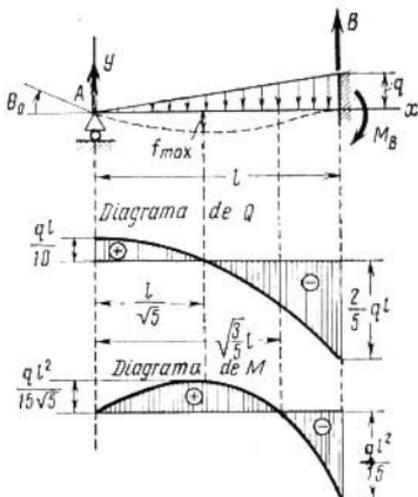


Fig. 98

Según las condiciones de apoyo de la viga  $f_l = 0$  y  $\theta_l = 0$  es decir,

$$EI f_l = EI \theta_0 l + A \frac{l^3}{6} - \frac{ql^5}{120} = 0; \quad EI \theta_l = EI \theta_0 + A \frac{l^2}{2} - \frac{ql^3}{24} = 0,$$

de donde se obtiene,

$$A \frac{l^2}{3} = \frac{ql^3}{30}, \quad A = \frac{ql}{10} \text{ y } \theta_0 = \frac{1}{EI} \left( \frac{ql^3}{24} - \frac{ql^3}{20} \right) = -\frac{ql^3}{120EI}.$$

Así, pues,

$$EI f_x = -\frac{ql^3}{120} x + \frac{ql}{60} x^3 - \frac{q}{l} \frac{x^5}{120}$$

y

$$EI \theta_x = -\frac{ql^3}{120} + \frac{ql}{20} x^2 - \frac{q}{l} \frac{x^4}{24}.$$

Suponiendo  $\theta_x = 0$ , de la ecuación

$$x^4 - \frac{6l^2}{5} x^2 + \frac{l^4}{5} = 0,$$

obtendremos  $x = \frac{l}{\sqrt{5}} \approx 0,447l$  a cuyo valor corresponde el valor máximo de la flecha

$$f_{\max} = f_{x = \frac{l}{\sqrt{5}}} = -\frac{2}{375} \frac{ql^4}{EI}.$$

La fuerza cortante y el momento flector están dados por las funciones

$$Q_x = \frac{ql}{10} - \frac{q}{l} \cdot \frac{x^2}{2} \quad \text{y} \quad M_x = \frac{ql}{10} x - \frac{q}{l} \cdot \frac{x^3}{6}.$$

Suponiendo  $M_x = 0$  hallamos  $x = l \sqrt{\frac{3}{5}} \approx 0,775l$ , correspondiente al punto de inflexión de la línea elástica.

Suponiendo  $Q_x = 0$ , hallamos  $x = \frac{l}{\sqrt{5}} \approx 0,447l$ , donde el momento flector adquiere su valor máximo,

$$M_{\max} = M_{x = \frac{l}{\sqrt{5}}} = \frac{ql^2}{15\sqrt{5}},$$

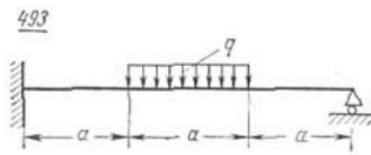
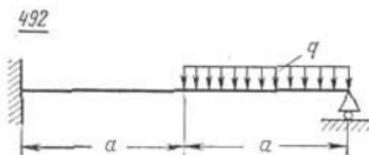
$$Q_{x=0} = \frac{ql}{10} = A; \quad Q_{x=l} = -\frac{2}{5} ql = -B; \quad M_{x=0} = 0;$$

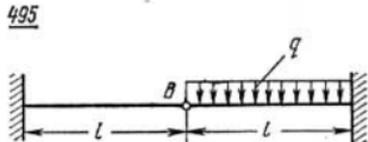
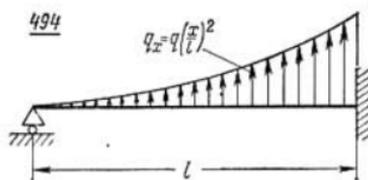
$$M_{x=l} = -\frac{ql^2}{15} = M_B.$$

Con estos resultados se han construido los diagramas de  $Q$  y  $M$  y la línea elástica de la viga.

**Problemas 492-495.** Calcúlense las vigas hiperestáticas dadas.

En los problemas 492 y 493, constrúyanse los diagramas de la fuerza cortante  $Q$  y del momento flector  $M$ ; en el problema 494, calcúlense el ángulo de giro de la sección sobre el apoyo y en el problema 495, la flecha  $f$  de la sección  $B$ .





**Método de comparación de los desplazamientos.** La viga hiperestática en cuestión se convierte, eliminando ligaduras, en isostática y cinemáticamente invariable, obteniendo así la viga base. La viga base se solicita primeramente por las fuerzas dadas y se determinan en las secciones donde se han eliminado las ligaduras los desplazamientos originados correspondientes a las incógnitas superfluas eliminadas (a la fuerza corresponde la flecha, al momento, el ángulo de

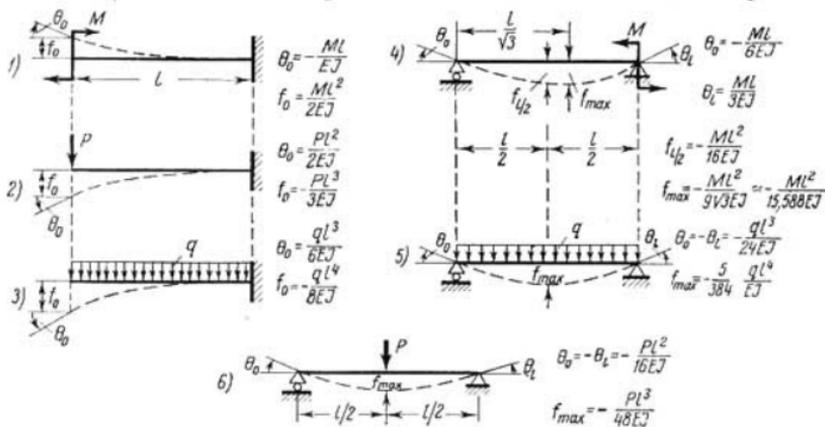


Fig. 99

giro). La misma viga con las ligaduras eliminadas (viga auxiliar) se solicita después solamente por las incógnitas superfluas y se determinan en las mismas secciones los desplazamientos correspondientes a las incógnitas superfluas.

Las magnitudes de las incógnitas superfluas se escogen de manera que los desplazamientos totales que se obtienen para las secciones donde han sido eliminadas las ligaduras de la viga base y de la viga auxiliar correspondan a los desplazamientos en las mismas secciones de la viga hiperestática dada.

Este método resulta cómodo en los casos cuando la viga base y la auxiliar se pueden reducir a vigas que figuran en las correspondientes tablas donde se dan los valores de los desplazamientos necesarios.

Es conveniente conocer los valores de algunos desplazamientos, aunque sea para el caso de las vigas más simples que figuran en las tablas (fig. 99).

**Ejemplo 54.** Dado:  $M, l, E, I$  (fig. 100).

Determinar  $A, B, M_B, \theta_A$  y  $f_l$ . Constrúyanse los diagramas

de  $M$  y  $Q$ .

*Resolución.* Consideramos incógnita superflua la reacción de apoyo  $A$  de la viga. La viga base  $I$  será un voladizo solicitado por el par de fuerzas dado, de momento  $M$ .

El desplazamiento (flecha) de la viga base en la sección libre del apoyo es, según la tabla de la figura 99,

$$f_{A_1} = \frac{Ml^2}{2EI}$$

La viga auxiliar  $II$ , bajo la acción de la fuerza desconocida  $A$  recibe, en la sección libre del apoyo, una flecha (véase la viga 2 de la fig. 99),

$$f_{A_2} = -\frac{Al^3}{3EI}$$

Puesto que en el apoyo  $A$  de la viga dada  $f_A = 0$ , al comprobar los desplazamientos totales de las vigas  $I$  y  $II$  con los de la viga dada, obtendremos,

$$f_A = f_{A_1} + f_{A_2} = 0,$$

o sea

$$\frac{Ml^2}{2EI} - \frac{Al^3}{3EI} = 0,$$

de donde hallamos

$$A = \frac{3}{2} \frac{M}{l}$$

Puesto que en una sección cualquiera de la viga dada la fuerza cortante  $Q = A$ , el diagrama de las fuerzas cortantes será un rectángulo de altura  $\frac{3M}{2l}$ . La reacción en el apoyo es  $B = -A$ .

El diagrama del momento flector se construye fácilmente sumando los diagramas correspondientes a las vigas base y auxiliar. En el caso de la viga base el diagrama del momento flector es un rectángulo positivo de altura  $M$ . En el de la viga auxiliar el diagrama del

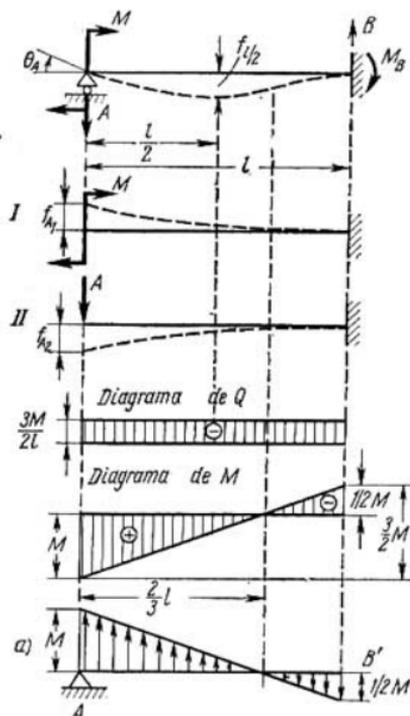


Fig. 100

momento flector es un triángulo negativo de altura  $\frac{3}{2} M$  en el apoyo derecho.

Sobreponiendo estos dos diagramas obtendremos el diagrama resultante del momento flector para la viga dada. El momento reactivo en el empotramiento será

$$M_B = -\frac{3}{2} M + M = -\frac{M}{2}.$$

Para determinar los desplazamientos de la viga empleamos el método de la viga conjugada. La viga conjugada y la carga ficticia están representadas en la figura 100, a.

Puesto que,

$$Q_{F_{A_1}} = \frac{M}{2} \cdot \frac{l}{6} - M \frac{l}{3} = -\frac{Ml}{4}$$

y

$$M_{F_{l/2}} = -\frac{Ml}{12} \left( \frac{l}{2} - \frac{l}{9} \right) + \frac{M}{4} \cdot \frac{l}{12} \cdot \frac{l}{18} = -\frac{Ml^2}{32},$$

resulta

$$\theta_A = \frac{Q_{F_{A_1}}}{EI} = -\frac{Ml}{4EI} \quad \text{y} \quad f_{l/2} = \frac{M_{F_{l/2}}}{EI} = -\frac{Ml^2}{32EI}.$$

Conviene prestar atención al hecho de que la viga conjugada, al estar apoyada solamente sobre un extremo, deberá encontrarse en equilibrio bajo la acción de la carga ficticia, es decir, el momento de la carga ficticia respecto al extremo izquierdo de la viga conjugada deberá ser nulo.

En calidad de incógnitas superfluas se pueden interpretar, no solamente las componentes reactivas en los lugares de apoyo, sino también los esfuerzos interiores  $Q$  y  $M$  en la sección donde, al ser seccionada la viga, se obtienen solicitaciones previstas en las tablas.

**Ejemplo 55.** Dado:  $q$ ,  $a$ , (fig. 101); determinar  $A$ ,  $B$ ,  $M_A$  y  $M_B$ .

**Resolución.** Liberamos la viga de doble grado de hiperestaticidad en la sección transversal  $C$ , obteniendo dos vigas ( $I$  y  $II$ ).

Consideramos incógnitas superfluas la fuerza cortante  $Q_C$  y el momento flector  $M_C$  en esta sección.

La comparación de los desplazamientos de las vigas  $I$  y  $II$  nos lleva al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} \theta_{C_1} &= \theta_{C_2} \\ f_{C_1} &= f_{C_2} \end{aligned} \right\}.$$

De la tabla de la figura 99 (casos 1 y 2) se obtiene para la viga *I*,

$$\theta_{C_1} = \frac{M_C a}{EI} - \frac{Q_C a^2}{2EI} \quad \text{y} \quad f_{C_1} = \frac{M_C a^2}{2EI} - \frac{Q_C a^3}{3EI}.$$

De la misma tabla (casos 1, 2 y 3) para la viga *II*, hallamos,

$$\theta_{C_2} = -\frac{M_C 2a}{EI} - \frac{Q_C (2a)^2}{2EI} + \frac{q (2a)^3}{6EI}$$

$$f_{C_2} = \frac{M_C (2a)^2}{2EI} + \frac{Q_C (2a)^3}{3EI} - \frac{q (2a)^4}{8EI}.$$

Introduciendo estos valores en las ecuaciones de comparación

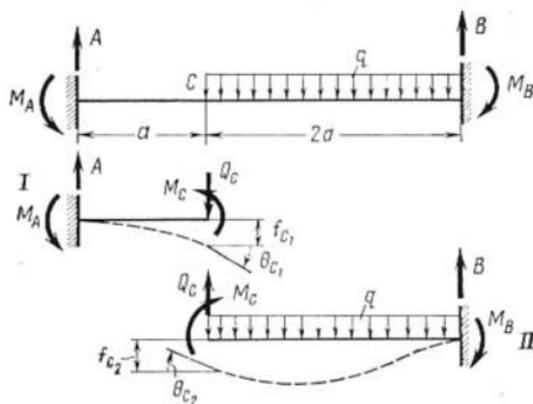


Fig. 101

de los desplazamientos obtendremos,

$$\left. \begin{aligned} 3M_C + 1,5Q_C a &= \frac{4}{3} q a^2, \\ 1,5M_C + 3Q_C a &= 2q a^2, \end{aligned} \right\}$$

de donde se desprende que

$$Q_C = \frac{16}{27} q a \quad \text{y} \quad M_C = \frac{4}{27} q a^2.$$

La reacción  $A = Q_C = \frac{16}{27} q a$  y el momento reactivo,

$$M_A = Q_C a - M_C = \frac{4q a^2}{9}.$$

La reacción  $B = 2qa - Q_C = \frac{2}{27} qa$  y el momento reactivo,

$$M_B = Q_C 2a - M_C - 2qa^2 = \frac{3}{2} qa^2.$$

El método de comparación de los desplazamientos se puede aplicar también al calcular sistemas hiperestáticos compuestos por vigas y barras (es decir, sistemas constituidos por vigas y barras elásticas articuladas a estas), y pórticos (es decir, reticulados de nudos rígidos en los que los ángulos entre las barras se mantienen invariables durante la deformación).

Al calcular los pórticos generalmente se prescinde de las deformaciones originadas por la tracción o compresión de los elementos.

**Ejemplo 56.** Dado: un voladizo  $AB$  solicitado por carga uniformemente distribuida, los valores  $q$ ,  $l$ ,  $E_1$ , e  $I_1$ , el tirante elástico  $AC$  y sus dimensiones  $l_2$ ,  $E_2$  y  $F_2$  (fig. 102).

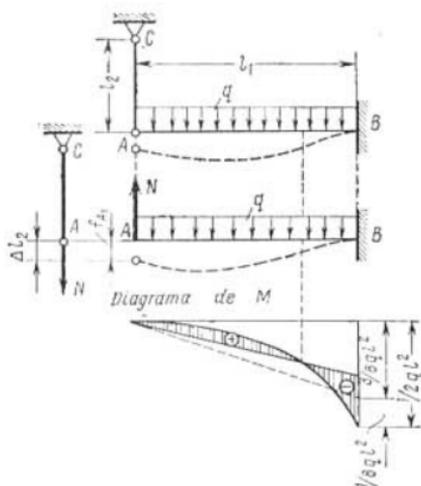


Fig. 102

Determinar el esfuerzo axial  $N$  en el tirante.

*Resolución.* Dividimos el sistema viga-barra por la articulación  $A$  en una viga  $AB$  y un tirante elástico  $AC$ . La viga está solicitada por una carga uniformemente distribuida de intensidad  $q$  y la fuerza desconocida  $N$ . El tirante está solicitado solamente por la fuerza  $N$ .

Comparamos los desplazamientos de los extremos  $A$  de la viga y del tirante, obteniendo  $|f_{A1}| = \Delta l_2$ .

De la tabla de la figura 99 (casos 2 y 3) hallamos,

$$|f_{A_1}| = \frac{ql_1^4}{8E_1I_1} - \frac{Nl_1^3}{3E_1I_1}.$$

De la ley de Hooke se desprende,

$$\Delta l_2 = \frac{Nl_2}{E_2F_2}.$$

Introduciendo  $f_{A_1}$  y  $\Delta l_2$  en la ecuación de comparación de los desplazamientos obtendremos,

$$\frac{ql_1^4}{8E_1I_1} - \frac{Nl_1^3}{3E_1I_1} = \frac{Nl_2}{E_2F_2},$$

de donde se halla,

$$N = \frac{3}{8}ql_1 \frac{1}{1 + 3 \frac{l_2 E_1 I_1}{l_1^3 E_2 F_2}}.$$

Casos particulares (fig. 103)

1)  $E_2F_2 = \infty$ ;  $N = \frac{3}{8}ql_1$ ,

2)  $E_2F_2 = 0$ ;  $N = 0$ .

Así, pues, según sea la rigidez del tirante elástico, el esfuerzo  $N$  puede variar entre los límites  $0 \leq N \leq \frac{3}{8}ql_1$  y el momento fle-

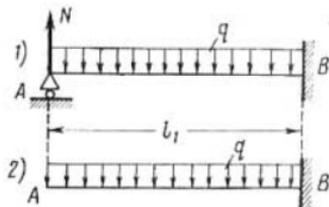


Fig. 103

tor  $M_B$  en el empotramiento,

$$\frac{ql_1^2}{8} \leq M_B \leq \frac{ql_1^2}{2}.$$

En la figura 102 está representado el diagrama del momento flector en la viga, para un valor cualquiera de  $M_B$ , dentro del intervalo de variación indicado.

**Ejemplo 57.** Dado: un pórtico rectangular de lados  $a$  y  $b$  y de rigidez de la sección a la flexión  $EI$ , solicitado por carga distribuida interior  $q$ , normal a las paredes (fig. 104).

Determinar la variación de la distancia  $\delta$  entre las secciones  $E-E$ .

*Resolución.* Dividimos el pórtico en vigas por secciones trazadas en los nudos. Puesto que el pórtico es simétrico, resulta suficiente analizar dos vigas  $AB$  y  $BC$ . Prescindiendo de la tracción de las barras del pórtico, se puede interpretar cada viga como apoyada en los extremos y considerarlas solicitadas por carga distribuida de intensidad  $q$  y por momentos desconocidos  $M_0$  en las secciones sobre los apoyos debidos, aquellos, a la rigidez de los nudos del pórtico.

Puesto que los ángulos de los vértices del pórtico deberán mantenerse rectos, al comparar los desplazamientos, obtendremos  $\theta_{B_1} = \theta_{B_2}$ .

De la tabla de la figura 99 (casos 4 y 5) se halla,

$$\theta_{B_1} = \frac{qa^3}{24EI} - \frac{M_0 a}{2EI}$$

$$\text{y } \theta_{B_2} = \frac{M_0 b}{2EI} - \frac{qb^3}{24EI}.$$

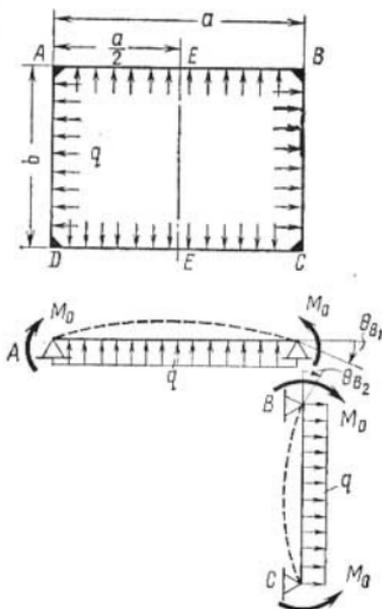


Fig. 104

De la comparación de los desplazamientos se obtiene,

$$\frac{qa^3}{12} + \frac{qb^3}{12} = M_0(a + b)$$

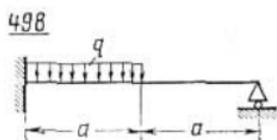
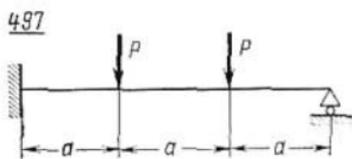
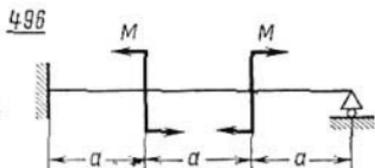
resultando,

$$M_0 = \frac{q}{12}(a^2 - ab + b^2).$$

De esta misma tabla se obtiene que el alejamiento de las secciones medias de los lados  $a$  será,

$$\delta = \frac{2}{EI} \left( \frac{5}{384} qa^4 - \frac{M_0 a^2}{16} \right) = \frac{qa^2}{192EI} (a^2 + 4ab - 4b^2).$$

**Problemas 496-499.** Calcular las vigas hiperestáticas y construir los diagramas de  $M$  y  $Q$ .



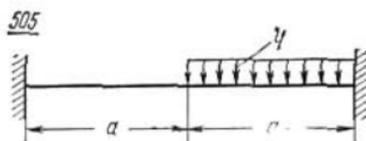
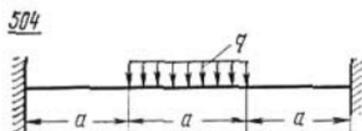
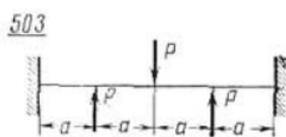
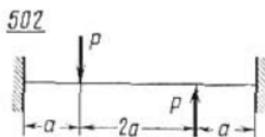
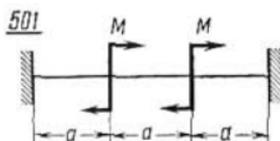
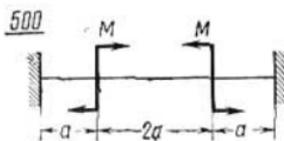
**Problemas 500-505.** Calcular las vigas hiperestáticas y determinar las magnitudes de las cargas admisibles.

Para todas las vigas se debe considerar la misma longitud, 3m y  $[\sigma] = 1\,600 \text{ kgf/cm}^2$ .

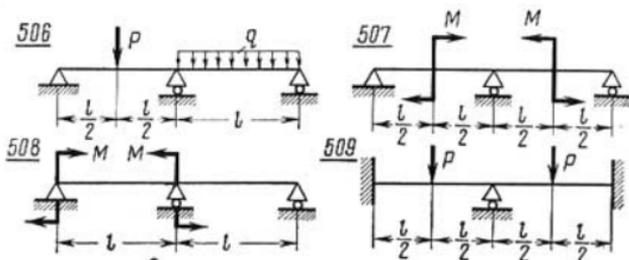
En los problemas 500 y 501 las secciones de las vigas son circulares ( $d = 10 \text{ cm}$ );

en los problemas 502 y 503 las secciones de las vigas son anulares ( $D = 12 \text{ cm}$ ,  $d = 8 \text{ cm}$ );

en los problemas 504 y 505 la sección de las vigas es cuadrada ( $10 \times 10 \text{ cm}$ ).

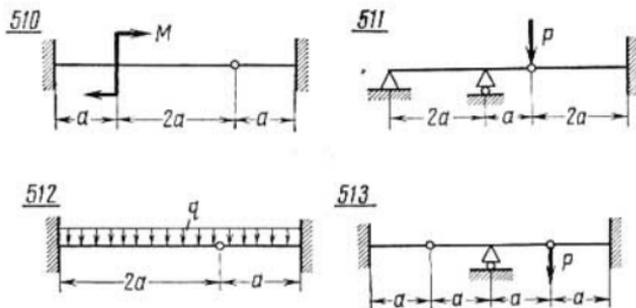


**Problemas 506-509.** Determinar el número del perfil doble te de la sección transversal.

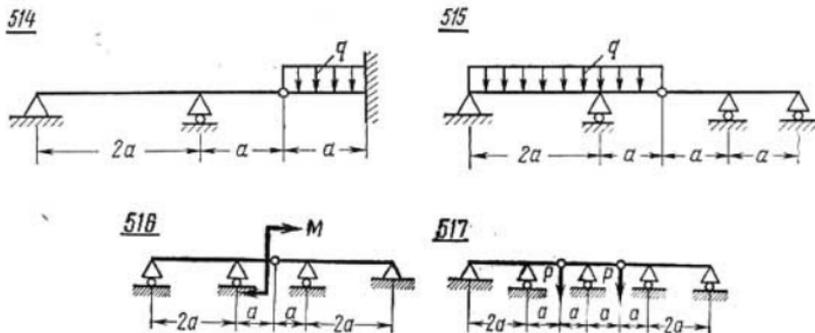


Dado:  $P = 2 \text{ tf}$ ,  $q = 2 \text{ tf/m}$ ,  $M = 3 \text{ tf}\cdot\text{m}$ ,  $l = 2 \text{ m}$  y  $[\sigma] = 1600 \text{ kgf/cm}^2$ .

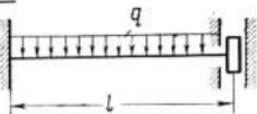
**Problemas 510-513.** Determinar el momento flector máximo  $M_{\max}$ .



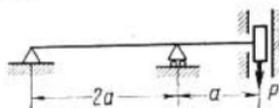
**Problemas 514-519.** Determinar el desplazamiento  $y$  de la articulación intermedia o del cursor.



518

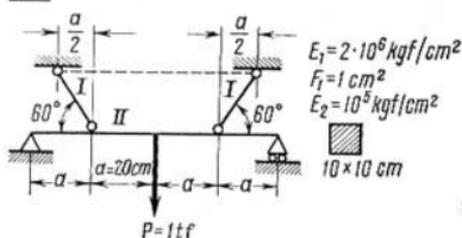


519

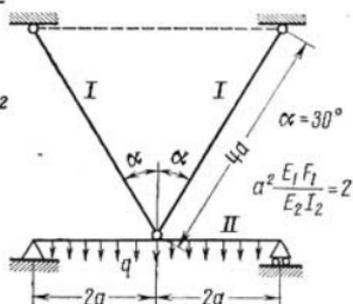


**Problemas 520-525.** Determinar los esfuerzos axiales  $N$  en los tirantes.

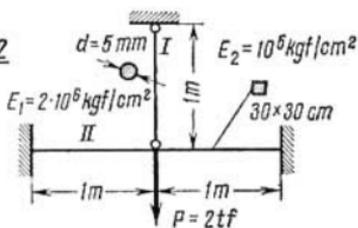
520



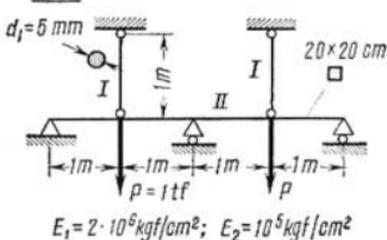
521



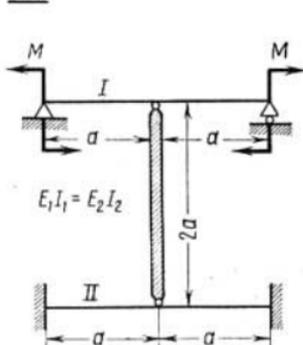
522



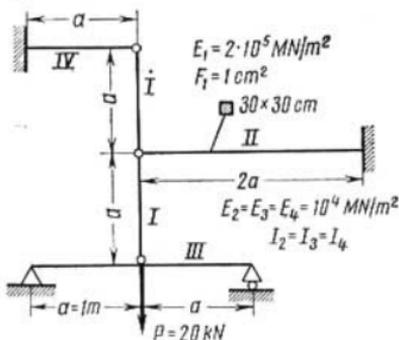
523



524

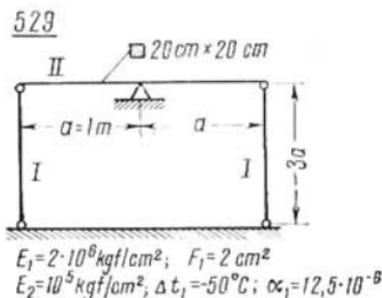
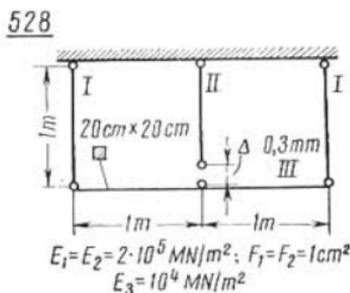
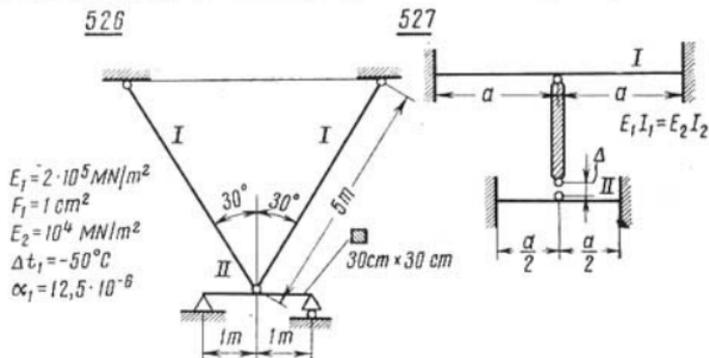


525



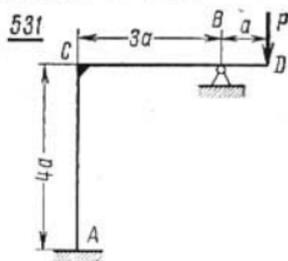
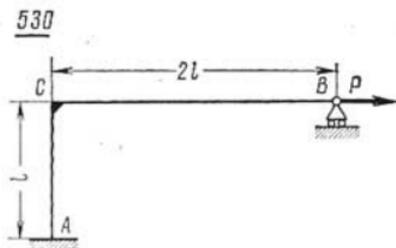
**Problemas 526-529.** Determinar en los elementos de los sistemas compuestos por vigas y barras:

- 1) las tensiones térmicas (problemas 526 y 529);
- 2) las tensiones de montaje (problemas 527 y 528).

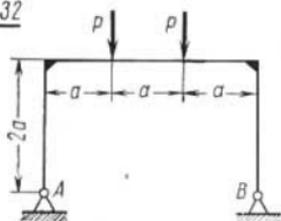


**Problemas 530-537.** Calcular los pórticos hiperestáticos y determinar las magnitudes de los momentos flectores máximos  $M_{\max}$ . Prescindase de las deformaciones originadas por la tracción y compresión. Considérese que las rigideces a la flexión de las secciones de todas las barras son iguales.

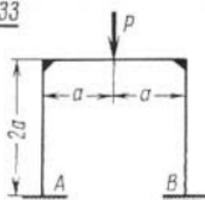
En los problemas 534 y 535 se deben considerar también las deformaciones de los elementos traccionados o comprimidos.



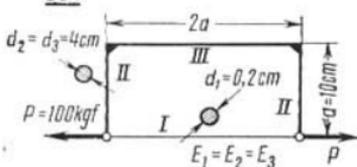
532



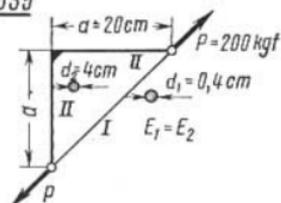
533



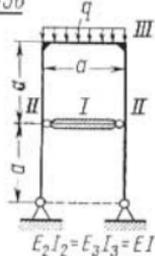
534



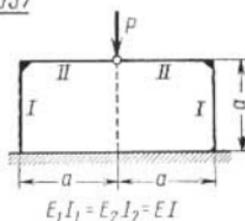
535



536



537

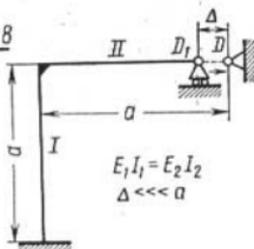


**Problemas 538-543.** Determinar las reacciones de apoyo o los esfuerzos  $N$  en los tirantes de los pórticos, que surgen durante el montaje (538, 539) o al variar la temperatura (540-543).

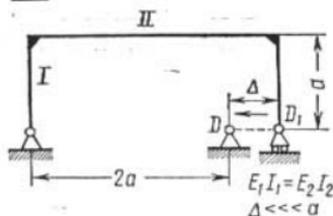
Admitase:  $E_{ac} = 2 \cdot 10^6$  kgf/cm<sup>2</sup>,  $E_c = 10^6$  kgf/cm<sup>2</sup>,

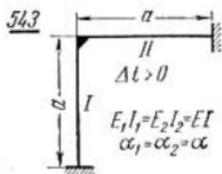
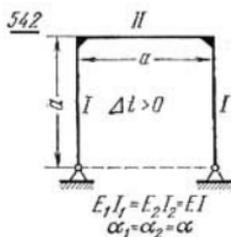
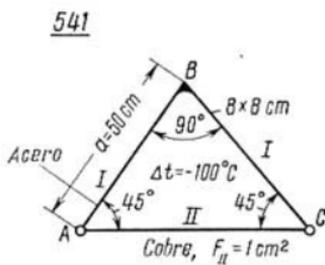
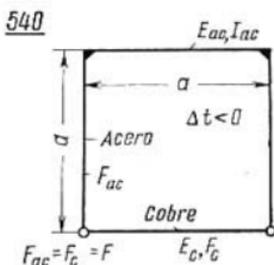
$\alpha_{ac} = 12 \cdot 10^{-6}$ ;  $\alpha_c = 16 \cdot 10^{-6}$ .

538



539





Método de las ecuaciones de los tres momentos. Este método es cómodo para calcular vigas continuas de muchos vanos, es decir, vigas que cubren varios vanos sin juntas articuladas.

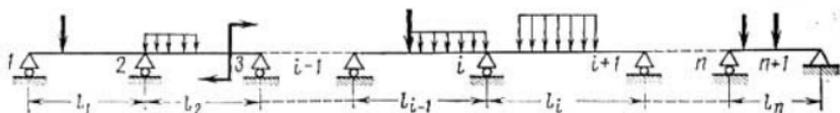


Fig. 105

Supongamos que se calcula una viga continua de  $n$  vanos (fig. 105) de rigidez de la sección  $EI$  constante y cuyos apoyos se encuentran a un mismo nivel. El grado de hiperestaticidad de esta viga es  $n - 1$ .

Desarticulamos la viga en las secciones situadas sobre los apoyos obteniendo  $n$  vigas apoyadas en sus extremos. Consideramos incógnitas superfluas los momento flectores en dichas secciones. Para cada par de vigas contiguas de luces  $l_{i-1}$  y  $l_i$  (fig. 106, a) se plantea la condición de continuidad de las líneas elásticas en forma de igualdad de los ángulos de giro ( $\theta_i^l = \theta_i^r$ ) en el apoyo intermedio  $i$ . Así se obtiene un sistema de  $n - 1$  ecuaciones de los tres momentos en forma canónica siguiente:

$$M_{i-1}l_{i-1} + 2M_i(l_{i-1} + l_i) + M_{i+1}l_i = -6EI(\theta_i^{lz} + \theta_i^d), \quad (131)$$

siendo  $M_{i-1}$ ,  $M_i$  y  $M_{i+1}$  los tres momentos desconocidos en las secciones sobre los apoyos  $i-1$ ,  $i$  e  $i+1$ ;  $\theta_i^{iz}$ ,  $\theta_i^d$  los ángulos de giro de las secciones sobre el apoyo  $i$  correspondientes a las vigas situadas a la izquierda y a la derecha y originados solamente por las cargas que actúan directamente sobre estos tramos (fig. 106, b).

Los valores de  $\theta_i^{iz}$  y  $\theta_i^d$  se pueden obtener por cualquier procedimiento, que se considere adecuado, o de las tablas, si esto resulta posible.

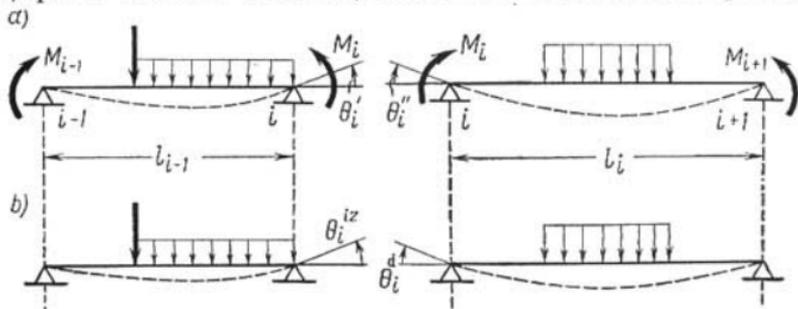


Fig. 106

Introduciendo en la ecuación (131) en lugar de  $i$  los valores 2, 3, 4, . . . ,  $n$  se obtiene el sistema de  $n - 1$  ecuaciones, cuya solución dará los valores de todas las incógnitas superfluas (momentos flectores en las secciones sobre los apoyos de la viga continua).

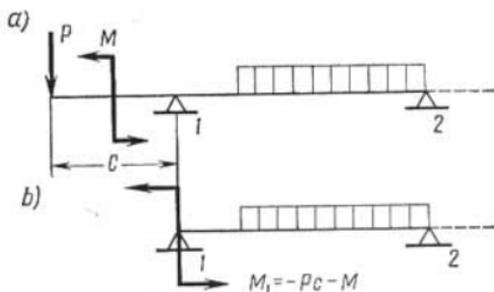


Fig. 107

Al aplicar en la práctica el método de las ecuaciones de los tres momentos conviene tener en cuenta las siguientes observaciones.

1. Los ángulos  $\theta_i^{iz}$  y  $\theta_i^d$  se introducen en las ecuaciones con el signo positivo si las secciones de las vigas giran en la dirección indicada en la figura 106, b.

2. Si la viga continua termina en un voladizo solicitado por carga (fig. 107, a), éste no se interpreta como un vano más en la ecuación de los tres momentos, sino que se sustituye por el momento originado por la carga aplicada al voladizo respecto al apoyo próximo

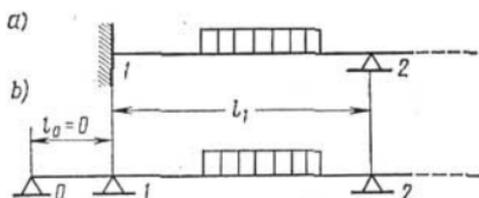


Fig. 108

y aplicado a éste con el signo correspondiente (fig. 107, b). Conviene introducir este momento en el primer miembro de la ecuación de los tres momentos.

3. Si la sección extrema de la viga continua está empotrada (fig. 108, a), entonces su ángulo de giro será igual a cero ( $\theta_1 = 0$ ).

Esta condición puede ser expresada por la ecuación de los tres momentos, sustituyendo el empotramiento por un vano ficticio de longitud  $l_0 = 0$  (fig. 108, b). Analizando dos vanos contiguos  $l_0$  y  $l_1$ , la condición  $\theta_1 = 0$  se escribirá según la ecuación de los tres momentos,

$$2M_1 l_1 + M_2 l_1 = -6 EI \theta_1^d \quad (132)$$

4. Si el par de fuerzas concentrado exterior se aplica en la sección situada en el apoyo intermedio de la viga continua (fig. 109, a), entonces conviene referir el momento  $M$  de este par a la carga situada en el vano.

El momento del par puede referirse solamente al vano derecho (fig. 109, c) o al izquierdo (fig. 109, b), o simultáneamente al izquierdo y al derecho dividiéndolo en proporción arbitraria (109, d). Conviene referirlo al vano menos solicitado.

Una vez obtenidos, de la ecuación de los tres momentos, los momentos flectores en las secciones sobre los apoyos de la viga

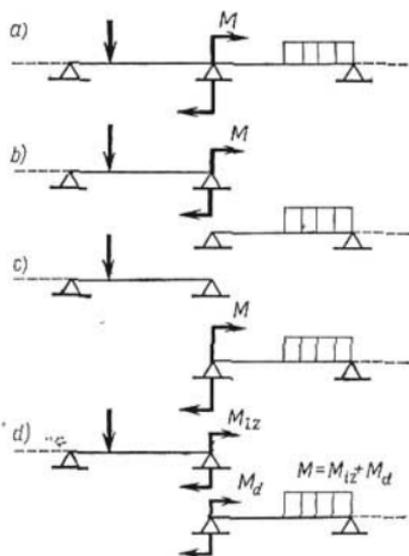


Fig. 109

continua se calcula por separado cada viga apoyada en sus extremos, para la carga aplicada en su vano y los momentos aplicados a los extremos. Por ejemplo, la reacción en el apoyo  $i$  de la viga continua se puede obtener sumando las reacciones en los apoyos  $i$  de las dos vigas contiguas. Cada una de ellas se obtiene de las ecuaciones de la estática. La fórmula general para la reacción en el apoyo  $i$  es:

$$A_i = A_i^0 + \frac{M_{i-1} - M_i}{l_{i-1}} + \frac{M_{i+1} - M_i}{l_i}, \quad (133)$$

siendo  $A_i^0$  la reacción total en los apoyos  $i$  de dos vigas contiguas correspondiente solamente a las cargas dadas sobre los vanos;

$\frac{M_{i-1} - M_i}{l_{i-1}}$  la reacción en el apoyo  $i$  de la viga izquierda debida a los momentos  $M_{i-1}$  y  $M_i$ ;

$\frac{M_{i+1} - M_i}{l_i}$  la reacción en el apoyo  $i$  de la viga derecha debida a los momentos  $M_{i+1}$  y  $M_i$  solamente.

Al calcular la reacción en el empotramiento el vano nulo ficticio no se tiene en cuenta.

Al calcular la reacción en el apoyo seguido de un voladizo solidificado por carga, en la magnitud  $A_i^0$  se incluye la resultante de todas las fuerzas exteriores que actúan sobre el voladizo.

Los gráficos de las fuerzas cortantes y momentos flectores pueden construirse por separado para cada vano, como en una viga apoyada en sus extremos solicitada por las fuerzas exteriores dadas y los momentos de los apoyos. Se pueden construir también por el método de superposición de los diagramas de los momentos en las secciones sobre los apoyos y de los momentos debidos a las cargas dadas aplicadas en cada tramo.

El ángulo de giro y la flecha en una sección arbitraria de la viga continua conviene determinar analizando solamente un vano, interpretado como viga apoyada en sus extremos y solicitada por la carga aplicada en el vano y los momentos en las secciones sobre los apoyos. Aquí son aplicables todos los métodos que se emplearon al calcular las vigas isostáticas.

**Ejemplo 58.** Dado:  $P = 2$  tf,  $M = 4$  tf·m,  $q = 6$  tf/m,  $c = 1$  m,  $l_1 = 3$  m,  $l_2 = 2$  m,  $[\sigma] = 1\ 600$  kgf/cm<sup>2</sup> y  $E = 2 \cdot 10^6$  kgf/cm<sup>2</sup> (fig. 110, a).

Determinar el número del perfil doble te de la viga y  $f_k$ .

**Resolución.** Descomponemos la viga en dos de luces  $l_1$  y  $l_2$  (fig. 110, b). A la viga de luz  $l_1$  aplicamos el momento  $M_1$  originado por la fuerza  $P$  aplicada al voladizo en el apoyo izquierdo, un par de fuerzas  $M$  y un momento flector  $M_2$  desconocido, en el apoyo derecho.

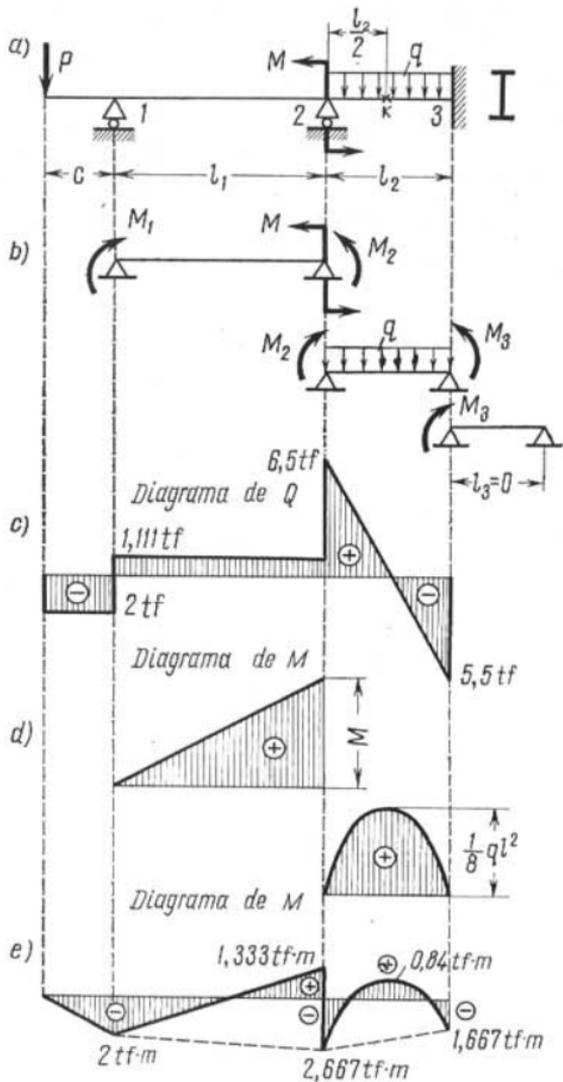


Fig. 110

A la viga de luz  $l_2$  aplicamos una carga distribuida de intensidad  $q$ , un momento flector desconocido  $M_2$  en el apoyo izquierdo y un momento flector desconocido  $M_3$  en el derecho.

En el lugar del empotramiento introducimos un vano ficticio  $l_3=0$ .

Para el sistema dado de doble grado de hiperestaticidad las dos ecuaciones de los tres momentos serán las siguientes:

$$M_1 l_1 + 2M_2(l_1 + l_2) + M_3 l_2 = -6EI(\theta_1^{1z} - \theta_1^d),$$

$$M_2 l_2 + 2M_3 l_2 = -6EI\theta_2^{1z}.$$

Puesto que  $M_1 = -Pc = -2 \cdot 1 = -2$  tf·m y de la tabla de la figura 99 (casos 4 y 5), teniendo en cuenta los signos, resulta,

$$EI\theta_1^{1z} = \frac{Ml}{3} = \frac{4 \cdot 3}{3} = 4 \text{ tf} \cdot \text{m}^2,$$

$$EI\theta_1^d = EI\theta_2^{1z} = \frac{ql_2^3}{24} = \frac{6 \cdot 2^3}{24} = 2 \text{ tf} \cdot \text{m}^2,$$

las ecuaciones de los tres momentos serán:

$$\left. \begin{aligned} 10M_2 + 2M_3 &= -30, \\ M_2 + 2M_3 &= -6 \end{aligned} \right\}$$

de donde se obtiene  $M_2 = -\frac{8}{3} \approx -2,667$  tf·m y  $M_3 = -\frac{5}{3} \approx -1,667$  tf·m.

Por la fórmula (133) determinamos las reacciones  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$  en las secciones fijas:

$$\begin{aligned} A_1 &= A_1^0 + \frac{M_2 - M_1}{l_1} = P + \frac{M}{l_1} + \frac{M_2 - M_1}{l_1} = \\ &= 2 + \frac{4}{3} + \frac{-\frac{8}{3} + 2}{3} = \frac{28}{9} \approx 3,111 \text{ tf}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2 &= A_2^0 + \frac{M_1 - M_2}{l_1} + \frac{M_3 - M_2}{l_2} = -\frac{M}{l_1} + \frac{ql_2}{2} + \frac{M_1 - M_2}{l_2} + \\ &+ \frac{M_3 - M_2}{l_2} = -\frac{4}{3} + 6 + \frac{-2 + \frac{8}{3}}{3} + \frac{-\frac{5}{3} + \frac{8}{3}}{2} = \frac{97}{18} \approx 5,389 \text{ tf}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_3 &= A_3^0 + \frac{M_2 - M_3}{l_2} = \frac{ql_2}{2} + \frac{M_2 - M_3}{l_2} = \\ &= 6 + \frac{-\frac{8}{3} + \frac{5}{3}}{2} = \frac{11}{2} = 5,5 \text{ tf}. \end{aligned}$$

Comprobamos las reacciones obtenidas con la suma de las proyecciones sobre el eje vertical,

$$A_1 + A_2 + A_3 - P - ql_2 = 0; \quad \frac{1}{18}(56 + 97 + 99) - 2 - 12 = 0.$$

La construcción del diagrama de la fuerza cortante se da en la figura 110, *c*.

El diagrama del momento flector se construye por el método de superposición. El diagrama correspondiente a la carga aplicada en el vano es, para la viga de la izquierda, triangular y para la derecha parabólico (fig. 110, *d*).

El gráfico originado por  $M_1$ ,  $M_2$  y  $M_3$  es una línea quebrada, representada en la figura 110, *e* por la línea punteada. Sumamos a este diagrama el diagrama rectilíneo en el voladizo, correspondiente a la fuerza  $P$ . De las líneas punteadas en los vanos trazamos las ordenadas de los diagramas en los vanos debidas a las cargas dadas. Teniendo en cuenta los signos de los diagramas originados por los momentos y por la carga obtendremos el diagrama resultante de los momentos flectores.

Calculamos el valor de  $x$  correspondiente a  $M_{\max_{\text{vano}}}$  en el vano derecho,

$$x = \frac{Q}{q} = \frac{117}{18 \cdot 6} \approx 1,08 \text{ m.}$$

Puesto que

$$\Delta M = \frac{Qx}{2} = \frac{117}{18} \cdot \frac{1,08}{2} = 3,51 \text{ tf} \cdot \text{m.}$$

resulta,

$$M_{\max_{\text{vano}}} = 3,51 - \frac{8}{3} \approx 0,84 \text{ tf} \cdot \text{m.}$$

Como se puede observar del gráfico

$$M_{\max} = \frac{8}{3} \text{ tf} \cdot \text{m.}$$

Por la fórmula

$$W = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{8 \cdot 10^5}{3 \cdot 16 \cdot 10^2} \approx 167 \text{ cm}^3.$$

Del surtido hallamos para el perfil doble te N° 18a,

$$W = 159 \text{ cm}^3 \text{ y } \frac{\sigma_{\max} - [\sigma]}{[\sigma]} \cdot 100 = \frac{167 - 159}{159} \cdot 100 = 4,8\%$$

(una sobretensión  $\leq 5\%$ , lo que es admisible).

Escogemos el perfil doble te N° 18a para el cual,

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{8 \cdot 10^5}{3 \cdot 159} = 1\,667 \text{ kgf/cm}^2 \text{ y } I = 1\,430 \text{ cm}^4.$$

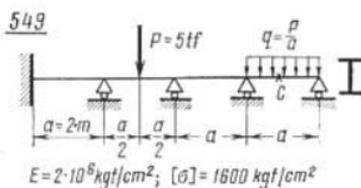
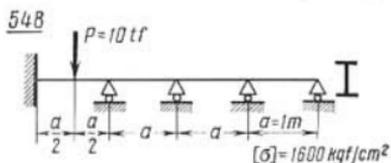
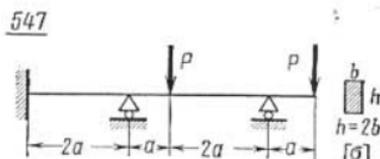
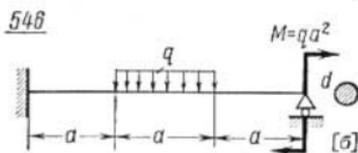
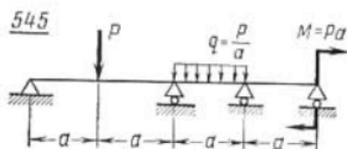
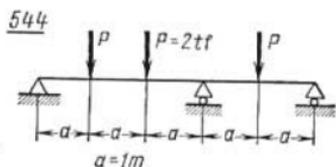
Al determinar la flecha  $f_k$  empleamos el método de superposición y recurrimos a los valores de las flechas indicados en la tabla de la figura 99 (casos 5 y 4),

$$f_h = -\frac{5}{384} \frac{q l^4}{EI} - \frac{M_2 l_2^2}{16EI} - \frac{M_3 l_3^2}{16EI} = \frac{10^9}{16 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 1,43 \cdot 10^3} \times$$

$$\times \left( -\frac{5}{24} \cdot 6 \cdot 16 + \frac{8}{3} \cdot 4 + \frac{5}{3} \cdot 4 \right) \approx 0,058 \text{ cm} = 0,58 \text{ mm}.$$

**Problemas 544-549.** Calcular las vigas hiperestáticas (544, 545) y determinar las dimensiones necesarias de las secciones transversales de las vigas (546-549).

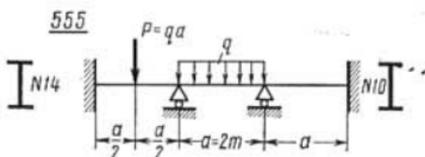
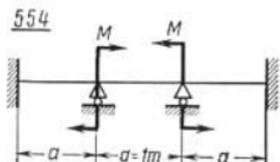
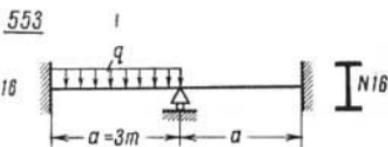
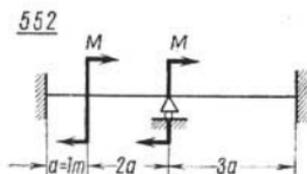
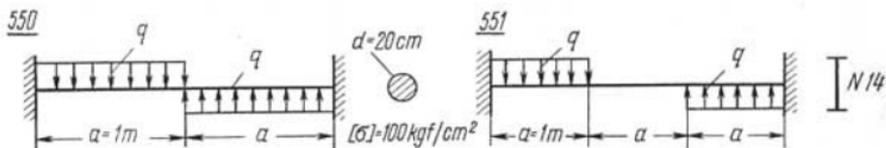
En el problema 549 determinése la flecha de la sección  $C$ .



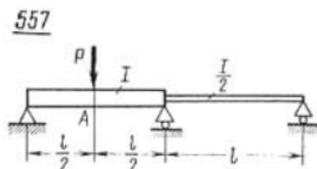
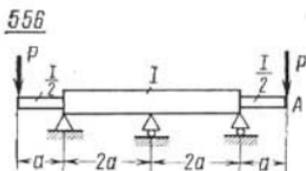
**Problemas 550-555.** Determinar los valores de las cargas admisibles que actúan sobre las vigas.

En los problemas 551-553 considérese  $[\sigma] = 1\,600 \text{ kgf/cm}^2$ .

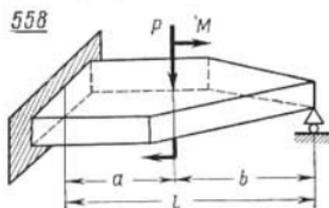
En los problemas 554 y 555 considérese  $[\sigma] = 160 \text{ MN/m}^2$ .



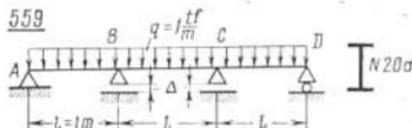
**Problemas 556-557.** Determinar las flechas de las secciones  $A$  de las barras escalonadas.



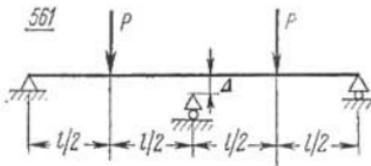
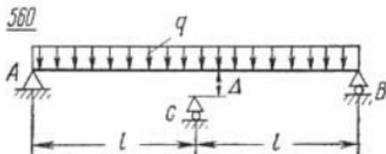
**Problema 558.** Determinar los valores de  $M$ ,  $a$  y  $b$  para los cuales la viga de la sección variable indicada será una viga de igual resistencia.



**Problema 559.** Determinar el momento flector máximo en la viga si los apoyos intermedios reciben un asentamiento de  $\Delta = 1 \text{ mm}$  ( $E = 2 \cdot 10^6 \text{ kgf/cm}^2$ ).



**Problemas 560-561.** Determinar los espacios  $\Delta$  para los cuales, las tensiones normales máximas en las vigas de rigidez de la sección dada  $EI$  tendrán sus valores mínimos.



#### Fundamentos del cálculo de vigas hiperestáticas por capacidad resistente

Se supone que el material de la viga hiperestática es plástico y se parte del diagrama de tracción — compresión idealizado.

Puesto que la capacidad resistente de cada vano de la viga se agota al aparecer en él tres articulaciones plásticas, (una en el vano y dos en las secciones sobre los apoyos), podemos analizar cada tramo por separado, independientemente de los demás. Es conveniente realizar el cálculo de la viga por el método de nivelación de los momentos flectores.

Si la viga es de sección transversal constante, entonces la magnitud del momento flector admisible también será constante y se obtendrá por la fórmula (114).

$$M'_{\max} = 2[\sigma] S,$$

siendo  $S$  el momento estático de la mitad del área de la sección transversal respecto al eje central.

El gráfico de los momentos flectores definitivo (nivelado) se construye por cada vano de manera que sus ordenadas sean iguales a  $M'_{\max}$  en las secciones sobre los apoyos y en el vano. De la configuración de los diagramas nivelados obtenidos se deduce  $M'_{\max}$  en función de la carga en los vanos. Por la fórmula (114) se determinan las cargas admisibles máximas para cada tramo.

Si el extremo de la viga está apoyado en una articulación, entonces, para que el último vano se convierta en cinemáticamente varia-

ble, es suficiente la aparición de dos articulaciones plásticas (en el vano y en la sección sobre el apoyo intermedio). En este caso el momento flector en el extremo de la viga es igual a cero, mientras que en el vano y en la sección sobre el apoyo intermedio, será  $M'_{max}$ .

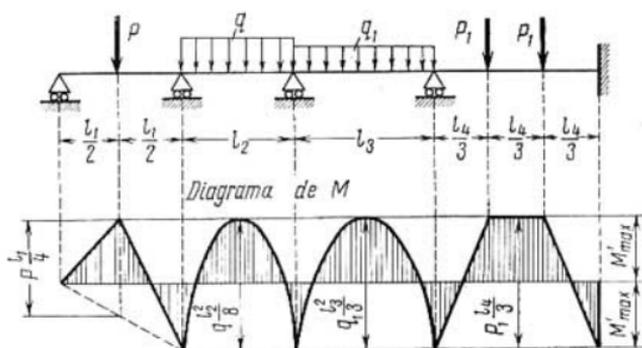


Fig. 111

En la figura 111 se ilustra la construcción de los diagramas de los momentos flectores nivelados para el caso de la viga continua. En el caso de una viga escalonada de valores de  $S$  dados, el diagrama nivelado de los momentos flectores se construye para cada escalón

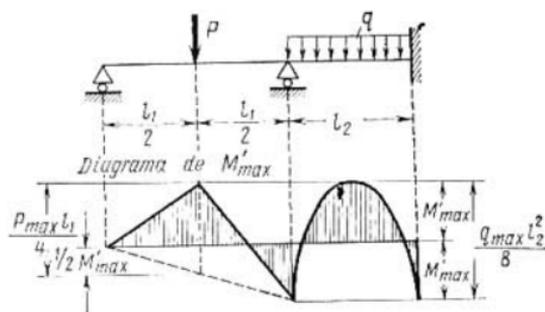


Fig. 112

con su correspondiente valor de  $M'_{max}$ . El cálculo sucesivo se realiza de la misma manera que en las vigas de sección constante.

Si se da la carga y se necesita calcular la sección transversal de la viga, entonces en las secciones de cada tramo donde deben aparecer las articulaciones plásticas se determinan los momentos flectores admisibles  $M'_{max}$  en función de la carga dada. Por el máximo de

estos momentos se halla  $S = \frac{M'_{\max}}{2[\sigma]}$  y las dimensiones de la sección transversal.

Al diseñar una viga de sección variable, las dimensiones se establecen de manera análoga para cada tramo.

**Ejemplo 59.** Dado:  $S$ ,  $l_1$ ,  $l_2$  y  $[\sigma]$  (fig. 112).

Determinar  $P'_{\max}$  y  $q'_{\max}$ .

**Resolución.** Construimos el diagrama del momento flector «nivelado» admisible

$$M'_{\max} = 2[\sigma]S.$$

Puesto que del diagrama construido resulta

$$\frac{P'_{\max}l_1}{4} = \frac{3}{2}M'_{\max} = 3[\sigma]S,$$

$$\frac{q'_{\max}l_2^2}{8} = 2M'_{\max} = 4[\sigma]S,$$

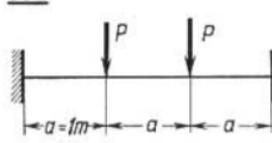
los valores de la carga máxima admisible en los vanos de la viga serán,

$$P_{\max} = 12[\sigma] \frac{S}{l_1} \quad \text{y} \quad q'_{\max} = 32[\sigma] \frac{S}{l_2^2}.$$

**Problemas 562-567.** Determinar las fuerzas admisibles para las vigas y los sistemas.

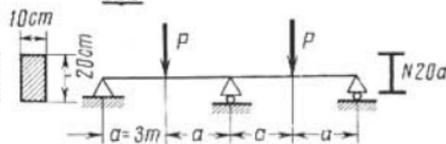
En los problemas 564-567 considérense conocidos  $[\sigma]$ ,  $a$ ,  $W$  y  $\eta = \frac{2S}{W}$ .

**562**



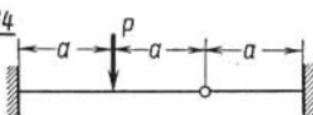
$$[\sigma] = 100 \text{ kgf/cm}^2$$

**563**

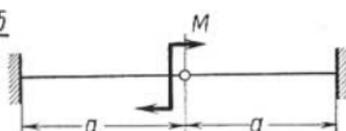


$$[\sigma] = 1600 \text{ kgf/cm}^2$$

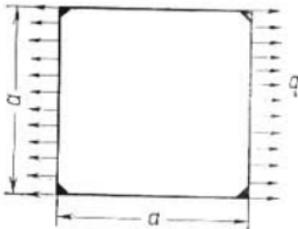
**564**



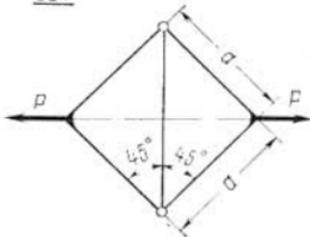
**565**



566



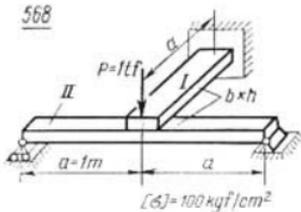
567



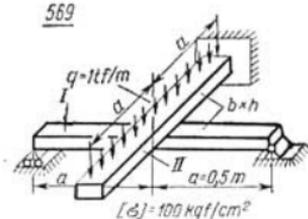
**Problemas 568-571.** Determinar las dimensiones de las secciones transversales de las vigas y de los sistemas.

Considérese que la sección de las vigas es rectangular ( $b = 2h$ ) y que el material de las vigas y de los tirantes es el mismo.

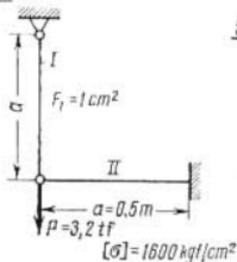
568



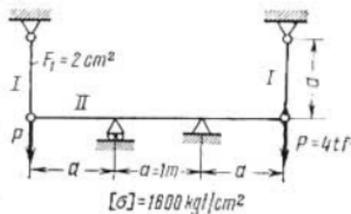
569



570

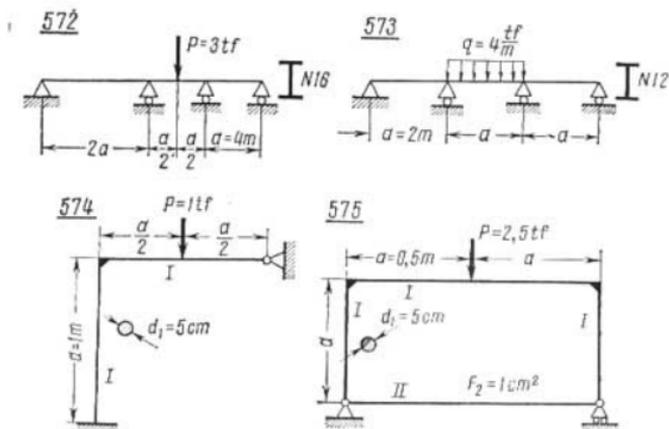


571



**Problemas 572-575.** Determinar el coeficiente de seguridad  $n_f$  (correspondiente a la carga) con el que han sido calculados las vigas y los sistemas.

Admítase para el límite de fluencia del material  $\sigma_f = 2400 \text{ kgf/cm}^2$ .



### § 9. Energía potencial de la deformación elástica en la flexión

La energía potencial de la deformación elástica acumulada en la viga, en el caso de flexión transversal plana, se determina por la fórmula,

$$U = \Sigma \int \frac{M^2 dx}{2EI} + \Sigma k \int \frac{Q^2 dx}{2GF}, \quad (134)$$

siendo

$$k = F \int_F \left( \frac{S}{I} \right)^2 dF, \quad (135)$$

un coeficiente adimensional que caracteriza la desuniformidad en la distribución de las tensiones tangenciales en la sección transversal de la viga y que depende de la forma de ésta.

En la fórmula (134) la integración se realiza sobre la longitud de cada tramo de la viga y la suma abarca todos los tramos. En la fórmula (135) se integra sobre el área  $F$  de la sección transversal;  $S$ ,  $b$  e  $I$  tienen el mismo significado que en la fórmula (99) que determina la tensión tangencial;  $E$  y  $G$  son los módulos de elasticidad longitudinal y tangencial del material de la viga.

**Ejemplo 60.** Dado:  $a$ ,  $a_0$ ,  $h$  y  $h_0$  (fig. 113).

Determinar  $k = F \int_F \left( \frac{S}{bI} \right)^2 dF$ .

**Resolución.** El área de la sección dada es,

$$F = ah - a_0 h_0.$$

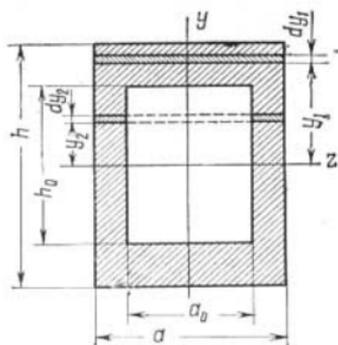


Fig. 113

El momento de inercia del área de la sección respecto al eje  $z$ ,

$$I = \frac{1}{12} (ah^3 - a_0h_0^3).$$

Para las alas se obtiene,

$$S_1 = \frac{a}{2} \left( \frac{h^2}{4} - y_1^2 \right); \quad dF_1 = a dy; \quad b = a$$

y para las paredes,

$$S_2 = \frac{ah^2 - a_0h_0^2}{8} - \frac{a - a_0}{2} y_2^2; \quad dF_2 = (a - a_0) dy_2;$$

$$b = a - a_0.$$

El coeficiente de desigualdad de las tensiones tangenciales será,

$$\begin{aligned} k &= \frac{2F}{I^2} \left[ \int_{F_1} \left( \frac{S_1}{a} \right)^2 dF_1 + \int_{F_2} \left( \frac{S_2}{a - a_0} \right)^2 dF_2 \right] = \\ &= \frac{F}{2I^2} \left\{ a \int_{h_0/2}^{h/2} \left( \frac{h^2}{4} - y_1^2 \right)^2 dy_1 + (a - a_0) \int_0^{h_0/2} \left[ \frac{ah^2 - a_0h_0^2}{4(a - a_0)} - y_2^2 \right]^2 dy_2 \right\} = \\ &= \frac{F}{2I^2} \left\{ a \left[ \frac{h^5}{16} \left( \frac{h}{2} - \frac{h_0}{2} \right) - \frac{h^2}{2} \left( \frac{h^3}{3 \cdot 8} - \frac{h_0^3}{3 \cdot 8} \right) + \frac{h^5 - h_0^5}{5 \cdot 32} \right] + \right. \\ &\quad \left. + (a - a_0) \left[ \frac{ah^2 - a_0h_0^2}{16(a - a_0)^2} \cdot \frac{h_0}{2} - \frac{ah^2 - a_0h_0^2}{2(a - a_0)} \cdot \frac{h_0^3}{3 \cdot 8} + \frac{h_0^5}{5 \cdot 32} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Introduciendo aquí los valores de  $F$  y  $I$ , después de algunas transformaciones, obtendremos,

$$k = \frac{6}{5} \frac{1 - \frac{a_0 h_0}{ah}}{\left(1 - \frac{a_0}{a}\right) \left(1 - \frac{a_0 h_0^3}{ah^3}\right)^2} \left\{ 1 - \frac{a_0}{a} \left[ 1 - \frac{1}{8} \left( 15 \frac{h_0}{h} - 30 \frac{h_0^3}{h^3} + 7 \frac{h_0^5}{h^5} + 8 \frac{a_0}{a} \cdot \frac{h_0^5}{h^5} \right) \right] \right\}.$$

Casos particulares:

1)  $a_0 = a$ ;  $k = \frac{6}{5}$ ;

2)  $a = h$  y  $a_0 = h_0$ ;  $k = \frac{6}{5} \cdot \frac{1 + \frac{a_0}{a}}{\left(1 + \frac{a_0^4}{a^4}\right)^2} \left\{ 1 - \frac{a_0}{a} \left[ 1 - \frac{1}{8} \frac{a_0}{a} \times \right. \right.$   
 $\left. \left. \times \left( 15 - 30 \frac{a_0^2}{a^2} + 7 \frac{a_0^4}{a^4} + 8 \frac{a_0^5}{a^5} \right) \right] \right\}.$

Si, por ejemplo,  $a_0 = \frac{a}{2}$  entonces  $k = \frac{387}{250} = 1,548$ .

3) Perfil doble te N° 20.

Del surtido hallamos  $a = b = 10$  cm;  $h = 20$  cm;  $a - a_0 = d = 0,52$  cm;  $a_0 = 9,48$  cm;  $h_0 = h - 2t = 20 - 2 \cdot 0,84 = 18,32$  cm.

Puesto que

$$\frac{a_0}{a} \approx 0,948; \quad \frac{h_0}{h} \approx 0,916; \quad \frac{a_0 h_0}{ah} \approx 0,868;$$

$$\frac{h_0^3}{h^3} \approx 0,769; \quad \frac{a_0 h_0^3}{ah^3} \approx 0,729; \quad \frac{h_0^5}{h^5} \approx 0,645 \quad \text{y} \quad \frac{a_0 h_0^5}{ah^5} \approx 0,611,$$

resulta

$$k = \frac{6}{5} \cdot \frac{1 - 0,868}{(1 - 0,948)(1 - 0,729)^2} \left\{ 1 - 0,948 \left[ 1 - \frac{1}{8} (15 \cdot 0,916 - 30 \cdot 0,769 + 7 \cdot 0,645 + 8 \cdot 0,611) \right] \right\} \approx 2,51.$$

En el caso de una sección de perfil doble te laminado, el coeficiente de desigualdad de las tensiones tangenciales en la flexión se

puede obtener aproximadamente por la fórmula,

$$k = \frac{1 - \frac{a_0 h_0}{ah}}{1 - \frac{a_0}{a}} = \frac{F}{F_a},$$

siendo  $F$  el área de la sección;

$F_a$  el área del alma de altura  $h$ , es decir  $F_a = dh$ .

Por ejemplo, en el caso del perfil doble te N° 20, hallamos por esta fórmula  $F = 26,8 \text{ cm}^2$ ,  $F_a = 20 \cdot 0,52 = 10,4 \text{ cm}^2$ ,  $k = \frac{26,8}{10,4} \approx 2,58$ .

**Ejemplo 61.** Dado:  $P = 60 \text{ kN}$ ,  $q = 30 \text{ kN/m}$ ,  $a = 2 \text{ m}$ ,  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MN/m}^2$ ,  $G = 8 \cdot 10^4 \text{ MN/m}^2$  y  $[\sigma] = 160 \text{ MN/m}^2$  (fig. 114).

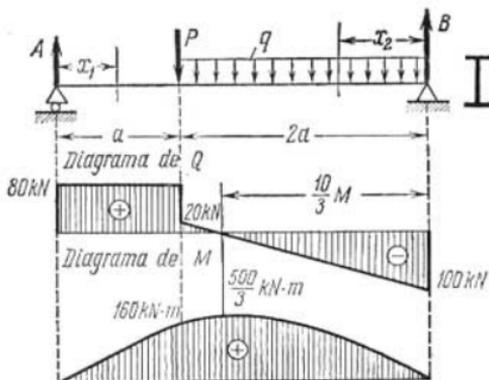


Fig. 114

Determinar los números del perfil doble te y del canal.

*Resolución.* De las ecuaciones de la estática se determinan las reacciones de apoyos,

$$A = \frac{2P + 2qa}{3} = 80 \text{ kN}; \quad B = P + 2qa - A = 100 \text{ kN}.$$

Planteamos las ecuaciones de  $Q$  y  $M$ .

$$Q_{x_1} = A = 80 \text{ kN}; \quad M_x = Ax_1 = 80x_1 \text{ kN} \cdot \text{m};$$

$$M_{x_1=0} = 0; \quad M_{x_1=a} = 160 \text{ kN} \cdot \text{m};$$

$$Q_{x_2} = -B + qx_2 = -100 + 30x_2; \quad Q_{x_2=0} = -100 \text{ kN};$$

$$Q_{x_2=2a} = -100 + 30 \cdot 4 = 20 \text{ kN};$$

$$M_{x_2} = Bx_2 - \frac{qx_2^2}{2} = 100x_2 - \frac{30x_2^2}{2}; \quad M_{x_2=0} = 0;$$

$$M_{x_2=2a} = 100 \cdot 4 - \frac{30}{2} \cdot 16 = 160 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

Determinamos  $M_{\max}$ . De la condición,

$$Q_{x_2} = -100 + 30x_2 = 0, \quad x_2 = \frac{10}{3} \text{ m},$$

se obtiene

$$M_{\max}_{x_2 = \frac{10}{3}} = 100 \cdot \frac{10}{3} - \frac{30}{2} \cdot \frac{10^2}{9} = \frac{500}{3} \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

Por la fórmula hallamos,

$$W = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{500 \cdot 10^3}{3 \cdot 160 \cdot 10^6} \approx 1042 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 \approx 1042 \text{ cm}^3.$$

Del surtido escogemos el perfil doble te N° 45, para el cual,  $W = 1220 \text{ cm}^3$ ;  $I = 27450 \text{ cm}^4$ ;  $F = 83,0 \text{ cm}^2$ ;  $h = 45 \text{ cm}$ ;

$$d = 0,86 \text{ cm} \text{ y } k = \frac{F}{F_0} = \frac{83}{45 \cdot 0,86} \approx 2,14.$$

La energía potencial de la deformación elástica de la viga se obtiene como la suma de las energías correspondientes al momento flector ( $U_M$ ) y a la fuerza cortante ( $U_Q$ ).

Por la fórmula (134) hallamos,

$$\begin{aligned} U_M &= \Sigma \int \frac{M^2 dx}{2EI} = \frac{1}{2EI} \left( \int_0^a M_{x_1}^2 dx_1 + \int_0^{2a} M_{x_2}^2 dx_2 \right) = \\ &= \frac{1}{2EI} \left[ 64 \int_0^a x_1^2 dx_1 + \frac{1}{4} \int_0^{2a} (20x_2 - 3x_2^2)^2 dx_2 \right] \cdot 10^8 = \\ &= \frac{10^8}{2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 27450 \cdot 10^{-8}} \left( \frac{64}{3} \cdot 8 + \frac{800}{3} \cdot 8 - 120 \cdot 16 + \frac{72}{5} \cdot 32 \right) \approx \\ &\approx 769,4 \text{ J}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U_Q &= \Sigma k \int \frac{Q^2 dx}{2GF} = \frac{k}{2GF} \left( Q_{x_1}^2 a + \int_0^{2a} Q_{x_2}^2 dx_2 \right) = \\
 &= \frac{k \cdot 10^8}{2GF} \left[ 64a + \int_0^{2a} (-10 + 3x_2)^2 dx_2 \right] = \\
 &= \frac{k \cdot 10^8}{2GF} (64a + 200a - 120a^2 + 24a^3) = \\
 &= \frac{2,14 \cdot 10^8}{2 \cdot 8 \cdot 10^{10} \cdot 83,0 \cdot 10^{-4}} (128 + 400 - 480 + 192) \approx 38,7 \text{ J};
 \end{aligned}$$

$$U = U_M + U_Q = 769,4 + 38,7 = 808,1 \text{ J.}$$

Puesto que para las vigas normales la energía potencial correspondiente a la fuerza cortante es pequeña en comparación con la energía correspondiente al momento flector, generalmente se prescinde de la primera.

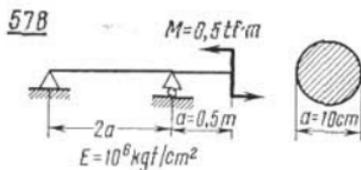
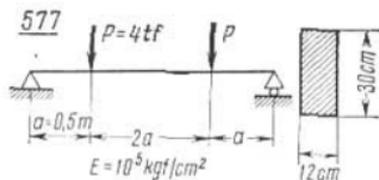
En este ejemplo,

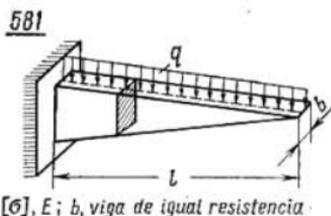
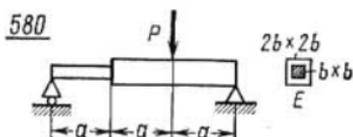
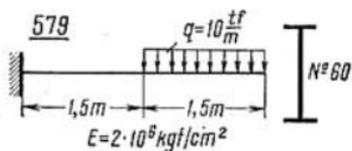
$$\frac{U_Q}{U_M} 100 = \frac{38,7}{769,4} \cdot 100 \approx 5\%.$$

En el caso de vigas cortas no se puede prescindir de la energía potencial que corresponde a la fuerza cortante puesto que puede adquirir un valor considerable.

**Problema 576-581.** Calcular la energía potencial  $U$  de la deformación elástica de las vigas teniendo en cuenta solamente los momentos flectores.

En el problema 576 se deben analizar las vigas que se indican en los problemas 222-231 considerando dadas las cargas, las longitudes  $l$  y las rigideces  $EI$  de las secciones.





**Problema 582.** Determinar la influencia de los apoyos de la viga solicitada por una fuerza aplicada en la sección media sobre el valor de la energía potencial correspondiente al momento flector, en los casos siguientes:

- la viga está apoyada en sus extremos,
- la viga tiene un extremo empotrado y el otro articulado,
- la viga tiene los dos extremos empotrados.

**Problema 583.** Determinar como varía la energía potencial correspondiente al momento flector en una viga de sección rectangular apoyada sobre dos apoyos y solicitada por la fuerza  $P$  en el centro, si la viga se sustituye por la de igual resistencia de altura de la sección constante.

**Problema 584.** Calcular el coeficiente de la forma de la sección  $k$  para las secciones:

- rectangular,
- circular,
- triangular de lados iguales,
- anular circular,
- cuadrada en forma de cajón,
- doble te N° 60.

En este último caso, demuéstrese que el coeficiente  $k$ , para la sección doble te puede ser obtenido como la razón entre el área de la sección y la de la pared de altura igual a la del perfil.

**Problema 585.** Para las vigas de los problemas 577, 578 y 579 determínese la energía potencial correspondiente a la fuerza cortante. Evalúese en por ciento la influencia de la fuerza cortante sobre la energía potencial en la flexión.

## IX. RESISTENCIA COMPUESTA DE UNA BARRA RECTA DE GRAN RIGIDEZ

### § 1. Flexión desviada

En la flexión desviada, que es la combinación de dos flexiones transversales rectas, la tensión normal  $\sigma$  en un punto cualquiera de la sección transversal de coordenadas  $y$  y  $z$  (fig. 115) se determina por la fórmula,

$$\sigma = \frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y} = M \left( \frac{y \cos \alpha}{I_z} + \frac{z \sin \alpha}{I_y} \right), \quad (136)$$

siendo  $I_y$  y  $I_z$  los momentos de inercia principales centrales de la sección transversal de la viga;

$M_y$  y  $M_z$  los momentos flectores respecto a los ejes  $y$  y  $z$ , es decir, las componentes del momento flector resultante  $M = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}$  que actúa en el plano  $xp$  inclinado un ángulo  $\alpha$  respecto al plano principal de inercia de la viga  $xy$ .

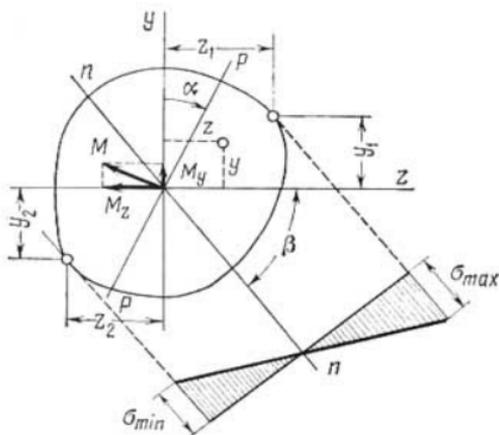


Fig. 115

Aquí y en adelante se considera que  $M_y$  y  $M_z$  son positivos si originan tensiones de tracción en los puntos del primer cuadrante de la sección.

La ecuación de la línea neutra  $nn$  se escribe en la forma siguiente:

$$y = -\frac{I_z}{I_y} \cdot \frac{M_y}{M_z} z = -\frac{I_z}{I_y} z \operatorname{tg} \alpha = -z \operatorname{tg} \beta, \quad (137)$$

siendo

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{I_z}{I_y} \cdot \frac{M_y}{M_z} = \frac{I_z}{I_y} \operatorname{tg} \alpha, \quad (138)$$

el tangente del ángulo de inclinación de la línea neutra  $nn$  respecto al eje  $z$ .

La línea neutra  $nn$  siempre se desvía del eje  $z$  un ángulo  $\beta$  en el mismo sentido que la línea  $pp$  del plano de acción de las fuerzas se desvía del eje  $y$  (un ángulo  $\alpha$ ).

Las tensiones normales máxima y mínima se calculan por la fórmula (136) introduciendo en ella las coordenadas ( $y_1, z_1$  e  $y_2, z_2$ ) de los puntos de tangencia de las rectas paralelas a la línea neutra con el contorno de la sección.

Si la tensión normal máxima o mínima aparece en el punto más alejado de los dos ejes principales centrales de inercia de la sección, entonces

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_y|}{W_y} + \frac{|M_z|}{W_z} \quad (139)$$

y

$$\sigma_{\min} = - \left( \frac{|M_y|}{W_y} + \frac{|M_z|}{W_z} \right), \quad (140)$$

siendo  $W_y$  y  $W_z$  los módulos de la sección respecto a los ejes  $y$  y  $z$ .

En la flexión desviada, las secciones de las vigas se calculan por tensiones normales, por tanteos seguidos de la correspondiente comprobación.

El primer tanteo puede realizarse del cálculo por flexión plana originada por la componente del momento flector que requiere mayores dimensiones.

En el caso de secciones que se inscriben en un rectángulo, el primer tanteo se realiza por la fórmula,

$$W_z \geq \frac{M_z + cM_y}{[\sigma]}, \quad (141)$$

siendo

$$c = \frac{W_z}{W_y}.$$

En el caso de un rectángulo de altura  $h$  y base  $b$ ,  $c = \frac{h}{b}$ ; en el de un perfil laminado doble  $c = 8$  y en el del perfil canal  $c = 6$ .

La flecha  $f$  y el ángulo de giro  $\theta$  de una sección cualquiera de la viga, en la flexión desviada, se obtienen como las sumas geométricas de las flechas y los ángulos de giro correspondientes a las compo-

mentos del momento flector que actúan en los planos principales de inercia de la viga, es decir

$$f = \sqrt{f_y^2 + f_z^2} \quad \text{y} \quad \theta = \sqrt{\theta_y^2 + \theta_z^2},$$

siendo  $f_y$  y  $f_z$  las flechas en dirección a los ejes  $y$  y  $z$ ;

$\theta_y$  y  $\theta_z$  los ángulos de giro de la sección respecto a los ejes  $y$  y  $z$ .

El ángulo de giro resultante ocurre alrededor de la línea neutra y la flecha resultante, en el plano perpendicular a la línea neutra.

Si la flexión desviada se origina por dos sistemas diferentes de fuerzas exteriores que se encuentran en los planos principales de inercia, entonces la posición de la línea neutra en una sección transversal arbitraria se debe obtener por la fórmula,

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{I_z}{I_y} \frac{M_y}{M_z},$$

y la posición de la línea de la flecha, por la fórmula,

$$\operatorname{tg} \beta' = \frac{f_z}{f_y},$$

puesto el ángulo  $\beta'$  entre la dirección de la flecha resultante y el eje  $y$  no es igual al ángulo  $\beta$  entre la línea neutra y el eje  $z$ .

En este caso la línea elástica de la viga es una línea estérea.

Si las cargas que actúan sobre la viga se sitúan en varios planos que pasen por el eje geométrico de la viga, entonces proyectando estas fuerzas sobre los planos principales de inercia obtendremos el caso anterior.

**Ejemplo 62.** Dado:  $P, q, l, b, h, E$  y  $\alpha$  (fig. 116).

Determinar la posición de la línea neutra,  $\sigma_{\max}$  y  $f_{\max}$ .

*Resolución.* Descomponemos la fuerza  $P$  y la intensidad de la carga uniformemente distribuida  $q$  sobre los ejes principales centrales de inercia de la sección transversal  $y$  y  $z$ :

$$P_y = P \cos \alpha; \quad q_y = q \cos \alpha; \quad P_z = P \sin \alpha; \quad q_z = q \sin \alpha.$$

Las componentes del momento flector máximo en la sección situada debajo de la fuerza serán,

$$M_{z_{\max}} = \frac{P_y l}{4} + \frac{q_y l^2}{8} = \frac{l}{4} \left( P + \frac{q l}{2} \right) \cos \alpha,$$

$$M_{y_{\max}} = \frac{P_z l}{4} + \frac{q_z l^2}{8} = \frac{l}{4} \left( P + \frac{q l}{2} \right) \sin \alpha.$$

El momento flector  $M_y$ , que surge en el plano principal  $zx$  de inercia de la viga, tracciona las fibras que se encuentran a la izquierda

del eje  $y$ , y comprime las que se encuentran a la derecha (fig. 116, a). El momento flector  $M_z$ , que surge en el plano principal  $yx$  de inercia de la viga, tracciona las fibras que se encuentran por debajo del eje  $z$  y comprime las que se encuentran sobre el eje.

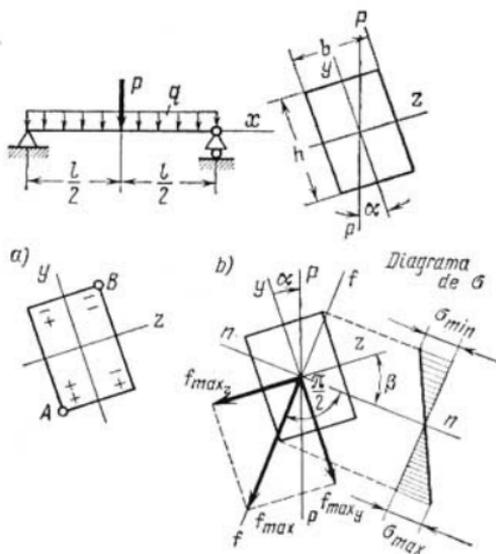


Fig. 116

Así, pues, las tensiones de tracción máximas  $\sigma_{\max}$  aparecerán en el punto  $A$  de la sección media de la viga y las máximas de compresión  $\sigma_{\min}$  en el punto  $B$ . Estas tensiones son:

$$\sigma_{\max/\min} = \pm \left( \frac{M_z_{\max}}{W_z} + \frac{M_y_{\max}}{W_y} \right) = \pm \frac{3}{2} \frac{l}{bh} \left( P + \frac{ql}{2} \right) \left( \frac{\cos \alpha}{h} + \frac{\sin \alpha}{b} \right).$$

La posición de la línea neutra  $nn$  se determinará de la ecuación,

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{I_z}{I_y} \operatorname{tg} \alpha = \frac{h^2}{b^2} \operatorname{tg} \alpha,$$

de donde se deduce, que cuanto mayor sea la razón  $\frac{h}{b}$  mayor será la desviación de  $\beta$  respecto a  $\alpha$ .

Si, por ejemplo, el plano de acción de las fuerzas  $px$  coincide con el plano diagonal de la viga, entonces  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{h}$  y  $\operatorname{tg} \beta =$

$\beta = \frac{h^2 b}{b^2 h} = \frac{h}{b}$ , es decir, el plano neutro  $nx$  coincidirá con el otro plano diagonal de la viga.

En este caso  $h > b$  y, por lo tanto  $\beta > \alpha$ , como se indica en la figura 116, *b*. En esta figura está representado también el diagrama de  $\sigma$ .

De la tabla de la figura 99 (casos 5 y 6) obtendremos para  $M_y$ ,

$$f_{z_{\max}} = \frac{5}{384} \frac{q_z l^4}{EI_y} + \frac{P_z l^3}{48EI_y} =$$

$$= \frac{l^3}{4Ehb^3} \left( \frac{5}{8} ql + P \right) \sin \alpha,$$

y para  $M_z$ ,

$$f_{y_{\max}} = \frac{5}{384} \frac{q_y l^4}{EI_z} + \frac{P_y l^3}{48EI_z} =$$

$$= \frac{l^3}{4Eh^3b} \left( \frac{5}{8} ql + P \right) \cos \alpha.$$

La flecha resultante en la mitad de la viga será,

$$f_{\max} = \sqrt{f_{z_{\max}}^2 + f_{y_{\max}}^2} =$$

$$= \frac{\left( \frac{5}{8} ql + P \right) l^3}{4Ehb} \times$$

$$\times \sqrt{\frac{\sin^2 \alpha}{b^4} + \frac{\cos^2 \alpha}{h^4}}.$$

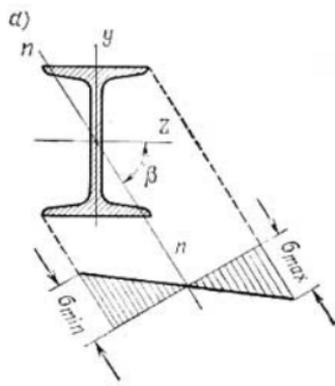
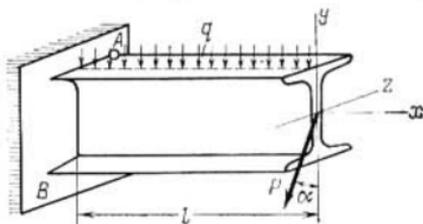


Fig. 117

La orientación de las flechas se indica en la figura 116, *b*.

**Ejemplo 63.** Dado:  $P = 240$  kgf,  $q = 400$  kgf/m,  $l = 2$  m,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $E = 2 \cdot 10^6$  kgf/cm<sup>2</sup> y  $[\sigma] = 1\,600$  kgf/cm<sup>2</sup> (fig. 117).

Calcular el número del perfil doble te, la posición de la línea neutra y  $f_{\max}$ .

**Resolución.** Los momentos flectores máximos en el empotramiento serán,

$$M_{y_{\max}} = Pl \sin \alpha = 240 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 240 \text{ kgf} \cdot \text{m}.$$

$$M_{z_{\max}} = \frac{ql^2}{2} + Pl \cos \alpha = \frac{400 \cdot 4}{2} + 240 \cdot 2 \cdot 0,866 \approx 1\,216 \text{ kgf} \cdot \text{m}.$$

En el primer tanteo admitimos  $c = 8$ .

Por la fórmula (141) obtendremos,

$$W_z = \frac{M_z + cM_y}{[\sigma]} = \frac{1\,216 + 8 \cdot 240}{1\,600} \cdot 100 = 196 \text{ cm}^3.$$

Comprobamos el perfil doble te inferior más próximo N° 20 para el cual

$$W_z = 184 \text{ cm}^3 \text{ y } W_y = 23,1 \text{ cm}^3.$$

En los puntos  $A$  y  $B$  de la sección empotrada se obtiene respectivamente  $\sigma_{\max} = -\sigma_{\min}$  y por lo tanto,

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{z_{\max}}}{W_z} + \frac{M_{y_{\max}}}{W_y} = \frac{121\,600}{184} + \frac{24\,000}{23,1} \approx 1\,700 \text{ kgf/cm}^2.$$

$$\text{Puesto que } \frac{\sigma_{\max} - [\sigma]}{[\sigma]} \cdot 100 = \frac{1\,700 - 1\,600}{1\,600} \cdot 100 \approx 6,2\% > 5\%,$$

escogemos el N° 20a, para el cual  $W_z = 203 \text{ cm}^3$ ,  $W_y = 28,2 \text{ cm}^3$  y

$$\sigma_{\max} = \frac{121\,600}{203} + \frac{24\,000}{28,2} \approx 1\,450 \text{ kgf/cm}^2.$$

La subtensión constituye  $\frac{1\,600 - 1\,450}{1\,600} \cdot 100 \approx 9,4\%$ .

Para el perfil N° 20a,  $I_y = 155 \text{ cm}^4$  y  $I_z = 2\,030 \text{ cm}^4$  y, por lo tanto, en la sección empotrada obtendremos

$$\text{tg } \beta = \frac{I_z}{I_y} \cdot \frac{M_{y_{\max}}}{M_{z_{\max}}} = \frac{2\,030}{155} \cdot \frac{240}{1\,216} \approx 2,58 \text{ y } \beta = 68^\circ 50'.$$

En la figura 117,  $a$  está trazada la línea neutra  $nn$  y el diagrama de la tensión normal  $\sigma$  para la sección de empotramiento.

La flecha máxima aparece en el extremo libre de la viga. De la tabla de la figura 99 (casos 2 y 3) se obtiene,

$$\begin{aligned} f_{y_{\max}} &= \frac{1}{EI_z} \left( \frac{ql^4}{8} + \frac{Pl^3 \cos \alpha}{3} \right) = \\ &= \frac{1}{2 \cdot 10^6 \cdot 2\,030} \left( \frac{4 \cdot 16 \cdot 10^8}{8} + \frac{240 \cdot 8 \cdot 10^6 \cdot 0,866}{3} \right) \approx 0,33 \text{ cm}, \end{aligned}$$

$$f_{z_{\max}} = \frac{Pl^3 \sin \alpha}{3EI_y} = \frac{240 \cdot 8 \cdot 10^6 \cdot 0,5}{3 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 155} \approx 1,03 \text{ cm}.$$

La flecha resultante máxima

$$f_{\max} = \sqrt{f_{y_{\max}}^2 + f_{z_{\max}}^2} = \sqrt{0,33^2 + 1,03^2} \approx 1,08 \text{ cm},$$

forma un ángulo  $\beta'$  con el eje  $y$ , para el cual

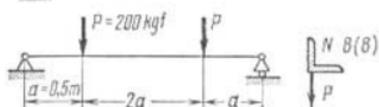
$$\operatorname{tg} \beta' = \frac{f_{z_{\max}}}{f_{y_{\max}}} = \frac{1,03}{0,33} \approx 3,12; \text{ es decir,}$$

$$\beta' = 72^\circ 14'.$$

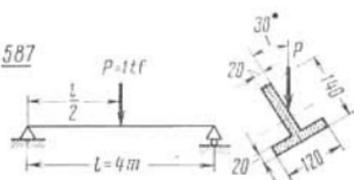
**Problemas 586-595.** Determinar las tensiones normales máximas en valor absoluto, así como la posición de la línea neutra en las secciones peligrosas de las vigas.

En el problema 587 calcúlese también la flecha vertical  $f_v$  y la horizontal  $f_h$  en la sección de aplicación de la fuerza, admitiendo  $E = 2 \cdot 10^6 \text{ kgf/cm}^2$ ; en el problema 593, la magnitud y dirección de la flecha  $f$  del punto de aplicación de  $P_1$ , admitiendo que  $E = 10^4 \cdot \text{MN/m}^2$ .

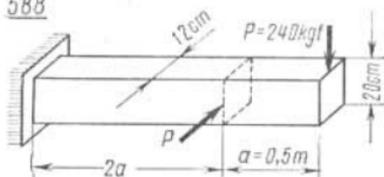
586



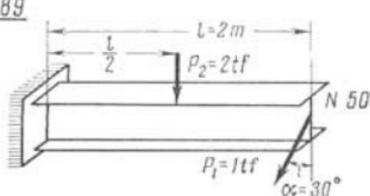
587



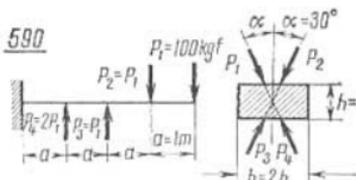
588



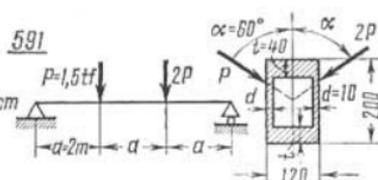
589

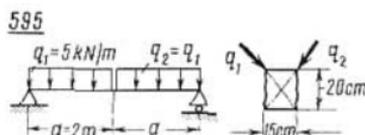
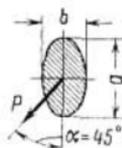
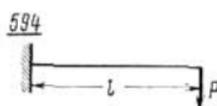
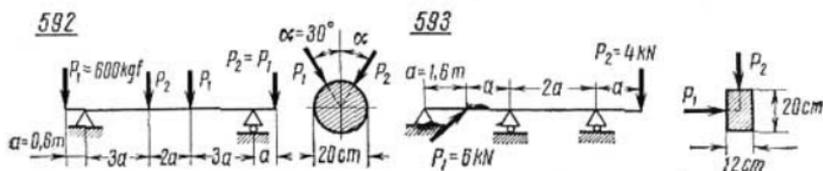


590



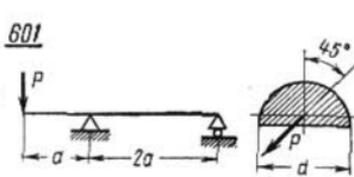
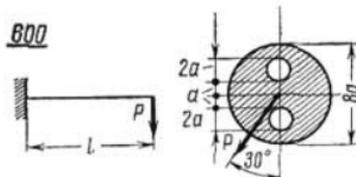
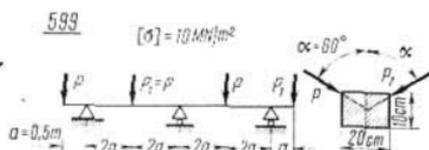
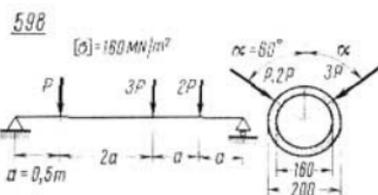
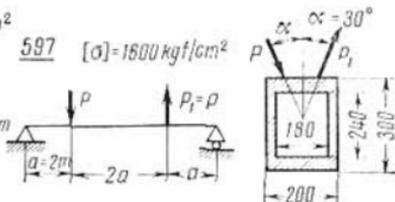
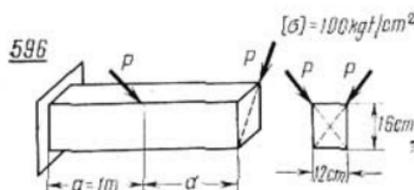
591





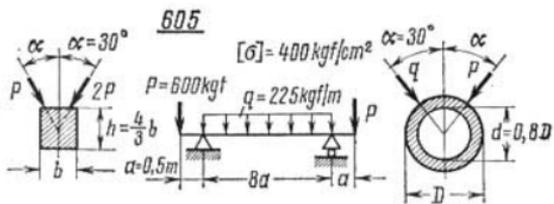
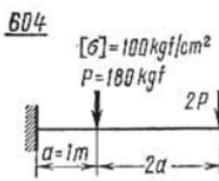
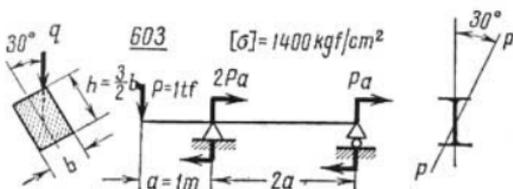
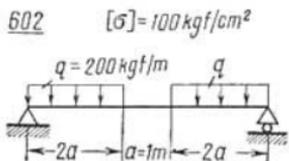
**Problemas 596-601.** Determinar las magnitudes de las fuerzas admisibles  $P$  y la posición de la línea neutra en las secciones peligrosas de las vigas.

Determinar también la magnitud y dirección de la flecha: en el problema 596, del extremo libre de la viga ( $E = 10^5 \text{ kgf/cm}^2$ ), en el problema 599, de la sección media del vano izquierdo de la viga ( $E = 10^4 \text{ MN/m}^2$ ).

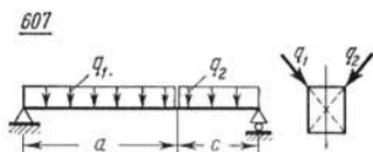
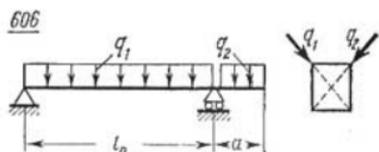


**Problemas 602-605.** Calcular las dimensiones de las secciones y determinar la posición de la línea neutra en las secciones peligrosas de las vigas.

En el problema 604 calcúlese también la magnitud y dirección de la flecha del extremo libre de la viga ( $E = 10^5 \text{ kgf/cm}^2$ ).



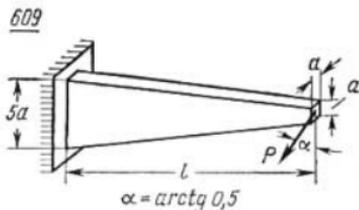
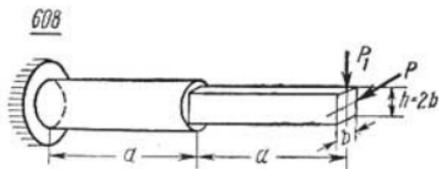
**Problema 606.** Demostrar que cuando  $a \leq \frac{l_0}{2}$  y  $q_2 \leq q$ , la tensión  $\sigma_{\max}$  no depende de  $a$  y  $q_2$ .



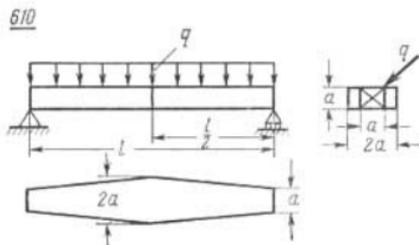
**Problema 607.** Demostrar que cuando  $c \leq a$  y  $q_2 \leq q_1$  la tensión  $\sigma_{\max}$  no depende de  $q_2$ .

**Problema 608.** Dado:  $P_1 = 1,63P$ ,  $E$ ,  $a$ ,  $h = 2b$ . Determinar la magnitud y dirección de  $f_{\max}$ .

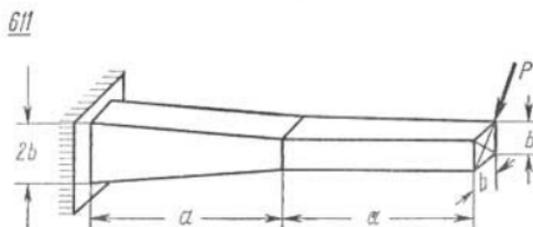
**Problema 609.** Dado:  $P$ ,  $l$ ,  $a$  y  $\alpha = \arctg 0,5$ . Determinar  $\sigma_{\max}$ .



**Problema 610.** Dado:  $q$ ,  $l$  y  $a$ , calcular  $\sigma_{\max}$ .



**Problema 611.** Dado:  $P$ ,  $a$ ,  $b$  y  $E$ . Determinar  $f_{\max}$  y el ángulo de desviación de la flecha de la línea de acción de la fuerza  $P$ .



## § 2. Tracción o compresión y flexión combinadas

En el caso general de la deformación simultánea de la tracción o compresión y la flexión, en una sección transversal arbitraria de una barra prismática, los esfuerzos interiores se reducen a una fuerza

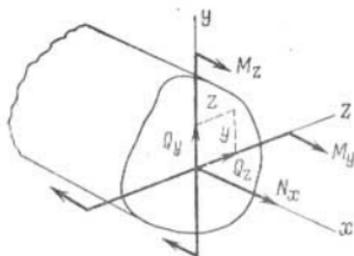


Fig. 118

axial  $N_x$  dirigida según el eje geométrico de la barra  $x$ , a los momentos flectores  $M_y$  y  $M_z$  en los planos centrales principales de inercia de la barra  $xz$  y  $xy$  y a las fuerzas cortantes  $Q_y$  y  $Q_z$  dirigidas según los ejes  $y$  y  $z$  (fig. 118).

Las tensiones normales en la sección transversal de la barra se determinan por la siguiente ecuación del plano que no pasa por el origen de coordenadas:

$$\sigma = \frac{N_x}{F} + \frac{M_y}{I_y} z + \frac{M_z}{I_z} y = \frac{N_x}{F} \left( 1 + \frac{M_y z}{N_x i_y^2} + \frac{M_z y}{N_x i_z^2} \right), \quad (142)$$

siendo  $F$  el área de la sección transversal,  
 $I_y$  e  $I_z$  sus momentos centrales principales de inercia,  
 $i_y$  e  $i_z$  sus radios de giro principales,  
 $y$  y  $z$  las coordenadas del punto situado en el plano de la sección.

La ecuación de la línea neutra es,

$$1 + \frac{M_y z}{N_x i_y^2} + \frac{M_z y}{N_x i_z^2} = 0. \quad (143)$$

Las tensiones normales adquieren los valores máximos y mínimos en los puntos de tangencia del contorno de la sección con las rectas paralelas a la línea neutra.

Las tensiones tangenciales resultantes se pueden obtener, de manera aproximada, sumando geoméricamente las tensiones tangenciales en el punto dado de la sección, originadas por  $Q_y$  y  $Q_z$ .

Generalmente estas tensiones son pequeñas y no tienen gran importancia en los cálculos prácticos.

El cálculo de la sección transversal de la barra se realiza por tensiones normales, por tanteos con la correspondiente comprobación. El primer tanteo puede realizarse, partiendo de la flexión plana, considerando solamente la componente del momento flector que implica mayores dimensiones. Este tanteo debe ser comprobado teniendo en cuenta también la segunda componente del momento flector y la fuerza axial. La sobretensión que surja en la sección obtenida no deberá superar el 5%.

**Ejemplo 64.** Dado:  $q = 200$  kgf/m,  
 $P_0 = 24$  tf,  $P_1 = 16$  tf,  $P_2 = 400$  kgf,  $b = 12$  cm,  $h = 16$  cm y  $l = 2$  m (fig. 119). Determinar  $\sigma_{\max}$ ,  $\sigma_{\min}$  y la posición de la línea neutra.

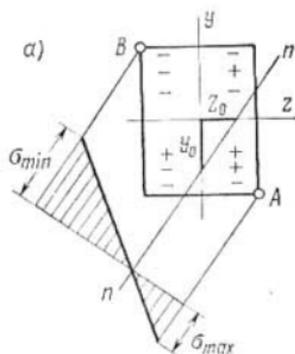
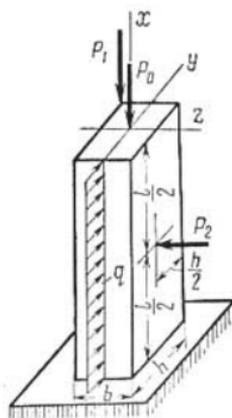


Fig. 119

*Resolución.* En la sección peligrosa de empotramiento de la barra,

$$N_x = -P_0 - P_1 = -24 \cdot 10^3 - 16 \cdot 10^3 = -40 \cdot 10^3 \text{ kgf};$$

$$M_y = P_1 \frac{b}{2} + P_2 \frac{l}{2} = 16 \cdot 10^3 \cdot 6 + 4 \cdot 10^2 \cdot 10^2 = 136 \cdot 10^3 \text{ kgf} \cdot \text{cm};$$

$$M_z = -P_1 \frac{h}{2} - \frac{ql^2}{2} = -16 \cdot 10^3 \cdot 8 - \frac{2 \cdot 4 \cdot 10^4}{2} = -168 \cdot 10^3 \text{ kgf} \cdot \text{cm}.$$

Los signos de las tensiones en los puntos de la sección peligrosa de la barra, originadas por  $N_x$ ,  $M_y$  y  $M_z$  están señalados en la figura 119, a.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \sigma_{\max}^{\min} &= \frac{N_x}{F} \pm \frac{M_y}{W_y} \mp \frac{M_z}{W_z} = -\frac{40 \cdot 10^3}{12 \cdot 16} \pm \frac{136 \cdot 10^3}{16 \cdot 12^2} \cdot 6 \pm \\ &\pm \frac{168 \cdot 10^3}{12 \cdot 16^2} \cdot 6 \approx \begin{cases} 475 \\ -891 \end{cases} \text{ kgf/cm}^2. \end{aligned}$$

En la fórmula (143) se admite que  $N_x > 0$  y que la tensión originada por  $M_y$  y  $M_z$  en el primer cuadrante  $\sigma > 0$ . En el problema en cuestión,

$$N_x < 0, \quad M_y > 0, \quad M_z < 0, \quad \text{pero} \quad i_y^2 = \frac{b^2}{12} = 12 \text{ cm}^2$$

$$\text{e} \quad i_z^2 = \frac{h^2}{12} \approx 21,3 \text{ cm}^2.$$

Por lo tanto los segmentos que la línea neutra  $nn$  corta sobre los ejes  $z$  y  $y$ , serán

$$z_0 = -\frac{N_x i_y^2}{M_y} = -\frac{40 \cdot 10^3}{136 \cdot 10^3} \cdot 12 \approx 3,53 \text{ cm},$$

$$y_0 = -\frac{N_x i_z^2}{M_z} = -\frac{40 \cdot 10^3}{168 \cdot 10^3} \cdot 21,3 \approx -5,07 \text{ cm}.$$

En la figura 119, a se ha trazado la línea neutra  $nn$  por los extremos de estos segmentos y está representado el diagrama de las tensiones normales.

**Ejemplo 65.** Dado:  $q = 6 \text{ kN/m}$ ,  $L = 6 \text{ m}$ ,  $\alpha = 30^\circ$  y  $[\sigma] = 140 \text{ MN/m}^2$  (fig. 120).

Determinar el número del perfil doble te.

*Resolución.* Las proyecciones de la carga  $q$  sobre los ejes  $x$  e  $y$  (fig. 120, a) son,

$$q_x = q \operatorname{sen} \alpha, \quad q_y = q \operatorname{cos} \alpha.$$

La componente  $q_x$  de la carga uniformemente distribuida sobre la longitud  $l$  actúa hacia la izquierda ocasionando así una compresión de la viga. La componente  $q_y$  origina flexión transversal plana en la viga.

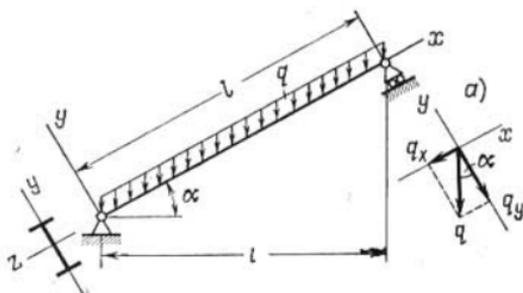


Fig. 120

El momento flector máximo en la sección media de la viga es,

$$M_{\max} = \frac{q_y l^2}{8} = \frac{q L^2}{8 \operatorname{cos} \alpha}.$$

Realizamos el primer tanteo para el cálculo de la sección por este momento. Entonces,

$$W_z = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{q L^2}{8 [\sigma] \operatorname{cos} \alpha} = \frac{6\,000 \cdot 36}{8 \cdot 14 \cdot 10^7 \cdot 0,866} = 2,23 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 = 223 \text{ cm}^3.$$

Por el surtido, el módulo de la sección más próximo superior corresponde al perfil doble te N° 22, para el cual  $W_z = 232 \text{ cm}^3$  y  $F = 30,6 \text{ cm}^2$ .

En la sección donde actúa  $M_{\max}$  el esfuerzo axial de compresión es,

$$N_x = \frac{l}{2} = -\frac{q_x l}{2} = -\frac{q L}{2} \operatorname{tg} \alpha.$$

Comprobamos la sección obtenida teniendo en cuenta también el esfuerzo axial,

$$[\sigma]_{\max} = \frac{|N_x|}{F} + \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{6\,000 \cdot 6}{2 \cdot 30,6 \cdot 10^{-4} \sqrt{3}} + \frac{6\,000 \cdot 36}{8 \cdot 232 \cdot 10^{-6} \cdot 0,866} = 137,8 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2 = 137,8 \text{ MN/m}^2.$$

La subtensión constituye

$$\frac{[\sigma] - |\sigma|_{\max}}{[\sigma]} \cdot 100 = \frac{2,02}{140} \cdot 100 \approx 1,6\%.$$

En realidad la sección donde actúa la tensión máxima se encuentra algo a la izquierda de la sección media de la viga, pero tan cerca de ésta, que esto no influye sobre el cálculo. En efecto, para una sección arbitraria se obtiene,

$$|\sigma|_{\max} = \frac{1}{W} \left( \frac{qlx}{2} \cos \alpha - \frac{qx^2}{2} \cos \alpha \right) + \frac{q(l-x)}{F} \sin \alpha.$$

Puesto que,

$$\frac{d|\sigma|_{\max}}{dx} = \frac{ql}{2W} \cos \alpha - \frac{qx}{W} \cos \alpha - \frac{q}{F} \sin \alpha = 0,$$

la sección peligrosa resulta situada a la distancia del apoyo izquierdo igual a

$$x = \frac{l}{2} - \frac{W}{F} \operatorname{tg} \alpha = \frac{6 \cdot 2}{2\sqrt{3}} - \frac{232 \cdot 10^{-6}}{30,6 \cdot 10^{-4} \sqrt{3}} = 3,420 \text{ m},$$

es decir, a 4,4 cm de la mitad de la viga.

En esta sección (para  $x = 3,420$  m) y para la viga escogida se obtiene,

$$\begin{aligned} |\sigma|_{\max} &= \frac{1}{232 \cdot 10^{-6}} \left( \frac{6\,000 \cdot 6}{2} \cdot 3,420 - \frac{6\,000}{2} \cdot 3,420^2 \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \\ &+ \frac{6\,000 \cdot 3,508}{30,6 \cdot 10^{-4} \cdot 2} \approx 137,85 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2 = 137,85 \text{ MN/m}^2, \end{aligned}$$

es decir, un 0,05% mayor que en la sección media.

**Ejemplo 66.** Dado:  $P_1 = 4$  tf (situada en el plano  $xy$ ),  $P_2 = 1$  tf,  $P_3 = 0,8$  tf,  $M = 2$  tf·m,  $l = 2$  m,  $\alpha = 15^\circ$ ,  $\beta = 30^\circ$  y  $[\sigma] = 1\,600$  kgf/cm<sup>2</sup> (fig. 121).

Calcular el número del perfil canal,  $y_0$  y  $z_0$ .

*Resolución.* En la sección peligrosa (en el empotramiento):  
 $N_x = P_1 \cos \alpha + P_3 \cos \beta = 4 \cdot 0,966 + 0,8 \cdot 0,866 \approx 4,557$  tf;

$$M_y = -P_3 \frac{l}{2} \sin \beta = -0,8 \cdot 0,5 \cdot 100 = -40 \text{ tf} \cdot \text{cm};$$

$$\begin{aligned} M_z &= P_1 l \sin \alpha + P_2 l + M = 4 \cdot 200 \cdot 0,259 + 1 \cdot 200 + 200 = \\ &= 607,2 \text{ tf} \cdot \text{cm}. \end{aligned}$$

El primer tanteo de las dimensiones de la sección lo realizamos calculando por la flexión plana debida al momento  $M_z$ ,

$$W_z = \frac{M_z}{[\sigma]} = \frac{607,2 \cdot 10^3}{16 \cdot 10^2} \approx 380 \text{ cm}^3.$$

Del surtido se obtiene que el módulo de la sección mayor más próximo al necesario corresponde al perfil canal N° 22, para el cual  $W'_z = 192 \text{ cm}^3$ . Para dos perfiles semejantes tendremos,  $W_z = 384 \text{ cm}^3$ .

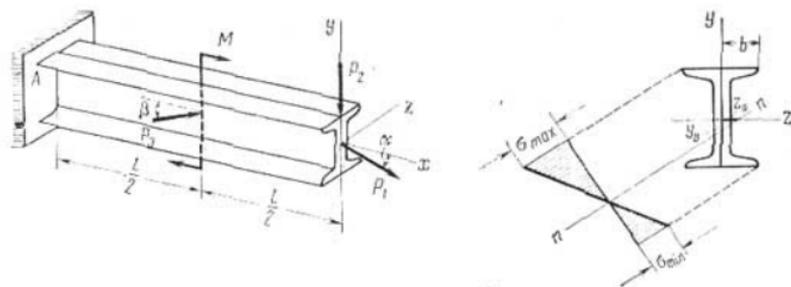


Fig. 121

Teniendo en cuenta que simultáneamente a  $M_z$  en la viga surgen también el momento de gran magnitud  $M_y$  y el esfuerzo axial  $N_x$ , para realizar la comprobación escogemos el perfil canal N° 24, para el cual  $W'_z = 242 \text{ cm}^3$ ,

$$W_z = 2 \cdot 242 = 484 \text{ cm}^3, \quad F = 2F' = 2 \cdot 30,6 = 61,2 \text{ cm}^2,$$

$$I_y = 2I'_y = 2 \cdot 387,2 = 774,4 \text{ cm}^4, \quad W_y = \frac{I_y}{b} = \frac{774,4}{9,0} = 86,0 \text{ cm}^3.$$

Comprobamos la resistencia de los perfiles N° 24 en el punto más tenso A de la sección empotrada,

$$\sigma_{\max} = \frac{N_x}{F} - \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} = \frac{4557}{61,2} + \frac{40 \cdot 10^3}{86,0} + \frac{607,2 \cdot 10^3}{484} \approx$$

$$\approx 1794 \text{ kgf/cm}^2.$$

Puesto que la sobretensión es

$$\frac{\sigma_{\max} - [\sigma]}{[\sigma]} \cdot 100 = \frac{194}{16} \approx 12,1\%$$

resulta que el perfil N° 24 es insuficiente.

Para el segundo tanteo escogemos el canal N° 24 a, para el cual  $W'_z = 265 \text{ cm}^3$ ,  $W_z = 2 \cdot 265 = 530 \text{ cm}^3$ ,  $F = 2 \cdot 32,9 = 65,8 \text{ cm}^2$ ,  $I_y = 2I'_y = 2 \cdot 488,5 = 977 \text{ cm}^4$  y  $W_y = \frac{977}{9,6} \approx 102,8 \text{ cm}^3$ .

Comprobamos la sección de estos perfiles

$$\sigma_{\max} = \frac{4557}{65,8} + \frac{40 \cdot 10^3}{102,8} + \frac{607,2 \cdot 10^3}{530} \approx 1604 \text{ kgf/cm}^2,$$

obteniendo una sobretensión de  $\frac{4}{16} = 0,25\%$  lo que corresponde a la norma admisible. Escogemos definitivamente el canal N° 24 a.

Pasamos ahora a determinar la posición de la línea neutra en la sección peligrosa.

Para el perfil N° 24 a,  $i_z = 9,84 \text{ cm}$ ,  $i_z^2 \approx 96,8 \text{ cm}^2$  e  $i_y^2 = \frac{I_y}{F} = \frac{977}{65,8} \approx 14,8 \text{ cm}^2$ .

Por la fórmula (143) se obtienen los segmentos que la línea neutra corta en los ejes  $y$  y  $z$ ,

$$y_0 = -\frac{4,557}{607,2} \cdot 96,8 \approx -0,73 \text{ cm};$$

$$z_0 = -\frac{4,557}{-40} \cdot 14,8 \approx 1,69 \text{ cm}.$$

En la figura 121,  $a$  está trazada, por los extremos de estos segmentos, la línea neutra  $nn$  y está representado el diagrama de las tensiones normales.

*Carga excéntrica.* En el caso general de sollicitación excéntrica de una barra prismática, ésta sufre simultáneamente deformación de tracción o compresión y flexión pura desviada.

Los esfuerzos interiores en cada sección transversal de la barra se reducen a un esfuerzo axial  $N_x = P$  y a dos momentos flectores  $M_y = Pz_p$  y  $M_z = Py_p$  que surgen en los planos centrales principales de inercia  $xz$  y  $xy$  de la barra. Aquí  $P$  son las fuerzas de tracción (compresión) aplicadas, no en el centro de gravedad de las secciones extremas de la barra, sino en los puntos de coordenadas  $y_p$  y  $z_p$  (fig. 122).

Las tensiones normales en la sección transversal de la barra se determinan por la ecuación siguiente del plano que no pasa por el origen de coordenadas

$$\sigma = \frac{N_x}{F} + \frac{M_y z}{I_y} + \frac{M_z y}{I_z} = \frac{P}{F} \left( 1 + \frac{z \cdot z_p}{i_y^2} + \frac{y \cdot y_p}{i_z^2} \right), \quad (144)$$

siendo  $F$  el área de la sección transversal;  
 $I_y$  e  $I_z$  sus momentos centrales principales de inercia;  
 $i_y$  e  $i_z$  sus radios de giro principales;  
 $y$  y  $z$  las coordenadas de un punto arbitrario del plano de la sección.

La ecuación de la línea neutra  $nn$  es la siguiente,

$$1 + \frac{z \cdot z_p}{i_y^2} + \frac{y \cdot y_p}{i_z^2} = 0$$

$$\text{ó } \frac{z}{z_p} + \frac{y}{y_p} = 1, \quad (145)$$

siendo

$$-\frac{i_y^2}{z_p}, \quad -\frac{i_z^2}{y_p}, \quad (146)$$

los segmentos que corta la línea neutra en los ejes centrales principales de inercia  $z$  e  $y$  de la sección transversal de la barra.

En los puntos de la línea paralela a la línea neutra y que cruza el centro de gravedad de la sección, la tensión normal será  $\sigma = \frac{P}{F}$ .

Las tensiones normales máximas y mínimas aparecen en los puntos de tangencia del contorno de la sección con las rectas paralelas a la línea neutra.

En el caso de secciones simétricas que tengan los puntos más alejados de los dos ejes centrales principales de inercia, las tensiones máximas surgen precisamente en estos puntos.

Así, para estas secciones

$$|\sigma|_{max} = P \left( \frac{1}{F} + \frac{y_p}{W_z} + \frac{z_p}{W_y} \right). \quad (147)$$

Si el punto de aplicación de la fuerza se desplaza por la recta  $pp$  que pasa por el centro de gravedad de la sección  $O$ , entonces la línea neutra  $nn$  se aproximará, sin girar, al centro de gravedad o se alejará de éste según se aleje o se acerque el punto de aplicación de la fuerza al centro de gravedad.

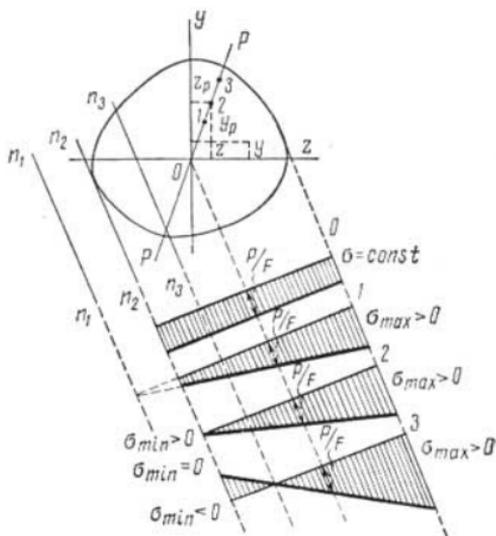


Fig. 122

En la figura 122 están indicadas las posiciones de las líneas neutras ( $n_1n_1$ ,  $n_2n_2$  y  $n_3n_3$ ; la línea  $n_0n_0$  se encuentra en el infinito) y los correspondientes diagramas de  $\sigma$  para los casos cuando la fuerza de tracción  $P$  se aplica en los puntos 0, 1, 2 y 3 de la recta  $pp$ .

Si el punto de aplicación de la fuerza  $P$  se desplaza por la recta  $pp$  (fig. 123) que no pasa por el centro de gravedad de la sección, entonces la línea neutra gira alrededor del punto inmóvil  $K$  de coordenadas,

$$y_0 = -\frac{i_z^2}{y_{p_0}} \quad \text{y} \quad z_0 = -\frac{i_y^2}{z_{p_0}}.$$

Es correcto también lo contrario: si la línea neutra gira alrededor de un punto inmóvil de coordenadas  $y_0$  y  $z_0$ , entonces el punto de aplicación de la fuerza se desplaza por la recta  $pp$  que no pasa por el centro de gravedad de la sección, cuya ecuación es,

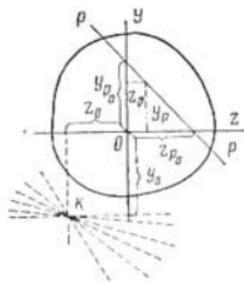


Fig. 123

$$\frac{y_p}{i_z^2} + \frac{z_p}{i_y^2} = 1.$$

Si el punto de aplicación de la fuerza se encuentra sobre uno de los ejes principales centrales de inercia de la sección, entonces la barra experimenta simultáneamente una deformación axial de tracción o compresión y de flexión plana pura.

Todas las fórmulas expuestas anteriormente siguen siendo válidas salvo que en ellas se debe considerar  $z_p = 0$  (si el punto de aplicación de la fuerza se encuentra sobre el eje  $y$ ), o  $y_p = 0$  (si el punto de aplicación de la fuerza se encuentra sobre el eje  $z$ ).

Para garantizar la resistencia de las barras de material frágil y de baja resistencia a la tracción es necesario que la fuerza de compresión aplicada excéntricamente no cree en la sección transversal tensiones de tracción.

La parte del plano de la sección transversal, que rodea el centro de gravedad y que está limitada por una línea cerrada con la propiedad de que la fuerza aplicada en el interior del contorno origina tensiones de un mismo signo en todos los puntos de la sección transversal, se denomina *núcleo central*.

El contorno del núcleo central es el lugar geométrico de los puntos de aplicación de la fuerza excéntrica para los cuales las correspondientes líneas neutras son tangentes al contorno de la sección transversal sin cruzarse con éste.

**Ejemplo 67.** Dado:  $P = 6,4 \text{ tf}$ ,  $b = 4 \text{ cm}$ ,  $h = 8 \text{ cm}$ ,  $y_p = 2 \text{ cm}$ ,  $z_p = 1 \text{ cm}$  (fig. 124).

Determinar  $\sigma_{\max}$ ,  $\sigma_{\min}$ ,  $y_0$  y  $z_0$ .

**Resolución.** En la sección transversal surgen los esfuerzos siguientes:  $N_x = -P = -6,4 \text{ tf}$ ,  $M_y = -Pz_p = -6,4 \cdot 1 = -6,4 \text{ tf} \cdot \text{cm}$ ,  $M_z = -Py_p = -6,4 \cdot 2 = -12,8 \text{ tf} \cdot \text{cm}$ .

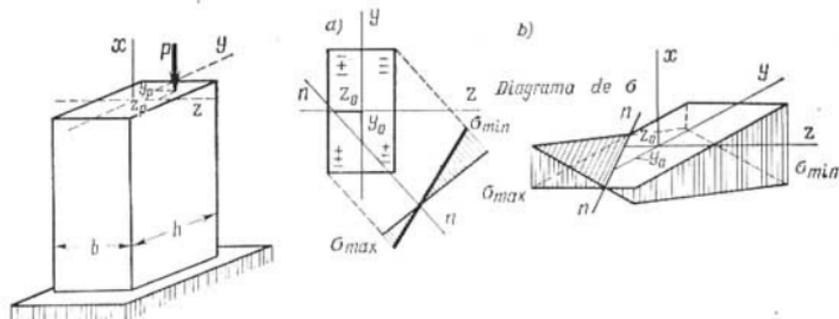


Fig. 124

Puesto que en el primer cuadrante de la sección todos los esfuerzos originan tensiones de compresión,  $\sigma_{\min}$  ocurrirá en el ángulo derecho superior de la sección y  $\sigma_{\max}$ , en ángulo izquierdo inferior (fig. 124, a).

Así, pues,

$$\sigma_{\max/\min} = \frac{N}{F} \mp \frac{M_y}{W_y} \mp \frac{M_z}{W_z}.$$

Teniendo en cuenta que,

$$F = bh = 4 \cdot 8 = 32 \text{ cm}^2, \quad W_y = \frac{hb^2}{6} = \frac{8 \cdot 16}{6} = \frac{64}{3} \text{ cm}^3 \text{ y}$$

$$W_z = \frac{bh^2}{6} = \frac{4 \cdot 64}{6} = \frac{128}{3} \text{ cm}^3,$$

obtendremos

$$\sigma_{\max/\min} = -\frac{6,4 \cdot 10^3}{32} \pm \frac{6,4 \cdot 10^3 \cdot 3}{64} \pm \frac{12,8 \cdot 10^3 \cdot 3}{128},$$

o sea

$$\sigma_{\max} = 400 \text{ kgf/cm}^2, \quad \sigma_{\min} = -800 \text{ kgf/cm}^2.$$

Por las fórmulas (146) se determinan los segmentos que la línea neutra  $nn$  corta en los ejes centrales principales de inercia

y y z,

$$y_0 = -\frac{i_z^2}{y_p} = -\frac{h^2}{12y_p} = -\frac{64}{12 \cdot 2} = -\frac{8}{3} \approx -2,67 \text{ cm,}$$

$$z_0 = -\frac{i_y^2}{z_p} = -\frac{b^2}{12z_p} = -\frac{16}{12 \cdot 1} = -\frac{4}{3} \approx 1,33 \text{ cm.}$$

La posición de la línea neutra y el diagrama de  $\sigma$  están dados en la figura 124, a, b.

**Ejemplo 68.** Dado: una sección arbitraria simétrica respecto al eje z, inscrita en el rectángulo ABCD de lados  $b < h$  (fig. 125);

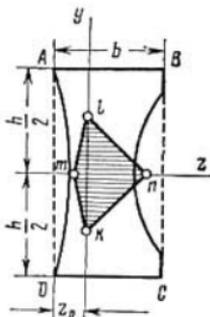


Fig. 125

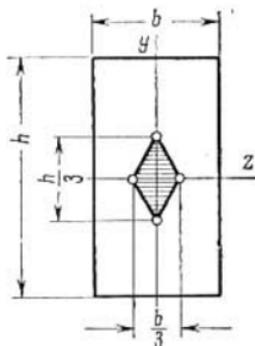


Fig. 126

los radios de giro centrales principales de la sección  $i_y < i_z$  y la posición del centro de gravedad de la sección determinada por  $z_0$ . Construir el núcleo central de la sección.

*Resolución.* Si las líneas neutras son tangentes a los lados cortos del rectángulo AB y CD, entonces los puntos de aplicación de la fuerza excéntrica correspondientes (puntos k y l del contorno del núcleo central) se encontrarán sobre el eje y y estarán determinados por las ordenadas  $y_n = \mp \frac{2i_z^2}{h}$ .

Si las líneas neutras son tangentes a los lados largos del rectángulo BC y DA, entonces los puntos de aplicación de la fuerza excéntrica correspondientes (puntos m y n del contorno del núcleo central) se encontrarán sobre el eje z y se determinarán por las abscisas,

$$z_n = -\frac{i_y^2}{b - z_0}; \quad z_n = \frac{i_y^2}{z_0}.$$

Puesto que de las líneas neutras horizontales se puede pasar a las verticales (y viceversa) girando alrededor de puntos inmóviles coin-

cidentes con los vértices del rectángulo, durante estos giros de la línea neutra, el punto de aplicación de la fuerza excéntrica deberá desplazarse por líneas rectas.

Uniendo los puntos  $k$ ,  $l$ ,  $m$  y  $n$  por líneas rectas, obtendremos el núcleo central (en la figura 125 el núcleo central está rayado con líneas horizontales).

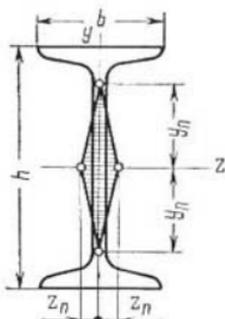


Fig. 127

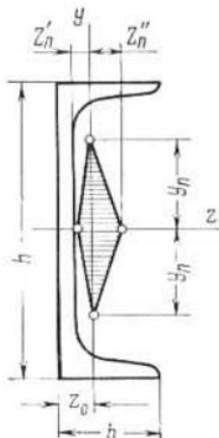


Fig. 128

*Casos particulares:* a) sección rectangular de lados  $b$  y  $h$  (fig. 126).

En este caso  $i_z^2 = \frac{h^2}{12}$ ,  $i_y^2 = \frac{b^2}{12}$  y  $z_0 = \frac{b}{2}$ . Por lo tanto  $y_n = \mp \frac{h}{6}$ ;

$z_n = \mp \frac{b}{6}$ . b) sección doble te (doble te N° 20a, fig. 127). Del surtido se obtiene para el perfil doble te N° 20a:  $i_z = 8,37$  cm,  $i_y = 2,32$  cm,  $h = 20$  cm,  $b = 11$  cm y  $z_0 = \frac{b}{2}$ .

Por lo tanto,

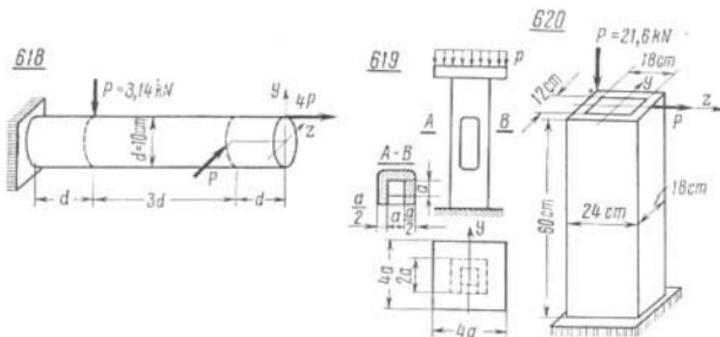
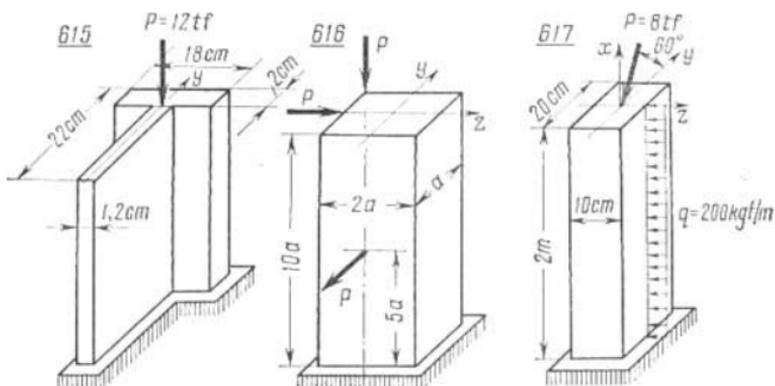
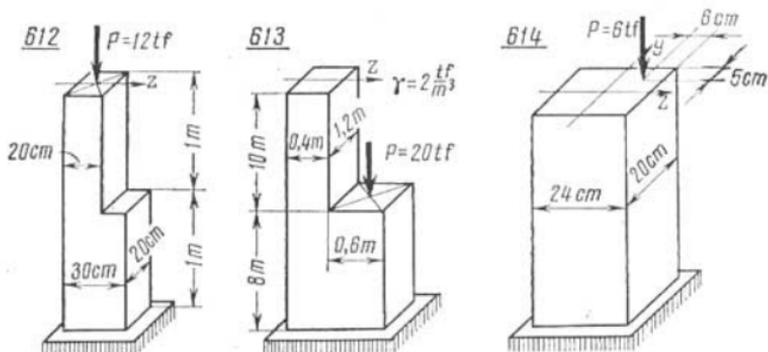
$$y_n = \mp \frac{2 \cdot 8,37^2}{20} \approx \mp 7,01 \text{ cm}, \quad z_n = \mp \frac{2 \cdot 2,32^2}{11} \approx \mp 0,979 \text{ cm};$$

c) sección canal (perfil N° 22a, fig. 128). Del surtido se obtiene para el perfil N° 22a:  $i_z = 8,99$  cm,  $i_y = 2,55$  cm,  $h = 22$  cm,  $b = 8,7$  cm y  $z_0 = 2,46$  cm. Por lo tanto,

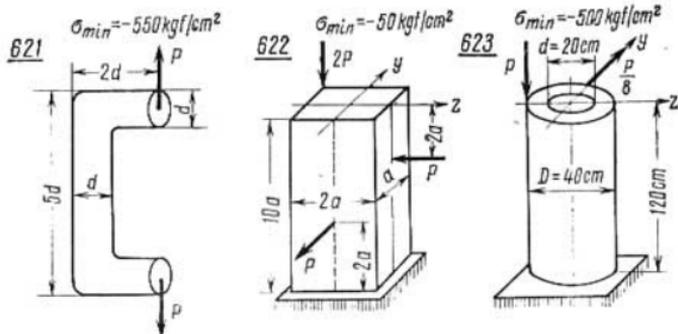
$$y_n = \mp \frac{2 \cdot 8,99^2}{22} \approx \mp 7,35 \text{ cm}, \quad z'_n = - \frac{2,55^2}{8,7 - 2,46} \approx -1,04 \text{ cm},$$

$$z_n = \frac{2,55^2}{2,46} \approx 2,64 \text{ cm}.$$

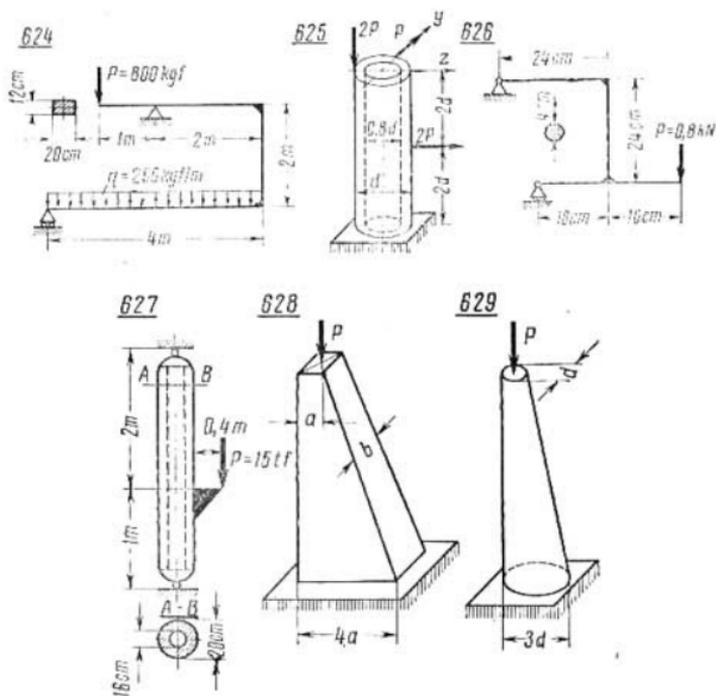
**Problemas 612-620.** Determinar las tensiones normales máxima  $\sigma_{\max}$  y mínima  $\sigma_{\min}$  así como también la posición de la línea neutra en la sección peligrosa de las barras rectas.



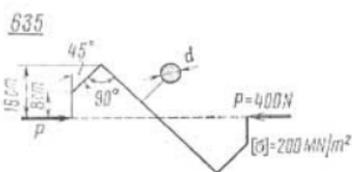
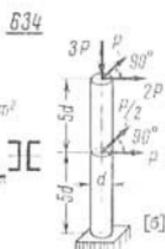
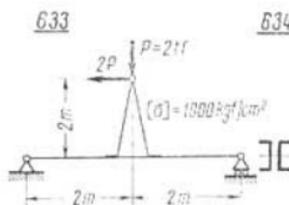
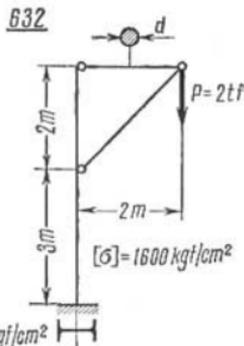
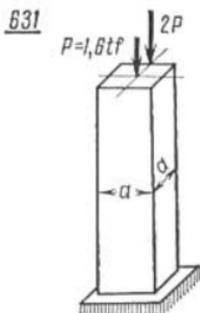
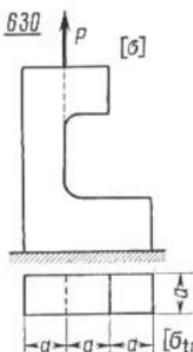
**Problemas 621-623.** Determinése la tensión normal máxima  $\sigma_{\max}$  y la posición de la línea neutra en las secciones peligrosas de las barras.



**Problemas 624-629.** Determinése las tensiones normales máxima  $\sigma_{\max}$  y mínima  $\sigma_{\min}$  en las secciones peligrosas de las barras y en los elementos del sistema que están sometidos a resistencia compuesta.



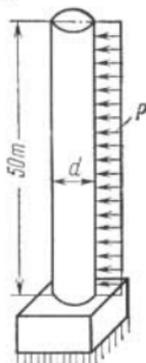
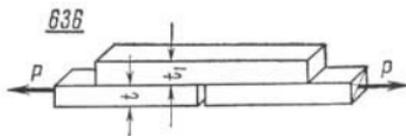
**Problemas 630-635.** Determinar las dimensiones necesarias de las secciones transversales de las barras, vigas y otros elementos de los sistemas.



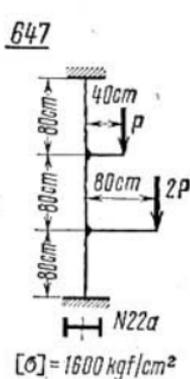
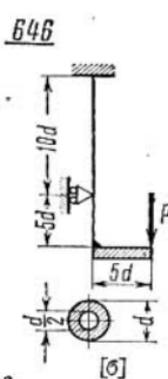
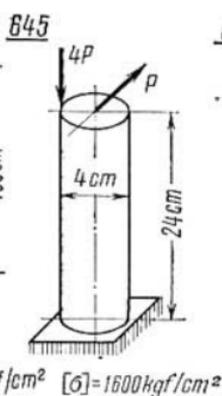
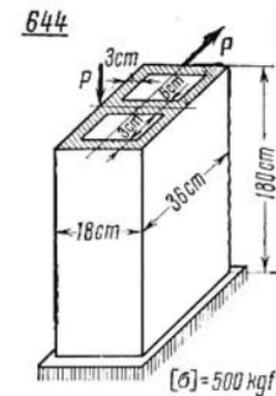
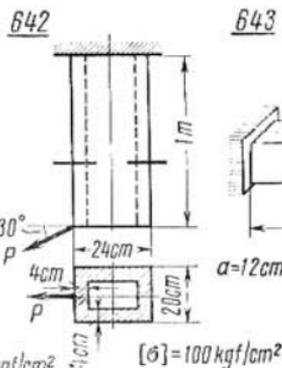
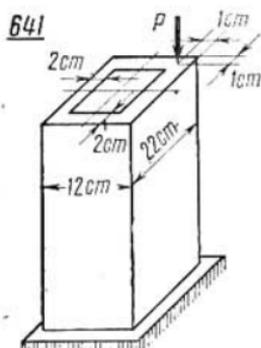
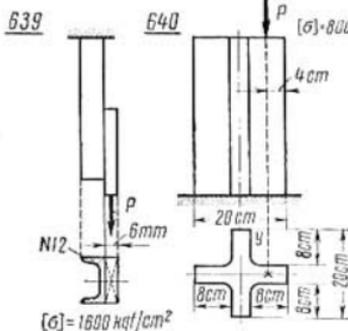
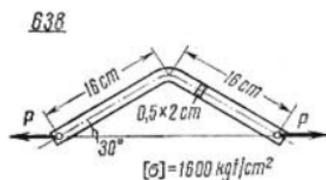
**Problema 636.** Determinar el tamaño  $t_1$  para el cual las tensiones normales máximas en las planchas y en el cubrejuntas son iguales.

**Problema 637.** Dado: el peso de la unidad de volumen del material de la columna  $\gamma = 2,5 \text{ tf/m}^3$  y la presión lateral sobre la sección diametral  $p = 90 \text{ kgf/m}^2$ .

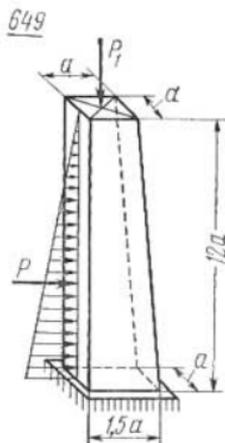
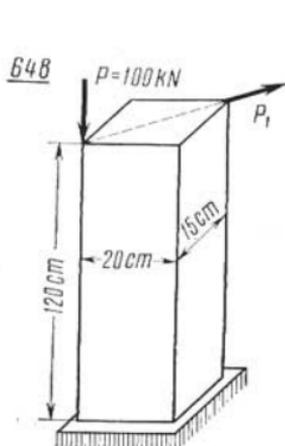
Determinar el diámetro  $d$  de la sección transversal de la columna partiendo de la condición de que en la columna no aparecen tensiones de tracción.



**Problemas 638-647.** Determinar las magnitudes de la carga máxima no peligrosa  $P$ .

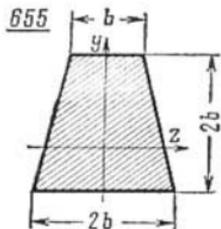
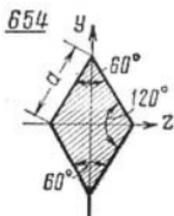
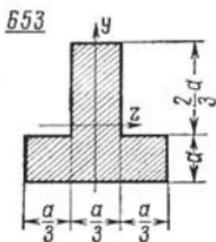
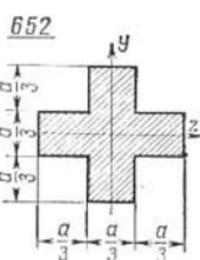
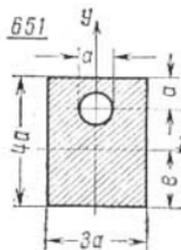
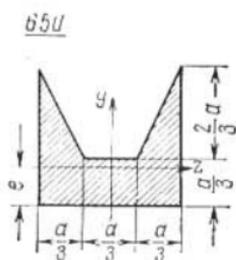


**Problema 648.** Determinar los valores de la fuerza  $P_1$  para los cuales en la sección inferior de la barra no aparecen tensiones de tracción.



**Problema 649.** Determinar los valores de  $P_1$  y  $\sigma_{\min}$  si en la barra  $\sigma_{\max} = 0$ .

**Problemas 650-655.** Construir el núcleo central de la sección.



### § 3. Tracción o compresión y torsión combinadas

Si en las secciones transversales de la barra, como consecuencia de la acción de las fuerzas exteriores, surgen esfuerzos axiales  $N_x$  y momentos torsores  $M_t$ , entonces la barra sufrirá una deformación originada por la tracción o compresión y la torsión simultáneas.

$x$  es el eje geométrico de la barra,  $y$  y  $z$ , los ejes centrales principales de inercia de la sección transversal.

En el punto peligroso ( $y, z$ ) de la sección de la barra en cuestión, debido al esfuerzo axial  $N_x$ , surgen tensiones normales,

$$\sigma = \frac{N_x}{F},$$

siendo  $F$  el área de la sección;

y debido al momento torsor, tensiones tangenciales,

$$\tau = \frac{M_t}{W_t},$$

siendo  $W_t$  el módulo de la sección para la torsión.

Las tensiones normales principales en este punto se obtienen por la fórmula (107),

$$\sigma_{1,3} = \frac{1}{2} (\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}).$$

El cálculo de la resistencia se realiza por las hipótesis de resistencia.

En el caso de materiales plásticos se emplea la tercera o cuarta hipótesis de resistencia, de acuerdo con las cuales,

$$\sigma_{e_{III}} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma], \quad (148)$$

$$\sigma_{e_{IV}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_3^2} - \sigma_1\sigma_3 = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (149)$$

Para los materiales que ofrecen distinta resistencia a la tracción y a la compresión, siendo  $\frac{[\sigma_{\text{trac}}]}{[\sigma_{\text{com}}]} = \nu$ , se emplea la quinta hipótesis de resistencia, para la cual

$$\sigma_{e_V} = \sigma_1 - \nu\sigma_3 = \frac{1-\nu}{2}\sigma + \frac{1+\nu}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma_{\text{trac}}]. \quad (150)$$

Si la sección de la barra es circular de diámetro  $d$ , entonces,

$$F = \frac{\pi d^2}{4} \quad \text{y} \quad W_t = W_p = \frac{\pi d^3}{16}.$$

**Ejemplo 69.** Dado:  $P = 2$  tf,  $M = 4$  tf·cm,  $d = 4$  cm,  $[\sigma_t] = 350$  kgf/cm<sup>2</sup> y  $[\sigma_c] = 1\,400$  kgf/cm<sup>2</sup> (fig. 129); comprobar si la barra es resistente o no.

*Resolución.* El esfuerzo axial es,

$$N_x = -P = -2 \cdot 10^3 \text{ kgf},$$

y el momento torsor,

$$M_t = M = 4 \cdot 10^3 \text{ kgf} \cdot \text{cm}.$$

Las tensiones normales en todos los puntos de la sección serán,

$$\sigma = \frac{N_x}{F} = -\frac{2 \cdot 10^3 \cdot 4}{\pi \cdot 4^2} \approx -159 \text{ kgf/cm}^2.$$

Las tensiones tangenciales máximas en los puntos del contorno de la sección,

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_p} = \frac{4 \cdot 10^3 \cdot 16}{\pi \cdot 4^2} \approx 318 \text{ kgf/cm}^2.$$

Puesto que

$$v = \frac{[\sigma_{\text{trac}}]}{[\sigma_{\text{com}}]} = \frac{350}{1400} = 0,25$$

resulta que la tensión equivalente, por la fórmula (150), será

$$\sigma_{\text{ev}} = -\frac{1-0,25}{2} 159 + \frac{1+0,25}{2} \sqrt{159^2 + 4 \cdot 318^2} \approx 350 \text{ kgf/cm}^2 = [\sigma_{\text{trac}}]$$

es decir, que la barra resulta resistente.

**Ejemplo 70.** Dado:  $P = 160 \text{ kN}$ ,  $M = 4 \text{ kN} \cdot \text{m}$ ,  $h = 8 \text{ cm}$ ,  $b = 4 \text{ cm}$  y  $\sigma_f = 360 \text{ MN/m}^2$  (fig. 130).

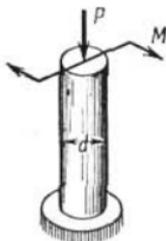


Fig. 129

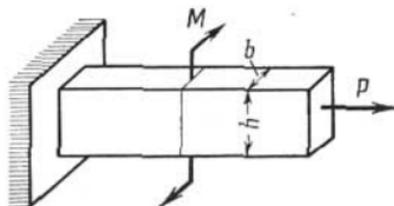


Fig. 130

Determinar el coeficiente de seguridad  $n_f$ .

*Resolución.* Puesto que  $N_x = P = 16 \cdot 10^4 \text{ N}$ ,  $M_t = M = 4 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}$  y  $h/b = 8/4 = 2$ , en todos los puntos de las secciones transversales  $\sigma = \frac{N_x}{F} = \frac{16 \cdot 10^4}{0,04 \cdot 0,08} = 50 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2 = 50 \text{ MN/m}^2$ , mientras

que en los puntos más sobrecargados por la torsión, en el medio de los lados grandes del rectángulo de las secciones de la mitad izquierda de la barra,

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t} = \frac{M_t}{\beta b^3} = \frac{4 \cdot 10^3 \cdot 10^6}{0,493 \cdot 64} \approx 127 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2 = 127 \text{ MN/m}^2.$$

En los puntos peligrosos de la barra la tensión equivalente, según la tercera hipótesis de resistencia, por la fórmula (148), será

$$\sigma_{eIII} = \sqrt{50^2 + 4 \cdot 127^2} \approx 259 \text{ MN/m}^2.$$

El coeficiente de seguridad,

$$n_f = \frac{\sigma_f}{\sigma_{eIII}} = \frac{360}{259} \approx 1,39.$$

#### § 4. Torsión y flexión simultáneas

Durante la deformación originada por la flexión y la torsión simultáneas, los esfuerzos interiores en las secciones transversales de la barra se reducen a cinco componentes: momento torsor  $M_x = M_t$  respecto al eje geométrico de la barra  $x$  (fig. 131), momentos

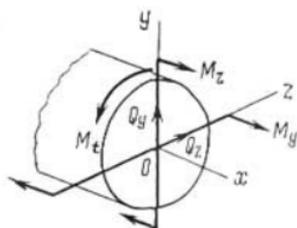


Fig. 131

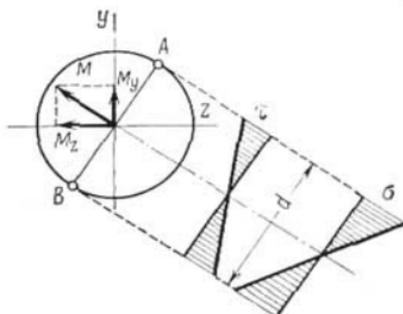


Fig. 132

flectores  $M_y$  y  $M_z$  respecto a los ejes principales centrales de inercia de la sección  $y$  y  $z$  y fuerzas cortantes  $Q_y$  y  $Q_z$  orientadas según estos ejes.

Si la barra es de sección transversal circular de diámetro  $d$ , entonces las tensiones tangenciales que determinan  $Q_y$  y  $Q_z$  jugarán un papel secundario y generalmente no se consideran en el cálculo.

Las tensiones tangenciales que determinan el momento torsor alcanzan su valor máximo

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_p} = \frac{16M_t}{\pi d^3},$$

igual en todos los puntos del contorno de la sección (fig. 132), mientras que las tensiones normales máximas que determinan los momentos flectores  $M_y$  y  $M_z$  resultan en dos puntos ( $A$  y  $B$ ) del contorno de la sección, que se encuentran en los extremos del diámetro perpendicular al vector del momento flector resultante  $M = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}$ . Estas tensiones son,

$$\sigma = \pm \frac{M}{W} = \pm \frac{32M}{\pi d^3}.$$

En los puntos peligrosos  $A$  y  $B$  las tensiones normales principales  $\sigma_1$  y  $\sigma_3$  se obtienen por la fórmula (107) y las condiciones de resistencia de las desigualdades (148), (149) y (150).

Teniendo en cuenta los valores de  $\sigma$  y  $\tau$ , así como que  $W_p = 2W$ , obtendremos para las fórmulas de resistencia

$$W \geq \frac{M_c}{[\sigma]}, \quad (151)$$

siendo  $M_c$  el momento flector equivalente (efectivo), que según la tercera hipótesis de resistencia, es,

$$M_{c_{III}} = \sqrt{M^2 + M_t^2}, \quad (152)$$

según la cuarta,

$$M_{c_{IV}} = \sqrt{M^2 + 0,75M_t^2} \quad (153)$$

y según la quinta,

$$M_{c_v} = \frac{1-v}{2} M + \frac{1+v}{2} \sqrt{M^2 + M_t^2}, \quad (154)$$

siendo

$$v = \frac{[\sigma_t]}{[\sigma_c]}.$$

Si una barra de sección no circular se somete a torsión y flexión combinadas, entonces los puntos peligrosos serán también los que se encuentran en el contorno de la sección. Sin embargo, puesto que los puntos con tensiones tangenciales máximas originadas por la torsión pueden no coincidir con los puntos donde surgen las tensiones normales máximas originadas por la flexión, pueden resultar peligrosos aquellos donde aparecen las tensiones tangenciales máximas, aquellos en que surgen las tensiones normales máximas u otros puntos intermedios del contorno de la sección.

Serán peligrosos los puntos ( $y, z$ ) donde la tensión equivalente obtenida por la hipótesis de resistencia escogida, alcance su valor máximo.

Al obtener la tensión equivalente,  $\sigma$  y  $\tau$  se deben calcular por las fórmulas:

$$\sigma = \frac{M_y}{I_y} z + \frac{M_z}{I_z} y \quad \text{y} \quad \tau = \gamma \frac{M_t}{W_{tor}},$$

siendo  $\gamma$  un coeficiente adimensional que depende de la configuración, de las dimensiones de la sección y de las coordenadas ( $y, z$ ) del punto del contorno de la sección que se analiza.

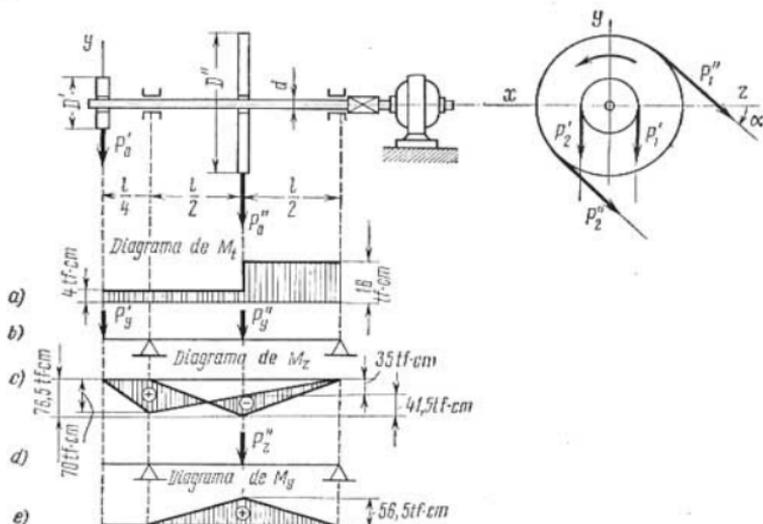


Fig. 133

Para precisar más el cálculo se pueden tener en cuenta también las tensiones tangenciales  $\tau_{Q_y}$  y  $\tau_{Q_z}$  que acompañan a la flexión. Entonces la tensión tangencial completa deberá calcularse como la suma geométrica.

**Ejemplo 71.** Dado: los diámetros de las poleas  $D' = 20 \text{ cm}$ ,  $D'' = 60 \text{ cm}$ , sus pesos  $P'_0 = 200 \text{ kgf}$ ,  $P''_0 = 400 \text{ kgf}$ , los esfuerzos en las correas  $P'_1 = 800 \text{ kgf}$ ,  $P'_2 = 400 \text{ kgf}$ ,  $P''_1 = 1000 \text{ kgf}$ ,  $P''_2 = 600 \text{ kgf}$ , la longitud del árbol  $l = 2 \text{ m}$ , el ángulo de inclinación de las correas de la segunda polea respecto al eje  $z$ ,  $\alpha = 45^\circ$ , la tensión admisible del material del árbol  $[\sigma] = 1000 \text{ kgf/cm}^2$  (fig. 133). Calcular el diámetro del árbol  $d$ .

**Resolución.** Desplazando las fuerzas de tensión de las correas de cada polea al centro de la sección del árbol, obtendremos los momentos respecto al eje  $x$  en la sección donde se encuentran la

primera y la segunda poleas,

$$M'_x = (P'_1 - P'_2) \frac{D'}{2} = 400 \cdot 10 = 4 \cdot 10^3 \text{ kgf} \cdot \text{cm},$$

$$M''_x = (P''_1 - P''_2) \frac{D''}{2} = 400 \cdot 30 = 12 \cdot 10^3 \text{ kgf} \cdot \text{cm}.$$

Proyectando las fuerzas que actúan en la sección de cada polea sobre los ejes  $y$  y  $z$  se obtienen las fuerzas cortantes resultantes en dirección a estos ejes,

$$P'_y = (P'_1 + P'_2) + P'_0 = 1\,200 + 200 = 1\,400 \text{ kgf}, \quad P'_z = 0,$$

$$P''_y = (P''_1 + P''_2) \cos 45^\circ + P''_0 \approx 1\,600 \cdot 0,707 + 400 = 1\,530 \text{ kgf},$$

$$P''_z = (P''_1 + P''_2) \sin 45^\circ \approx 1\,600 \cdot 0,707 = 1\,130 \text{ kgf}.$$

Los momentos  $M'_x$  y  $M''_x$  originan torsión. El diagrama del momento torsor  $M_t$  está dado en la figura 133, *a*.

Bajo la acción de las fuerzas  $P'_y$  y  $P''_y$  el árbol se flexa en el plano  $xy$  como una viga con voladizo (fig. 133, *b*). Sumando los diagramas se obtiene el diagrama del momento flector  $M_x$  respecto al eje  $z$  (fig. 133, *c*).

La fuerza  $P''_z$  flexa el árbol en el plano  $xz$  como se representa en la figura 133, *d*. El diagrama del momento flector  $M_y$  respecto al eje  $y$  se da en la figura 133, *e*.

Será peligrosa la sección del árbol donde se encuentra la segunda polea.

Realizamos el cálculo por la tercera hipótesis de resistencia. El momento flector equivalente se obtiene por la fórmula (152)

$$\begin{aligned} M_{e_{III}} &= \sqrt{M^2 + M_t^2} = \sqrt{M_y^2 + M_x^2 + M_t^2} = \\ &= \sqrt{56,5^2 + 41,5^2 + 16^2} \approx 71,9 \text{ tf} \cdot \text{cm}. \end{aligned}$$

Por la fórmula (151) hallamos,

$$W = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1 d^3 \geq \frac{M_{e_{III}}}{[\sigma]} = \frac{71\,900}{1\,000},$$

obteniendo para el diámetro del árbol,

$$d \geq \sqrt[3]{71,9} \approx 4,2 \text{ cm}.$$

**Ejemplo 72.** Dado:  $P$ ,  $a$ ,  $h = 2b$  y  $[\sigma]$  (fig. 134). Determinar  $b$  y  $h$ .

**Resolución.** Construimos los diagramas de los momentos flector  $M$  y torsor  $M_t$  (fig. 134, *a* y *b*).

En el punto  $A$  de la sección de empotramiento peligrosa (fig. 134, *c*).

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{36Pa}{bh^2} = 9 \frac{Pa}{b^3} \quad \text{y} \quad \tau = \gamma \frac{M_t}{W_{\text{tor}}} = 0,795 \frac{2Pa}{0,493b^3} \approx 3,23 \frac{Pa}{b^3}.$$

Según la tercera hipótesis de resistencia,

$$\sigma_{e,III} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \frac{Pa}{b^3} \sqrt{81 + 4 \cdot 10,4} \approx 11,07 \frac{Pa}{b^3} \leq [\sigma],$$

de donde se obtiene,

$$b \geq \sqrt[3]{11,07 \frac{Pa}{[\sigma]}} \approx 2,23 \sqrt[3]{\frac{Pa}{[\sigma]}}.$$

En el punto *B* de la sección peligrosa resulta que para el momento flector  $\sigma = 0$  y para el torsor,

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_{\text{tor}}} = \frac{2Pa}{0,493b^3}.$$

Según la tercera hipótesis de resistencia,

$$\tau_{\max} = \frac{2Pa}{0,493b^2} \leq \frac{[\sigma]}{2},$$

de donde se obtiene

$$b \geq \sqrt[3]{8,11 \frac{Pa}{[\sigma]}}.$$

El punto *A* resulta el más peligroso y por lo tanto debemos admitir

$$b \approx 2,23 \sqrt[3]{\frac{Pa}{[\sigma]}}$$

$$\text{y } h \approx 4,46 \sqrt[3]{\frac{Pa}{[\sigma]}}.$$

Comprobemos las dimensiones *b* y *h* obtenidas, realizando el cálculo para el punto *B* y teniendo en cuenta las tensiones tangenciales que acompañan a la flexión.

Puesto que en la sección peligrosa la fuerza cortante es  $Q = 4P$ , en el punto *B* surgirán las tensiones tangenciales siguientes,

$$\tau_Q = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{bh} = 3 \frac{P}{b^2}.$$

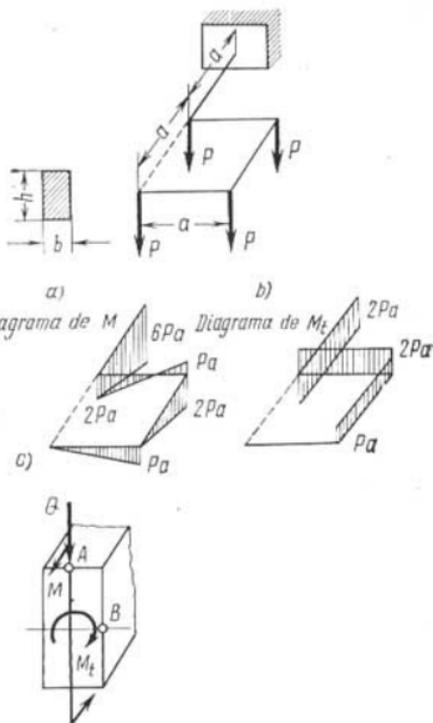


Fig. 134

La tensión resultante tangencial en el punto  $B$  será,

$$\tau = \tau_Q + \tau_{\max} = \frac{3P}{b^2} + \frac{2Pa}{0,493b^3} = \frac{Pa}{b^3} \left( 4,06 + 3 \frac{b}{a} \right).$$

Según la tercera hipótesis de resistencia deberá cumplirse la condición siguiente,

$$\tau = \frac{Pa}{b^3} \left( 4,06 + 3 \frac{b}{a} \right) \leq \frac{[\sigma]}{2}$$

y, por lo tanto,

$$\frac{Pa}{b^3} \leq \frac{[\sigma]}{2 \left( 4,06 + 3 \frac{b}{a} \right)}.$$

El cálculo realizado para el punto  $A$  nos dio, que

$$\frac{Pa}{b^3} \leq \frac{[\sigma]}{11,07}.$$

Así, pues, las dimensiones mayores resultan al realizar el cálculo para el punto  $B$ , cuando  $\frac{[\sigma]}{2 \left( 4,06 + 3 \frac{b}{a} \right)} \leq \frac{[\sigma]}{11,07}$

ó

$$4,06 + 3 \frac{b}{a} > 5,54 \quad \text{ó} \quad \frac{b}{a} > \frac{1,48}{3} \approx 0,493.$$

Esto quiere decir que el punto  $B$  es más peligroso que el punto  $A$  solamente en el caso de pequeñas longitudes de los tramos del árbol cuando  $a < \frac{b}{0,493} \approx 2b$ .

**Ejemplo 73.** Cuatro barras prismáticas de longitud  $l$ , cuyos ejes geométricos se encuentran en un mismo plano, están empotradas en un extremo y en el otro unidas por un diafragma absolutamente rígido (fig. 135,  $a$ ).

Determinar el ángulo de giro  $\varphi$  del diafragma, originado por el momento  $M_0$  aplicado en el plano del diafragma, si la distancia entre los ejes de las barras son  $a$ ,  $b$ , y  $c$ ; las rigideces de las barras a la torsión,  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  y  $C_4$  y sus rigideces a la flexión  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$  y  $B_4$ .

Considérese que el diafragma permanece vertical y que la recta horizontal que pasa por los centros de gravedad de las secciones extremas de las barras coincide con la dirección de uno de los ejes principales centrales de inercia de las barras.

*Resolución.* Puesto que el diafragma es rígido, girará en su plano alrededor de un punto  $O$  (fig. 135,  $b$ ) un ángulo  $\varphi$ . Este será el ángulo

de torsión de cada barra, es decir,

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4 = \varphi. \quad (a)$$

Puesto que

$$\varphi_1 = \frac{M_{t_1}}{C_1}, \quad \varphi_2 = \frac{M_{t_2}}{C_2}, \quad \varphi_3 = \frac{M_{t_3}}{C_3}, \quad \varphi_4 = \frac{M_{t_4}}{C_4}, \quad (b)$$

siendo  $M_{t_i}$  los momentos torsores correspondientes a cada barra

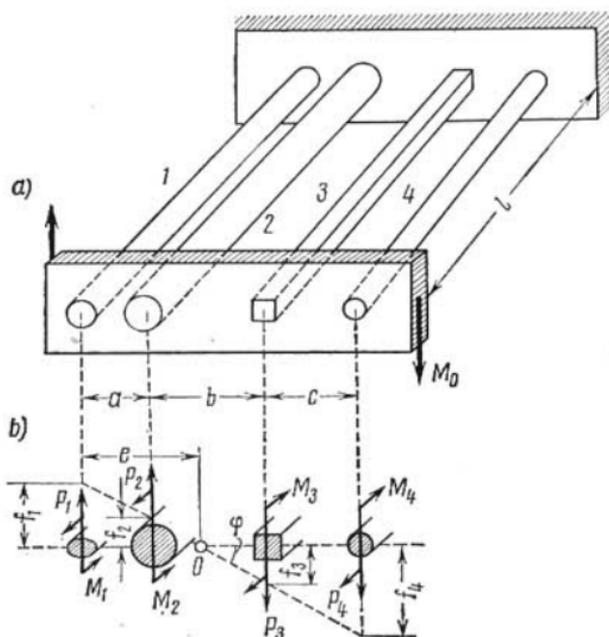


Fig. 135

(las rigideces son  $C_i = \frac{G_i I_{t_i}}{l}$ ), las igualdades (a) se escribirán así,

$$\frac{M_{t_1}}{C_1} = \frac{M_{t_2}}{C_2} = \frac{M_{t_3}}{C_3} = \frac{M_{t_4}}{C_4} = \varphi. \quad (c)$$

Considerando estas igualdades, obtendremos:

$$M_{t_1} + M_{t_2} + M_{t_3} + M_{t_4} = (C_1 + C_2 + C_3 + C_4) \varphi. \quad (d)$$

Las flechas de los extremos de las barras deberán encontrarse en el plano del diafragma y ser iguales a (fig. 135, b)

$$\begin{aligned}
 f_1 = e\varphi &= \frac{1}{B_1} \left( P_1 - \frac{3}{2l} M_1 \right); & f_2 = (e - a)\varphi &= \frac{1}{B_2} \left( P_2 - \frac{3}{2l} M_2 \right); \\
 f_3 &= (a + b - e)\varphi = \frac{1}{B_3} \left( P_3 - \frac{3}{2l} M_3 \right) \text{ y} \\
 f_4 &= (a + b + c - e)\varphi = \frac{1}{B_4} \left( P_4 - \frac{3}{2l} M_4 \right), \quad (e)
 \end{aligned}$$

siendo  $P_1, P_2, P_3, P_4$  y  $M_1, M_2, M_3, M_4$ , las fuerzas y los momentos aplicados a las secciones extremas de las correspondientes barras y

$$B_i = \frac{3E_i l_i}{l^3}, \text{ las rigideces.}$$

Considerando que el diafragma permanece vertical, obtendremos que los ángulos de giro de las secciones extremas de las barras debidos a la flexión deberán ser nulos, es decir,

$$\left. \begin{aligned}
 \theta_1 &= \frac{1}{B_1} \left( \frac{3}{2l} P_1 - \frac{3}{l^2} M_1 \right) = 0; & \theta_2 &= \frac{1}{B_2} \left( \frac{3}{2l} P_2 - \frac{3}{l^2} M_2 \right) = 0, \\
 \theta_3 &= \frac{1}{B_3} \left( \frac{3}{2l} P_3 - \frac{3}{l^2} M_3 \right) = 0; & \theta_4 &= \frac{1}{B_4} \left( \frac{3}{2l} P_4 - \frac{3}{l^2} M_4 \right) = 0;
 \end{aligned} \right\} (f)$$

De aquí se obtiene

$$M_1 = \frac{P_1 l}{2}; \quad M_2 = \frac{P_2 l}{2}; \quad M_3 = \frac{P_3 l}{2}; \quad M_4 = \frac{P_4 l}{2}. \quad (g)$$

Introduciendo estos valores en las ecuaciones (e) y hallando de estas  $P_1$ , obtendremos,

$$\left. \begin{aligned}
 P_1 &= 4B_1 e\varphi; & P_2 &= 4B_2 (e - a)\varphi; \\
 P_3 &= 4B_3 (a + b - e)\varphi; & P_4 &= 4B_4 (a + b + c - e)\varphi.
 \end{aligned} \right\} (h)$$

De la ecuación de la estática resulta,

$$P_1 + P_2 = P_3 + P_4 \quad (i)$$

o sea

$$B_1 e\varphi + B_2 (e - a)\varphi = B_3 (a + b - e)\varphi + B_4 (a + b + c - e)\varphi \quad (j)$$

y por lo tanto

$$e = \frac{B_2 a + B_3 (a + b) + B_4 (a + b + c)}{B_1 + B_2 + B_3 + B_4}. \quad (k)$$

Planteamos la suma de los momentos respecto al punto  $O$

$$M_{t_1} + M_{t_2} + M_{t_3} + M_{t_4} + P_1 e + P_2(e - a) + P_3(a + b - e) + P_4(a + b + c - e) = M_0. \quad (l)$$

Teniendo en cuenta (d) y (k), escribimos la fórmula (l) en la forma siguiente,

$$\varphi(C_1 + C_2 + C_3 + C_4) + 4\varphi B_1 e^2 + 4\varphi B_2(e - a)^2 + 4\varphi B_3(a + b - e)^2 + 4\varphi B_4(a + b + c - e)^2 = M_0 \quad (m)$$

de donde se obtiene,

$$\varphi = \frac{M_0}{C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + 4[B_1 e^2 + B_2(e - a)^2 + B_3(a + b - e)^2 + B_4(a + b + c - e)^2]} \quad (n)$$

Conociendo los valores de  $e$  y  $\varphi$ , de la expresión (b) hallamos  $M_{t_i}$ , de la expresión (h),  $P_i$  y de las expresiones (g),  $M_i$ .

Los momentos flectores máximos para cada barra resultan en las secciones extremas y son,

$$\max M_i = P_i \frac{l}{2}.$$

La resistencia de cada barra se establece mediante el cálculo por torsión y flexión combinadas.

*Caso particular.* Todas las barras son de sección circular y

$$d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = d; \quad a = b = c = d; \quad l = 10 d;$$

$$E_1 = E_2 = E_3 = E_4 = E; \quad G_1 = G_2 = G_3 = G_4 = G = \frac{2}{5} E.$$

En este caso,

$$I = \frac{1}{2} I_p; \quad C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C = \frac{GI_p}{l};$$

$$B_1 = B_2 = B_3 = B_4 = B = \frac{3EI}{l^3} = \frac{15GI_p}{4l^3}.$$

Por las fórmulas (k), (n), (c) y (h) obtendremos respectivamente,

$$e = \frac{3}{2} d;$$

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{M_0}{4 \frac{GI_p}{l} + 15 \frac{GI_p}{l^3} d^2 \left( \frac{9}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{9}{4} \right)} \\ &= \frac{M_0 l}{GI_p} \cdot \frac{1}{4 + 75 \frac{d^2}{l^2}} = \frac{4}{19} \frac{M_0 l}{GI_p}, \end{aligned}$$

$$M_{t_1} = M_{t_2} = M_{t_3} = M_{t_4} = M_t = \frac{4}{19} M_0;$$

$$P_1 = P_4 = \frac{4}{GI_p} \cdot \frac{M_0 l}{4} \cdot \frac{15}{4} \cdot \frac{GI_p}{l^3} \cdot \frac{3}{2} d = \frac{90}{19} M_0 \frac{d}{l^2} = \frac{9}{19} \frac{M_0}{l},$$

$$P_2 = P_3 = \frac{3}{19} \frac{M_0}{l}.$$

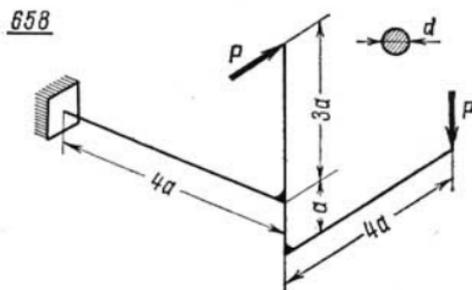
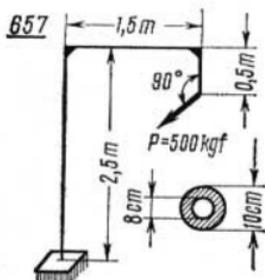
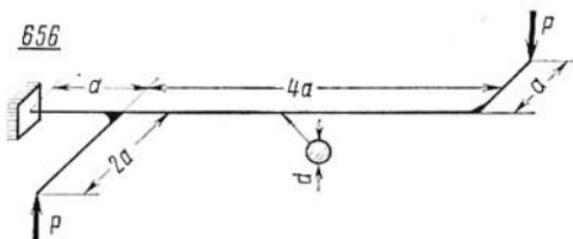
Los momentos flectores máximos en las barras son,

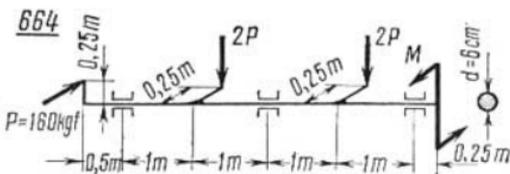
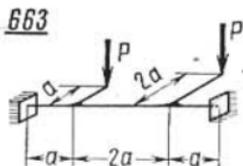
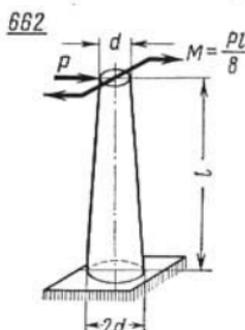
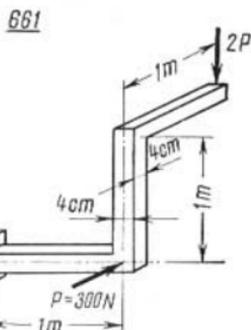
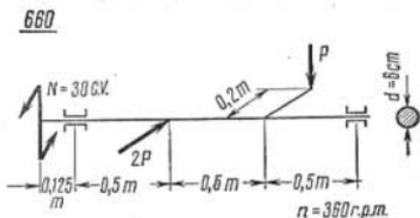
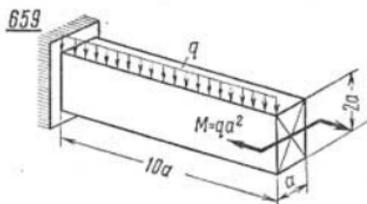
$$\max M_1 = \max M_4 = \frac{9}{38} M_0; \quad \max M_2 = \max M_3 = \frac{3}{38} M_0.$$

Las condiciones de resistencia deberán plantearse para las barras 1ª y 4ª. Por la tercera hipótesis de resistencia obtendremos,

$$\frac{M_0}{38W} \sqrt{81 + 64} \approx 0,317 \frac{M_0}{W} \leq [\sigma].$$

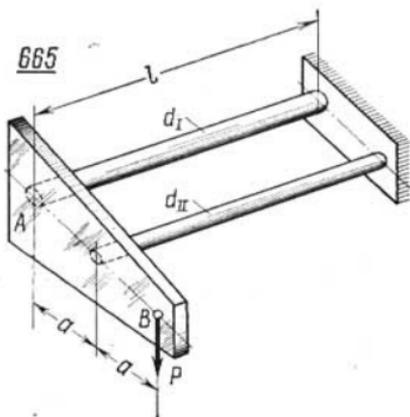
**Problemas 656-664.** Construir los diagramas de los momentos torsor ( $M_{tor}$ ) y flector  $M$  y determinar la magnitud de la tensión equivalente correspondiente a la tercera hipótesis de resistencia.

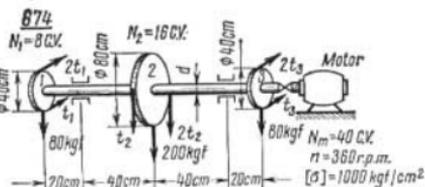
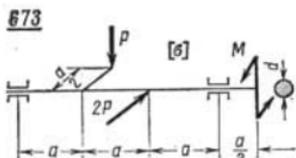
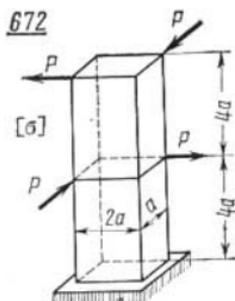
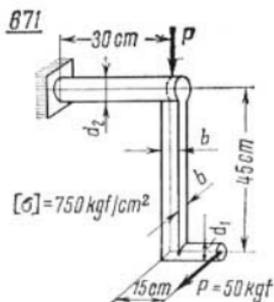
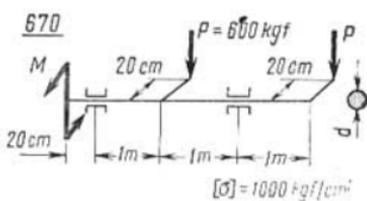
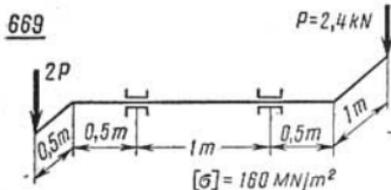
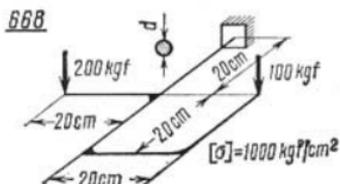
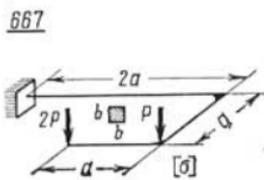
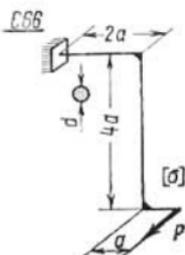


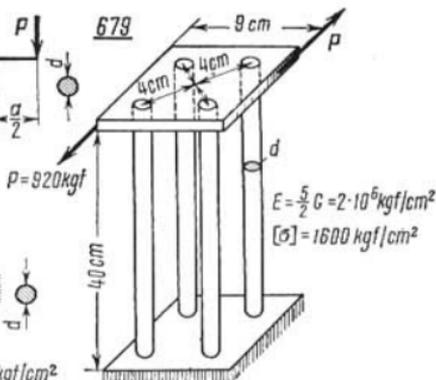
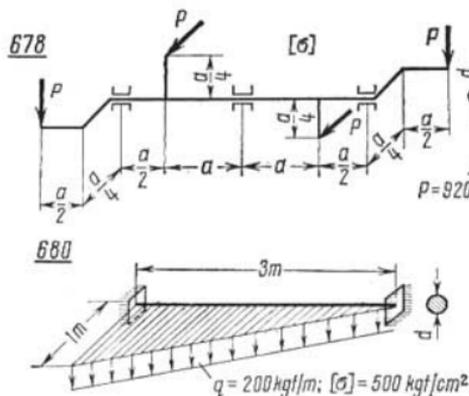
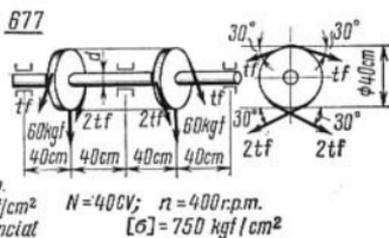
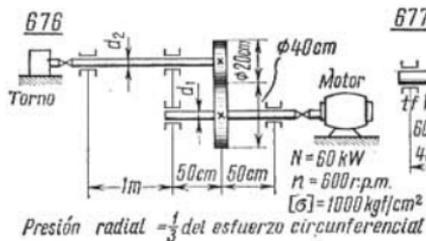
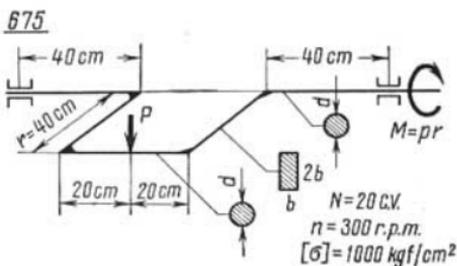


**Problema 665.** Dado:  $P = 60 \text{ kgf}$ ;  $d_1 = 2 \text{ cm}$ ;  $d_2 = 1 \text{ cm}$ ;  $a = 8 \text{ cm}$ ;  $l = 20 \text{ cm}$  y  $E = \frac{5}{2} G = 2 \cdot 10^6 \text{ kgf/cm}^2$ . Considerando que el diafragma  $AB$  es absolutamente rígido y permanece en el plano vertical, determinar las tensiones normales principales máximas y mínimas en las barras ( $\sigma_{\max}^{\text{I,II}}$ ) y el desplazamiento vertical ( $\delta_p$ ) del punto de aplicación de la fuerza  $P$ .

**Problemas 666-680.** Determinar las dimensiones de las secciones transversales de las barras partiendo de la tercera hipótesis de resistencia.

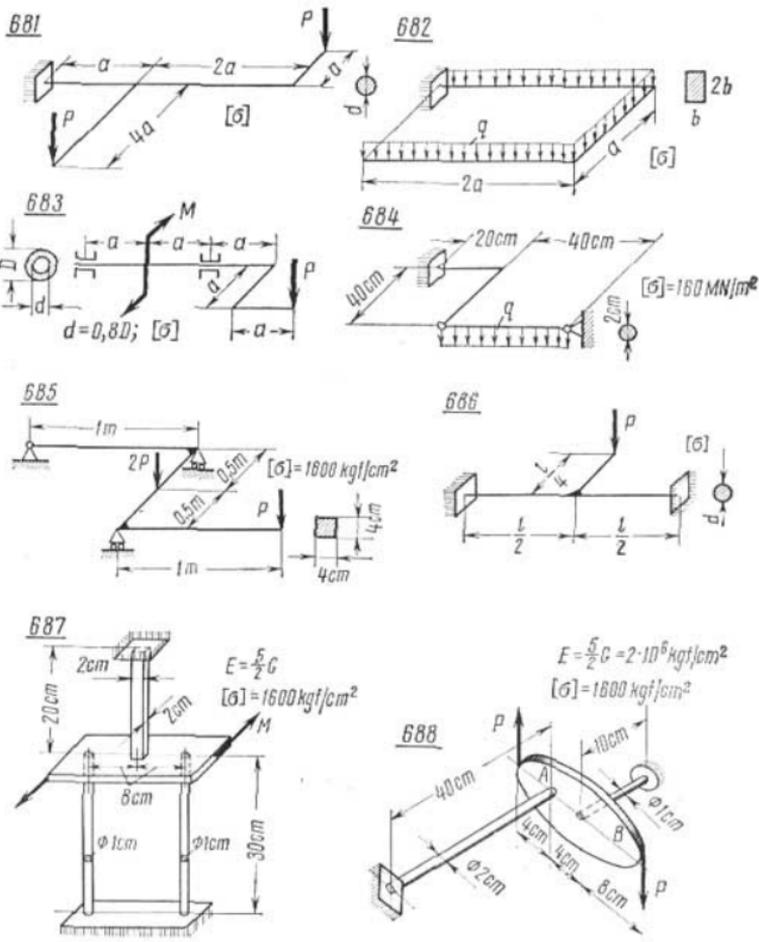






**Problemas 681-688.** Construir los diagramas de los momentos torsor y flector y calcular la carga no peligrosa partiendo del cálculo por la tercera hipótesis de resistencia.

En el problema 688 el diafragma *AB* se considera absolutamente rígido y permanece en el plano vertical.



### § 5. Caso general de resistencia compuesta

En el caso general de acción estérea de las fuerzas sobre una barra prismática, los esfuerzos interiores en la sección transversal se reducen a seis componentes: esfuerzo axial  $N_x$ , momento torsor  $M_t$ , fuerzas cortantes  $Q_y$  y  $Q_z$  y momentos flectores  $M_y$  y  $M_z$  (fig. 136).

Si  $x$  es el eje geométrico de la barra y los ejes  $y$  y  $z$  son centrales principales de inercia de la sección transversal, cuyo centro de gravedad coincide con el centro de flexión, entonces  $Q_y$  y  $M_z$  determinan la flexión transversal en el plano  $xy$ , y  $Q_z$  y  $M_y$ , la flexión transversal en el plano  $xz$ . Así, pues, la barra sufre la deformación simultánea

nea de la tracción o compresión, de la torsión y de dos flexiones transversales planas.

En un punto arbitrario ( $y, z$ ) de la sección transversal de la barra la tensión normal se calcula por la fórmula (142) y la tensión tangencial resultante, sumando geoméricamente las tensiones tangenciales debidas a la torsión y a la flexión.

La ecuación de la línea neutra se da por la expresión (143).

No siempre es posible de golpe establecer la posición del punto peligroso, resultando necesario comparar el grado de peligro de varios puntos del contorno de la sección. Será peligroso aquel punto del contorno de la sección en el cual la tensión equivalente obtenida por la hipótesis escogida resulta máxima.

Comparando esta tensión efectiva con la tensión admisible se puede o esta-

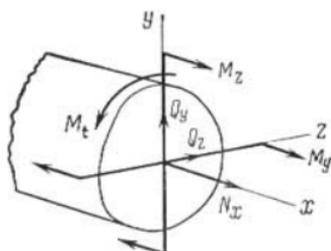


Fig. 136

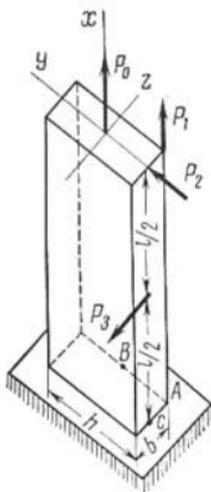


Fig. 137

blecer las dimensiones de la sección transversal de la barra o comprobar la resistencia de la barra de dimensiones de la sección dadas.

**Ejemplo 74.** Dado:  $P_0 = 40$  tf,  $P_1 = 8$  tf,  $P_2 = 4$  tf,  $P_3 = 2$  tf,  $l = 1$  m,  $h = 24$  cm,  $b = 8$  cm y  $[\sigma] = 1\,400$  kgf/cm<sup>2</sup> (fig. 137).

Comprobar la resistencia de la barra.

**Resolución.** En la sección peligrosa inferior de la barra surgen los esfuerzos siguientes:

$$N_x = P_0 + P_1 = 40 + 8 = 48 \text{ tf};$$

$$M_z = P_1 \frac{h}{2} + P_2 l = 8 \cdot 12 + 4 \cdot 100 = 496 \text{ tf} \cdot \text{cm};$$

$$M_y = P_1 \frac{b}{2} + P_3 \frac{l}{2} = 8 \cdot 4 + 2 \cdot 50 = 132 \text{ tf} \cdot \text{cm},$$

$$M_t = P_3 \frac{h}{2} = 2 \cdot 12 = 24 \text{ tf} \cdot \text{cm};$$

$$Q_y = P_2 = 4 \text{ tf}; \quad Q_z = P_3 = 2 \text{ tf}.$$

En la figura 138 están representados los diagramas y las magnitudes de las tensiones normales y tangenciales correspondientes a los esfuerzos interiores obtenidos.

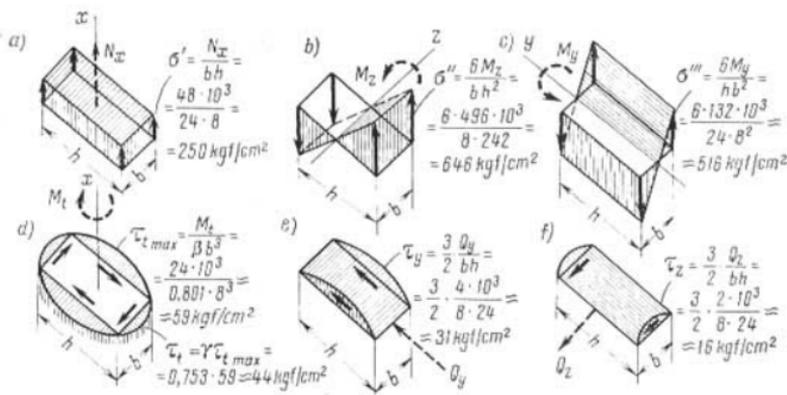


Fig. 138

En el vértice  $A$  de la sección inferior de la barra (fig. 137) surgen las tensiones normales que alcanzan el valor máximo.

$$\sigma_{eA} = \sigma_{\max} = \sigma' + \sigma'' + \sigma''' = 250 + 646 + 516 = 1412 \text{ kgf/cm}^2.$$

En el punto  $B$ , en el centro del lado mayor derecho de la sección, aparecen tensiones normales y tangenciales de valor,

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma' + \sigma''' = 250 + 516 = 766 \text{ kgf/cm}^2, \\ \tau &= \tau_{t \max} - \tau_y = 59 - 31 = 28 \text{ kgf/cm}^2. \end{aligned}$$

La tensión equivalente según la tercera hipótesis de resistencia es,

$$\sigma_{eB} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{766^2 + 4 \cdot 28^2} \approx 768 \text{ kgf/cm}^2.$$

En el punto  $C$ , en el centro del lado menor inferior de la sección, surgen las tensiones normales y tangenciales siguientes,

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma' + \sigma'' = 250 + 646 = 896 \text{ kgf/cm}^2, \\ \tau &= \tau_{\text{tor}} + \tau_z = 44 + 16 = 60 \text{ kgf/cm}^2. \end{aligned}$$

La tensión equivalente por la tercera hipótesis de resistencia es,

$$\sigma_{eC} = \sqrt{896^2 + 4 \cdot 60^2} \approx 904 \text{ kgf/cm}^2.$$

Comparando  $\sigma_e$  en los puntos peligrosos  $A$ ,  $B$  y  $C$  se deduce que el más peligroso de todos es el punto  $A$ .

Puesto que  $\sigma_{eA} = 1412 \text{ kgf/cm}^2$  es superior a  $[\sigma]$  en menos de 1% se puede considerar que la barra es suficientemente resistente.

**Ejemplo 75.** Dado:  $P_1 = 200$  kgf,  $P_2 = 100$  kgf,  $P_3 = 240$  kgf,  $l_1 = 30$  cm,  $l_2 = 40$  cm,  $l_3 = 60$  cm,  $l_4 = 80$  cm y  $[\sigma] = 1\,000$  kgf/cm<sup>2</sup> (fig. 139).

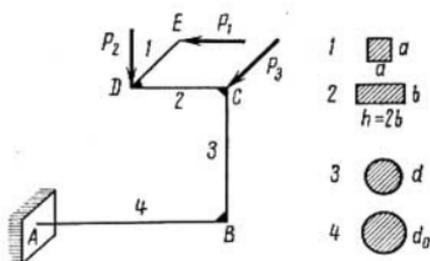


Fig. 139

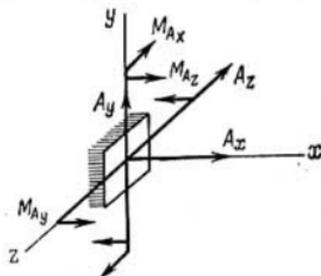


Fig. 140

Determinar  $a$ ,  $h$ ,  $b$ ,  $d$  y  $d_0$ .

**Resolución 1.** Determinación de las componentes reactivas en el empotramiento. Para ello recurrimos a las seis ecuaciones de la estática (fig. 140),

$$\Sigma X = A_x - P_1 = 0; \quad A_x = P_1 = 200 \text{ kgf};$$

$$\Sigma Y = A_y - P_2 = 0; \quad A_y = P_2 = 100 \text{ kgf};$$

$$\Sigma Z = -A_z + P_3 = 0; \quad A_z = P_3 = 240 \text{ kgf};$$

$$\Sigma M_x = M_{Ax} - P_3 l_3 = 0; \quad M_{Ax} = P_3 l_3 = 240 \cdot 0,6 = 144 \text{ kgf} \cdot \text{m};$$

$$\Sigma M_y = M_{Ay} + P_1 l_1 - P_3 l_4 = 0;$$

$$M_{Ay} = P_3 l_4 - P_1 l_1 = 240 \cdot 0,8 - 200 \cdot 0,3 = 132 \text{ kgf} \cdot \text{m};$$

$$\Sigma M_z = M_{Az} - P_1 l_3 + P_2 (l_4 - l_2) = 0;$$

$$M_{Az} = P_1 l_3 - P_2 (l_4 - l_2) = 200 \cdot 0,6 - 100 (0,8 - 0,4) = 80 \text{ kgf} \cdot \text{m}.$$

2. Determinación por tramos de las fuerzas axiales  $N$ , momentos torsores  $M_t$  y momentos flectores  $M_x$ ,  $M_y$  y  $M_z$ .

**Tramo 1.** Consideramos  $z = 0$  en el punto  $E$  y  $z = l_1$  en el punto  $D$ . La flexión en el plano  $xz$  es,

$$M_y = P_1 z; \quad M_{y_{z=0}} = 0; \quad M_{y_{z=l_1}} = P_1 l_1 = 200 \cdot 0,3 = 60 \text{ kgf} \cdot \text{m}.$$

**Tramo 2.** Consideramos  $x = 0$  en el punto  $D$  y  $x = l_2$  en el punto  $C$ . La flexión y tracción en los planos  $xz$  y  $xy$  serán

$$N = P_1 = 200 \text{ kgf}; \quad M_y = P_1 l_1 = 200 \cdot 0,3 = 60 \text{ kgf} \cdot \text{m};$$

$$M_z = P_2 x;$$

$$M_{z_{x=0}} = 0; \quad M_{z_{x=l_2}} = P_2 l_2 = 100 \cdot 0,4 = 40 \text{ kgf} \cdot \text{m}.$$

*Tramo 3.* Consideramos  $y = 0$  en el punto  $C$  e  $y = l_3$  en el punto  $B$ . La compresión, torsión y flexión en los planos  $yz$  y  $xy$  serán,

$$N = -P_2 = -100 \text{ kgf}; \quad M_t = P_1 l_1 = 200 \cdot 0,3 = 60 \text{ kgf} \cdot \text{m};$$

$$M_x = P_3 y;$$

$$M_{x_{y=0}} = 0; \quad M_{x_{y=l_2}} = P_3 l_3 = 240 \cdot 0,6 = 144 \text{ kgf} \cdot \text{m};$$

$$M_z = P_2 l_2 + P_1 y;$$

$$M_{z_{y=0}} = P_2 l_2 = 100 \cdot 0,4 = 40 \text{ kgf} \cdot \text{m};$$

$$M_{z_{y=l_2}} = P_2 l_2 + P_1 l_3 = 100 \cdot 0,4 + 200 \cdot 0,6 = 160 \text{ kgf} \cdot \text{m}.$$

*Tramo 4.* Consideramos  $x = 0$  en el punto  $A$  y  $x = l_4$  en el punto  $B$ . La compresión, torsión y flexión en los planos  $xz$  y  $xy$  serán,

$$N = -A_x = -200 \text{ kgf}; \quad M_t = M_{A_x} = 144 \text{ kgf} \cdot \text{m};$$

$$M_y = M_{A_y} - A_z x;$$

$$M_{y_{x=0}} = M_{A_y} = 132 \text{ kgf} \cdot \text{m}; \quad M_{y_{x=l_1}} = M_{A_y} - A_z l_4 =$$

$$= 132 - 240 \cdot 0,8 = -60 \text{ kgf} \cdot \text{m};$$

$$M_z = M_{A_z} + A_y x; \quad M_{z_{x=0}} = M_{A_z} = 80 \text{ kgf} \cdot \text{m};$$

$$M_{z_{x=l_4}} = M_{A_z} + A_y l_4 = 80 + 100 \cdot 0,8 = 160 \text{ kgf} \cdot \text{m}.$$

3. Construcción de los diagramas de  $N$ ,  $M_t$ ,  $M_x$ ,  $M_y$  y  $M_z$  por tramos.

De acuerdo con los valores de  $N$ ,  $M_t$ ,  $M_x$ ,  $M_y$  y  $M_z$  obtenidos para cada tramo del sistema, en la figura 141,  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  y  $e$  están dados los diagramas de estas magnitudes.

4. Cálculo de las secciones transversales por tramos.

*Tramo 1.* La sección peligrosa se encuentra en las proximidades del punto  $D$  (fig. 141,  $d$  y 139)

$$M_y = 60 \text{ kgf} \cdot \text{m}.$$

Calculamos la sección por flexión transversal plana,

$$W = \frac{a^3}{6} \geq \frac{M_y}{[\sigma]}; \quad a \geq \sqrt[3]{6 \frac{M_y}{[\sigma]}} = \sqrt[3]{6 \frac{6 \cdot 10^3}{10^3}} \approx 3,3 \text{ cm}.$$

*Tramo 2.* En la sección peligrosa, en las proximidades del punto  $C$  (fig. 141,  $g$  y 139),

$$N = 200 \text{ kgf}; \quad M_y = 60 \text{ kgf} \cdot \text{m}; \quad M_z = 40 \text{ kgf} \cdot \text{m}.$$

Calculamos la sección por flexión desviada,

$$W_y = \frac{bh^2}{6} = \frac{h^3}{12}; \quad W_z = \frac{hb^2}{6} = \frac{h^3}{24}; \quad c = \frac{W_y}{W_z} = 2; \quad W_y \geq \frac{M_y + cM_z}{[\sigma]}$$

$$\frac{h^3}{12} \geq \frac{6 \cdot 10^3 + 2 \cdot 4 \cdot 10^3}{10^3} = 14; \quad h \geq \sqrt[3]{12 \cdot 14} \approx 5,52 \text{ cm.}$$

Admitimos  $h = 5,6 \text{ cm}$ ;  $b = \frac{h}{2} = 2,8 \text{ cm}$  y comprobamos la

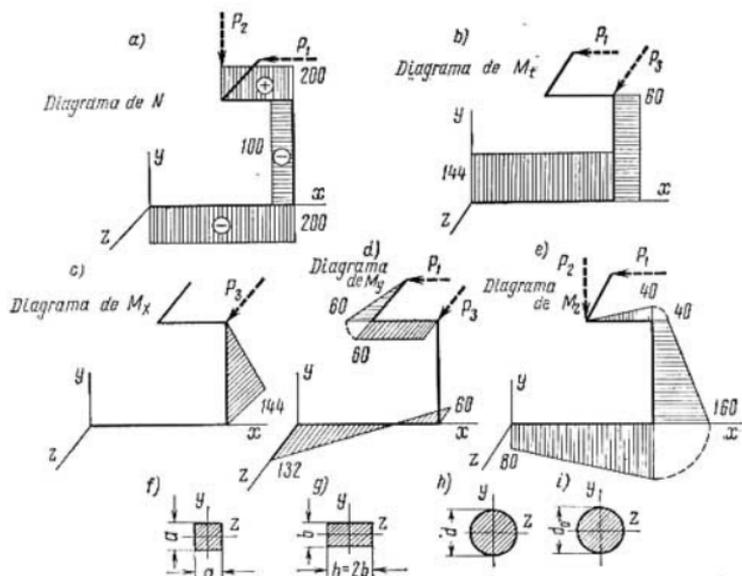


Fig. 141

sección considerando la fuerza axial,

$$F = bh = 2,8 \cdot 5,6 \approx 15,7 \text{ cm}^2,$$

$$W_y = \frac{h^3}{12} \approx 14,6 \text{ cm}^3; \quad W_z = \frac{h^3}{24} \approx 7,3 \text{ cm}^3;$$

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{F} + \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} = \frac{200}{15,7} + \frac{6 \cdot 10^3}{14,6} + \frac{4 \cdot 10^3}{7,3} \approx 972 \text{ kgf/cm}^2.$$

$$\text{La subtensión es } \frac{[\sigma] - \sigma_{\max}}{[\sigma]} \cdot 100 = \frac{28 \cdot 100}{10^3} = 2,8\%.$$

Tramo 3. En la sección peligrosa, en la proximidad del punto B (fig. 141, h y 139)  $N = 100 \text{ kgf}$ ;  $M_t = 60 \text{ kgf} \cdot \text{m}$ ;  $M_x = 144 \text{ kgf} \cdot \text{m}$ ;  $M_z = 160 \text{ kgf} \cdot \text{m}$ .

Calculamos el diámetro de la sección por torsión y flexión combinadas. El momento flector equivalente según la tercera hipótesis de resistencia es,

$$M_{e_{III}} = \sqrt{M_t^2 + M_x^2 + M_z^2} = \sqrt{60^2 + 144^2 + 160^2} \approx 223 \text{ kgf}\cdot\text{m};$$

$$W \approx 0,1d^3 \geq \frac{M_{e_{III}}}{[\sigma]} = \frac{223 \cdot 10^2}{10^3}; \quad d \geq \sqrt[3]{223} \approx 6,1 \text{ cm}.$$

Comprobamos la sección teniendo en cuenta el esfuerzo axial

$$W = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{\pi \cdot 6,1^3}{32} \approx 22,3 \text{ cm}^3; \quad W_p = 2W = 44,6 \text{ cm}^3;$$

$$F = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 6,1^2}{4} \approx 29,2 \text{ cm}^2.$$

El momento flector es,

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_z^2} = \sqrt{144^2 + 160^2} \approx 215 \text{ kgf}\cdot\text{m}.$$

La tensión normal,

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M}{W} = \frac{100}{29,2} + \frac{215 \cdot 10^2}{22,3} \approx 967 \text{ kgf/cm}^2,$$

la tangencial,

$$\tau = \frac{M_t}{W_p} = \frac{60 \cdot 10^2}{44,6} \approx 135 \text{ kgf/cm}^2$$

y la tensión equivalente según la tercera hipótesis de resistencia

$$\sigma_{e_{III}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{967^2 + 4 \cdot 135^2} \approx 1004 \text{ kgf/cm}^2.$$

La sobretensión constituye el 0,4%, lo que es admisible.

*Tramo 4.* La sección peligrosa se encuentra en la proximidad del punto *B* (fig. 141, *i* y 139), donde

$N = 200 \text{ kgf}$ ;  $M_t = 144 \text{ kgf}\cdot\text{m}$ ;  $M_p = 60 \text{ kgf}\cdot\text{m}$  y  $M_z = 160 \text{ kgf}\cdot\text{m}$ .

Calculamos el diámetro de la sección por torsión y flexión combinadas.

El momento equivalente según la tercera hipótesis de resistencia es  $M_{e_{III}} = \sqrt{M_t^2 + M_p^2 + M_z^2} = \sqrt{144^2 + 60^2 + 160^2} \approx 223 \text{ kgf}\cdot\text{m}$ .

Basándonos en el cálculo del tramo 3, admitimos  $d_0 = 6,1 \text{ cm}$  y comprobamos después la sección tomando en cuenta también el esfuerzo axial,

$$W = 22,3 \text{ cm}^3; \quad W_p = 44,6 \text{ cm}^3; \quad F = 29,2 \text{ cm}^2.$$

El momento flector es

$$M = \sqrt{M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{60^2 + 160^2} \approx 171 \text{ kgf}\cdot\text{m}$$

la tensión normal,

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M}{W} = \frac{200}{29,2} + \frac{171 \cdot 10^2}{22,3} \approx 774 \text{ kgf/cm}^2,$$

la tangencial,

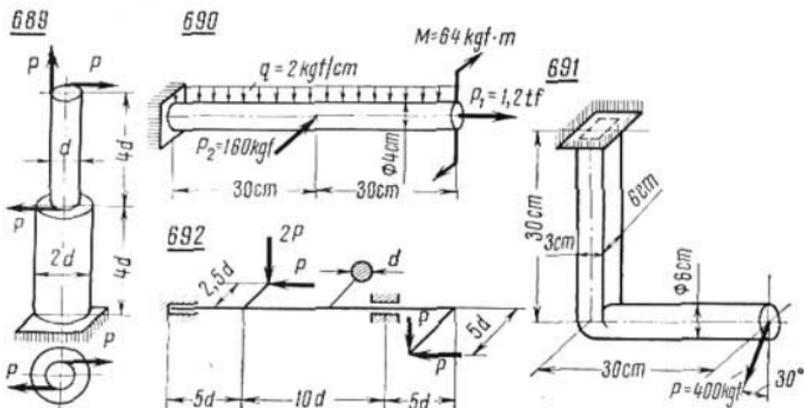
$$\tau = \frac{M_t}{W_p} = \frac{144 \cdot 10^2}{44,6} \approx 323 \text{ kgf/cm}^2,$$

y la tensión equivalente por la tercera hipótesis de resistencia,

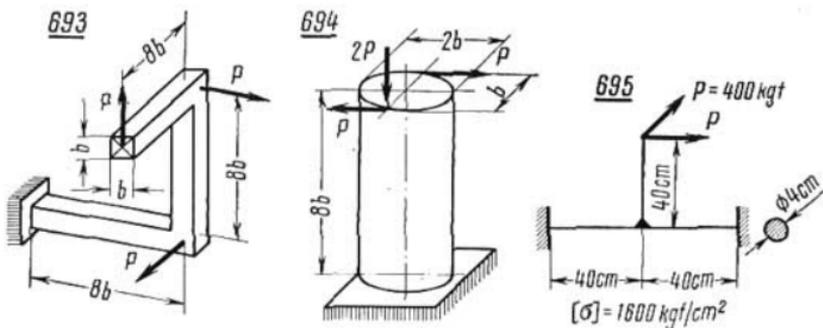
$$\sigma_{eIII} = \sqrt{774^2 + 4 \cdot 323^2} \approx 1008 \text{ kgf/cm}^2.$$

Puesto que la sobretensión es inferior al 1% se puede admitir  $d_0 = 6,1 \text{ cm}$ .

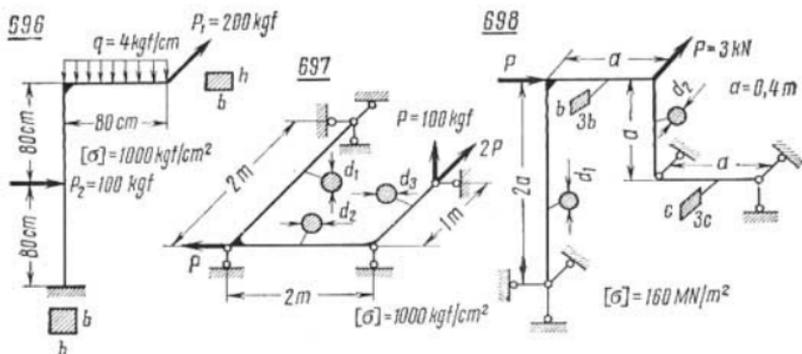
**Problemas 689-692.** Determinar las tensiones equivalentes según la tercera hipótesis de resistencia.



**Problemas 693-695.** Comprobar la resistencia de las barras por la tercera hipótesis de resistencia.



**Problemas 696-698.** Determinar las dimensiones necesarias de las secciones transversales de las barras por la tercera hipótesis de resistencia.



### § 6. Resortes helicoidales cilíndricos de tracción o compresión

Se denomina *resorte helicoidal cilíndrico* a la barra prismática enrollada sobre un cilindro de radio constante (fig. 142).

Veamos el resorte de una barra de sección transversal circular de diámetro  $d$ . El diámetro medio de la espira lo anotamos por  $D$  y el número de espiras, por  $n$ . El paso del resorte se determina por el ángulo  $\alpha$  de inclinación del plano de la espira ( $xz$ ) respecto al plano horizontal.

El eje  $x$  es tangente a la línea media de la espira y el eje  $y$ , perpendicular al plano  $xz$ .

Si los extremos de la barra se llevan a los centros de las espiras y se someten a la acción de la fuerza de tracción  $P$  que actúa según el eje del resorte, entonces en cada sección transversal de la barra las fuerzas interiores se reducen a un esfuerzo constante de tracción  $N_x = P \sin \alpha$ , a una fuerza transversal cortante  $Q_y = P \cos \alpha$ , un momento torsor  $M_t = PR \cos \alpha$  y a un momento flector  $M_y = PR \sin \alpha$  (fig. 143).

El punto peligroso de la sección será el punto  $A$  de la superficie interior de la espira. En este punto,

$$\sigma = \frac{N_x}{F} + \frac{M_y}{W} = \frac{16PD}{\pi d^3} \left(1 + \frac{d}{4D}\right) \sin \alpha \quad (155)$$

y

$$\tau = \frac{Q_y}{F} + \frac{M_t}{W_p} = \frac{8PD}{\pi d^3} \left(1 + \frac{d}{2D}\right) \cos \alpha. \quad (156)$$

Según la tercera hipótesis de resistencia, la condición de resistencia será,

$$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \frac{16PD}{\pi d^3} \times \sqrt{\left(1 + \frac{d}{4D}\right)^2 \sin^2 \alpha + \left(1 + \frac{d}{2D}\right)^2 \cos^2 \alpha} \leq [\sigma]. \quad (157)$$

Si el paso de la espira es pequeño ( $\alpha < 14^\circ$ ) y  $\frac{D}{d} > 10$ , entonces

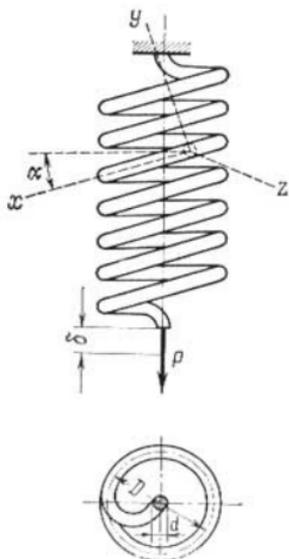


Fig. 142

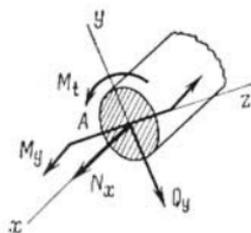


Fig. 143

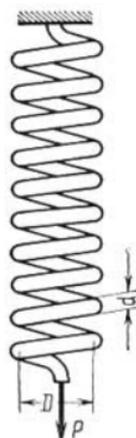


Fig. 144

se realiza solamente el cálculo por torsión por la fórmula,

$$\frac{8PD}{\pi d^3} \leq [\tau]. \quad (158)$$

En el caso de grande curvatura de la espira ( $\frac{D}{d} < 10$ ) la influencia de la curvatura y de las fuerzas se consideran mediante el coeficiente

$$k = \frac{\frac{D}{d} - 0,25}{\frac{D}{d} - 1} + \frac{0,615}{\frac{D}{d}}, \quad (159)$$

que se incluye en la condición de resistencia

$$k \frac{8PD}{\pi d^3} \leq [\tau]. \quad (160)$$

La expresión general para la determinación del desplazamiento axial del extremo libre del resorte  $\delta$  es la siguiente:

$$\delta = \frac{8PD^3n}{d^4 \cos \alpha} \left[ 2 \left( 1 + \frac{d^2}{4D^2} \right) \frac{\sin^2 \alpha}{E} + \left( 1 + \frac{d^2}{2D^2} \right) \frac{\cos^2 \alpha}{G} \right]. \quad (161)$$

siendo  $E$  y  $G$  los módulos de elasticidad longitudinal y tangencial del material de la barra del resorte.

En el caso de un resorte de un paso pequeño, el desplazamiento  $\delta$  se puede obtener con suficiente exactitud, considerando solamente la deformación correspondiente a la torsión por la fórmula,

$$\delta = \frac{8PD^3n}{Gd^4}. \quad (162)$$

**Ejemplo 76.** Dado:  $D = 80$  mm;  $d = 20$  mm;  $\alpha = 15^\circ$ ;  $n = 10$  espiras;  $E = 2 \cdot 10^6$  kgf/cm<sup>2</sup>;  $G = 8 \cdot 10^5$  kgf/cm<sup>2</sup> y  $[\sigma] = 6\,000$  kgf/cm<sup>2</sup> (fig. 144).

Determinar  $P$  y  $\delta$ .

*Resolución.* Puesto que  $\alpha > 14^\circ$ , aplicamos la fórmula (157) de la que se obtiene el valor siguiente de la carga admisible,

$$P \leq \frac{\pi \cdot 2^3 \cdot 6\,000}{16 \cdot 8 \sqrt{\left(1 + \frac{2}{4 \cdot 8}\right)^2 0,067 + \left(1 + \frac{2}{2 \cdot 8}\right) 0,933}} \approx 1\,050 \text{ kgf.}$$

El desplazamiento axial  $\delta$  del extremo libre del resorte se obtiene por la fórmula (161). Introduciendo en esta fórmula los valores numéricos dados, hallaremos

$$\delta = \frac{8 \cdot 1\,050 \cdot 8^3 \cdot 10}{2^4 \cdot 0,966} \left[ 2 \left( 1 + \frac{2^2}{4 \cdot 8^2} \right) \frac{0,067}{2 \cdot 10^6} + \left( 1 + \frac{2^2}{2 \cdot 8^2} \right) \frac{0,933}{8 \cdot 10^5} \right] \approx 3,54 \text{ cm.}$$

Por la fórmula aproximada (162) se obtiene,

$$\delta = \frac{8 \cdot 1\,050 \cdot 8^3 \cdot 10}{8 \cdot 10^5 \cdot 2^4} = 3,36 \text{ cm.}^{\dagger}$$

Este valor es aproximadamente un 5% inferior al valor real del desplazamiento.

**Ejemplo 77.** Dos resortes helicoidales cilíndricos de paso pequeño se colocan uno dentro del otro de manera concéntrica (fig. 145) y se someten a la fuerza axial de compresión  $P = 430$  kgf. Las dimensiones del resorte exterior 1 son:  $D_1 = 160$  mm,  $d_1 = 16$  mm y  $n_1 = 8$  espiras; las del resorte interior 2:  $D_2 = 80$  mm,  $d_2 = 12$  mm y  $n_2 = 12$  espiras. El módulo de deslizamiento del material de las barras de los resortes es  $G = 8 \cdot 10^5$  kgf/cm<sup>2</sup>.

Determinese el asiento de los resortes  $\delta$  y las tensiones tangenciales máximas  $\tau_{\max 1}$  y  $\tau_{\max 2}$ .

*Resolución.* Anotando por  $P_1$  y  $P_2$  las fuerzas que actúan sobre los resortes, obtendremos de la ecuación de equilibrio  $P_1 + P_2 + P$ .

La condición de compatibilidad de los desplazamientos consiste en que los asientos del primer resorte ( $\delta_1$ ) y del segundo ( $\delta_2$ ) son iguales, es decir,  $\delta_1 = \delta_2$ .

Teniendo en cuenta que los dos resortes son de pequeño paso, para la determinación del asiento, aplicamos, la fórmula (162) obteniendo para la condición de compatibilidad,

$$\frac{8P_1 D_1^3 n_1}{G d_1^4} = \frac{8P_2 D_2^3 n_2}{G d_2^4},$$

de donde se halla,

$$P_2 = P_1 \frac{D_1^3 n_1 d_2^4}{D_2^3 n_2 d_1^4} = P_1 \frac{16^3 \cdot 8 \cdot 1,2^4}{8^3 \cdot 12 \cdot 1,6^4} = \frac{27}{16} P_1.$$

Así, pues,

$$P_1 = \frac{16}{43} P = 160 \text{ kgf}, \quad P_2 = \frac{27}{43} P = 270 \text{ kgf}.$$

El asiento de los resortes es,

$$\delta = \frac{8P_1 D_1^3 n_1}{G d_1^4} = \frac{8P_2 D_2^3 n_2}{G d_2^4} = \frac{8 \cdot 160 \cdot 16^3 \cdot 8}{8 \cdot 10^5 \cdot 1,6^4} = 8 \text{ cm}.$$

Puesto que el resorte exterior es de paso pequeño y  $\frac{D_1}{d_1} = 10$ , por la fórmula (158) obtendremos,

$$\tau_{\max 1} = \frac{8 \cdot 160 \cdot 16}{\pi \cdot 1,6^3} \approx 1590 \text{ kgf/cm}^2.$$

En el caso del resorte interior que también es de paso pequeño pero,  $\frac{D_2}{d_2} = \frac{8}{1,2} \approx 6,67 < 10$  la tensión  $\tau_{\max 2}$  se obtiene por la fór-

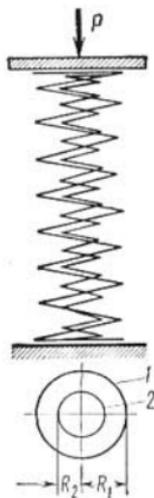


Fig. 145

mula (160). Como el coeficiente de rectificación es

$$k = \frac{6,67 - 0,25}{6,67 - 1} + \frac{0,615}{6,67} \approx 1,224,$$

obtendremos

$$\tau_{\max_2} = 1,224 \frac{8 \cdot 270 \cdot 8}{\pi \cdot 1,2^3} \approx 3900 \text{ kgf/cm}^2.$$

**Problema 699.** Un resorte se comprime hasta hacer desaparecer el espacio entre las espiras. Determinese la magnitud de la fuerza  $P$  necesaria para ello, así como también la tensión  $\tau_{\max}$  que surge, si  $D = 50$  mm, el paso de la espira  $t = 15$  mm,  $n = 10$ , el lado de la sección cuadrada de la barra del resorte es  $a = 5$  mm y  $G = 8 \cdot 10^4$  MN/m<sup>2</sup>.

**Problema 700.** Dos resortes se comprimen con fuerzas iguales  $P$ .

Determinar las razones  $\frac{\tau_{\max_1}}{\tau_{\max_2}}$  y  $\frac{\delta_1}{\delta_2}$  si  $D_1 = D_2$ ,  $n_1 = n_2$ ;  $\frac{\pi d_1^2}{4} = a^2$

y  $G_1 = G_2$ .

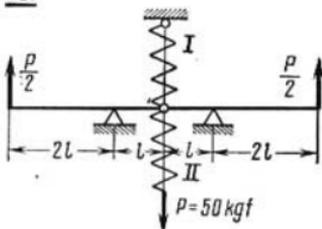
**Problema 701.** Dado:  $D_1 = D_2 = 200$  mm,  $d_1 = 2d_2 = 20$  mm,  $n_1 = 8$ ,  $n_2 = 5$ ,  $G_1 = G_2 = 8 \cdot 10^6$  kgf/cm<sup>2</sup>,  $l \gg \delta_1$ .

Determinese  $\max \tau_1$ ,  $\max \tau_2$  y  $\delta = \delta_1 + \delta_2$ .

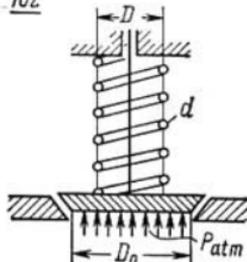
**Problema 702.** La válvula de seguridad se debe abrir bajo la presión del vapor  $p = 5$  atm. Determinar  $\tau_{\max}$ ,  $n$  y  $\delta_0$  en el resorte, si  $D_0 = 80$  mm;  $D = 60$  mm,  $d = 10$  mm,  $t = 18$  mm,  $G = 8 \cdot 10^5$  kgf/cm<sup>2</sup>, la compresión del resorte hasta juntar las espiras es 40 mm.

Se supone que durante la máxima elevación de la válvula (al crecer la presión en el proceso de su apertura) deberá quedar una reserva de 20 mm.

701

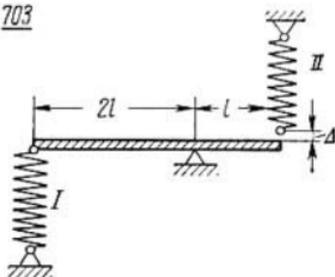


702

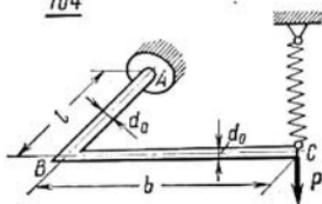


**Problema 703.** Determinar las tensiones de montaje en los resortes si  $\Delta = 5$  mm,  $D_1 = 60$  mm,  $d_1 = 10$  mm,  $n_1 = 10$ ,  $D_2 = 50$  mm,  $d_2 = 8$  mm,  $n_2 = 8$  y  $G_1 = G_2 = 8 \cdot 10^6$  kgf/cm<sup>2</sup>.

703



704



**Problema 704.** Determinar la fuerza admisible  $P$  si para la barra  $ABC$   $l = 500$  mm,  $b = 750$  mm,  $d_0 = 30$  mm,  $[\sigma] = 1\,600$  kgf/cm<sup>2</sup> y para el resorte,  $D = 50$  mm,  $d = 10$  mm,  $n = 10$ ,  $G = 8 \cdot 10^5$  kgf/cm<sup>2</sup>,  $E = 2 \cdot 10^6$  kgf/cm<sup>2</sup> y  $[\tau] = 4\,000$  kgf/cm<sup>2</sup>.

Realícese el cálculo partiendo de la tercera hipótesis de resistencia.

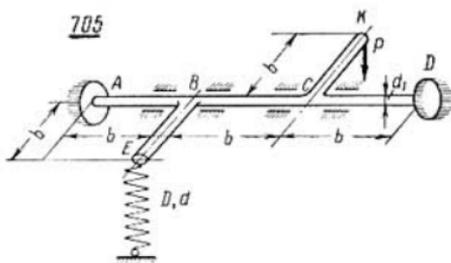
**Problema 705.** Dado:  $D = 50$  mm,  $d = 10$  mm,  $n = 2$ ,  $G = 8 \cdot 10^5$  kgf/cm<sup>2</sup>,  $d_1 = 50$  mm,  $b = 500$  mm y  $P = 100$  kgf. La barra  $BE$  es rígida.

Determinar en cuántos por ciento reduce el resorte la tensión en el árbol  $AD$ .

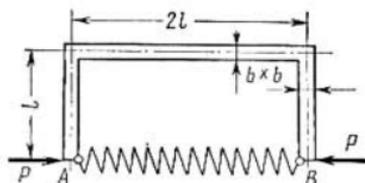
**Problema 706.** Dado:  $P = 1,6$  kN,  $D = 60$  mm;  $d = 12$  mm,  $n = 15$ ,  $G = 8 \cdot 10^4$  MN/m<sup>2</sup>,  $l = 500$  mm,  $b = 50$  mm y  $E = 2 \cdot 10^5$  MN/m<sup>2</sup>.

Determinar la fuerza  $P$  de compresión previa del resorte para que, una vez instalado en el pórtico, la tensión que en éste surge disminuya 2 veces.

705

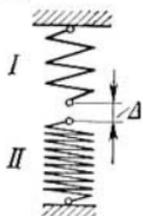


706



**Problema 707.** Dado:  $P = 105$  kgf,  $D = 100$  mm,  $t = 182$  mm,  $[\sigma] = 4\,800$  kgf/cm<sup>2</sup>,  $E = 2 \cdot 10^6$  kgf/cm<sup>2</sup>,  $G = 8 \cdot 10^5$  kgf/cm<sup>2</sup> y el asiento admisible del resorte  $[\delta] = 100$  mm.

Determinar  $d$  y  $n$  por la cuarta hipótesis de resistencia.



**Problema 708.** Dado:  $D = 100$  mm,  $a = 10$  mm,  $t = 182$  mm y  $[\sigma] = 4\,800$  kgf/cm<sup>2</sup>.

Determinar  $P$  por la tercera hipótesis de resistencia.

**Problema 709.** Determinar el esfuerzo axial  $P$  en los resortes una vez unidos éstos, si se sabe que  $\Delta = 60$  mm, el resorte *I* es de paso grande ( $D_1 = 100$  mm,  $d_1 = 10$  mm,  $n_1 = 4$ ,  $t_1 = 182$  mm), el resorte *II*, de paso pequeño ( $D_2 = 80$  mm,  $d_2 = 8$  mm,  $n_2 = 8$ ),  $E_1 = E_2 = 2 \cdot 10^6$  kgf/cm<sup>2</sup> y  $G_1 = G_2 = 8 \cdot 10^5$  kgf/cm<sup>2</sup>.

## X. FLEXION LONGITUDINAL (PANDEO)

### § 1. Fuerza crítica y tensión crítica

En el caso de compresión axial de una barra prismática, dentro de los límites de proporcionalidad, la magnitud de la fuerza crítica  $P_{\text{crit}}$  se determina por la fórmula de Euler,

$$P_{\text{crit}} = \frac{\pi^2 EI}{l_e^2}, \quad (163)$$

siendo  $E$  el módulo de elasticidad longitudinal del material de la barra;

$I$  el momento de inercia mínimo del área bruta  $F$  de la sección transversal de la barra;

$l_e = \mu l$  la longitud efectiva (libre) de la barra (longitud de una barra de apoyos articulados que por su estabilidad es equivalente a la barra de apoyos dados);

$l$  longitud real de la barra;

$\mu$  coeficiente que depende del tipo de apoyo y de sollicitación de la barra.

En la figura 146 están representados los casos más simples de compresión de barras y los valores correspondientes del coeficiente  $\mu$ .

La tensión crítica se determina por la fórmula

$$\sigma_{\text{crit}} = \frac{P_{\text{crit}}}{F} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}, \quad (164)$$

siendo  $\lambda = \frac{l_e}{i}$  la esbeltez de la barra (magnitud adimensional que caracteriza la propensión de la barra al pandeo);

$i = \sqrt{\frac{I}{F}}$  el radio de giro mínimo del área  $F$  de la sección transversal de la barra.

Puesto que la tensión crítica  $\sigma_{crit}$  no debe superar el límite de proporcionalidad del material de la barra  $\sigma_p$ , la magnitud de la esbeltez  $\lambda$  que permite aplicar las fórmulas (163) y (164) se establecerá de la desigualdad,

$$\lambda \geq \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}}. \quad (165)$$

Por ejemplo, en el caso del acero  $C_r. 3$ ,  $\lambda \geq 100$ , en el del acero  $C_r. 5$ ,  $\lambda \geq 85$ , en el del hierro fundido  $\lambda \geq 80$  y en el de madera,  $\lambda \geq 70$ , etc.

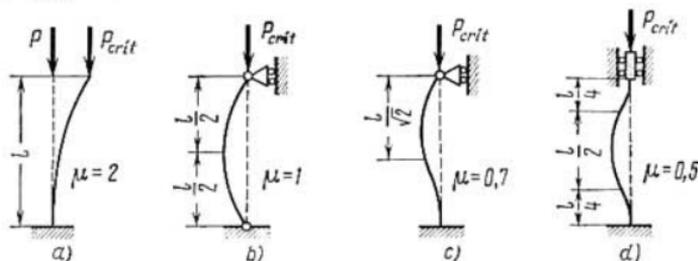


Fig. 146

Si el pandeo de la barra surge solamente fuera del límite de proporcionalidad del material, entonces la tensión crítica se obtendrá por la fórmula empírica de Yasinski,

$$\sigma_{crit} = a - b\lambda + c\lambda^2, \quad (166)$$

siendo  $a$ ,  $b$  y  $c$  coeficientes empíricos que dependen del material y se miden en las mismas unidades que la tensión.

Para el acero  $C_r. 3$ ,  $a = 3\ 100$  kgf/cm<sup>2</sup>,  $b = 11,4$  kgf/cm<sup>2</sup>,  $c = 0$ .

Para el acero  $C_r. 5$ ,  $a = 4\ 640$  kgf/cm<sup>2</sup>,  $b = 36,17$  kgf/cm<sup>2</sup>,  $c = 0$ .

Para el hierro fundido,  $a = 7\ 760$  kgf/cm<sup>2</sup>,  $b = 120$  kgf/cm<sup>2</sup>,  $c = 0,53$  kgf/cm<sup>2</sup>.

Para la madera,  $a = 293$  kgf/cm<sup>2</sup>,  $b = 1,94$  kgf/cm<sup>2</sup>,  $c = 0$ .

La fórmula (166) se puede emplear si  $\sigma_{crit}$  es inferior a  $\sigma_f$ , en el caso de un material plástico, e inferior a  $\sigma_r$ , si se trata de un material frágil.

**Ejemplo 78.** Dado que el material de la barra es duraluminio,  $E = 0,71 \cdot 10^5$  MN/m<sup>2</sup>,  $\sigma_p = 180$  MN/m<sup>2</sup>,  $l = 1,2$  m,  $D = 4$  cm y  $d = 3$  cm (fig. 147).

Determinar  $P_{crit}$  y  $\sigma_{crit}$ .

**Resolución.** El momento de inercia de la sección anular circular de la barra es

$$I = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4) = \frac{\pi}{64} (256 - 81) = \frac{175}{64} \pi \text{ cm}^4,$$

el área de la sección transversal de la barra,



Fig. 147

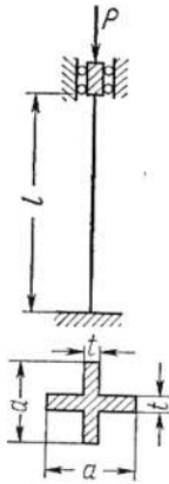


Fig. 148

$$F = \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) = \frac{\pi}{4} (16 - 9) = \frac{7}{4} \pi \text{ cm}^2$$

y su radio de giro,

$$i = \sqrt{\frac{I}{F}} = \sqrt{\frac{175 \cdot 4}{64 \cdot 7}} = \frac{5}{4} \text{ cm.}$$

En el caso dado de apoyo de los extremos de la barra, el coeficiente de reducción de la longitud es  $\mu = 0,7$ .

Puesto que la esbeltez de la barra

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\mu l}{i} = \frac{0,7 \cdot 120 \cdot 4}{5} = \\ &= 67,2 > \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}} \approx \\ &\approx 3,14 \sqrt{\frac{0,71 \cdot 10^5}{180}} \approx 62, \end{aligned}$$

la fuerza crítica se podrá obtener por la fórmula de Euler,

$$\begin{aligned} P_{\text{crít}} &= \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 \cdot 0,71 \cdot 10^5 \cdot 10^8 \cdot 175 \cdot \pi \cdot 10^{-8}}{64 (0,7 \cdot 1,2)^2} = \\ &= 85,3 \cdot 10^3 \text{ N} = 85,3 \text{ kN.} \end{aligned}$$

La tensión crítica resulta

$$\sigma_{\text{crít}} = \frac{P_{\text{crít}}}{F} = \frac{85,3 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 10^4}{7\pi} = 155 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2 = 155 \text{ MN/m}^2$$

**Ejemplo 79.** Dado que el material de la barra es hierro fundido,  $l = 1,6 \text{ m}$ ,  $d = 6 \text{ cm}$  y  $t = 1 \text{ cm}$  (fig. 148). Determinar  $P_{\text{crít}}$  y  $\sigma_{\text{crít}}$ .

**Resolución.** El momento de inercia de la sección en forma de cruz es,

$$I = \frac{ta^3}{12} + \frac{(a-t)t^3}{12} = \frac{1 \cdot 6^3}{12} + \frac{5 \cdot 1}{12} = \frac{221}{12} \text{ cm}^4;$$

el área de la sección transversal

$$F = at + (a - t)t = 6 + 5 = 11 \text{ cm}^2$$

y el radio de giro de la sección,

$$i = \sqrt{\frac{221}{12 \cdot 11}} \approx 1,294 \text{ cm.}$$

En el caso dado de apoyo de los extremos de la barra  $\mu = 0,5$ .

Puesto que la esbeltez de la barra  $\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{160}{2 \cdot 1,294} \approx 61,8 < 80$ ,

la tensión crítica se deberá obtener por la fórmula empírica,

$$\sigma_{\text{crit}} = 7\,760 - 120\lambda + 0,53\lambda^2 = 7\,760 - 120 \cdot 61,8 + 0,53 \cdot 61,8^2 \approx 2\,370 \text{ kgf/cm}^2$$

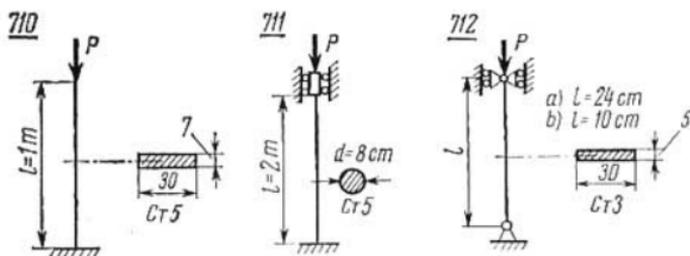
La magnitud de la fuerza crítica resulta,

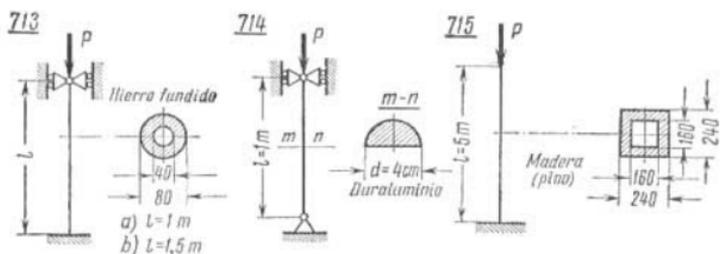
$$P_{\text{crit}} = \sigma_{\text{crit}} F = 2\,370 \cdot 11 = 26\,100 \text{ kgf.}$$

**Problemas 710-715.** Determinar las magnitudes de las fuerzas críticas  $P_{\text{crit}}$  y de las tensiones críticas  $\sigma_{\text{crit}}$  para las barras comprimidas dadas.

Admitanse, para los materiales de las barras los siguientes valores aproximados del módulo de elasticidad longitudinal  $E$  y de los límites de proporcionalidad  $\sigma_p$ .

Material	Cr-3	Cr-5	Hierro fundido	Duraluminio	Madera (pino)
$E$ kgf/cm <sup>2</sup>	$2 \cdot 10^6$	$2 \cdot 10^6$	$1,2 \cdot 10^6$	$0,7 \cdot 10^6$	$1 \cdot 10^5$
$\sigma_p$ kgf/cm <sup>2</sup>	2 000	2 400	1 800	1 700	200





## § 2. Cálculo por estabilidad de barras comprimidas

Al calcular las barras comprimidas debe satisfacerse no sólo la condición de resistencia, sino también la condición de estabilidad,

$$P \leq \frac{P_{\text{crit}}}{[n_e]} \quad (167)$$

ó

$$\sigma = \frac{P}{F} \leq [\sigma_e] \quad (167')$$

En estas fórmulas  $P_{\text{crit}}$  es la fuerza crítica obtenida en función de la esbeltez por la fórmula de Euler (163) o por la de Yasinski (166); es decir, por la expresión  $P_{\text{crit}} = \sigma_{\text{crit}} F = (a - b\lambda + c\lambda^2)F$ ;

$[\sigma_e] = \frac{\sigma_{\text{crit}}}{[n_e]}$  es la tensión admisible por estabilidad y

$n_e$  el coeficiente de seguridad admisible por estabilidad. Este coeficiente es siempre algo mayor que el coeficiente de seguridad básico, puesto que al calcular por estabilidad las barras comprimidas axialmente resulta necesario considerar factores complementarios que son inevitables en la práctica (excentricidad en la aplicación de la carga de compresión, curvatura inicial y heterogeneidad del material de la barra) y que contribuyen al pandeo.

Las excentricidades y la curvatura inicial, cuando son grandes, se consideran especialmente en el cálculo, pero cuando son pequeñas no pueden ser calculadas y dependen de la esbeltez de la barra y se consideran introduciendo un coeficiente de seguridad complementario, es decir, por el aumento indicado del coeficiente de seguridad por estabilidad. Se admite: para el acero  $[n_e] = 1,8-3$ ; para el hierro fundido,  $[n_e] = 5-5,5$  y para la madera,  $[n_e] = 2,8-3,2$ .

La razón  $\frac{[\sigma_e]}{[\sigma_c]} = \varphi$  se denomina *coeficiente de reducción de la tensión admisible en el pandeo* o *coeficiente de pandeo*.

La dependencia de  $\varphi$  de  $\lambda$  para los distintos materiales se da en forma de curvas normativas o en forma de tablas (apéndice 3).

El cálculo por estabilidad puede ser realizado en dos variantes (métodos).

1. Por el coeficiente de seguridad por estabilidad dado  $[n_e]$ .

2. Mediante la tabla de los coeficientes de reducción de las tensiones admisibles  $\varphi(\lambda)$ .

El primer método no es del todo exacto, puesto que, hablando con rigor, el coeficiente de seguridad por estabilidad no puede ser fijado previamente con exactitud, ya que depende de la esbeltez de la barra. Este método se emplea en los cálculos de comprobación aproximados, así como en los casos cuando no existen las tablas y gráficos de  $\varphi(\lambda)$  (por ejemplo, en el caso de materiales nuevos o de empleo de barras de esbeltez superior a la que se recomienda).

El segundo método se emplea universalmente, y es el método fundamental de cálculo de barras por estabilidad. El cálculo en este caso se realiza partiendo de la ecuación,

$$\sigma = \frac{P}{F} \leq \varphi[\sigma_c] \quad (167)$$

empleando solamente las tablas de los coeficientes  $\varphi$  sin recurrir ni a la fórmula de Euler ni a la empírica de Yasinski.

#### Determinación de la carga admisible

Si para la barra que se calcula se conocen: la longitud  $l$ , el tipo de apoyo de los extremos ( $\mu$ ), la forma y las dimensiones de la sección transversal ( $F, I, i$ ) y el material ( $E, [\sigma_c]$ ), entonces la determinación de la carga admisible  $[P]$  se realiza por uno de los siguientes métodos de cálculo.

*Primer método de cálculo (dado  $[n_y]$ ):* 1. Se determina la esbeltez de la barra  $\lambda = \frac{\mu l}{i}$ . 2. Se determina la fuerza crítica  $P_{\text{crít}}$  ( $P_{\text{crít}} = \sigma_{\text{crít}} F$ ) por la fórmula de Euler (163) o por la de Yasinski (166) si no se cumple la condición (165). 3. Por la fórmula (167) se obtiene la carga admisible  $[P] = \frac{P_{\text{crít}}}{[n_e]}$ .

Obsérvese que si  $[n_e]$  es desconocido, se puede obtenerlo aproximadamente, según el material de la barra, su destino y la magnitud de la esbeltez  $\lambda$ .

*Segundo método de cálculo (por las tablas de  $\varphi(\lambda)$ ):* 1. Se determina  $\lambda = \frac{\mu l}{i}$ . 2. Por la curva normativa o de las tablas de  $\varphi(\lambda)$ , interpolando, se determina el coeficiente de pandeo  $\varphi$ . 3. Se calcula la carga de compresión admisible  $[P] = [\sigma_c] F = \varphi[\sigma_c] F$ .

## Comprobación de la estabilidad de las barras

Se realiza también por dos métodos, de modo análogo al expuesto anteriormente (es decir, de manera similar a como se determina la fuerza admisible), partiendo de las ecuaciones (167') y (167").

### Cálculo de la sección transversal

Si para la barra que se calcula se conocen la fuerza de compresión  $P$ , la longitud  $l$ , el tipo de apoyo de los extremos ( $\mu$ ), el material ( $E$ ,  $[\sigma_c]$ ) y la forma de la sección, entonces la condición de estabilidad (167") resulta indeterminada, puesto que sin conocer las dimensiones de la sección transversal no se puede obtener  $\lambda$  y, por lo tanto,  $\varphi$ . Tampoco se puede (si se conoce el coeficiente de seguridad  $[n_c]$ ) recurrir a la fórmula (167) ya que no se sabe cuál de las fórmulas (163) ó (166) debe emplearse al calcular  $P_{crit}$ . El cálculo de la sección debe realizarse por tanteos seguidos de la correspondiente comprobación (por una de las tres variantes).

La primera variante de cálculo (dado  $[n_c]$ ) se emplea rara vez ya que no es suficientemente exacta debido a que la magnitud de  $[n_c]$  que se da sin ser referida a  $\lambda$  (que aún no se conoce) es muy insegura. El cálculo en este caso comienza suponiendo que para este tanteo es válida la fórmula Euler (163).

Se determina el momento de inercia  $I$ , después  $F$ ,  $i$  y  $\lambda$ . Si  $\lambda$  resulta mayor que  $\lambda_0$  el cálculo se da por terminado, si resulta menor que  $\lambda_0$  entonces el cálculo se repite por la fórmula de Yasinski (166).

La segunda variante de cálculo se realiza por las tablas y gráficos de  $\varphi(\lambda)$  en el orden siguiente:

1. Se fija un valor del coeficiente  $\varphi = 0,6-0,8$ .

2. Se establece  $[\sigma_c]$  y  $F \frac{P}{[\sigma_c]}$  y se escogen las dimensiones de la sección o el número del perfil laminado (si la barra es de acero laminado).

3. Se determinan  $I$ ,  $i$  y  $\lambda$ .

5. Se determina el nuevo valor de  $\varphi_1$ . Si  $\varphi_1$ , se diferencia considerablemente de  $\varphi$ , entonces para el segundo tanteo se admite  $\varphi_2 = \frac{1}{2}(\varphi + \varphi_1)$  y se repite el cálculo.

La sección se considera calculada satisfactoriamente si  $\sigma$  y  $[\sigma_c]$  no se diferencian en más del 5%.

En las barras laminadas corrientes la subtensión puede resultar superior al 5%.

Tercera variante de cálculo (combinado). Aquí el primer tanteo se realiza convencionalmente por la fórmula de Euler, fijando el coeficiente  $n_c$ , mientras que el cálculo definitivo se lleva a cabo a partir de la condición de estabilidad (167").

El orden a seguir en este caso es el siguiente.

1. Se fija el valor del coeficiente  $n_e$  en función del material de la barra (para el acero  $n_e \approx 2$ , para el hierro fundido,  $n_e \approx 5$  y para la madera  $n_e \approx 3$ ).

2. Se calcula el momento de inercia mínimo de la sección transversal por la fórmula (163).

3. Se escogen las dimensiones de la sección o se determina el número del perfil (para los perfiles laminados) así como  $F$ ,  $i$  y  $\lambda$ .

4. Se calcula el coeficiente  $\varphi$  y después  $[\sigma_c]$ .

5. Se plantea la condición de estabilidad (167").

6. Si la condición (167") no se cumple entonces se continúa el cálculo variando el coeficiente  $\varphi$  (véase la segunda variante de cálculo) o variando las dimensiones de la sección (número del perfil laminado).

En los cálculos prácticos por estabilidad no se recomienda escoger barras cuya esbeltez sea superior a la máxima indicada en las normas para el coeficiente  $\varphi$ . Sin embargo, si se necesita obtener la carga admisible o calcular la sección para esbeltez de la barra superior a la que recomiendan las normas, entonces el cálculo debe realizarse por la fórmula de Euler, estableciendo previamente el coeficiente de seguridad por estabilidad.

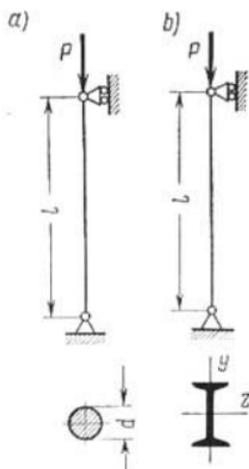


Fig. 149

**Ejemplo 80.** Dado: que el material de la barra es pino, (a lo largo de las fibras),  $[\sigma] = 100 \text{ kgf/cm}^2$ ,  $l = 2 \text{ m}$ ,  $\mu = 1$  y  $d = 10 \text{ cm}$  (fig. 149, a). Determinar  $P$ .

*Resolución.* Para la sección circular,

$$i = \frac{d}{4} = \frac{10}{4} = 2,5 \text{ cm.}$$

La esbeltez de la barra es,

$$\lambda = \frac{l}{i} = \frac{200}{2,5} = 80.$$

Para la madera cuando  $\lambda = 80$ , por las tablas, obtenemos  $\varphi = 0,48$ .

Por lo tanto  $[\sigma_c] = \varphi [\sigma] = 0,48 \cdot 100 = 48 \text{ kgf/cm}^2$ , resultando para la carga admisible,

$$P = [\sigma_c] F = 48 \frac{\pi \cdot 10^2}{4} = 3770 \text{ kgf.}$$

Hallemos el coeficiente de seguridad del trabajo de la columna. Puesto que  $\lambda = 80 > 70$ , por la fórmula (164) obtendremos,

$$\sigma_{\text{crit}} = \frac{10 \cdot 1 \cdot 10^5}{80^2} = 156 \text{ kgf/cm}^2 \quad \text{y} \quad n_e = \frac{\sigma_{\text{crit}}}{[\sigma_e]} = \frac{156}{48} = 3,25.$$

**Ejemplo 81.** Dado: una columna de acero laminado de sección doble te,  $[\sigma] = 1\,600 \text{ kgf/cm}^2$ ,  $P = 40 \text{ tf}$  y  $l = 2 \text{ m}$  (fig. 149, b). Determinar el número del perfil doble te.

*Resolución.* Fijamos el valor  $\varphi = 0,6$ . Entonces

$$[\sigma_e] = \varphi [\sigma] = 0,6 \cdot 1\,600 = 960 \text{ kgf/cm}^2$$

y

$$F = \frac{P}{[\sigma_e]} = \frac{40 \cdot 10^3}{960} \approx 41,7 \text{ cm}^2.$$

Por el surtido, el perfil más próximo es el N° 27 para el cual,  $F = 40,2 \text{ cm}^2$  e  $i_y = 2,54 \text{ cm}$ .

La esbeltez de la columna es

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_y} = \frac{1 \cdot 1\,200}{2,54} = 78,7.$$

Por la tabla para el acero C<sub>r</sub>. 3,  $\lambda = 70$ ,  $\varphi = 0,81$ ,  $\lambda = 80$ ,  $\varphi = 0,75$  y, por lo tanto, para  $\lambda = 78,7$ ,

$$\varphi_1 = 0,75 + 0,006 \cdot 1,3 = 0,758.$$

Escogemos

$$\varphi_2 = \frac{\varphi + \varphi_1}{2} = \frac{0,6 + 0,758}{2} = 0,679.$$

Entonces

$$[\sigma_e] = 0,679 \cdot 1\,600 = 1\,086 \text{ kgf/cm}^2 \quad \text{y} \quad F = \frac{40 \cdot 10^3}{1\,086} \approx 36,8 \text{ cm}^2.$$

Por el surtido el perfil más próximo resulta el N° 24 para el cual  $F = 34,8 \text{ cm}^2$  e  $i_y = 2,37 \text{ cm}$ .

La esbeltez es,

$$\lambda = \frac{200}{2,37} \approx 84,5.$$

Por la tabla para el acero C<sub>r</sub>. 3 se halla,  $\lambda = 80$ ,  $\varphi = 0,75$ ,  $\lambda = 90$ ,  $\varphi = 0,69$ . Para  $\lambda = 84,5$

$$\varphi_3 = 0,69 + 0,006 \cdot 5,5 = 0,723.$$

La tensión admisible

$$[\sigma_e] = 0,723 \cdot 1\,600 = 1\,157 \text{ kgf/cm}^2.$$

La tensión real en la columna,

$$\sigma = \frac{40 \cdot 10^3}{34,8} \approx 1150 \text{ kgf/cm}^2.$$

Resulta una subtensión del

$$\frac{\sigma - [\sigma_e]}{[\sigma_e]} \cdot 100 = \frac{7 \cdot 100}{1157} \approx 0,8\%.$$

Hallemos el coeficiente de seguridad por estabilidad para la columna calculada.

Puesto que  $\lambda = 84,5 < 100$ , por la fórmula (166) hallaremos,

$$\sigma_{\text{crit}} = 3100 - 11,4 \cdot 84,5 = 2137 \text{ kgf/cm}^2,$$

$$n_e = \frac{2137}{1150} \approx 1,86.$$

**Ejemplo 82.** Dado: una columna compuesta por dos perfiles canal con riostras soldadas,  $P = 35 \text{ tf}$ ,  $l = 6 \text{ m}$  y  $[\sigma] = 1600 \text{ kgf/cm}^2$  (fig. 150). Determinar el número del perfil canal,  $B$  y  $l_0$ .

*Resolución.* Al aumentar la distancia  $a$  entre los perfiles, aumenta el momento de inercia de la columna  $I_y$  respecto al eje  $y$  perpendicular al plano de las riostras. El momento de inercia de la sección de la columna  $I_z$  respecto al eje  $z$  no varía y permanece igual a  $I_z = 2I_{z'}$ , siendo  $I_{z'}$  el momento de inercia de la sección de una rama de la columna respecto al eje central del perfil canal  $z'$ , que coincide con el eje  $z$ . Por lo tanto en calidad de momento mínimo de la sección transversal de la columna debe cogerse  $I_z$ .

Fijamos  $n_e = 2$ . De la fórmula de Euler se obtiene

$$I_{z'} = \frac{Pl^2 n_e}{2\pi^2 E} = \frac{35 \cdot 10^3 \cdot 36 \cdot 10^4 \cdot 2}{2 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 10^6} = 630 \text{ cm}^4.$$

Por el surtido del acero laminado el perfil canal menor, más próximo, es el N° 14a. Para éste se obtiene  $I_{z'} = 545 \text{ cm}^4$ ,  $i_{z'} = 5,66 \text{ cm}$  y  $F = 17,0 \text{ cm}^2$ .

La esbeltez de la columna es,

$$\lambda = \frac{l}{i_{z'}} = \frac{600}{5,66} \approx 106,1$$

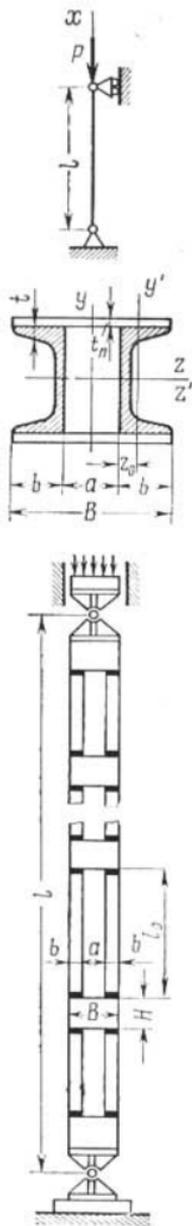


Fig. 150

De la tabla para el acero C<sub>T</sub>. 3 se halla  $\lambda = 100$ ,  $\varphi = 0,60$ ,  $\lambda = 110$ ,  $\varphi = 0,52$ .

Para  $\lambda = 106$

$$\varphi = 0,52 + 0,008 \cdot 4 = 0,552.$$

La tensión admisible es

$$[\sigma_e] = 0,552 \cdot 1\,660 = 883 \text{ kgf/cm}^2.$$

La tensión de trabajo,

$$\sigma = \frac{P}{2F} = \frac{35 \cdot 10^3}{2 \cdot 17,0} = 1\,029 \text{ kgf/cm}^2.$$

es decir, una sobretensión del

$$\frac{1\,029 - 883}{1\,029} \cdot 100\% = 14,2\% > 5\%$$

lo que es inadmisibile.

Escogemos el perfil canal N° 16. Para el cual,  $I_x = 747 \text{ cm}^4$ ,  $i_x = 6,42 \text{ cm}$ ,  $F = 18,1 \text{ cm}^2$ ,  $I_y = 63,3 \text{ cm}^4$ ,  $i_y = 1,87 \text{ cm}$ ,  $b = 6,4 \text{ cm}$ ,  $t = 0,84 \text{ cm}$  y  $z_0 = 1,80 \text{ cm}$ .

La esbeltez de la columna es,

$$\lambda = \frac{600}{6,42} \approx 93,5.$$

Por la tabla para el acero C<sub>T</sub>. 3,  $\lambda = 90$ ,  $\varphi = 0,69$ ,  $\lambda = 100$  y  $\varphi = 0,60$ .

Para  $\lambda = 93,5$  hallaremos,

$$\varphi = 0,60 + 0,009 \cdot 6,5 = 0,658.$$

La tensión admisible es,

$$[\sigma_e] = 0,658 \cdot 1\,600 \approx 1\,051 \text{ kgf/cm}^2.$$

La tensión de trabajo,

$$\sigma = \frac{P}{2F} = \frac{35 \cdot 10^3}{2 \cdot 18,1} \approx 967 \text{ kgf/cm}^2.$$

Resulta una subtensión del

$$\frac{1\,051 - 967}{1\,051} \cdot 100\% = 7,99\%.$$

Escogemos definitivamente el perfil N° 16.

Puesto que  $\lambda = 93,5 < 100$ , resulta

$$\sigma_{\text{crit}} = 3\,100 - 11,4\lambda \approx 2\,034 \text{ kgf/cm}^2.$$

La columna trabaja pues con un coeficiente de seguridad,

$$n_e = \frac{2034}{967} \approx 2,1.$$

La distancia racional  $a$  entre las ramas se establece de la condición de igual resistencia de la columna en los planos principales de inercia  $xy$  y  $xz$ .

Puesto que las ramas de la columna no están unidas por riostras absolutamente rígidas se recomienda escoger  $I_y = (1,15 \div 1,20) I_z$ .

Escogemos  $I_y = 1,15 I_z$ . Entonces,

$$1,15 I_{z'} = I_{y'} + \left( z_0 + \frac{a}{2} \right)^2 F,$$

$$a = 2 \left( \sqrt{\frac{1,15 I_{z'} - I_{y'}}{F}} - z_0 \right) = 2 \left( \sqrt{\frac{1,15 \cdot 747 - 63,3}{18,1}} - 1,80 \right) = 9,66 \approx 10 \text{ cm},$$

obteniendo para la longitud de la riostra,

$$B = a + 2b = 10 + 2 \cdot 6,4 = 22,8 \text{ cm}.$$

Para garantizar la estabilidad de cada rama en el plano de su mínima rigidez  $xz'$ , las riostras deberán colocarse a la distancia teórica  $l_{cr}$ , que se obtiene exigiendo que la esbeltez de toda la columna sea igual a la esbeltez del tramo de la rama entre dos riostras, es decir,

$$\frac{l}{i_z} = \frac{l_{ot}}{i_{y'}}.$$

De esta condición se halla la longitud teórica del tramo de la rama

$$l_{ot} = \frac{l}{i_z} i_{y'} = \lambda i_{y'} = 93,5 \cdot 1,87 = 175 \text{ cm}.$$

Prácticamente, antes se recomendaba escoger  $l_0 = \left( \frac{1}{2} \div \frac{1}{3} \right) l_{ot}$ .

De acuerdo con las nuevas normas (véase Normas constructivas y reglas, parte II, sección B, capítulo 3, editado en ruso el año 1962), la esbeltez de las ramas  $\lambda_r$  en el tramo entre las riostras deberá ser no mayor de 40, es decir  $l_0 \leq 40 i_{y'}$ . En nuestro caso,

$$l_0 = 40 \cdot 1,87 = 74,8 \text{ cm}.$$

Escogemos,  $l_0 = 75 \text{ cm}$ . Entonces la longitud  $l$  de la columna se divide por las riostras en seis tramos iguales, quedando 24 cm para los apoyos.

Por motivos constructivos puede admitirse,

$$H = (0,6 + 0,8) B, \quad l_0 - H = (3 \div 4) H \quad \text{y} \quad t_r = (0,8 \div 1) t.$$

En el caso en cuestión admitimos,

$$H = 0,8 B = 0,8 \cdot 22,8 = 18 \text{ cm} \quad \text{y} \quad t_r \approx t \approx 0,8 \text{ cm}.$$

Generalmente la columna con riostras se comprueba por la esbeltez efectiva, que es

$$\lambda_e = \sqrt{\lambda_c^2 + \lambda_r^2}$$

en el caso de una columna compuesta por dos perfiles canal o por dos perfiles de doble te y

$$\lambda_e = \sqrt{\lambda_c^2 + \lambda_{r_1}^2 + \lambda_{r_2}^2},$$

en el caso de una columna compuesta por cuatro angulares, siendo  $\lambda_c$  la esbeltez de la columna respecto al eje perpendicular al plano de las riostras;

$\lambda_{r_1}$ ,  $\lambda_{r_2}$  las esbelteces de las ramas respecto a los ejes centrales propios perpendiculares al plano de las riostras.

Realicemos esta comprobación.

Para toda la columna,

$$i_y = \sqrt{\frac{I_{yy'}}{F} + \left(z_0 + \frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{1,87^2 + (1,8 + 5)^2} \approx 7,05 \text{ cm},$$

$$\lambda_c = \frac{600}{7,05} = 85,1$$

y para la rama,

$$\lambda_r = \frac{l_0}{i_y'} = \frac{75}{1,87} = 40.$$

Por lo tanto,

$$\lambda_e = \sqrt{85,1^2 + 40^2} = 94,1.$$

Por la tabla para el acero C<sub>T</sub>. 3, interpolando, obtendremos para  $\lambda = 94,1$ ,

$$\varphi = 0,60 + 0,009 \cdot 4,1 = 0,637.$$

La tensión admisible es,

$$[\sigma_e] = 0,637 \cdot 1\,600 = 1\,019 \text{ kgf/cm}^2.$$

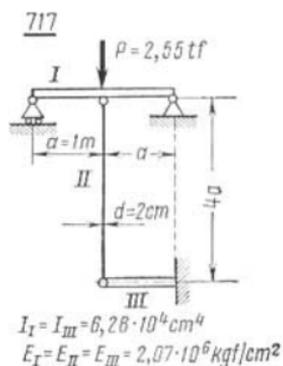
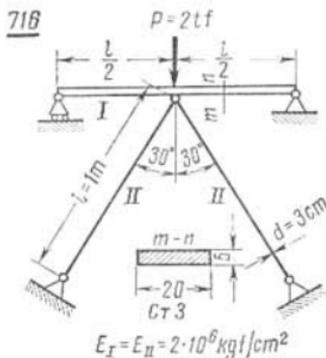
Resulta una subtensión de

$$\frac{1\,019 - 967}{1\,019} \cdot 100\% = 5,1\%.$$

Por lo tanto, la columna es estable también respecto al eje principal perpendicular a las riostras.

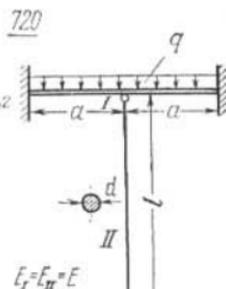
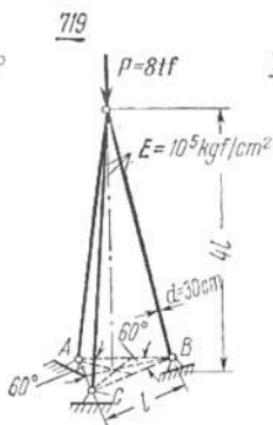
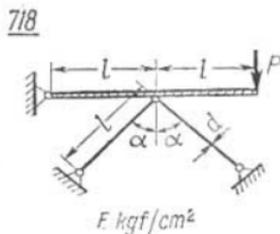
Se debe tener en cuenta que cuando se cumple la condición  $I_y = 1,2 I_x$  y  $\lambda_r = 40$ , las magnitudes  $\lambda_e$  y  $\lambda$  siempre estarán muy cerca la una de la otra.

**Problemas 716-717.** Determinar las magnitudes de los coeficientes de seguridad por estabilidad  $n_e$  con que trabajan las barras comprimidas en los sistemas.



**Problemas 718-720.** Calcular con que longitud  $l$  el sistema pierde la estabilidad.

Admitase que para la carga y dimensiones de las secciones transversales de las barras dadas las deformaciones ocurren dentro de los límites de proporcionalidad. En el problema 720 debe prescindirse de la deformación de compresión de la barra II, al vencer la hiperelasticidad del sistema.



**Problema 721.** Determinar la longitud  $l$  para la cual la columna comprimida de acero C<sub>T</sub>. 3 de sección circular de diámetro  $d$  con sus extremos articulados, pierde la estabilidad.

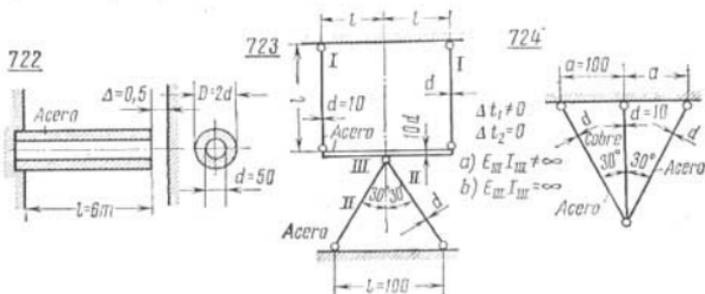
Admitase  $E = 2 \cdot 10^6$  kgf/cm<sup>2</sup>,  $\sigma_p = 1\,900$  kgf/cm<sup>2</sup>,

$$\sigma_t = 2\,400 \text{ kgf/cm}^2.$$

a)  $d = 1$  cm,  $P = 1$  tf b)  $d = 1$  cm y  $P = 1,8$  tf.

**Problemas 722-724.** Determinar el aumento de la temperatura ( $\Delta t$  °C) para el cual los elementos comprimidos del sistema pierden la estabilidad.

Admitase: Para el acero,  $E = 2 \cdot 10^6$  kgf/cm<sup>2</sup>,  $\alpha = 12,5 \cdot 10^{-6}$ , y  $\sigma_p = 2\,000$  kgf/cm<sup>2</sup>. Para el cobre,  $E = 1 \cdot 10^6$  kgf/cm<sup>2</sup>,  $\alpha = 16,5 \cdot 10^{-6}$  y  $\sigma_p = 1\,000$  kgf/cm<sup>2</sup>.



**Problemas 725-728.** Calcular las secciones transversales de las barras comprimidas de los sistemas partiendo del coeficiente de seguridad por estabilidad dado  $n_e$ .

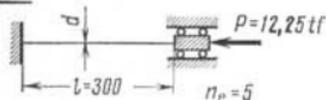
Todas las barras comprimidas son de acero C<sub>T</sub>. 3 para el cual  $E = 2 \cdot 10^6$  kgf/cm<sup>2</sup> y  $\sigma_p = 2\,000$  kgf/cm<sup>2</sup>.

En el problema 726, la posición indicada de la biela debe considerarse como la más peligrosa.

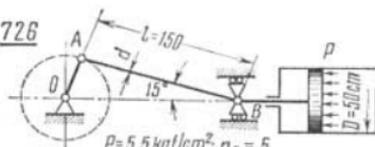
725



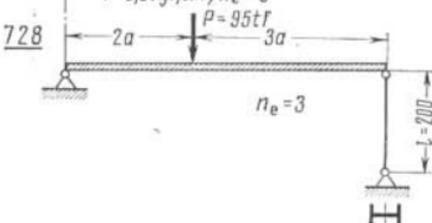
727



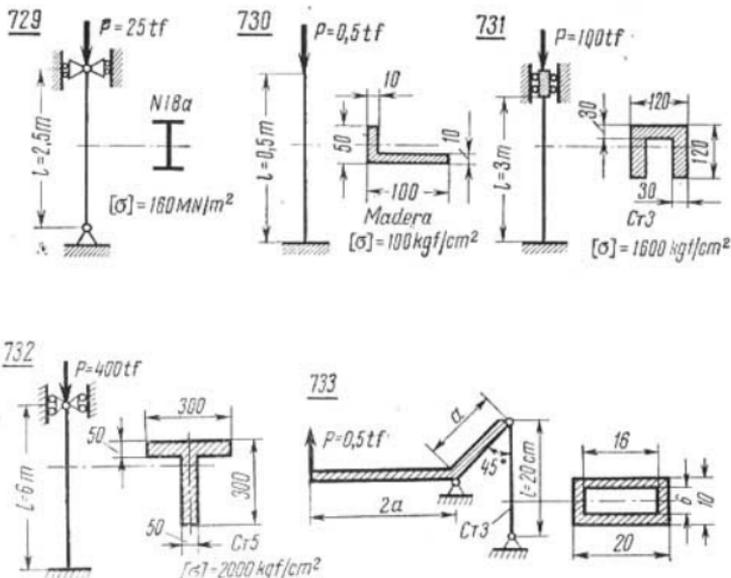
726



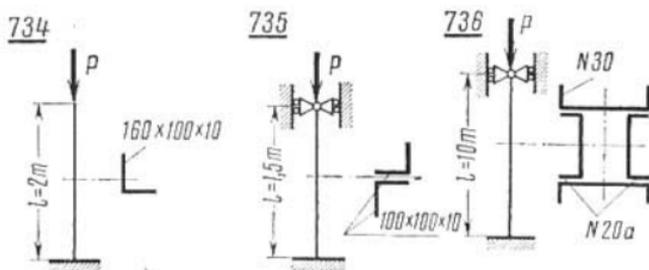
728



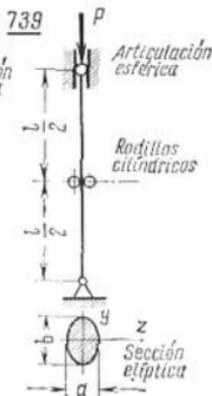
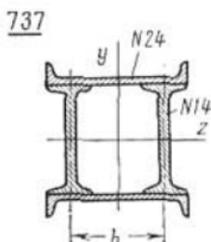
**Problemas 729-733.** Comprobar, por estabilidad, las barras comprimidas y determinar el por ciento de sobretensión o de subtensión. Aquí y en lo siguiente no deben considerarse las posibles deformaciones de las barras comprimidas originadas por la torsión.



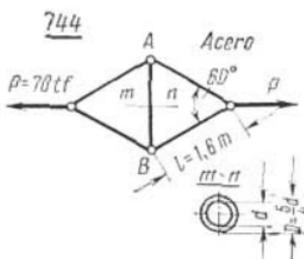
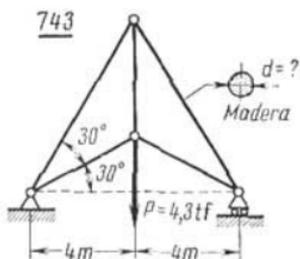
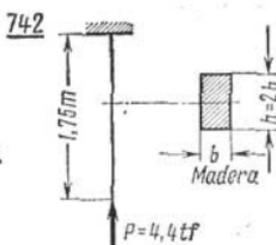
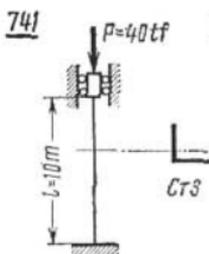
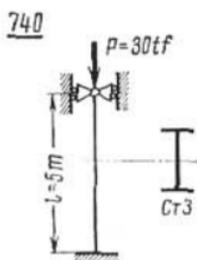
**Problemas 734-736.** Determinar la capacidad resistente de la columna de acero  $Cr. 3$ ,  $[\sigma] = 1600 \text{ kgf/cm}^2$ .



**Problemas 737-739.** Determinar el tamaño  $b$  de las secciones de las columnas, partiendo de la condición de igualdad de estabilidad respecto a los ejes  $z$  y  $y$ .

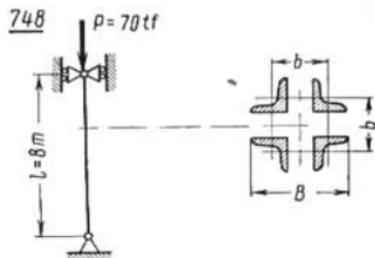
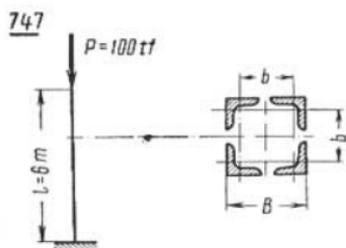
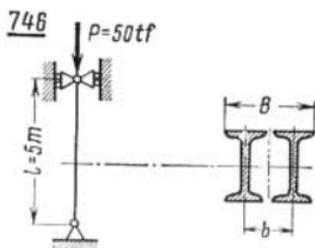
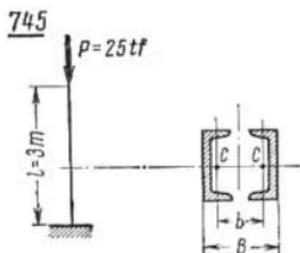


**Problemas 740-744.** Calcular las secciones transversales de las columnas y de los elementos comprimidos de los sistemas. Admitir; para el acero Cr. 3,  $[\sigma] = 1\ 600\ \text{kgf/cm}^2$  y para la madera,  $[\sigma] = 100\ \text{kgf/cm}^2$ .



**Problemas 745-748.** Determinar para las columnas compuestas:

- 1) el número del perfil de la rama de la columna;
- 2) la anchura de la sección de la columna  $b$ ;
- 3) la distancia  $l_0$  entre las riostras (distancia neta). Admitase para el material de las ramas de las columnas  $E = 2 \cdot 10^6\ \text{kgf/cm}^2$  y  $[\sigma] = 1\ 600\ \text{kgf/cm}^2$ .



### § 3. Flexión longitudinal y transversal combinada

Las vigas sometidas a la acción de fuerzas longitudinales y transversales y momentos se calculan de manera aproximada, partiendo de la suposición de que la línea elástica de la barra se aproxima a la senoide.

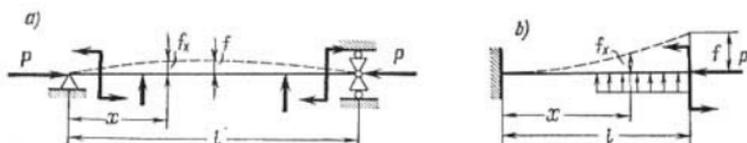


Fig. 151

En el caso de vigas de extremos articulados (fig. 151), que fundamentalmente se analizan en este párrafo, la senoide indicada se da por la ecuación siguiente,

$$f_x = f \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l}. \quad (168)$$

Este método de cálculo (que debe aplicarse al resolver los problemas que más adelante se proponen) resulta más exacto en el caso de barras de extremos articulados, sometidas a cargas transversales

orientadas en una misma dirección y simétricas respecto a la sección media de la barra.

En este caso la línea elástica originada por la flexión transversal carece de puntos de inflexión, es decir, tiene curvatura de un mismo signo y puede, por lo tanto, ser representada por una senoide (168).

En este caso la flecha máxima en la sección media de la barra será,

$$f = \frac{f_{\text{trans}}}{1 - \frac{P}{P_e}}, \quad (168a)$$

el momento flector máximo,

$$M_{\text{max}} = M_{\text{trans}} + Pf = M_{\text{trans}} + \frac{Pf_{\text{trans}}}{1 - \frac{P}{P_e}} \quad (169)$$

y la máxima tensión de compresión,

$$\max |\sigma| = \frac{P}{F} + \frac{M_{\text{max}}}{W} = \frac{P}{F} + \frac{M_{\text{trans}}}{W} + \frac{Pf_{\text{trans}}}{W \left(1 - \frac{P}{P_e}\right)}, \quad (170)$$

siendo  $P$  la fuerza axial de compresión;

$P_e = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$  la fuerza de Euler que se obtiene independientemente

de la esbeltez de la barra a través del momento central principal de inercia  $I$  de área de la sección  $F$  transversal respecto al eje perpendicular al plano de acción de la carga transversal;

$W$  el módulo de la sección transversal de la barra respecto al eje indicado;

$f_{\text{trans}}$  y  $M_{\text{trans}}$  la flecha y el momento flector en la mitad de la longitud  $l$  de la barra, originados exclusivamente por la carga transversal.

De la fórmula (170) se desprende que el principio de superposición de efectos no es aplicable aquí y que las tensiones, al crecer las fuerzas exteriores, crecen en este caso con mayor rapidez que las fuerzas exteriores.

Esto implica el paso de la comprobación de la resistencia por tensiones admisibles al cálculo por cargas admisibles.

Consideraremos que el sistema de vigas en cuestión, sometido a una flexión longitudinal y transversal combinada, trabaja con un coeficiente de seguridad dado  $n$ , si al aumentar todas las fuerzas exteriores  $n$  veces el sistema alcanza el estado peligroso que en el caso de materiales plásticos consiste en que la tensión normal máxima

(en valor absoluto) se iguala al límite de fluencia  $\sigma_f$ , es decir,

$$\max |\sigma| = \frac{(nP)}{F} + \frac{(nM_{\text{trans}})}{W} + \frac{(nP)(nf_{\text{trans}})}{W\left(1 - \frac{nP}{P_E}\right)} = \sigma_f. \quad (171)$$

Igualando  $n$  al coeficiente de seguridad admisible  $[n]$  obtendremos la fórmula para el cálculo por resistencia

$$\max |\sigma| = \frac{[n]P}{F} + \frac{[n]M_{\text{trans}}}{W} + \frac{[n]P[n]f_{\text{trans}}}{W\left(1 - \frac{[n]P}{P_E}\right)} = \sigma_f. \quad (171,a)$$

Consideramos que el coeficiente de seguridad  $[n]$  al calcular por el método de las cargas admisibles es igual al establecido para la tensión admisible que se refiere al límite de fluencia, es decir,

$$[n] = n_f$$

donde

$$n_f = \frac{\sigma_f}{[\sigma]}.$$

Entonces obtendremos la siguiente modificación de la fórmula (171, a)

$$\frac{P}{F} + \frac{M_{\text{trans}}}{W} + \frac{[n]Pf_{\text{trans}}}{W\left(1 - \frac{[n]P}{P_E}\right)} \leq [\sigma]. \quad (171,b)$$

Con un error algo mayor, las fórmulas (168-171) pueden aplicarse también en el caso de cargas transversales no simétricas si la asimetría no está muy próxima a la antisimetría.

De manera análoga se realiza el cálculo por flexión longitudinal y transversal combinada en el caso de otros tipos de apoyos de las barras, salvo que la ecuación (168) deberá ser modificada en cada caso concreto. Así, por ejemplo, en el caso de una viga empotrada en un extremo (fig. 151, b) la línea elástica se aproxima por la función:

$$f = f_{\text{max}} \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2l}\right).$$

Las fórmulas (169-171) permanecen sin embargo válidas excepto que el valor de la fuerza de Euler  $P_E$  varía según el tipo de apoyos de la barra de acuerdo con la fórmula (163).

Si la carga transversal actúa en el plano de máxima rigidez de la barra entonces ésta debe de comprobarse también por estabilidad en el plano de rigidez mínima.

**Ejemplo 83.** Dado:  $P = 800$  kgf,  $P_1 = 100$  kgf,  $l = 2$  m,  $b = 2$  cm,  $h = 4$  cm,  $E = 2 \cdot 10^6$  kgf/cm<sup>2</sup> y  $\sigma_t = 2\,400$  kgf/cm<sup>2</sup> (fig. 152).

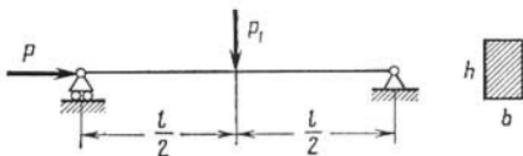


Fig. 152

Determinar  $f$ ,  $\sigma_{\max}$ ,  $n$  y  $n_c$ .

*Resolución.* Puesto que,

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{2 \cdot 64}{12} = \frac{32}{3} \text{ cm}^3,$$

la flecha en el medio de la barra originada por la fuerza  $P_1$  será,

$$f_{\text{trans}} = \frac{P_1 l^3}{48EI} = \frac{100 \cdot 8 \cdot 10^6 \cdot 3}{48 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 32} = \frac{25}{32} = 0,781 \text{ cm.}$$

Para la fuerza de Euler se obtiene,

$$P_E = \frac{\pi^2 EI}{l^2} = \frac{10 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 32}{4 \cdot 10^4 \cdot 3} = \frac{16}{3} 10^3 \text{ kgf,}$$

resultando que,

$$\frac{P}{P_E} = \frac{800 \cdot 3}{16 \cdot 10^3} = \frac{3}{20} \text{ y } 1 - \frac{P}{P_E} = 1 - \frac{3}{20} = \frac{17}{20}.$$

Por la fórmula (168) se obtiene la flecha

$$f = \frac{25}{32} \cdot \frac{20}{17} = 0,919 \text{ cm.}$$

Así, pues,  $f_{\text{trans}}$  constituye el  $\frac{17}{20} \cdot 100\% = 85\%$  de  $f$ .

Puesto que

$$M_{\text{trans}} = \frac{P_1 l}{4} = \frac{100 \cdot 200}{4} = 5 \cdot 10^3 \text{ kgf} \cdot \text{cm,}$$

$$M_{\max} = 5 \cdot 10^3 + 800 \cdot 0,919 = 5\,735 \text{ kgf} \cdot \text{cm,}$$

$$F = bh = 8 \text{ cm}^2,$$

$$W = \frac{bh^2}{6} = \frac{2 \cdot 16}{6} = \frac{16}{3} \text{ cm}^3,$$

por la fórmula (170) obtendremos,

$$\sigma_{\max} = \frac{800}{8} + \frac{5735}{16} \cdot 3 = 1175 \text{ kgf/cm}^2.$$

Prescindiendo de la flexión originada por la fuerza axial hallaremos

$$\sigma'_{\max} = \frac{P}{F} + \frac{M_{\text{trans}}}{W} = 100 + \frac{5 \cdot 10^3}{16} \cdot 3 = 1038 \text{ kgf/cm}^2,$$

lo que constituye el  $\frac{1038}{1175} \cdot 100\% = 88\%$  de  $\sigma_{\max}$ .

El coeficiente de seguridad  $n$  (referido al límite de fluencia) con que trabaja la viga se obtiene por la fórmula (171)

$$\max |\sigma| = \frac{nP}{F} + \frac{nM_{\text{trans}}}{W} + \frac{nP}{W} \left( 1 - \frac{nP}{P_E} \right) = \sigma_r$$

6

$$\frac{n \cdot 800}{8} + \frac{n \cdot 15 \cdot 10^3 \cdot 3}{16} + \frac{n \cdot 800 \cdot 3 \cdot n \cdot 0,781}{16 \left( 1 - \frac{n \cdot 800 \cdot 3}{16 \cdot 10^3} \right)} = 2400,$$

de donde resulta,

$$\frac{n^2 - 35,9n + 61,6}{(1 - 0,15n)} = 0.$$

Resolviendo esta ecuación se obtienen dos valores de  $n$ :  $n_1 = 1,85$  y  $n_2 = 34,05$ .

El valor  $n_2 = 34,05$  no puede interpretarse como solución del problema puesto que ya para  $n = 6,67$  ( $P_{\text{pelig}} = nP = 5320 \text{ kgf}$ ) la tensión  $\max |\sigma| = \infty$ , en vista de que el binomio  $1 - \frac{nP}{P_E} = (1 - 0,15n)$  resulta igual a cero.

Comprobamos ahora la estabilidad de la viga en el plano de mínima rigidez. Puesto que

$$i_y^2 = \frac{b^2}{16} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \text{ cm}^2 \quad \text{y} \quad \lambda = \frac{l}{i} = 200\sqrt{3},$$

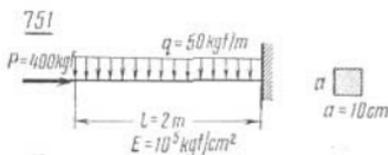
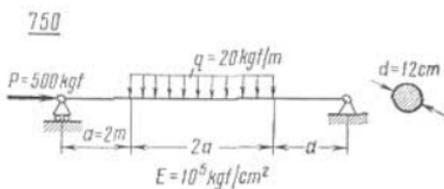
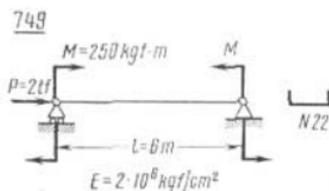
por la fórmula (164),

$$\sigma_{\text{crit}} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{10 \cdot 2 \cdot 10^6}{3 \cdot 4 \cdot 10^4} = 167 \text{ kgf/cm}^2.$$

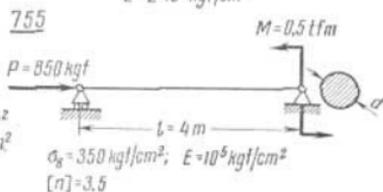
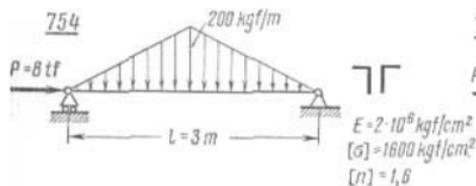
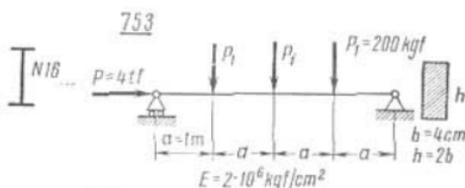
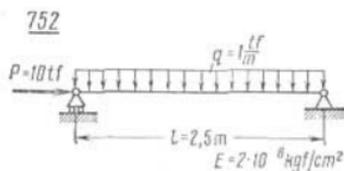
La tensión originada exclusivamente por la fuerza  $P$  es  $\sigma = \frac{800}{8} = 100 \text{ kgf/cm}^2$ . El coeficiente de seguridad de la viga por estabilidad será,

$$n_e = \frac{\sigma_{crit}}{\sigma} = \frac{167}{100} = 1,67.$$

**Problemas 749-751.** Determinar la flecha máxima  $f$  y la tensión de compresión máxima  $|\sigma_c|$  para las vigas siguientes.



**Problemas 752-753.** Determinar  $f$ ,  $\max |\sigma_c|$ , el coeficiente de seguridad  $n$  y el coeficiente de seguridad por estabilidad  $n_e$  con que trabajan las vigas siguientes.



**Problemas 754-755.** Calcular las dimensiones de la sección transversal de las vigas siguientes.

# XI. BARRAS CURVAS PLANAS

## § 1. Esfuerzo axial, fuerza cortante y momento flector

Se denomina *barra curva* la barra cuyo eje geométrico es curvilíneo.

Se analizarán aquellas barras curvas en las cuales: 1) el eje geométrico es una curva plana; 2) el plano de curvatura es el plano de simetría; 3) las fuerzas que sobre ellas actúan se encuentran en

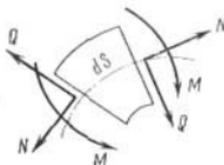


Fig. 153



Fig. 154

el plano de la curvatura; 4) el material se atiene a la ley de Hook y 5) la rigidez es suficientemente grande para que se pueda aplicar el principio de superposición de las fuerzas.

Los esfuerzos interiores en la sección transversal de la barra curva se obtienen por el método de las secciones. Ellos se reducen a una fuerza axial  $N$ , a una cortante  $Q$  y a un momento flector  $M$ .

Generalmente se consideran positivos: el esfuerzo  $N$  de tracción, la fuerza cortante  $Q$  cuya dirección coincide con la de esfuerzo  $N$  de tracción girado  $90^\circ$  en el sentido de las manecillas del reloj, el momento flector  $M$  que aumenta la curvatura de la barra (fig. 153).

Acordamos que en los diagramas, los valores positivos de  $N$ ,  $Q$  y  $M$  los ubicaremos perpendicularmente al eje geométrico de la barra en dirección contraria al centro de curvatura y los negativos hacia el centro de curvatura. En el caso de barras compuestas por tramos curvilíneos y rectilíneos, los diagramas positivos y negativos correspondientes a los tramos rectilíneos convendrá situarlos a los mismos lados del eje geométrico que en los tramos curvilíneos.

Independientemente de la forma de la barra curva las magnitudes  $N$ ,  $Q$  y  $M$  en la sección transversal determinada por las coordenadas  $x$ ,  $y$  y el ángulo  $\beta = \arctg\left(\frac{dy}{dx}\right)$  se determinan por el mismo método.

Veamos los casos cuando a un lado de la sección se aplican diversas cargas.

1) Par de fuerzas concentrado (fig. 154):

$$N = 0; \quad Q = 0; \quad M = M_0.$$

2) Fuerza concentrada (fig. 155, a).

Las componentes de la fuerza  $P$  según los ejes  $x$  e  $y$  (fig. 155, b) son,

$$P_x = P \cos \alpha; P_y = P \sin \alpha.$$

Para la fuerza  $P_x$  (fig. 155, c) se obtiene,

$$N' = P \cos \alpha \cos \beta; Q' = P \cos \alpha \sin \beta; M' = -P_y \cos \alpha.$$

Para la fuerza  $P_y$  (fig. 155, d),

$$N'' = P \sin \alpha \sin \beta; Q'' = -P \sin \alpha \cos \beta; M'' = P_x \sin \alpha.$$

Los esfuerzos resultantes correspondientes a la fuerza  $P$  serán,

$$N = P (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) = P \cos (\alpha - \beta);$$

$$Q = P (\cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta) = -P \sin (\alpha - \beta);$$

$$M = P (x \sin \alpha - y \cos \alpha).$$

3. Carga distribuida uniformemente sobre la recta  $AB$ , que actúa normalmente a ella (fig. 156, a).

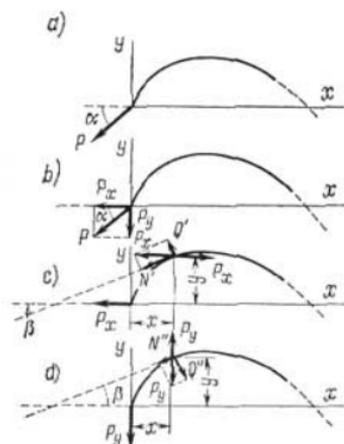


Fig. 155

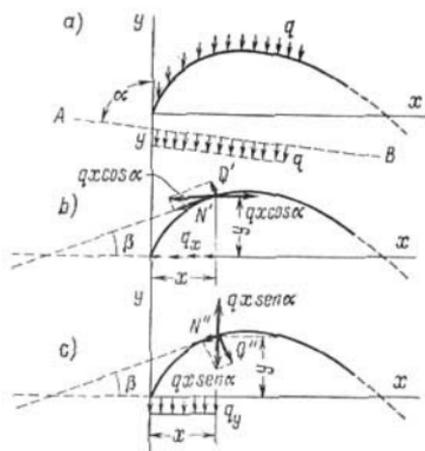


Fig. 156

Las componentes de la carga  $q$  sobre los ejes  $x$  e  $y$  (de manera análoga al caso anterior) son,

$$q_x = q \cos \alpha; q_y = q \sin \alpha.$$

La componente  $q_x$  origina los esfuerzos siguientes (fig. 156, b):

$$N' = q_x \cos \alpha \cos \beta; Q' = q_x \cos \alpha \sin \beta; M' = -q_x y \cos \alpha.$$

La componente  $q_y$  (fig. 156, c):

$$N^r = qx \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta; \quad Q^r = -qx \operatorname{sen} \alpha \cos \beta, \quad M^r = q \frac{x^2}{2} \operatorname{sen} \alpha.$$

Los esfuerzos resultantes originados por la carga  $q$  serán entonces:

$$\begin{aligned} N &= qx (\cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta) = qx \cos (\alpha - \beta); \\ Q &= qx (\cos \alpha \operatorname{sen} \beta - \operatorname{sen} \alpha \cos \beta) = -qx \operatorname{sen} (\alpha - \beta); \\ M &= qx \left( \frac{x}{2} \operatorname{sen} \alpha - y \cos \alpha \right). \end{aligned}$$

4. Carga transversal distribuida uniformemente a lo largo del eje geométrico de la barra (fig. 157, a).

La proyección sobre el eje  $y$  de la carga separada (fig. 157, b y c) originará los esfuerzos siguientes:

$$N^r = qx \operatorname{sen} \beta; \quad Q^r = -qx \cos \beta; \quad M^r = q \frac{x^2}{2}.$$

y la proyección sobre el eje  $x$  de las mismas fuerzas (fig. 157, d):

$$N^r = -qy \cos \beta; \quad Q^r = -qy \operatorname{sen} \beta; \quad M^r = q \frac{y^2}{2}.$$

Como resultado de la acción conjunta de  $q_x$  y  $q_y$  obtendremos,

$$\begin{aligned} N &= q(x \operatorname{sen} \beta - y \cos \beta); \\ Q &= -q(x \cos \beta + y \operatorname{sen} \beta); \quad M = \frac{q}{2}(x^2 + y^2). \end{aligned}$$

5. Carga paralela distribuida uniformemente a lo largo del eje geométrico de la barra (158, a).

La fuerza elemental en la sección de coordenadas  $x_1 y_1$  que actúa sobre el elemento  $ds$  del arco del eje geométrico de la barra será, (fig. 158, b)

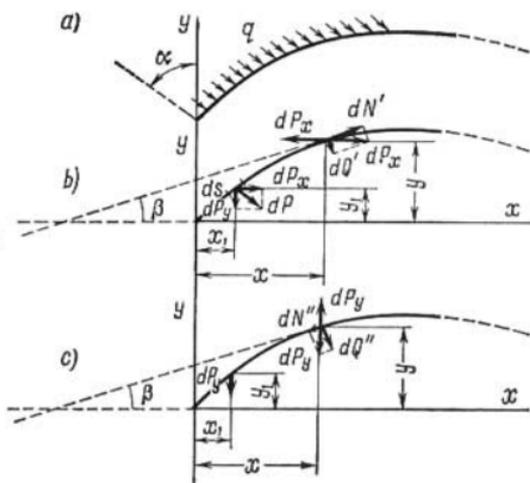
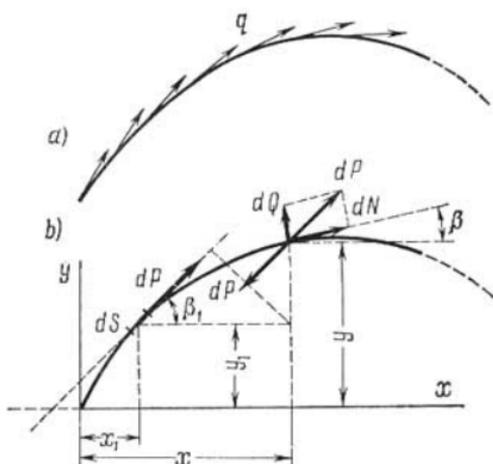
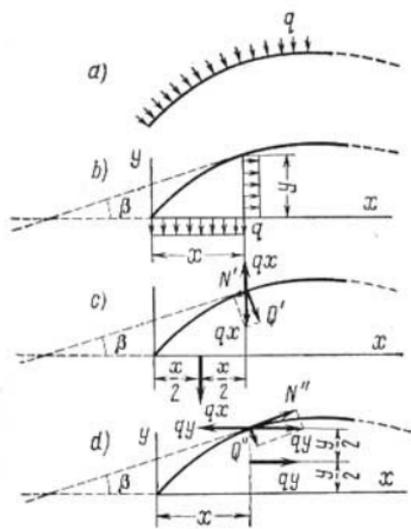
$$dP = qds.$$

Las proyecciones de la fuerza  $dP$  sobre los ejes  $x$  e  $y$ ,  $dP_x = dP \operatorname{sen} \alpha = qds \operatorname{sen} \alpha$ ;  $dP_y = dP \cos \alpha = qds \cos \alpha$ .

Los esfuerzos elementales originados por la fuerza  $dP_x$  en la sección de coordenadas  $x$ ,  $y$  y de ángulo  $\beta$  (fig. 158, b),

$$\begin{aligned} dN' &= -dP_x \cos \beta = -q \operatorname{sen} \alpha \cos \beta ds; \quad dQ' = -dP_x \operatorname{sen} \beta = \\ &= -q \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta ds, \end{aligned}$$

$$dM' = dP_x (y - y_1) = q (y - y_1) \operatorname{sen} \alpha ds.$$



Los esfuerzos elementales ebidos a la fuerza  $dP_y$  en la misma sección (fig. 158, c),

$$\begin{aligned} dN'' &= dP_y \operatorname{sen} \beta = q \cos \alpha \operatorname{sen} \beta ds; \\ dQ'' &= -dP_y \cos \beta = -q \cos \alpha \cos \beta ds; \\ dM'' &= dP_y (x - x_1) = q (x - x_1) \cos \alpha ds. \end{aligned}$$

Los esfuerzos elementales originados por la acción conjunta de las fuerzas  $dP_x$  y  $dP_y$  en la sección en cuestión:

$$\begin{aligned} dN &= -q (\operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \cos \alpha \operatorname{sen} \beta) ds = -q \operatorname{sen} (\alpha - \beta) ds; \\ dQ &= -q (\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta + \cos \alpha \cos \beta) ds = -q \cos (\alpha - \beta) ds; \\ dM &= q [(y - y_1) \operatorname{sen} \alpha + (x - x_1) \cos \alpha] ds. \end{aligned}$$

Los esfuerzos totales en la sección en cuestión que determina un arco  $s$  del eje geométrico de la barra serán pues,

$$\begin{aligned} N &= -q \operatorname{sen} (\alpha - \beta) \int_0^s ds = -qs \operatorname{sen} (\alpha - \beta); \\ Q &= -q \cos (\alpha - \beta) \int_0^s ds = -qs \cos (\alpha - \beta); \\ M &= q \left[ \operatorname{sen} \alpha \left( y \int_0^s ds - \int_0^s y_1 ds \right) + \cos \alpha \left( x \int_0^s ds - \int_0^s x_1 ds \right) \right] = \\ &= q [\operatorname{sen} \alpha (ys - S_x) + \cos \alpha (xs - S_y)] = \\ &= qs [(y - y_c) \operatorname{sen} \alpha + (x - x_c) \cos \alpha], \end{aligned}$$

siendo

$$S_x = \int_0^s y_1 ds \text{ y } S_y = \int_0^s x_1 ds \quad \text{los momentos estáticos del arco } s \text{ respecto a los ejes } x \text{ e } y;$$

$$y_c = \frac{S_x}{s} \text{ y } x_c = \frac{S_y}{s} \quad \text{las coordenadas del centro de gravedad del arco } s.$$

6. Carga uniformemente distribuida a lo largo del eje geométrico de la barra y tangente a éste (fig. 159, a).

La fuerza elemental en la sección transversal de coordenadas  $x_1 y_1$  y de inclinación  $\beta_1$  (fig. 159, b) que actúa tangencialmente al eje geométrico de la barra sobre el elemento del arco  $ds$  es,

$$dP = q ds.$$

Los esfuerzos elementales originados por la fuerza  $dP$  en la sección transversal de coordenadas  $x$ ,  $y$  y de inclinación  $\beta$  (fig. 159, b)

serán,

$$dN = -dP \cos (\beta_1 - \beta) = -q \cos (\beta_1 - \beta) ds;$$

$$dQ = dP \operatorname{sen} (\beta_1 - \beta) = q \operatorname{sen} (\beta_1 - \beta) ds;$$

$$dM = -dP [(x - x_1) \operatorname{sen} \beta_1 - (y - y_1) \cos \beta_1] ds = q [(y - y_1) \cos \beta_1 - (x - x_1) \operatorname{sen} \beta_1] ds.$$

Los esfuerzos totales en la sección que se analiza que corta un arco  $s$  del eje geométrico de la barra

$$N = -q \int_0^s \cos (\beta_1 - \beta) ds; \quad Q = q \int_0^s \operatorname{sen} (\beta_1 - \beta) ds;$$

$$M = q \left[ \int_0^s (y - y_1) \cos \beta_1 ds - \int_0^s (x - x_1) \operatorname{sen} \beta_1 ds \right].$$

**Ejemplo 84.** Dado:  $P$  y  $\rho$  (fig. 160,  $a$ ), construir los diagramas de  $N$ ,  $Q$  y  $M$ .

*Resolución.* Determinamos  $N$ ,  $Q$  y  $M$  por tramos de la barra (fig. 160,  $b$ ).

En el primer tramo:  $0 \leq \varphi_1 \leq \frac{\pi}{2}$ .

$$N_{\varphi_1} = P \cos \varphi_1; \quad Q_{\varphi_1} = P \operatorname{sen} \varphi_1; \quad M_{\varphi_1} = P\rho (1 - \cos \varphi_1);$$

$$N_{\varphi_1=0} = P; \quad N_{\varphi_1=\frac{\pi}{4}} \approx 0,707P; \quad N_{\varphi_1=\frac{\pi}{2}} = 0;$$

$$Q_{\varphi_1=0} = 0; \quad Q_{\varphi_1=\frac{\pi}{4}} \approx 0,707P; \quad Q_{\varphi_1=\frac{\pi}{2}} = P;$$

$$M_{\varphi_1=0} = 0; \quad M_{\varphi_1=\frac{\pi}{4}} \approx 0,293P\rho; \quad M_{\varphi_1=\frac{\pi}{2}} = P\rho.$$

En el segundo tramo:  $0 \leq \varphi_2 \leq \frac{\pi}{2}$ ,

$$N_{\varphi_2} = -2P \operatorname{sen} \varphi_2; \quad Q_{\varphi_2} = 2P \cos \varphi_2; \quad M_{\varphi_2} = P\rho (1 + 2 \operatorname{sen} \varphi_2);$$

$$N_{\varphi_2=0} = 0; \quad N_{\varphi_2=\frac{\pi}{4}} \approx -1,414P; \quad N_{\varphi_2=\frac{\pi}{2}} = -2P;$$

$$Q_{\varphi_2=0} = 2P; \quad Q_{\varphi_2=\frac{\pi}{4}} = 1,414P; \quad Q_{\varphi_2=\frac{\pi}{2}} = 0;$$

$$M_{\varphi_2=0} = P\rho; \quad M_{\varphi_2=\frac{\pi}{4}} \approx 2,414P\rho; \quad M_{\varphi_2=\frac{\pi}{2}} = 3P\rho.$$

Los diagramas de  $N$ ,  $Q$  y  $M$  están indicados en la figura 160,  $c$ ,  $d$  y  $e$ .

**Ejemplo 85.** Dado:  $P$ ,  $a$  y las ecuaciones de los ejes geométricos de las ramas superior e inferior de la ballesta (parábola  $y = \pm a \left(1 - \frac{x}{2a}\right)$ ) (fig. 161, a).

Construir los diagramas de  $N$ ,  $Q$  y  $M$ .

*Resolución.* En virtud de la simetría del sistema respecto a dos ejes ortogonales, analizamos solamente la mitad de una rama de la

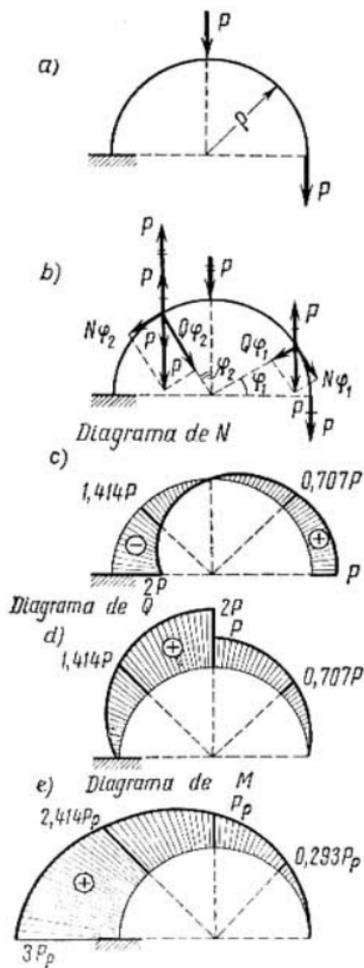


Fig. 160

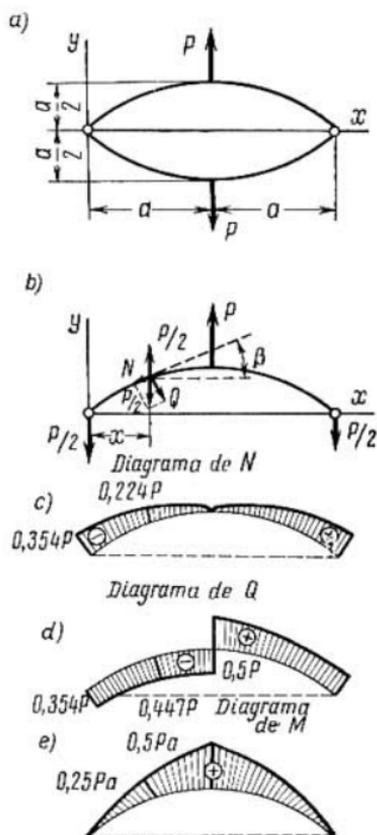


Fig. 161

ballesta (fig. 161, b). Para una sección arbitraria, situada a la distancia  $x$  del extremo izquierdo se obtiene.

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{dy}{dx} = \frac{a-x}{a};$$

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}} = \frac{a-x}{\sqrt{2a^2 - 2ax + x^2}};$$

$$\operatorname{cos} \beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}} = \frac{a}{\sqrt{2a^2 - 2ax + x^2}}.$$

Por lo tanto,

$$N = \frac{P}{2} \operatorname{sen} \beta = \frac{P(a-x)}{2\sqrt{2a^2 - 2ax + x^2}};$$

$$Q = -\frac{P}{2} \operatorname{cos} \beta = -\frac{Pa}{2\sqrt{2a^2 - 2ax + x^2}};$$

$$M = \frac{P}{2} x;$$

$$N_{x=0} = \frac{\sqrt{2}}{4} P \approx 0,354P; \quad N_{x=\frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{10} P \approx 0,224P; \quad N_{x=a} = 0;$$

$$Q_{x=0} = -\frac{\sqrt{2}}{4} P \approx -0,354P; \quad Q_{x=\frac{a}{2}} = -\frac{\sqrt{5}}{5} P \approx -0,447P;$$

$$Q_{x=a} = -0,5P;$$

$$M_{x=0} = 0; \quad M_{x=\frac{a}{2}} = 0,25Pa; \quad M_{x=a} = 0,5Pa.$$

Los diagramas de  $N$ ,  $Q$  y  $M$  están representados en la figura 161, c, d y e.

**Ejemplo 86.** Dado:  $g$ ,  $a$ ,  $b$  y un anillo elíptico  $y = \frac{b}{a} \sqrt{2ax - x^2}$  seccionado en el origen de coordenadas (fig. 162, a). Determinar  $N$ ,  $Q$  y  $M$ .

*Resolución.* Puesto que la barra es simétrica respecto al eje  $x$ , analizamos solamente la mitad superior.

Por el principio de superposición se obtiene para los esfuerzos que surgen en la sección transversal de coordenadas  $x$ ,  $y$  y de inclinación  $\beta$  (fig. 162, c y d) originados por las proyecciones  $q_x$  y  $q_y$  de

la carga (fig. 162, b)

$$N = qy \cos \beta - qx \sin \beta;$$

$$Q = qx \cos \beta + qy \sin \beta;$$

$$M = -\frac{q}{2}(x^2 + y^2).$$

Puesto que,

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} \cdot \frac{a-x}{\sqrt{2ax-x^2}},$$

resulta

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{a-x}{\sqrt{\frac{a^2}{b^2}(2ax-x^2) + (a-x)^2}};$$

$$\operatorname{cos} \beta = \frac{\frac{a}{b} \sqrt{2ax-x^2}}{\sqrt{\frac{a^2}{b^2}(2ax-x^2) + (a-x)^2}};$$

y

$$N = \frac{qax}{\sqrt{\frac{a^2}{b^2}(2ax-x^2) + (a-x)^2}};$$

$$Q = \frac{q \left[ \frac{a}{b} x + \frac{b}{a} (a-x) \right] \sqrt{2ax-x^2}}{\sqrt{\frac{a^2}{b^2}(2ax-x^2) + (a-x)^2}};$$

$$M = -\frac{q}{2} \left[ \frac{b^2}{a^2} (2ax-x^2) + x^2 \right].$$

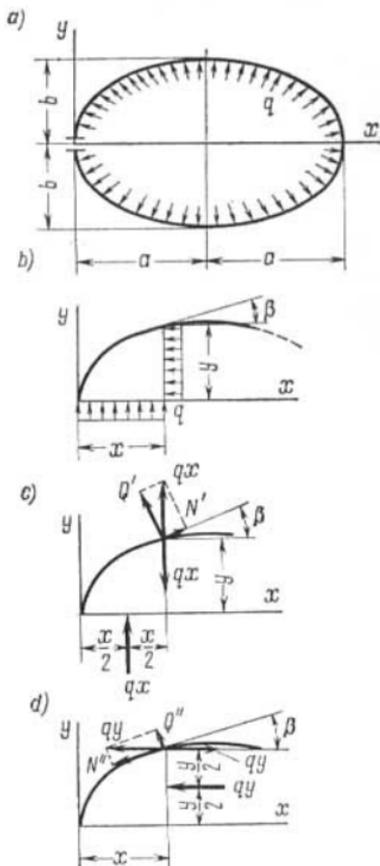
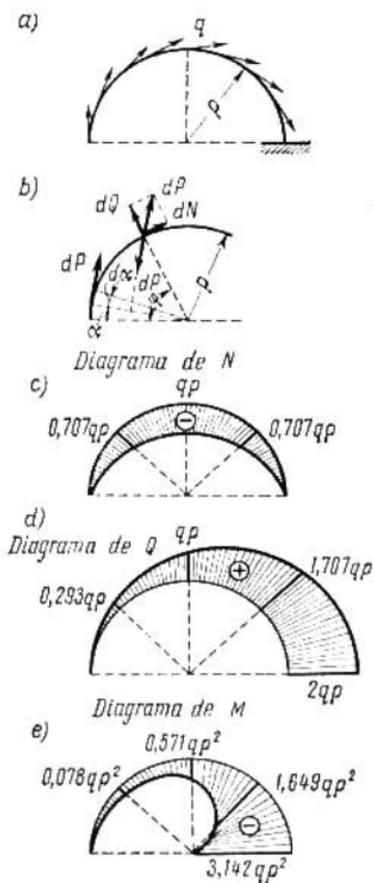
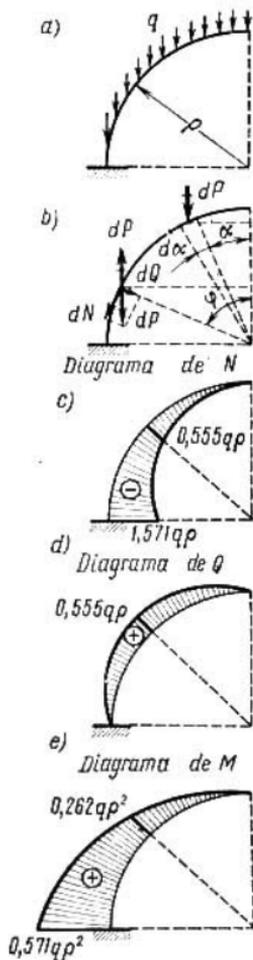
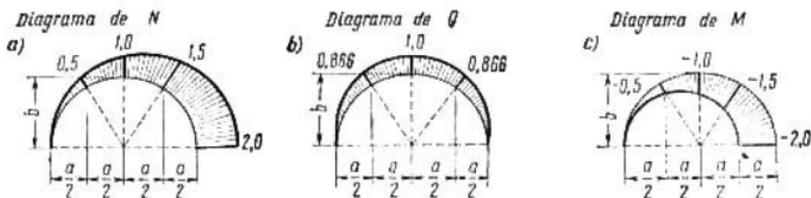


Fig. 162

Si, por ejemplo  $a = b$ , entonces  $N = qx$ ;  $Q = q \sqrt{2ax - x^2}$  y  $M = -qax$ . Los diagramas de  $N$ ,  $Q$  y  $M$  están representados en la figura 163, a, b y c.

**Ejemplo 87.** Dado:  $q$ ,  $\rho$  y la carga vertical de intensidad  $q$  distribuida uniformemente a lo largo del arco correspondiente a un cuarto de circunferencia de radio  $\rho$  (fig. 164, a). Construir los diagramas de  $N$ ,  $Q$  y  $M$ .

**Resolución.** Los esfuerzos en la sección transversal de inclinación  $\varphi$  respecto a la vertical, correspondientes a la fuerza elemental  $dP =$



$= q ds = q\rho d\alpha$  serán (fig. 164, b),

$$dN = -dP \operatorname{sen} \varphi = q\rho \operatorname{sen} \varphi d\varphi;$$

$$dQ = dP \cos \varphi = q\rho \cos \varphi d\varphi;$$

$$dM = dP\rho (\operatorname{sen} \varphi - \operatorname{sen} \alpha) = q\rho^2 (\operatorname{sen} \varphi - \operatorname{sen} \alpha) d\alpha.$$

Los esfuerzos correspondientes a la carga que actúa sobre la parte seccionada de la barra serán,

$$N = -q\rho \operatorname{sen} \varphi \int_0^{\varphi} d\alpha = -q\rho\varphi \operatorname{sen} \varphi,$$

$$Q = q\rho \cos \varphi \int_0^{\varphi} d\alpha = q\rho\varphi \cos \varphi,$$

$$M = q\rho^2 \int_0^{\varphi} (\operatorname{sen} \varphi - \operatorname{sen} \alpha) d\alpha = q\rho^2 (\varphi \operatorname{sen} \varphi + \cos \varphi - 1);$$

$$N_{\varphi=0} = 0; \quad N_{\varphi=\frac{\pi}{4}} \approx -q\rho \frac{\pi}{4} 0,707 = -0,555q\rho;$$

$$N_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = -q\rho \frac{\pi}{2} \approx -1,571q\rho;$$

$$Q_{\varphi=0} = 0; \quad Q_{\varphi=\frac{\pi}{4}} \approx 0,555q\rho; \quad Q_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = 0;$$

$$M_{\varphi=0} = 0; \quad M_{\varphi=\frac{\pi}{4}} \approx q\rho^2 \left( \frac{\pi}{4} 0,707 + 0,707 - 1 \right) \approx 0,262q\rho^2;$$

$$M_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = q\rho^2 \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right) \approx 0,571q\rho^2.$$

Los diagramas de  $N$ ,  $Q$  y  $M$  están representados en la fig. 164, c, d y e.

**Ejemplo 88.** Dado:  $q$ ,  $\rho$  y una carga de intensidad  $q$  distribuida uniformemente sobre el arco de la semicircunferencia de radio  $\rho$  y dirigida según la tangente al eje geométrico de la barra (fig. 165, a)

Construir los diagramas de  $N$ ,  $Q$  y  $M$ .

*Resolución.* La fuerza elemental en la sección inclinada un ángulo  $\alpha$  respecto a la horizontal es,

$$dP = q ds = q\rho d\alpha.$$

Los esfuerzos elementales en la sección transversal de la barra inclinada un ángulo  $\varphi$  respecto a la horizontal y correspondientes a la fuerza  $dP$  (fig. 165, b) valen:

$$dN = -dP \cos (\varphi - \alpha) = -q\rho \cos (\varphi - \alpha) d\alpha;$$

$$dQ = dP \operatorname{sen} (\varphi - \alpha) = q\rho \operatorname{sen} (\varphi - \alpha) d\alpha;$$

$$dM = -dP [\rho - \rho \cos (\varphi - \alpha)] = -q\rho^2 [1 - \cos (\varphi - \alpha)] d\alpha.$$

Los esfuerzos totales originados por la carga que actúa sobre la parte seccionada de la barra serán,

$$N = -q\rho \int_0^{\varphi} \cos(\varphi - \alpha) d\alpha = -q\rho \sin \varphi;$$

$$Q = q\rho \int_0^{\varphi} \sin(\varphi - \alpha) d\alpha = q\rho(1 - \cos \varphi);$$

$$M = -q\rho^2 \left[ \int_0^{\varphi} d\alpha - \int_0^{\varphi} \cos(\varphi - \alpha) d\alpha \right] = q\rho^2(\sin \varphi - \varphi);$$

$$N_{\varphi=0} = 0; \quad N_{\varphi=\frac{\pi}{4}} = -0,707q\rho; \quad N_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = -q\rho;$$

$$N_{\varphi=\frac{3}{4}\pi} \approx 0,707q\rho;$$

$$N_{\varphi=\pi} = 0;$$

$$Q_{\varphi=0} = 0; \quad Q_{\varphi=\frac{\pi}{4}} \approx 0,293q\rho; \quad Q_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = q\rho;$$

$$Q_{\varphi=\frac{3}{4}\pi} = 1,707q\rho;$$

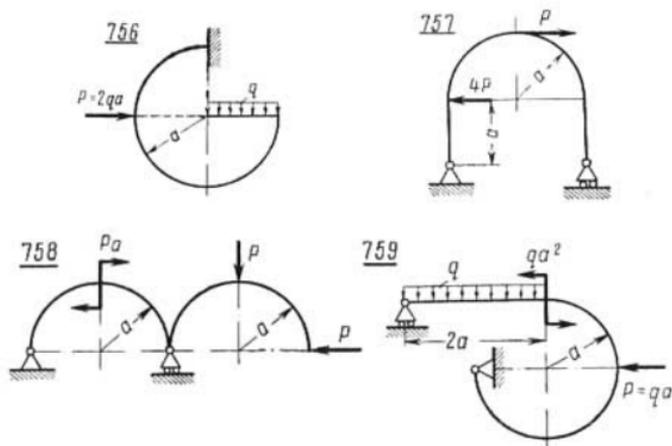
$$Q_{\varphi=\pi} = 2q\rho;$$

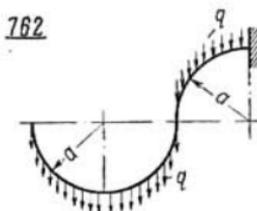
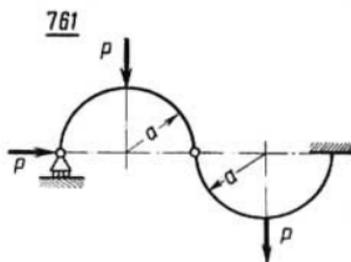
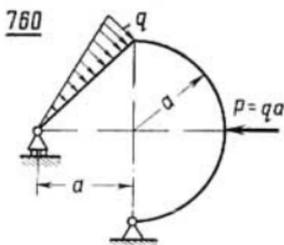
$$M_{\varphi=0} = 0; \quad M_{\varphi=\frac{\pi}{4}} = -0,078q\rho^2; \quad M_{\varphi=\frac{\pi}{2}} \approx -0,571q\rho^2;$$

$$M_{\varphi=\frac{3}{4}\pi} = -1,649q\rho^2; \quad M_{\varphi=\pi} = -3,142q\rho^2.$$

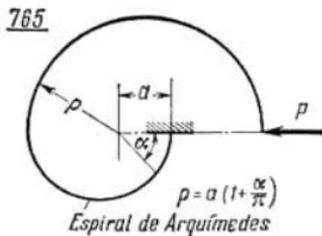
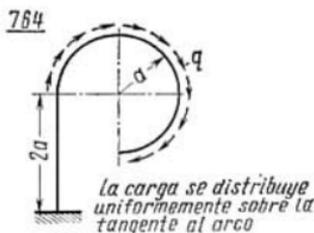
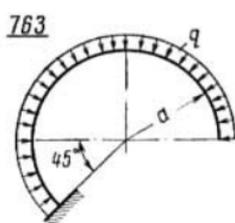
Los diagramas de  $N$ ,  $Q$  y  $M$  están dados en la figura 165. *c*, *d* y *e*.

**Problemas 756-765.** Construir los diagramas del esfuerzo axial  $N$ , de la fuerza cortante  $Q$  y del momento flector  $M$ .





La carga se distribuye uniformemente sobre la proyección horizontal



## § 2. Tensiones

El esfuerzo axial  $N$  y el momento flector  $M$  determinan tensiones normales  $\sigma_N$  y  $\sigma_M$  mientras que la fuerza cortante  $Q$ , tensiones tangenciales  $\tau$  que se desarrollan en los puntos de la sección transversal de la barra curva.

Las tensiones  $\sigma_N$  se consideran distribuidas uniformemente en el área de la sección transversal  $F$  mientras que las tensiones  $\sigma_M$  se consideran distribuidas según la ley hiperbólica. Estas tensiones se obtienen por las fórmulas siguientes,

$$\sigma_N = \frac{N}{F}, \quad (172)$$

$$\sigma_M = \frac{M}{S} \frac{y}{r + y}, \quad (173)$$

siendo  $S$  el momento estático del área  $F$  respecto a la línea neutra  $z$ , que no cruza el centro de gravedad de la sección  $O_0$ ;  
 $r$  el radio de curvatura de la línea neutra  $nn$ ;  
 $y$  la coordenada del punto de la sección que se analiza, desde el eje  $z$  (fig. 166).

La línea neutra  $nn$  se desplaza, respecto al eje geométrico de la barra, hacia el centro de curvatura en la magnitud  $e = \rho - r$ , siendo  $\rho$  el radio de curvatura del eje geométrico de la barra.

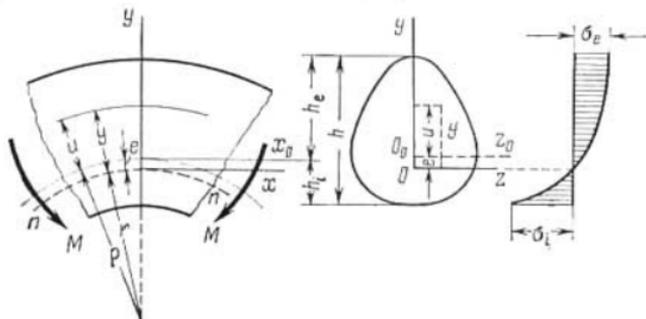


Fig. 166

El radio de curvatura de la línea neutra de la barra de sección arbitraria se determina por la ecuación:

$$r = \frac{F}{\int_F \frac{dF}{\rho + u}}, \quad (174)$$

siendo  $u$  la coordenada del punto que se analiza de la sección al eje central  $z_0$  (fig. 166).

En el caso de una sección rectangular,

$$r = \frac{h}{\ln \frac{r_e}{r_1}}$$

en el de una sección circular,

$$r = \frac{1}{2} \left[ \rho + \sqrt{\rho^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} \right],$$

y en el de una sección trapezoidal,

$$r = \frac{F}{\left( b_e + r_e \frac{b_1 - b_e}{h} \right) \ln \frac{r_e}{r_1} (b_1 - b_e)}$$

siendo  $r_e$ ,  $r_i$ ,  $b_e$  y  $b_i$  respectivamente, el radio de curvatura y la anchura de las fibras exteriores e interiores de la sección.

En los correspondientes manuales y textos de resistencia de materiales se dan los valores de  $r$  para algunas otras formas de secciones transversales.

En el caso de barras de curvatura no grande  $e$  puede ser obtenido por la fórmula aproximada,

$$e \approx \frac{i^2}{\rho}, \quad (175)$$

siendo  $i = \sqrt{\frac{I}{F}}$  el radio de inercia de la sección transversal de la barra respecto al eje central  $z_0$ .

La máxima aproximación de la fórmula (175) se obtiene en el caso de barras de secciones transversales simétricas respecto al eje  $z_0$ .

Como,

$$S = Fe \approx \frac{I}{\rho}, \quad y = u + e = u \left( 1 + \frac{i^2}{\rho u} \right)$$

y

$$r + y = \rho + u = \rho \left( 1 + \frac{u}{\rho} \right),$$

siendo  $u$  la distancia del punto en cuestión de la sección a la línea neutra  $z_0$ , resulta que la fórmula (173) se escribirá así,

$$\sigma_M = \frac{Mu}{I} \cdot \frac{1 + \frac{i^2}{\rho u}}{1 + \frac{u}{\rho}} = \frac{Mu}{I} \alpha, \quad (176)$$

siendo

$$\alpha = \frac{1 + \frac{i^2}{\rho u}}{1 + \frac{u}{\rho}}, \quad (177)$$

una función adimensional de la coordenada  $u$ , que caracteriza la ley no lineal de distribución de  $\sigma_M$  en la sección que depende de la forma de la sección y de la curvatura inicial de la barra. Si  $\frac{h}{\rho} \leq \frac{1}{10}$ , entonces  $\alpha$  se diferenciará poco de la unidad y la tensión  $\sigma_M$  podrá ser obtenida por la fórmula establecida para la viga recta

$$\sigma = \frac{Mu}{I}.$$

Las tensiones normales máxima y mínima resultan en las fibras extremas de la barra cuando  $u = h_e$  y  $u = -h_i$ . Estas tensiones son

$$\sigma_i^e = \pm \frac{M}{W_1^e} \alpha_i^e, \quad (178)$$

siendo  $W$  el módulo de la sección,  $W_e = \frac{I}{h_e}$ , para la fibra exterior

y  $W_i = \frac{I}{h_i}$ , para la interior,

$$\alpha_i^e = \alpha_{u=\pm h_i^e} = \frac{1 \pm \frac{i^2}{\rho h_i^e}}{1 \pm \frac{h_i^e}{\rho}}. \quad (179)$$

Los valores de los coeficientes  $\alpha_i^e$  para algunas secciones figuran en el apéndice 4.

Las tensiones normales resultantes  $\sigma$  en un punto cualquiera de la sección transversal de la barra curva se pueden obtener por la fórmula

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{Mu}{I} \alpha, \quad (180)$$

en la cual el esfuerzo  $N$  se introduce con el signo correspondiente. En la mayoría de los casos  $\sigma_N$  es pequeño en comparación con  $\sigma_M$ .

La tensión tangencial  $\tau$ , determinada por la fuerza cortante  $Q$ , tiene importancia secundaria y generalmente no se considera en el cálculo.

Estas pueden ser calculadas, de manera aproximada, como en el caso de barras rectas, por la fórmula (99),

$$\tau = \frac{QS}{bI}.$$

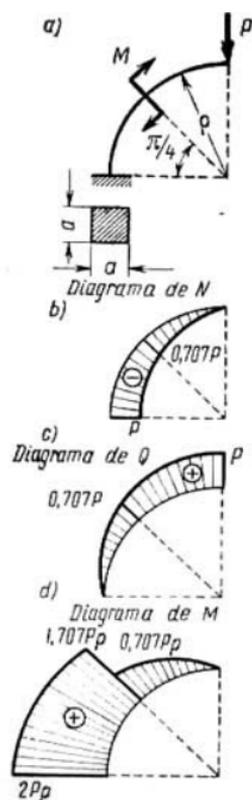


Fig. 167

**Ejemplo 89.** Dado:  $P = 1$  tf,  $\rho = 50$  cm;  $M = P\rho$  y  $a = 10$  cm (fig. 167, a).

Determinar  $\max \sigma_e$ ,  $\min \sigma_i$ ,  $\tau_{\max}$  y  $e$ .

**Resolución.** De acuerdo con los diagramas de  $N$ ,  $Q$  y  $M$  (fig. 167, b, c y d) las tensiones normales máximas ocurrirán en la sección de empotramiento de la barra, donde  $N = -P = -1$  tf y  $M = 2P\rho = 2 \cdot 1 \cdot 50 = 100$  tf·cm y las tensiones tangenciales máximas, en la sección del extremo libre de la barra donde  $Q = P = 1$  tf.

En el caso de una sección cuadrada,

$$W_e = W_1 = W = \frac{a^3}{6} = \frac{10^3}{6} \text{ cm}^3;$$

$$F = a^2 = 10^2 \text{ cm}^2;$$

$$\alpha_1^e = \frac{1 \pm \frac{a}{6\rho}}{1 \pm \frac{a}{2\rho}} = \frac{1 \pm \frac{10}{6 \cdot 50}}{1 \pm \frac{10}{2 \cdot 50}} \approx \begin{cases} 0,939 \\ 1,074 \end{cases}$$

Por lo tanto,

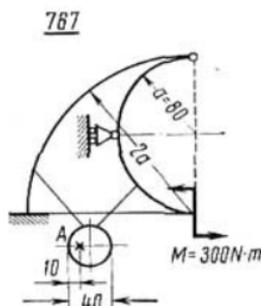
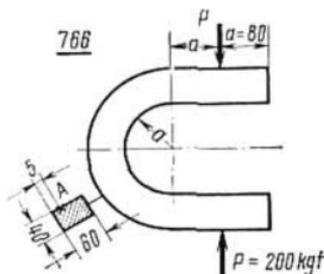
$$\begin{aligned} \max \sigma_e &= \frac{M}{W} \alpha_e + \frac{N}{F} = \frac{10^5 \cdot 6}{10^3} 0,939 - \frac{10^3}{10^2} \approx \\ &\approx 563 - 10 \approx 553 \text{ kgf/cm}^2; \end{aligned}$$

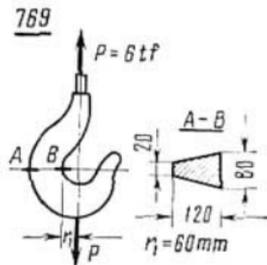
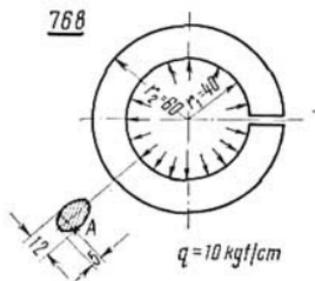
$$\begin{aligned} \min \sigma_1 &= \frac{M}{W} \alpha_1 + \frac{N}{F} = -\frac{10^5 \cdot 6}{10^3} 1,074 - \frac{10^3}{10^2} \approx \\ &\approx -644 - 10 = -654 \text{ kgf/cm}^2; \end{aligned}$$

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{F} = \frac{3}{2} \cdot \frac{10^3}{10^2} = 15 \text{ kgf/cm}^2;$$

$$e = \frac{i^2}{\rho} = \frac{a^2}{12\rho} = \frac{10^2}{12 \cdot 50} = \frac{1}{6} \approx 0,167 \text{ cm} = 1,67 \text{ mm}.$$

**Problemas 766-769.** Determinar las máximas tensiones de tracción  $\sigma_{\max}$  y de compresión  $\sigma_{\min}$ , así como las tensiones normales  $\sigma_A$  en el punto A indicado de la sección peligrosa.





### § 3. Cálculo por resistencia

Para hallar la magnitud de la carga segura que actúa sobre la barra curva y para comprobar su resistencia se emplea la condición siguiente

$$\max |\sigma_1| = \left| \frac{M}{W_1} \alpha_1 + \frac{N}{F} \right| \leq [\sigma]. \quad (181)$$

Las dimensiones necesarias de la sección transversal de la barra se obtienen por tanteos con la correspondiente comprobación poste-

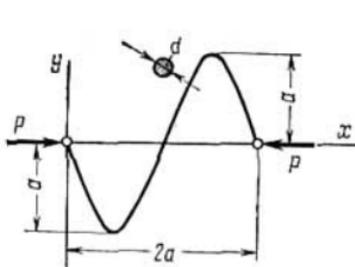


Fig. 168

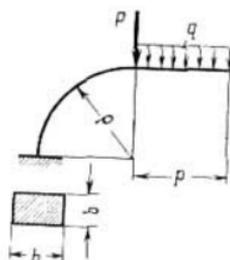


Fig. 169

rior. El primer tanteo se puede realizar considerando que la barra es una viga recta, es decir, de acuerdo con la desigualdad,

$$\frac{\max |M|}{W_1} \leq [\sigma]. \quad (182)$$

La comprobación de la sección se debe realizar considerando la curvatura de la barra y el esfuerzo axial por la fórmula (181). La sobretensión no deberá ser superior al 5%.

Si el material de la barra se resiste de manera diferente a la tracción y compresión, entonces, en la sección peligrosa, las condiciones de resistencia deberán satisfacerse tanto en la fibra exterior como en la interior, de acuerdo con las magnitudes de las tensiones admisibles  $[\sigma_t]$  y  $[\sigma_c]$ .

**Ejemplo 90.** Dado:  $[\sigma] = 4\,000 \text{ kgf/cm}^2$ ,  $a = 20 \text{ cm}$ ;  $d = 1 \text{ cm}$  y la ecuación del eje geométrico de la barra del resorte  $y = -a \operatorname{sen} \frac{\pi}{a} x$  (fig. 168).

Determinar  $P$ .

*Resolución.* Resultan peligrosas las secciones de la barra situadas en las cimas de la senoide, donde  $M = Pa = 20P \text{ kgf}\cdot\text{cm}$ ,  $N = -P \text{ kgf}$  y el radio de curvatura del eje geométrico es,

$$\rho_x = \frac{a}{2} = \left( \frac{[1 + (y')^2]^{3/2}}{y''} \right)_{x=\frac{a}{2}} = \left( \frac{[1 + \pi^2 \cos^2 \frac{\pi}{a} x]^{3/2}}{\frac{\pi^2}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi}{a} x} \right)_{x=\frac{a}{2}} = \frac{a}{\pi^2} \approx 0,1a = 2 \text{ cm}.$$

En el caso de una sección circular de diámetro  $d$ ,

$$W_e = W_1 = W \approx 0,1d^3 \approx 0,1 \text{ cm}^3; \quad F = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi}{4} \approx 0,785 \text{ cm}^2;$$

$$\alpha_1 = \frac{1 - \frac{d}{8\rho}}{1 - \frac{d}{2\rho}} = \frac{1 - \frac{1}{8 \cdot 2}}{1 - \frac{1}{2 \cdot 2}} = 1,25.$$

De la condición de resistencia (181) se obtiene,

$$\max |\sigma_1| = \frac{M}{W} \alpha_1 - \frac{N}{F} = \frac{20P}{0,1} 1,25 + \frac{P}{0,785} \approx 250P \leq 4\,000,$$

resultando para la fuerza admisible,

$$P \leq \frac{4\,000}{250} = 16 \text{ kgf}.$$

**Ejemplo 91.** Dado:  $P = 6 \text{ kN}$ ,  $q = 12 \text{ kN/m}$ ,

$$\rho = 16 \cdot 10^{-2} \text{ m}, \quad b = \frac{3}{4} h \text{ y } [\sigma] = 200 \text{ MN/m}^2 \text{ (fig. 169)}.$$

Determinar  $h$  y  $b$ .

*Resolución.* En la sección peligrosa (empotrada) de la barra,

$$M = P\rho + \frac{3}{2} q\rho^2 = 6 \cdot 10^3 \cdot 16 \cdot 10^{-2} + \frac{3}{2} \cdot 12 \cdot 10^3 \cdot 16^2 \cdot 10^{-4} = 1\,421 \text{ N}\cdot\text{m};$$

$$N = -P - q\rho = -6 \cdot 10^3 - 12 \cdot 10^3 \cdot 16 \cdot 10^{-2} = 7\,920 \text{ N}.$$

Hallamos las dimensiones aproximadas de la sección de la barra del cálculo por flexión, interpretando la barra como una viga recta,

$$W = \frac{bh^2}{6} = \frac{h^3}{8} > \frac{M}{[\sigma]} = \frac{1421}{200 \cdot 10^6} \approx 7,1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 = 7,1 \text{ cm}^3,$$

de donde obtenemos,

$$h > \sqrt[3]{7,1 \cdot 8} = 3,84 \text{ cm}.$$

Teniendo en cuenta la curvatura de la barra y que sobre la sección peligrosa actúa también un esfuerzo axial admitimos  $h = 4 \text{ cm}$  y  $b = 3 \text{ cm}$ . Para estas dimensiones obtendremos,

$$W = \frac{3 \cdot 16}{6} = 8 \text{ cm}^3; \quad F = 3 \cdot 4 = 12 \text{ cm}^2;$$

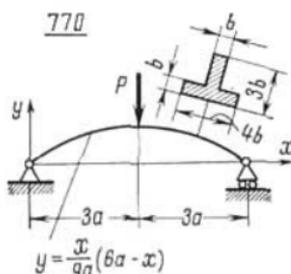
$$\alpha_1 = \frac{1 - \frac{h}{6\rho}}{1 - \frac{h}{2\rho}} = \frac{1 - \frac{4}{6 \cdot 16}}{1 - \frac{4}{2 \cdot 16}} \approx 1,095.$$

De acuerdo con la fórmula (181), la tensión efectiva en la fibra interior de la barra será,

$$\begin{aligned} \max |\sigma_1| &= \left| \frac{M}{W} \alpha_1 + \frac{N}{F} \right| = \frac{1421}{8 \cdot 10^{-6}} \cdot 1,095 + \frac{7920}{12 \cdot 10^{-4}} \approx \\ &\approx 201,1 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2 = 201,1 \text{ MN/m}^2. \end{aligned}$$

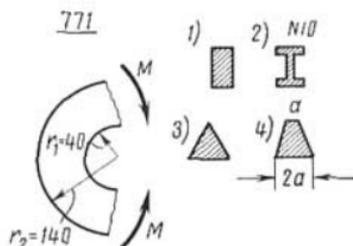
Puesto que la sobretensión constituye el 0,55%, se puede considerar que el cálculo de la sección realizado es satisfactorio.

**Problemas 770-771.** Determinar las magnitudes de las cargas admisibles  $P$  y  $M$ .



$$\alpha = 60 \text{ cm}; \quad b = 20 \text{ cm}$$

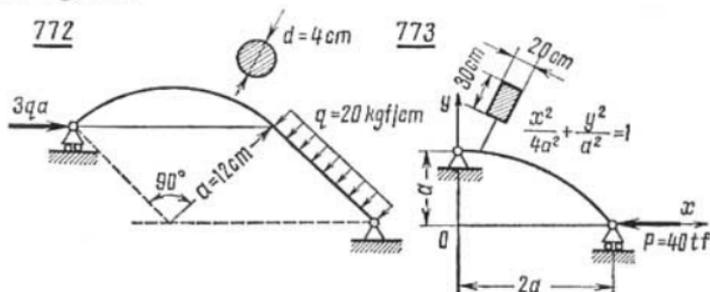
$$[\sigma_{\text{trac}}] = 500 \text{ kgf/cm}^2; \quad [\sigma_{\text{comp}}] = 1200 \text{ kgf/cm}^2$$



$$F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = 12,0 \text{ cm}^2$$

$$[\sigma] = 1000 \text{ kgf/cm}^2$$

**Problemas 772-773.** Comprobar la resistencia de las barras curvas. Considérese que la tensión normal admisible es  $|\sigma| = 1\ 600\ \text{kgf/cm}^2$ .



## XII. METODO ENERGETICO DE CALCULO DE SISTEMAS ELASTICOS

### § 1. *Determinación de los desplazamientos elásticos generalizados*

#### Método de la fuerza generalizada ficticia nula

La expresión que determina la energía potencial de la deformación elástica  $U$  acumulada por el cuerpo o el sistema durante la acción estática de las fuerzas, puede ser representada por una función homogénea, de segundo orden, de las fuerzas generalizadas  $P_i$  o de los desplazamientos generalizados  $\delta_i$ , si entre los últimos existe dependencia lineal.

Las fuerzas generalizadas  $P_i$  están constituidas por cualquier tipo de acción (fuerzas, momentos, grupo de fuerzas, grupo de momentos, etc.) que conviene destacar para la obtención de la energía potencial.

Los desplazamientos generalizados  $\delta_i$  son magnitudes que determinan los desplazamientos en los que las fuerzas generalizadas realizan trabajo (por ejemplo, a la fuerza concentrada le corresponde un desplazamiento lineal, al momento un desplazamiento angular, etc.).

El desplazamiento generalizado elástico  $\delta$  que ocurre en el cuerpo o en el sistema, bajo la acción de las fuerzas generalizadas, se puede obtener por la fórmula de Castigliano,

$$\delta = \left( \frac{\partial U_F}{\partial P_F} \right)_{P_F=0} \quad (183)$$

siendo  $P_F$  la fuerza ficticia generalizada correspondiente al desplazamiento generalizado que se busca. Esta fuerza se aplica al cuerpo o sistema en el lugar donde se halla el desplazamiento;  $U_F$ , la energía potencial de la deformación elástica del cuerpo o sistema dado por una función homogénea de segundo orden de todas las fuerzas generalizadas que actúan  $P_i$  y de la fuerza ficticia generalizada  $P_F$ . Si en el lugar donde se busca el desplazamiento generalizado existe una fuerza generalizada dada  $P$ , correspondiente al desplazamiento generalizado que se halla, entonces desaparece la necesidad de aplicar  $P_F$  y entonces,

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial P}. \quad (184)$$

Si

$$\left( \frac{\partial U_F}{\partial P_F} \right)_{P_F=0} > 0 \quad \left( \text{ó} \quad \frac{\partial U}{\partial P} > 0 \right), \quad \text{la}$$

dirección del desplazamiento generalizado  $\delta$  coincidirá con la dirección de la fuerza  $P_F$  (ó  $P$ ).

$$\text{Si} \quad \left( \frac{\partial U_F}{\partial P_F} \right)_{P_F=0} < 0 \quad \left( \text{ó} \quad \frac{\partial U}{\partial P} < 0 \right), \quad \text{la}$$

dirección del desplazamiento generalizado  $\delta$  será opuesta a la dirección de la fuerza  $P_F$  (ó  $P$ ).

El desplazamiento lineal obtenido por la fórmula de Castigliano constituye la proyección del desplazamiento lineal del punto de aplicación de la fuerza correspondiente, sobre la dirección de la línea de acción de esta fuerza.

#### Método de la fuerza ficticia generalizada unitaria

En el caso más general de sollicitación sobre un sistema elástico de barras, constituido por elementos rectos, los desplazamientos generalizados conviene calcularlos por la fórmula de Maxwell — Mohr,

$$\begin{aligned} \delta = & \Sigma \int \frac{N\bar{N}}{EF} dx + \Sigma \int \frac{M_z\bar{M}_z}{EI_z} dx + \Sigma \int \frac{M_y\bar{M}_y}{EI_y} dx + \\ & + \Sigma \int \frac{M_t\bar{M}_t}{GI_{tor}} dx + \Sigma k_y \int \frac{Q_y\bar{Q}_y}{GF} dx + \Sigma k_z \int \frac{Q_z\bar{Q}_z}{GF} dx, \quad (185) \end{aligned}$$

siendo  $N$ ,  $M_z$ ,  $M_y$ ,  $M_t$ ,  $Q_y$  y  $Q_z$ , respectivamente, los esfuerzos en una sección transversal arbitraria de cada tramo del sistema, originados por todas las fuerzas generalizadas que actúan sobre el sistema:

$\bar{N}$ ,  $\bar{M}_z$ ,  $\bar{M}_y$ ,  $\bar{M}_t$ ,  $\bar{Q}_y$  y  $\bar{Q}_z$ , los mismos esfuerzos pero originados solamente por la fuerza ficticia generalizada unitaria aplicada al sistema y correspondiente al desplazamiento generalizado que se busca;

$E$  y  $G$  los módulos de elasticidad longitudinal y tangencial del material del correspondiente tramo del elemento;

$F$  el área de la sección transversal donde se determinan los esfuerzos;

$I_z$  y  $I_y$  los momentos centrales principales de inercia del área  $F$ ;

$I_{\text{tor}}$  el momento de inercia a la torsión del área  $F$ ;

$k_y$  y  $k_z$  los coeficientes que dependen de la forma de la sección y que caracterizan la desuniformidad de las tensiones tangenciales en la flexión;

$dx$  el elemento del eje geométrico del tramo.

La integración se lleva a cabo sobre la longitudinal de cada tramo, la suma, sobre todos los tramos.

En el caso de sistemas planos constituidos por barras articuladas, con fuerzas aplicadas en los nudos,

$$\delta = \Sigma \frac{N\bar{N}}{EF} l, \quad (186)$$

siendo  $l$  las longitudes de los tramos.

En el caso de sistemas cuyos tramos sufren exclusivamente torsión,

$$\delta = \Sigma \int \frac{M_t \bar{M}_t}{GI_{\text{tor}}} dx. \quad (187)$$

En el caso de sistemas planos constituidos por vigas y pórticos en los que la influencia de  $N$  y  $Q$  sobre la deformación es pequeña,

$$\delta = \Sigma \int \frac{M\bar{M}}{EI} dx. \quad (188)$$

En el caso de sistemas de elementos de curvatura pequeña,

$$\delta = \Sigma \int \frac{M\bar{M}}{EI} ds, \quad (189)$$

siendo  $ds$  el elemento del eje geométrico del tramo curvilíneo.

Si el cálculo se realiza con mayor exactitud,

$$\delta = \Sigma \int \frac{N\bar{N}}{EF} ds + \Sigma \int \frac{M\bar{M}}{EI} ds. \quad (190)$$

**Ejemplo 92.** Dado;  $P$ ,  $a$ ,  $l$ ,  $E$  e  $I$  (fig. 170,  $a$ ).

Determinar la flecha  $f$ .

*Resolución.* La flecha máxima  $f$  en la mitad de la viga se determina por la fórmula (188) que se puede escribir así,

$$f = \frac{1}{EI} \Sigma \int M \bar{M} dx.$$

Los momentos flectores en secciones arbitrarias de las vigas son:

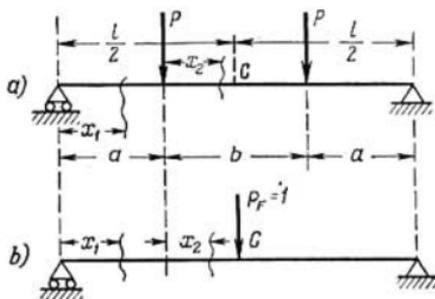


Fig. 170

como consecuencia de la acción de las fuerzas  $P$  dadas,

$$M_a = Px_1; \quad M_b = Pa;$$

como consecuencia de la fuerza ficticia unitaria  $P_v = 1$  (fig. 170, b),

$$\bar{M}_a = \frac{x_1}{2}; \quad \bar{M}_b = \frac{a + x_2}{2}.$$

La magnitud de la flecha que se busca será,

$$f = 2 \frac{P}{2EI} \left[ \int_0^a x_1^2 dx_1 + a \int_0^{l/2-a} (a + x_2) dx_2 \right] = \frac{Pa^3}{24EI} \left( 3 \frac{l^2}{a^2} - 4 \right).$$

Veamos la influencia sobre la flecha de la fuerza cortante. Por la fórmula (185) la flecha correspondiente a la fuerza cortante en la flexión recta será:

$$f_Q = \frac{k}{GF} \Sigma \int Q \bar{Q} dx.$$

Puesto que en los tramos de la viga las fuerzas cortantes correspondientes a la carga dada y a la ficticia son respectivamente,

$$Q_a = P, \quad Q_b = 0, \quad \bar{Q}_a = \frac{1}{2}, \quad \bar{Q}_b = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{resulta que } f_Q &= 2k \frac{Pa}{2GF} = k \frac{Pa}{GF} \text{ y } \frac{f_Q}{f} = \\ &= 24k \frac{EI}{GFa^2 \left( 3 \frac{l^3}{a^2} - 4 \right)} = 24k \frac{E}{G} \frac{i^2}{a^2 \left( 3 \frac{l^2}{a^2} - 4 \right)}, \end{aligned}$$

$$\text{siendo } i^2 = \frac{I}{F}.$$

Teniendo en cuenta que en el caso de materiales isótopos  $\frac{E}{G}$  se encuentra entre los límites  $2 \leq \frac{E}{G} \leq 3$ ,  $\frac{f_Q}{f}$  tendrá los valores extremos siguientes,

$$\frac{f_Q}{f} = (48 \div 72) \frac{ki^2}{a^2 \left( 3 \frac{l^2}{a^2} - 4 \right)}.$$

Si  $a \rightarrow 0$ , entonces,

$$\frac{f_Q}{f} \rightarrow (16 \div 24) k \frac{i^2}{l^2},$$

$$\text{si } a = \frac{l}{2}, \text{ entonces } \frac{f_Q}{f} = (24 \div 36) k \frac{i^2}{l^2} = 1,5 \left( \frac{f_Q}{f} \right)_{a \rightarrow 0}.$$

Veamos para el segundo caso  $\left( a = \frac{l}{2} \right)$ , cuando la fuerza cortante ejerce la máxima influencia sobre la flecha, las vigas de secciones rectangular y circular.

Puesto que para el rectángulo de altura  $h$  y para el círculo de diámetro  $d$ ,  $i^2 = \frac{h^2}{12}$  o  $i^2 = \frac{d^2}{16}$ ,  $k = \frac{6}{5}$  y  $k = \frac{32}{27}$  respectivamente, en el caso' de vigas de la sección rectangular obtendremos,

$$\frac{f_Q}{f} = (2,4 \div 3,6) \frac{h^2}{l^2}$$

y en el caso de la sección circular,

$$\frac{f_Q}{f} = \left( \frac{16}{9} \div \frac{8}{3} \right) \frac{d^2}{l^2} \approx (1,778 \div 2,667) \frac{d^2}{l^2}.$$

De aquí se puede ver que  $f_Q$  puede constituir el 5% de  $f$  y más aún, cuando

$$l \leq \left( \sqrt{\frac{2,4}{0,05}} \div \sqrt{\frac{3,6}{0,05}} \right) h \approx (7 \div 8) h$$

y

$$l \leq \left( \sqrt{\frac{16}{9 \cdot 0,05}} \div \sqrt{\frac{8}{3 \cdot 0,05}} \right) d \approx (6 \div 7) d,$$

es decir, en el caso de vigas muy cortas.

Si se escoge, por ejemplo, la viga doble te N° 20a de acero laminado, entonces  $\frac{E}{G} = 2,5$ ;  $i = 8,37$  cm;  $k = 2,78$

y

$$\frac{f_Q}{f} = 24 \cdot 2,78 \cdot 2,5 \frac{8,37^2}{2l^2} = \frac{5840}{l^2}.$$

Así, pues  $f_Q$  constituye el 5% de  $f$  ya para

$$l = \sqrt{\frac{5840}{0,05}} \approx 341 \text{ cm} \approx 17h.$$

**Ejemplo 93.** Dado;  $P$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $F$ ,  $I_{\text{tor}}$ ,  $E$  y  $G$  (fig. 171, a).

Determinar  $\delta$ , desplazamiento vertical del punto de aplicación de la fuerza  $P$ , teniendo en cuenta todos los tipos de deformación de la barra.

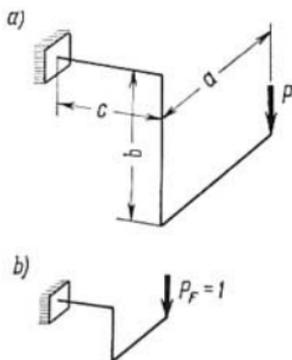


Fig. 171

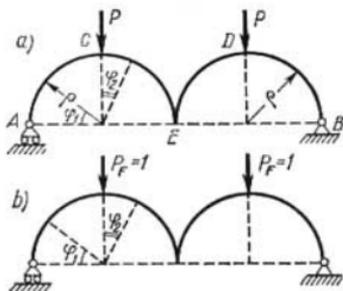


Fig. 172

**Resolución.** Calculamos el desplazamiento  $\delta$  por la fórmula (185).

La tracción aparece solamente en el tramo  $b$ . Los esfuerzos axiales originados por  $P$  y  $P_F = 1$  (fig. 171, b) son  $N = P$  y  $\bar{N} = 1$ .

Todos los tramos de la barra están sometidos a flexión. Los momentos flectores y fuerzas cortantes en las secciones transversales arbitrarias de los tramos de la barra, originados por las fuerzas  $P$  y  $P_F = 1$  son respectivamente:

$$M_a = P_x; \quad \bar{M}_a = x; \quad M_b = Pa; \quad \bar{M}_b = a; \quad M_c = Px; \quad \bar{M}_c = x; \quad Q_a = P; \\ \bar{Q}_a = 1; \quad Q_b = 0; \quad \bar{Q}_b = 0; \quad Q_c = P; \quad \bar{Q}_c = 1.$$

La torsión aparece solamente en el tramo  $c$ . Los momentos torsores originados por  $P$  y  $P_F = 1$  son:  $M_t = Pa$ ;  $\bar{M}_t = a$ .

Introduciendo los esfuerzos obtenidos en la fórmula (185) se obtiene el valor del desplazamiento que se busca

$$\delta = \frac{Pb}{EF} + \frac{P}{EI} \left( \int_0^a x^2 dx + a^2b + \int_0^c x^2 dx \right) + \frac{kP}{GF} (a+c) + \frac{Pa^2c}{GI_t} = \\ = P \left\{ \frac{1}{E} \left[ \frac{b}{F} + \frac{1}{I} \left( \frac{a^3}{3} + a^2b + \frac{c^3}{3} \right) \right] + \frac{1}{G} \left[ \frac{k}{F} (a+c) + \frac{a^2c}{I_t} \right] \right\}.$$

**Ejemplo 94.** Dado;  $P$ ,  $\rho$ ,  $E$  e  $I$ , y una barra de pequeña curvatura (fig. 172,  $a$ ).

Determinar  $\delta_C$ , desplazamiento vertical de la sección  $C$ .

*Resolución.* Para no alterar la simetría del sistema respecto al eje vertical que pasa por el punto  $E$ , aplicamos  $P_F = 1$  en las secciones  $C$  y  $D$  (fig. 172,  $b$ ) y analizamos solamente la mitad del sistema.

En las secciones transversales arbitrarias determinadas por los ángulos  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$ , los momentos flectores serán: los originados por las fuerzas  $P$

$$M_I = P\rho(1 - \cos \varphi_1); \quad M_{II} = -P\rho;$$

los originados por las fuerzas  $P_F = 1$ ;

$$\bar{M}_I = -\rho(1 - \cos \varphi_1), \quad \bar{M}_{II} = -\rho.$$

Por la fórmula (189) se obtiene el desplazamiento que se busca,

$$\delta_C = \delta_D = \frac{P}{EI} \left( \int_0^{\pi/2} M_I \bar{M}_I d\varphi_1 + \int_0^{\pi/2} M_{II} \bar{M}_{II} d\varphi_2 \right) = \\ = \frac{P\rho^3}{EI} \left[ \int_0^{\pi/2} (1 - \cos \varphi_1)^2 d\varphi_1 + \int_0^{\pi/2} d\varphi_2 \right] = \\ = \left( \frac{5}{4} \pi - 2 \right) \frac{P\rho^3}{EI} \approx 1,927 \frac{P\rho^3}{EI}.$$

**Ejemplo 95.** Dado:  $q$ , intensidad de la carga distribuida uniformemente sobre la horizontal,  $\rho$ ,  $P = 2q\rho$ ,  $E$  e  $I$  (fig. 173, a).

Determinar  $\delta$ , desplazamiento del apoyo móvil.

*Resolución.* De las ecuaciones de la estática para el sistema dado se obtiene,

$$B_x = 4q\rho; \quad A_y = 4q\rho; \quad B_y = 2q\rho.$$

Los momentos flectores en los diversos tramos del sistema corres-

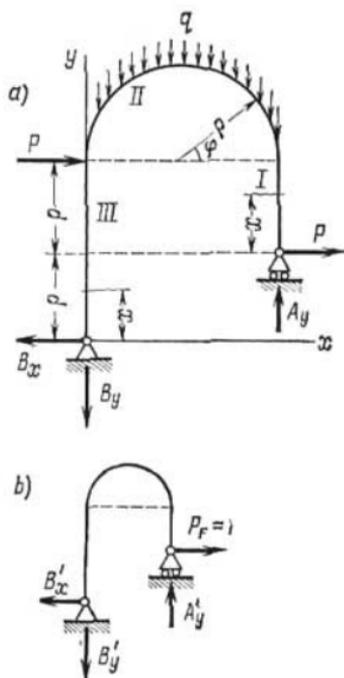


Fig. 173

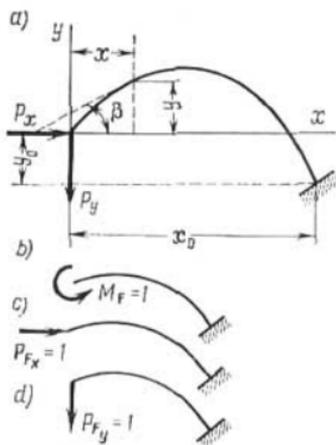


Fig. 174

pondientes a las fuerzas dadas serán,

$$M_I = Px = 2q\rho x; \quad M_{II} = -P\rho(1 + \operatorname{sen} \varphi) - A_y\rho(1 - \operatorname{cos} \varphi) + \\ + \frac{q\rho^2}{2}(1 - \operatorname{cos} \varphi)^2 = \frac{q\rho^2}{2}(\operatorname{cos}^2 \varphi + 6 \operatorname{cos} \varphi - 4 \operatorname{sen} \varphi - 11);$$

$$M_{III} = B_x x = 4q\rho x.$$

De las ecuaciones de la estática para el sistema secundario (fig. 173, b) obtendremos,

$$B'_x = 1, \quad A'_y = \frac{1}{2}, \quad B'_y = \frac{1}{2}.$$

resultando para los momentos flectores en los tramos del mismo sistema,

$$\begin{aligned}\overline{M}_I = x; \quad \overline{M}_{II} &= -\rho(1 + \operatorname{sen} \varphi) - \frac{1}{2} \rho(1 - \cos \varphi) = \\ &= \frac{\rho}{2}(\cos \varphi - 2 \operatorname{sen} \varphi - 3); \quad \overline{M}_{III} = x.\end{aligned}$$

Por la fórmula (189) hallamos el desplazamiento  $\delta$ , obteniendo,

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{1}{EI} \left[ 2q\rho \int_0^{\rho} x^2 dx + \frac{q\rho^4}{4} \int_0^{\pi} (\cos^2 \varphi + 6 \cos \varphi - 4 \operatorname{sen} \varphi - 11) \times \right. \\ &\quad \left. \times (\cos \varphi - 2 \operatorname{sen} \varphi - 3) d\varphi + 4q\rho_0 \int_0^{2\rho} x^2 dx \right] = \\ &= \frac{q\rho^4}{EI} \left[ \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \left( \frac{3}{2} \pi + 64 - \frac{4}{3} + 4\pi + 33\pi \right) + \frac{32}{3} \right] = \\ &= \frac{q\rho^4}{EI} \left( 27 + \frac{77}{8} \pi \right) \approx 57,24 \frac{q\rho^4}{EI}.\end{aligned}$$

**Ejemplo 96.** Dado:  $P_x$ ,  $P_y$ ,  $s$ , longitud del eje geométrico de la barra encorvada según una curva arbitraria,  $E$  y  $I$  (fig. 174, a).

Determinar el ángulo de giro  $\theta$ , los desplazamientos horizontal  $\delta_x$  y vertical  $\delta_y$  de la sección en la que están aplicadas las fuerzas  $P_x$  y  $P_y$ .

*Resolución.* En una sección transversal cualquiera de la barra de coordenadas del centro de gravedad  $x$  e  $y$  y de ángulo  $\beta$  de inclinación de la tangente al eje  $x$ , los momentos flectores y los esfuerzos axiales tienen los valores siguientes: bajo la acción de las fuerzas dadas  $P_x$  y  $P_y$  (fig. 174, a),

$$M = P_{xy} + P_y x, \quad N = -P_x \cos \beta + P_y \operatorname{sen} \beta;$$

bajo la acción de  $M_F = 1$  (fig. 174, b),  $\overline{M} = 1, \overline{N} = 0$ ,

bajo la acción de  $P_{F_x} = 1$  (fig. 174, c),  $\overline{M} = y, \overline{N} = -\cos \beta$ ,

y bajo la acción de  $P_{F_y} = 1$  (fig. 174, d),  $\overline{M} = x, \overline{N} = \operatorname{sen} \beta$ .

Por la fórmula (189) obtendremos,

$$\theta = \frac{1}{EI} \left( P_x \int_0^s y ds + P_y \int_0^s x ds \right) = \frac{1}{EI} (P_x S_x + P_y S_y),$$

siendo  $S_x = \int_0^s y ds$  y  $S_y = \int_0^s x ds$  los momentos estáticos del arco  $s$  respecto a los ejes  $x$  e  $y$ ;

$$\delta_x = \frac{1}{EI} \left( P_x \int_0^s y^2 ds + P_y \int_0^s xy ds \right) + \frac{1}{EF} \left( P_x \int_0^s \cos^2 \beta ds - \right. \\ \left. - P_y \int_0^s \operatorname{sen} \beta \cos \beta ds \right) = \frac{1}{EI} (P_x I_x + P_y I_{xy}) + \\ + \frac{1}{EF} \left( P_x \int_0^s \cos^2 \beta ds - \frac{1}{2} P_y \int_0^s \operatorname{sen} 2\beta ds \right),$$

donde  $I_x = \int_0^s y^2 ds$  y  $I_{xy} = \int_0^s xy ds$  son respectivamente el momento de inercia lineal y el producto de inercia del arco  $s$  respecto al eje  $x$  y a los ejes  $xy$ ;

$$\delta_y = \frac{1}{EI} \left( P_x \int_0^s yx ds + P_y \int_0^s x^2 ds \right) + \\ + \frac{1}{EF} \left( -P_x \int_0^s \cos \beta \operatorname{sen} \beta ds + P_y \int_0^s \operatorname{sen}^2 \beta ds \right) = \\ = \frac{1}{EI} (P_x I_{xy} + P_y I_y) + \frac{1}{EF} \left( -\frac{P_x}{2} \int_0^s \operatorname{sen} 2\beta ds + P_y \int_0^s \operatorname{sen}^2 \beta ds \right),$$

siendo  $I_y = \int_0^s x^2 ds$  el momento de inercia lineal del arco  $s$  respecto al eje  $y$ .

Veamos la barra de pequeña curvatura cuyo eje geométrico tiene configuración parabólica  $y = -\frac{x^2}{2a}$ ;  $P_x = 0$  y  $P_y = P$  (fig. 175).

Puesto que

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{a} \quad \text{y} \quad ds = \frac{dx}{a} \sqrt{x^2 + a^2}$$

resulta,

$$S_y = \frac{1}{a} \int_0^a x \sqrt{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \left| \frac{1}{3} \sqrt{(a^2 + x^2)^3} \right|_0^a = \frac{a^2}{3} (2\sqrt{2} - 1);$$

$$I_{xy} = -\frac{1}{2a^2} \int_0^a x^3 \sqrt{a^2 + x^2} dx =$$

$$= -\frac{1}{2a^2} \left| \frac{1}{5} \sqrt{(a^2 + x^2)^5} - \frac{a^2}{3} \sqrt{(a^2 + x^2)^3} \right|_0^a = \frac{a^3}{15} (\sqrt{2} + 1);$$

$$I_y = \frac{1}{a} \int_0^a x^2 \sqrt{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \left| \frac{x}{4} \sqrt{a^2 + x^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{a}{8} [x \sqrt{a^2 + x^2} + a^2 \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})] \right|_0^a =$$

$$= \frac{a^3}{8} \left( 3\sqrt{2} + \ln \frac{1}{\sqrt{2} + 1} \right).$$

Introduciendo los valores obtenidos en las fórmulas que deter-

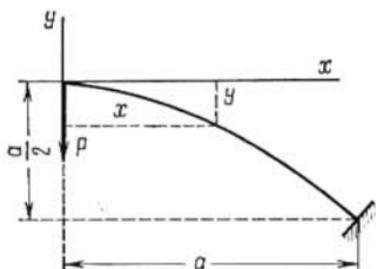


Fig. 175

minan  $\theta$ ,  $\delta_x$  y  $\delta_y$  del ejemplo 96, obtendremos,

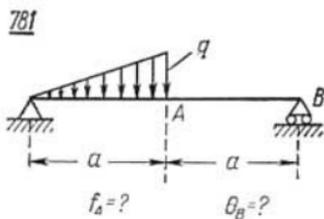
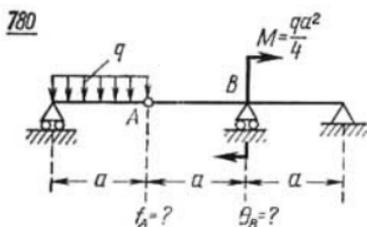
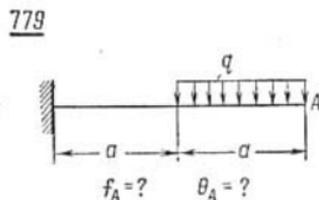
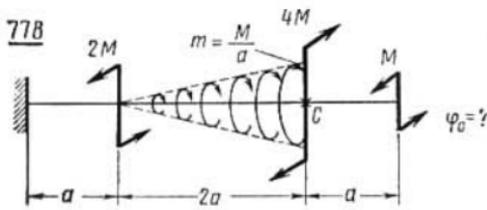
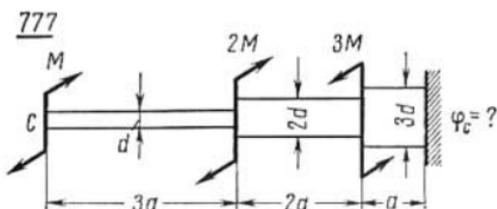
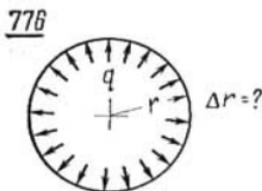
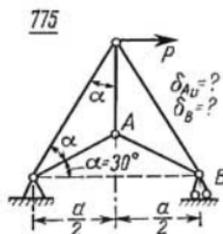
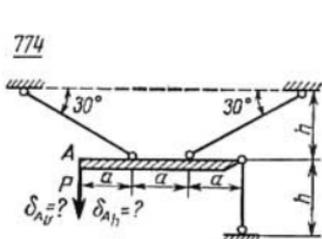
$$\theta = \frac{PS_y}{EI} = \frac{2\sqrt{2} - 1}{3} \cdot \frac{Pa^2}{EI} \approx 0,609 \frac{Pa^2}{EI};$$

$$\delta_x = \frac{PI_{xy}}{EI} = -\frac{\sqrt{2} + 1}{15} \cdot \frac{Pa^3}{EI} \approx -0,161 \frac{Pa^3}{EI};$$

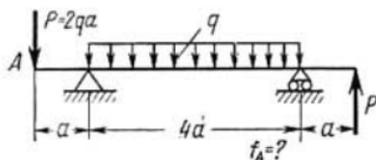
$$\delta_y = \frac{PI_y}{EI} = \frac{1}{8} \left( 3\sqrt{2} + \ln \frac{1}{\sqrt{2} + 1} \right) \frac{Pa^3}{EI} \approx 0,432 \frac{Pa^3}{EI}.$$

**Problemas 774-787.** Determinar los desplazamientos generalizados indicados en las figuras.

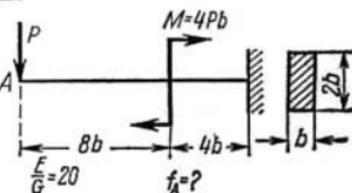
En todos los problemas donde se calculan los desplazamientos generalizados, aquí y en adelante, considérese que las rigideces de las secciones de las barras son conocidas. Si no figuran indicaciones suplementarias, considérese constante el módulo de elasticidad del material y las características geométricas de la sección de todos los elementos del sistema y de todos los tramos de las barras. En los problemas 782 y 783, calcúlese la flecha, considerando también la influencia de la fuerza cortante.



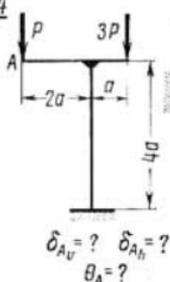
782



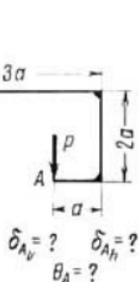
783



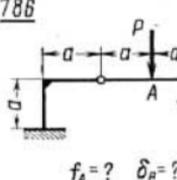
784



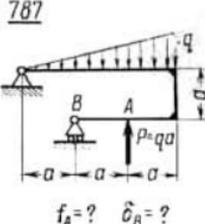
785



786

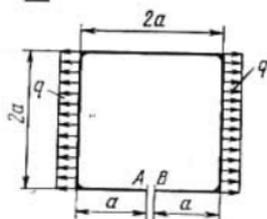


787

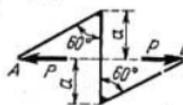


**Problemas 788-790.** Determinar la variación de las distancias  $\delta_{AB}$  entre las secciones A y B.

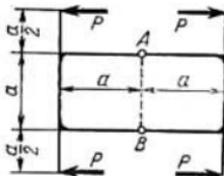
788



789

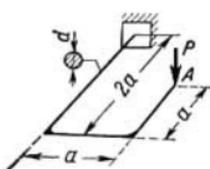


790

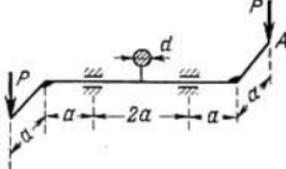


**Problemas 791-793.** Determinar los desplazamientos verticales  $\delta$  de la sección A.

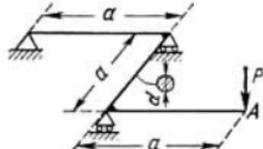
791



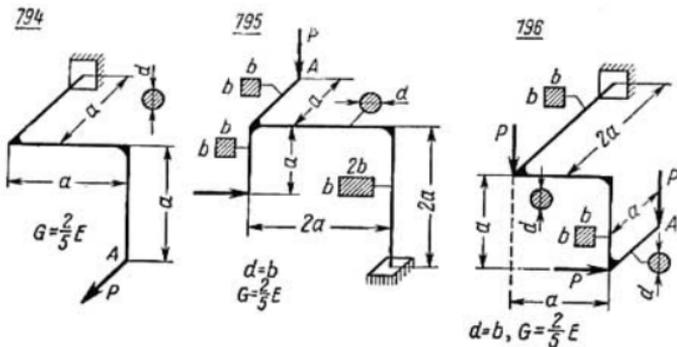
792



793

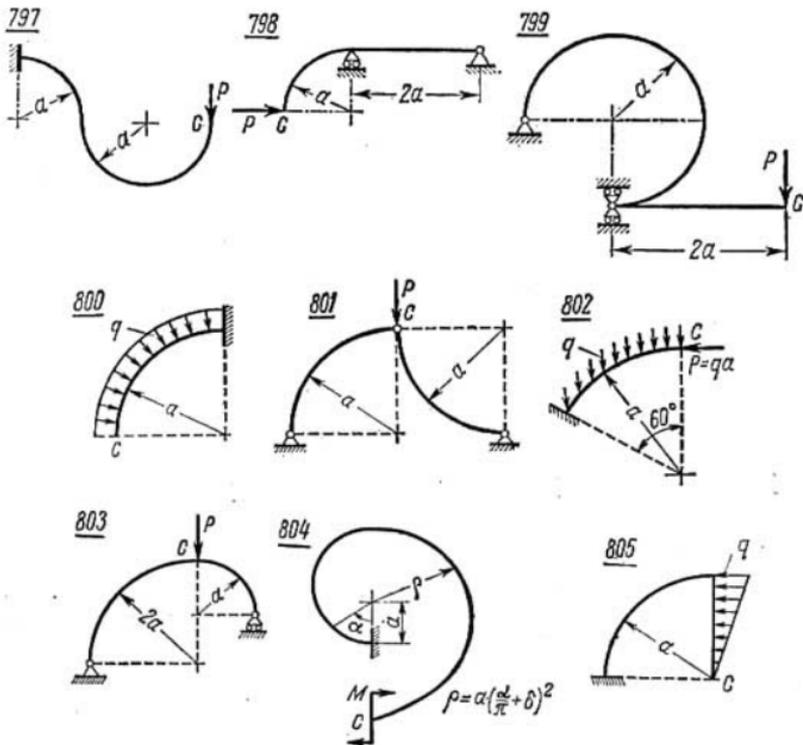


**Problemas 794-796.** Determinar los desplazamientos lineales  $\delta$  de la sección A en dirección a la fuerza P, aplicada a esta sección.

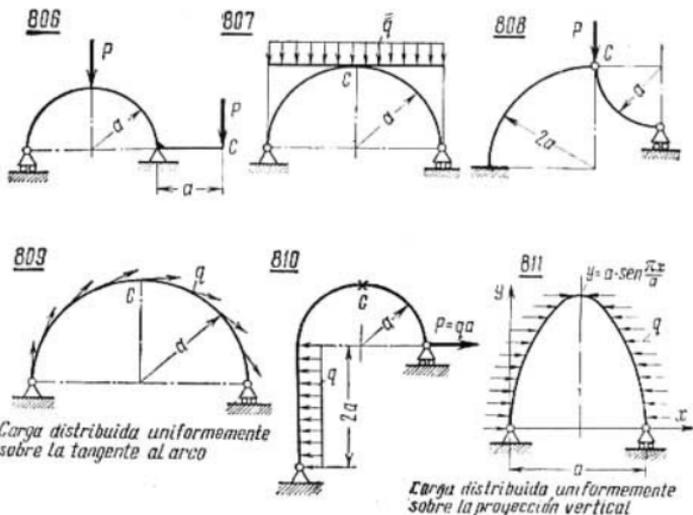


**Problemas 797-805.** Determinar los desplazamientos lineales vertical  $\delta_v$  y horizontal  $\delta_h$ , así como también el desplazamiento angular  $\theta$  de la sección C.

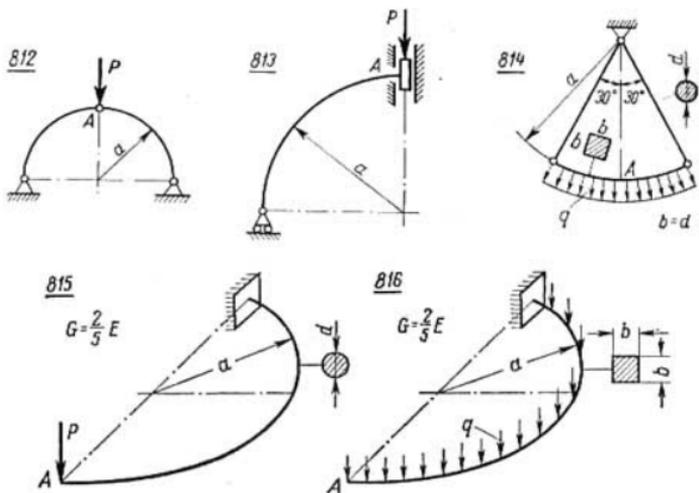
En el problema 801 determinese el ángulo de giro de la sección situada a la izquierda de la articulación.



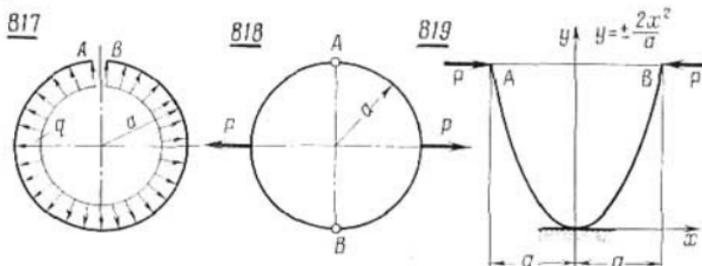
**Problemas 806-811.** Determinar los desplazamientos  $\delta$  del apoyo móvil y los desplazamientos verticales  $\delta_v$  de la sección  $C$ .  
 En problema 811 determinése solamente la magnitud de  $\delta$ .



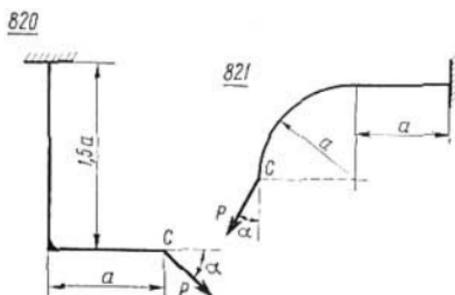
**Problemas 812-816.** Determinar los desplazamientos verticales  $\delta$  de la sección  $A$ .



**Problemas 817-819.** Determinar las variaciones de las distancias  $\delta_{AB}$  entre las secciones  $A$  y  $B$ .



**Problemas 820-821.** Determinar el valor del ángulo  $\alpha$  sabiendo que las secciones  $C$  se desplazan solamente en dirección vertical.



Método de multiplicación de los diagramas. Regla de Vereschaguin

Si la rigidez de la sección transversal de la barra en el tramo es constante, entonces cada integral de la fórmula de Maxwell — Mohr (185) puede calcularse como el producto del área  $\omega$  del diagrama del esfuerzo correspondiente a las fuerzas dadas (fig. 176) por la coordenada  $\xi$  del diagrama del mismo esfuerzo pero debido a la fuerza ficticia generalizada unitaria (este diagrama debe ser forzosamente lineal) situada (la coordenada) enfrente del centro de gravedad del primer diagrama.

Prácticamente, esta regla de Vereschaguin se emplea para el cálculo de los desplazamientos lineales y angulares, en sistemas constituidos por vigas y pórticos, originados por los momentos flectores. La fórmula que determina el desplazamiento se escribe en la forma siguiente:

$$\delta = \sum \frac{\omega \xi}{EI}, \quad (191)$$

donde la suma se lleva a cabo para todos los tramos del sistema.

Los tramos se deben diferenciar no solamente por la carga que sobre ellos actúa, sino también por los signos de  $M$  o  $\bar{M}$  y por la sección transversal, constante en cada tramo. En el caso de diagramas  $M$  y  $\bar{M}$  de igual signo el producto  $\omega\xi > 0$  y en el de diagramas de diferente signo,  $\omega\xi < 0$ .

Por lo tanto, la posición de los diagramas  $M$  y  $\bar{M}$  respecto a las líneas de valores nulos en los tramos puede ser cualquiera, pero ateniéndose a que las partes situadas al mismo lado tengan el mismo signo.

Si los dos diagramas  $M$  y  $\bar{M}$  son rectilíneos, entonces es igual en cual de los dos se obtiene el área  $\omega$  y en cual de ellos la coordenada  $\xi$ .

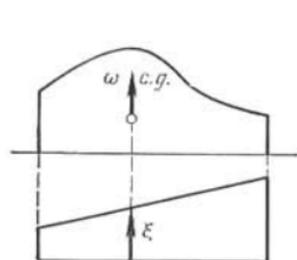


Fig. 176

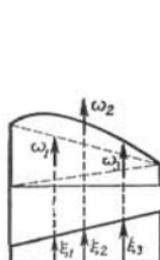


Fig. 177

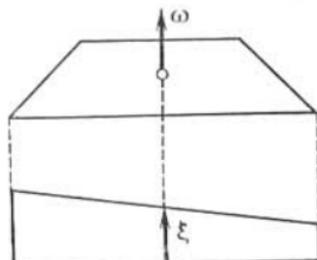


Fig. 178

El diagrama de  $M$  de configuración compleja, se puede descomponer en partes, hallando después las áreas  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$  (fig. 177) y los centros de gravedad. Bajo cada centro de gravedad de cada parte se debe hallar la correspondiente ordenada  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$ . Entonces,

$$\omega\xi = \omega_1\xi_1 + \omega_2\xi_2 + \omega_3\xi_3 + \dots$$

En aquellos casos cuando el diagrama de  $\bar{M}$  está representado por una misma recta en varios tramos de la barra (fig. 178), resulta posible multiplicar el área  $\omega$  de todo el diagrama de  $M$  por la correspondiente coordenada  $\xi$  del diagrama de  $\bar{M}$ .

Si a lo largo del tramo de la barra varía la sección transversal, entonces se calcula no el área real  $\omega$  del gráfico del momento flector  $M$ , sino el área reducida,

$$M_r = M \frac{I_0}{I},$$

siendo  $I_0$  el momento de inercia de la sección constante al que convencionalmente se reduce el tramo y  $I$  el momento de inercia de la sección variable.

**Ejemplo 97.** Dado:  $P$ ,  $a$ ,  $F$  e  $I$  (fig. 179, a).

Determinar  $\delta_A$ , desplazamiento horizontal de la sección  $A$ .

*Resolución.* En la figura 179, c y d están representados los diagramas de los momentos flectores: el diagrama rayado corresponde

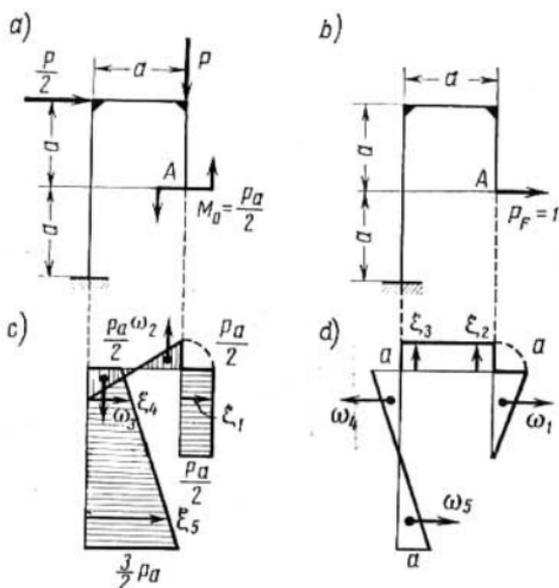


Fig. 179

a las fuerzas dadas y el otro, a la carga ficticia  $P_F = 1$  aplicada a la sección  $A$  (fig. 179, b) y dirigida horizontalmente hacia la derecha.

Puesto que,

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{a^2}{2}; & \xi_1 &= \frac{Pa}{2}; & \omega_2 &= \frac{Pa^2}{8}; & \xi_2 &= a; \\ \omega_3 &= \frac{Pa^2}{8}; & \xi_3 &= a; & \omega_4 &= \frac{a^2}{2}; & \xi_4 &= \frac{2}{3} Pa; \\ \omega_5 &= \frac{a^2}{2}; & \xi_5 &= \frac{4}{3} Pa, \end{aligned}$$

teniendo en cuenta la convención sobre los signos, obtendremos por la fórmula (191) el desplazamiento que se busca,

$$\delta_A = \frac{1}{EI} (\omega_1 \xi_1 + \omega_2 \xi_2 - \omega_3 \xi_3 - \omega_4 \xi_4 + \omega_5 \xi_5) = \frac{7}{12} \cdot \frac{Pa^3}{EI}.$$

**Ejemplo 98.** Dado:  $P$ ,  $a$ ,  $F$  e  $I$  (fig. 180, a).

Determinar  $\theta_A$  y  $f_C$ .

*Resolución.* En la figura 180, b está representado el diagrama  $M$  correspondiente a la carga dada  $P$ .

En la figura 180, c, el diagrama  $\bar{M}$  correspondiente al momento ficticio  $M_F = 1$  aplicado a la sección  $A$  y dirigido según las mane-

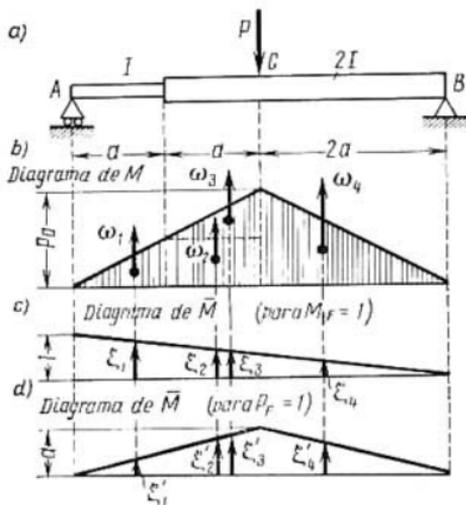


Fig. 180

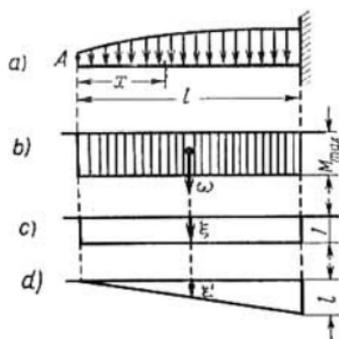


Fig. 181

cillas del reloj y en la figura 180, d, el diagrama  $\bar{M}$  correspondiente a la fuerza ficticia  $P_F = 1$  aplicada a la sección  $C$  y dirigida verticalmente hacia abajo.

Como

$$\omega_1 = \frac{Pa^2}{4}, \quad \xi_1 = \frac{5}{6}; \quad \xi'_1 = \frac{a}{3}; \quad \omega_2 = \frac{Pa^2}{2};$$

$$\xi_2 = \frac{5}{8}, \quad \xi'_2 = \frac{3}{4}a; \quad \omega_3 = \frac{Pa^2}{4}; \quad \xi_3 = \frac{7}{12};$$

$$\xi_3 = \frac{5}{6}a; \quad \omega_4 = Pa^2, \quad \xi_4 = \frac{1}{3}; \quad \xi'_4 = \frac{2}{3}a,$$

(teniendo en cuenta los diferentes momentos de inercia de las secciones en este tramo), por la fórmula (191) obtendremos para los despla-

zamientos en cuestión,

$$\theta_A = \frac{1}{EI} \left[ \omega_1 \xi_1 + \frac{1}{2} (\omega_2 \xi_2 + \omega_3 \xi_3 + \omega_4 \xi_4) \right] = \frac{29}{48} \frac{Pa^2}{EI};$$

$$f_C = \frac{1}{EI} \left[ \omega_1 \xi_1' + \frac{1}{2} (\omega_2 \xi_2' + \omega_3 \xi_3' + \omega_4 \xi_4') \right] = \frac{17}{24} \frac{Pa^3}{EI}.$$

**Ejemplo 99.** Dado:  $l$ ,  $E$ ,  $[\sigma]$  y una viga de igual resistencia de altura constante  $h$  (fig. 181, *a*).

Determinar  $\theta_A$  y  $f_A$ .

*Resolución.* De las propiedades de la viga de igual resistencia se deduce,

$$W_x = \frac{I_x}{\frac{h}{2}} = \frac{M_x}{[\sigma]}.$$

En la sección peligrosa,

$$W = \frac{2I}{h} = \frac{M_{\max}}{[\sigma]}.$$

Si convencionalmente reducimos la viga a una sección constante, entonces  $I_0 = I$  y para el momento flector reducido obtendremos,

$$M_r = M_x \frac{I_0}{I_x} = M_{\max} = \text{const.}$$

El diagrama del momento reducido (fig. 181, *b*) está representado por un rectángulo de altura,

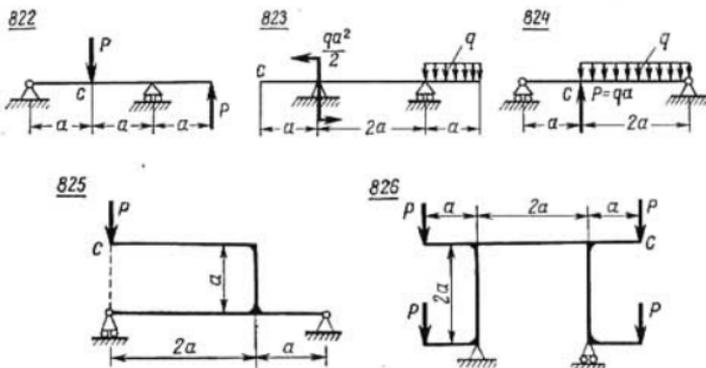
$$M_{\max} = \frac{2I[\sigma]}{h}.$$

En la figura 181, *c* y *d* se dan los diagramas de  $M$  correspondientes a  $M_F = 1$  y  $P_F = 1$  aplicados en la sección  $A$  y dirigidos  $M_F = 1$  en contra de las manecillas del reloj y  $P_F = 1$ , verticalmente hacia abajo.

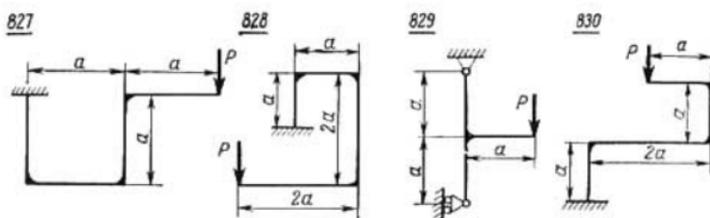
Como  $\omega = M_{\max} l = \frac{2I[\sigma]}{h} l$ ;  $\xi = 1$  y  $\xi' = \frac{1}{2}$ , los desplazamientos que se buscan serán,

$$\theta_A = \frac{\omega \xi}{EI} = \frac{M_{\max} l}{EI} = \frac{2[\sigma] l}{Eh}; \quad f_A = \frac{\omega \xi'}{EI} = \frac{M_{\max} l^2}{2EI} = \frac{[\sigma] l^2}{Eh}.$$

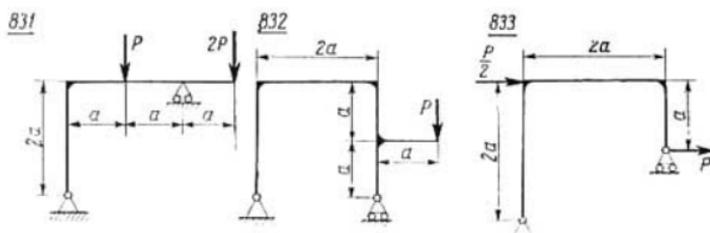
**Problemas 822-826.** Determinar las flechas  $f$  y los ángulos de giro  $\theta$  de la sección  $C$ .



**Problemas 827-830.** Determinar los desplazamientos verticales  $\delta_v$  y horizontales  $\delta_h$  de la sección de aplicación de la fuerza  $P$ .



**Problemas 831-833.** Determinar los desplazamientos  $\delta$  del apoyo articulado móvil.



## § 2. Cálculo de sistemas hiperestáticos

### Principio del trabajo mínimo

El cálculo de los sistemas elásticos hiperestáticos se puede realizar basándose en el principio del trabajo mínimo. Según este principio los valores de las incógnitas superfluas constituidas por fuerzas generalizadas son tales que realizan el trabajo mínimo posible.

La resolución de los problemas se realiza según el esquema siguiente.

El sistema hiperestático se libra de las ligaduras superfluas hasta convertirse en isostático y cinemáticamente invariable, obteniendo el así llamado *sistema base*.

Para que el sistema base sea equivalente al dado, el primero se solicita por todas las fuerzas  $P_i$  que actúan sobre el sistema dado, más todas las fuerzas generalizadas  $X_i$  superfluas desconocidas que constituyen las incógnitas.

Se determina después la energía potencial de la deformación elástica del sistema base en función de segundo orden de  $P_i$  y  $X_i$ .

Puesto que los desplazamientos generalizados correspondientes a las fuerzas generalizadas superfluas desconocidas son iguales a cero, se plantean las ecuaciones siguientes,

$$\frac{\partial U}{\partial X_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 2, \dots) \quad (192)$$

De estas ecuaciones se determinan todas las fuerzas generalizadas superfluas desconocidas  $X_i$ .

Las ecuaciones (192) constituyen las condiciones del mínimo de la energía potencial de la deformación elástica del sistema en función de las fuerzas generalizadas superfluas desconocidas.

En el caso de sistemas constituidos por barras las ecuaciones del principio del trabajo mínimo pueden ser expresadas por la fórmula de Maxwell — Mohr.

Si el sistema consta de elementos rectilíneos sometidos a tracción, compresión, flexión recta y torsión, entonces cada ecuación (192) se podrá escribir en la forma siguiente,

$$\Sigma \int \frac{N\bar{N}}{EF} \bar{a}x + \Sigma \int \frac{M\bar{M}}{EI} dx + \Sigma k \int \frac{Q\bar{Q}}{GF} dx + \Sigma \int \frac{M_t\bar{M}_t}{GI_{tor}} dx = 0 \quad (193)$$

siendo  $N$ ,  $M$ ,  $Q$  y  $M_t$  los esfuerzos correspondientes en una sección, cualquiera de cada tramo del sistema base equivalente, originados por todas las fuerzas dadas  $P_i$  y las fuerzas generalizadas superfluas desconocidas  $X_i$ ;

$\bar{N}$ ,  $\bar{M}$ ,  $\bar{Q}$  y  $\bar{M}_t$  los mismos esfuerzos en el sistema base pero originados exclusivamente por una de las fuerzas generalizadas superfluas desconocidas  $X_i = 1$ .

Así, pues, para resolver un problema hiperestático de grado de hiperestaticidad  $n$  se deben analizar  $n + 1$  estados: el estado básico equivalente correspondiente a la acción de las fuerzas  $P_i$  y  $X_i$  y  $n$  auxiliares cada uno de los cuales corresponde a la acción de una de las fuerzas  $X_i = 1$ .

En el caso de sistemas planos constituidos por barras articuladas con fuerzas aplicadas en los nudos, las ecuaciones (193) se simplificarán considerablemente,

$$\Sigma \int \frac{N\bar{N}}{EF} dx = 0. \quad (194)$$

En el caso de sistemas planos constituidos por vigas y pórticos en los que el valor de los esfuerzos axiales  $N$  y de las fuerzas cortantes  $Q$  es pequeño, se puede emplear la ecuación simplificada,

$$\Sigma \int \frac{M\bar{M}}{EI} dx = 0. \quad (195)$$

En los sistemas cuyos elementos están sometidos a torsión exclusivamente,

$$\Sigma \int \frac{M_t\bar{M}_t}{GI_{tor}} dx = 0. \quad (196)$$

En las barras hiperestáticas planas de curvatura pequeña,

$$\Sigma \int \frac{M\bar{M}}{EI} ds = 0. \quad (197)$$

Al precisar el cálculo, las ecuaciones se deben plantear teniendo en cuenta también los esfuerzos axiales,

$$\Sigma \int \frac{N\bar{N}}{EF} ds + \Sigma \int \frac{M\bar{M}}{EI} ds = 0. \quad (198)$$

La eliminación de las ligaduras superfluas en el sistema estáticamente indeterminado debe realizarse de manera tal que el sistema base resulte lo más simple y cómodo posible para el cálculo.

Los sistemas geoméricamente simétricos solicitados por cargas simétricas (fig. 182, *a*) o antisimétricas (fig. 183, *a*) conviene librar de las ligaduras superfluas, cortándolo por el plano de simetría. Esto conduce a la disminución del número de fuerzas generalizadas superfluas desconocidas y sólo permite analizar una de las partes seccionadas del sistema (fig. 182, *b* y fig. 183, *b*).

En la sección que coincide con el plano de simetría, en el caso de carga simétrica, desaparecen los esfuerzos antisimétricos  $Q$  y  $M_t$  y, en el caso de carga antisimétrica, los esfuerzos simétricos  $N$  y  $M$  (fig. 184).

En los elementos rectilíneos del sistema, las integrales que figuran en la ecuación (193) pueden calcularse multiplicando los diagramas.

Si la hiperestaticidad del sistema ha sido vencida, entonces el desplazamiento generalizado de cualquier sección se puede determi-

nar, analizando el sistema dado o cualquier sistema base equivalente posible. Conviene escoger el sistema base de tal manera que la deter-

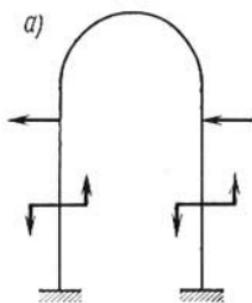


Fig. 182

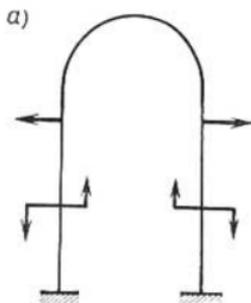


Fig. 183

minación de los esfuerzos originados por la fuerza generalizada ficticia unitaria resulte lo más fácil posible.

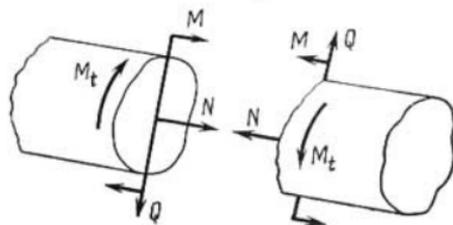


Fig. 184

**Ejemplo 100.** Dado:  $P = 8$  tf,  $a = 1$  m,  $\beta_1 = 30^\circ$ ,  $\beta_2 = 60^\circ$ ,  
 $E_I = E_{II} = E_{III} = E = 2 \cdot 10^6$  kgf/cm<sup>2</sup> (fig. 185, a).  
 Determinar  $\sigma_I, II, III$  y  $\delta_A$ .

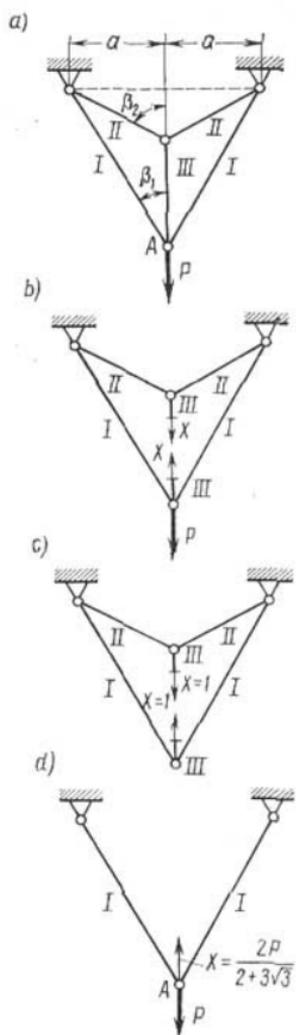


Fig. 185

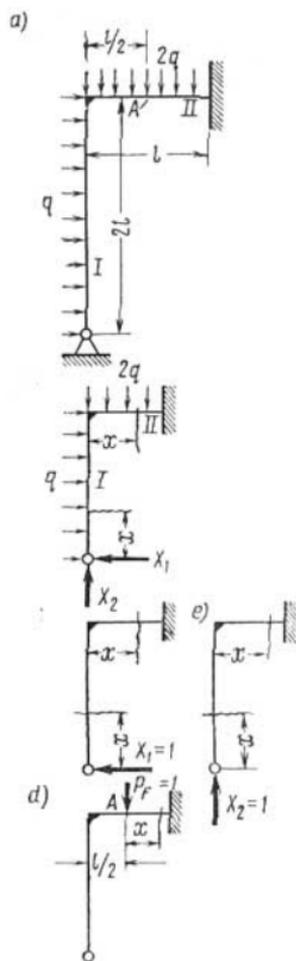


Fig. 186

*Resolución.* Puesto que los elementos del sistema dado tienen igual rigidez de la sección y están sometidas solamente a esfuerzos axiales, que son constantes a lo largo de las barras, para vencer la hiperstaticidad recurrimos a la fórmula simplificada (194)

$$\sum N \bar{N} l = 0. \quad (a)$$

Escogemos en calidad de sistema base equivalente el representado la en figura 185, b. De las ecuaciones de la estática se obtiene para el sistema,

$$N_I = \frac{P - X}{2 \cos \beta_1} = \frac{P - X}{\sqrt{3}}, \quad N_{II} = \frac{X}{2 \cos \beta_2} = X, \quad N_{III} = X.$$

De las ecuaciones de la estática se halla para el sistema auxiliar (fig. 185, c)

$$\bar{N}_I = -\frac{1}{2 \cos \beta_1} = -\frac{1}{\sqrt{3}}; \quad \bar{N}_{II} = \frac{1}{2 \cos \beta_2} = 1, \quad \bar{N}_{III} = 1.$$

Teniendo en cuenta que  $l_I = \frac{a}{\operatorname{sen} \beta_1} = 2 \text{ m}$ ,  $l_{II} = \frac{a}{\operatorname{sen} \beta_2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ m}$ ,

$$l_{III} = a(\operatorname{ctg} \beta_1 - \operatorname{ctg} \beta_2) = \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ m},$$

transformamos la ecuación (a) para la determinación del esfuerzo superfluo desconocido, como sigue,

$$\begin{aligned} 2N_I \bar{N}_I l_I + 2N_{II} \bar{N}_{II} l_{II} + N_{III} \bar{N}_{III} l_{III} &= -2 \frac{P - X}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 2 + \\ &+ 2X \frac{2}{\sqrt{3}} + X \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3} [-2P + (2 + 3\sqrt{3})X] = 0, \end{aligned}$$

de donde se obtiene

$$X = N_{III} = N_{II} = \frac{2P}{2 + 3\sqrt{3}} \approx 0,278P$$

y

$$N_I = \frac{P - \frac{2P}{2 + 3\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} = \frac{3P}{2 + 3\sqrt{3}} \approx 0,417P.$$

Las tensiones normales en las secciones transversales del sistema serán,

$$\begin{aligned} \sigma_{II} = \sigma_{III} = \frac{X}{F} &\approx \frac{0,278 \cdot 8 \cdot 10^3}{2} = 1112 \text{ kgf/cm}^2; \quad \sigma_I = \frac{N_I}{F} \approx \\ &\approx \frac{0,417 \cdot 8 \cdot 10^3}{2} = 1668 \text{ kgf/cm}^2. \end{aligned}$$

Para determinar el desplazamiento vertical  $\delta_A$  del nudo  $A$  empleamos el sistema isostático de la figura 185,  $d$ .

Puesto que en este sistema  $N_I = \frac{3P}{2+3\sqrt{3}}$  y a la carga ficticia unitaria  $P_F = 1$  aplicada al nudo  $A$  en dirección vertical hacia abajo corresponde  $N_I = \frac{1}{2 \cos \beta_1} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ , obtendremos para el desplazamiento que se busca

$$\delta_A = \frac{2}{EF} N_I \bar{N}_I l_I = \frac{2}{EF} \cdot \frac{3P}{2+3\sqrt{3}} \frac{2a}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot 0,417 \cdot 8 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^2}{2 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 1,732} \approx 0,19 \text{ cm.}$$

**Ejemplo 101.** Dado:  $q$ ,  $l$ ,  $E$  e  $I$  (fig. 186,  $a$ ).

Determinar  $f_A$ .

**Resolución.** Puesto que las rigideces de las secciones transversales de los tramos vertical y horizontal del semipórtico son iguales, para vencer la hiperestaticidad del sistema recurrimos a la ecuación (195)

$$\sum \int M \bar{M} dx = 0. \quad (b)$$

Los momentos flectores  $M_I$  y  $M_{II}$  en los tramos del sistema base equivalente (fig. 186,  $b$ ),  $\bar{M}_I$  y  $\bar{M}_{II}$  en los tramos del sistema auxiliar (fig. 186,  $c$  y  $d$ ) son respectivamente,

$$M_I = X_1 x - \frac{q x^2}{2}, \quad M_{II} = X_1 2l + X_2 x - 2q l^2 - q x^2,$$

$$\bar{M}_I = x; \quad \bar{M}_{II} = 2l, \quad \bar{M}_J = 0, \quad \bar{M}_{JJ} = x.$$

Planteamos dos ecuaciones (b)

$$\int_0^{2l} \left( X_1 x - \frac{q x^2}{2} \right) x dx + 2l \int_0^l (X_1 2l + X_2 x - 2q l^2 - q x^2) dx = 0,$$

$$\int_0^l (X_1 2l + X_2 x - 2q l^2 - q x^2) x dx = 0.$$

Una vez calculadas las integrales obtendremos

$$\left. \begin{aligned} 20X_1 + 3X_2 - 20ql &= 0, \\ 12X_1 + 4X_2 - 15ql &= 0, \end{aligned} \right\}$$

de donde se halla,

$$X_1 = \frac{35}{44} ql; \quad X_2 = \frac{15}{11} ql.$$

Para determinar la flecha  $f_A$  de la sección  $A$  calculamos  $M$  en el sistema base equivalente y  $\bar{M}$  en el sistema auxiliar (fig. 186,  $e$ ) en la sección que se encuentra a la derecha de la sección  $A$  a una distancia  $x$ ,

$$M = X_1 2l + X_2 \left( \frac{l}{2} + x \right) - 2ql^2 - q \left( \frac{l}{2} + x \right)^2 = \\ = -\frac{q}{44} (40x^2 - 16lx - l^2), \\ \bar{M} = -x.$$

Por la fórmula (188) hallamos la flecha en cuestión,

$$f_A = -\frac{q}{44EI} \int_0^{l/2} (44x^2 - 16lx - l^2) x dx = -\frac{5ql^4}{2112EI}.$$

**Ejemplo 102.** Dado:  $P$ ,  $\rho$ ,  $E$  e  $I_{II} = 2I_I$  de una barra de curvatura pequeña (fig. 187,  $a$ ).

Determinar los desplazamientos horizontal  $\delta_x$  y vertical  $\delta_y$  de la articulación  $A$  y construir los diagramas de los momentos flectores.

*Resolución.* Puesto que las barras son de curvatura pequeña y los módulos de elasticidad longitudinal des sus materiales son iguales, para vencer la hiperestaticidad del sistema recurrimos a la fórmula simplificada (197),

$$\sum \frac{1}{I} \int M \bar{M} ds = 0. \quad (c)$$

Interpretamos como incógnita superflua  $X$  la reacción horizontal en el apoyo articulado. Mediante las ecuaciones de la estática y aprovechando la existencia de la articulación flotante  $A$ , expresamos las reacciones en los apoyos del sistema base equivalente (fig. 187,  $b$ ) a través de la fuerza dada  $P$  y de la incógnita superflua  $X$ . En el sistema auxiliar (fig. 187,  $c$ ) solicitado por la fuerza  $X = 1$ , aparece solamente una reacción horizontal en el empotramiento.

Los momentos flectores en los tramos  $I$  y  $II$  del sistema base equivalente y del sistema auxiliar son respectivamente,

$$M_I = 4P\rho - P2\rho(1 - \cos \varphi) - X2\rho \sin \varphi = 2P\rho(1 + \cos \varphi) - \\ - 2X\rho \sin \varphi, \quad M_{II} = X\rho \sin \varphi, \quad \bar{M}_I = -2\rho \sin \varphi \quad \text{y} \quad \bar{M}_{II} = \rho \sin \varphi.$$

Ya que los elementos de los ejes geométricos de las barras son,

$$ds_I = 2\rho d\varphi, \quad ds_{II} = \rho d\varphi, \quad I_{II} = 2I_I,$$

obtendremos para la ecuación (c),

$$8 \int_0^\pi [X \sin \varphi - P(1 + \cos \varphi)] \sin \varphi d\varphi + \frac{1}{2} X \int_0^\pi \sin^2 \varphi d\varphi = 0,$$

y una vez calculadas las integrales,

$$\frac{17}{4} \pi X - 16P = 0.$$

De aquí hallamos,

$$X = \frac{64}{17\pi} P \approx 1,198P.$$

Para determinar los desplazamientos horizontal  $\delta_x$  y vertical  $\delta_y$  de la articulación  $A$  recurrimos a los sistemas auxiliares representados en las figuras 187,  $d$  y 187,  $e$ .

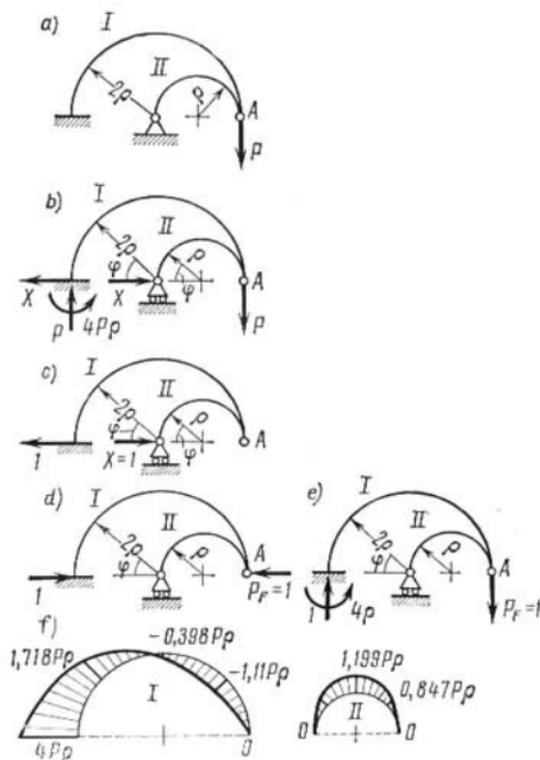


Fig. 187

Teniendo presente que en el tramo II de estos sistemas no surgen esfuerzos, analizamos solamente el tramo I. Los momentos flectores



base, en dirección a la fuerza generalizada superflua desconocida  $i$  (primer subíndice)  $X_i$ ;  $\delta_{ip}$  se debe a la acción de todas las fuerzas generalizadas dadas  $P$ ,  $\delta_{ii}$  y  $\delta_{ih}$  a cada fuerza generalizada superflua desconocida unitaria  $X_i = 1$  ó  $X_h = 1$  indicada por el segundo subíndice.

Todos estos desplazamientos generalizados se pueden obtener por cualquiera de los métodos conocidos o por las tablas, si esto es posible.

Los desplazamientos  $\delta_{ip}$  pueden ser mayores o menores que cero e incluso iguales a cero. Ellos dependen de las fuerzas dadas, de la configuración del sistema y del sistema base escogido.

Los desplazamientos  $\delta_{ii}$  y  $\delta_{ih}$  no dependen de las fuerzas dadas, sino que se determinan plenamente por la configuración del sistema y por las incógnitas superfluas elegidas. Los coeficientes principales  $\delta_{ii}$  son magnitudes positivas y diferentes de cero; los coeficientes auxiliares,  $\delta_{ih} = \delta_{hi}$ , pueden ser mayores, menores o iguales a cero.

Al escoger el sistema base se debe tender a que el mayor número posible de coeficientes auxiliares sea igual a cero. Cuando se trata de sistemas simétricos resulta conveniente eliminar las ligaduras superfluas como esto se indica en la página 337.

Se analiza  $n + 1$  estado del sistema de grado de hiperestaticidad  $n$ : el básico correspondiente a la acción de todas las fuerzas generalizadas dadas y  $n$  auxiliares correspondientes a cada fuerza generalizada superflua desconocida unitaria.

Si el sistema hiperestático se somete solamente a una variación de la temperatura, entonces los términos independientes de las ecuaciones canónicas serán  $\delta_{it}$ , desplazamientos generalizados correspondientes a la fuerza generalizada superflua unitaria  $i$  en el sistema base y originados por la variación de la temperatura. Si sobre el sistema actúan simultáneamente una carga y una variación de la temperatura, entonces los términos independientes de las ecuaciones canónicas serán la suma  $\delta_{ip} + \delta_{it}$ .

Durante el montaje, para tener en cuenta los errores cometidos en la fabricación de los elementos del sistema, se introducen en los términos independientes de las ecuaciones canónicas las magnitudes  $\delta_{i\Delta}$  que expresan los desplazamientos generalizados correspondientes a la fuerza generalizada superflua  $i$  en el sistema base, originados por los errores  $\Delta$  de fabricación.

Se escoge el signo positivo o negativo de estos desplazamientos  $\delta_{it}$  y  $\delta_{i\Delta}$  según coincidan o no las direcciones de los desplazamientos con la dirección admitida para  $X_i$ .

En el caso de sistema de un grado de hiperestaticidad la ecuación canónica del método de las fuerzas será,

$$\delta_{ii}X_i + \delta_{ip} = 0$$

resultando para la fuerza generalizada superflua desconocida,

$$X_1 = -\frac{\delta_{1P}}{\delta_{11}}. \quad (200)$$

Si se calculan sistemas formados por vigas y pórticos de un grado de hiperestaticidad o sistemas de elementos curvilíneos de poca curvatura, en los cuales la influencia de los esfuerzos axiales y de la fuerza cortante es pequeña, entonces

$$\delta_{1P} = \Sigma \int \frac{M\bar{M}}{EI} ds, \quad \delta_{11} = \Sigma \int \frac{\bar{M}^2}{EI} ds$$

y

$$X_1 = -\frac{\Sigma \int \frac{M\bar{M}}{EI} ds}{\Sigma \int \frac{\bar{M}^2}{EI} ds}, \quad (201)$$

siendo  $ds$  un elemento de la longitud del eje geométrico del tramo.

**Ejemplo 103.** Dado:  $P$ ,  $q$  y  $a$  (fig. 188, a).

Calcular el sistema hiperestático considerando solamente la deformación originada por los momentos flectores.

*Resolución.* Escogemos en calidad de incógnita superflua  $X_1$ ,

reacción en el apoyo móvil. Puesto que  $\int \frac{M\bar{M}}{EI} ds \neq 0$  y  $\int \frac{\bar{M}^2}{EI} ds \neq 0$  solamente en el tramo de longitud  $2a$ , y en este tramo del sistema base (fig. 188, b) y del sistema auxiliar (fig. 188, c)  $M = -P(a+x) - \frac{qx^2}{2}$  y  $\bar{M} = x$ , por la fórmula (201) obtendremos,

$$X_1 = \frac{\int_0^{2a} M\bar{M} dx}{\int_0^{2a} \bar{M}^2 dx} = \frac{\int_0^{2a} \left[ P(a+x) + \frac{qx^2}{2} \right] x dx}{\int_0^{2a} x^2 dx} = \frac{\frac{14}{3} Pa^3 + 2qa^4}{\frac{8}{3} a^3} = \frac{1}{4} (7P + 3qa).$$

**Ejemplo 104.** Dado:  $q$ ,  $a$ ,  $E$  e  $I$  (fig. 189, a).

Construir el diagrama de los momentos flectores.

*Resolución.* Para vencer la hiperestaticidad seccionamos el pórtico por la mitad del dintel (fig. 189, b).

El sistema base está representado en la figura 189, c y los sistemas auxiliares con los diagramas de los momentos flectores correspondientes a  $X_1 = 1$ ,  $X_2 = 1$  y  $X_3 = 1$ , en la figura 189, d, e, y f.

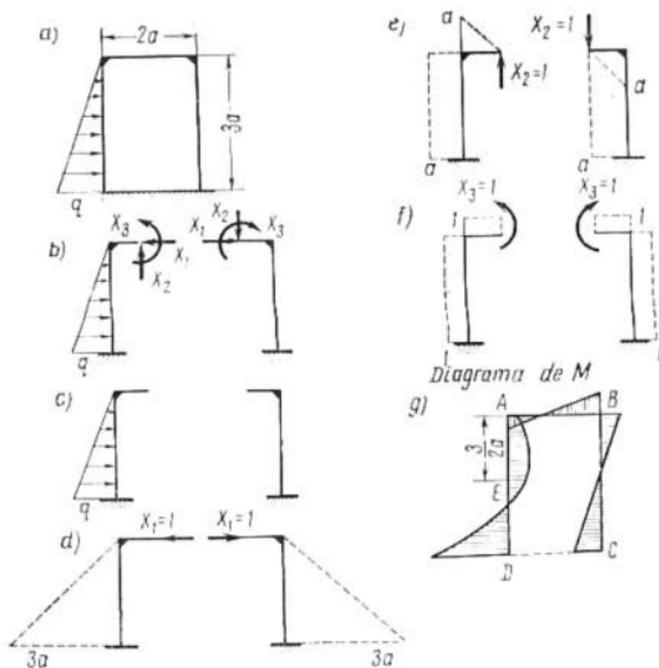


Fig. 189

Puesto que los diagramas de  $\bar{M}$  originados por  $X_1 = 1$  y  $X_3 = 1$  son simétricos, mientras que el diagrama de  $\bar{M}$  debido a  $X_2 = 1$  es antisimétrico, los coeficientes auxiliares  $\delta_{12} = \delta_{21} = 0$ ,  $\delta_{23} = -\delta_{32} = 0$  y entonces las ecuaciones canónicas del método de las fuerzas serán,

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{13}X_3 + \delta_{1p} &= 0, \\ \delta_{22}X_2 + \delta_{2p} &= 0, \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{33}X_3 + \delta_{3p} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Determinamos los coeficientes  $\delta_{11}$ ,  $\delta_{22}$ ,  $\delta_{33}$  y  $\delta_{13} = \delta_{31}$  multiplicando los gráficos correspondientes,

$$EI\delta_{11} = 2 \cdot 3 \cdot a \frac{3}{2} 3a = 18a^3;$$

$$EI\delta_{22} = 2 \left( a \frac{a}{2} \cdot \frac{2}{3} a + a \cdot 3a \cdot a \right) = \frac{20}{3} a^3;$$

$$EI\delta_{33} = 2(1 \cdot a \cdot 1 + 1 \cdot 3a \cdot 1) = 8a;$$

$$EI\delta_{13} = EI\delta_{31} = 2 \cdot 1 \cdot 3a \cdot \frac{1}{2} \cdot 3a = 9a^2.$$

Determinamos los términos independientes por las integrales de Mohr,

$$EI\delta_{1p} = - \int_0^{3a} \frac{qx^3}{18a} x dx = - \frac{27}{10} qa^4;$$

$$EI\delta_{2p} = - \int_0^{3a} \frac{qx^3}{18a} a dx = - \frac{9}{8} qa^4,$$

$$EI\delta_{3p} = - \int_0^{3a} \frac{qx^3}{18a} dx = - \frac{9}{8} qa^3.$$

Una vez introducidos los valores obtenidos en las ecuaciones canónicas y después de ciertas transformaciones hallaremos,

$$\left. \begin{aligned} 20aX_1 + 10X_3 &= 3qa^2, \\ 160X_2 &= 27qa, \\ 72aX_1 + 64X_3 &= 9qa^2, \end{aligned} \right\}$$

de donde se obtiene,

$$X_1 = \frac{\begin{vmatrix} 3qa^2 & 10 \\ 9qa^2 & 64 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 20a & 10 \\ 72a & 64 \end{vmatrix}} = \frac{192 - 90}{1280 - 720} qa \approx 0,1821qa;$$

$$X_2 = \frac{27}{160} qa \approx 0,1688qa;$$

$$X_3 = \frac{\begin{vmatrix} 20a & 3qa^2 \\ 72a & 9qa^2 \end{vmatrix}}{560a} = \frac{180 - 216}{560} qa^2 \approx -0,0643qa^2.$$

Por el método de superposición obtendremos los diagramas de los momentos flectores  $M$  en todos los tramos del pórtico (fig. 189, g):  
 en la sección  $A$ ,  $M = 0,1688qa \cdot a - 0,0643qa^2 \cdot 1 = 0,1045qa^2$ ,  
 en la sección  $B$ ,  $M = -0,1688qa \cdot a - 0,0643qa^2 \cdot 1 =$   
 $= -0,2331qa^2$ ,  
 en la sección  $C$ ,  $M = 0,1821qa \cdot 3a - 0,1688qa \cdot a - 0,0643qa^2 =$   
 $= 0,3132qa^2$ ,  
 en la sección  $D$ ,  $M = 0,1821qa \cdot 3a + 0,1688qa \cdot a - 0,0643qa^2 -$   
 $-\frac{q}{18a} 27a^3 = -0,8492qa^2$ ,  
 en la sección  $E$ ,  $M = 0,1821qa \cdot 1,5a + 0,1688qa \cdot a -$   
 $-0,0643qa^2 - \frac{q}{18a} \cdot \frac{27}{8} a^3 = 0,1902qa^2$ .

**Ejemplo 105.** Dado:  $a, b, c, d, E, G, [\sigma], \alpha$  y  $\Delta t^0 > 0$  (fig. 190, a).

Plantear la condición de resistencia del sistema en el tramo  $c$ .

*Resolución.* El sistema base de configuración deformada por la elevación de la temperatura  $\Delta t$  grados, está representado en la figura 190,  $b$  y el sistema auxiliar en la figura 190,  $c$ .

Puesto que,

$$\delta_{11} = -\alpha b \Delta t, \quad \text{y} \quad \delta_{11} = \frac{b}{EF} + \frac{1}{EI} \left( \int_0^a x^2 dx + a^2 b + \int_0^c x^2 dx \right) +$$

$$+ \frac{a^2 c}{GI_p} = \frac{b}{EF} + \frac{1}{EI} \left( \frac{a^3}{3} + a^2 b + \frac{c^3}{3} \right) + \frac{a^2 c}{GI_p}, \quad \text{obtendremos,}$$

$$X_1 = -\frac{\delta_{11}}{\delta_{11}} = \frac{\alpha b \Delta t}{\frac{b}{EF} + \frac{1}{EI} \left( \frac{a^3}{3} + a^2 b + \frac{c^3}{3} \right) + \frac{a^2 c}{GI_p}},$$

$$\text{siendo } F = \frac{\pi d^2}{4}, \quad I = \frac{\pi d^4}{64} \quad \text{y} \quad I_p = \frac{\pi d^4}{32}.$$

En la sección peligrosa de empotramiento del tramo  $c$  el momento flector será  $M = X_1 c$  y el torsor,  $M_t = X_1 a$ .

La condición de resistencia se escribe así,

$$\frac{\sqrt{M^2 + (\eta M_t)^2}}{W} = \frac{X_1 \sqrt{c^2 + (\eta a)^2}}{W} \leq [\sigma].$$

siendo  $W = \frac{\pi d^3}{32}$ ,  $\eta = 1$  en la tercera hipótesis de resistencia o  $\eta = \sqrt{0,75}$ , en la cuarta.

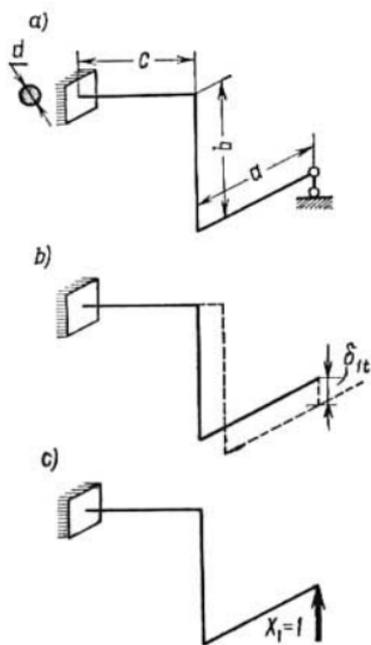


Fig. 190

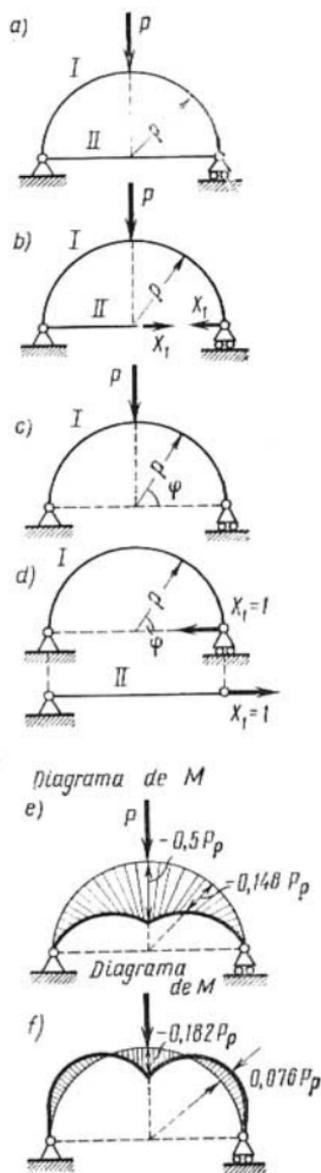


Fig. 191

**Ejemplo 106.** Dado:  $P, \rho, E_I, I_I, E_{II}, F_{II}$  y una barra de pequeña curvatura (fig. 191, a).

Determinar  $\delta$ , desplazamiento del apoyo móvil.

*Resolución.* Separamos los elementos  $I$  y  $II$  por la articulación móvil (fig. 191, b). Los sistemas base y auxiliar están dados en la figura 191, c y d.

Como,

$$\delta_{1P} = -\frac{2}{E_I I_I} \int_0^{\pi/2} \frac{P}{2} \rho (1 - \cos \varphi) \rho \cdot \sin \varphi \cdot \rho \, d\varphi = -\frac{P\rho^3}{2E_I I_I},$$

$$\delta_{11} = \frac{2}{E_I I_I} \int_0^{\pi/2} \rho^2 \sin^2 \varphi \cdot \rho \, d\varphi + \frac{2\rho}{E_{II} F_{II}} = \frac{\pi\rho^3}{2E_I I_I} + \frac{2\rho}{E_{II} F_{II}},$$

resulta,

$$X_1 = -\frac{\delta_{1P}}{\delta_{11}} = \frac{P\rho^3}{2E_I I_I} \cdot \frac{1}{\frac{\pi\rho^3}{2E_I I_I} + \frac{2\rho}{E_{II} F_{II}}} = \frac{P}{\pi} \cdot \frac{1}{1 + \frac{4}{\pi} \cdot \frac{E_I I_I}{\rho^2 E_{II} F_{II}}}.$$

El desplazamiento en cuestión  $\delta$  se determinará como el alargamiento absoluto del tirante  $II$ , es decir,

$$\delta = \frac{X_1 2\rho}{E_{II} F_{II}} = \frac{2P\rho}{\pi E_{II} F_{II}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{4}{\pi} \cdot \frac{E_I I_I}{\rho^2 E_{II} F_{II}}}.$$

Si el tirante  $II$  no existiese (es decir  $E_{II} F_{II} = 0$ ), entonces,

$$X_1 = 0 \quad \text{y} \quad \delta = \frac{P\rho^3}{2E_I I_I}.$$

Si los dos apoyos fuesen inmóviles (es decir,  $E_{II} F_{II} = \infty$ )

$$X_1 = \frac{P}{\pi} \quad \text{y} \quad \delta = 0.$$

En el primer caso ( $E_{II} F_{II} = 0$ ) el momento flector en una sección cualquiera será,

$$M = -\frac{P}{2} \rho (1 - \cos \varphi).$$

El diagrama de  $M$  está dado en la figura 191, e.

En el segundo caso ( $E_{II} F_{II} = \infty$ ) el momento flector en una sección arbitraria será,

$$M = P\rho \left( \frac{\sin \varphi}{\pi} - \frac{1}{2} + \frac{\cos \varphi}{2} \right).$$

El diagrama de  $M$  correspondiente está dado en la fig. 191, f.

### 3. Cálculo de anillos planos de paredes delgadas

Se entiende por anillo plano de paredes delgadas cualquier sistema elástico plano de barras cerrado, cuyas longitudes de los tramos son mucho mayores que las dimensiones de las secciones transversales. Este sistema es de triple hiperestaticidad. Son incógnitas superfluas el momento flector,  $X_1$ , el esfuerzo axial  $X_2$  y la fuerza cortante  $X_3$ , es decir, los esfuerzos interiores que surgen en la sección transversal que se traza para obtener el sistema base, (fig. 192). Así, pues, los sistemas cerrados son de hiperestaticidad interna.

La hiperestaticidad de los anillos se puede vencer ya sea por el principio del trabajo mínimo o (lo que es más cómodo) mediante las ecuaciones canónicas del método de las fuerzas. Puesto que los anillos son de paredes delgadas, al plantear las ecuaciones para vencer la hiperestaticidad es suficiente considerar solamente la deformación originada por el momento flector.

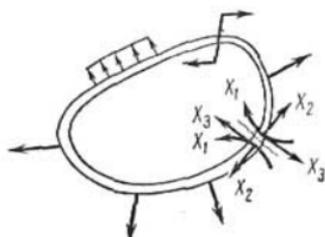


Fig. 192

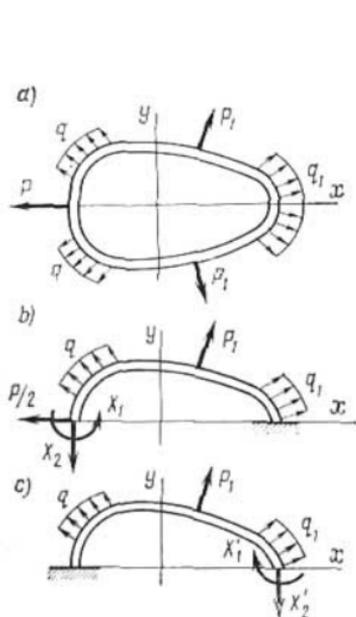


Fig. 193

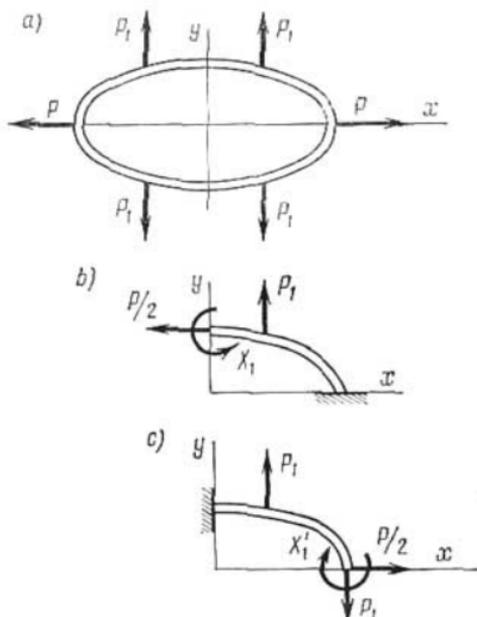


Fig. 194

Si el anillo y la carga son simétricos respecto a uno de los ejes (fig. 193, a), entonces en las secciones transversales que coinciden con el eje de simetría, las fuerzas cortantes serán iguales a cero. Por lo tanto, serán incógnitas superfluas solamente el momento flector ( $X_1$  ó  $X'_1$ ) y el esfuerzo axial ( $X_2$  ó  $X'_2$ ). Se puede analizar pues solamente la mitad simétrica del anillo en lugar de analizarlo todo (fig. 193, a y b).

Si el anillo y la carga son simétricos respecto a dos ejes (fig. 194, a), entonces en las secciones situadas en los ejes de simetría las fuerzas cortantes serán iguales a cero y las fuerzas axiales se podrán obtener de las ecuaciones de la estática como la suma de las proyecciones de las fuerzas y esfuerzos aplicados a la mitad de anillo, sobre el eje de simetría correspondiente. En este caso, solamente el momento flector ( $X_1$  ó  $X'_1$ ) será incógnita superflua. Así pues es suficiente analizar en lugar de todo el anillo solamente la cuarta parte ubicada entre los ejes de simetría (fig. 194, b ó c).

Si el anillo tiene más de dos ejes de simetría, entonces se podrá analizar solamente la parte del anillo ubicada entre las secciones que se encuentran en los ejes contiguos de simetría.

En estas secciones las fuerzas cortantes serán nulas, los esfuerzos axiales se obtendrán de las ecuaciones de la estática y sólo el momento flector será incógnita superflua.

**Ejemplo 107.** Dado:  $q$ ,  $\rho$ ,  $E$ ,  $I$  y el anillo de paredes delgadas, simétrico respecto a los ejes  $x$  e  $y$  (fig. 195, a).

Determinar  $\delta$ , el acercamiento de las secciones medias de los tramos rectos del anillo.

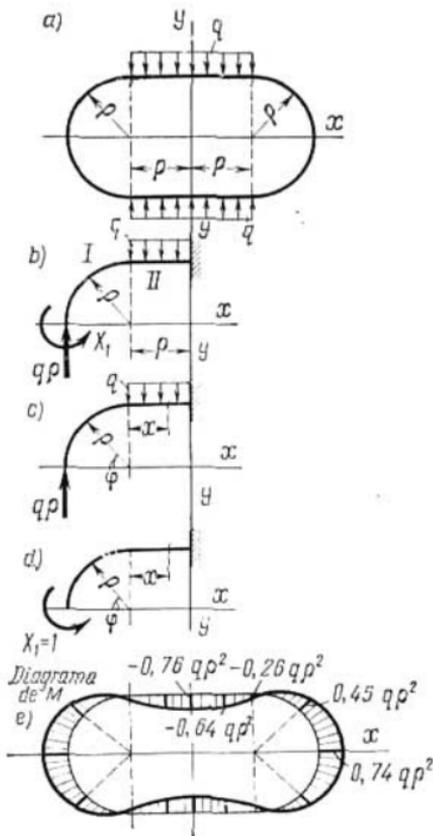


Fig. 195

*Resolución.* Analizamos la cuarta parte del anillo (fig. 195, b). En las secciones situadas en el eje  $x$ , la fuerza cortante es igual a cero, el esfuerzo axial es  $q\rho$  y el momento flector  $X_1$  se interpreta como fuerza generalizada superflua desconocida.

El momento flector en las secciones arbitrarias de los tramos I y II del sistema base (fig. 195, c) y del sistema auxiliar (fig. 195, d) será,

$$M_I = -q\rho^2(1 - \cos \varphi);$$

$$M_{II} = -q\rho(\rho + x) + q\frac{x^2}{2}; \quad \bar{M}_I = 1; \quad \bar{M}_{II} = 1.$$

Como,

$$EI\delta_{1p} = \int_0^s M_I \bar{M}_I ds + \int_0^{\rho} M_{II} \bar{M}_{II} dx = -q\rho^3 \int_0^{\pi/2} (1 - \cos \varphi) d\varphi -$$

$$-q \int_0^{\rho} \left[ \rho(\rho + x) - \frac{x^2}{2} \right] dx = -q\rho^2 \left( \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3} \right)$$

y

$$EI\delta_{11} = \int_0^s \bar{M}_I^2 ds + \int_0^{\rho} \bar{M}_{II}^2 dx = \rho \int_0^{\pi/2} d\varphi + \int_0^{\rho} dx = \rho \left( \frac{\pi}{2} + 1 \right),$$

el momento flector  $X_1$  resultará,

$$X_1 = -\frac{\delta_{1p}}{\delta_{11}} = q\rho^2 \frac{3\pi + 2}{3(\pi + 2)} \approx 0,74q\rho^2.$$

Una vez vencida la hiperestaticidad del sistema, obtendremos,

$$M_I = -q\rho^2 \left[ 1 - \frac{3\pi + 2}{3(\pi + 2)} - \cos \varphi \right] \approx -q\rho^2 (0,26 - \cos \varphi);$$

$$M_{II} = -q \left[ \rho^2 + \rho x - \frac{x^2}{2} - \frac{3\pi + 2}{3(\pi + 2)} \rho^2 \right] \approx -q(0,26\rho^2 + \rho x - 0,5x^2),$$

y por lo tanto,

$$M_{I_{\varphi=0}} \approx 0,74q\rho^2; \quad M_{I_{\varphi=\frac{\pi}{4}}} \approx 0,45q\rho^2; \quad M_{I_{\varphi=\frac{\pi}{2}}} \approx -0,26q\rho^2;$$

$$M_{II_{x=0}} \approx -0,26q\rho^2; \quad M_{II_{x=\frac{\rho}{2}}} \approx -0,64q\rho^2; \quad M_{II_{x=\rho}} = -0,76q\rho^2.$$

En la figura 195, e está representado el diagrama del momento flector.

Para hallar la magnitud del acercamiento de las secciones medias de los tramos rectilíneos del anillo aplicamos en la sección donde actúa  $q\rho$  una fuerza ficticia  $P_F = 1$  dirigida verticalmente hacia arriba. Los momentos flectores en las secciones arbitrarias de los tramos  $I$  y  $II$ , originados por esta fuerza serán,

$$\bar{M}_I = -\rho(1 - \cos \varphi) \text{ y } \bar{M}_{II} = -(\rho + x),$$

y por lo tanto, el desplazamiento en cuestión resultará,

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{2}{EI} \left( \int_0^s M_I \bar{M}_I ds + \int_0^\rho M_{II} \bar{M}_{II} dx \right) = \\ &= \frac{2q\rho^4}{EI} \int_0^{\pi/2} (0,26 - \cos \varphi)(1 - \cos \varphi) d\varphi + \\ &\quad + \frac{2q}{EI} \int_0^\rho (0,26\rho^2 + \rho x - 0,5x^2)(\rho + x) dx \approx 1,72 \frac{q\rho^4}{EI}. \end{aligned}$$

**Ejemplo 108.** Dado:  $P$ ,  $\alpha$  (siendo  $2\alpha = \frac{2\pi}{n}$ ),  $\rho$ ,  $E$ ,  $I$ , y  $F$  (fig. 196, a).

Determinar  $\Delta\rho_p$  y  $\Delta\rho_0$ , variaciones de los radios del anillo en dirección a la línea de acción de las fuerzas y en las secciones situadas en el centro del tramo entre las fuerzas, respectivamente.

*Resolución.* Analizamos la parte de la pared del anillo que se encuentra entre las secciones transversales trazadas en el medio de los arcos entre las fuerzas (fig. 196, b).

En estas secciones los esfuerzos cortantes son iguales a cero, mientras que los esfuerzos axiales  $N_0$  se obtienen de la suma de las proyecciones de las fuerzas y esfuerzos sobre el eje vertical,  $N_0 = \frac{P}{2 \operatorname{sen} \alpha}$ .

Los momentos flectores y los esfuerzos axiales en una sección arbitraria del sistema base (fig. 196, c) y del sistema auxiliar (fig. 196, d) serán respectivamente,

$$M = \frac{P\rho}{2 \operatorname{sen} \alpha} (1 - \cos \varphi), \quad N = \frac{P \cos \varphi}{2 \operatorname{sen} \alpha}, \quad \bar{M} = 1, \quad \bar{N} = 0.$$

Puesto que,

$$\begin{aligned} \delta_{1p} &= \frac{\rho}{EI} \int_0^\alpha M \bar{M} d\varphi = -\frac{P\rho^2}{2EI \operatorname{sen} \alpha} \int_0^\alpha (1 - \cos \varphi) d\varphi = \\ &= -\frac{P\rho^2}{2EI} \left( \frac{\alpha}{\operatorname{sen} \alpha} - 1 \right), \end{aligned}$$

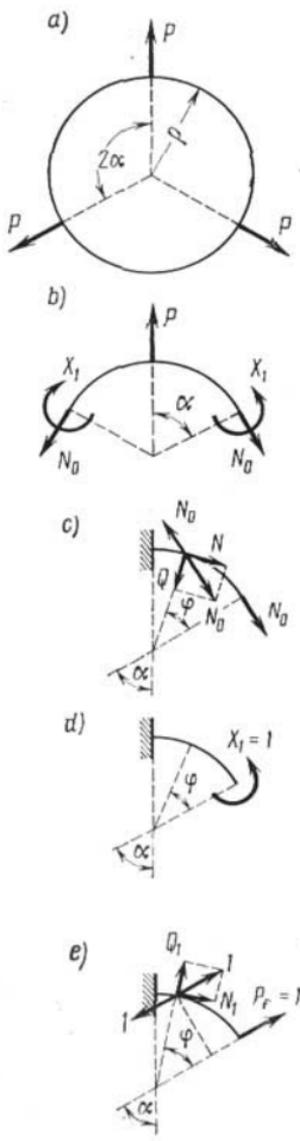


Fig. 196

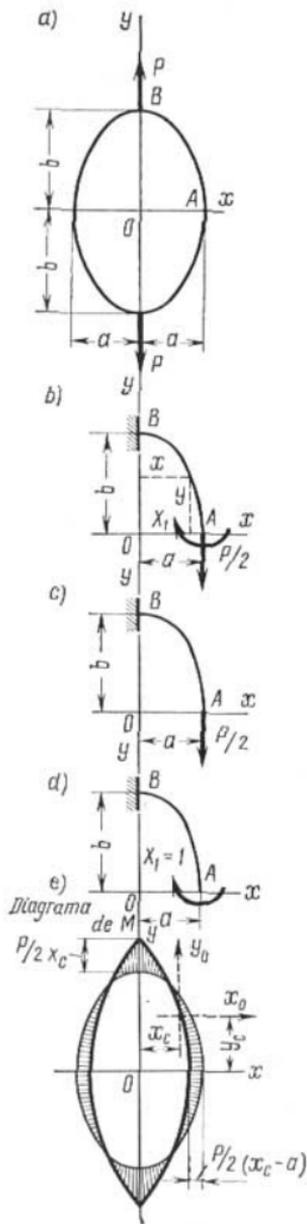


Fig. 197

y

$$\delta_{11} = \frac{\rho}{EI} \int_0^{\alpha} \bar{M}^2 d\varphi = \rho \frac{\alpha}{EI},$$

obtendremos para el momento,

$$X_1 = -\frac{\delta_{1P}}{\delta_{11}} = \frac{P\rho}{2} \left( \frac{1}{\sin \alpha} - \frac{1}{\alpha} \right).$$

El momento flector en una sección cualquiera del anillo resulta,

$$M = \frac{P\rho}{2} \left( \frac{1}{\sin \alpha} - \frac{\cos \varphi}{\sin \alpha} - \frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\alpha} \right) = \frac{P\rho}{2} \left( \frac{1}{\alpha} - \frac{\cos \varphi}{\sin \alpha} \right).$$

Para obtener  $\Delta\rho_P$  aplicamos  $P_F = 1$  en lugar de la fuerza  $P$ . Entonces hallaremos,

$$\bar{M} = \frac{\rho}{2} \left( \frac{1}{\alpha} - \frac{\cos \varphi}{\sin \alpha} \right), \quad \bar{N} = \frac{\cos \varphi}{2 \sin \alpha}$$

y

$$\begin{aligned} \Delta\rho_P &= \frac{2\rho}{EI} \int_0^{\alpha} M\bar{M} d\varphi + \frac{2\rho}{EF} \int_0^{\alpha} N\bar{N} d\varphi = \\ &= \frac{P\rho^3}{2EI} \int_0^{\alpha} \left( \frac{1}{\alpha} - \frac{\cos \varphi}{\sin \alpha} \right)^2 d\varphi + \frac{P\rho}{2EF \sin^2 \alpha} \int_0^{\alpha} \cos^2 \varphi d\varphi. \end{aligned}$$

Definitivamente,

$$\Delta\rho_P = \frac{P\rho^3}{2EI} \left( \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{2} + \frac{\alpha}{2 \sin^2 \alpha} - \frac{1}{\alpha} \right) + \frac{P\rho}{4EF} \left( \operatorname{ctg} \alpha + \frac{\alpha}{\sin^2 \alpha} \right).$$

Para hallar  $\Delta\rho_0$  aplicamos una fuerza radial  $P_F = 1$  en la sección inclinada un ángulo  $\alpha$  respecto a la vertical (fig. 196, e) obteniendo,

$$\bar{M} = -\rho \sin \varphi, \quad \bar{N} = \sin \varphi$$

y

$$\Delta\rho_0 = \frac{P\rho^3}{2EI} \int_0^{\alpha} \left( \frac{\cos \varphi}{\sin \alpha} - \frac{1}{\alpha} \right) \sin \varphi d\varphi + \frac{P\rho}{2EF \sin \alpha} \int_0^{\alpha} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi.$$

Definitivamente,

$$\Delta\rho_0 = \frac{P\rho^3}{2EI} \left[ \frac{\sin \alpha}{2} + \frac{1}{\alpha} (\cos \alpha - 1) \right] + \frac{P\rho}{4EF} \sin \alpha.$$

**Ejemplo 109.** Dado:  $P$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $E$ ,  $I$ , y un anillo de paredes delgadas, simétrico respecto a los ejes  $x$  y  $y$  (fig. 197, a), Determinar  $\Delta_a$  y  $\Delta_b$ .

*Resolución.* Analizamos la cuarta parte del anillo (fig. 197, b). En las secciones situadas en el eje  $x$  la fuerza cortante es igual a cero y el esfuerzo axial,  $\frac{P}{2}$ .

Los momentos flectores en una sección transversal cualquiera de coordenadas del centro de gravedad  $x$  e  $y$  del sistema base (fig. 197, c) y del auxiliar (fig. 197, d) respectivamente serán,

$$M = \frac{P}{2}(a - x) \quad \text{y} \quad \bar{M} = 1.$$

$$\begin{aligned} \text{Como, } EI\delta_{1p} &= \int_0^s M\bar{M} ds = \frac{P}{2} \int_0^s (a - x) ds = \\ &= \frac{P}{2} \left( a \int_0^s ds - \int_0^s x ds \right) = \frac{P}{2} (as - S_y) = \\ &= \frac{P}{2} s \left( a - \frac{S_y}{s} \right) = \frac{P}{2} s (a - x_c), \end{aligned}$$

siendo  $s$  la longitud del arco del eje geométrico de la pared de la cuarta parte del anillo,

$S_y = \int_0^s x ds$  el momento estático del arco  $s$  respecto al eje  $y$ ;

$$\begin{aligned} x_c = \frac{S_y}{s} \quad \text{la abscisa del centro de gravedad del arco } s \text{ y } EI\delta_{11} &= \\ &= \int_0^s \bar{M}^2 ds = \int_0^s ds = s, \end{aligned}$$

obtendremos para el momento flector en la sección  $A$ ,

$$X_1 = -\frac{\delta_{1p}}{\delta_{11}} = \frac{P}{2}(x_c - a).$$

El momento flector en una sección arbitraria del anillo será,

$$M = \frac{P}{2}(a - x) + \frac{P}{2}(x_c - a) = \frac{P}{2}(x_c - x); \quad M_{x=a} = \frac{P}{2}(x_c - a),$$

$$\text{si } a > x_c, \text{ entonces } M_{x=a} < 0; \quad M_{x=x_c} = 0; \quad M_{x=0} = \frac{P}{2}x_c > 0.$$

En la figura 197, e está representado el diagrama del momento flector para el caso cuando  $a - x_c < x_c$ .

Para obtener la variación de  $a$  en la sección  $A$  de la cuarta parte del anillo, aplicamos la fuerza horizontal  $P_F = 1$  dirigida hacia el centro  $O$ .

A esta fuerza corresponde  $\bar{M} = y$  y, por lo tanto,

$$\begin{aligned} \Delta a &= \frac{P}{2EI} \int_0^s (x_c - x) y \, ds = \frac{P}{2EI} \left( x_c \int_0^s y \, ds - \int_0^s xy \, ds \right) = \\ &= \frac{P}{2EI} (x_c S_x - I_{xy}) = -\frac{P}{2EI} I_{x_0 y_0}, \end{aligned}$$

siendo  $S_x = \int_0^s y \, ds$  el momento estático del arco  $s$  respecto al eje  $x$ ,

$I_{xy} = \int_0^s xy \, ds$  el producto de inercia del arco  $s$  respecto a los ejes  $x, y$ ,

$I_{x_0 y_0} = I_{xy} - x_c S_x = I_{xy} - x_c y_c s$  el producto de inercia del arco  $s$  respecto a los ejes  $x_0 y_0$  que cruzan el centro de gravedad de la cuarta parte del anillo y son paralelos a los ejes  $xy$  (fig. 197, e).

Para determinar la variación de  $b$  en la sección  $A$  de la cuarta parte del anillo, aplicamos la fuerza vertical  $P_F = 1$  dirigida verticalmente hacia abajo.

A esta fuerza corresponde  $\bar{M} = a - x$  y, por lo tanto,

$$\begin{aligned} \Delta b &= \frac{P}{2EI} \int_0^s (x_c - x) (a - x) \, ds = \frac{P}{2EI} \left( ax_c \int_0^s ds - a \int_0^s x \, ds - \right. \\ &\quad \left. - x_c \int_0^s x \, ds + \int_0^s x^2 \, ds \right) = \frac{P}{2EI} (ax_c s - a S_y - x_c S_y + I_y) = \\ &= \frac{P}{2EI} (I_y - x_c S_y) = \frac{P}{2EI} I_{y_0}, \end{aligned}$$

siendo  $I_y = \int_0^s x^2 \, ds$  el momento lineal de inercia del arco  $s$  respecto al eje  $y$ ,

$I_{y_0} = I_y - x_c S_y = I_y - x_c^2 s$  el momento lineal de inercia del arco  $s$  respecto al eje  $y_0$ .

*Casos particulares.* A. El reticulado cuadrado se tracciona por la diagonal (fig. 198, a). Puesto que (fig. 198, b)  $x_c = y_c = \frac{a}{2}$ ,

resulta,

$$M = \frac{P}{2} \left( \frac{a}{2} - x \right); \quad M_{x=0} = \frac{Pa}{4}; \quad M_{x=a} = -\frac{Pa}{4}.$$

El diagrama del momento flector está dado en la figura 198, *c*.

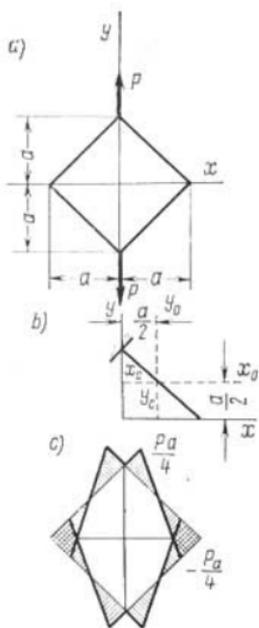


Fig. 198

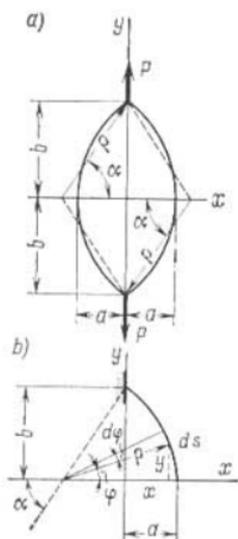


Fig. 199

Si nos referimos a los ejes  $x_0y_0$ ,

$$x_0 = -y_0, \quad ds = dx_0 \sqrt{2} = dy_0 \sqrt{2}$$

y por lo tanto,

$$I_{x_0} = I_{y_0} = \sqrt{2} \int_{-a/2}^{a/2} x_0^2 dx_0 = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3 \quad \text{y} \quad I_{x_0y_0} =$$

$$= -\sqrt{2} \int_{-a/2}^{a/2} x_0^2 dx_0 = -\frac{\sqrt{2}}{12} a^3.$$

Por las fórmulas del ejemplo 109, el acortamiento de la semidiagonal horizontal del reticulado y el alargamiento de la semidiagonal

vertical del mismo son de igual magnitud,

$$\Delta a = \frac{P}{2EI} \cdot \frac{\sqrt{2}}{24} a^3 = \frac{\sqrt{2}}{24} \cdot \frac{Pa^3}{EI}.$$

B. Anillo que consta de dos arcos circunferenciales de radio  $\rho$  y de ángulo central  $2\alpha$  (fig. 199, a).

Como (fig. 199, b),

$$ds = \rho d\varphi, \quad s = \rho\alpha, \quad a = \rho(1 - \cos \alpha), \quad b = \rho \sin \alpha, \\ x = \rho(\cos \varphi - \cos \alpha) \text{ y } y = \rho \sin \alpha, \text{ resulta,}$$

$$S_y = \int_0^\alpha x ds = \rho^2 \int_0^\alpha (\cos \varphi - \cos \alpha) d\varphi = \rho^2 (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha);$$

$$x_c = \frac{S_y}{s} = \frac{\rho}{\alpha} (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha);$$

$$S_x = \int_0^\alpha y ds = \rho^2 \int_0^\alpha \sin \varphi d\varphi = \rho^2 (1 - \cos \alpha);$$

$$I_{xy} = \int_0^\alpha xy ds = \rho^3 \int_0^\alpha (\cos \varphi - \cos \alpha) \sin \varphi d\varphi = \\ = \frac{\rho^3}{2} (1 - 2 \cos \alpha + \cos^2 \alpha);$$

$$I_y = \int_0^\alpha x^2 ds = \rho^3 \int_0^\alpha (\cos \varphi - \cos \alpha)^2 d\varphi = \\ = \frac{\rho^3}{4} (2\alpha + 4\alpha \cos^2 \alpha - 3 \sin 2\alpha).$$

Por las fórmulas del ejemplo 109, obtendremos,

$$X_1 = \frac{P}{2} (x_c - a) = \frac{P\rho}{2\alpha} (\sin \alpha - \alpha),$$

$$M = \frac{P}{2} (x_c - x) = \frac{P\rho}{2} \left( \frac{\sin \alpha}{\alpha} - \cos \varphi \right),$$

$$\Delta a = \frac{P}{2EI} (x_c S_x - I_{xy}) = \frac{P\rho^3}{2EI} \left( \frac{\sin \alpha}{\alpha} - \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{2} - \frac{1}{2} \right),$$

$$\Delta b = \frac{P}{2EI} (I_y - x_c S_y) = \frac{P\rho^3}{2EI} \left( \frac{\alpha}{2} - \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha} + \frac{\sin^2 \alpha}{4} \right).$$

**Ejemplo 110.** Dado:  $a, b, E, I$  y  $q$ , presión interior sobre la pared del anillo simétrico respecto a los ejes  $x$  e  $y$  (fig. 200,  $a$ ). Determinar  $\Delta a$  y  $\Delta b$ .

*Resolución.* Analizamos la cuarta parte del anillo (fig. 200,  $b$ ). En las secciones situadas en el eje  $x$  la fuerza cortante es igual a cero y el esfuerzo axial,  $qa$ .

Los momentos flectores en una sección transversal arbitraria, de coordenadas del centro de gravedad  $x$  e  $y$ , del sistema base (fig. 200,  $c$ ) y del sistema auxiliar (fig. 200,  $d$ ) son respectivamente,

$$M = qa(a-x) - \frac{q}{2}(a-x)^2 - \frac{q}{2}y^2 = \\ = \frac{q}{2}[a^2 - (x^2 + y^2)] = \frac{q}{2}(a^2 - \rho^2),$$

siendo  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$  la distancia de la sección en cuestión al origen de coordenadas y  $\bar{M} = 1$ .

Como,

$$EI\delta_{1p} = \int_0^s M\bar{M} ds = \frac{q}{2} \int_0^s (a^2 - \rho^2) ds = \\ = \frac{q}{2} \left( a \int_0^s ds - \int_0^s \rho^2 ds \right) = \frac{q}{2}(as - I_p),$$

siendo  $s$  la longitud del arco del eje geométrico de la cuarta parte del anillo,

$I_p = \int_0^s \rho^2 ds$  el momento polar de inercia del arco  $s$  respecto al

origen de coordenadas y  $EI\delta_{11} = \int_0^s \bar{M}^2 ds = \int_0^s ds = s$ ; el momento flector en la sección  $A$  será,

$$X_1 = -\frac{\delta_{1p}}{\delta_{11}} = \frac{q}{2} \left( \frac{I_p}{s} - a^2 \right).$$

El momento flector en una sección arbitraria del anillo,

$$M = \frac{q}{2}(a^2 - \rho^2) + \frac{q}{2} \left( \frac{I_p}{s} - a^2 \right) = \frac{q}{2} \left( \frac{I_p}{s} - \rho^2 \right),$$

$$M_{\rho=a} = \frac{q}{2} \left( \frac{I_p}{s} - a^2 \right), \quad M_{\rho=b} = \frac{q}{2} \left( \frac{I_p}{s} - b^2 \right).$$

Si  $\rho$  crece continuamente del valor  $a$  al valor  $b > a$  entonces,

$$M_{\rho=a} > 0; \quad M_{\rho=b} < 0 \quad \text{y} \quad M_{\rho=\sqrt{\frac{I_p}{s}}} = 0.$$

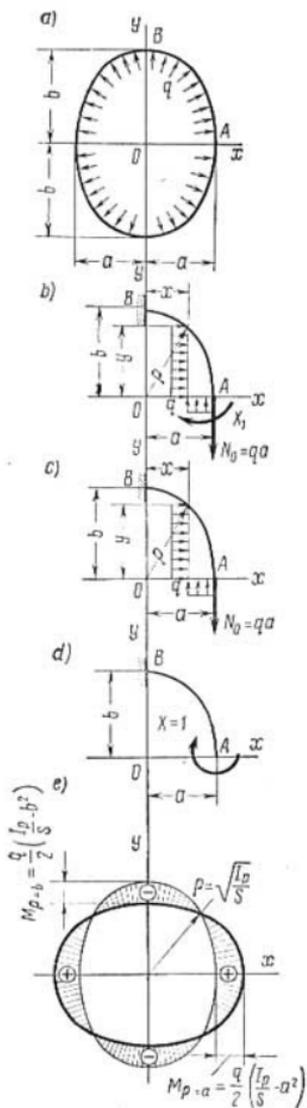


Fig. 200

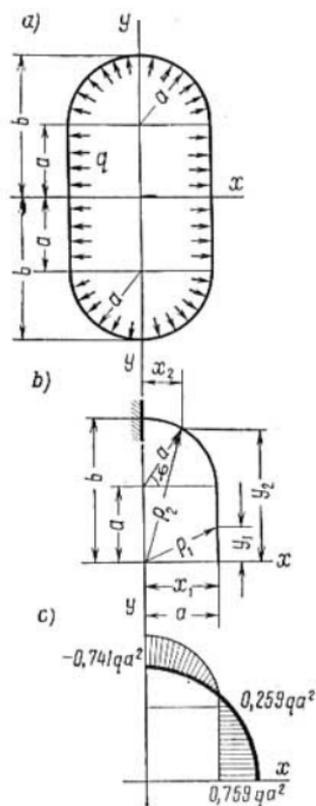


Fig. 201

En la figura 200,  $e$  está representado el diagrama del momento flector para el caso cuando  $b > a$ .

Para hallar la variación del tamaño  $a$  en la sección  $A$  de la cuarta parte del anillo aplicamos la fuerza horizontal  $P_F = 1$  dirigida hacia el centro  $O$ .

A esta fuerza corresponde  $\bar{M} = y$  y por lo tanto,

$$\begin{aligned}\Delta a &= \frac{q}{2EI} \int_0^s \left( \frac{I_p}{s} - \rho^2 \right) y ds = \frac{q}{2EI} \left( \frac{I_p}{s} \int_0^s y ds - \int_0^s \rho^2 y ds \right) = \\ &= \frac{q}{2EI} \left( \frac{S_x}{s} I_p - \int_0^s \rho^2 y ds \right) = \frac{q}{2EI} (y_c I_p - I_x),\end{aligned}$$

siendo  $S_x = \int_0^s y ds$  el momento estático del arco  $s$  respecto al eje  $x$  e

$y_c = \frac{S_x}{s}$  la ordenada del centro de gravedad del arco  $s$ ,

$$I_x = \int_0^s \rho^2 y ds.$$

Para hallar la variación de  $b$  en la sección  $A$  de la cuarta parte del anillo, aplicamos la fuerza vertical  $P_V = 1$  dirigida hacia abajo.

A esta fuerza corresponde  $\bar{M} = a - x$  y por lo tanto,

$$\begin{aligned}\Delta b &= \frac{q}{2EI} \int_0^s \left( \frac{I_p}{s} - \rho^2 \right) (a - x) ds = \frac{q}{2EI} \left( \frac{I_p}{s} a \int_0^s ds - \right. \\ &\quad \left. - a \int_0^s \rho^2 ds - \frac{I_p}{s} \int_0^s x ds + \int_0^s \rho^2 x ds \right) = \\ &= \frac{q}{2EI} \left( \frac{I_p}{s} as - aI_p - \frac{I_p}{s} S_y + I_y \right) = \frac{q}{2EI} (I_y - x_c I_p),\end{aligned}$$

siendo  $I_y = \int_0^s \rho^2 x ds$ ,  $S_y = \int_0^s x ds$  el momento estático del arco  $s$  respecto al eje  $y$ ;

$x_c = \frac{S_y}{s}$  la abscisa del centro de gravedad del arco  $s$ .

*Caso particular.* Anillo constituido por dos semicircunferencias de radio  $a$  y dos rectas de longitud  $2a$  (fig. 201,  $a$ ).

Como (fig. 201, b)  $s = \frac{2 + \pi}{2} a$ ;  $x_1 = a$ ;  $y_1 = y$ ;  $ds_1 = dy$ ;

$x_2 = a \cos \varphi$ ;  $y_2 = a(1 + \operatorname{sen} \varphi)$ ;  $ds_2 = a d\varphi$ ;

$\rho_1^2 = a^2 + y^2$  y  $\rho_2^2 = 2a^2(1 + \operatorname{sen} \varphi)$ ,

obtendremos,

$$S_x = \int_0^a y_1 ds_1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} y_2 ds_2 = \int_0^a y dy + a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \operatorname{sen} \varphi) d\varphi = \frac{3 + \pi}{2} a^2;$$

$$S_y = \int_0^a x_1 ds_1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} x_2 ds_2 = a \int_0^a dy + a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi = 2a^2,$$

$$x_c = \frac{S_y}{s} = \frac{4a}{2 + \pi}; \quad y_c = \frac{S_x}{s} = \frac{3 + \pi}{2 + \pi} a,$$

$$I_x = \int_0^a y_1^2 ds_1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} y_2^2 ds_2 = \int_0^a y^2 dy + a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \operatorname{sen} \varphi)^2 d\varphi =$$

$$= \frac{28 + 9\pi}{12} a^3;$$

$$I_y = \int_0^a x_1^2 ds_1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} x_2^2 ds_2 = a^2 \int_0^a dy + a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{4 + \pi}{4} a^3;$$

$$I_p = I_x + I_y = \frac{10 + 3\pi}{3} a^3;$$

$$I_x = \int_0^a \rho_1^2 y_1 ds_1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho_2^2 y_2 ds_2 = \int_0^a (a^2 + y^2) y dy +$$

$$+ 2a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \operatorname{sen} \varphi)^2 d\varphi = \frac{19 + 6\pi}{4} a^4;$$

$$I_y = \int_0^a \rho_1^2 x_1 ds_1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}a} \rho_2^2 x_2 ds_2 = a \int_0^a (a^2 + y^2) dy + \\ + 2a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \operatorname{sen} \varphi) \cos \varphi d\varphi = \frac{13}{3} a^4.$$

En el tramo recto,

$$M_1 = \frac{q}{2} \left( \frac{I_p}{s} - \rho_1^2 \right) = \frac{qa^2}{2} \left( \frac{14 + 3\pi}{6 + 3\pi} - \frac{y^2}{a^2} \right) \approx \frac{qa^2}{2} \left( 1,519 - \frac{y^2}{a^2} \right);$$

$$M_{1y=0} = \frac{14 + 3\pi}{6(2 + \pi)} qa^2 \approx 0,759qa^2;$$

$$M_{1y=a} = \frac{4}{3(2 + \pi)} qa^2 \approx 0,259qa^2.$$

En el tramo curvilíneo,

$$M_2 = \frac{q}{2} \left( \frac{I_p}{s} - \rho^2 \right) = qa^2 \left( \frac{4}{6 + 3\pi} - \operatorname{sen} \varphi \right) \approx qa^2 (0,259 - \operatorname{sen} \varphi);$$

$$M_{2\varphi=0} = \frac{4}{3(2 + \pi)} qa^2 \approx 0,259qa^2;$$

$$M_{2\varphi=\frac{\pi}{4}} = -\frac{2 + 3\pi}{3(2 + \pi)} qa^2 \approx -0,741qa^2.$$

El diagrama del momento flector correspondiente a la cuarta parte del anillo está representada en la figura 201, c.

La variación de  $a$  será,

$$\Delta a = \frac{q}{2EI} (y_c I_p - I_x) = \frac{6 - 17\pi - 6\pi^2}{24(2 + \pi)} \cdot \frac{qa^4}{EI} \approx -0,864 \frac{qa^4}{EI},$$

y la de  $b$ ,

$$\Delta b = \frac{q}{2EI} (I_y - x_c I_p) = \frac{\pi - 14}{12(2 + \pi)} \frac{qa^4}{EI} \approx -0,160 \frac{qa^4}{EI}.$$

**Ejemplo 111.** Dado:  $q$ ,  $\rho$ ,  $E$ ,  $I$  y un anillo de paredes delgadas solicitado simétricamente respecto al eje  $y$  (fig. 202, a).

Determinar  $\delta$ , variación de la longitud del diámetro vertical del anillo.

*Resolución.* Analizamos la mitad del anillo (fig. 202, b). [En la sección que se encuentra en el eje  $y$ , la fuerza cortante es igual a cero; el momento flector  $X_1$  y la fuerza axial  $X_2$  se interpretan como fuerzas generalizadas superfluas desconocidas.]

Las ecuaciones canónicas del método de las fuerzas son:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{1P} &= 0, \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{2P} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Calculamos el momento flector, en una sección transversal arbitraria determinada por el ángulo  $\varphi$ , debido a la carga dada  $q$  (fig. 202, c).

Puesto que la fuerza elemental que actúa sobre el elemento del arco  $ds$  del eje geométrico de la pared del anillo, es  $dp = q ds = q \rho d\alpha$ , el momento flector elemental que ésta ocasiona en la sección de inclinación  $\varphi$  será,

$$\begin{aligned} dM &= dp \rho (\sin \varphi - \sin \alpha) = \\ &= q \rho^2 (\sin \varphi - \sin \alpha) d\alpha. \end{aligned}$$

El momento flector en la misma sección debido a todas las fuerzas que actúan sobre el arco de ángulo central  $\varphi$  resulta,

$$\begin{aligned} M &= q \rho^2 \int_0^\varphi (\sin \varphi - \sin \alpha) d\alpha = \\ &= q \rho^2 (\varphi \sin \varphi + \cos \varphi - 1). \end{aligned}$$

En los sistemas auxiliares (fig. 202, d y e) los momentos flectores en la misma sección serán  $\bar{M}_1 = 1$  y  $\bar{M}_2 = \rho (1 - \cos \varphi)$ .

Puesto que,

$$\begin{aligned} EI \delta_{1P} &= \int_0^s M \bar{M}_1 ds = \\ &= q \rho^3 \int_0^\pi (\varphi \sin \varphi + \cos \varphi - 1) d\varphi = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} EI \delta_{2P} &= \int_0^s M \bar{M}_2 ds = \\ &= q \rho^4 \int_0^\pi (\varphi \sin \varphi + \cos \varphi - 1) (1 - \cos \varphi) d\varphi = \\ &= -\frac{\pi}{4} q \rho^4; \end{aligned}$$

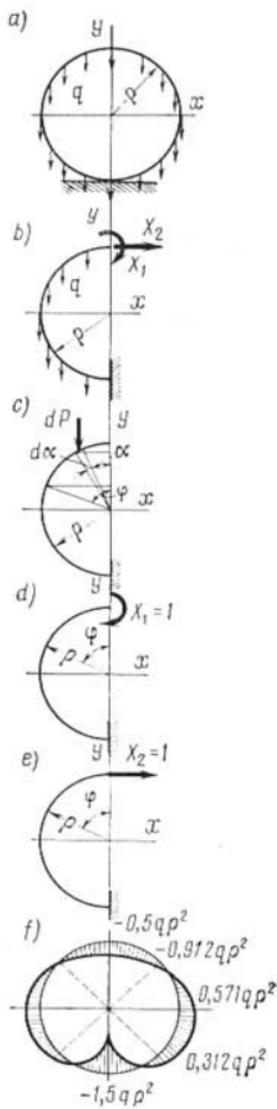


Fig. 202

$$EI\delta_{11} = \int_0^{\pi} \bar{M}_1^2 ds = \rho \int_0^{\pi} d\varphi = \pi\rho;$$

$$EI\delta_{22} = \int_0^{\pi} \bar{M}_2^2 ds = \rho^3 \int_0^{\pi} (1 - \cos \varphi)^2 d\varphi = \frac{3\pi}{2} \rho^3$$

$$y \quad EI\delta_{12} = EI\delta_{21} = \int_0^{\pi} \bar{M}_1 \bar{M}_2 ds = \rho^2 \int_0^{\pi} (1 - \cos \varphi) d\varphi = \pi\rho^2,$$

obtendremos para las ecuaciones canónicas del método de las fuerzas,

$$\left. \begin{aligned} X_1 + \rho X_2 &= 0, \\ X_1 + \frac{3}{2} \rho X_2 &= \frac{q\rho^2}{4}, \end{aligned} \right\}$$

de donde se obtiene,

$$X_1 = -\frac{q\rho^2}{2} \quad y \quad X_2 = \frac{q\rho}{2}.$$

El momento flector en una sección arbitraria de la pared del anillo es,

$$\begin{aligned} M &= q\rho^2 (\varphi \operatorname{sen} \varphi + \cos \varphi - 1) - \frac{q\rho^2}{2} + \frac{q\rho^2}{2} (1 - \cos \varphi) = \\ &= q\rho^2 \left( \varphi \operatorname{sen} \varphi + \frac{1}{2} \cos \varphi - 1 \right). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$M_{\varphi=0} = -0,5q\rho^2;$$

$$M_{\varphi=\frac{\pi}{4}} = q\rho^2 \left( \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right) \approx -0,0912q\rho^2;$$

$$M_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = q\rho^2 \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right) \approx 0,571q\rho^2;$$

$$M_{\varphi=\frac{3}{4}\pi} = q\rho^2 \left( \frac{3\pi}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right) \approx 0,312q\rho^2;$$

$$M_{\varphi=\pi} = -1,5q\rho^2.$$

El diagrama del momento flector está representado en la figura 202, *f*.

Para determinar la variación de la longitud del diámetro vertical del anillo, en la sección que coincide con el eje *y* del sistema base (fig. 202, *b*), aplicamos la fuerza vertical  $P_F = 1$  dirigida hacia abajo. El momento flector originado por esta fuerza en una sección

arbitraria es,

$$\bar{M} = \rho \sin \varphi,$$

por lo tanto, el desplazamiento que se busca será,

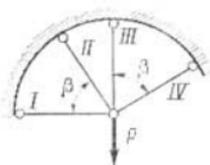
$$\begin{aligned} \delta &= \frac{1}{E} \int_0^s M \bar{M} ds = \frac{q\rho^4}{EI} \int_0^\pi \left( \varphi \sin \varphi + \frac{1}{2} \cos \varphi - 1 \right) \sin \varphi d\varphi = \\ &= \left( \frac{\pi^2}{4} - 2 \right) \frac{q\rho^4}{EI} \approx 0,467 \frac{q\rho^4}{EI}. \end{aligned}$$

**Problemas 834-835.** Determinar los esfuerzos axiales  $N$  en los elementos numerados del sistema.

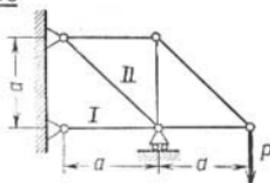
La rigidez  $EF$  es igual para todas las barras.

Empléese, según se desee, en estos problemas hiperestáticos y en los siguientes el principio del trabajo mínimo o el método de las fuerzas.

834

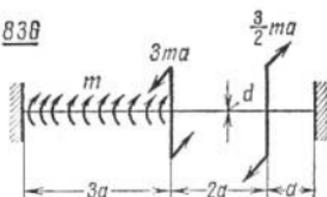


835

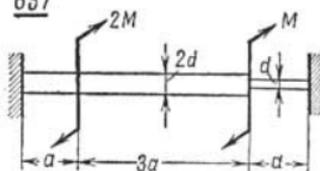


**Problemas 836-837.** Determinar los momentos reactivos en los empotramientos de los extremos izquierdos de las barras.

836



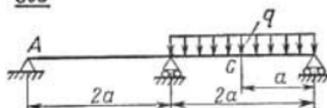
837



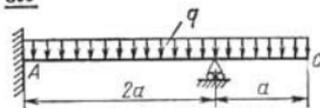
**Problemas 838-841.** Calcular las reacciones en las secciones de los apoyos  $A$  y los desplazamientos verticales  $\delta$  de la sección  $C$  de las vigas.

En el problema 841 determínese también el momento reactivo  $M$  en la sección  $A$ . Considérese conocida la rigidez  $EI$ .

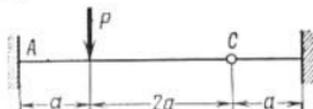
838



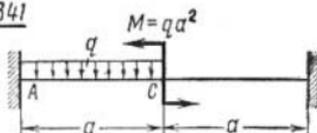
839



840



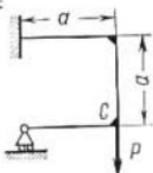
841



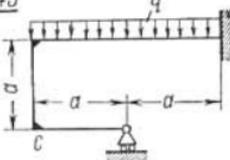
**Problemas 842-845.** Calcular las reacciones en el apoyo articulado de los sistemas y los desplazamientos lineales de la sección C.

En los problemas 842-843,  $\delta_v$  son los desplazamientos verticales y en el problema 844-845,  $\delta_h$ , los horizontales\*.

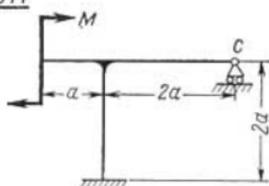
842



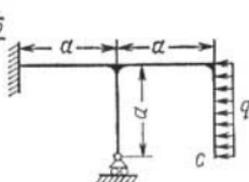
843



844

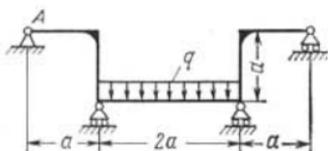


845

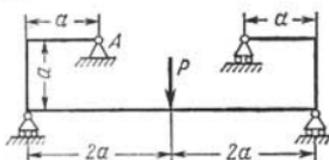


**Problemas 846-847.** Determinar las reacciones en el apoyo A y los desplazamientos verticales  $\delta$  de la sección situada en el eje de simetría de los sistemas.

846

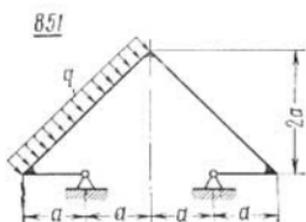
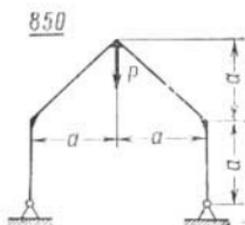
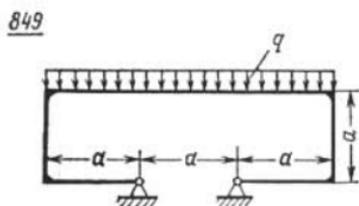
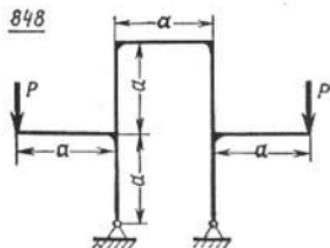


847

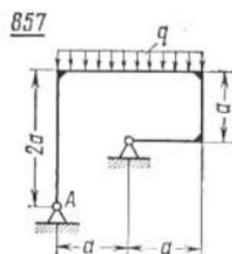
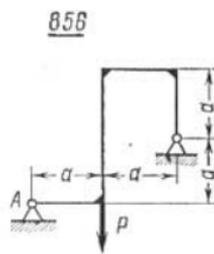
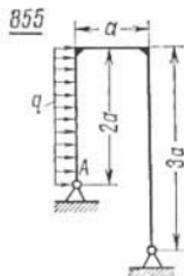
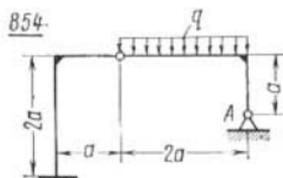
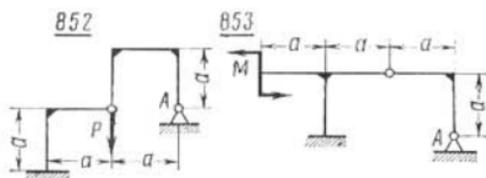


\* En los problemas 842-866 prescíndase de las deformaciones longitudinales de los elementos del sistema y considérese iguales las rigideces  $EI$  de los elementos flexionados.

**Problemas 848-851.** Determinar las reacciones horizontales de apoyos en los sistemas.

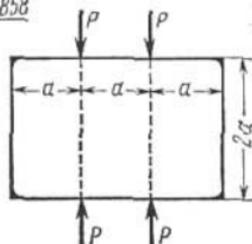


**Problemas 851-857.** Calcular las componentes de las reacciones en el apoyo A de los sistemas.

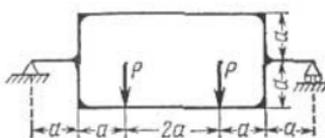


**Problemas 858-861.** Determinar el momento flector máximo, en valor absoluto, en los sistemas a porticados.

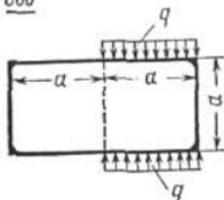
858



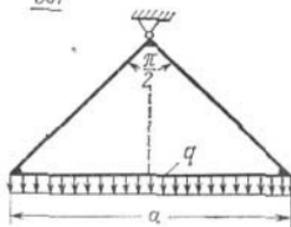
859



860



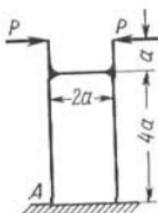
861



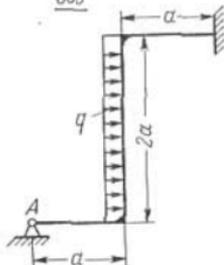
**Problemas 862-870.** Determinar las componentes reactivas en la sección de apoyo A de los sistemas.

En los problemas 868-870 determinése también los desplazamientos verticales  $\delta$  de la sección C, admitiendo que la sección en todos los tramos de los sistemas es circular y el material es el mismo;  $G = 0,4E$ .

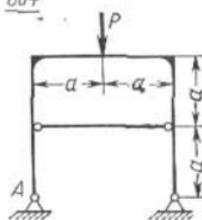
862



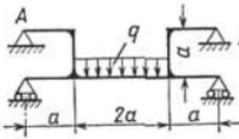
863



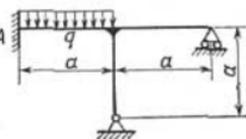
864



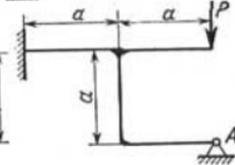
865



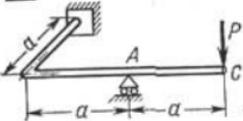
866



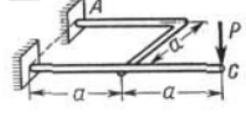
867



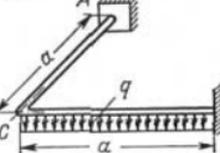
868



869



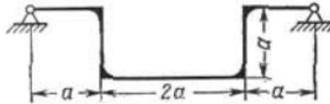
870



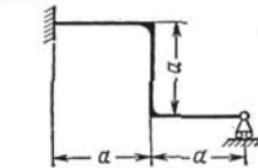
**Problemas 871-875.** Calcular las tensiones normales máximas que surgen en los elementos del sistema al elevarse la temperatura  $\Delta t^\circ \text{C}$ .

Considérese solamente la deformación originada por la flexión. Las secciones simétricas de altura  $h$ , así como el material de  $E$  y  $\alpha$  dados son iguales para todos los elementos de cada sistema.

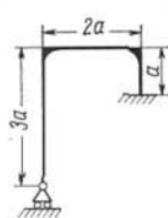
871



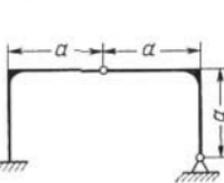
872



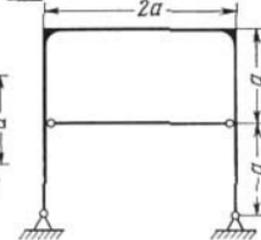
873



874

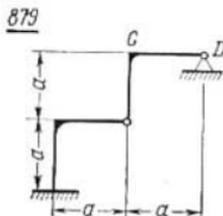
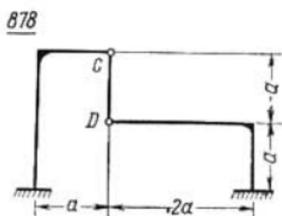
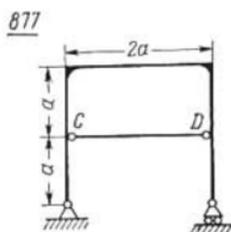
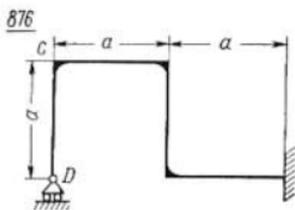


875



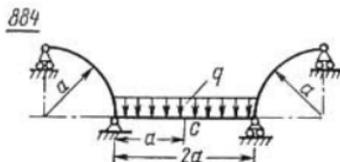
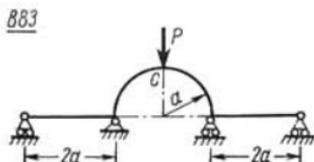
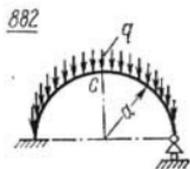
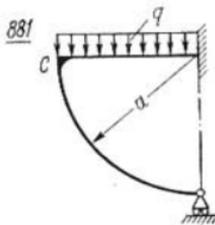
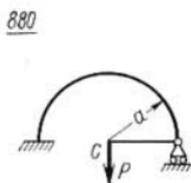
**Problemas 876-879.** Determinar las tensiones de montaje máximas en los sistemas si la longitud del elemento  $CD$  es mayor que la prevista en el proyecto en  $\Delta$ .

Considérese solamente la deformación originada por la flexión. La sección simétrica de altura  $h$  así como el material de  $E$  dado es igual para todos los elementos de cada sistema.



**Problemas 880-884.** Determinar la reacción en el apoyo articulado derecho y el desplazamiento vertical  $\delta$  de la sección  $C$  de los sistemas \*.

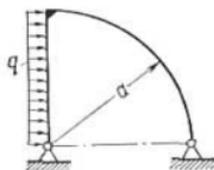
Considérese en el problema 882 que la carga  $q$  está distribuida uniformemente en dirección horizontal.



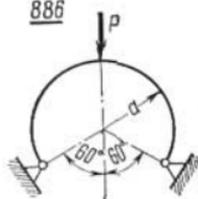
\* En los problemas 880-915 ha de tener en cuenta sólo las deformaciones originadas por el momento flector, considerar las rigideces  $EI$  de todos los elementos del sistema iguales.

**Problemas 885-889.** Determinar las componentes reactivas en los apoyos izquierdos de los sistemas.

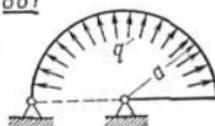
885



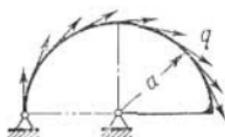
886



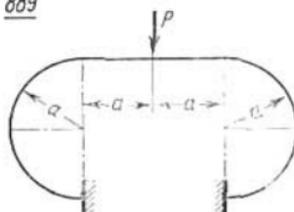
887



888

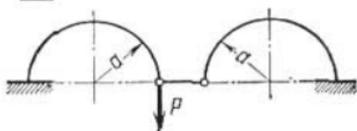


889

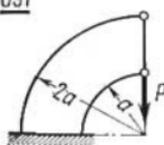


**Problemas 890-895.** Determinar el desplazamiento vertical de la sección de aplicación de la fuerza  $P$ .

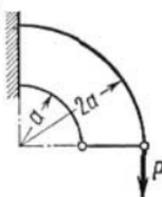
890



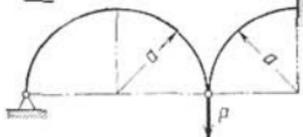
891



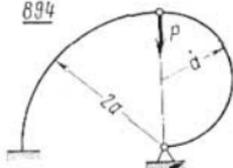
892



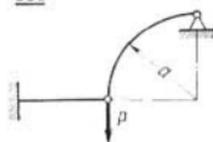
893



894

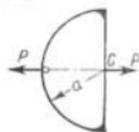


895



**Problemas 896-899.** Determinar los momentos flectores en la sección  $C$  de los sistemas.

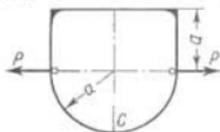
896



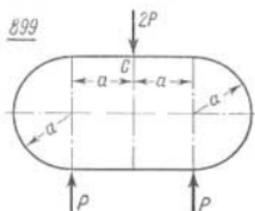
897



898



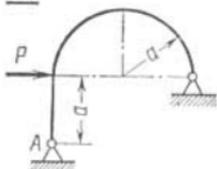
899



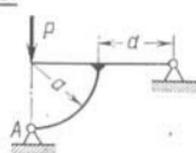
**Problemas 900-906.** Determinar las componentes reactivas en la sección de apoyo *A* de los sistemas.

En el problema 902 la carga *q* está distribuida uniformemente sobre la horizontal.

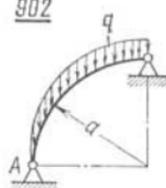
900



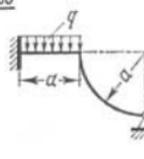
901



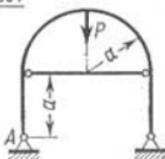
902



903



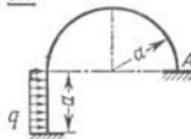
904



905

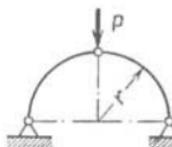
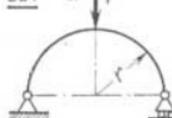


906

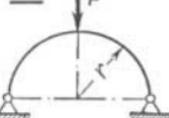


**Problemas 907-910.** Determinar cuántas veces, en los sistemas indicados, el momento flector máximo en valor absoluto y el desplazamiento vertical de la sección media son menores que los correspondientes a la barra curva isostática (figura del problema 907, *a*).

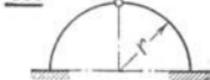
907



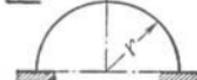
908



909

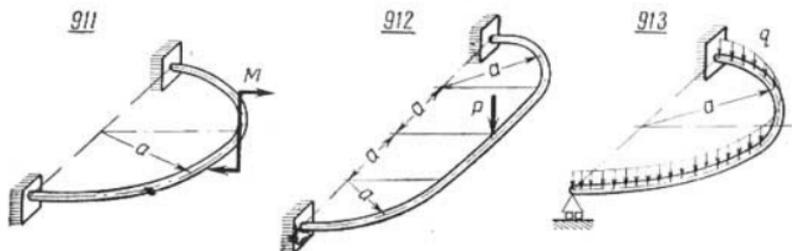


910



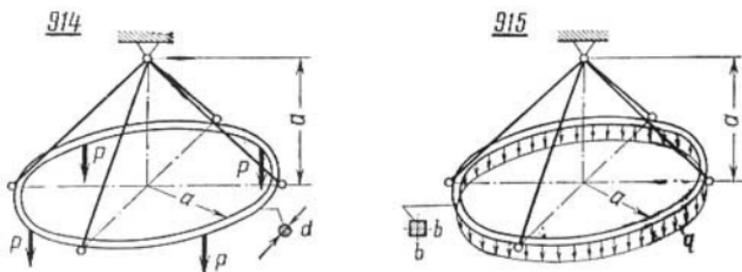
**Problemas 911-913.** Determinar los momentos reactivos en el empotramiento y los desplazamientos verticales de la sección media de las barras curvas.

Las secciones transversales de las barras son circulares y  $G = 0,4 E$ .



**Problemas 914-915.** Determinar las dimensiones necesarias de las secciones transversales de los anillos circulares.

La tensión normal admisible del material de los anillos es  $[\sigma]$ .



### XIII. CALCULO DE TUBOS DE PAREDES GRUESAS

#### § 1. Tubo cilíndrico

En el caso de un tubo de longitud ilimitada sin fondos sometido a presiones uniformes radiales interior  $p_1$ , y exterior  $p_2$  (fig. 203), en un punto arbitrario de la pared situado a la distancia  $\rho$  del centro, las tensiones normales circunferenciales (tangenciales)  $\sigma_t$  y las tensiones radiales  $\sigma_r$ , se determinan por las fórmulas si-

guientes:

$$\sigma_t = \frac{p_1 r_1^2 \left(1 + \frac{r_2^2}{\rho^2}\right) - p_2 r_2^2 \left(1 + \frac{r_1^2}{\rho^2}\right)}{r_2^2 - r_1^2}; \quad (202)$$

$$\sigma_r = \frac{p_1 r_1^2 \left(1 - \frac{r_2^2}{\rho^2}\right) - p_2 r_2^2 \left(1 - \frac{r_1^2}{\rho^2}\right)}{r_2^2 - r_1^2}. \quad (203)$$

La tensión  $\sigma_r < 0$  independientemente de los valores de  $p_1$  y  $p_2$  mientras que la tensión  $\sigma_t$  puede ser mayor o menor que cero según

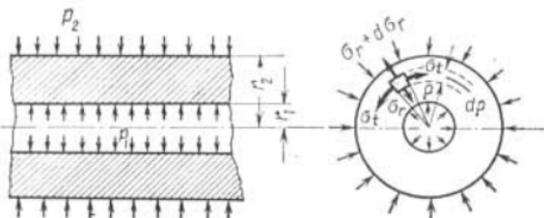


Fig. 203

la relación entre las magnitudes  $p_1$  y  $p_2$ .

$$\text{Si } p_1 > \frac{p_2}{2} \left( \frac{r_2^2}{r_1^2} + 1 \right), \text{ entonces } \sigma_t > 0.$$

En este caso los diagramas de  $\sigma_r$  y  $\sigma_t$  sobre el grueso de la pared del tubo tendrán la configuración dada en la figura 204.

Los valores máximos y mínimos de las tensiones serán,

$$\left. \begin{aligned} \max \sigma_r &= \sigma_{r_{\rho=r_2}} = -p_2, \\ \min \sigma_r &= \sigma_{r_{\rho=r_1}} = -p_1, \\ \max \sigma_t &= \sigma_{t_{\rho=r_1}} = \frac{p_1 (r_1^2 + r_2^2) - 2p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}, \\ \min \sigma_t &= \sigma_{t_{\rho=r_2}} = \frac{2p_1 r_1^2 - p_2 (r_2^2 + r_1^2)}{r_2^2 - r_1^2}. \end{aligned} \right\} \quad (204)$$

$$\text{Si } p_1 = \frac{p_2}{2} \left( \frac{r_2^2}{r_1^2} + 1 \right), \text{ entonces } \min \sigma_t = 0.$$

En los puntos peligrosos de la superficie interior del tubo (fig. 205) la ecuación para el cálculo por la quinta hipótesis de resistencia (hipótesis de Mohr) será,

$$\max \sigma_t - \nu \min \sigma_r \leq [\sigma_{\text{trac}}],$$

de donde se obtiene

$$\frac{r_2}{r_1} = \sqrt{\frac{[\sigma_{\text{trac}}] + (1 - \nu)p_1}{[\sigma_{\text{trac}}] - (1 + \nu)p_1 + 2p_2}}, \quad (205)$$

siendo

$$\nu = \frac{[\sigma_{\text{trac}}]}{[\sigma_{\text{com}}]}.$$

En el caso del material que resista igualmente la tracción que

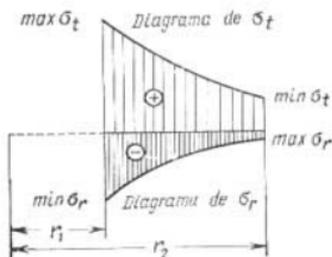


Fig. 204

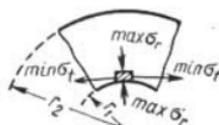


Fig. 205

la compresión,  $[\sigma_{\text{trac}}] = [\sigma_{\text{com}}] = [\sigma]$ ,  $\nu = 1$  y la ecuación (205) se escribirá así,

$$\frac{r_2}{r_1} = \sqrt{\frac{[\sigma]}{[\sigma] - 2p_1 + 2p_2}}. \quad (206)$$

Si  $p_1 < \frac{2p_2}{1 + \frac{r_1^2}{r_2^2}}$ , entonces  $\sigma_t < 0$ . En este caso los diagramas

de  $\sigma_r$  y  $\sigma_t$  resultan como los de la figura 206.

Los valores máximos y mínimos de las tensiones serán,

$$\left. \begin{aligned} \max \sigma_r &= \sigma_{r \rho=r_1} = -p_1, \\ \min \sigma_r &= \sigma_{r \rho=r_2} = -p_2, \\ \max \sigma_t &= \sigma_{t \rho=r_2} = \frac{2p_1 r_1^2 - p_2 (r_2^2 + r_1^2)}{r_2^2 - r_1^2}, \\ \min \sigma_t &= \sigma_{t \rho=r_1} = \frac{p_1 (r_2^2 + r_1^2) - 2p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}. \end{aligned} \right\} \quad (207)$$

Si  $p_1 = \frac{2p_2}{1 + \frac{r_1^2}{r_2^2}}$ , entonces  $\max \sigma_t = 0$ .

En los puntos peligrosos de la superficie interior del tubo (fig. 207) la ecuación para el cálculo por la quinta hipótesis de resistencia será la siguiente,

$$-\nu \min \sigma_t = [\sigma_{\text{trac}}]$$

de donde se obtiene

$$\frac{r_2}{r_1} = \sqrt{\frac{[\sigma_{\text{com}}] - p_1}{[\sigma_{\text{com}}] + p_1 - 2p_2}} \quad (208)$$

Cuando la relación de las presiones se encuentra entre los límites

$$\frac{1}{2} \left( \frac{r_2^2}{r_1^2} + 1 \right) < \frac{p_1}{p_2} < \frac{1}{2} \left( \frac{r_1^2}{r_2^2} + 1 \right)$$

los valores de  $\sigma_t$  resultan de signo opuesto en el grueso de la pared del tubo.

Si  $p_1 = p_2 = p$ , entonces  $\sigma_t = \sigma_r = -p$ .

El desplazamiento radial  $\delta$  de un punto cualquiera de la pared

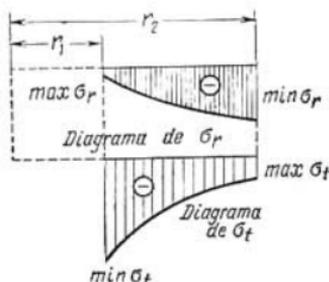


Fig. 206

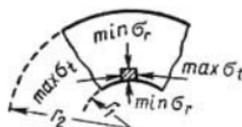


Fig. 207

del tubo se determina por la fórmula,

$$\delta = \frac{\rho}{E} (\sigma_t - \mu \sigma_r) = \frac{\rho}{E (r_2^2 - r_1^2)} \left\{ p_1 r_1^2 \left[ 1 + \frac{r_2^2}{\rho^2} - \mu \left( 1 - \frac{r_2^2}{\rho^2} \right) \right] - p_2 r_2^2 \left[ 1 + \frac{r_1^2}{\rho^2} - \mu \left( 1 - \frac{r_1^2}{\rho^2} \right) \right] \right\}, \quad (209)$$

siendo  $E$  y  $\mu$  el módulo de elasticidad longitudinal y el coeficiente de Poisson del material del tubo respectivamente.

La variación del radio interior del tubo es,

$$\Delta r_1 = \delta_{\rho=r_1} = \frac{r_1}{E} \left[ p_1 \left( \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} + \mu \right) - 2p_2 \frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \right] \quad (210)$$

y la variación del radio exterior,

$$\Delta r_2 = \delta_{\rho=r_2} = \frac{r_2}{E} \left[ 2p_1 \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} - p_2 \left( \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} - \mu \right) \right]. \quad (241)$$

Si sobre el tubo actúa solamente una presión interior  $p_1$ , entonces en las fórmulas (202-241) deberá considerarse  $p_2 = 0$ .

Los diagramas de  $\sigma_t$  y  $\sigma_r$  serán análogos a los indicados en la figura 204, pero con  $p_2 = 0$ .

Si sobre el tubo actúa solamente una presión exterior  $p_2$ , entonces en las fórmulas (202-241) deberá considerarse  $p_1 = 0$ .

Los diagramas de  $\sigma_t$  y  $\sigma_r$  serán análogos a los indicados en la figura 206, pero con  $p_1 = 0$ .

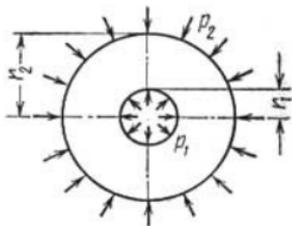


Fig. 208

**Ejemplo 112.** Dado:  $p_2 = 1 \text{ MN/m}^2$ ,  $r_1 = 4 \text{ cm}$ ,  $r_2 = 8 \text{ cm}$ ,  $[\sigma_{\text{trac}}] = 30 \text{ MN/m}^2$ ,  $[\sigma_{\text{com}}] = 120 \text{ MN/m}^2$ ,  $E = 1,2 \cdot 10^5 \text{ MN/m}^2$  y  $\mu = 0,24$  (fig. 208).

Determinar  $p_1$ ,  $\Delta r_1$  y  $\Delta r_2$  considerando que  $p_1 > p_2$ .

*Resolución.* Por la fórmula (205) se obtiene,

$$\frac{r_2}{r_1} = \sqrt{\frac{[\sigma_{\text{trac}}] + (1 - \nu)p_1}{[\sigma_{\text{trac}}] - (1 + \nu)p_1 + 2p_2}}$$

Como  $\nu = \frac{[\sigma_{\text{trac}}]}{[\sigma_{\text{com}}]} = 0,25$  y  $\frac{r_2}{r_1} = 2$ , introduciendo estos valores y después de elevar los dos miembros al cuadrado, obtendremos:

$$4 = \frac{30 + 0,75p_1}{30 - 1,25p_1 + 2}$$

de donde resulta,  $p_1 = \frac{98}{5,75} \approx 17 \text{ MN/m}^2$ . Por la fórmula (210)

hallamos,

$$\Delta r_1 = \frac{4}{1,2 \cdot 10^5} \left[ 17 \left( \frac{64 + 16}{64 - 16} + 0,24 \right) - 2 \frac{64}{64 - 16} \right] \approx \approx 0,99 \cdot 10^{-3} \text{ cm} \approx 0,01 \text{ mm},$$

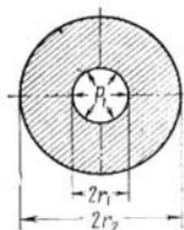
y por la fórmula (241),

$$\Delta r_2 = \frac{8}{1,2 \cdot 10^5} \left[ 2 \cdot 17 \cdot \frac{16}{64 - 16} - \left( \frac{64 + 16}{64 - 16} - 0,24 \right) \right] \approx \approx 0,66 \cdot 10^{-3} \text{ cm} \approx 0,007 \text{ mm}.$$

**Problemas 916-918.** Determinar las magnitudes señaladas en las condiciones de los problemas.

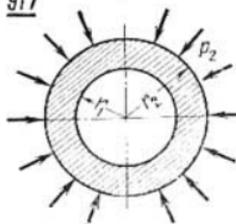
En los problemas 916, 917, 918, *a* empléese la tercera hipótesis de resistencia y en el problema 918, *b*, la quinta.

916



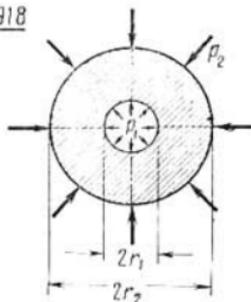
$$\begin{aligned} p_1 &= 2000 \text{ kgf/cm}^2 \\ r_1 &= 10 \text{ cm} \\ [\sigma] &= 8000 \text{ kgf/cm}^2 \\ E &= 2 \cdot 10^6 \text{ kgf/cm}^2 \\ \mu &= 0,3 \\ r_2 &= ? \\ \Delta r_1 &= ? \end{aligned}$$

917



$$\begin{aligned} r_1 &= 10 \text{ cm} \\ r_2 &= 15 \text{ cm} \\ [\sigma] &= 400 \text{ MN/m}^2 \\ \mu &= 0,3 \\ E &= 2 \cdot 10^5 \text{ MN/m}^2 \\ p_2 &= ? \\ \Delta r_2 &= ? \end{aligned}$$

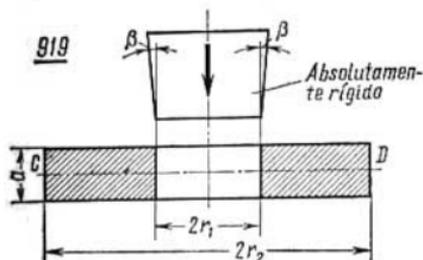
918



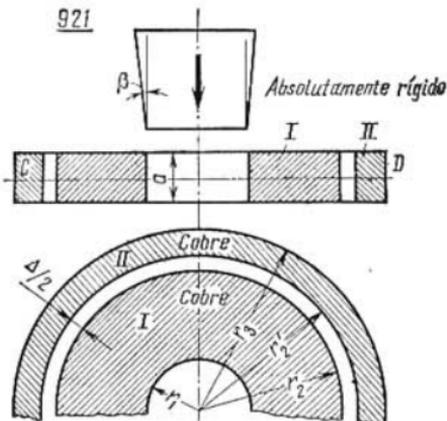
a)	$p_1 = 2000 \text{ kgf/cm}^2$	b)	$p_1 \gg p_2$
	$p_2 = 500 \text{ kgf/cm}^2$		$p_2 = 1,5 \text{ MN/m}^2$
	$r_1 = 10 \text{ cm}$		$r_1 = 5 \text{ cm}; r_2 = 10 \text{ cm}$
	$E = 2 \cdot 10^6 \text{ kgf/cm}^2$		$[\sigma_{\text{trac}}] = 30 \text{ MN/m}^2$
	$\mu = 0,3$		$[\sigma_{\text{cam}}] = 120 \text{ MN/m}^2$
	$[\sigma] = 6000 \text{ kgf/cm}^2$		$E = 1,2 \cdot 10^5 \text{ MN/m}^2$
	$r_2 = ?$		$\mu = 0,25$
	$\Delta r_1 = ? \quad \Delta r_2 = ?$		$p_1 = ?$

**Problema 919.** El punzón cónico absolutamente rígido de pequeño ángulo  $\beta$  de conicidad se introduce en un anillo de paredes gruesas de longitud  $a$ . Determinar la presión  $p_0$  que aparece entre

919



921



la cuña y el anillo en la sección media del último  $CD$ , cuando la cuña penetra en toda la altura  $a$  del anillo. Calcúlese también las tensiones máximas que aparecen en la sección  $CD$  del anillo.

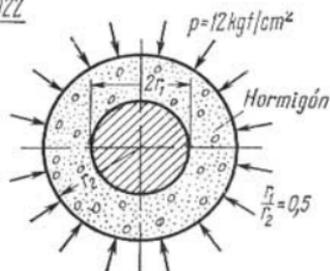
**Problema 920.** Determinése el ángulo de conicidad  $\beta$  del punzón en cuña del problema anterior que origina en la sección media del anillo un incremento del radio de la superficie exterior de  $\Delta r_2 = 0,2$  mm, si  $r_1 = 10$  cm,  $r_2 = 30$  cm,  $E = 10^6$  kgf/cm<sup>2</sup>,  $\mu = 0,34$  y  $a = 5$  cm.

**Problema 921.** Determinar el ángulo de conicidad  $\beta$  del punzón cónico introducido en el orificio interior a la magnitud  $a$ , necesario para que se cierre el espacio libre entre los tubos  $I$  y  $II$  y para que surja una presión mutua de  $p = 100$  kgf/cm<sup>2</sup>.

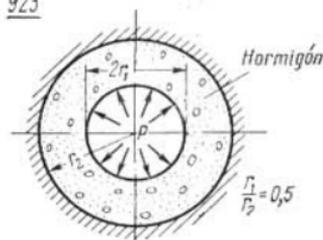
Realícese el cálculo para la sección media  $CD$  suponiendo que  $r_1 = 10$  cm,  $r_2 = 30$  cm,  $r_3 = 40$  cm,  $E = 10^6$  kgf/cm<sup>2</sup>,  $\mu = 0,34$ ,  $a = 5$  cm y  $\Delta = 0,4$  mm.

**Problema 922.** Determinar la presión  $p_0$  entre el tubo de hormigón y núcleo absolutamente rígido y comprobar la resistencia del tubo por la quinta hipótesis de resistencia. Admitase  $E_{\text{hor}} = 2 \cdot 10^5$  kgf/cm<sup>2</sup>,  $\mu_{\text{hor}} = 0,16$ ,  $[\sigma_{\text{com}}]_{\text{hor}} = 20 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$  y  $[\sigma_{\text{trac}}]_{\text{hor}} = 4$  kgf/cm<sup>2</sup>.

922



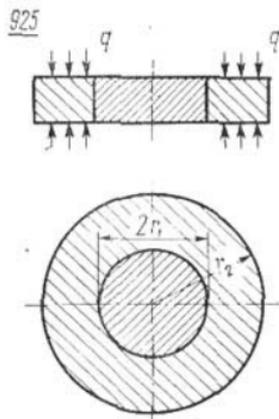
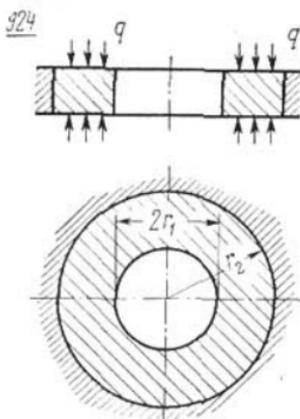
923



**Problema 923.** Determinar la magnitud de la presión interior máxima  $p$  que se puede aplicar al tubo de hormigón zunchado por una cáscara absolutamente rígida y la presión límite  $p_0$ , si  $E_{\text{hor}} = 2 \cdot 10^5$  kgf/cm<sup>2</sup>,  $\mu_{\text{hor}} = 0,16$ ,  $[\sigma_{\text{com}}]_{\text{hor}} = 50$  kgf/cm<sup>2</sup> y  $[\sigma_{\text{trac}}]_{\text{hor}} = 5$  kgf/cm<sup>2</sup>.

**Problema 924.** Determinar la presión límite  $p_0$  entre el anillo y la cáscara absolutamente rígida si se conocen los valores de  $q$ ,  $r_1$ ,  $r_2$  y  $\mu$ . Considérese que el módulo de elasticidad del material del anillo es pequeño.

**Problema 925.** Determinar la presión  $p_0$  entre el anillo y el núcleo absolutamente rígido considerando dados  $q$ ,  $r_1$ ,  $r_2$  y  $\mu$ .



## § 2. Tubos cilíndricos compuestos

Cuando actúan grandes presiones interiores se emplean tubos compuestos por dos o más cilindros prensados o ajustados en caliente. La resistencia de la unión de los tubos y las tensiones iniciales que

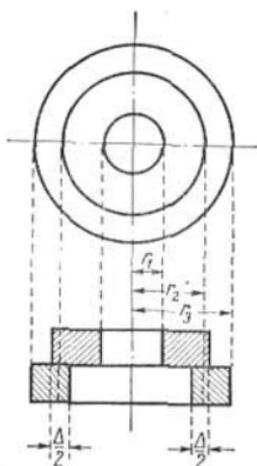


Fig. 209

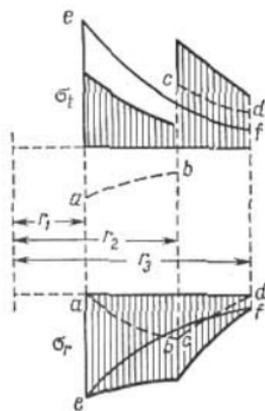


Fig. 210

surgen en sus paredes son consecuencia de que el diámetro interior del tubo exterior es una magnitud  $\Delta$  menor que el diámetro exterior del cilindro interior (fig. 209).

Cuando los cilindros que se unen son de igual longitud, la presión de contacto  $p_0$  se distribuye uniformemente sobre la superficie

de ajuste y tiene el valor siguiente:

$$p_0 = \frac{\frac{\Delta}{2r_2}}{\frac{1}{E_1} \left( \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} - \mu_1 \right) + \frac{1}{E_2} \left( \frac{r_3^2 + r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} + \mu_2 \right)}, \quad (212)$$

siendo  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $\mu_1$  y  $\mu_2$  los módulos de elasticidad longitudinal y los coeficientes de Poisson de los materiales de los cilindros interior y exterior.

Si los cilindros son del mismo material, entonces

$$E_1 = E_2 = E, \quad \mu_1 = \mu_2$$

y

$$p_0 = \frac{\Delta E}{4r_2^3} \cdot \frac{(r_3^2 - r_2^2)(r_2^2 - r_1^2)}{r_3^2 - r_1^2}. \quad (213)$$

Las tensiones iniciales en las paredes de los cilindros que se unen, originadas por la presión  $p_0$  se obtienen por las fórmulas (202) y (203). Se debe tener en cuenta que para el cilindro interior de radios  $r_1$  y  $r_2$  la presión de contacto  $p_0$  es presión exterior (la presión interior es igual a cero) mientras que para el exterior, de radios  $r_2$  y  $r_3$ , la presión de contacto  $p_0$  resulta presión interior (la presión exterior es igual a cero).

Los diagramas aproximados de las tensiones  $\sigma_t$  y  $\sigma_r$  originadas por la presión  $p_0$  en las uniones de los cilindros están representados en la figura 240 por las líneas punteadas  $ab$  y  $cd$ .

Cuando sobre el tubo compuesto actúa una presión interior grande  $p_1$  y una presión exterior pequeña  $p_2$  las tensiones  $\sigma_t$  y  $\sigma_r$  se obtienen por las fórmulas (202) y (203), es decir, como en el caso de un tubo monolítico de radios  $r_1$  y  $r_3$ .

Los diagramas aproximados de estas tensiones están dados en la figura 240 por las líneas continuas finas  $ef$ .

Las tensiones resultantes en el tubo compuesto se obtienen por el método de superposición de las tensiones, representadas por los diagramas  $ab$ ,  $cd$  y  $ef$ .

Los diagramas resultantes aproximados de las tensiones  $\sigma_t$  y  $\sigma_r$  se dan por las partes rayadas de la figura 240.

Si los cilindros componentes del tubo son de material que resiste igualmente la tracción que la compresión, entonces, según la tercera hipótesis de resistencia la relación óptima entre los radios y la magnitud de la apretura se establece por las fórmulas:

$$r_2 = \sqrt{r_1 r_3}, \quad (214)$$

$$\Delta = \frac{2r_2}{E} (p_1 - p_2). \quad (215)$$

La presión interior máxima, excesiva será,

$$\max(p_1 - p_2) = \frac{r_3 - r_1}{r_3} [\sigma]. \quad (216)$$

Este método de cálculo es válido también en el caso de tubos compuestos por tres y más cilindros. Partiendo de la apretura entre los dos primeros cilindros se establece la presión de contacto entre ellos y a partir de esta presión, las tensiones iniciales en estos cilindros. Partiendo de la segunda apretura, entre el bloque compuesto por dos cilindros (interpretado como un solo cilindro de iguales dimensiones) y el tercero, de manera análoga, se determina la nueva presión de contacto en la superficie de encaje y a través de ella, las tensiones iniciales en el bloque compuesto por dos cilindros y en el tercer cilindro.

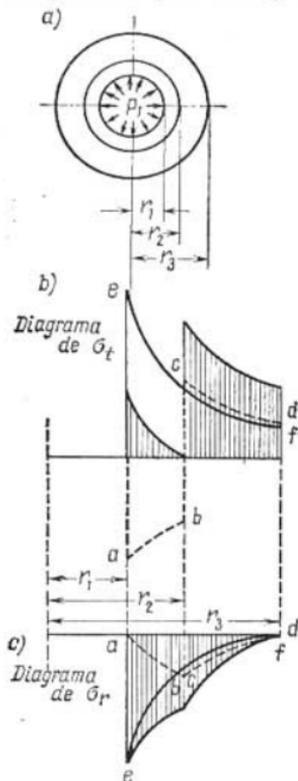


Fig. 211

Las tensiones iniciales resultantes en el bloque de tres cilindros se obtienen por el método de superposición de las tensiones iniciales obtenidas correspondientes al primero y al segundo ajuste. Las tensiones originadas por la presión de trabajo en el bloque constituido por tres cilindros se obtienen como en el caso de un tubo único macizo de dimensiones generales. La suma algebraica de estas tensiones nos dará los valores de las tensiones para comprobar la resistencia.

La adición de un cuarto o más cilindros conduce a la necesidad de determinar una presión de contacto nueva y unas tensiones iniciales suplementarias.

Al encajar un cilindro vacío en macizo la tensión de contacto se determina por la fórmula (212) ó (213), suponiendo  $r_1 = 0$ .

**Ejemplo 113.** Dado:  $p_1 = 2\,000 \text{ kgf/cm}^2$ ,  $p_2 = 0$ ,  $r_1 = 8 \text{ cm}$ ,  $E = 2 \cdot 10^6 \text{ kgf/cm}^2$  y  $[\sigma] = 3\,000 \text{ kgf/cm}^2$  (fig. 211, a).

Diseñar un tubo compuesto por dos cilindros de dimensiones óptimas y comprobarlo por la tercera hipótesis de resistencia.

**Resolución.** Por la fórmula (216) determinamos el radio exterior del tubo compuesto,

$$r_3 = \frac{[\sigma] r_1}{[\sigma] - p_1} = \frac{3\,000 \cdot 8}{3\,000 - 2\,000} = 24 \text{ cm.}$$

Por la fórmula (214) hallamos el radio de la superficie de encaje del tubo,

$$r_2 = \sqrt{r_1 r_3} = \sqrt{8 \cdot 24} = 8\sqrt{3} \approx 13,856 \text{ cm.}$$

Para simplificar el cálculo admitimos  $r_2 = 14$  cm. De la fórmula (215) hallamos la magnitud de la apretura necesaria,

$$\Delta = \frac{2r_2}{E} p_1 = \frac{2 \cdot 14}{2 \cdot 10^6} \cdot 2 \cdot 10^3 = 0,028 \text{ cm.}$$

y de la fórmula (213), la presión de contacto,

$$\begin{aligned} p_0 &= \frac{\Delta E}{4r_2} \cdot \frac{\left[1 - \left(\frac{r_2}{r_3}\right)^2\right] \left[1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\right]}{1 - \left(\frac{r_1}{r_3}\right)^2} = \\ &= \frac{0,028 \cdot 2 \cdot 10^6}{4 \cdot 14} \frac{\left[1 - \left(\frac{7}{12}\right)^2\right] \left[1 - \left(\frac{4}{7}\right)^2\right]}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} \approx 500 \text{ kgf/cm}^2. \end{aligned}$$

Determinamos ahora las tensiones iniciales correspondientes a la presión de contacto  $p_0$ .

*En la pared del cilindro interior.*

De las fórmulas (207), para  $p_1 = 0$  y  $p_2 = p_0$  hallamos,

$$\begin{aligned} \max \sigma_t = \sigma_t_{\rho=r_2} &= -p_0 \frac{1 + \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2}{1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2} = -500 \frac{1 + \left(\frac{4}{7}\right)^2}{1 - \left(\frac{4}{7}\right)^2} \approx \\ &\approx -985 \text{ kgf/cm}^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min \sigma_t = \sigma_t_{\rho=r_1} &= -2p_0 \frac{1}{1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2} = -10^3 \frac{1}{1 - \left(\frac{4}{7}\right)^2} \approx \\ &\approx -1485 \text{ kgf/cm}^2, \end{aligned}$$

$$\max \sigma_r = \sigma_r_{\rho=r_1} = 0, \quad \min \sigma_r = \sigma_r_{\rho=r_2} = -p_0 = -500 \text{ kgf/cm}^2.$$

Los diagramas de  $\sigma_t$  y  $\sigma_r$  están dados en la figura 211,  $b$  y  $c$  por las líneas punteadas  $ab$ .

En la pared del cilindro exterior.

Por las fórmulas (204), considerando  $p_1 = p_0$ ,  $p_2 = 0$ ,  $r_1 = r_2$  y  $r_2 = r_3$ , obtendremos,

$$\max \sigma_t = \sigma_t_{\rho=r_2} = p_0 \frac{1 + \left(\frac{r_2}{r_3}\right)^2}{1 - \left(\frac{r_2}{r_3}\right)^2} = 500 \frac{1 + \left(\frac{7}{12}\right)^2}{1 - \left(\frac{7}{12}\right)^2} \approx 1\,016 \text{ kgf/cm}^2,$$

$$\min \sigma_t = \sigma_t_{\rho=r_3} = 2p_0 \frac{1}{\left(\frac{r_3}{r_2}\right)^2 - 1} = 10^3 \frac{1}{\left(\frac{12}{7}\right)^2 - 1} \approx 516 \text{ kgf/cm}^2,$$

$$\max \sigma_r = \sigma_r_{\rho=r_3} = 0,$$

$$\min \sigma_r = \sigma_r_{\rho=r_2} = -p_0 = -500 \text{ kgf/cm}^2.$$

Los diagramas de  $\sigma_t$  y  $\sigma_r$  están dados en la figura 211, *b* y *c* por las líneas punteadas *cd*.

Calculamos las tensiones en la pared del bloque compuesto por dos cilindros (como un solo tubo) correspondientes a la presión interior  $p_1$ .

Por las fórmulas (204) para  $p_1 = 2\,000 \text{ kgf/cm}^2$  y  $p_2 = 0$ , considerando  $r_1 = r_1$  y  $r_2 = r_3$  hallaremos,

$$\max \sigma_t = \sigma_t_{\rho=r_1} = p_1 \frac{1 + \left(\frac{r_1}{r_3}\right)^2}{1 - \left(\frac{r_1}{r_3}\right)^2} = 2 \cdot 10^3 \frac{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = 2\,500 \text{ kgf/cm}^2,$$

$$\min \sigma_t = \sigma_t_{\rho=r_3} = 2p_1 \frac{1}{\left(\frac{r_3}{r_1}\right)^2 - 1} = 2 \cdot 2 \cdot 10^3 \frac{1}{3^2 - 1} = 500 \text{ kgf/cm}^2,$$

$$\max \sigma_r = \sigma_r_{\rho=r_3} = 0,$$

$$\min \sigma_r = \sigma_r_{\rho=r_1} = -p_1 = -2\,000 \text{ kgf/cm}^2.$$

Por las fórmulas (202) y (203) para  $p_1 = 2\,000 \text{ kgf/cm}^2$ ,  $p_2 = 0$ ,  $r_1 = r_1$  y  $r_2 = r_3$  hallamos las tensiones en los puntos de la superficie

de ajuste,

$$\sigma_{t_{\rho=r_2}} = p_1 \frac{1 + \left(\frac{r_3}{r_2}\right)^2}{\left(\frac{r_3}{r_1}\right)^2 - 1} = 2 \cdot 10^3 \frac{1 + \left(\frac{12}{7}\right)^2}{3^2 - 1} \approx 985 \text{ kgf/cm}^2,$$

$$\sigma_{r_{\rho=r_2}} = p_1 \frac{1 - \left(\frac{r_3}{r_2}\right)^2}{\left(\frac{r_3}{r_1}\right)^2 - 1} = 2 \cdot 10^3 \frac{1 - \left(\frac{12}{7}\right)^2}{3^2 - 1} \approx -485 \text{ kgf/cm}^2.$$

Los diagramas de  $\sigma_t$  y  $\sigma_r$  están dados en la figura 211, *b* y *c* por las líneas continuas *ef*.

Hallamos las tensiones resultantes en la pared del cilindro interior,

$$\sigma_{t_{\rho=r_1}} = -1485 + 2500 = 1015 \text{ kgf/cm}^2;$$

$$\sigma_{t_{\rho=r_2}} = -985 + 985 = 0.$$

$$\sigma_{r_{\rho=r_1}} = -2000 \text{ kgf/cm}^2; \quad \sigma_{r_{\rho=r_2}} = -500 - 485 = -985 \text{ kgf/cm}^2,$$

y en la del cilindro exterior,

$$\sigma_{t_{\rho=r_2}} = 1016 + 985 = 2001 \text{ kgf/cm}^2;$$

$$\sigma_{t_{\rho=r_3}} = 516 + 500 = 1016 \text{ kgf/cm}^2;$$

$$\sigma_{r_{\rho=r_2}} = -500 - 485 = -985 \text{ kgf/cm}^2;$$

$$\sigma_{r_{\rho=r_3}} = 0.$$

Los diagramas de las tensiones resultantes  $\sigma_t$  y  $\sigma_r$  se dan en la figura 211, *b* y *c* por las áreas rayadas.

Las tensiones equivalentes, según la tercera hipótesis de resistencia, resultan:

en los puntos de la superficie interior del cilindro también interior,

$$\sigma_{e_{111}} = \sigma_{t_{\rho=r_1}} - \sigma_{r_{\rho=r_1}} = 1015 + 2000 = 3015 \text{ kgf/cm}^2,$$

en los puntos de la superficie interior del cilindro exterior,

$$\sigma_{e_{111}} = \sigma_{t_{\rho=r_2}} - \sigma_{r_{\rho=r_2}} = 2001 + 985 = 2986 \text{ kgf/cm}^2.$$

La desviación insignificante de la condición de igual resistencia del material en los puntos peligrosos de los cilindros es debida a que el valor de  $r_2$  introducido en el cálculo, no es exacto.

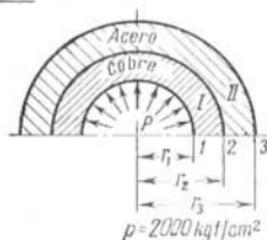
La condición de resistencia  $\sigma_{e_{III}} = [\sigma]$  se puede considerar cumplida ya que la sobretensión constituye solamente el 0,5%.

**Problemas 926-930.** Determinar las tensiones normales radiales  $\sigma_r$  y tangenciales  $\sigma_t$  y las presiones en las superficies de contacto  $p_0$  en los tubos compuestos, originadas por la presión interior  $p_i$  (problemas 926, 927), por el calentamiento  $\Delta t^\circ\text{C}$  (problema 928) y por el ajuste a presión de apretura  $\Delta$  (problemas 929, 930).

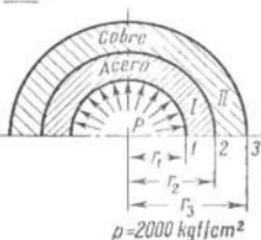
En los problemas 926-928 admitase:  $E_{ac} = 2 \cdot 10^6 \text{ kgf/cm}^2$ ,  $\mu_{ac} = 0,3$ ,  $\alpha_{ac} = 12,5 \cdot 10^{-6}$ ,  $E_{co} = 1 \cdot 10^6 \text{ kgf/cm}^2$ ,  $\mu_{co} = 0,34$ ,  $\alpha_{co} = 16,5 \cdot 10^{-6}$ ,  $r_1 = 10 \text{ cm}$ ,  $r_2 = 20 \text{ cm}$  y  $r_3 = 40 \text{ cm}$ .

En los problemas 929, 930 determinése solamente  $p_0$ .

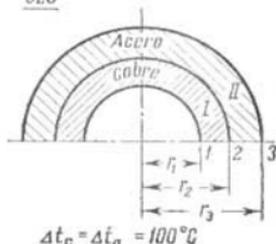
926



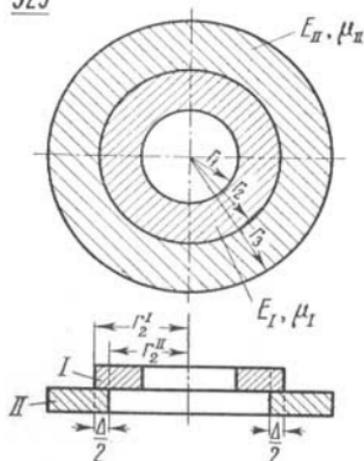
927



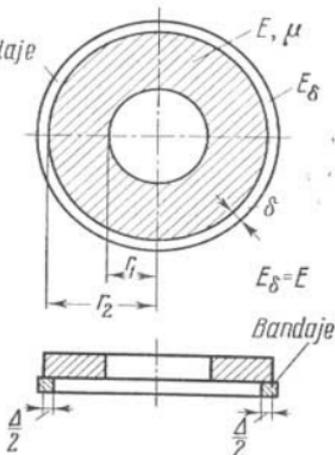
928



929



930



**Problema 931.** Para el tubo compuesto doble determinar:  
1) las tensiones originadas por el ajuste a presión de apretura  $\Delta = 0,4 \text{ mm}$ ;

2) las tensiones originadas por la presión interior  $p_0 = 2\,000 \text{ kgf/cm}^2$ ,

3) las tensiones totales,

4) la disminución, en por ciento, de la tensión efectiva correspondiente a la tercera hipótesis de resistencia en el tubo compuesto en comparación con el tubo macizo de las mismas dimensiones. Admitase  $r_1 = 10 \text{ cm}$ ,  $r_2 = 25 \text{ cm}$  y  $r_3 = 50 \text{ cm}$ .

**Problema 932.** Diseñar el tubo compuesto doble de dimensiones óptimas por la tercera hipótesis de resistencia.

Considerar dados:  $r_1 = 10 \text{ cm}$ ,  $E = 2 \cdot 10^6 \text{ kgf/cm}^2$ ,  $\mu = 0,3$ ,  $[\sigma] = 4\,000 \text{ kgf/cm}^2$ ,  $p = 3\,000 \text{ kgf/cm}^2$ .

**Problema 933.** Determinar para el tubo compuesto triple,

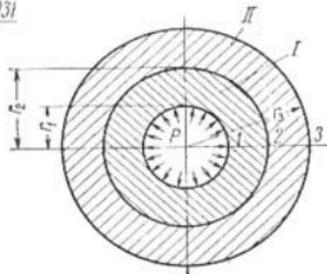
1) las tensiones originadas por los ajustes a presión  $\Delta_1$  y  $\Delta_2$ ,

2) las tensiones originadas por la presión interior  $p$ ;

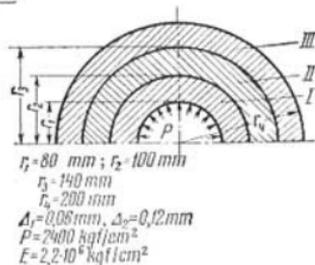
3) las tensiones efectivas por la tercera hipótesis de resistencia;

4) el porcentaje de reducción de las tensiones efectivas en el tubo compuesto en comparación con el tubo macizo de las mismas dimensiones.

932



933



## XIV. ACCION DINAMICA DE LAS FUERZAS

### § 1. Cálculo de sólidos (sistemas) en movimiento (considerando las fuerzas de inercia)

La acción dinámica de las fuerzas se caracteriza por la existencia de aceleraciones en los elementos del sólido en cuestión (sistema). Según sean las aceleraciones que surgen, varía el carácter de la deformación y de la destrucción del sólido.

La existencia de aceleraciones conduce a la aparición de fuerzas de inercia en sentido contrario a las aceleraciones. La fuerza de inercia elemental  $dP_i$  se obtiene como el producto de la masa  $dm$  de

un volumen elemental del cuerpo  $dV$  por su aceleración  $a$ ,

$$dP_1 = dm \cdot a = \frac{\gamma}{g} a \cdot dV,$$

siendo  $\gamma$  el peso de la unidad de volumen del material del sólido,  $g$  la aceleración de la gravedad.

En la figura 212, *a* está representado el caso de un movimiento de traslación no uniforme y en la figura 212, *b* el de una rotación uniforme.

Si durante el movimiento, los elementos del sólido sufren aceleraciones constantes, nada de particular ocurrirá en el comportamiento del material del sólido. En este caso las tensiones y las deformaciones se podrán obtener como en el caso de sollicitación estática por fuerzas exteriores y fuerzas de inercia.

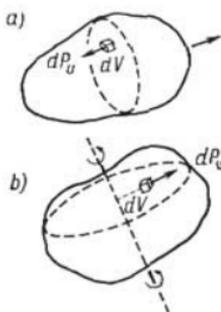


Fig. 212

Si el sólido que lleva fijos ciertos pesos es suficientemente rígido, entonces por la ley del movimiento del sólido se establecen las aceleraciones de sus elementos y de los pesos y por éstas las fuerzas de inercia. Estas fuerzas de inercia se suman al peso propio del sólido, a los pesos fijos y a todas las fuerzas exteriores aplicadas y se considera el sólido en reposo. El cálculo se realiza entonces por los mismos métodos que se establecieron para el caso de sollicitación estática.

Si el peso de las masas fijas que lleva el sólido es grande, en comparación con su peso propio, y las fuerzas de inercia del sólido son pequeñas, en comparación con las de las masas fijas, entonces al calcular el sólido por resistencia y rigidez se podrá prescindir de su peso propio.

En los casos cuando las orientaciones de las aceleraciones  $a$  del movimiento del sólido dado coinciden con la línea de acción de la aceleración de la gravedad  $g$  el tipo de deformación originada por las fuerzas de inercia coincide con el de la deformación creada por el peso propio y las masas que lleva. Si aparte de éstas no existen otras fuerzas aplicadas al sólido entonces los esfuerzos generalizados dinámicos  $P_d$ , las tensiones  $p_d$  (normales  $\sigma_d$  y tangenciales  $\tau_d$ ) y los desplazamientos  $\delta_d$  (teniendo en cuenta las fuerzas de inercia) convendrá calcularlos en función de las magnitudes  $P$ ,  $p$  y  $\delta$  correspondientes a la sollicitación estática sin las fuerzas de inercia y el coeficiente dinámico,

$$k_d = 1 + \frac{a}{g} \quad (217)$$

por las fórmulas,

$$\left. \begin{aligned} P_d &= k_d P, \\ p_d &= k_d p, \\ \delta_d &= k_d \delta. \end{aligned} \right\} \quad (218)$$

En los casos cuando las orientaciones de las aceleraciones  $a$  del movimiento dado del sólido no coinciden con la de la aceleración de la gravedad  $g$ , el tipo de deformación del cuerpo, originado por las fuerzas de inercia ya no corresponderá al de la deformación debida al peso propio y a las masas que lleva. Al calcular el sólido en este caso se deberán considerar las tensiones y deformaciones correspondientes a cada tipo de deformación como esto se realiza para las sollicitaciones estáticas.

**Ejemplo 114.** La barra prismática de longitud  $l$  que soporta dos masas de peso  $Q_1$  y  $Q_2$  se encuentra en movimiento uniformemente acelerado vertical (hacia arriba), recorriendo en los primeros  $t$  segundos el espacio  $S$  (fig. 213).

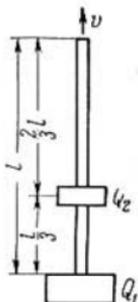


Fig. 213

Determinar el área necesaria  $F$  de la sección transversal de la barra y su alargamiento dinámico si el peso por unidad de volumen del material de la barra es  $\gamma$ , el módulo de elasticidad longitudinal  $E$  y la tensión admisible a la tracción,  $[\sigma]$ .

*Resolución.* El esfuerzo axial estático máximo en la sección superior de la barra es,

$$\max N = Q_1 + Q_2 + \gamma Fl.$$

La tensión máxima normal estática,

$$\max \sigma = \frac{\max N}{F} = \frac{Q_1 + Q_2}{F} + \gamma l.$$

Como la aceleración del movimiento dado  $a = \frac{2S}{t^2}$ , está dirigida verticalmente hacia arriba, el coeficiente dinámico resultará,

$$k_d = 1 + \frac{a}{g}.$$

La tensión máxima dinámica será,

$$\max \sigma_d = k_d \max \sigma = k_d \left( \frac{Q_1 + Q_2}{F} + \gamma l \right).$$

Según la condición de resistencia,

$$\max \sigma_d = k_d \max \sigma \leq [\sigma]$$

$$\max \sigma = \frac{Q_1 + Q_2}{F} + \gamma l \leq \frac{[\sigma]}{k_d}.$$

De aquí se obtiene el área necesaria de la sección transversal de la barra,

$$F \geq \frac{Q_1 + Q_2}{\frac{[\sigma]}{k_d} - \gamma l}.$$

El alargamiento de la barra de área  $F$  cuando las fuerzas actúan estáticamente es,

$$\Delta l = \left( Q_1 + \frac{2}{3} Q_2 + \frac{1}{2} \gamma Fl \right) \frac{1}{EF}.$$

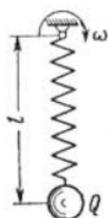


Fig. 214

El alargamiento dinámico de la barra será entonces,  $\Delta l_d = k_d \Delta l$ .

**Ejemplo 115.** Un resorte helicoidal cilíndrico de paso pequeño, de longitud  $l = 30$  cm, de radio de la espira  $R = 2$  cm, de radio del hilo  $r = 0,2$  cm y de  $n_0 = 10$  espiras, soporta sobre su extremo una masa de peso  $Q = 1$  kgf y gira en el plano vertical alrededor de la articulación inmóvil realizando  $n = 200$  revoluciones por minuto (fig. 214).

Determinar la tensión tangencial dinámica máxima  $\max \tau_d$  en la sección del alambre del resorte y el desplazamiento máximo  $\Delta l$  del peso  $Q$  si el módulo de deslizamiento del alambre es  $G = 8 \cdot 10^5$  kgf/cm<sup>2</sup> y el peso del resorte es muy pequeño en comparación con el de la masa  $Q$ .

*Resolución.* La fuerza máxima de tracción dinámica  $P_d = k_d Q$  actúa sobre el resorte cuando el peso  $Q$  ocupa la posición inferior extrema.

Debido a la poca rigidez del resorte, al determinar la fuerza centrífuga, se debe tener en consideración el alargamiento del eje del resorte.

Así, pues el coeficiente dinámico será,

$$k_d = 1 + \frac{a}{g} = 1 + \frac{\omega^2}{g} (l + \Delta l),$$

siendo la velocidad angular

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi \cdot 200}{30} = 21 \text{ rad/s}; \quad \frac{\omega^2}{g} = \frac{21^2}{981} \approx 0,45 \text{ 1/s}$$

y

$$\Delta l = \frac{4P_d R^3 n_0}{Gr^4} = P_d \frac{4 \cdot 8 \cdot 10}{8 \cdot 10^5 \cdot 16 \cdot 10^{-4}} = \frac{P_d}{4} \text{ cm.}$$

Hallamos pues,

$$P_d = Q \left[ 1 + \frac{\omega^2}{g} \left( l + \frac{4P_d R^3 n_0}{Gr^4} \right) \right] = Q [1 + 0,45 (30 + 0,25P_d)] \approx$$

$$\approx Q (14,5 + 0,11P_d),$$

de donde se obtiene,

$$P_d = \frac{14,5Q}{1 - 0,11Q} \approx 17,1 \text{ kgf.}$$

La tensión tangencial dinámica máxima en la sección transversal del alambre del resorte será,

$$\max \tau_d = \frac{2P_d R}{\pi r^3} = \frac{2 \cdot 17,1 \cdot 2}{\pi 8 \cdot 10^{-3}} \approx 2720 \text{ kgf/cm}^2$$

y el desplazamiento dinámico máximo del peso,

$$\Delta l = \frac{1}{4} P_d = \frac{17,1}{4} \approx 4,3 \text{ cm.}$$

**Ejemplo 116.** La barra prismática de longitud  $l$  que soporta en su extremo superior el peso  $Q$ , está empotrada en el extremo infe-

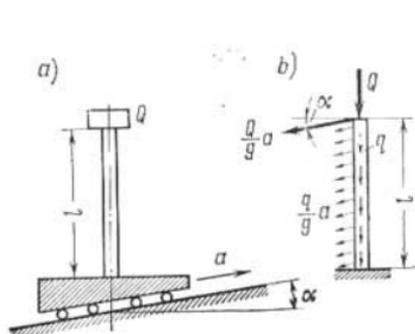


Fig. 215

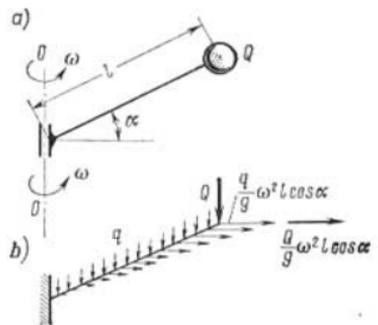


Fig. 216

rior en una pieza absolutamente rígida que se mueve bajo un ángulo  $\alpha$  al plano horizontal con aceleración constante  $a$  (fig. 215, a).

Determinar los valores máximo y mínimo de las tensiones dinámicas normales en la sección peligrosa de la barra, si su área y su

módulo de la sección son respectivamente  $F$  y  $W$  y el peso por unidad de longitud,  $q$ .

*Resolución.* Durante el movimiento del sistema, sobre la barra actúan: el peso  $Q$ , el peso propio  $q$ , dirigidos verticalmente hacia abajo; la fuerza de inercia concentrada  $\frac{Qa}{g}$  y la carga de inercia uniformemente distribuida  $\frac{qa}{g}$  orientada bajo un ángulo  $\frac{\pi}{2} - \alpha$  al eje geométrico, en dirección opuesta a la del movimiento (fig. 215, *b*).

En la sección peligrosa empotrada de la barra aparecen las tensiones normales originadas por las fuerzas siguientes:

fuerzas de gravedad  $Q$  y  $q$  que ocasionan compresión axial

$$\sigma' = \frac{Q + ql}{F};$$

componentes de las fuerzas de inercia que actúan a lo largo del eje geométrico de la barra y que ocasionan compresión axial,

$$\sigma'' = - \frac{(Q + ql) a \operatorname{sen} \alpha}{gF}$$

y componentes de las fuerzas de inercia que actúan perpendicularmente al eje geométrico de la barra y que ocasionan flexión,

$$\sigma''' = \pm \frac{\left(Ql + \frac{1}{2}ql^2\right) a \cos \alpha}{gW}.$$

Las tensiones normales dinámicas máximas y mínimas en la sección peligrosa de la barra serán,

$$\sigma_{\max/\min} = \pm \frac{\left(Q + \frac{1}{2}ql\right) a \cos \alpha}{gW} - \frac{Q + ql}{F} \left(1 + \frac{a}{g} \operatorname{sen} \alpha\right).$$

**Elempto 117.** Una barra de longitud  $l$ , inclinada respecto al plano horizontal el ángulo  $\alpha$ , soporta en su extremo libre una masa de peso  $Q$  y gira alrededor del eje vertical  $OO$  con velocidad angular  $\omega$  constante (fig. 216, *a*).

Determinar la tensión normal dinámica máxima en la sección peligrosa de la barra si el peso por unidad de longitud de ésta es  $q$ , el área de la sección transversal,  $F$  y el módulo de la sección a la flexión,  $W$ .

*Resolución.* Teniendo en cuenta las fuerzas centrífugas que aparecen, escogemos el esquema de cálculo representado en la figura 216, *b*.

En la sección peligrosa empotrada de la barra actúan:

1) momentos flectores

debidos al peso propio de la barra  $q$

$$M_1 = \frac{ql^2}{2} \cos \alpha;$$

al peso de la masa  $Q$

$$M_2 = Ql \cos \alpha;$$

a la fuerza centrífuga concentrada  $\frac{Q}{g} \omega^2 l \cos \alpha$

$$M_3 = \frac{Q\omega^2}{2g} l^2 \sin 2\alpha;$$

a la carga centrífuga distribuida linealmente de intensidad máxima

$\frac{q}{g} \omega^2 l \cos \alpha$

$$M_4 = \frac{q\omega^2}{6g} l^3 \sin 2\alpha;$$

2) esfuerzos de compresión, originados por el peso propio  $q$

$$N_1 = -ql \sin \alpha;$$

el peso  $Q$

$$N_2 = -Q \sin \alpha;$$

3) esfuerzos de tracción originados por la fuerza centrífuga con-

centrada  $\frac{Q}{g} \omega^2 l \cos \alpha$

$$N_3 = \frac{Q\omega^2}{g} l \cos^2 \alpha;$$

la carga centrífuga distribuida linealmente de intensidad máxima

$\frac{q}{g} \omega^2 l \cos \alpha$

$$N_4 = \frac{q\omega^2}{2g} l^2 \cos^2 \alpha.$$

El momento flector resultante será,

$$M_d = M_1 + M_2 + M_3 + M_4 =$$

$$= \left( Q + \frac{1}{2} ql \right) l \cos \alpha + \left( Q + \frac{1}{3} ql \right) \frac{\omega^2 l^2}{2g} \sin 2\alpha.$$

El esfuerzo axial resultante,

$$N_d = N_1 + N_2 + N_3 + N_4 = \left( Q + \frac{1}{2} ql \right) \frac{\omega^2 l}{g} \cos^2 \alpha - (Q + ql) \sin \alpha.$$

La tensión normal dinámica máxima en la sección peligrosa de la barra será,

$$\begin{aligned} \max \sigma_d &= \frac{N_d}{F} + \frac{M_d}{W} = \\ &= \frac{1}{F} \left[ \left( Q + \frac{1}{2} ql \right) \frac{\omega^2 l}{g} \cos^2 \alpha - (Q + ql) \sin \alpha \right] + \\ &\quad + \frac{l}{W} \left[ \left( Q + \frac{1}{3} ql \right) \frac{\omega^2 l}{2g} \sin 2\alpha + \left( Q + \frac{ql}{2} \right) \cos \alpha \right]. \end{aligned}$$

**Ejemplo 118.** El sistema representado en la figura 217, *a* gira alrededor del eje vertical  $OO$  con velocidad angular constante  $\omega$ .

Determinar el número admisible  $n$  de revoluciones del sistema por minuto si  $m = 1 \text{ kg}$ ,  $\rho = 10 \text{ cm}$ ,  $d = 1 \text{ cm}$  y  $[\sigma] = 160 \text{ MN/m}^2$ .

Se puede prescindir del peso propio del sistema y de la influencia de la variación de la distancia entre los pesos  $m$  sobre la magnitud de la fuerza centrífuga.

*Resolución.* Considerando la fuerza centrífuga se obtiene del esquema de cálculo representado en la figura 217, *b*.

En la sección peligrosa empotrada actúan un esfuerzo axial de tracción  $N_d = m\omega^2\rho$  y un momento flector

$$M_d = mg\rho + m\omega^2\rho^2 = m\rho(g + 2\omega^2\rho).$$

La tensión de tracción dinámica máxima en la fibra interior de la sección empotrada será,

$$\begin{aligned} \max \sigma_d &= \frac{N_d}{F} + \frac{M_d}{W} \alpha_1 = \\ &= \frac{m\omega^2\rho}{F} + \frac{m\rho(g + 2\omega^2\rho)}{W} \alpha_1. \end{aligned}$$

$$\text{Como cuando } \frac{d}{\rho} = \frac{1}{10}$$

$$\text{el coeficiente } \alpha_1 = \frac{1 - \frac{d}{8\rho}}{1 - \frac{d}{2\rho}} \approx 1$$

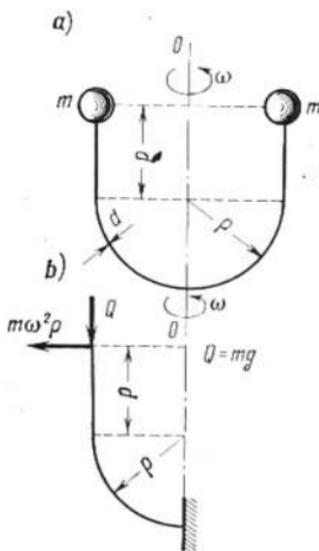


Fig. 217

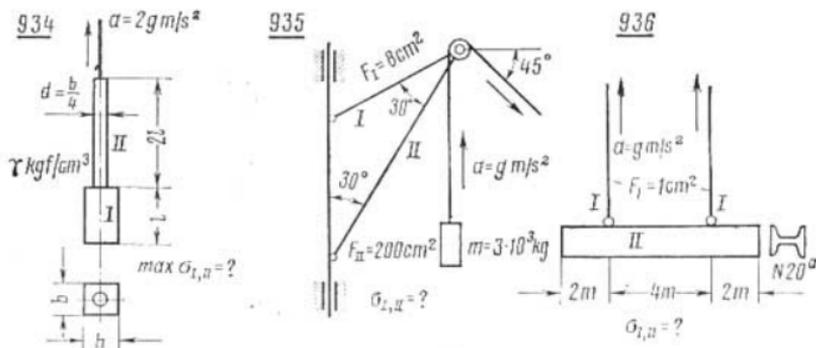
la condición de resistencia en la sección peligrosa será,  $\max \sigma_d = m\omega^2\rho \left( \frac{1}{F} + \frac{2\rho}{W} \right) + \frac{m\rho g}{W} \leq [\sigma]$  de donde se obtiene,

$$\omega = \frac{\pi n}{30} \leq \sqrt{\frac{[\sigma] - \frac{m\rho g}{W}}{m\rho \left( \frac{1}{F} + \frac{2\rho}{W} \right)}} \approx \sqrt{\frac{160 \cdot 10 - \frac{1 \cdot 0,1 \cdot 9,81}{0,1 \cdot 10^{-6}}}{1 \cdot 0,1 \left( \frac{1}{0,8 \cdot 10^{-4}} + \frac{2 \cdot 0,1}{0,1 \cdot 10^{-6}} \right)}} \approx \sqrt{750};$$

$$n \approx \frac{30}{\pi} \sqrt{750} \approx 270 \text{ rev/min.}$$

**Problemas 934-936.** Determinar las tensiones normales  $\sigma$  en las secciones transversales de los elementos indicados de los sistemas en movimiento, originadas por la acción conjunta de las fuerzas de gravedad y las fuerzas de inercia.

En las figuras, la dirección del movimiento se indica por flechas acompañadas del índice  $a$ .



**Problemas 937-950.** Determinar las magnitudes indicadas en las condiciones de los problemas, debidas a las fuerzas de inercia que surgen en los sistemas que giran.

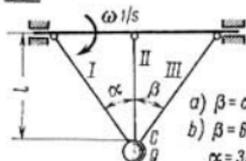
En las figuras los ejes alrededor de los cuales gira el sistema están indicados con flechas acompañadas de los índices  $\omega$  ó  $n$ . Si no se dan las dimensiones de la sección transversal y  $E$  del árbol, entonces considérese éste absolutamente rígido. Los elementos absoluta-

mente rígidos de los sistemas, excluyendo los ejes de rotación, están representados por líneas dobles con rayado.

En todos los problemas a excepción del 942, considérese que la rotación es uniforme. Prescíndase de las deformaciones de los elementos del sistema al calcular las fuerzas de inercia.

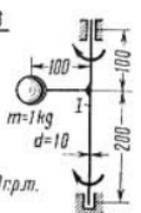
En los problemas 937 y 938, aparte de las fuerzas de inercia, considérese también las fuerzas de gravedad.

937



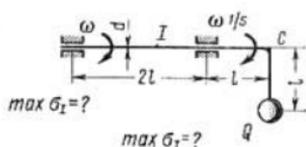
a)  $\beta = \alpha$   
 b)  $\beta = 60^\circ$   
 $\alpha = 30^\circ$   $n = 300 \text{ r.p.m.}$   
 $E_{I, II, III} = E \text{ kgf/cm}^2$   
 $F_{I, II, III} = F \text{ cm}^2; \sigma_{I, II, III} = ?$

938



$n = 300 \text{ r.p.m.}$

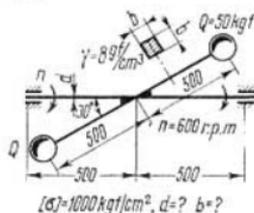
939



$\max \sigma_I = ?$

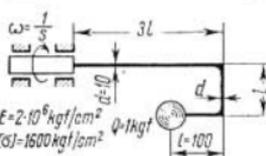
$\max \sigma_I = ?$

940



$[\alpha] = 1000 \text{ kgf/cm}^2, d = ? b = ?$

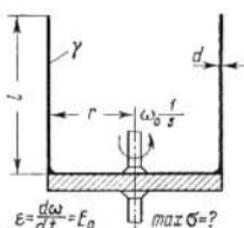
941



$E = 2 \cdot 10^6 \text{ kgf/cm}^2$   
 $[\sigma] = 1600 \text{ kgf/cm}^2$

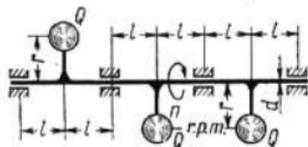
$n \text{ r.p.m.} = ?$

942



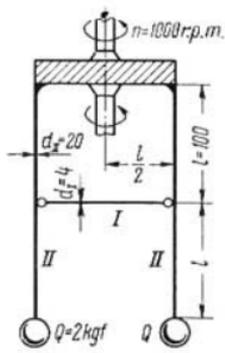
$\epsilon = \frac{d\omega}{dt} = \epsilon_0$   $\max \sigma = ?$

943



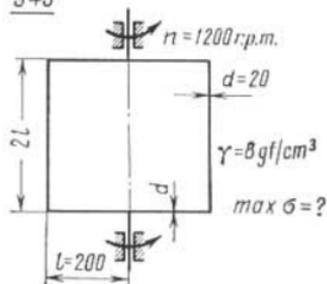
$[\sigma], d = ?$

944

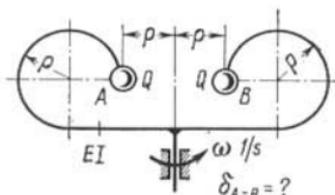


$\epsilon_I = \epsilon_{II} \quad \max \sigma_{I, II} = ?$

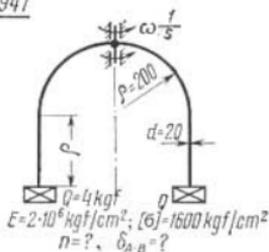
945



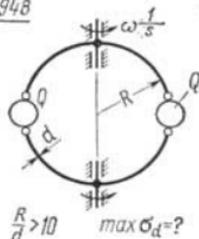
946



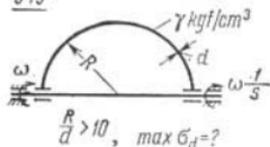
947



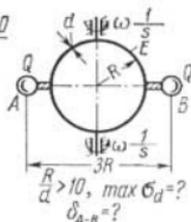
948



949



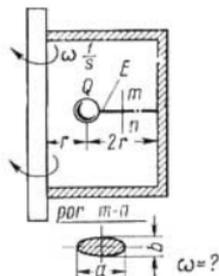
950



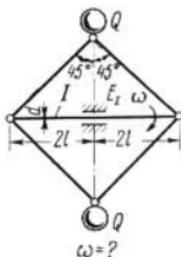
**Problemas 951-953.** Determinar la velocidad angular  $\omega$  1/s (o el número de revoluciones por minuto  $n$ ) de rotación del eje que conduce a la pérdida de la estabilidad del elemento comprimido del sistema.

Considérese que las tensiones críticas no superan el límite de proporcionalidad del material.

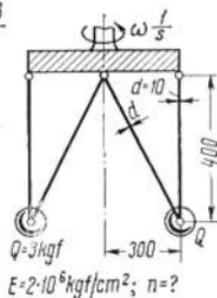
951



952



953



## § 2. Oscilaciones elásticas

Se denominan *oscilaciones elásticas* las desviaciones periódicas del sistema elástico de la posición del equilibrio estable. Si el sistema se saca de su posición de equilibrio por la acción de un solo impulso, entonces se obtienen las así llamadas *oscilaciones libres o propias*. Si sobre el sistema actúa una fuerza generalizada que varía periódicamente en función del tiempo (fuerza perturbadora) obtendremos entonces las *oscilaciones forzadas*.

Las *oscilaciones libres*, como consecuencia de las fuerzas de resistencia, son de hecho *oscilaciones amortiguadas*, es decir, *oscilaciones* que ocurren con amplitud que disminuye con el tiempo. Si la frecuencia de las *oscilaciones libres* coincide con la de la fuerza perturbadora, entonces surge la *resonancia*, fenómeno que consiste en un aumento rápido y continuo de la amplitud. Puesto que el aumento de la amplitud de las *oscilaciones* está relacionado con el incremento de las tensiones, la *resonancia* puede conducir al sistema a un fallo prematuro.

Todo sistema elástico tiene una infinidad de grados de libertad, puesto que el número de coordenadas independientes que determinan la posición en el espacio de las masas distribuidas en los elementos del sistema es infinitamente grande.

Si la masa propia del sistema no se considera, o se considera reduciéndola a uno o varios puntos, entonces se puede estimar que el sistema tiene uno o varios grados de libertad. Cuando se prescinde de la masa propia del sistema, se considera que éste tiene un grado de libertad si soporta una sola masa cuya posición en el espacio se determina por una sola coordenada. Si la masa propia del sistema se puede concentrar, con suficiente exactitud, en el punto de aplicación del peso que soporta, entonces se considera también que convencionalmente el sistema tiene un grado de libertad.

Aquí se analizan solamente las *oscilaciones propias* sin amortiguamiento del sistema de un grado de libertad y se prescinde de la

masa propia del sistema. La masa propia se considerará solamente en los problemas más simples que se refieren a las oscilaciones de barras prismáticas.

En todos los casos, la masa que oscila se considera constante y el sistema elástico, lineal, es decir, que la fuerza generalizada de recuperación  $P$  que aparece en un momento dado es proporcional al desplazamiento generalizado correspondiente  $\delta$ ,

$$P = C\delta, \quad (219)$$

siendo  $C$  la rigidez del sistema, fuerza generalizada que origina un desplazamiento generalizado igual a la unidad.

La configuración del sistema deformado durante las oscilaciones se considera la misma que la que corresponde a la sollicitación estática del sistema por la correspondiente fuerza generalizada aplicada en el punto donde se fija la masa y que actúa en la misma dirección en que ocurren las oscilaciones.

#### Oscilaciones libres de sistemas elásticos prescindiendo de la masa propia

En el caso de sistemas linealmente deformables, el desplazamiento generalizado  $\delta$  del punto de suspensión del peso, correspondiente a la acción estática sobre este mismo punto de la correspondiente fuerza generalizada  $P$  se obtiene fácilmente por cualquiera de los métodos conocidos y la rigidez  $C$  del sistema por la expresión,

$$C = \frac{P}{\delta}. \quad (220)$$

La rigidez del sistema con conexión paralela, en serie o mixta de sus elementos elásticos conviene determinarla recurriendo al método siguiente.

Si los elementos elásticos del sistema, de rigideces  $C_i$  se unen en paralelo (esquemas de la fig. 218, *a* y *b*) entonces la rigidez del sistema será,

$$C = \Sigma C_i, \quad (221)$$

si se unen en serie (fig. 218, *c*),

$$C = \frac{1}{\Sigma \frac{1}{C_i}} \quad (222)$$

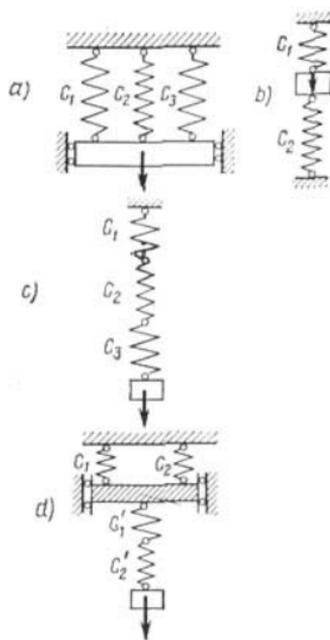


Fig. 218

y si se unen de manera mixta (fig. 218, d) de tal forma que parte de los elementos de rigideces  $C_i$  están unidos en paralelo y la otra parte de los elementos de rigideces  $C'_i$  en serie, entonces la rigidez total del sistema será,

$$C = \frac{1}{\frac{1}{\Sigma C_i} + \Sigma \frac{1}{C'_i}}. \quad (223)$$

Cuando se prescinde de la masa propia del sistema, la frecuencia circular de las oscilaciones libres  $\omega$  (número de oscilaciones en  $2\pi$  segundos), la frecuencia de las oscilaciones  $N$  (número de oscilaciones por segundo) y el período de las oscilaciones  $T$  (tiempo necesario para realizar un ciclo completo) se determinan por las fórmulas siguientes:

a) en el caso del movimiento alternativo (de avance y retroceso) del peso,

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \sqrt{\frac{C}{m}} = \sqrt{\frac{g}{\delta}}, \\ N &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{C}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\delta}}, \\ T &= 2\pi \sqrt{\frac{m}{C}} = 2\pi \sqrt{\frac{\delta}{g}}, \end{aligned} \right\} \quad (224)$$

siendo  $m = \frac{Q}{g}$  la masa del peso  $Q$ , kgf.s<sup>2</sup>/cm (en el sistema SI  $m$  es

la masa en kg que se determina comparándola con la masa patrón de 1 kg; el peso  $Q$  en newtones,  $Q = mg$ );

$\delta$  desplazamiento lineal del punto de aplicación del peso, correspondiente a la acción estática de la fuerza  $Q$  orientada según las oscilaciones, en cm(m);

$C = \frac{Q}{g}$  rigidez del sistema, en kgf/cm (N/m ó kN/m);

b) en el caso de un movimiento alternativo de rotación,

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \sqrt{\frac{C}{I_m}}, \\ N &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{C}{I_m}}, \\ T &= 2\pi \sqrt{\frac{I_m}{C}}, \end{aligned} \right\} \quad (225)$$

siendo  $I_m = \int_m \rho^2 dm = \frac{\gamma}{g} \int_V \rho^2 dV$  el momento de inercia de la masa del peso respecto a su eje de rotación  $\text{kgf}\cdot\text{cm}\cdot\text{s}^2$  (en el sistema SI  $I_m = \int_m \rho^2 dm = \rho_0 \int_V \rho^2 dV \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ );

$\gamma$  peso por unidad de volumen de la masa fija  $V$  en  $\text{kgf}/\text{cm}^3$ ;  
 $\rho_0$  densidad, masa por unidad de volumen de  $V$  en  $\text{kg}/\text{m}^3$  (en el sistema SI);

$\rho$  distancia del elemento de volumen  $dV$  al eje de rotación, en  $\text{cm}(\text{m})$ ;

$C = \frac{M}{\varphi}$  rigidez del sistema en  $\text{kgf}\cdot\text{cm} (\text{N}\cdot\text{m})$ , donde  $M$  es el momento que actúa estáticamente sobre la sección de suspensión del peso en la dirección de las oscilaciones, en  $\text{kgf}\cdot\text{cm} (\text{N}\cdot\text{m})$  y  $\varphi$ , el desplazamiento angular de la sección de aplicación del momento  $M$  originado por la acción estática de éste, en radianes.

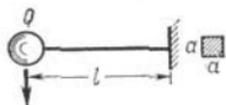


Fig. 219

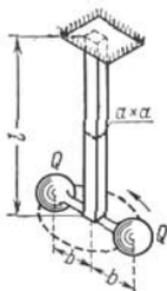


Fig. 220

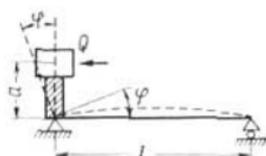


Fig. 221

**Ejemplo 119.** Dado:  $Q = 16 \text{ kgf}$ ,  $a = 2 \text{ cm}$ ,  $E = 2 \cdot 10^6 \text{ kgf}/\text{cm}^2$  y  $T = 0,1 \text{ s}$  (fig. 219). Determinar  $l$ .

**Resolución.** Como el período de las oscilaciones es  $T = 2\pi \sqrt{\frac{\delta}{g}}$ , resulta  $\delta = \frac{T^2 g}{4\pi^2}$ .

La flecha del extremo libre de la viga originada por la fuerza  $Q$  aplicada estáticamente es  $\delta = \frac{Ql^3}{3EI}$  y por lo tanto,

$$\frac{Ql^3}{3EI} = \frac{T^2 g}{4\pi^2} \text{ y } l = \sqrt[3]{\frac{T^2 g \cdot 3EI}{4\pi^2 Q}} = \sqrt[3]{\frac{1 \cdot 981 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 2^4}{10^2 \pi^2 \cdot 4 \cdot 16 \cdot 12}} = 50 \text{ cm.}$$

**Ejemplo 120.** Dado:  $m = 20$  kg,  $b = 8$  cm,  $l = 40$  cm,  $N = 20$  oscil/s y  $G = 8 \cdot 10^4$  MN/m<sup>2</sup> (fig. 220). Determinar  $a$ .

*Resolución.* Como  $N = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{C}{I_m}}$  y  $I_m = 2mb^2$ , obtendremos,

$$C = 4\pi^2 N^2 I_m = 8\pi^2 N^2 m b^2.$$

Puesto que la rigidez de la barra a la torsión es

$$C = \frac{GI_{\text{tor}}}{l} \approx \frac{G \cdot 0,14a^4}{l},$$

siendo  $I_{\text{tor}} = 0,14 a^4$  el momento de inercia a la torsión de la sección cuadrada de lado  $a$ , resultará,

$$\begin{aligned} \frac{0,14a^4 G}{l} &= 8\pi^2 N^2 m b^2 \quad \text{y} \quad a = \sqrt[4]{\frac{8\pi^2 N^2 m b^2 l}{0,14G}} = \\ &= \sqrt[4]{\frac{8 \cdot 10 \cdot 4 \cdot 10^2 \cdot 20 \cdot 64 \cdot 10^{-4} \cdot 40 \cdot 10^{-2}}{0,14 \cdot 8 \cdot 10^{11}}} = 1,95 \cdot 10^{-2} = 1,95 \text{ cm.} \end{aligned}$$

**Ejemplo 121.** Dado:  $Q$ ,  $a$ ,  $l$ ,  $E$  e  $I$  (fig. 221). Determinar  $\omega$ ,  $N$  y  $T$ .

*Resolución.* Puesto que el ángulo de giro del peso  $Q$  alrededor del centro de la articulación del apoyo izquierdo es  $\varphi = \frac{Ml}{3EI}$ , la rigidez de la barra resultará,

$$C = \frac{M}{\varphi} = \frac{3EI}{l}.$$

El momento de inercia de la masa del peso respecto al eje de  $\sigma$ :

$$I_m = \frac{Q}{g} a^2.$$

Por las fórmulas (225) se obtiene para la frecuencia circular de las oscilaciones,

$$\omega = \sqrt{\frac{C}{I_m}} = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{3EIg}{Ql}},$$

para la frecuencia de las oscilaciones,

$$N = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi a} \sqrt{\frac{3EIg}{Ql}}$$

y para el período de las oscilaciones,

$$T = \frac{1}{N} = 2\pi a \sqrt{\frac{Ql}{3EIg}}$$

**Ejemplo 122.** Dado:  $Q$ ;  $l$ ; las características  $D$ ,  $d$  y  $n$  del resorte ( $n$  es el número de espiras),  $G$  y que la barra  $AB$  es absolutamente

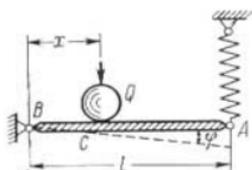


Fig. 222

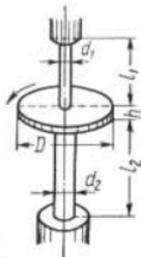


Fig. 223

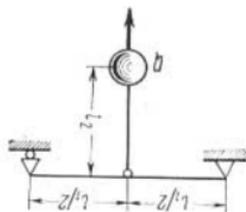


Fig. 224

rígida e imponderable (fig. 222); determinar la frecuencia circular de las oscilaciones  $\omega$  en función de la posición del peso  $Q$ , es decir, en función de la distancia  $x$ .

*Resolución.* La fuerza que tracciona el resorte es  $P = Q \frac{x}{l}$ . El desplazamiento vertical del punto  $A$ ,

$$\delta_A = \frac{8PD^3n}{Gd^4} = \frac{8QD^3n}{Gd^4} \cdot \frac{x}{l},$$

el desplazamiento vertical del punto  $C$ ,

$$\delta_C = \delta_A \frac{x}{l} = \frac{8QD^3n}{Gd^4} \cdot \frac{x^2}{l^2}$$

y la frecuencia circular de las oscilaciones del peso,

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\delta_C}} = \frac{ld^2}{2Dx} \sqrt{\frac{Gg}{2QDn}}$$

Este problema se puede resolver también partiendo no del movimiento de traslación, sino del movimiento giratorio del peso  $Q$ . Entonces se obtendrá,

para el desplazamiento angular del peso,  $\varphi = \frac{\delta_A}{l}$ ;

para el momento de recuperación,  $M = Pl$ ;

para la rigidez del sistema,  $C = \frac{M}{\varphi} = \frac{Pl^2}{\delta_A}$ ;

para el momento de inercia de la masa del peso respecto al eje de rotación,

$$I_m = \frac{Q}{g} x^2;$$

y para la frecuencia circular de las oscilaciones del peso,

$$\omega = \sqrt{\frac{C}{I_m}} = \frac{l}{x} \sqrt{\frac{Pg}{Q\delta_A}} = \frac{ld^2}{2Dx} \sqrt{\frac{Gg}{2QDn}}.$$

**Ejemplo 123.** Dado: para las barras,  $l_1$ ,  $d_1$ ,  $G_1$ ,  $l_2$ ,  $d_2$  y  $G_2$ ; para el disco  $\gamma$  (peso por unidad de volumen),  $D$  y  $h$  (fig. 223). Determinar la frecuencia circular  $\omega$  de las oscilaciones del disco.

*Resolución.* Las rigideces de las barras a la torsión son,

$$C_1 = \frac{G_1 J_{p1}}{l_1} = \frac{G_1 \pi d_1^4}{32 l_1}; \quad C_2 = \frac{G_2 J_{p2}}{l_2} = \frac{G_2 \pi d_2^4}{32 l_2}.$$

Puesto que las barras están unidas en paralelo, la rigidez del sistema oscilante se obtendrá por la fórmula (221), es decir,

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\pi}{32} \left( \frac{G_1 d_1^4}{l_1} + \frac{G_2 d_2^4}{l_2} \right).$$

El momento de inercia de la masa del disco cilíndrico respecto al eje de rotación es,

$$I_m = \frac{\gamma}{g} \int_V \rho^2 dV = \frac{\gamma}{g} \int_0^{D/2} \rho^2 2\pi\rho h d\rho = 2\pi \frac{\gamma}{g} h \int_0^{D/2} \rho^3 d\rho = \frac{\pi \gamma h D^4}{32 g}.$$

Por la fórmula (225) hallamos la frecuencia circular de las oscilaciones del disco

$$\omega = \sqrt{\frac{C}{I_m}} = \frac{1}{D^2} \sqrt{\frac{\frac{G_1 d_1^4}{l_1} + \frac{G_2 d_2^4}{l_2}}{\frac{\gamma}{g} h}}.$$

**Ejemplo 124.** Dado: para la viga  $l_1$ ,  $E_1$  y  $I_1$ , para la barra,  $l_2$ ,  $E_2$ ,  $F_2$  y  $Q$  (fig. 224). Determinar  $T$ .

*Resolución.* La rigidez de la viga sobre dos apoyos solicitada por una fuerza aplicada en su sección media es,

$$C_1 = \frac{48E_1 I_1}{l_1^3},$$

la rigidez de la barra a la tracción,

$$C_2 = \frac{E_2 F_2}{l_2}.$$

Como la viga y la barra están unidas en serie, por la fórmula (224) obtendremos la rigidez del sistema oscilante,

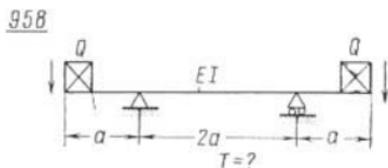
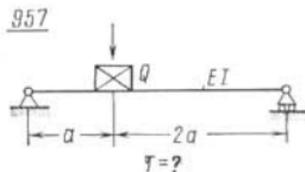
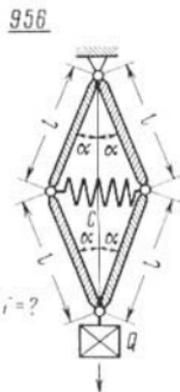
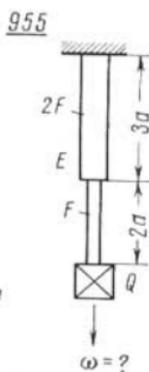
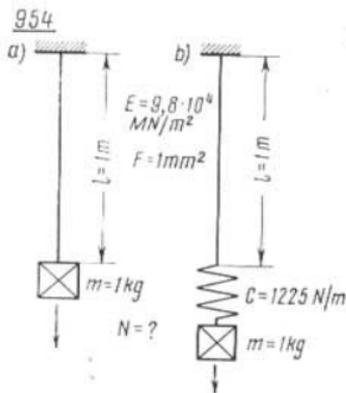
$$C = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} = \frac{1}{\frac{l_1^3}{48E_1 I_1} + \frac{l_2}{E_2 F_2}}.$$

Por la fórmula (224) se halla el período de las oscilaciones del sistema,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{C}} = 2\pi \sqrt{\frac{Q}{g} \left( \frac{l_1^3}{48E_1 I_1} + \frac{l_2}{E_2 F_2} \right)}.$$

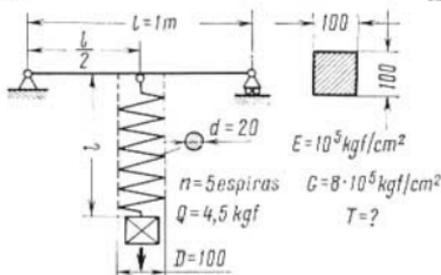
**Problemas 954-965.** Determinar las magnitudes que se indican en las condiciones de los problemas para los sistemas oscilantes.

La dirección de las oscilaciones se indica por flechas situadas al lado del peso.

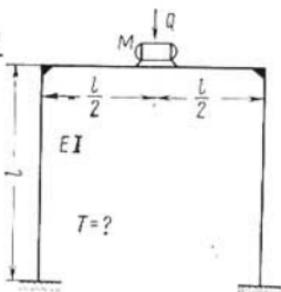


La masa Q oscila sincronizadamente

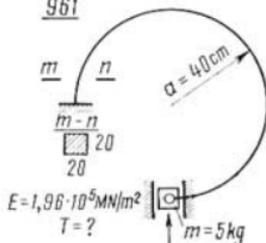
959



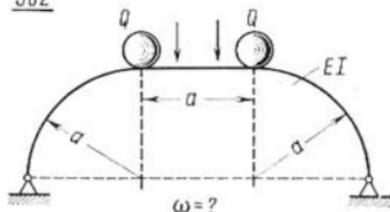
960



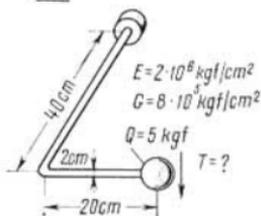
961



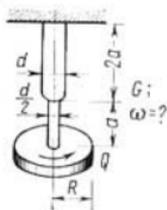
962



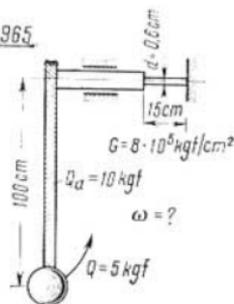
963



964



965



### Oscilaciones libres de sistemas elásticos considerando la masa propia

En las oscilaciones libres de un sistema elástico, la masa distribuida propia  $m_0$  del sistema puede considerarse de manera aproximada, desplazándola al punto de suspensión del peso y sumándola con la masa  $m$  del peso.

Se entiende por *masa reducida*  $m_r$  la masa concentrada en el punto de suspensión del peso cuya energía cinética es igual a la energía cinética del movimiento del sistema de masa  $m_0$ . La magnitud de la masa reducida es proporcional a la de la masa real del sistema y se determina por la fórmula,

$$m_r = k_m \cdot m_0. \quad (226)$$

El coeficiente de reducción de la masa  $k_m$  depende de la ley de variación de las velocidades del movimiento de los elementos de la masa  $m_0$  y se establece de la igualdad de las energías cinéticas de los movimientos de  $m_r$  y  $m_0$  que nos lleva a la expresión siguiente,

$$k_m = \frac{1}{m_0} \int_V \left( \frac{\delta_x}{\delta} \right)^2 dm_0, \quad (227)$$

siendo  $\delta$  y  $\delta_x$  los desplazamientos generalizados del punto de suspensión del peso y de un punto arbitrario del sistema originados los dos por la acción estática sobre el sistema de una fuerza generalizada que corresponda al tipo de deformación del sistema en las oscilaciones, aplicada al punto de suspensión del peso y orientada según las oscilaciones.

En el caso de barras rectas de sección transversal constante los coeficientes de reducción de la masa se obtienen por la fórmula,

$$k_m = \frac{1}{l} \int_0^l \left( \frac{\delta_x}{\delta} \right)^2 dx, \quad (228)$$

siendo  $dx$  el elemento de longitud de la barra,  
 $l$  su longitud.

La frecuencia circular  $\omega$ , la frecuencia  $N$  y el período  $T$  de las oscilaciones libres del sistema elástico en el caso que se tenga en cuenta la masa propia, se obtienen por las fórmulas siguientes:

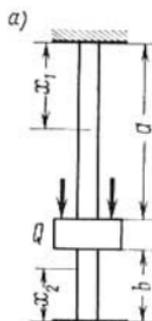
a) en el movimiento alternativo,

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \sqrt{\frac{C}{m + k_m m_0}} = \sqrt{\frac{g}{\delta} \cdot \frac{1}{1 + k_m \frac{Q_0}{Q}}} = \\ &= \sqrt{\frac{g}{\delta} \cdot \frac{1}{1 + k_m \frac{m_0}{m}}}, \\ N &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{C}{m + k_m m_0}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\delta} \cdot \frac{1}{\left(1 + k_m \frac{Q_0}{Q}\right)}} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\delta} \cdot \frac{1}{1 + k_m \frac{m_0}{m}}}, \\ T &= 2\pi \sqrt{\frac{m + k_m m_0}{C}} = 2\pi \sqrt{\frac{\delta}{g} \left(1 + k_m \frac{Q_0}{Q}\right)} = \\ &= 2\pi \sqrt{\frac{\delta}{g} \left(1 + k_m \frac{m_0}{m}\right)}, \end{aligned} \right\} (229)$$

siendo  $Q = mg$  y  $Q_0 = m_0g$  los pesos de la masa aplicada y del sistema,

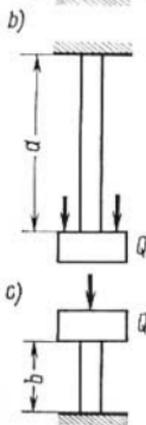
$\delta = \frac{Q}{C}$  el desplazamiento lineal del punto de suspensión del peso, debido a la acción estática sobre el sistema de la fuerza  $Q$  orientada según las oscilaciones,

b) en el movimiento alternativo de rotación



$$\left. \begin{aligned} \omega &= \sqrt{\frac{C}{I_m + k_m I_{m_0}}}, \\ N &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{C}{I_m + k_m I_{m_0}}}, \\ T &= 2\pi \sqrt{\frac{I_m + k_m I_{m_0}}{C}}, \end{aligned} \right\} \quad (230)$$

siendo  $I_m$  y  $I_{m_0}$  los momentos de inercia de la masa del peso  $m$  y de la masa del sistema  $m_0$  respecto al eje de rotación.



Veamos algunos ejemplos donde se considere la masa propia de las barras prismáticas, en el caso de las oscilaciones libres más simples.

**Ejemplo 125.** Oscilaciones longitudinales. Dado:  $Q$ ,  $\gamma$ ,  $F$ ,  $a$ ,  $b$  y  $E$  (en el sistema SI se considera dado, la masa del peso  $m$  en kg, la densidad de la barra  $\rho_0$  en  $\text{kg}/\text{m}^3$ ,  $F$ ,  $a$ ,  $b$  y  $E$ , fig. 225, a).

Determinar  $T$ .

**Resolución.** Cuando la carga  $Q$  actúa estáticamente, la relación entre los desplazamientos lineales (alargamientos y acortamientos) de dos secciones arbitrarias (determinados por las coordenadas  $x_1$  y  $x_2$ ) y la sección de suspensión del peso, son respectivamente,

$$\frac{\delta_{x_1}}{\delta} = \frac{x_1}{a} \quad \text{y} \quad \frac{\delta_{x_2}}{\delta} = \frac{x_2}{b}.$$

Fig. 225

De la expresión (228) hallamos el coeficiente de reducción de la masa,

$$k_m = \frac{1}{a+b} \left[ \int_0^a \left(\frac{x_1}{a}\right)^2 dx_1 + \int_0^b \left(\frac{x_2}{b}\right)^2 dx_2 \right] = \frac{1}{3}.$$

Puesto que los tramos de la barra se unen en paralelo, por la fórmula (221) hallamos la rigidez del sistema,

$$C = \frac{EF}{a} + \frac{EF}{b} = EF \frac{a+b}{ab}.$$

La masa propia del sistema es  $m_0 = \frac{\gamma F}{g} (a+b)$ , y la del peso,

$$m = \frac{Q}{g} \text{ [en el sistema SI } m_0 = \rho_0 F (a+b)\text{]}.$$

Por la fórmula (229) hallamos el período de las oscilaciones libres del sistema,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m + k_m m_0}{C}} = 2\pi \sqrt{\frac{Q}{EFg} \cdot \frac{ab}{a+b} \left(1 + \frac{\gamma F}{3} \cdot \frac{a+b}{Q}\right)}$$

en el sistema SI

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m + k_m m_0}{C}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{EF} \cdot \frac{ab}{a+b} \left(1 + \frac{\rho_0 F}{3} \cdot \frac{a+b}{m}\right)}.$$

*Casos particulares* (se analizan en el sistema técnico de unidades).

Si el peso  $Q$  se suspende sobre la barra de longitud  $a$ , mientras que la de longitud  $b$  no existe (fig. 225, *b*), entonces, suponiendo  $\frac{EF}{b} = 0$ , obtendremos

$$C = \frac{EF}{a}, \quad m_0 = \frac{\gamma F}{g} a \quad \text{y} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{Qa}{EFg} \left(1 + \frac{\gamma Fa}{3Q}\right)}.$$

Si el peso  $Q$  descansa sobre la barra de longitud  $b$ , mientras que la barra de longitud  $a$  no existe (fig. 225, *c*), entonces

$$\frac{EF}{a} = 0, \quad C = \frac{EF}{b}, \quad m_0 = \frac{\gamma F}{g} b \quad \text{y} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{Qb}{EFg} \left(1 + \frac{\gamma Fb}{3Q}\right)}.$$

**Ejemplo 126.** Oscilaciones transversales. Dado:  $Q, \gamma, F, l, E$  y  $I$  (fig. 226).

Determinar  $T$ .

*Resolución.* Cuando el peso  $Q$  actúa estáticamente, el desplazamiento lineal (flecha) de una sección cualquiera situada a una distancia  $x$  del empotramiento izquierdo se determinará por el método



**Ejemplo 127.** Oscilaciones torsionales. Dado:  $Q$ ,  $D$ ,  $\gamma$ ,  $d$ ,  $a$ ,  $b$  y  $G$  (fig. 227, a).

Determinar  $T$ .

*Resolución.* Durante la acción estática del momento de rotación que actúa sobre la sección de suspensión del disco, las relaciones de los desplazamientos angulares (ángulos de giro) de secciones arbitrarias (determinadas por las coordenadas  $x_1$  y  $x_2$ ) y la sección de suspensión del disco son respectivamente,

$$\frac{\delta_{x_1}}{\delta} = \frac{\varphi_{x_1}}{\varphi} = \frac{x_1}{a} \quad \text{y} \quad \frac{\delta_{x_2}}{\delta} = \frac{\varphi_{x_2}}{\varphi} = \frac{x_2}{b}.$$

De acuerdo con la fórmula (228) el coeficiente de reducción de la masa de la barra será

$$k_m = \frac{1}{a+b} \left[ \int_0^a \left( \frac{x_1}{a} \right)^2 dx_1 + \int_0^b \left( \frac{x_2}{b} \right)^2 dx_2 \right] = \frac{1}{3}.$$

Puesto que los tramos de la barra están unidos en paralelo, por la fórmula (221) hallaremos la rigidez del sistema

$$C = \frac{GI_p}{a} + \frac{GI_p}{b} = GI_p \frac{a+b}{ab} = G \frac{\pi d^4}{32} \cdot \frac{a+b}{ab}.$$

El momento de inercia de la masa de la barra cilíndrica respecto a su eje geométrico será

$$I_{m_0} = \frac{\pi}{32} \cdot \frac{\gamma}{g} d^4 (a+b).$$

El momento de inercia de la masa del disco cilíndrico de peso  $Q$  y de diámetro  $D$  es,

$$I_m = \frac{Q}{g} \cdot \frac{D^2}{8}.$$

Por la fórmula (230) se obtiene el período de las oscilaciones libres del sistema,

$$\begin{aligned} T &= 2\pi \sqrt{\frac{I_m + k_m I_{m_0}}{C}} = 2\pi \sqrt{\frac{I_m ab}{GI_p (a+b)} \left( 1 + \frac{1}{3} \frac{I_{m_0}}{I_m} \right)} = \\ &= 4\pi \frac{D}{d^2} \sqrt{\frac{Q}{\pi G g} \cdot \frac{ab}{a+b} \left( 1 + \frac{\pi d^4 \gamma}{12Q} \cdot \frac{a+b}{D^2} \right)}. \end{aligned}$$

*Caso particular.* Si  $\frac{GI_p}{b} = 0$  (fig. 227, b), entonces

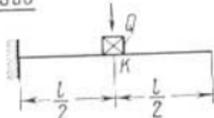
$$C = \frac{GI_p}{a}, \quad I_{m_0} = \frac{\pi d^4 \gamma a}{32g}$$

y

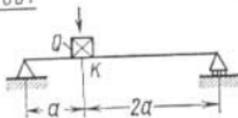
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_m a}{GI_p} \left(1 + \frac{1}{3} \frac{I_{m_0}}{I_m}\right)} = 4\pi \frac{D}{d^2} \sqrt{\frac{Qa}{\pi Gg} \left(1 + \frac{\pi d^4 \gamma a}{12 Q D^2}\right)}.$$

**Problemas 966-970.** Determinar los coeficientes de reducción de la masa  $k_m$  de las vigas, considerando que la masa se desplaza a la sección  $K$ .

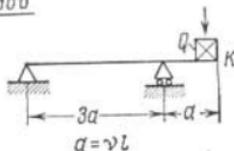
966



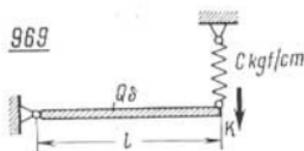
967



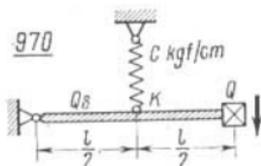
968



969

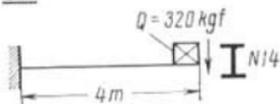


970

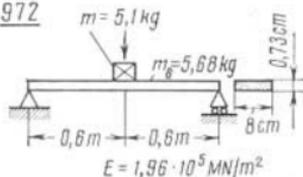


**Problemas 971-975.** Determinar los períodos  $T$  de las oscilaciones libres de los sistemas.

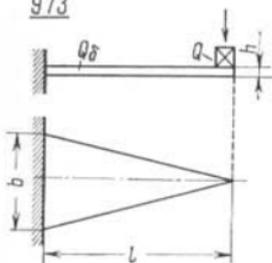
971



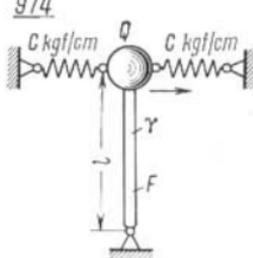
972



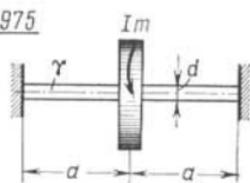
973



974



975



### Oscilaciones forzadas sin fuerzas de resistencia

Si las oscilaciones forzadas del sistema de un grado de libertad resultan de la aplicación sobre peso de una fuerza generalizada de perturbación armónica

$$P_p = P_0 \text{ sen } \omega_0 t, \quad (231)$$

siendo  $P_0$  el valor máximo de la fuerza perturbadora  $P_p$ ;  
 $\omega_0$  la frecuencia circular de esta fuerza;  
 $t$  el tiempo;

entonces la amplitud de las oscilaciones forzadas  $A$  se determinará por la fórmula siguiente,

$$A = \frac{\delta_0}{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}} = \beta \delta_0. \quad (232)$$

En la fórmula (232)  $\delta_0$  es el desplazamiento generalizado del punto de suspensión del peso, originado por la acción estática de la fuerza  $P_0$ ,  $\omega$ , la frecuencia circular de las oscilaciones propias del sistema y

$$\beta = \frac{1}{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}, \text{ el coeficiente de aumento de las oscilaciones. } \quad (233)$$

Si  $\omega_0 \gg \omega$ , entonces  $A \rightarrow 0$  y el peso que descansa sobre el sistema elástico permanecerá prácticamente en reposo.

Si  $\omega_0 \ll \omega$ , entonces  $A \rightarrow \delta_0$  y las oscilaciones del peso ocurrirán con una amplitud igual al desplazamiento originado por la acción estática de la fuerza  $P_0$ .

Si  $\omega_0$  se aproxima a  $\omega$ , entonces la amplitud  $A$  crecerá rápidamente.

Cuando  $\omega_0 = \omega$  surge la resonancia y  $A = \infty$ . En realidad, debido a la existencia de fuerzas de resistencia, la amplitud  $A$  no llegará a ser infinita, pero sí, puede alcanzar una magnitud muy considerable.

En la zona de resonancia, cuando  $0,7 \leq \frac{\omega_0}{\omega} \leq 1,3$ , las fuerzas perturbadoras relativamente pequeñas pueden originar deformaciones considerables en los elementos del sistema que oscila, por lo tanto, tensiones considerables también.

Si la frecuencia de la fuerza perturbadora, al crecer, pasa rápidamente la zona de resonancia, entonces la amplitud no tendrá tiempo suficiente para alcanzar su valor máximo.

**Ejemplo 128.** Al peso  $Q = 100$  kgf, que descansa sobre el extremo de una barra prismática de longitud  $l = 1$  m y de área de la sección transversal  $F = 1$  cm<sup>2</sup>, se le fija otro peso  $Q_1 = 2$  kgf que gira con

el brazo  $\rho = 8$  cm realizando  $n = 2\,400$  r.p.m. (fig. 228, a). El módulo de elasticidad longitudinal del material de la barra es  $E = 2 \cdot 10^6$  kgf/cm<sup>2</sup>.

Determinar la amplitud de las oscilaciones forzadas del peso prescindiendo de la masa de la barra y de las fuerzas de resistencia.

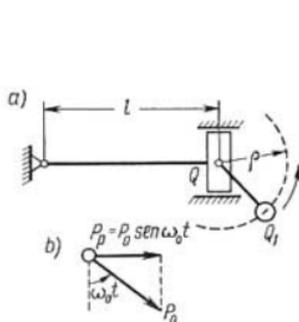


Fig. 228

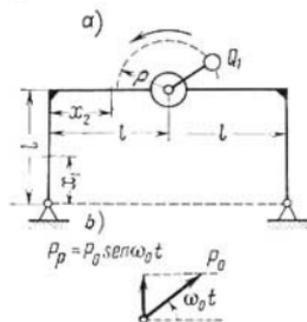


Fig. 229

*Resolución.* Puesto que el desplazamiento lineal (alargamiento) del punto donde se fija el peso, al actuar estáticamente la fuerza  $Q$  orientada según las oscilaciones, es

$$\delta = \frac{Ql}{EF} = \frac{100 \cdot 100}{2 \cdot 10^6 \cdot 4} = \frac{1}{2 \cdot 10^2} = 0,005 \text{ cm,}$$

obtendremos, por la fórmula (224), la frecuencia circular de las oscilaciones libres longitudinales

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\delta}} = \sqrt{981 \cdot 2 \cdot 10^2} \approx 443 \frac{1}{s}.$$

Al girar la carga desequilibrada  $Q_1$  aparece una fuerza centrífuga  $P_0 = \frac{Q_1}{g} \omega_0^2 \rho$  cuya componente sobre la línea de las oscilaciones constituye una fuerza perturbadora armónica (fig. 228, b)  $P_p = P_0 \sin \omega_0 t$  que origina oscilaciones forzadas.

La velocidad angular de rotación del peso  $Q_1$  es al mismo tiempo la frecuencia circular de las oscilaciones forzadas y es igual a

$$\omega_0 = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi \cdot 2\,400}{30} \approx 251 \frac{1}{s}.$$

El valor máximo de la fuerza perturbadora es,

$$P_0 = \frac{Q_1}{g} \omega_0^2 \rho = \frac{2 \cdot 251^2 \cdot 8}{981} \approx 1\,030 \text{ kgf.}$$

El alargamiento de la barra, orientado según las oscilaciones y originado por la acción estática de la fuerza  $P_0$  es,

$$\delta_0 = \frac{P_0 l}{EF} = \frac{1\,030 \cdot 100}{2 \cdot 10^6 \cdot 1} \approx 0,052 \text{ cm.}$$

Como el coeficiente de aumento de las oscilaciones que se obtiene por la fórmula (233) es

$$\beta = \frac{1}{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}} = \frac{1}{1 - \frac{251^2}{443^2}} \approx 1,47,$$

la amplitud de las oscilaciones forzadas del sistema será,

$$A = \beta \delta_0 = 1,47 \cdot 0,052 \approx 0,08 \text{ cm.}$$

**Ejemplo 129.** En la mitad del dintel del pórtico representado en la figura 229, *a* se encuentra un motor eléctrico de masa  $m = 96$  kg. La parte desequilibrada del motor está constituida por un peso concentrado de masa  $m_1 = 4$  kg que gira con un brazo  $\rho = 4$  cm alrededor del eje del motor haciendo  $n = 1\,500$  r.p.m.

Determinar la amplitud de las oscilaciones forzadas del pórtico si  $l = 1$  cm, el momento de inercia de la sección transversal del dintel y de las columnas es  $I = 400$  cm<sup>4</sup> y  $E = 2 \cdot 10^5$  MN/m<sup>2</sup>.

Prescindase del peso propio del pórtico.

*Resolución.* La fuerza de gravedad del motor eléctrico y su parte desequilibrada es

$$Q = mg = 940 \text{ N}; \quad Q_1 = m_1 g = 38,2 \text{ N.}$$

Las reacciones horizontales en los apoyos del pórtico originadas por la acción estática del peso  $Q$  se obtienen por la fórmula (200) de la ecuación canónica del método de las fuerzas  $X_1 = -\frac{\delta_{1P}}{\delta_{11}}$ . Como

$$EI\delta_{1P} = -2 \int_0^l \frac{Q}{2} l x_2 dx_2 = -\frac{Ql^3}{2} \quad y$$

$$EI\delta_{11} = 2 \int_0^l x_1^2 dx_1 + 2l^2 l = \frac{8}{3} l^3,$$

resulta

$$X_1 = \frac{Ql^3 \cdot 3}{2 \cdot 8l^3} = \frac{3}{16} Q = \frac{3}{16} 940 = 176 \text{ N.}$$

La flecha del punto de suspensión del peso  $Q$  originada por su acción estática se obtiene por el método de la fuerza unitaria

ficticia

$$\delta = \frac{2}{EI} \int_0^l \left( -X_1 l + \frac{Q}{2} x_2 \right) \frac{x_2}{2} dx_2 = \frac{1}{96} \cdot \frac{Ql^3}{EI} = \frac{7 \cdot 940 \cdot 1^3}{96 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 400 \cdot 10^{-8}} = 0,857 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 0,857 \cdot 10^{-2} \text{ cm}.$$

La frecuencia circular de las oscilaciones libres del pórtico resulta,

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\delta}} = \sqrt{\frac{9,81}{0,857 \cdot 10^{-4}}} = 338 \frac{1}{s}.$$

Al girar el peso desequilibrado  $Q_1$  aparece la fuerza centrífuga  $P_0 = m_1 \omega_0^2 r$  cuya componente sobre la dirección de las oscilaciones (fig. 229, b) constituye una fuerza perturbadora armónica  $P_p = P_0 \sin \omega_0 t$  que causa oscilaciones forzadas de frecuencia circular,

$$\omega_0 = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi \cdot 1500}{30} = 157 \frac{1}{s}.$$

El valor máximo de la fuerza perturbadora será

$$P_0 = 4 \cdot 157^2 \cdot 4 \cdot 10^{-2} = 3940 \text{ N}.$$

Esta fuerza, aplicada estáticamente, origina en la sección media del dintel la flecha siguiente:

$$\delta_0 = \frac{7}{96} \cdot \frac{P_0 l^3}{EI} = \frac{7 \cdot 3940 \cdot 1}{96 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 400 \cdot 10^{-8}} = 3,7 \cdot 10^{-4} \text{ m}.$$

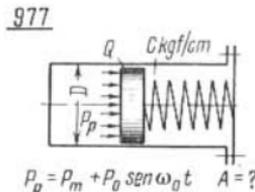
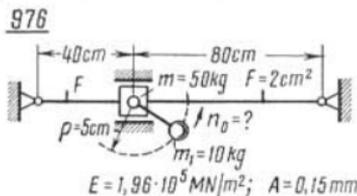
Como el coeficiente de aumento de las oscilaciones es

$$\beta = \frac{1}{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}} = \frac{1}{1 - \frac{157^2}{338^2}} \approx 1,28,$$

la amplitud de las oscilaciones forzadas del sistema será

$$A = \beta \delta_0 = 1,28 \cdot 3,7 \cdot 10^{-4} = 4,7 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 0,047 \text{ cm}.$$

**Problema 976.** Determinar el número de revoluciones  $n_0$  del motor (que puede desplazarse sobre las guías) en cuyo eje se encuentra el excéntrico de peso  $Q_1$  si se conoce la amplitud  $A$  de las oscilaciones forzadas del motor. El peso  $Q$  incluye el del motor y el del excéntrico  $Q_1$ . Prescindase de la masa de las barras.



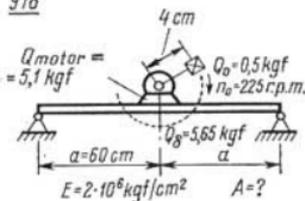
**Problema 977.** Determinar la amplitud  $A$  de las oscilaciones del émbolo del indicador de la máquina de vapor que se mueve sin fricción en el cilindro de diámetro  $D$  si la presión que actúa sobre el émbolo varía según la ley

$$P_p = P_m + P_0 \text{ sen } \omega_0 t.$$

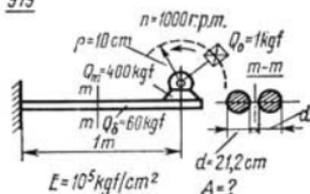
**Problemas 978-980.** Determinar las amplitudes  $A$  de las oscilaciones forzadas de los sistemas.

En los problemas 978 y 979 considérese también la masa de las vigas.

978



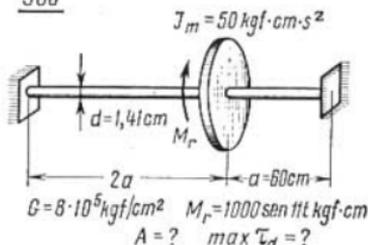
979



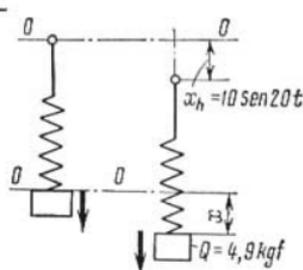
**Problema 981.** El punto de suspensión del resorte helicoidal realiza un movimiento armónico oscilatorio de acuerdo a la ecuación  $x_p = 10 \text{ sen } 20 t$ .

Determinar la amplitud  $A$  de las oscilaciones forzadas del peso y las tensiones dinámicas max  $\tau_d$  si el diámetro de la espira del resorte es  $D = 10 \text{ cm}$ , el diámetro del alambre del resorte,  $d = 1 \text{ cm}$ , el número de espiras  $n = 25$  y  $G = 8 \cdot 10^5 \text{ kgf/cm}^2$ .

980



981



### Determinación de las tensiones y cálculo de la resistencia

El desplazamiento generalizado dinámico  $\delta_d$  de un punto cualquiera del sistema en un momento  $t$  arbitrario del movimiento oscilatorio consta del desplazamiento generalizado constante  $\delta$ , que corresponde al tipo de deformación que surge durante el proceso oscilatorio pero que es debido a la acción estática del peso  $Q$  y del peso propio del sistema, y del desplazamiento generalizado variable

originado por la carga perturbadora

$$P_p = P_0 \text{ sen } \omega_0 t, \text{ es decir, } \delta_d = \delta + \beta \delta_0 \text{ sen } \omega_0 t. \quad (234)$$

En el caso de sistemas lineales, de manera análoga, se determinan también las tensiones dinámicas generalizadas  $p_d$  ( $\sigma_d$  ó  $\tau_d$ ) en los puntos de los elementos del sistema. Es decir,

$$P_d = p + \beta p_0 \text{ sen } \omega_0 t, \quad (235)$$

siendo  $p$  la tensión generalizada ( $\sigma$  ó  $\tau$ ) correspondiente al tipo de deformación que surge durante las oscilaciones, pero originado por la acción estática del peso  $Q$  y del peso propio del sistema y  $p_0$ , la tensión generalizada debida a la acción estática de la fuerza máxima perturbadora  $P_0$ .

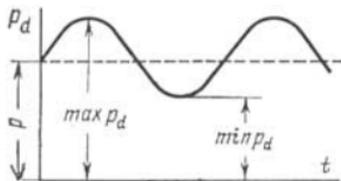


Fig. 230

Los valores extremos de las tensiones aparecen durante las desviaciones máximas del sistema de la posición del equilibrio estático y son

$$\begin{matrix} \max \\ \min \end{matrix} p_d = p \pm \beta p_0. \quad (236)$$

Puesto que durante las oscilaciones las tensiones varían periódicamente (fig. 230), en el caso de procesos de larga duración, el cálculo de la resistencia de sistemas oscilantes deberá realizarse por los métodos establecidos para los cálculos de cargas alternas cíclicas.

Cuando se trata de procesos oscilatorios de poca duración y cuando la amplitud de las tensiones variables  $\left(\frac{\max p_d - \min p_d}{2}\right)$  es pequeña, el cálculo de la resistencia puede efectuarse a partir de las tensiones máximas de la misma forma que éste se realiza para las cargas constantes.

Como el desplazamiento máximo generalizado dinámico es

$$\max \delta_d = \delta + \beta \delta_0 = \delta \left(1 + \beta \frac{\delta_0}{\delta}\right) = \delta k_d, \quad (237)$$

siendo

$$k_d = 1 + \beta \frac{\delta_0}{\delta} = 1 + \frac{A}{\delta} \quad (238)$$

el coeficiente dinámico de las oscilaciones, la tensión dinámica generalizada máxima será,

$$\max p_d = p k_d. \quad (239)$$

La condición de resistencia se podrá plantear en la forma siguiente,

$$\max p_d = p k_d \leq [p] \quad (240)$$

$$p \leq \frac{[p]}{k_d}, \quad (241)$$

siendo  $[p]$  la tensión generalizada admisible ( $[\sigma]$  ó  $[\tau]$ ).

**Ejemplo 130.** En la sección media de una viga de sección rectangular  $F = b \times h = 12 \times 1 \text{ cm}^2$  de longitud  $l = 1 \text{ m}$  se encuentra un motor eléctrico que pesa  $Q = 20 \text{ kgf}$ . La parte desequilibrada que gira está constituida por un peso concentrado  $Q_1 = 1 \text{ kgf}$  ubicado sobre el eje del motor a una distancia  $\rho = 4 \text{ cm}$  (fig. 231, a).

Determinar el número de revoluciones por minuto  $n$  para que la tensión normal máxima en la viga alcance el valor máx  $\sigma_d = 2000 \text{ kgf/cm}^2$ . El peso de la unidad de volumen del material de la viga es  $\gamma = 8 \text{ gf/cm}^3$ , el módulo de elasticidad longitudinal  $E = 2 \cdot 10^6 \text{ kgf/cm}^2$ .

*Resolución.* El peso propio de la viga,

$$Q_0 = \gamma Fl = 8 \cdot 10^{-3} \cdot 12 \cdot 1 \cdot 10^2 = 9,6 \text{ kgf}.$$

El momento de inercia de la sección transversal de la viga respecto al eje neutro y el módulo de la sección son respectivamente,

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{12 \cdot 1}{12} = 1 \text{ cm}^4, \quad W = \frac{bh^2}{6} = \frac{12 \cdot 1}{6} = 2 \text{ cm}^3.$$

Durante la acción estática de la fuerza concentrada  $Q$  y de la distribuida  $Q_0$  sobre la viga, la tensión normal máxima  $\sigma_{\max}$  y la flecha máxima  $\sigma_{\max}$  serán,

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{M_{\max}}{W} = \frac{\frac{Ql}{4} + \frac{Q_0 l}{8}}{W} = \frac{l}{4W} \left( Q + \frac{Q_0}{2} \right) = \\ &= \frac{100}{4 \cdot 2} \left( 20 + \frac{9,6}{2} \right) = 310 \text{ kgf/cm}^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{\max} &= \frac{Ql^3}{48EI} + \frac{5}{384} \frac{Q_0 l^3}{EI} = \frac{l^3}{48EI} \left( Q + \frac{5}{8} Q_0 \right) = \\ &= \frac{10^6}{48 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 1} \left( 20 + \frac{5 \cdot 9,6}{8} \right) \approx 0,27 \text{ cm}. \end{aligned}$$

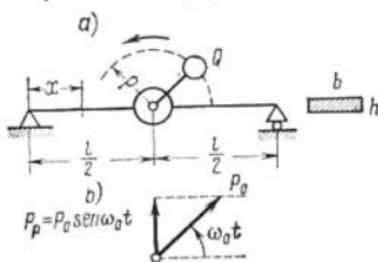


Fig. 231

Puesto que el coeficiente dinámico es, según la fórmula (238),

$$k_d = 1 + \frac{A}{\delta_{\max}} = \frac{\max \sigma_d}{\sigma_{\max}} = \frac{2000}{310} \approx 6,45,$$

la amplitud admisible de las oscilaciones resultará

$$A = \left( \frac{\max \sigma_d}{\sigma_{\max}} - 1 \right) \delta_{\max} = 5,45 \cdot 0,27 = 1,47 \text{ cm.}$$

Durante la acción estática sobre la viga de la fuerza concentrada  $Q$ , la flecha  $\delta_x$  en una sección cualquiera situada a la distancia  $x$  del apoyo izquierdo, y la flecha  $\delta$  en la mitad de la viga serán respectivamente

$$\delta_x = \frac{Ql^3}{48EI} \left( 3 \frac{x}{l} - 4 \frac{x^3}{l^3} \right) \text{ y } \delta = \frac{Ql^3}{48EI} = \frac{20 \cdot 10^6}{48 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 1} = \frac{5}{24} \text{ cm,}$$

por lo tanto

$$\frac{\delta_x}{\delta} = 3 \frac{x}{l} - 4 \frac{x^3}{l^3}$$

y el coeficiente de reducción de la masa de la viga, según la fórmula (238), será

$$k_m = \frac{2}{l} \int_0^{l/2} \left( \frac{\delta_x}{\delta} \right)^2 dx = \frac{2}{l} \int_0^{l/2} \left( 3 \frac{x}{l} - 4 \frac{x^3}{l^3} \right)^2 dx = \frac{17}{35}.$$

De la fórmula (229) se obtiene la frecuencia circular de las oscilaciones libres de la viga:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\delta} \cdot \frac{1}{1 + k_m \frac{Q_0}{Q}}} = \sqrt{\frac{981 \cdot 24}{5} \cdot \frac{1}{1 + \frac{17}{35} \cdot \frac{9,6}{20}}} \approx 61,8 \text{ 1/s.}$$

Como consecuencia del desequilibrio del peso  $Q_1$  que gira, se desarrolla la fuerza centrífuga  $P_0 = \frac{Q_1}{g} \omega_0^2 \rho$  cuya componente vertical (fig. 231, b)  $P_p = P_0 \sin \omega_0 t$  es una fuerza perturbadora armónica que origina oscilaciones forzadas de la viga. Aquí  $\omega_0 = \frac{\pi n}{30}$  es la frecuencia circular de la fuerza perturbadora  $P_0$ , el valor máximo de esta fuerza.

Cuando la fuerza  $P_0$  actúa estáticamente la flecha máxima de la viga resulta

$$\delta_0 = \frac{P_0 l^3}{48EI} = \frac{Q_1 l^3 \rho}{48EI g} \omega_0^2 = \frac{1 \cdot 10^6 \cdot 4}{48 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 1 \cdot 981} \omega_0^2 = \frac{\omega_0^2}{24 \cdot 981} \text{ cm.}$$

De la fórmula (232) se deduce,

$$1,47 = \frac{\omega_0^2}{24 \cdot 981 \left(1 - \frac{\omega_0^2}{61,8^2}\right)} = \frac{61,8^2}{24 \cdot 981} \cdot \frac{\omega_0^2}{61,8^2 - \omega_0^2} \approx 0,162 \frac{\omega_0^2}{61,8^2 - \omega_0^2},$$

de donde se obtiene

$$\omega_0^2 = \frac{61,8^2 \cdot 1,47}{1,63} \quad \text{y} \quad \omega_0 = 61,8 \sqrt{\frac{147}{163}} \approx 58,6 \text{ 1/s.}$$

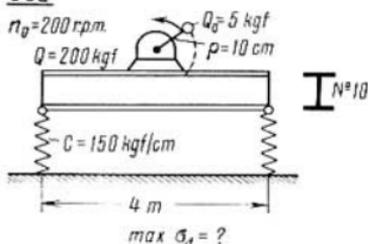
Así, pues, el número de revoluciones por minuto en cuestión es,

$$n = \frac{30}{\pi} \omega_0 = \frac{30 \cdot 58,6}{\pi} \approx 560 \text{ r.p.m.}$$

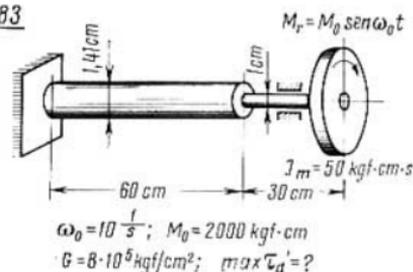
**Problemas 982-983.** Determinar las tensiones dinámicas máximas en los sistemas sometidos a oscilaciones forzadas.

El peso  $Q_0$  está incluido en  $Q$ .

982



983



### § 3. Impacto

El fenómeno impacto ocurre cuando varían bruscamente las velocidades de los cuerpos, de los sistemas o de sus partes, que entran en contacto.

Analizaremos solamente los casos más simples de choque de un cuerpo en movimiento con otro inmóvil, o con un sistema inmóvil, y admitiremos las suposiciones siguientes:

1. El cuerpo que golpea es absolutamente rígido.
2. El cuerpo golpeado tiene un grado de libertad y sus desplazamientos generalizados son proporcionales a las fuerzas generalizadas correspondientes, tanto en el caso de acción estática como en el de acción dinámica.
3. El choque no es elástico (se considera que durante el choque no se separan los cuerpos que entran en contacto), mientras que las deformaciones generales del cuerpo golpeado son elásticas.

4. El aspecto de la deformación del cuerpo golpeado es idéntico al de la deformación originada por la acción estática de la fuerza generalizada correspondiente, aplicada en el lugar donde ocurre el impacto y en la dirección de éste.

5. La velocidad del cuerpo que golpea es pequeña en comparación con la velocidad de propagación de las ondas de choque y el tiempo que dura el impacto es bastante mayor que el necesario para que las ondas de choque se propaguen por todo el volumen del cuerpo golpeado.

Admitiendo estas suposiciones, los esfuerzos dinámicos generalizados  $P_d$ , las tensiones  $p_d$  y los desplazamientos  $\delta_d$  del cuerpo que sufre el golpe pueden ser obtenidas, de manera aproximada, por las fórmulas siguientes:

$$\left. \begin{aligned} P_d &= k_d P, \\ p_d &= k_d p, \\ \delta_d &= k_d \delta. \end{aligned} \right\} \quad (242)$$

En estas fórmulas  $P$ ,  $p$  y  $\delta$  corresponden a la acción estática sobre el cuerpo golpeado de una fuerza generalizada aplicada en el lugar del choque y en dirección a éste, y  $k_d$  es el coeficiente dinámico, adimensional, mayor que la unidad.

Si el cuerpo que golpea pesa  $Q$  y al chocar con el cuerpo golpeado de peso  $Q_0$  se mueve en dirección de la fuerza de gravedad con la velocidad  $v_0$  y si en los elementos del cuerpo golpeado surgen desplazamientos de avance, entonces el coeficiente dinámico se obtendrá por la fórmula,

$$\begin{aligned} k_d &= 1 + \sqrt{1 + \frac{v_0^2}{g\delta} \cdot \frac{1}{1 + k_m \frac{Q_0}{Q}}} = 1 + \\ &+ \sqrt{1 + \frac{v_0^2 C}{Qg} \cdot \frac{1}{1 + k_m \frac{Q_0}{Q}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{T}{U} \cdot \frac{1}{1 + k_m \frac{Q_0}{Q}}}. \end{aligned} \quad (243)$$

siendo  $\delta = \frac{Q}{C}$  el desplazamiento lineal del punto de impacto

cuando actúa estáticamente el peso  $Q$  en la dirección del golpe;

$C$  la rigidez del cuerpo que se golpea y que corresponde al tipo dado de su deformación;

$k_m$  coeficiente de reducción de la masa del cuerpo golpeado al punto donde ocurre el impacto, que se obtiene por el mismo procedimiento que en el caso de las oscilaciones;

$T = \frac{QV_0^2}{2g}$  energía cinética del movimiento del peso  $Q$  en el instante del impacto;

$U = \frac{Q\delta}{2}$  energía potencial de la deformación elástica del cuerpo que se golpea, correspondiente a la acción estática del peso  $Q$ .

En el sistema SI la energía cinética será  $T = \frac{mv^2}{2}$  mientras la fracción  $\frac{Q_0}{Q}$  deberá sustituirse por  $\frac{m_0}{m}$ .

De la fórmula (243) se deduce que cuanto mayor sea la rigidez  $C$  del cuerpo que se golpea, tanto mayor será la magnitud del coeficiente dinámico  $k_d$ .

Cuando la carga  $Q$  se aplica instantáneamente, es decir, cuando  $v_0 = 0$ ,

$$k_d = 2. \quad (244)$$

Si durante el impacto se prescinde de la masa del cuerpo golpeado, cuando  $Q_0 \ll Q$ ,

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{v_0^2}{g\delta}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{v_0^2 C}{Qg}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{T}{U}}. \quad (245)$$

Al prescindir de la masa del cuerpo golpeado crece el coeficiente dinámico en comparación con el mismo coeficiente que se obtiene cuando no se prescinde de la masa (243) y entonces el cálculo contribuye al aumento de la reserva de resistencia.

$$\text{Si } \frac{v_0^2}{g\delta} = \frac{v_0^2 C}{Qg} = \frac{T}{U} \geq 10 \text{ entonces}$$

el coeficiente dinámico se podrá obtener por la fórmula aproximada,

$$k_d = 1 + \sqrt{\frac{v_0^2}{g\delta}} = 1 + \sqrt{\frac{v_0^2 C}{Qg}} = 1 + \sqrt{\frac{T}{U}}, \quad (246)$$

cometiéndose un error inferior al 5%.

Si  $\frac{v_0^2}{g\delta} \geq 110$  entonces se podrá admitir

$$k_d = \sqrt{\frac{v_0^2}{g\delta}} = \sqrt{\frac{v_0^2 C}{Qg}} = \sqrt{\frac{T}{U}}, \quad (247)$$

cometiéndose un error menor del 10%.

Se debe tener en cuenta que el cálculo por las fórmulas (246) y (247) no contribuye al aumento de la reserva de resistencia.

Cuando el peso propio del cuerpo golpeado es muy grande ( $Q_0 \rightarrow \infty$ ),  $K_d \rightarrow 2$ .

En el caso del impacto horizontal la expresión (243) deberá ser sustituida por la fórmula,

$$k_d = \sqrt{\frac{v_0^2}{g\delta} \cdot \frac{1}{1 + k_m \frac{Q_0}{Q}}} = \sqrt{\frac{v_0^2 C}{Qg} \cdot \frac{1}{1 + k_m \frac{Q_0}{Q}}} = \sqrt{\frac{T}{U} \cdot \frac{1}{1 + k_m \frac{Q_0}{Q}}}. \quad (248)$$

En este caso, al prescindir de la masa del cuerpo que recibe el impacto aumenta la reserva de resistencia incluso si  $k_d$  se determina por la fórmula (247).

Si el peso propio del cuerpo golpeado es pequeño, y si lleva fijo un peso considerable  $Q_1$  que recibe el impacto del peso  $Q$ , entonces en las fórmulas (243) ó (248) el valor de  $k_m Q_0$  deberá sustituirse por  $Q_1$ .

Al calcular los sistemas que chocan cuando sus elementos se unen en paralelo, en serie o de manera combinada, la rigidez del sistema  $C$  se puede determinar por las fórmulas (221), (222), (223) respectivamente.

Si el cuerpo que golpea se encuentra en movimiento giratorio y si en el cuerpo que se golpea aparecen deformaciones determinadas por los desplazamientos angulares, entonces se pueden emplear las fórmulas anteriores, sustituyendo en ellas la velocidad lineal  $v_0$  por la angular  $\omega_0$  y las masas  $\frac{Q}{g}$  y  $\frac{Q_0}{g}$  por los momentos de inercia de las masas  $I_m$  e  $I_{m_0}$  respecto a los ejes de rotación.

El cálculo por resistencia en el impacto se realiza por las fórmulas establecidas para el caso de sollicitación estática.

La condición de resistencia puede escribirse así,

$$\max p_d = k_d P_{\max} \leq [p_d], \quad (249)$$

siendo  $\max p_d$  la tensión dinámica generalizada máxima;

$P_{\max}$  la tensión generalizada máxima correspondiente a la acción estática del peso  $Q$ ;

$[P_d]$  la tensión dinámica generalizada admisible correspondiente.

En los cálculos prácticos se debe considerar que durante la sollicitación por impacto el cuerpo tiende a destruirse de manera frágil, dependiendo en alto grado esta propiedad del contenido y de la estructura del material del sólido, de la velocidad de sollicitación, de la temperatura y de la concentración de las tensiones.

En los problemas que analizamos se supone que estos factores fundamentales que influyen sobre la resistencia durante el impacto, se han considerado al escoger las tensiones admisibles.

**Ejemplo 131.** Dado:  $m = 10$  kg;  $h = 4$  cm;  $l_1 = 20$  cm;  $F_1 = 2$  cm<sup>2</sup>;  $l_2 = 40$  cm;  $F_2 = 4$  cm<sup>2</sup>;  $E_1 = E_2 = 2 \times 10^5$  MN/m<sup>2</sup> (fig. 232, a). Se prescinde del peso propio de las barras.

Determinar  $\sigma_{d1}$ ,  $\sigma_{d2}$  y  $\delta_d$ .

*Resolución.* Calculamos el peso del sólido que golpea,

$$Q = mg = 10 \cdot 9,81 = 98,1 \text{ N.}$$

Puesto que las barras de rigideces  $C_1 = \frac{EF_1}{l_1}$  y  $C_2 = \frac{EF_2}{l_2}$  se unen en paralelo, por la fórmula (224) hallamos la rigidez del sistema,

$$\begin{aligned} C = C_1 + C_2 &= \frac{EF_1}{l_1} + \frac{EF_2}{l_2} = E \left( \frac{F_1}{l_1} + \frac{F_2}{l_2} \right) = \\ &= 2 \cdot 10^{11} \left( \frac{2 \cdot 10^{-4}}{0,20} + \frac{4 \cdot 10^{-4}}{0,40} \right) = 4 \cdot 10^8 \text{ N/m.} \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que al llegar el impacto, la velocidad del peso  $Q$  que cae libremente de la altura  $h$  es  $v_0 = \sqrt{2gh}$ , obtendremos,

$$\frac{v_0^2 C}{Qg} = \frac{2hC}{Q} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 10^{-2} \cdot 4 \cdot 10^8}{98,1} \approx 32,6 \cdot 10^4.$$

Esta magnitud es tan grande que el coeficiente dinámico se puede obtener por la fórmula (247),

$$k_d = \sqrt{\frac{v_0^2 C}{Qg}} = \sqrt{32,6 \cdot 10^4} = 571.$$

Como durante la acción estática del peso  $Q$  el desplazamiento del punto de su aplicación es  $\delta = \frac{Q}{C} = \frac{N_1}{C_1} = \frac{N_2}{C_2}$ , los esfuerzos longitudinales en las secciones transversales de las barras serán,

$$N_1 = \frac{Q}{C} C_1 = \frac{Q}{1 + \frac{C_2}{C_1}} \quad \text{y} \quad N_2 = \frac{Q}{C} C_2 = \frac{Q}{1 + \frac{C_1}{C_2}}.$$

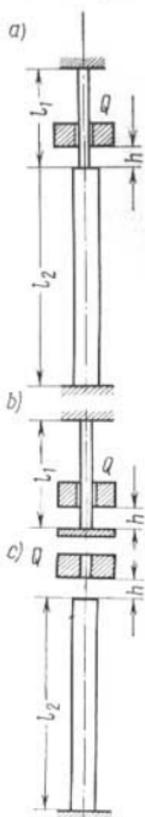


Fig. 232

Las tensiones normales dinámicas en las secciones transversales de las barras resultan,

$$\sigma_{d1} = \frac{N_1}{F_1} k_d = k_d \frac{Q}{F_1 \left(1 + \frac{F_2 l_1}{F_1 l_2}\right)} = 571 \frac{98,1}{2 \cdot 10^{-4} \left(1 + \frac{4 \cdot 10^{-4} \cdot 0,20}{2 \cdot 10^{-4} \cdot 0,40}\right)} = 140 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2 = 140 \text{ MN/m}^2,$$

$$\sigma_{d2} = \frac{N_2}{F_2} k_d = \frac{Q}{F_2 \left(1 + \frac{F_1 l_2}{F_2 l_1}\right)} k_d = \frac{98,1}{4 \cdot 10^{-4} \left(1 + \frac{2 \cdot 10^{-4} \cdot 0,40}{4 \cdot 10^{-4} \cdot 0,20}\right)} 571 = 70 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2 = 70 \text{ MN/m}^2.$$

El desplazamiento dinámico del punto de impacto será,

$$\delta_d = \frac{Q}{C} k_d = \frac{10 \cdot 9,81}{4 \cdot 10^8} 571 \approx 1,4 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 0,014 \text{ cm}.$$

*Casos particulares.*

1) Si  $C_2 = 0$  (fig. 232, b), entonces

$$C = C_1 = \frac{EF_1}{l_1} = \frac{2 \cdot 10^{11}}{0,20} \cdot 0,02 \cdot 10^{-2} \approx 2 \cdot 10^8 \text{ N/m};$$

$$k_d = \sqrt{\frac{2hC_1}{Q}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4 \cdot 10^{-2} \cdot 2 \cdot 10^8}{98,1}} \approx 4 \cdot 10^2;$$

$$\sigma_{d1} = \frac{Q}{F_1} k_d = \frac{98,1}{2 \cdot 10^{-4}} \cdot 4 \cdot 10^2 \approx 200 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2 \approx 200 \text{ MN/m}^2;$$

$$\delta_d = \frac{Q}{C} k_d = \frac{98,1}{2 \cdot 10^8} \cdot 4 \cdot 10^2 \approx 2 \cdot 10^{-4} \text{ m} \approx 0,02 \text{ cm}.$$

2) Si  $C_1 = 0$  (fig. 232, c), entonces

$$C = C_2 = \frac{EF_2}{l_2} = \frac{2 \cdot 10^{11} \cdot 4 \cdot 10^{-4}}{0,40} = 2 \cdot 10^8 \text{ N/m}; \quad k_d = 4 \cdot 10^2;$$

$$\sigma_{d2} = \frac{Q}{F_2} k_d = \frac{10 \cdot 9,81}{4} \cdot 4 \cdot 10^2 \approx 2 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2 = 200 \text{ MN/m}^2;$$

$$\delta_d = \frac{Q}{C} k_d = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ cm}.$$

**Ejemplo 132.** Dado:  $Q = 4 \text{ kgf}$ ;  $h = 4 \text{ cm}$ ; dos resortes de paso pequeño de características:  $D = 2 \text{ cm}$ ;  $d = 0,4 \text{ cm}$ ,  $n = 4$  espiras,

$G = 8 \cdot 10^5 \text{ kgf/cm}^2$  y una viga de características:  $l = 40 \text{ cm}$ ,  $a = 3 \text{ cm}$ ,  $b = 1 \text{ cm}$  y  $E = 2 \cdot 10^6 \text{ kgf/cm}^2$  (fig. 233). Se prescinde de los pesos de los resortes y de la viga.

Determinar  $\max \tau_d$  en el resorte,  $\max \sigma_d$  en la viga y  $\delta_d$ , desplazamiento del punto de impacto.

*Resolución.* Como los resortes de rigideces  $C_1 = \frac{Gd^4}{8D^3n}$  están unidos en paralelo

y la viga de rigidez  $C_2 = \frac{48EI}{l^3}$  se une

a ellos en serie, la rigidez del sistema se calculará por la fórmula (223) correspondiente al caso de unión mixta de los elementos,

$$C = \frac{1}{\frac{1}{2C_1} + \frac{1}{C_2}} = \frac{1}{\frac{1}{4D^3n} + \frac{l^3}{48EI}} = \frac{1}{\frac{4 \cdot 8 \cdot 4}{8 \cdot 10^5 \cdot 256 \cdot 10^{-4}} + \frac{64 \cdot 10^3 \cdot 12}{48 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 3 \cdot 1}} \approx 112 \text{ kgf/cm.}$$

Por la fórmula (245) hallamos el coeficiente dinámico,

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2hC}{Q}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 4 \cdot 112}{4}} \approx 16.$$

Puesto que  $\frac{D}{d} = \frac{2}{0,4} = 5$ , para el coeficiente de aumento de las tensiones en el resorte como consecuencia de la curvatura de la espira, obtendremos

$$k = \frac{\frac{D}{d} - 0,25}{\frac{D}{d} - 1} + \frac{0,615}{\frac{D}{d}} = \frac{4,75}{4} + \frac{0,615}{5} \approx 1,31.$$

Las tensiones dinámicas máximas en los resortes y en la viga serán,

$$\max \tau_d = k \frac{4QD}{\pi d^3} k_d \approx 1,31 \frac{4 \cdot 4 \cdot 2}{\pi \cdot 64 \cdot 10^{-3}} 16 \approx 3340 \text{ kgf/cm}^2;$$

$$\max \sigma_d = \frac{Ql}{4W} k_d = \frac{4 \cdot 40 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 1} 16 \approx 1280 \text{ kgf/cm}^2.$$

El desplazamiento dinámico del punto de impacto será,

$$\delta_d = \frac{Q}{C} k_d = \frac{4}{112} 16 \approx 0,57 \text{ cm.}$$

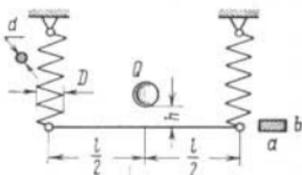


Fig. 233

Si no existiesen los resortes,  $C = C_2 = \frac{48EI}{l^3} = 375 \text{ kgf/cm}$  y

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2hC}{Q}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 4 \cdot 375}{4}} \approx 28,4;$$

$$\sigma_{\max} = \frac{4 \cdot 40 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 1} \cdot 28,4 \approx 2270 \text{ kgf/cm}^2.$$

**Ejemplo 133.** Dado:  $Q = 20 \text{ kgf}$ ,  $h = 2 \text{ cm}$ ,  $\rho = 4 \text{ cm}$ ,  $l_1 = l_2 = l_3 = l = 20 \text{ cm}$ ,  $d_1 = 1,4 \text{ cm}$ ,  $d_2 = 1,2 \text{ cm}$ ,  $d_3 = 1 \text{ cm}$  y  $G = 2,8 \cdot 10^5 \text{ kgf/cm}^2$  (fig. 234).

Prescídase del peso propio de la barra escalonada.

Determinar  $\delta_d$  desplazamiento dinámico del punto de aplicación del peso  $Q$ ;  $\max \tau_{d_{1,2,3}}$  tensiones tangenciales dinámicas máximas en los tramos de la barra.

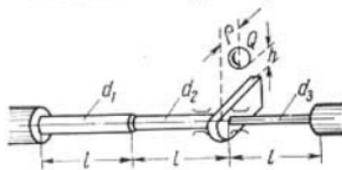


Fig. 234

*Resolución.* Las rigideces de la torsión de los escalones de la barra son respectivamente,

$$C_1 = \frac{GI_{p_1}}{l}; \quad C_2 = \frac{GI_{p_2}}{l}, \quad C_3 = \frac{GI_{p_3}}{l}.$$

Los dos primeros escalones de la barra se unen en serie y, por lo tanto, la rigidez total será,

$$C_0 = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}.$$

Puesto que en la sección donde se aplica el par exterior de fuerzas, el tercer escalón de la barra se une con los otros dos en paralelo, la rigidez total de toda la barra interpretada como un sistema de elementos unidos en paralelo, será

$$\begin{aligned} C &= C_0 + C_3 = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} + C_3 = \frac{1}{\frac{l}{GI_{p_1}} + \frac{l}{GI_{p_2}}} + \frac{GI_{p_3}}{l} = \\ &= \frac{G}{l} \left( \frac{1}{\frac{1}{I_{p_1}} + \frac{1}{I_{p_2}}} + I_{p_3} \right) \approx 0,1 \frac{G}{l} \left( \frac{1}{\frac{1}{d_1^4} + \frac{1}{d_2^4}} + d_3^4 \right) = \\ &= 0,1 \frac{2,8 \cdot 10^5}{20} \left( \frac{1}{\frac{1}{1,4^4} + \frac{1}{1,2^4}} + 1 \right) \approx 3290 \text{ kgf/cm}. \end{aligned}$$

La energía cinética del cuerpo que golpea, en el momento del impacto, será,

$$T = \frac{Qv_0^2}{2g} = Qh \text{ kgf}\cdot\text{cm.}$$

El ángulo de giro estático de la sección donde se aplica el par de fuerzas de momento  $M = Q\rho$ , será

$$\varphi = \frac{M}{C} = \frac{Q\rho}{C} = \frac{20 \cdot 4}{3290} = \frac{8}{329} \text{ rad.}$$

La energía potencial de la deformación elástica en la torsión estática es,

$$U = \frac{M\varphi}{2} = \frac{Q^2\rho^2}{2C}.$$

Como la relación

$$\frac{T}{U} = \frac{Qh}{Q^2\rho^2} 2C = \frac{2hC}{Q\rho^2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 3290}{20 \cdot 16} \approx 41,1,$$

es pequeña, el coeficiente dinámico se hallará por la fórmula (246)

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{T}{U}} = 1 + \sqrt{42,1} \approx 7,5.$$

El ángulo de giro dinámico de la sección de la barra, donde se aplica el momento exterior originado por el peso que cae, será

$$\varphi_d = \varphi k_d = \frac{8 \cdot 7,5}{329} \approx 0,182 \text{ rad.}$$

y el desplazamiento lineal dinámico del peso  $Q$ ,

$$\delta_d = \rho\varphi_d = 0,182 \cdot 4 = 0,73 \text{ cm.}$$

El momento reactivo en el empotramiento derecho de la barra, debido a la aplicación estática del par exterior de momento  $M = Q\rho$  resulta,

$$M_{\text{der}} = \varphi C_3 = \varphi \frac{GI_{p_3}}{l} = \frac{8}{329} \cdot \frac{2,8 \cdot 10^5 \cdot 0,1}{20} \approx 34 \text{ kgf}\cdot\text{cm.}$$

El momento reactivo en el empotramiento izquierdo de la barra,

$$M_{\text{iz}} = M - M_{\text{der}} = 20 \cdot 4 - 34 = 46 \text{ kgf}\cdot\text{cm.}$$

y las tensiones tangenciales dinámicas máximas en los tramos de las vigas,

$$\max \tau_{d_1} = \frac{M_{Iz}}{W_{p_1}} k_d \approx \frac{46}{0,2 \cdot 1,4^3} 7,5 \approx 628 \text{ kgf/cm}^2;$$

$$\max \tau_{d_2} = \frac{M_{Iz}}{W_{p_2}} k_d \approx \frac{46}{0,2 \cdot 1,2^3} 7,5 \approx 986 \text{ kgf/cm}^2;$$

$$\max \tau_{d_3} = \frac{M_{der}}{W_{p_3}} k_d \approx \frac{34}{0,2 \cdot 1} 7,5 \approx 1\,230 \text{ kgf/cm}^2.$$

**Ejemplo 134.** Dado:  $m = 1 \text{ kg}$ ,  $v_0 = 4 \text{ m/s}$ ,  $m_1 = 20 \text{ kg}$ ,  $d = 2 \text{ cm}$ ,  $l = 0,4 \text{ m}$  y  $E = \frac{5}{2} G = 2 \cdot 10^5 \text{ MN/m}^2$  (fig. 235). El

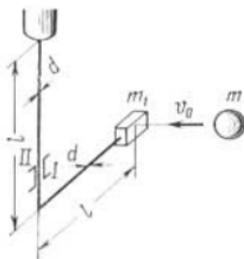


Fig. 235

impacto va dirigido horizontalmente. Se prescinde del peso propio de la barra.

Determinar  $\max \sigma_d$ ,  $\max \tau_{d_2}$  y  $\delta_d$ .

*Resolución.* Calculamos el peso correspondiente a la masa  $m$ :  $Q = mg = 9,81 \text{ N}$ . Como el sistema está sometido al impacto de la masa  $m$  que se mueve horizontalmente, el coeficiente dinámico se deberá determinar por la fórmula (248) \* sustituyendo la magnitud  $k_m m_0$  por la masa  $m_1$ , es decir,

$$k_d = \sqrt{\frac{v_0^2 C}{Qg} \cdot \frac{1}{1 + \frac{m_1}{m}}}$$

Puesto que el desplazamiento horizontal del punto de choque, originado por la torsión de la barra vertical por la fuerza  $Q$  que actúa estáticamente y que va dirigida según la dirección del impacto, es,

$$\delta_0 \approx \varphi l = \frac{Ml}{GI_p} l = \frac{Ql^3}{GI_p},$$

el sistema golpeado se puede interpretar como un sistema con unión en serie del elemento flexado horizontalmente, de rigidez  $C_1 = \frac{3EI}{l^3}$ , y el elemento vertical torsionado, cuya rigidez referida al desplazamiento lineal del punto de choque es  $C_2 = \frac{GI_p}{l^3}$ .

\* Como el problema se resuelve en el sistema SI, en la fórmula (248) debe sustituirse la fracción  $\frac{k_m Q_0}{Q}$  por  $\frac{k_m m_0}{m}$ .

Por la fórmula (222) hallamos la rigidez de todo el sistema,

$$C = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} = \frac{1}{\frac{l^3}{3EI} + \frac{l^3}{GI_p}} = \frac{1}{\frac{l^3}{3 \cdot \frac{5}{2} G \cdot \frac{1}{2} \cdot I_p} + \frac{l^3}{GI_p}} \approx$$

$$\approx \frac{GI_p}{1,27l^3} \approx \frac{8 \cdot 10^{10} \cdot 0,1 \cdot 0,02^4}{1,27 \cdot 0,4^3} \approx 16 \cdot 10^3 \text{ N/m.}$$

Para el coeficiente dinámico se obtiene,

$$k_d = \sqrt{\frac{16 \cdot 16 \cdot 10^3 \cdot 1}{4 \cdot 9,81} \cdot \frac{1}{1 + \frac{20}{1}}} \approx 11,2.$$

Cuando la fuerza  $Q$  actúa estáticamente en la dirección del impacto, la tensión normal máxima  $\sigma_{\max}$  en la barra horizontal, la tensión tangencial máxima  $\tau_{\max}$  en la barra vertical y el desplazamiento lineal  $\delta$  del punto de choque serán respectivamente,

$$\sigma_{\max} = \frac{Ql}{W} \approx \frac{9,81 \cdot 0,4}{0,1 \cdot 0,02^3} \approx 5 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2 = 5 \text{ MN/m}^2.$$

$$\tau_{\max} = \frac{Ql}{W_p} \approx \frac{9,81 \cdot 0,4}{0,2 \cdot 0,02^3} \approx 2,5 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2 = 2,5 \text{ MN/m}^2.$$

y

$$\delta = \frac{Q}{C} = \frac{9,81}{16 \cdot 10^3} \approx 0,613 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 0,0613 \text{ cm.}$$

Las magnitudes dinámicas que se hallan resultarán,

$$\max \sigma_d = k_d \sigma_{\max} = 11,2 \cdot 5 = 56 \text{ MN/m}^2,$$

$$\max \tau_d = k_d \tau_{\max} = 11,2 \cdot 2,5 = 28 \text{ MN/m}^2,$$

$$\delta_d = k_d \delta = 11,2 \cdot 0,0613 \approx 0,69 \text{ cm.}$$

Si el sistema no llevase fija la masa  $m_1$ , entonces

$$k_d = \sqrt{\frac{v_0^2 C}{Qg}} = \sqrt{\frac{16 \cdot 16 \cdot 10^3}{9,81 \cdot 9,81}} \approx 51,6;$$

$$\max \sigma_d = 51,6 \cdot 5 = 258 \text{ MN/m}^2,$$

$$\max \tau_d = 51,6 \cdot 2,5 = 129 \text{ MN/m}^2; \quad \delta_d = 51,6 \cdot 0,0613 \approx 3,16 \text{ cm.}$$

**Ejemplo 135.** Impacto longitudinal. Dado:  $Q = 8 \text{ kgf}$ ,  $\gamma = 8 \text{ gf/cm}^3$ ,  $l = 2 \text{ m}$ ,  $F = 4 \text{ cm}^2$ ,  $E = 2 \cdot 10^6 \text{ kgf/cm}^2$ ,  $[\sigma_d] = 1\,000 \text{ kgf/cm}^2$  (fig. 236).

Determinar  $h$ , considerando la masa de la barra y prescindiendo de ella.

*Resolución.* Como en el caso cuando la carga  $Q$  actúa estáticamente,

$$\sigma = \frac{Q}{F} = \frac{8}{4} = 2 \text{ kgf/cm}^2,$$

el coeficiente dinámico obtenido por la fórmula (249) resultará

$$k_d = \frac{[\sigma_d]}{\sigma} = \frac{1000}{2} = 500.$$

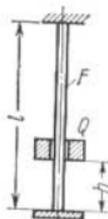


Fig. 236

Por otra parte, como la velocidad del movimiento del peso  $Q$  en el momento del choque es  $v_0 = \sqrt{2gh}$ ,

la rigidez de la barra a la tracción,  $C = \frac{EF}{l}$  el peso propio de la barra,  $Q_0 = \gamma Fl$  y el coeficiente de reducción de la masa de la barra al trasladarla al punto de choque,  $k_m = \frac{1}{3}$  (véase el ejemplo 125), por la fórmula (243) obtendremos,

$$\begin{aligned} k_d &= 1 + \sqrt{1 + \frac{2hEF}{Ql} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{Q_0}{Q}}} = \\ &= 1 + \sqrt{1 + \frac{2h \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 4}{8 \cdot 2 \cdot 10^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{64}{8}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{3 \cdot 10^4}{3,8} h}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Así, pues, } 500 &= 1 + \sqrt{1 + \frac{3 \cdot 10^4}{3,8} h} \text{ de donde hallamos } h = \\ &= \frac{(499^2 - 1) \cdot 3,8}{3 \cdot 10^4} \approx 31,5 \text{ cm.} \end{aligned}$$

Si se prescinde de la masa de la barra,

$$k_d = 500 = \sqrt{\frac{v_0^2 C}{Qg}} = \sqrt{\frac{2hEF}{Ql}} = \sqrt{\frac{2h \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 4}{8 \cdot 2 \cdot 10^2}} = 10^2 \sqrt{h}$$

y por lo tanto  $h = 25$  cm, lo que quiere decir que, al prescindir del peso propio de la barra, se reduce el valor de la altura no peligrosa de caída del peso en

$$\frac{31,5 - 25}{31,5} \cdot 100 \approx 21\%.$$

**Ejemplo 136.** Choque transversal. Dado:  $h = 5$  cm,  $l = 1$  m,  $I = 2\,000$  cm<sup>4</sup>,  $W = 200$  cm<sup>3</sup>,  $Q_0 = 25$  kgf,  $E = 2 \cdot 10^6$  kgf/cm<sup>2</sup> y  $[\sigma_d] = 1\,200$  kgf/cm<sup>2</sup> (fig. 237).

Determinar  $D$  considerando la masa de la viga y prescindiendo de ella.

*Resolución.* Cuando el peso  $Q$  actúa estáticamente, la flecha del extremo libre de la viga será  $\delta = \frac{Ql^3}{3EI}$ ; la flecha de una sección

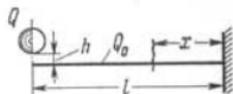


Fig. 237

arbitraria de la viga, situada a la distancia  $x$  del empotramiento, por la fórmula del método de los parámetros de origen,

$$\delta_x = \frac{1}{EI} \left( \frac{Qlx^2}{2} - \frac{Qx^3}{6} \right) = \frac{Ql^3}{3EI} \left( \frac{3}{2} \cdot \frac{x^2}{l^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{l^3} \right).$$

Por lo tanto, el coeficiente de reducción de la masa de la viga al concentrarla en el punto de choque resultará

$$k_m = \frac{1}{l} \int_0^l \left( \frac{\delta_x}{\delta} \right)^2 dx = \frac{1}{l} \int_0^l \left( \frac{3x^2}{2l^2} - \frac{x^3}{2l^3} \right) dx = \frac{33}{140}$$

y el coeficiente dinámico, por la fórmula (243),

$$\begin{aligned} k_d &= 1 + \sqrt{1 + \frac{2h3EI}{Ql^3} \cdot \frac{1}{1 + \frac{33}{140} \cdot \frac{Q_0}{Q}}} \\ &= 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^3}{Q \cdot 10^6} \cdot \frac{1}{1 + \frac{33}{140} \cdot \frac{25}{Q}}} \approx \\ &\approx 1 + \sqrt{1 + \frac{12 \cdot 10^4}{Q + 6}}. \end{aligned}$$

Por otra parte, como el peso  $Q$  al actuar estáticamente origina en la viga la tensión máxima normal,

$$\sigma_{\max} = \frac{Ql}{W} = \frac{Q \cdot 100}{200} = \frac{Q}{2} \text{ kgf/cm}^2,$$

el coeficiente dinámico será según la fórmula (249)

$$k_d = \frac{[\sigma_d]}{\sigma_{\max}} = \frac{1\,200 \cdot 2}{Q} = \frac{2\,400}{Q}.$$

$$\text{Por lo tanto, } \frac{2400}{Q} = 1 + \sqrt{1 + \frac{12 \cdot 10^4}{Q+6}} \quad \delta$$

$$13Q^2 - 6 \cdot 10^2 Q - 36 \cdot 10^2 = 0,$$

de donde se obtiene

$$Q = \frac{1}{13} (3 \cdot 10^2 \pm \sqrt{9 \cdot 10^4 + 36 \cdot 10^2}) \approx \frac{3 \pm 3,7}{13} 10^2.$$

De estas dos raíces sólo una satisface las condiciones del problema,

$$Q = \frac{6,7 \cdot 10^2}{13} \approx 52 \text{ kgf.}$$

Prescindiendo de la masa obtendremos,

$$\frac{2 \cdot 400}{Q} = \sqrt{\frac{2h \cdot 3EI}{Ql^3}}$$

y, por lo tanto,

$$Q = \frac{24^2 \cdot 10^4 \cdot l^3}{2h \cdot 3 \cdot EI} = \frac{24^2 \cdot 10^4 \cdot 10^6}{2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^3} = 48 \text{ kgf.}$$

Así, pues, si se prescinde de la masa de la viga, entonces el peso no peligroso de la masa que cae, se reducirá en

$$\frac{52 - 48}{52} 100 \approx 8\%.$$

**Ejemplo 137.** Impacto torsionante. El peso  $Q = 3$  kgf gira sobre el brazo  $\rho = 8$  cm alrededor del eje horizontal  $x$  con velocidad angular constante  $\omega_0$  y choca con la parte sobresaliente de la barra cilíndrica de longitud  $l = 40$  cm y de diámetro  $d = 6$  cm (fig. 238).

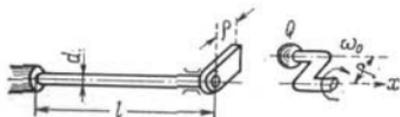


Fig. 238

Determinar el número admisible de revoluciones  $n$  del peso  $Q$  por minuto, si el peso de la unidad de volumen del material de

la barra es  $\gamma = 8$  gf/cm<sup>3</sup>, el módulo del deslizamiento  $G = 8 \cdot 10^5$  kgf/cm<sup>2</sup> y la tensión admisible tangencial  $[\tau_d] = 400$  kgf/cm<sup>2</sup>.

**Resolución.** Cuando la carga  $Q$  actúa estáticamente sobre la barra en ésta surgen las tensiones tangenciales máximas siguientes,

$$\tau_{\max} = \frac{Q\rho}{W_p} = \frac{Q\rho}{0,2d^3} = \frac{3 \cdot 8}{0,2 \cdot 6^3} = \frac{5}{9} \text{ kgf/cm}^2.$$

El coeficiente dinámico resulta,

$$k_d = \frac{[\tau_d]}{\tau_{\max}} = \frac{400 \cdot 9}{5} = 720.$$

Como el momento de inercia de la masa del peso  $Q$  respecto al eje de rotación es

$$I_m = \frac{Q}{g} \rho^2 = \frac{3 \cdot 64}{981} \approx 0,2 \text{ kgf} \cdot \text{cm} \cdot \text{s}^2,$$

el momento de inercia de la masa de la barra,

$$I_{m_0} = \frac{\pi}{32} \cdot \frac{\gamma}{g} d^4 l \approx 0,1 \frac{8 \cdot 10^{-3}}{981} \cdot 6^4 \cdot 40 \approx 0,042 \text{ kgf} \cdot \text{cm} \cdot \text{s}^2,$$

el coeficiente de reducción de la masa de la barra (véase el ejemplo 127),  $k_m = \frac{1}{3}$ , la energía cinética del movimiento giratorio del peso,

$$T = \frac{I_m \omega_0^2}{2} \approx 0,1 \omega_0^2 \text{ kgf} \cdot \text{cm},$$

y la energía potencial de la deformación elástica en la torsión de la barra al actuar el peso estáticamente,

$$U = \frac{Q^2 \rho^2 l}{2GI_p} \approx \frac{9 \cdot 64 \cdot 40}{2 \cdot 8 \cdot 10^5 \cdot 0,1 \cdot 6^4} = \frac{1}{9 \cdot 10^3} \text{ kgf} \cdot \text{cm},$$

por la fórmula (243) hallaremos el coeficiente dinámico,

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{T}{U} \cdot \frac{1}{1 + k_m \frac{I_{m_0}}{I_m}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{0,1 \cdot \omega_0^2 \cdot 9 \cdot 10^3}{1 + \frac{0,042}{3 \cdot 0,2}}} \approx \\ \approx 1 + \sqrt{1 + 841 \omega_0^2}.$$

Comparando estos coeficientes dinámicos obtendremos,  $719 = \sqrt{1 + 841 \omega_0^2}$ , de donde hallamos,

$$\omega_0 = \frac{\pi n}{30} \approx \sqrt{\frac{719^2}{841}} \approx 25 \quad \text{y} \quad n = \frac{30}{\pi} \cdot 25 \approx 240 \text{ r.p.m.}$$

Si se prescinde de la masa de la barra,

$$k_d = 720 = \sqrt{\frac{T}{U}} = 30 \omega_0$$

y por lo tanto,

$$\omega_0 = \frac{\pi n}{30} = \frac{720}{30} = 24 \text{ y } n = \frac{30 \cdot 24}{\pi} \approx 230 \text{ r.p.m.}$$

Así, pues, al prescindir de la masa de la barra, el número admisible de revoluciones del peso que golpea se reduce en

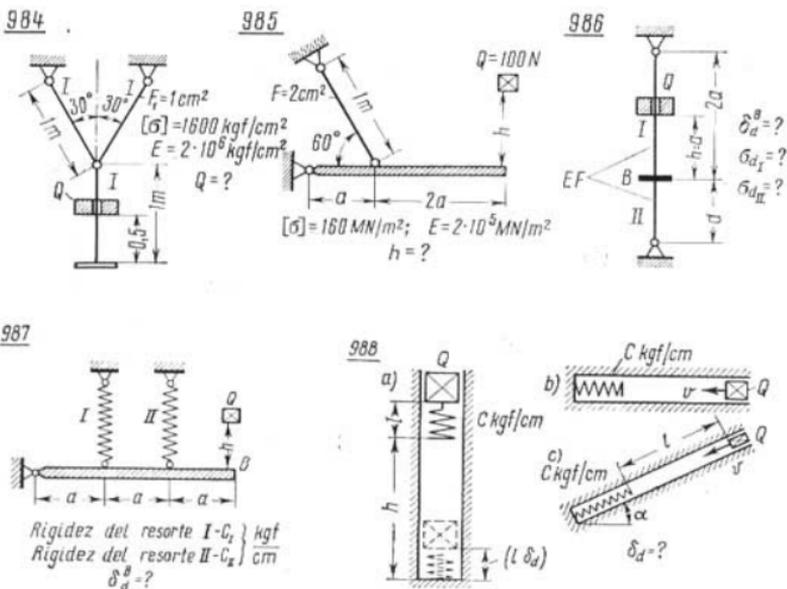
$$\frac{240 - 230}{240} \cdot 100 \approx 4\%.$$

**Problemas 984-1003.** Determinar las magnitudes indicadas en las condiciones de los problemas para los sistemas elásticos sometidos al impacto.

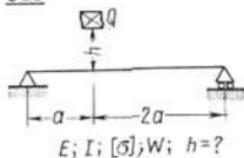
Prescíndase de la masa propia de los elementos de los sistemas. En los problemas que se resuelven en forma general el coeficiente dinámico se deberá calcular por la fórmula aproximada,

$$k_d = \sqrt{\frac{v_0^2}{g\delta}}.$$

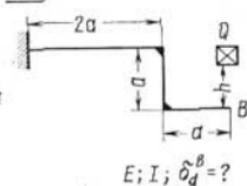
En los sistemas aperticados y en las barras curvas sólo debe considerarse la deformación originada por la flexión.



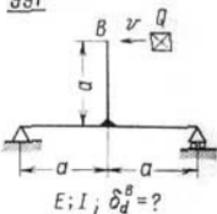
989



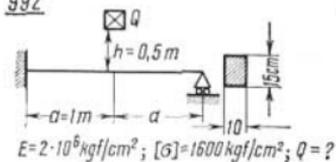
990



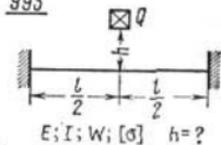
991



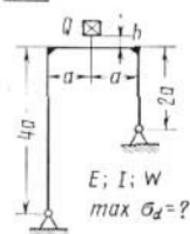
992



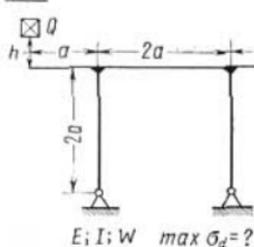
993



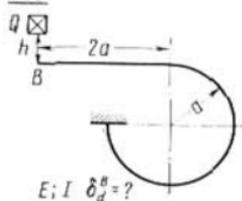
994



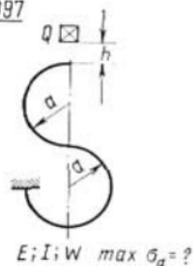
995



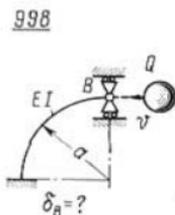
996



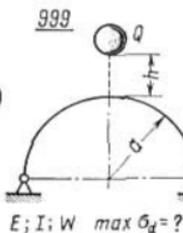
997



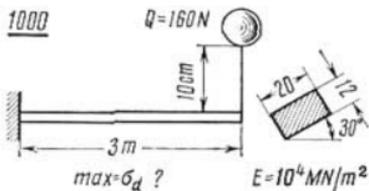
998



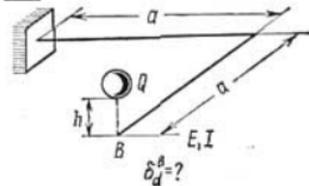
999

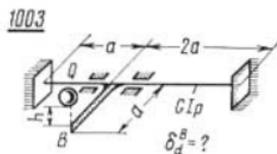
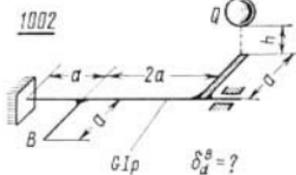


1000

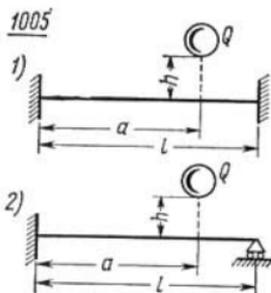
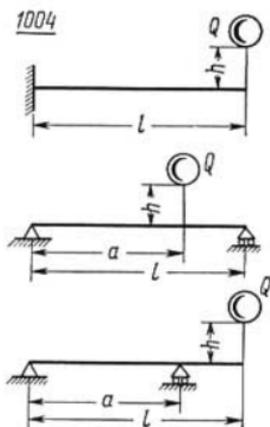


1001





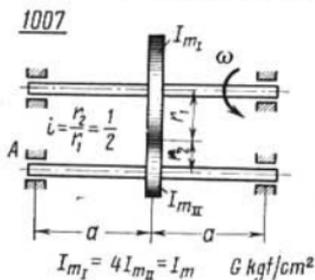
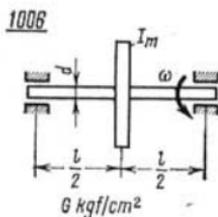
**Problema 1004.** Demostrar que para las barras indicadas, las tensiones dinámicas máximas, obtenidas prescindiendo de la masa de la viga, no dependen de la manera de apoyo y de la magnitud  $a$ . Considérese que  $h \gg \delta$ .



**Problema 1005.** Determinar  $a$  para que la tensión  $\max \sigma_d$  sea mínima. Prescíndase de la masa de las vigas y considérese que  $h \gg \delta$ .

**Problema 1006.** Determinar la tensión  $\max \tau_d$  en el eje que gira con la velocidad angular  $\omega$  y que soporta el volante de momento de inercia de la masa  $I_m$ , cuando se para el eje bruscamente:

a) en un solo cojinete; b) en los dos cojinetes simultáneamente.

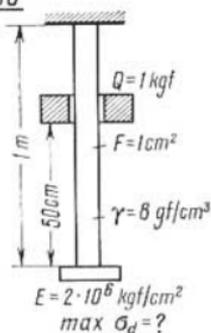


**Problema 1007.** Determinar  $\max \tau_d$  en el árbol del sistema transmisor cuando frena súbitamente el extremo del árbol en el cojinete A.

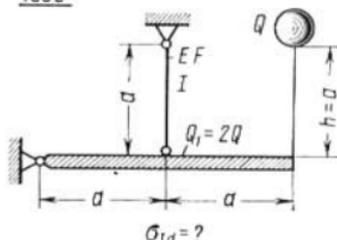
**Problemas 1008-1011.** Determinar las magnitudes indicadas en las condiciones de los problemas para los sistemas sometidos al impacto.

Considérese el peso propio de todos aquellos elementos que lo tienen indicado. Ténganse en cuenta las observaciones hechas en los problemas 984-1003.

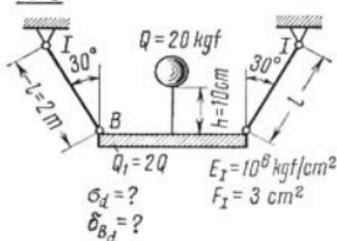
1008



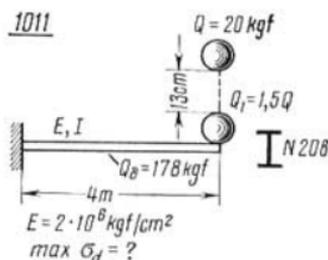
1009



1010



1011

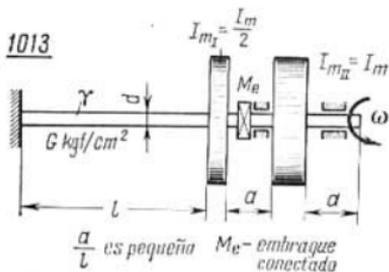


**Problema 1012.** Resolver el problema 993 considerando la influencia de la masa de la viga. Su peso es  $Q_0$ .

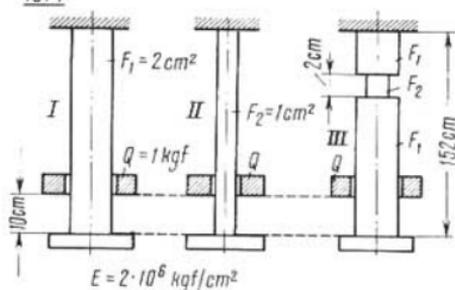
**Problema 1013.** Determinar  $\max \tau_d$  en el árbol, originado por el impacto torsionante que surge al conectar súbitamente el embrague  $M_e$ . Este embrague conecta el sistema en movimiento giratorio de la parte derecha del árbol con la parte izquierda inmóvil.

**Problema 1014.** Determinar y comparar las tensiones  $\sigma_{dI}$ ,  $\sigma_{dII}$ ,  $\sigma_{dIII}$  en las barras I, II, III, que surgen durante el choque del mismo peso  $Q$  que cae de la misma altura  $h = 10 \text{ cm}$ .

1013



1014



## XV. TENSIONES ALTERNADAS

En este capítulo se analizan las tensiones que varían periódicamente durante un largo lapso de tiempo.

El conjunto de valores consecutivos de las tensiones alternadas durante un ciclo se denomina *ciclo de las tensiones*.

Cuando sobre el sólido actúan sistemáticamente tensiones alternadas, en los lugares de máxima concentración de las tensiones pueden aparecer grietas que conducen a la destrucción frágil del sólido. El proceso de surgimiento y desarrollo de las grietas en el material del sólido, originado por las tensiones alternadas se denomina *fatiga del material*.

La resistencia del material a las tensiones alternadas se denomina *resistencia del material a la fatiga*. Las tensiones máximas de variación periódica que el material puede resistir indefinidamente se denomina *límite de resistencia a la fatiga*.

Generalmente se calcula el límite convencional de resistencia a la fatiga basándose en un número limitado de ciclos, por ejemplo, en el caso de los metales ferrosos  $(5 \div 10) \cdot 10^6$  ciclos, en el caso de metales no ferrosos,  $(50 \div 100) \cdot 10^6$  ciclos, etc.

El ciclo se caracteriza por el coeficiente de asimetría  $r$  que se obtiene como la fracción algebraica

$$r = \frac{P_{\min}}{P_{\max}}, \quad (250)$$

siendo  $p_{\max}$  ( $\sigma_{\max}$  y  $\tau_{\max}$ ) y  $p_{\min}$  ( $\sigma_{\min}$  y  $\tau_{\min}$ ) las tensiones máximas y mínimas del ciclo.

$$\text{La magnitud } p_m = \frac{P_{\max} + P_{\min}}{2} \quad (251)$$

se denomina *tensión media del ciclo* y

$$p_a = \frac{p_{\max} - p_{\min}}{2}, \quad (252)$$

*amplitud del ciclo.*

El límite de resistencia a la fatiga es

$$p_r = p_{\max}^r = p_m^r + p_a^r, \quad (253)$$

siendo  $p_{\max}^r$ ,  $p_m^r$  y  $p_a^r$  la tensión máxima, la tensión media y la amplitud del ciclo correspondiente al caso cuando el material trabaja en su límite de resistencia a la fatiga.



Fig. 239

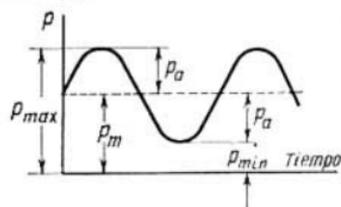


Fig. 240

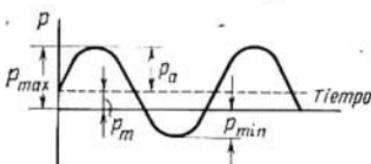


Fig. 241

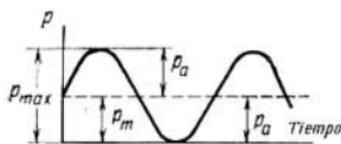


Fig. 242

Si el ciclo es simétrico (fig. 239), entonces

$$p_{\max} = -p_{\min}; \quad p_m = 0; \quad r = -1; \quad p_r = p_{-1}.$$

Cuando el ciclo es de signo constante positivo y asimétrico (fig. 240),

$$p_{\max} > 0; \quad p_{\min} > 0; \quad 0 < r < 1.$$

Cuando el ciclo es asimétrico y de signo alternativo (fig. 241),

$$p_{\max} > 0; \quad p_{\min} < 0; \quad -1 < r < 0.$$

Cuando el ciclo es de pulsación (fig. 242),

$$p_{\max} > 0; \quad p_{\min} = 0; \quad p_m = p_a = \frac{p_{\max}}{2}; \quad r = 0; \quad p_r = p_0.$$

## § 1. Factores principales que influyen sobre la resistencia del material a la fatiga\*

### Carácter del ciclo y tipo de deformación

En el caso de un ciclo simétrico el límite de resistencia a la fatiga del material (cuando las otras condiciones son idénticas) adquiere su valor mínimo. El límite de resistencia a la fatiga en el ciclo simétrico  $p_{-1}$  ( $\sigma_{-1}$  ó  $\tau_{-1}$ ) se determina por la curva (fig. 243) que se

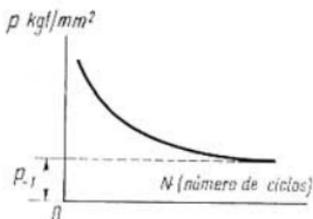


Fig. 243

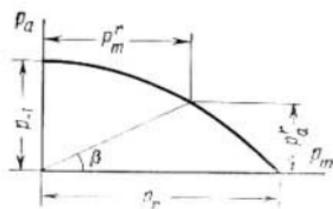


Fig. 244

construye por los datos experimentales. Para ello, en la parte derecha de la curva, allí donde se convierte en horizontal, se traza una tangente a la curva. La ordenada que determina esta tangente se admite como límite convencional de resistencia a la fatiga.

Se han establecido las siguientes relaciones aproximadas entre los límites de resistencia a la fatiga en la flexión simétrica,  $\sigma_{-1}$ ; en la tracción — compresión simétricas  $\sigma_{-1 \text{ trac}}$  y en la torsión simétrica  $\tau_{-1}$  por una parte y el límite de rotura  $\sigma_r$  (resistencia) por otra,

para el acero,

$$\sigma_{-1} \approx (0,4 \div 0,6) \sigma_r; \quad \sigma_{-1 \text{ trac}} \approx (0,7 \div 0,8) \sigma_{-1};$$

$$\tau_{-1} \approx (0,4 \div 0,7) \sigma_{-1};$$

para el hierro fundido,

$$\sigma_{-1} (0,4 \div 0,5) \sigma_r; \quad \tau_{-1} \approx (0,7 \div 0,9) \sigma_{-1};$$

para los metales no ferrosos

$$\sigma_{-1} \approx (0,25 \div 0,5) \sigma_r.$$

En el caso de un ciclo asimétrico, el límite de resistencia a la fatiga puede obtenerse por la curva experimental de las amplitudes límites, construida en el sistema de coordenadas

$$p_m, p_a \text{ (fig. 244).}$$

\* En este párrafo sólo se da el material necesario para resolver los problemas que figuran en el libro.

Se entiende por  $p_r$ , en la figura, el límite de resistencia del material, correspondiente al tipo de deformación dado del sólido.

Dado el coeficiente de asimetría del ciclo  $r = \frac{p_{\min}}{p_{\max}}$  se determina

la magnitud de  $\operatorname{tg} \beta = \frac{p_a}{p_m} = \frac{1-r}{1+r}$  y del ángulo  $\beta$ .

Del origen de las coordenadas se traza una recta inclinada un ángulo  $\beta$  respecto al eje  $p_m$ . Sumando las coordenadas  $p_m^r$  y  $p_a^r$  del punto de intersección de esta recta con la curva del diagrama se obtiene el límite de resistencia a la fatiga,

$$p_r = p_m^r + p_a^r.$$

**Ejemplo 138.** Dado: el acero marca 40 en estado normalizado y el diario de las observaciones de los ensayos por fatiga para el caso de la flexión de ciclo simétrico:  $\sigma$  MN/m<sup>2</sup> 300; 290; 280; 270;

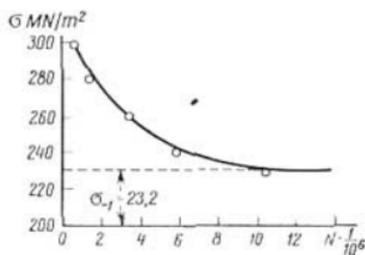


Fig. 245

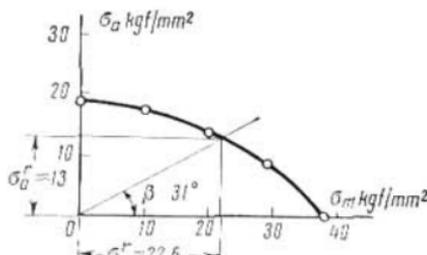


Fig. 246

260; 250; 240; 235; 230; 230;  $N \cdot \frac{1}{10^6}$  0,52; 0,71; 1,21; 2,32; 3,44; 4,82; 5,85; 8,51; >10; >10 las dos probetas últimas no llegaron a destruirse.

Determinar  $\sigma_{-1}$ .

**Resolución.** Por los datos obtenidos en los ensayos se construye la curva de la resistencia a la fatiga en el sistema de coordenadas

$\sigma$  MN/m<sup>2</sup> —  $\frac{N}{10^6}$  ( $N$  es el número de ciclos) (fig. 245).

Trazando la tangente en la parte extrema derecha de la curva establecemos, sobre el eje de coordenadas, el límite convencional de resistencia a la fatiga  $\sigma_{-1} \approx 232$  MN/m<sup>2</sup>.

**Ejemplo 139.** Dado que el material es acero Cr. 3, los valores experimentales de  $\sigma_r = 38,8$  kgf/mm<sup>2</sup>,  $\sigma_{-1} = 18,5$  kgf/mm<sup>2</sup> y de las amplitudes límites del ciclo  $\sigma_a^r$  correspondientes a las tensiones medias  $\sigma_m^r$  dadas,

$\sigma_m^r$ kgf/mm <sup>2</sup>	10	20	30
$\sigma_a^r$ kgf/mm <sup>2</sup>	17,5	14	8,5

Determinar  $\sigma_{0,25}$ .

*Resolución.* Por los datos experimentales construimos la curva de las amplitudes límites en el sistema de coordenadas  $\sigma_m - \sigma_a$  (fig. 246).

Como el límite de resistencia a la fatiga que se determina corresponde al ciclo asimétrico de coeficiente de asimetría  $r = 0,25$ , resulta

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{1 - 0,25}{1 + 0,25} = 0,6 \quad \text{y} \quad \beta \approx 31^\circ.$$

Trazamos por el origen de las coordenadas la recta inclinada  $\beta = 31^\circ$  respecto al eje  $\sigma_m$ . Las coordenadas del punto de intersección de esta recta con la curva de las amplitudes límites son,

$$\sigma_m^{0,25} \approx 22,5 \text{ kgf/mm}^2 \quad \text{y} \quad \sigma_a^{0,25} \approx 13 \text{ kgf/mm}^2,$$

y el límite de resistencia a la fatiga que se busca,

$$\sigma_{0,25} = \sigma_m^{0,25} + \sigma_a^{0,25} \approx 22,5 + 13 = 35,5 \text{ kgf/mm}^2.$$

#### Concentración de tensiones

Se entiende por *concentración de tensiones* el aumento local de las tensiones en las proximidades del foco de concentración (es decir, allí donde tiene lugar una variación local de la configuración del sólido, en forma de agujeros, surcos, ranuras, aristas huecas, chaflanes cóncavos, etc.).

La razón entre la tensión local máxima  $p_l$  ( $\sigma_l$  ó  $\tau_l$ ) y la nominal  $p$  ( $\sigma$  ó  $\tau$ ) en la sección debilitada por el foco de concentración (pero obtenida sin considerar la concentración), que corresponde a la carga estática y que se determina suponiendo que el material es absolutamente homogéneo, isótropo y elástico, se denomina *coeficiente teórico de concentración de tensiones*,

$$\alpha = \frac{p_l}{p}; \quad \left( \alpha_\sigma = \frac{\sigma_l}{\sigma} \quad \text{y} \quad \alpha_\tau = \frac{\tau_l}{\tau} \right). \quad (254)$$

El coeficiente  $\alpha > 1$  refleja solamente la influencia de la configuración geométrica del foco de concentración sobre la magnitud de la tensión máxima local.

En el caso de tensiones alternadas se introduce también el concepto de *coeficiente efectivo de concentración de tensiones*,

$$\alpha_e = \frac{p_{-1}}{p_{-1}^c}; \quad \left( \alpha_e^\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1}^c} \quad \text{y} \quad \alpha_e^\tau = \frac{\tau_{-1}}{\tau_{-1}^c} \right), \quad (255)$$

que es la relación del límite de resistencia a la fatiga en el ciclo simétrico de una probeta lisa  $p_{-1}$  al límite de resistencia a la fatiga de otra probeta de las mismas dimensiones pero con un foco de concentración  $p_{-1}^c$ .

El coeficiente  $\alpha_e$  refleja no solamente la influencia de la configuración geométrica sobre el valor del límite de resistencia a la fatiga, sino también la influencia del material de la probeta.

La razón,

$$q = \frac{\alpha_e - 1}{\alpha - 1} \quad (256)$$

se denomina *coeficiente de sensibilidad del material a la concentración de tensiones*,  $0 \leq q \leq 1$ .

En el caso del hierro fundido  $q = 0$ , en el de los aceros para construcciones  $q = 0,6 \div 0,8$  (el valor menor se refiere a los aceros de resistencia media y el mayor, a los aceros de alta resistencia) y en el de los aceros de

$$\sigma_r \geq 130 \text{ kgf/mm}^2, \quad q \approx 1;$$

(en el apéndice 5, en la figura 1 se da el gráfico de los valores aproximados de  $q$  para el acero en función de  $\sigma_r$  y  $\alpha_\sigma$  sin considerar la influencia de las dimensiones de los sólidos).

Como  $q$  depende también de la forma y dimensiones del sólido en los cálculos prácticos es más seguro partir de los valores de  $\alpha_e$  establecidos en los ensayos.

#### Factor de escala

La influencia de las dimensiones absolutas de los sólidos sobre el límite de resistencia a la fatiga se denomina *factor de escala*.

La disminución del límite de resistencia a la fatiga, al aumentar los valores absolutos de las dimensiones del sólido, se evalúa por el *coeficiente de escala*  $\varepsilon_e < 1$  y es igual a la relación del límite de resistencia a la fatiga de la probeta del diámetro dado  $D$  al de la probeta patrón de diámetro  $d$ ,

$$\varepsilon_e = \frac{(p-1)D}{(p-1)d}, \quad (257)$$

(en el apéndice 5, en la figura 2 se da el gráfico de los valores de  $\varepsilon_e$  en función de  $D$  para los aceros al carbono y aleados, en los casos de diferentes tratamientos de las superficies de las probetas. Este gráfico puede emplearse para una determinación aproximada de  $\varepsilon_e$  tanto en el caso de flexión como en el de torsión).

Si el coeficiente efectivo de concentración de tensiones se obtiene del diagrama que considera también el factor de escala, entonces no hay necesidad de introducir en los cálculos corrección alguna que considere las dimensiones del sólido.

### Estado de la superficie

La influencia del estado de la superficie del sólido sobre el límite de resistencia a la fatiga se considera, introduciendo el *coeficiente de sensibilidad superficial*,  $\xi_s < 1$ , que es la relación del límite de resistencia a la fatiga de una probeta con el estado dado de su superficie ( $p_{-1}$ ), al de otra probeta igual, pero de superficie pulida  $p_{-1}$ ,

$$\varepsilon_s = \frac{(p_{-1})^\dagger}{p_{-1}} \quad (258)$$

(en la figura 3 del apéndice 5 se da  $\varepsilon_s$  en función de  $\sigma_r$  para los distintos estados de la superficie de las probetas).

El efecto de consolidación del batido (endurecimiento por deformación en frío) de la superficie, del temple de la superficie, de la cementación, de la nitruración y de otros factores tecnológicos se evalúa por el coeficiente  $\beta$ , que se obtiene de los manuales correspondientes y que se introduce como factor del coeficiente  $\varepsilon_s$ .

### § 2. Cálculo de la resistencia en el caso de un estado tensional lineal y del deslizamiento puro (torsión)

Se supone que al variar la carga, no varía el carácter del estado tensional en el punto del sólido que se analiza y que los ciclos de las variaciones de las tensiones permanecen semejantes ( $r = \text{const.}$ ).

En el caso de un *ciclo simétrico* de las tensiones alternadas, el coeficiente de seguridad se establece por la magnitud del límite de resistencia a la fatiga de la pieza. La influencia de los factores esenciales (concentración de tensiones, factores de escala y estado de la superficie) sobre la resistencia a la fatiga de la pieza se puede apreciar por el coeficiente general

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_0 \beta \varepsilon_s}{\alpha_0} \quad (259)$$

Por lo tanto, el coeficiente de seguridad con que trabaja la pieza en el ciclo simétrico se puede evaluar por la expresión siguiente,

$$n = \frac{\varepsilon p_{-1}}{p_{\max}} \quad (260)$$

siendo  $p_{\max}$  la tensión máxima (nominal) en la pieza.

La condición de resistencia será entonces,

$$p_{\max} \leq [p_{-1}] \quad (261)$$

y la magnitud de la tensión admisible,

$$[p_{-1}] = \frac{\varepsilon p_{-1}}{[n]} \quad (262)$$

siendo  $[n]$  el coeficiente de seguridad admisible (recomendable).

En el caso de un *ciclo asimétrico* de variación de las tensiones, cuyo coeficiente de asimetría es  $r$  (ó  $\operatorname{tg} \beta = \frac{1-r}{1+r}$ ) el coeficiente de seguridad por fatiga puede determinarse por el diagrama simplificado de las amplitudes límites que se construye por el límite de resistencia a la fatiga  $p_{-1}$  correspondiente al ciclo simétrico y por el límite de rotura (resistencia)  $p_r$  para la tracción estática (fig. 247).

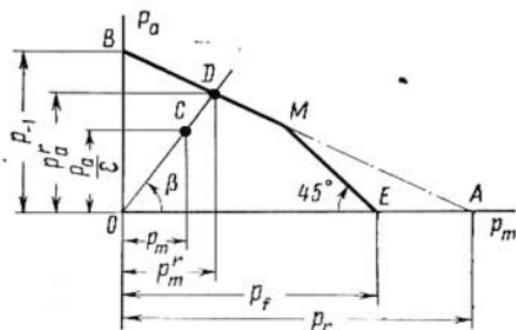


Fig. 247

Si el ciclo de trabajo se caracteriza en este diagrama por el punto  $C$  y el ciclo límite semejante a éste, por el punto  $D$ , entonces el coeficiente de seguridad por resistencia se determina gráficamente por la relación  $n = \frac{OD}{OC}$ , o analíticamente,

$$n = \frac{p_{-1}}{\frac{p_{-1}}{P_r} p_m + \frac{p_a}{\varepsilon}} \quad (263)$$

En el caso de tensiones alternadas de amplitud pequeña, puede ocurrir que el estado límite del material plástico se determine no por la fatiga, sino por la fluencia (tramo  $EM$  del diagrama) y entonces el coeficiente de seguridad se obtendrá por el límite de fluencia

$$n_f = \frac{p_t}{p_{\max}} = \frac{p_t}{p_m + p_a} \quad (264)$$

Al comprobar la resistencia se recomienda comparar las magnitudes de los coeficientes de seguridad, obtenidas por las fórmulas (263) y (264) y admitir la menor de ellas. El coeficiente de seguridad admitido debe ser no inferior al admisible. De la fórmula (263), igualando  $n = [n]$ ,  $p_m = [p_m]$  y  $p_a = [p_a]$ , se obtiene la magnitud

de la tensión admisible correspondiente al ciclo asimétrico  $[p_r]$ ,

$$[p_r] = \frac{2[p_{-1}][p]}{(1-r)[p] + (1+r)[p_{-1}] \frac{p_f}{p_r}}, \quad (265)$$

siendo  $[p]$  ( $[\sigma]$  ó  $[\tau]$ ), la tensión admisible para la carga estática.

La condición de resistencia será,

$$p_{\max} = p_m + p_a \leq [p_r]. \quad (266)$$

Para mayor simplificación de los cálculos y para favorecer al coeficiente de seguridad, se puede emplear el diagrama rectificado de las tensiones admisibles de Zoderberg (fig. 248).

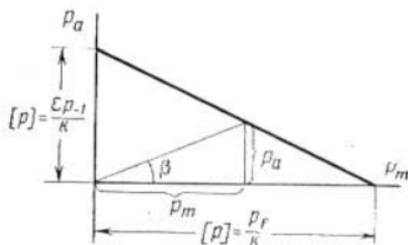


Fig. 248

Según este diagrama, el coeficiente de seguridad será,

$$n = \frac{p_{-1}}{\frac{p_{-1}}{p_r} p_m + \frac{p_a}{\varepsilon}}, \quad (267)$$

y la magnitud de la tensión admisible,

$$[p_r] = \frac{2[p][p_{-1}]}{(1-r)[p] + (1+r)[p_{-1}]}. \quad (268)$$

**Ejemplo 140.** La barra de sección circular de diámetro  $d = 40$  mm y de superficie esmerilada es de acero Cr. 4 para el cual,  $\sigma_r = 480$  MN/m<sup>2</sup> y  $\sigma_{-1} \approx 200$  MN/m<sup>2</sup>.

Determinar el coeficiente de seguridad  $n$ , con que trabaja la barra sometida a la flexión alternada según un ciclo simétrico, si  $M_{\max} = -M_{\min} = 640$  N·m.

*Resolución.* Las tensiones máxima y mínima del ciclo son,

$$\sigma_{\max} = -\sigma_{\min} = \frac{M_{\max}}{W} \approx \frac{640}{0,1 \cdot 4^3 \cdot 10^{-6}} = 10^8 \text{ N/m}^2 = 100 \text{ MN/m}^2.$$

Del gráfico de la figura 2 del apéndice 5, para la barra de sección circular de diámetro  $d = 40$  mm, de acero al carbono y de superficie esmerilada el factor de escala es  $\varepsilon_c = 0,86$ .

Por la fórmula (260) se obtiene para el coeficiente de seguridad,

$$n = \frac{\varepsilon_c \sigma_{-1}}{\sigma_{\max}} \approx \frac{0,86 \cdot 200}{100} \approx 1,7.$$

**Ejemplo 141.** La barra escalonada de sección circular de diámetros  $D = 80$  mm y  $d = 40$  mm (fig. 249) es del acero 40X, para el cual  $\sigma_r = 1\,000$  MN/m<sup>2</sup> y  $\sigma_{-1\text{trac}} = 250$  MN/m<sup>2</sup>. En el chaflán cóncavo,  $\frac{\rho}{d} = 0,2$ . La superficie de la barra está minuciosamente esmerilada.

Determinar el valor máximo de la carga axial alternada  $P_{\max}$  que varía según el ciclo simétrico, si se quiere garantizar un coeficiente de seguridad de  $[n] = 1,8$ .

*Resolución.* Del gráfico de la figura 4 del apéndice 5 se obtiene, para  $\frac{\rho}{d} = 0,2$ , para el acero de  $\sigma_r = 1\,000$  MN/m<sup>2</sup>, interpolando, el coeficiente efectivo de concentración de tensiones  $\alpha_c = 1,7$ . En el caso de un esmerilado minucioso,  $\varepsilon_s = 1$ .

La tensión admisible será,

$$[\sigma_{-1\text{trac}}] = \frac{\sigma_{-1\text{trac}}}{[n] \alpha_c} = \frac{250}{1,8 \cdot 1,7} \approx 82 \text{ MN/m}^2,$$

el área mínima de la sección de la barra,

$$F = \frac{\pi d^2}{4} = \pi \cdot 4 \approx 12,6 \text{ cm}^2,$$

y la fuerza máxima axial alternada,

$$P_{\max} = [\sigma_{-1\text{trac}}] F = 82 \cdot 10^6 \cdot 12,6 \cdot 10^{-4} = 103\,000 \text{ N} = 103 \text{ kN}.$$

**Ejemplo 142.** El árbol de sección circular de diámetro  $d = 50$  mm de acero al carbono, para el cual  $\sigma_r = 60$  kgf/mm<sup>2</sup>,

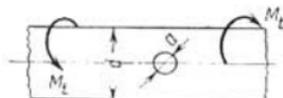


Fig. 250

y de superficie minuciosamente esmerilada tiene un agujero circular, que lo atraviesa, de diámetro  $a = 10$  mm y se somete a la torsión alternada de ciclo simétrico con  $\max M_t = -\min M_t = 90$  kgf·m (fig. 250).

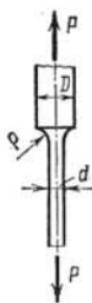


Fig. 249

Determinar el coeficiente de seguridad con que trabaja el árbol.  
*Resolución.* Admitimos que aproximadamente  $\sigma_{-1} = 0,4 \sigma_r$  y

$$\tau_{-1} = 0,5\sigma_{-1} = 0,2 \cdot 60 = 12 \text{ kgf/mm}^2.$$

Del gráfico de la figura 5 del apéndice 5, para el acero de  $\sigma_r = 60 \text{ kgf/mm}^2$  se obtiene el coeficiente efectivo de concentración de tensiones que considera ya la influencia de las dimensiones absolutas del árbol  $\alpha_e = 1,77$ .

El módulo de la sección en la torsión de una sección circular, debilitada por el agujero  $\frac{a}{d} = 0,2$  según los datos de los manuales es,

$$W_t = \frac{\pi d^3}{16} 0,84 \approx 20,6 \text{ cm}^3.$$

Cuando actúa  $\max M_t = 90 \text{ kgf}\cdot\text{m.}$ ,

$$\tau_{\max} = \frac{\max M_t}{W_t} = \frac{90 \cdot 10^2}{20,6} \approx 437 \text{ kgf/cm}^2.$$

El coeficiente de seguridad será,

$$n = \frac{\tau_{-1}}{\alpha_e \tau_{\max}} = \frac{12 \cdot 10^2}{1,77 \cdot 437} \approx 1,55.$$

**Ejemplo 143.** Determinar la tensión admisible en la flexión alterada de característica del ciclo  $r = -0,6$  si se calcula una pieza de acero aleado para construcciones de  $\sigma_r = 100 \text{ kgf/mm}^2$  y  $\sigma_m = 80 \text{ kgf/mm}^2$  con un coeficiente de seguridad  $[n] = 2$ . La pieza es de sección circular de diámetro  $d = 40 \text{ mm}$  y tiene un foco de concentración para el cual el coeficiente teórico de concentración de tensiones es  $\alpha_\sigma = 1,6$ . El coeficiente de consolidación originado por el endurecimiento superficial por deformación en frío es  $\beta = 1,4$ .

*Resolución.* Admitimos  $\sigma_{-1} = 0,4$ ;  $\sigma_r = 0,4 \cdot 100 = 40 \text{ kgf/cm}^2$ . Suponiendo que el coeficiente de sensibilidad del material es  $q = 0,8$  hallamos por la fórmula (256) el coeficiente efectivo de concentración de tensiones,

$$\alpha_e = 1 + q(\alpha_\sigma - 1) = 1 + 0,8(1,6 - 1) = 1,48.$$

El factor de escala  $\epsilon_e$  se obtiene por la curva 5 correspondiente al acero aleado con concentración moderada de tensiones del gráfico de la figura 2 del apéndice 5, es decir,  $\epsilon_e \approx 0,65$ .

La tensión admisible correspondiente a la carga constante es

$$[\sigma] = \frac{\sigma_r}{[n]} = \frac{80}{2} = 40 \text{ kgf/mm}^2.$$

Por la fórmula (259) se obtiene el coeficiente de influencia sobre la fatiga de los diversos factores en el caso de un ciclo simétrico,

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_e \beta \varepsilon_s}{\alpha_e} \approx \frac{0,65 \cdot 1,4 \cdot 1}{1,48} \approx 0,615,$$

por la fórmula (262), la tensión admisible correspondiente al ciclo simétrico,

$$[\sigma_{-1}] = \frac{\varepsilon \sigma_{-1}}{[n]} \approx \frac{0,615 \cdot 40}{2} = 12,3 \text{ kgf/mm}^2$$

y por la fórmula (265), la tensión admisible en el ciclo asimétrico de coeficiente de asimetría  $r = -0,6$ ,

$$\begin{aligned} [\sigma_{-0,6}] &= \frac{2[\sigma][\sigma_{-1}]}{(1-r)[\sigma] + (1+r)[\sigma_{-1}]} \frac{\sigma_t}{\sigma_r} \\ &= \frac{2 \cdot 40 \cdot 12,3}{(1+0,6)40 + (1-0,6)12,3 \cdot 0,8} \approx 14,5 \text{ kgf/mm}^2. \end{aligned}$$

**Ejemplo 144.** Comprobar la resistencia del árbol escalonado de sección circular de diámetros  $D = 60 \text{ mm}$  y  $d = 30 \text{ mm}$  (fig. 251) de acero al carbono, marca 45, con  $\sigma_r = -70 \text{ kgf/mm}^2$ ,  $\tau_f = 22 \text{ kgf/mm}^2$  y  $\tau_{-1} = 16 \text{ kgf/mm}^2$ , si el coeficiente de seguridad es  $[n] = 1,6$ . En el chaflán cóncavo,

$\frac{\rho}{d} = 0,1$  y el coeficiente de endurecimiento debido al chorreado con perdigones,  $\beta = 1,1$ . El árbol se somete a una torsión alternada de  $\max M_t = 48 \text{ kgf}\cdot\text{m}$  y  $\min M_t = -24 \text{ kgf}\cdot\text{m}$ .

*Resolución.* La tensión tangencial admisible para la torsión no alterna es,

$$[\tau] = \frac{\tau_f}{[n]} = \frac{22}{1,6} \approx 13,8 \text{ kgf/mm}^2.$$

Del gráfico 6 del apéndice 5, interpolando, para  $\frac{\rho}{d} = 0,1$ , para el acero de  $\sigma_r = 70 \text{ kgf/mm}^2$ , se obtiene el coeficiente efectivo de concentración  $\alpha_e^\tau \approx 1,28$ .

El coeficiente que considera la influencia de todos los factores sobre la resistencia a la fatiga es,

$$\varepsilon = \frac{\beta}{\alpha_e^\tau} \approx \frac{1,1}{1,28} \approx 0,86;$$

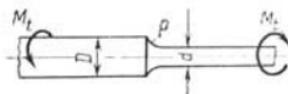


Fig. 251

la tensión admisible para el ciclo simétrico,

$$[\tau_{-1}] = \frac{\varepsilon \tau_{-1}}{[n]} \approx \frac{0,86 \cdot 16}{1,6} = 8,6 \text{ kgf/mm}^2;$$

la característica del ciclo dado,

$$r = \frac{\min M_t}{\max M_t} = -\frac{24}{48} = -0,5;$$

la tensión admisible, por la fórmula (268), cuando  $r = -0,5$ ,

$$[\tau_{-0,5}] = \frac{2[\tau][\tau_{-1}]}{(1-r)[\tau] + (1+r)[\tau_{-1}]} \approx \frac{2 \cdot 13,8 \cdot 8,6}{(1+0,5)13,8 + (1-0,5) \cdot 8,6} \approx 9,5 \text{ kgf/mm}^2 \approx 950 \text{ kgf/cm}^2$$

y la tensión de trabajo máxima originada por  $\max M_t$ ,

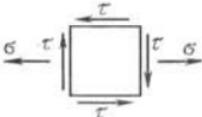
$$\tau_{\max} = \frac{\max M_t}{W_p} = \frac{48 \cdot 10^2}{\frac{\pi \cdot 3^3}{16}} \approx 906 \text{ kgf/cm}^2.$$

Así, pues, queda garantizada la resistencia del árbol.

### § 3. Cálculo de la resistencia en el caso de un estado tensional complejo

Veamos solamente el estado tensional plano indicado en la figura 252 y correspondiente a un material plástico.

La condición de resistencia se escribe de acuerdo con la tercera o la cuarta hipótesis de resistencia en la forma elíptica siguiente,



$$\frac{\sigma_{\max}^2}{[\sigma_r]^2} + \frac{\tau_{\max}^2}{[\tau_r]^2} \leq 1. \quad (269)$$

Fig. 252

Aquí  $\sigma_{\max} = \sigma_m + \sigma_a$ ;  $\tau_{\max} = \tau_m + \tau_a$ ;  $[\sigma_r]$  y  $[\tau_r]$  son las tensiones admisibles normal y tangencial que se obtienen por la fórmula (265 ó 268) de acuerdo con las características de los ciclos de variación de las tensiones normales y tangenciales.

El coeficiente general de seguridad  $n$  de la pieza cuando sobre ella actúan simultáneamente las tensiones alternadas  $\sigma$  y  $\tau$  se obtiene de la expresión

$$n = \frac{n_\sigma n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}}, \quad (270)$$

siendo  $n_\sigma$  y  $n_\tau$  los coeficientes de seguridad parciales correspondientes respectivamente al caso cuando sobre la pieza actúan solamente

tensiones alternadas  $\sigma$  y al caso cuando actúan exclusivamente tensiones alternadas  $\tau$ . Estos coeficientes parciales de seguridad se determinan por la fórmula (263) ó (267).

**Ejemplo 145.** El árbol de acero (Cr. 5) se somete a la acción de momentos flectores que varían periódica y sincronizadamente  $M_{\max} = 400 \text{ N}\cdot\text{m}$ ,  $M_{\min} = -160 \text{ N}\cdot\text{m}$  y de momentos torsores  $\max M_t = 640 \text{ N}\cdot\text{m}$  y  $\min M_t = 320 \text{ N}\cdot\text{m}$ . El árbol es escalonado de diámetros  $D = 50 \text{ mm}$  y  $d = 40 \text{ mm}$ ; el radio del chaflán cóncavo es  $\rho = 0,25 \text{ cm}$ . El acero Cr. 5 tiene las características siguientes,  $\sigma_r = 540 \text{ MN/m}^2$ ,  $\sigma_t = 280 \text{ MN/m}^2$ ,  $\tau_r = 350 \text{ MN/m}^2$ ,  $\tau_t = 180 \text{ MN/m}^2$ ,  $\sigma_{-1} = 240 \text{ MN/m}^2$  y  $\tau_{-1} = 140 \text{ MN/m}^2$ .

Determinar el coeficiente de seguridad  $n$  con que trabaja el árbol.

*Resolución.* Interpolando en los gráficos de las figuras 6 y 7 del apéndice 5, se obtienen los coeficientes de concentración de tensiones para  $\frac{\rho}{d} = \frac{0,25}{4} = 0,0625$  y  $\sigma_r = 540 \text{ MN/m}^2$ ,

$$\alpha_{e_0}^{\sigma} \approx 1,81 \quad \text{y} \quad \alpha_{e_0}^{\tau} \approx 1,42.$$

Como en este caso  $\frac{D}{d} = \frac{5}{4} = 1,25 < 2$ , se deben corregir los valores de  $\alpha_{e_0}^{\sigma}$  y  $\alpha_{e_0}^{\tau}$ .

Del gráfico de la figura 8 del apéndice 5, se obtienen los coeficientes de corrección  $\xi_{\sigma} = 0,83$  y  $\xi_{\tau} = 0,79$ .

Los valores definitivos de  $\alpha_{e_0}^{\sigma}$  y  $\alpha_{e_0}^{\tau}$  se calculan por la fórmula dada en la figura 8 del apéndice 5,

$$\alpha_e^{\sigma} = 1 + \xi_{\sigma} (\alpha_{e_0}^{\sigma} - 1) \approx 1 + 0,83 (1,81 - 1) \approx 1,67$$

$$\alpha_e^{\tau} = 1 + \xi_{\tau} (\alpha_{e_0}^{\tau} - 1) \approx 1 + 0,79 (1,42 - 1) \approx 1,33.$$

De la curva 3 del gráfico representado en la figura 3 del apéndice 5 par  $\sigma_r = 540 \text{ MN/m}^2$  se obtiene el coeficiente de sensibilidad superficial  $\varepsilon_s = 0,88$ .

Los coeficientes generales que reflejan la influencia sobre la resistencia a la fatiga de todos los factores son:

$$\varepsilon_{\sigma} = \frac{\varepsilon_s}{\alpha_e^{\sigma}} = \frac{0,88}{1,67} \approx 0,53 \quad \text{y} \quad \varepsilon_{\tau} = \frac{\varepsilon_s}{\alpha_e^{\tau}} = \frac{0,88}{1,33} \approx 0,66.$$

Las tensiones máximas y mínimas, normales y tangenciales, correspondientes a la flexión y torsión alternadas son:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{M_{\max}}{\frac{\pi d^3}{32}} = \frac{400}{6,28 \cdot 10^{-6}} = 64 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2 = 64 \text{ MN/m}^2;$$

$$\sigma_{\min} = \frac{M_{\min}}{W} = \frac{-160}{6,28 \cdot 10^{-6}} = -25,5 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2 = -25,5 \text{ MN/m}^2;$$

$$\tau_{\max} = \frac{\max M_t}{W_p} = \frac{\max M_t}{\frac{\pi d^3}{16}} = \frac{640}{12,56 \cdot 10^{-6}} = 51 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2 = 51 \text{ MN/m}^2;$$

$$\tau_{\min} = \frac{\min M_t}{W_p} = \frac{320}{12,56 \cdot 10^{-6}} = 25,5 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2 = 25,5 \text{ MN/m}^2.$$

Las tensiones medias y las amplitudes de los ciclos de las tensiones normales y tangenciales serán:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} = \frac{64 - 25,5}{2} \approx 19 \text{ MN/m}^2;$$

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \frac{64 + 25,5}{2} \approx 44,7 \text{ MN/m}^2;$$

$$\tau_m = \frac{\tau_{\max} + \tau_{\min}}{2} = \frac{51 + 25,5}{2} \approx 38,2 \text{ MN/m}^2;$$

$$\tau_a = \frac{\tau_{\max} - \tau_{\min}}{2} = \frac{51 - 25,5}{2} \approx 12,7 \text{ MN/m}^2.$$

Por la fórmula (263) hallamos los coeficientes de seguridad por tensiones normales y tangenciales,

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_r} \sigma_m + \frac{\sigma_a}{\varepsilon_\sigma}} = \frac{240}{\frac{240}{540} \cdot 19 + \frac{44,7}{0,53}} \approx 2,59;$$

$$n_\tau = \frac{\tau_{-1}}{\frac{\tau_{-1}}{\tau_r} \tau_m + \frac{\tau_a}{\varepsilon}} = \frac{140}{\frac{140}{350} \cdot 38,2 + \frac{12,7}{0,66}} \approx 4,06.$$

El coeficiente general de seguridad se halla por la fórmula (270),

$$n = \frac{n_\sigma n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}} = \frac{2,59 \cdot 4,06}{\sqrt{2,59^2 + 4,06^2}} \approx 2,18.$$

**Ejemplo 146.** La pieza de la figura 253 es de acero Cr. 6. Dado:  $\sigma_r = 60 \text{ kgf/mm}^2$ ,  $\sigma_{-1} = 32 \text{ kgf/mm}^2$ ,  $\tau_r = 22 \text{ kgf/mm}^2$ ,  $\sigma_{-1} = 25 \text{ kgf/mm}^2$ ,  $\tau_{-1} = 15 \text{ kgf/mm}^2$ ,  $D = 80 \text{ mm}$ ,  $d = 40 \text{ mm}$ ,  $\rho = 0,2 \text{ cm}$ ,  $l = 40 \text{ cm}$ ,  $a = 10 \text{ cm}$ ,  $P_0 = \text{const} = 16 \text{ kgf}$  y  $P$  que varía según el ciclo simétrico de  $P_{\max}$  a  $P_{\min} = -P_{\max}$ .

Determinar el valor admisible de  $P_{\max}$  si se requiere que la pieza tenga un coeficiente de seguridad  $[n] = 2$ . La superficie de la pieza está torneada toscamente.

*Resolución.* De los gráficos de las figuras 6 y 7 del apéndice 5 para

$$\frac{\rho}{d} = \frac{0,2}{4} = 0,05, \quad \frac{D}{d} = 2, \quad \text{cuando } \sigma_r = 60 \text{ kgf/mm}^2,$$

se obtienen los coeficientes de concentración de las tensiones en el chaflán cóncavo

$$\alpha_\sigma \approx 2,07, \quad \alpha_\tau \approx 1,56.$$

Por la curva 4 de la figura 3 del apéndice 5 para  $\sigma_r = 60 \text{ kgf/mm}^2$  hallamos el coeficiente de sensibilidad superficial  $\varepsilon_s \approx 0,8$ . Los coeficientes generales que reflejan la influencia de todos los factores sobre la resistencia a la fatiga son,

$$\varepsilon_\sigma = \frac{\varepsilon_s}{\alpha_\sigma} = \frac{0,8}{2,07} \approx 0,386$$

$$\text{y } \varepsilon_\tau = \frac{0,8}{1,56} \approx 0,512$$

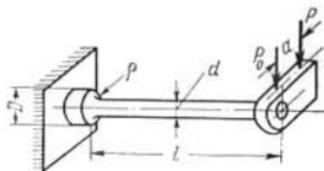


Fig. 253

y las tensiones normales máximas y mínimas en el chaflán cóncavo, originadas por la flexión alternada según el ciclo asimétrico,

$$\sigma_{\max} = \frac{P_0 + P_{\max}}{W} l \approx \frac{16 + P_{\max}}{0,1 \cdot 64} 40 = 100 + 62,5 P_{\max} \text{ kgf/cm}^2;$$

$$\sigma_{\min} = \frac{P_0 - P_{\max}}{W} l \approx \frac{16 - P_{\max}}{0,1 \cdot 64} 40 = 100 - 62,5 P_{\max} \text{ kgf/cm}^2.$$

Las tensiones tangenciales máximas y mínimas en el chaflán cóncavo originadas por la torsión alternada según el ciclo simétrico serán,

$$\tau_{\max} = \frac{P_{\max}}{W_p} a \approx \frac{P_{\max}}{0,2 \cdot 64} 10 = 0,732 P_{\max} \text{ kgf/cm}^2;$$

$$\tau_{\min} = - \frac{P_{\max}}{W_p} a \approx -0,732 P_{\max} \text{ kgf/cm}^2.$$

Las tensiones medias y las amplitudes de los ciclos de las tensiones normales y tangenciales resultarán,

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} = 100 \text{ kgf/cm}^2;$$

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = 62,5 P_{\max} \text{ kgf/cm}^2;$$

$$\tau_m = 0; \quad \tau_a = 0,732 P_{\max} \text{ kgf/cm}^2.$$

Por la fórmula (267) se obtienen los coeficientes de seguridad por tensiones normales y tangenciales,

$$n_{\sigma} = \frac{25}{\frac{25}{32} \cdot 1 + \frac{0,625}{0,386} P_{\max}} = \frac{25}{0,732 + 1,62P_{\max}};$$

$$n_{\tau} = \frac{\varepsilon_{\tau} \tau_{-1}}{\tau_{\alpha}} = \frac{0,512 \cdot 15}{0,0732P_{\max}} \approx \frac{105}{P_{\max}}.$$

Como el coeficiente general de seguridad, según la fórmula (270), es

$$\begin{aligned} n = 2 &= \frac{n_{\sigma} n_{\tau}}{\sqrt{n_{\sigma}^2 + n_{\tau}^2}} = \frac{25 \cdot 105}{P_{\max} (0,732 + 1,62P_{\max})} \times \\ &\times \frac{1}{\sqrt{\frac{25^2}{(0,732 + 1,62P_{\max})^2} + \frac{105^2}{P_{\max}^2}}} = \\ &= \frac{25 \cdot 105}{\sqrt{25^2 P_{\max}^2 + 105^2 (0,732 + 1,62P_{\max})^2}}; \\ 25^2 P_{\max}^2 + 105^2 (0,732 + 1,62P_{\max})^2 &= \frac{25^2 \cdot 105^2}{4} \end{aligned}$$

ó

$$P_{\max}^2 + 0,885P_{\max} - 58,1 = 0;$$

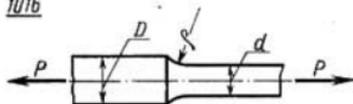
obtendremos para la máxima fuerza admisible que se busca,

$$P_{\max} \approx -0,442 \pm \sqrt{0,442^2 + 58,1} \approx -0,442 \pm 7,63 \text{ kgf.}$$

Las condiciones del problema se satisfacen solamente cuando  $P_{\max} \approx 7,2 \text{ kgf.}$

**Problema 1015.** Determinar mediante los límites inferiores de las funciones empíricas el valor aproximado del límite de resistencia a la fatiga en la torsión alternada según el ciclo simétrico de las probetas de acero con foco de concentración, si  $\sigma_r = 960 \text{ MN/m}^2$ ,  $\alpha_{\tau} = 1,6$  y  $q = 0,9$ .

1016



**Problema 1016.** Una barra escalonada de sección circular de diámetros  $d = 36 \text{ mm}$  y  $D = 72 \text{ mm}$  se somete a tracción — compresión alternada por  $P_{\max} = -P_{\min} = 5 \text{ tf.}$

Determinar el radio mínimo admisible del chaflán cóncavo  $\rho$ , si  $\sigma_r = 40 \text{ kgf/mm}^2$ ,  $\sigma_{-1 \text{ rac}} = 12 \text{ kgf/mm}^2$  y si el coeficiente de seguridad necesario es  $[n] = 2$ .

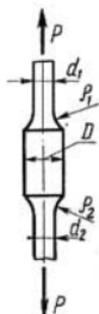
**Problema 1017.** La barra escalonada de sección circular de diámetros  $D = 60$  mm,  $d_1 = 30$  mm y  $d_2 = 32$  mm es de acero 20X para el cual  $\sigma_r = 80$  kgf/mm<sup>2</sup> y  $\sigma_{-1 \text{ trac}} =$

24 kgf/mm<sup>2</sup>. En los chaflanes cóncavos  $\frac{\rho_1}{d_1} = 0,3$  y  $\frac{\rho_2}{d_2} = 0,1$ . La superficie de la barra está minuciosamente esmerilada.

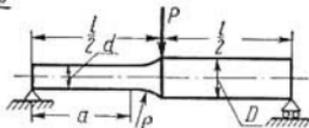
Determinar el coeficiente de seguridad  $n$  con que trabaja la barra en agua dulce, si se somete a una fuerza axial alternada  $P_{\max} = -P_{\min} = 3t$  que varía según el ciclo simétrico.

**Problema 1018.** Determinar la fuerza flexionante máxima  $P_{\max}$  con que el árbol de acero escalonado en rotación puede trabajar de acuerdo con el esquema de la figura y con un coeficiente de seguridad de  $[n] = 1,8$ .

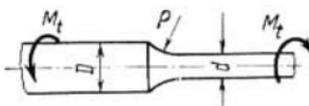
Considérese,  $\sigma_r = 1\,200$  MN/m<sup>2</sup>,  $\sigma_{-1} = 360$  MN/m<sup>2</sup>,  $D = 70$  mm,  $d = 50$  mm,  $\frac{\rho}{d} = 0,15$ ,  $l = 60$  cm y  $a = 40$  cm. La superficie del árbol está pulida.



1018



1019



**Problema 1019.** El árbol escalonado de  $D = 60$  mm,  $d = 50$  mm y  $\frac{\rho}{d} = 0,05$  trabaja en agua dulce sometido a torsión

alternada según el ciclo simétrico con el coeficiente de seguridad  $[n] = 1,5$ . La superficie del árbol está pulida. Determinar cuál de los dos árboles será más resistente, el de acero Cr. 5 ( $\sigma_r = 52$  kgf/mm<sup>2</sup> y  $\tau_{-1} = 14$  kgf/mm<sup>2</sup>) o el de acero 40X ( $\sigma_r = 100$  kgf/mm<sup>2</sup> y  $\tau_{-1} = 22$  kgf/mm<sup>2</sup>).

**Problema 1020.** Dado: un acero 30XM de características  $\sigma_r = 90$  kgf/mm<sup>2</sup> y  $\sigma_{-1 \text{ trac}} = 36$  kgf/mm<sup>2</sup> y de amplitudes límites  $\sigma_a^r$  para los valores medios dados de las tensiones  $\sigma_m^r$ ,

$$\sigma_m^r \text{ kgf/mm}^2 \quad 20 \quad 40 \quad 60$$

$$\sigma_a^r \text{ kgf/mm}^2 \quad 32 \quad 26 \quad 16$$

Determinar  $\sigma_{\pm 0,6}$ .

**Problema 1021.** Determinar  $\sigma_{-0,5}$  para el acero cuya curva de las amplitudes límites (en los ciclos dados  $\sigma_m > 0$ ) se da aproximadamente por la ecuación:  $\sigma_a^2 = 20 \left[ 1 - \left( \frac{\sigma_m^r}{40} \right)^2 \right]$ .

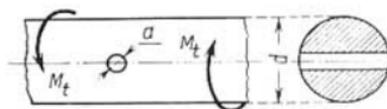
**Problema 1022.** Determinar el coeficiente de seguridad con que trabaja una pieza de acero sometida a tensiones alternadas de tracción — compresión, si  $\sigma_r = 90 \text{ kgf/mm}^2$ ,  $\sigma_f = 70 \text{ kgf/mm}^2$ ,  $\sigma_{-1 \text{ trac}} = 30 \text{ kgf/mm}^2$ ,  $\sigma_{\max} = 16 \text{ kgf/mm}^2$ ,  $\sigma_{\min} = -6 \text{ kgf/mm}^2$ ,  $\alpha_e = 1,5$ ,  $\epsilon_e = 0,7$ ,  $\epsilon_s = 0,9$  y  $\beta = 1,3$ .

**Problema 1023.** Una pieza de acero deberá trabajar a flexión alternada de amplitud de las tensiones  $\sigma_a = 200 \text{ MN/m}^2$  con un coeficiente de seguridad  $[n] = 2$ . Cuál debe ser el coeficiente de asimetría del ciclo  $r$ , si  $\sigma_r = 1\ 100 \text{ MN/m}^2$ ,  $\sigma_f = 900 \text{ MN/m}^2$ ,  $\sigma_{-1} = 480 \text{ MN/m}^2$ ,  $\alpha_\sigma = 1,2$ ,  $q = 0,9$ ,  $\epsilon_e = 0,8$ ,  $\epsilon_s = 1$  y  $\beta = 1,4$ .

**Problema 1024.** Determinar el valor mínimo de la tensión admisible en una pieza de acero que trabaja a tracción — compresión alternada de característica del ciclo  $r = -0,4$  y con un coeficiente de seguridad  $[n] = 1,4$ . El material es acero al carbono para el cual  $\sigma_r = 50 \text{ kgf/mm}^2$  y  $\sigma_f = 24 \text{ kgf/mm}^2$ . La pieza es de sección circular de diámetro  $d = 30 \text{ mm}$  con un foco de concentración para el cual  $\alpha_\sigma = 2$ . El coeficiente de consolidación debida al endurecimiento de la superficie por deformación en frío es  $\beta = 1,2$ .

**Problema 1025 \*).** El árbol de acero de sección circular de diámetro  $d = 40 \text{ mm}$  tiene un agujero transversal que lo cruza de diámetro  $a = 6 \text{ mm}$  y trabaja según el ciclo pulsante ( $r = 0$ ) con un coeficiente de seguridad de  $[n] = 1,8$ .

1025

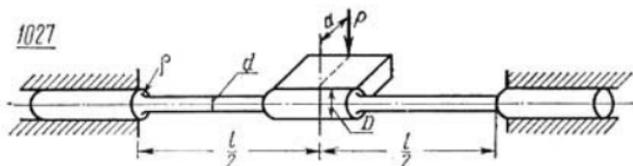


Determinar la magnitud del momento torsor alternado máximo  $\max M_t$ , si el árbol es de acero 30X1CA para el cual  $\sigma_r = 110 \text{ kgf/mm}^2$ ,  $\tau_f = 51 \text{ kgf/mm}^2$  y  $\tau_{-1} = 23 \text{ kgf/mm}^2$ .

**Problema 1026.\*)** Determinar el coeficiente de seguridad  $n$  con que trabaja la pieza sometida a tracción y torsión alternadas, si esta pieza es de acero 45 y  $\sigma_r = 60 \text{ kgf/mm}^2$ ,  $\sigma_f = 32 \text{ kgf/mm}^2$ ,  $\sigma_{-1 \text{ trac}} = 20 \text{ kgf/mm}^2$ ,  $\tau_f = 22 \text{ kgf/mm}^2$ ,  $\tau_{-1} = 16 \text{ kgf/mm}^2$ ,  $\alpha_e^\sigma = 1,7$ ,  $\alpha_e^\tau = 1,4$ ,  $\epsilon_e = 0,7$ ,  $\epsilon_s = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\sigma_{\max} = 1\ 000 \text{ kgf/cm}^2$ ,  $\sigma_{\min} = 200 \text{ kgf/cm}^2$ ,  $\tau_{\max} = 400 \text{ kgf/cm}^2$  y  $\tau_{\min} = -100 \text{ kgf/cm}^2$ .

\* En los problemas indicados con asteriscos se debe recurrir al diagrama simplificado de Zoderberg.

**Problema 1027.\*)** La barra cilíndrica de acero de sección circular de diámetro  $d = 30$  mm está empotrada en sus extremos. Sobre la parte sobresaliente de esta barra actúa la fuerza  $P$  que varía según el ciclo simétrico.



Determinar el valor de la fuerza máxima  $P_{\max}$ , si el acero es de la marca 40XH para el cual  $\sigma_r = 900$  MN/m<sup>2</sup>,  $\sigma_{-1} = 400$  MN/m<sup>2</sup>,  $\tau_{-1} = 240$  MN/m<sup>2</sup>. El diámetro de la barra en su parte media es  $D = 60$  mm,  $\frac{P}{d} = 0,1$ ,  $l = 32$  cm,  $a = 10$  cm,  $\beta = 1,2$  y  $[n] = 1,6$ .

**Problema 1028.\*** El árbol escalonado de acero de sección circular de diámetros  $D = 60$  cm y  $d = 50$  mm y de radio del chaflán cóncavo  $\rho = 5$  mm se somete a flexión y torsión alternadas.

Determinar el coeficiente de seguridad  $n$  con que trabaja el árbol, si en la sección peligrosa de transición surgen los momentos flectores  $M_{\max} = 3$  kN·m y  $M_{\min} = 1,5$  kN·m y los momentos torsores  $M_t = 2$  kN·m y  $\min M_t = -0,5$  kN·m.

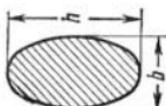
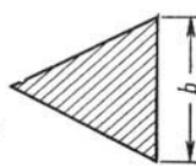
El árbol es de acero 40XH para el cual  $\sigma_r = 900$  MN/m<sup>2</sup>,  $\sigma_t = 750$  MN/m<sup>2</sup>,  $\sigma_{-1} = 400$  MN/m<sup>2</sup>,  $\tau_t = 390$  MN/m<sup>2</sup> y  $\tau_{-1} = 240$  MN/m<sup>2</sup>.

El efecto de endurecimiento de los factores tecnológicos se considera con el coeficiente  $\beta = 1,3$ .

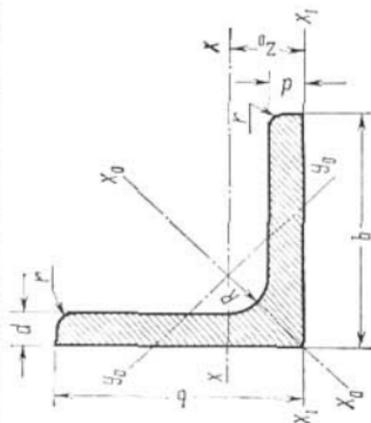
# APENDICES

## Datos sobre la torsión de perfiles no circulares

## Apéndice 1

Forma de la sección	Momento de inercia de la sección en la torsión $I_t, \text{cm}^4$	Módulo de la sección en la torsión $W_t, \text{cm}^3$	Puntos de tensiones tangenciales máximas $M_t$ $\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_{\text{tor}}}$	Notas																								
	$I_{\text{tor}} = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{m^3}{m^2 + 1} \frac{b^4}{16F^4} = \frac{\pi^3 b^4}{16} m$	$W_{\text{tor}} = \frac{\pi b^3}{16} m = \frac{\pi b^2 h}{16}$	<p>En el extremo del semieje menor</p> $\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_{\text{tor}}}$ <p>En el extremo del semieje mayor</p> $\tau = \frac{\tau_{\max}}{m}$	$\frac{h}{b} = m > 1$ <p><math>F</math>, área de la sección</p>																								
	$I_{\text{tor}} = \alpha b^4$	$W_{\text{tor}} = \beta b^3$	<p>En el medio de los lados mayores</p> $\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_{\text{tor}}}$ <p>En el medio de los lados menores</p> $\tau = \gamma \tau_{\max}$ <p>En los vértices las tensiones son nulas</p>	<p>Valores de los coeficientes <math>\alpha</math>, <math>\beta</math> y <math>\gamma</math> según la tabla</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th><math>m = \frac{h}{b}</math></th> <th><math>\alpha</math></th> <th><math>\beta</math></th> <th><math>\gamma</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1.0</td> <td>0.140</td> <td>0.208</td> <td>1.0</td> </tr> <tr> <td>1.5</td> <td>0.294</td> <td>0.346</td> <td>0.859</td> </tr> <tr> <td>2.0</td> <td>0.457</td> <td>0.493</td> <td>0.795</td> </tr> <tr> <td>3.0</td> <td>0.790</td> <td>0.801</td> <td>0.753</td> </tr> <tr> <td>4.0</td> <td>1.123</td> <td>1.127</td> <td>0.745</td> </tr> </tbody> </table>	$m = \frac{h}{b}$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	1.0	0.140	0.208	1.0	1.5	0.294	0.346	0.859	2.0	0.457	0.493	0.795	3.0	0.790	0.801	0.753	4.0	1.123	1.127	0.745
$m = \frac{h}{b}$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$																									
1.0	0.140	0.208	1.0																									
1.5	0.294	0.346	0.859																									
2.0	0.457	0.493	0.795																									
3.0	0.790	0.801	0.753																									
4.0	1.123	1.127	0.745																									
<p>Triángulo isósceles</p> 	$I_{\text{tor}} = \frac{b^4}{46.19} \approx 0.02165 b^4$	$W_{\text{tor}} = 0.05 b^3$	$\tau_{\max} = \frac{20M_t}{b^3}$ <p>(en el medio de los lados). En los vértices las tensiones tangenciales son nulas</p>																									

SURTIDO DE ACERO LAMINADO  
Acero laminado angular de lados iguales GOST 8509—57



Número del perfil	Tamaños en mm			Peso por metro lineal, en kgf	Datos respecto a los ejes									
	b	d	r		x - x		x <sub>0</sub> - x <sub>0</sub>		y <sub>0</sub> - y <sub>0</sub>		x <sub>1</sub> - x <sub>1</sub>		z <sub>0</sub> en cm	
				I <sub>x</sub> en cm <sup>4</sup>	i <sub>x</sub> en cm	I <sub>x<sub>0</sub> max</sub> en cm <sup>4</sup>	i <sub>x<sub>0</sub> max</sub> en cm	I <sub>y<sub>0</sub> min</sub> en cm <sup>4</sup>	i <sub>y<sub>0</sub> min</sub> en cm	i <sub>y<sub>0</sub> min</sub> en cm	I <sub>x<sub>1</sub></sub> en cm <sup>4</sup>	x <sub>1</sub> - x <sub>1</sub> en cm		
2	20	3	3.5	1.13	0.40	0.59	0.63	0.75	0.17	0.39	0.81	0.60		
		4											1.46	0.50
2.5	25	3	3.5	1.43	0.81	0.75	1.29	0.95	0.34	0.49	1.57	0.73		
		4											1.86	1.03
2.8	28	3	4	1.62	1.16	0.85	1.84	1.07	0.48	0.55	2.20	0.80		
		4											1.62	1.16

Número del perfil	Tamaños en mm			Peso por metro lineal, en kgf	Datos respecto a los ejes								
	b	R			x - x		x <sub>0</sub> - x <sub>0</sub>		y <sub>0</sub> - y <sub>0</sub>		x <sub>1</sub> - x <sub>1</sub>		
		d	R		r	I <sub>x</sub> en cm <sup>4</sup>	i <sub>x</sub> en cm	I <sub>x<sub>0</sub></sub> max en cm <sup>4</sup>	i <sub>x<sub>0</sub></sub> max en cm	I <sub>y<sub>0</sub></sub> min en cm <sup>4</sup>		i <sub>y<sub>0</sub></sub> min en cm	I <sub>x<sub>1</sub></sub> en cm <sup>4</sup>
3,2	32	3	4,5	1,5	1,86	1,77	0,97	2,80	1,23	0,74	0,63	3,26	0,89
		4			2,43	0,96	3,58	1,21	0,94		0,62	4,39	0,94
3,6	36	3	4,5	1,5	2,40	2,56	1,10	4,06	1,39	1,06	0,71	4,64	0,99
		4			2,75	3,29	1,09	5,21	1,38	1,36	0,70	6,24	1,04
4	40	3	5	1,7	2,35	3,55	1,23	5,63	1,55	1,47	0,79	6,35	1,09
		4			3,08	4,58	1,22	7,26	1,53	1,90	0,78	8,53	1,13
4,5	45	3			2,65	5,13	1,39	8,13	1,75	2,12	0,89	9,04	1,21
		4	5	1,7	3,48	6,63	1,38	10,5	1,74	2,74	0,89	12,1	1,26
		5			4,29	8,03	1,37	12,7	1,72	3,33	0,88	15,3	1,30
5	50	3			2,96	7,11	1,55	11,3	1,95	2,95	1,00	12,4	1,33
		4	5,5	1,8	3,80	9,21	1,54	14,6	1,94	3,80	0,99	16,6	1,38
		5			4,80	11,2	1,53	17,8	1,92	4,63	0,98	20,9	1,42
5,6	56	3,5			3,86	14,6	1,73	18,4	2,18	4,80	1,12	20,3	1,50
		4	6	2	4,38	13,1	1,73	20,8	2,18	5,41	1,11	23,3	1,52
		5			5,41	16,0	1,72	25,4	2,16	6,59	1,10	29,2	1,57

6.3	63	4	7	2.3	4.96	3.90	18.9	1.95	29.9	2.45	7.81	1.25	33.1	1.69
		5			6.43	4.81	23.1	1.94	36.6	2.44	9.52	1.25	41.5	1.74
		6			7.28	5.72	27.1	1.93	42.9	2.43	11.2	1.24	50.0	1.78
7	70	4,5	8,0	2.7	6.20	4.87	29.0	2.16	46.0	2.72	12.0	1.39	51.0	1.88
		5			6.86	5.38	31.9	2.16	50.7	2.72	13.2	1.39	56.7	1.90
		6			8.15	6.39	37.6	2.15	59.6	2.71	15.5	1.38	68.4	1.94
		7			9.42	7.39	43.0	2.14	68.2	2.69	17.8	1.37	80.1	1.99
		8			10.7	8.37	48.2	2.13	76.4	2.68	20.0	1.37	91.9	2.02
7.5	75	5	9	3	7.39	5.80	39.5	2.31	62.6	2.91	16.4	1.49	69.6	2.02
		6			8.78	6.89	46.6	2.30	73.9	2.90	19.3	1.48	83.9	2.06
		7			10.1	7.96	53.3	2.29	84.6	2.89	22.1	1.48	98.3	2.10
		8			11.5	9.02	59.8	2.28	94.9	2.87	24.8	1.47	113	2.15
		9			12.8	10.1	66.1	2.27	105	2.86	27.5	1.46	127	2.18
8	80	5,5	9	3	8.63	6.78	52.7	2.47	83.6	3.11	21.8	1.59	93.2	2.17
		6			9.38	7.36	57.0	2.47	90.4	3.11	23.5	1.58	102	2.19
		7			10.8	8.51	65.3	2.45	104	3.09	27.0	1.58	119	2.23
		8			12.3	9.65	73.4	2.44	116	3.08	30.3	1.57	137	2.27
9	90	6	10	3.3	10.6	8.33	82.1	2.78	130	3.50	34.0	1.79	145	2.43
		7			12.3	9.64	94.3	2.77	150	3.49	38.9	1.78	169	2.47
		8			13.9	10.9	106	2.76	168	3.48	43.8	1.77	194	2.51
		9			15.6	12.2	118	2.75	186	3.46	48.6	1.77	219	2.55

Número del perfil	Tamaños en mm				Peso por metro lineal, en kgf	Datos respecto a los ejes							
	b	d	R	r		x - x		x <sub>0</sub> - x <sub>0</sub>		y <sub>0</sub> - y <sub>0</sub>		x <sub>1</sub> - x <sub>1</sub> en cm	
						I <sub>x</sub> en cm <sup>4</sup>	i <sub>x</sub> en cm	I <sub>x<sub>0</sub> max.</sub> en cm <sup>4</sup>	i <sub>x<sub>0</sub> max.</sub> en cm	I <sub>y<sub>0</sub> min.</sub> en cm <sup>4</sup>	i <sub>y<sub>0</sub> min.</sub> en cm		
													I <sub>x</sub> en cm <sup>4</sup>
10	100	6,5	12	4	4	12,8	10,1	193	3,88	50,7	1,99	214	2,68
		7				13,8	10,8	207	3,88	54,2	1,98	231	2,71
		8				15,6	12,2	233	3,87	60,9	1,98	265	2,75
		10				19,2	15,1	284	3,84	74,1	1,96	333	2,83
		12				22,8	17,9	331	3,81	86,9	1,95	402	2,91
11	110	14	12	4	4	26,3	20,6	375	3,78	99,3	1,94	472	2,99
		16				29,7	23,3	416	3,74	112	1,94	542	3,06
		7				15,2	11,9	176	3,40	72,7	2,19	308	2,96
12.5	125	8	14	4,6	4,6	27,2	13,5	315	4,28	81,8	2,18	353	3,00
		9				19,7	15,5	291	3,87	422	2,49	516	3,36
		10				22,0	17,3	327	3,86	435	2,48	582	3,40
		12				24,3	19,1	360	3,85	449	2,47	649	3,45
		14				28,9	22,7	422	3,82	474	2,46	782	3,53
		16				33,4	26,2	482	3,80	500	2,45	916	3,61
14	140	14	14	4,6	4,6	37,8	29,6	853	4,75	224	2,44	1 051	3,68
		9				24,7	19,4	466	4,34	192	2,79	818	3,78
		12				27,3	21,5	512	4,33	211	2,78	911	3,82
						32,5	25,5	602	4,31	248	2,76	1 097	3,90

16	10	31.4	24.7	774	4.96	1 229	6.25	319	3.19	1 356	4.30
	11	34.4	27.0	844	4.95	1 311	6.24	348	3.18	1 494	4.35
	12	37.4	29.4	913	4.94	1 450	6.23	376	3.17	1 633	4.39
	14	43.3	34.0	1 046	4.92	1 682	6.20	431	3.16	1 911	4.47
	16	49.1	38.5	1 175	4.89	1 866	6.17	485	3.14	2 191	4.55
	18	54.8	43.0	1 299	4.87	2 061	6.13	537	3.13	2 472	4.63
	20	60.4	47.4	1 419	4.85	2 248	6.10	589	3.12	2 756	4.70
18	11	38.8	30.5	1 216	5.60	1 933	7.06	500	3.59	2 128	4.85
	12	42.2	33.1	1 317	5.59	2 093	7.04	540	3.58	2 324	4.89
20	12	47.1	37.0	1 823	6.22	2 896	7.84	749	3.99	3 182	5.37
	13	50.9	39.9	1 961	6.21	3 116	7.83	805	3.98	3 452	5.42
	14	54.6	42.8	2 097	6.20	3 333	7.81	861	3.97	3 722	5.46
	16	62.0	48.7	2 363	6.17	3 755	7.78	970	3.96	4 264	5.54
	20	76.5	60.1	2 871	6.12	4 560	7.72	1 182	3.93	5 355	5.70
	25	94.3	74.0	3 406	6.06	5 494	7.63	1 438	3.91	6 733	5.89
	30	115.5	87.6	4 020	6.00	6 351	7.55	1 688	3.89	8 130	6.07
22	14	60.4	47.4	2 814	6.83	4 470	8.60	1 159	4.38	4 941	5.93
	16	68.6	53.8	3 175	6.81	5 045	8.58	1 306	4.36	5 661	6.02
25	16	78.4	61.5	4 717	7.76	7 492	9.78	1 942	4.98	8 286	6.75
	18	87.7	68.9	5 247	7.73	8 337	9.75	2 158	4.96	9 342	6.83
	20	97.0	76.1	5 765	7.71	9 160	9.72	2 370	4.94	10 401	6.91
	22	106.1	83.3	6 270	7.69	9 961	9.69	2 579	4.93	11 464	7.00
	25	119.7	94.0	7 006	7.65	11 125	9.64	2 887	4.91	13 064	7.11
	28	133.1	104.5	7 717	7.61	12 244	9.59	3 190	4.89	14 674	7.23
	30	142.0	111.4	8 177	7.59	12 965	9.56	3 389	4.89	15 753	7.31

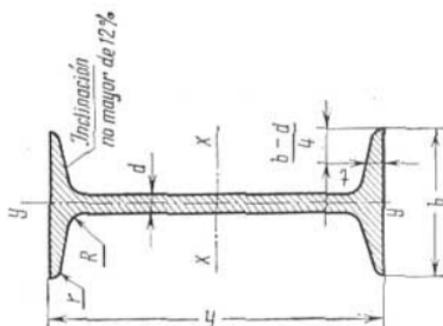


3.2.2	32	20	3	1.49	1.17	1.52	1.01	0.46	0.55	3.26	1.08	0.82	0.49	0.28	0.43	0.382
			4	1.94	1.32	1.93	1.00	0.57	0.54	4.38	1.12	1.12	0.53	0.35	0.43	0.374
4.2.5	40	25	3	1.89	1.48	3.06	1.27	0.93	0.70	6.37	1.32	1.58	0.59	0.56	0.54	0.385
			4	2.47	1.94	3.93	1.26	1.18	0.69	8.53	1.37	2.15	0.63	0.71	0.54	0.381
4.5.2.8	45	28	3	2.14	1.68	4.41	1.43	1.32	0.79	9.02	1.47	2.20	0.64	0.79	0.61	0.382
			4	2.80	2.20	5.68	1.42	1.60	0.78	12.1	1.51	2.98	0.68	1.02	0.60	0.379
5.3.2	50	32	3	2.42	1.90	6.17	1.60	1.99	0.91	12.4	1.60	3.26	0.72	1.18	0.70	0.403
			4	3.17	2.49	7.98	1.59	2.56	0.90	16.6	1.65	4.42	0.76	1.52	0.69	0.401
5.6.3.6	56	36	3.5	3.16	2.48	10.1	1.79	3.30	1.02	20.3	1.80	5.43	0.82	1.95	0.79	0.407
			4	3.58	2.81	11.4	1.78	3.70	1.02	23.2	1.82	6.25	0.84	2.19	0.78	0.406
			5	4.41	3.46	13.8	1.77	4.48	1.01	29.2	1.86	7.91	0.88	2.66	0.78	0.404
6.3.4.0	63	40	4	4.04	3.17	16.3	2.01	5.16	1.13	33.0	2.03	8.51	0.91	3.07	0.87	0.397
			5	4.98	3.91	19.9	2.00	6.26	1.12	41.4	2.08	10.8	0.95	3.73	0.86	0.396
			6	5.90	4.63	23.3	1.99	7.28	1.11	49.9	2.12	13.1	0.99	4.36	0.86	0.393
			8	7.68	6.03	29.6	1.96	9.15	1.09	66.9	2.20	17.9	1.07	5.58	0.85	0.386
7.4.5	70	45	4.5	5.07	3.98	25.3	2.23	8.25	1.28	51	2.25	13.6	1.03	4.88	0.98	0.407
			5	5.59	4.39	27.8	2.23	9.05	1.27	56.7	2.28	15.2	1.05	5.34	0.98	0.406

Número del perfil	Tamaños en mm			Peso por metro lineal, en kgf	Datos respecto a los ejes										
	B	b	d		R	x - x		y - y		x <sub>1</sub> - x <sub>1</sub>		y <sub>1</sub> - y <sub>1</sub>		u - u	
						I <sub>x</sub> en cm <sup>4</sup>	x en cm	I <sub>y</sub> en cm <sup>4</sup>	y en cm	I <sub>x<sub>1</sub></sub> en cm <sup>4</sup>	x <sub>1</sub> en cm	I <sub>y<sub>1</sub></sub> en cm <sup>4</sup>	y <sub>1</sub> en cm	I <sub>u</sub> en cm <sup>4</sup>	u en cm
7,5/5	5	6,11	4,79	34,8	2,39	12,5	1,43	69,7	2,39	20,8	1,17	7,24	1,09	0,436	
	6	7,25	5,69	40,9	2,38	14,6	1,42	83,9	2,44	25,2	1,21	8,48	1,08	0,435	
	8	9,47	7,43	52,4	2,35	18,5	1,40	112	2,52	34,2	1,29	10,9	1,07	0,430	
8/5	5	6,36	4,99	41,6	2,56	12,7	1,41	84,6	2,6	20,8	1,13	7,58	1,09	0,387	
	6	7,55	5,92	49,0	2,55	14,8	1,40	102	2,65	25,2	1,17	8,88	1,08	0,386	
9/5,6	5,5	7,86	6,17	65,3	2,88	19,7	1,58	132	2,92	32,2	1,26	11,8	1,22	0,384	
	6	8,54	6,70	70,6	2,88	21,2	1,58	145	2,95	35,2	1,28	12,7	1,22	0,384	
	8	11,18	8,77	90,9	2,85	27,1	1,56	194	3,04	47,8	1,36	16,3	1,21	0,380	
10/6,3	6	9,59	7,53	98,3	3,2	30,6	1,79	198	3,23	49,9	1,42	18,2	1,38	0,393	
	7	11,1	8,70	113	3,19	35,0	1,78	232	3,28	58,7	1,46	20,8	1,37	0,392	
	8	12,6	9,87	127	3,18	39,2	1,77	266	3,32	67,6	1,50	23,4	1,36	0,391	
	10	15,5	12,1	154	3,15	47,1	1,75	333	3,40	85,8	1,58	28,3	1,35	0,387	
11/7	6,5	11,4	8,98	142	3,53	45,6	2	286	3,55	74,3	1,58	26,9	1,53	0,402	
	7	12,3	9,64	152	3,52	48,7	1,99	309	3,57	80,5	1,6	28,8	1,53	0,402	
	8	13,9	10,9	172	3,51	54,6	1,98	353	3,61	92,3	1,64	32,3	1,52	0,400	



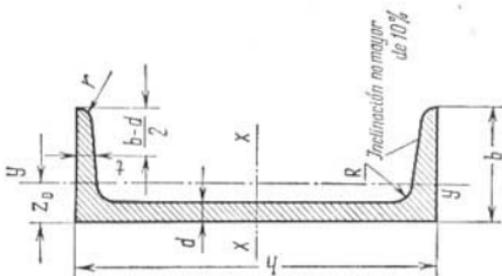
Acero laminado. Vigas doble te. GOST 8239—56



Número del perfil	Peso por metro lineal, en kgf	Tamaños en mm					Área de la sección en cm <sup>2</sup>	Datos respecto a los ejes							
		h	b	d	t	R		r	x - x			y - y			
10	9,46	100	55	4,5	7,2	7	2,5	12,0	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	11,5	120	64	4,8	7,3	7,5	3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	13,7	140	73	4,9	7,5	8	3	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55

16	15.9	160	81	5.0	7.8	8.5	3.5	20.2	873	109	6.57	62.3	58.6	14.5	1.70
18	18.1	180	90	5.1	8.1	9	3.5	23.4	1 290	143	7.42	81.4	82.6	18.4	1.88
18a	19.9	180	100	5.1	8.3	9	3.5	25.4	1 430	159	7.51	89.8	114	22.8	2.42
20	21.0	200	100	5.2	8.4	9.5	4	26.8	1 840	181	8.28	104	115	23.1	2.07
20a	22.7	200	110	5.2	8.6	9.5	4	28.9	2 030	203	8.37	114	155	28.2	2.32
22	24.0	220	110	5.4	8.7	10	4	30.6	2 550	232	9.43	131	157	28.6	2.27
22a	25.8	220	120	5.4	8.9	10	4	32.8	2 790	254	9.22	143	206	34.3	2.50
24	27.3	240	115	5.6	9.5	10.5	4	34.8	3 460	289	9.97	163	198	34.5	2.37
24a	29.4	240	125	5.6	9.8	10.5	4	37.5	3 800	317	10.1	178	260	41.6	2.63
27	31.5	270	125	6.0	9.8	11	4.5	40.2	5 010	371	11.2	210	260	41.5	2.54
27a	33.9	270	135	6.0	10.2	11	4.5	43.2	5 500	407	11.3	229	337	50.0	2.80
30	36.5	300	135	6.5	10.2	12	5	46.5	7 080	472	12.3	268	337	49.9	2.69
30a	39.2	300	145	6.5	10.7	12	5	49.9	7 780	518	12.5	292	436	60.1	2.95
33	42.2	330	140	7.0	11.2	13	5	53.8	9 840	597	13.5	339	419	59.9	2.79
36	48.6	360	145	7.5	12.3	14	6	61.9	13 380	743	14.7	423	516	71.1	2.89
40	56.1	400	155	8.0	13.0	15	6	71.4	18 930	947	16.3	540	666	85.9	3.05
45	65.2	450	160	8.6	14.2	16	7	83.0	27 450	1 220	18.2	699	807	101	3.12
50	76.8	500	170	9.5	15.2	17	7	97.8	39 290	1 570	20.0	905	1 040	122	3.26
55	89.8	550	180	10.3	16.5	18	7	114	55 150	2 000	22.0	1 150	1 350	150	3.44
60	104	600	190	11.1	17.8	20	8	132	75 450	2 510	23.9	1 450	1 720	181	3.60
65	120	650	200	12.0	19.2	22	9	153	101 400	3 120	25.8	1 800	2 170	217	3.77
70	138	700	210	13.0	20.8	24	10	176	134 600	3 840	27.7	2 230	2 730	260	3.94
70a	158	700	210	15.0	24.0	24	10	202	152 700	4 360	27.5	2 550	3 240	309	4.01
70b	184	700	210	17.5	28.2	24	10	234	175 370	5 010	27.4	2 940	3 940	373	4.09

Acero laminado. Perfiles canal. GOST 8240—56



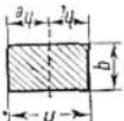
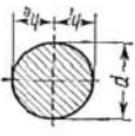
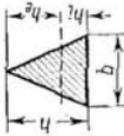
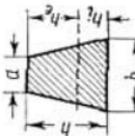
Número del perfil	Tamaño en mm						Datos respecto a los ejes												
	h		b		d		t		R		r		Área de la sección, en cm <sup>2</sup>						
													x - x		y - y		z <sub>0</sub>		
													$I_{x'}$ en cm <sup>4</sup>	$W_{x'}$ en cm <sup>3</sup>	$i_{x'}$ en cm	$S_{x'}$ en cm <sup>3</sup>	$I_{y'}$ en cm <sup>4</sup>	$W_{y'}$ en cm <sup>3</sup>	$i_{y'}$ en cm
5	50	32	4,4	7,0	6	2,5	6,16	22,8	9,10	1,92	5,59	5,61	2,75	0,954	1,16				
6,5	65	36	4,4	7,2	6	2,5	7,51	48,6	15,0	2,54	9,00	8,70	3,68	1,08	1,24				

8	7,05	80	40	4,5	7,4	6,5	2,5	8,98	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31
10	8,59	100	46	4,5	7,6	7	3	10,9	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44
12	10,4	120	52	4,8	7,8	7,8	3	13,3	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54
14	12,3	140	58	4,9	8,1	8	3	15,6	491	70,2	5,60	40,8	45,4	11,0	1,70	1,67
14a	13,3	140	62	4,9	8,7	8	3	17,0	545	77,8	5,66	45,1	57,5	13,3	1,84	1,87
16	14,2	160	64	5,0	8,4	8,5	3,5	18,1	747	93,4	6,42	54,1	63,3	13,8	1,87	1,80
16a	15,3	160	68	5,0	9,0	8,5	3,5	19,5	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2,00
18	16,3	180	70	5,1	8,7	9	3,5	20,7	1090	121	7,24	69,8	86,0	17,0	2,04	1,94
18a	17,4	180	74	5,1	9,3	9	3,5	22,2	1190	132	7,32	76,1	105	20,0	2,18	2,13
20	18,4	200	76	5,2	9,0	9,5	4	23,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,20	2,07
20a	19,8	200	80	5,2	9,7	9,5	4	25,2	1670	167	8,15	95,9	139	24,2	2,35	2,28
22	21,0	220	82	5,4	9,5	10	4	26,7	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21
22a	22,6	220	87	5,4	10,2	10	4	28,8	2330	212	8,99	121	187	30,0	2,55	2,46
24	24,0	240	90	5,6	10,0	10,5	4	30,6	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,60	2,42
24a	25,8	240	95	5,6	10,7	10,5	4	32,9	3180	265	9,84	151	254	37,2	2,78	2,67
27	27,7	270	95	6,0	10,5	11	4,5	35,2	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47
30	31,8	300	100	6,5	11,0	12	5	40,5	5810	387	12,0	224	327	43,6	2,84	2,52
33	36,5	330	105	7,0	11,7	13	5	46,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59
36	41,9	360	110	7,5	12,6	14	6	53,4	10820	601	14,2	350	513	61,7	3,10	2,68
40	48,3	400	115	8,0	13,5	15	6	61,5	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75

Coefficiente de reducción de la tensión admisible

Espeslez, %	Valores de $\varphi$ para				madera
	Aceros de las marcas 4, 3, 2, OC	Aceros de las marcas 5	aceros CIHK	hierro fundido	
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	0,97	0,97	0,99
20	0,96	0,95	0,95	0,91	0,97
30	0,94	0,92	0,91	0,81	0,93
40	0,92	0,89	0,87	0,69	0,87
50	0,89	0,86	0,83	0,57	0,80
60	0,86	0,82	0,79	0,44	0,71
70	0,81	0,76	0,72	0,34	0,60
80	0,75	0,70	0,65	0,26	0,48
90	0,69	0,62	0,55	0,20	0,38
100	0,60	0,51	0,43	0,16	0,31
110	0,52	0,43	0,35	—	0,25
120	0,45	0,36	0,30	—	0,22
130	0,40	0,33	0,26	—	0,18
140	0,36	0,29	0,23	—	0,16
150	0,32	0,26	0,21	—	0,14
160	0,29	0,24	0,19	—	0,12
170	0,26	0,21	0,17	—	0,11
180	0,23	0,19	0,15	—	0,10
190	0,21	0,17	0,14	—	0,09
200	0,19	0,16	0,13	—	0,08

Expresiones para determinar los módulos de la sección de las fibras exterior  $W_e$  e interior  $W_i$ , valores aproximados del desplazamiento  $e$  de la línea neutra y coeficientes  $\alpha_e$  y  $\alpha_i$  para las fórmulas de las tensiones normales de las fibras exterior e interior de la barra curva para algunas configuraciones de la sección transversal

Configuración de la sección	$\frac{W_e}{W_i}$	$e$	$\alpha_e$	$\alpha_i$
	$\frac{bh^2}{6}$ $\frac{bh^2}{6}$	$\frac{h^2}{12y}$	$1 + \frac{h}{6y}$ $1 + \frac{h}{2y}$	$1 - \frac{h}{6y}$ $1 - \frac{h}{2y}$
	$\frac{\pi d^3}{32}$ $\frac{\pi d^3}{32}$	$\frac{d^2}{16y}$	$1 + \frac{d}{8y}$ $1 + \frac{d}{2y}$	$1 - \frac{d}{8y}$ $1 - \frac{d}{2y}$
	$\frac{bh^2}{24}$ $\frac{bh^2}{12}$	$\frac{h^2}{18y}$	$1 + \frac{h}{12y}$ $1 + \frac{2h}{3y}$	$1 - \frac{h}{6y}$ $1 - \frac{h}{3y}$
	$\frac{n^2 + 4n + 1}{2n + 2} \cdot \frac{bh^2}{12}$ $\frac{n^2 + 4n + 1}{2n + 1} \cdot \frac{bh^2}{12}$	$\frac{n^2 + 4n + 1}{(n + 1)^2} \cdot \frac{h^2}{18y}$	$1 + \frac{n^2 + 4n + 1}{(n + 1)(n + 2)} \cdot \frac{h}{6y}$ $1 + \frac{n + 2}{n + 1} \cdot \frac{h}{3y}$	$1 - \frac{n^2 + 4n + 1}{(n + 1)(2n + 1)} \cdot \frac{h}{6y}$ $1 - \frac{2n + 1}{n + 1} \cdot \frac{h}{3y}$

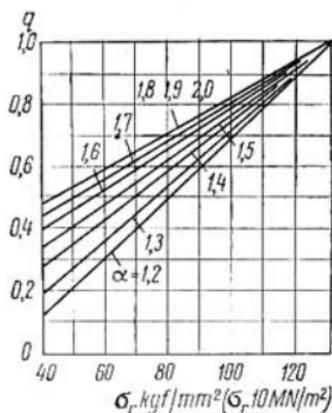


Fig. 1. Gráficos de los coeficientes de sensibilidad a la concentración de tensiones para el acero

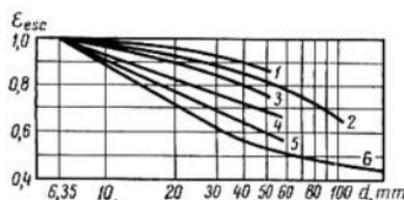


Fig. 2. Gráficos de los factores de escala en la flexión:

1, acero al carbono, pulido liso; 2, acero al carbono, esmerilado liso; 3, acero aleado, pulido liso; 4, acero aleado, esmerilado liso; 5, acero aleado con concentración de tensiones moderada ( $\alpha_c^{\sigma} < 2$ ); 6, acero para construcciones ( $\sigma_r = 65 \text{ kgf/mm}^2$  ó  $\sigma_r < 650 \text{ MN/m}^2$ ), árbol con pieza prensada de acero no prensado; acero aleado con fuerte concentración de tensiones cuando  $d < 60 \text{ mm}$ .

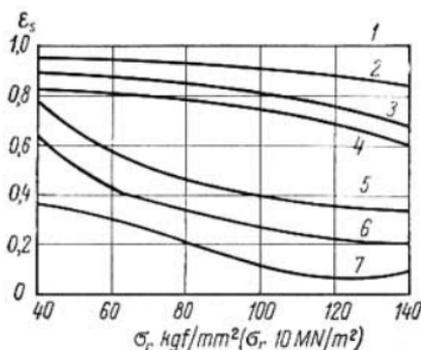


Fig. 3. Gráficos de la sensibilidad superficial para los aceros:

1, pulido minucioso; 2, pulido basto; 3, esmerilado fino o torneado fino; 4, esmerilado o torneado basto; 5, ensayo en agua dulce cuando hay concentración de tensiones; 6, ensayo en agua dulce cuando no hay concentración de tensiones; 7, ensayo en agua salada cuando no hay concentración de tensiones

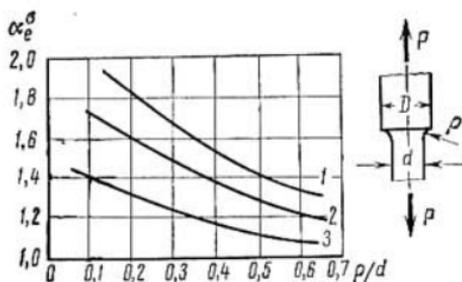


Fig. 4. Gráfico de los coeficientes efectivos de concentración de tensiones para árboles escalonados en el caso de tracción (compresión)

de  $\frac{D}{d} = 2$  cuando  $d = 30 \div 50 \text{ mm}$ .

1, para el acero de  $\sigma_r = 120 \text{ kgf/mm}^2$  ó  $\sigma_r = 1200 \text{ MN/m}^2$ ; 2, para el acero de  $\sigma_r = 80 \text{ kgf/mm}^2$  ó  $\sigma_r = 800 \text{ MN/m}^2$ ; 3, para el acero de  $\sigma_r = 40 \text{ kgf/mm}^2$  ó  $\sigma_r = 400 \text{ MN/m}^2$

Fig. 5. Gráfico del coeficiente efectivo de concentración de tensiones para árboles con un agujero transversal en el caso de la torsión:

$$\frac{a}{d} = 0,05 \quad 0,25, \quad \tau = \frac{M_t}{W_t \text{ neto}} \text{ para } d = 30 \div 50 \text{ mm}$$

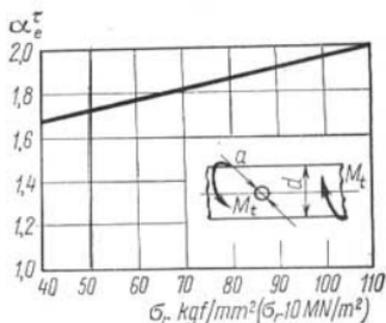


Fig. 6. Gráficos de los coeficientes efectivos de concentración de tensiones para árboles escalonados en el caso de torsión cuando  $\frac{D}{d} = 2$  y  $d = 30 \div 50$  mm:

1, para el acero de  $\sigma_r = 120 \text{ kgf/mm}^2$  (1 200 MN/m<sup>2</sup>); 2, para el acero de  $\sigma_r = 50 \text{ kgf/mm}^2$  (500 MN/m<sup>2</sup>)

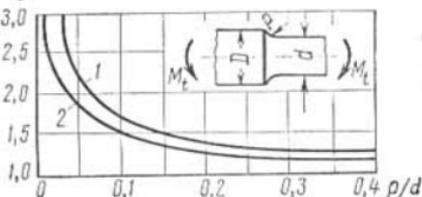


Fig. 7. Gráficos de los coeficientes efectivos de concentración de tensiones para árboles escalonados en el caso de flexión cuando  $\frac{D}{d} = 2$  y  $d = 30 \div 50$  mm:

1, para el acero de  $\sigma_r = 120 \text{ kgf/mm}^2$  (1 200 MN/m<sup>2</sup>); 2, para el acero de  $\sigma_r = 50 \text{ kgf/mm}^2$  (500 MN/m<sup>2</sup>)

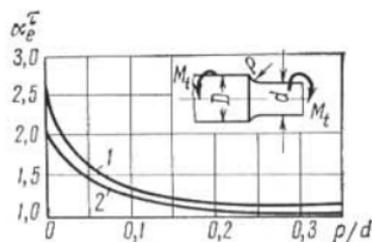
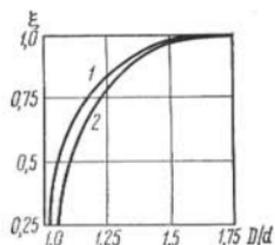
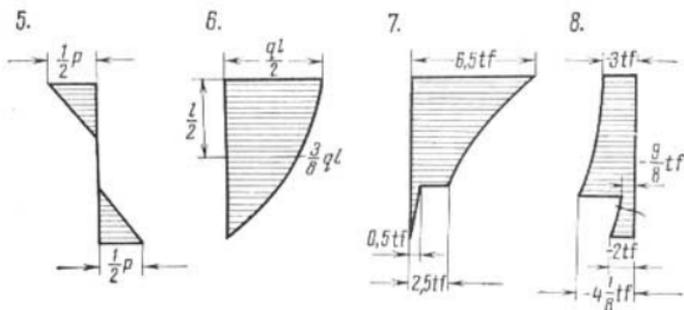
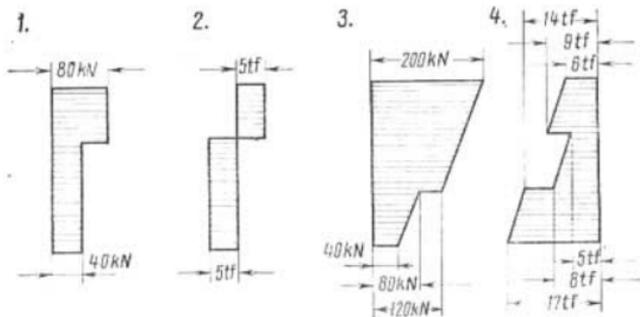


Fig. 8. Gráficos de los coeficientes de corrección para  $\frac{D}{d} < 2$  correspondientes a las figuras 6 y 7:

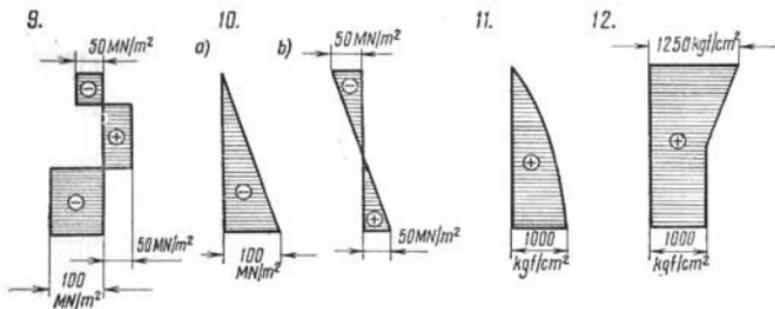
1, flexión; 2, torsión. Si  $\frac{D}{d} < 2$ , entonces  $\alpha_c$  se determina por la fórmula  $\alpha_c = 1 + \xi \times (\alpha_{e0} - 1)$ , siendo  $\alpha_{e0}$  el coeficiente obtenido de los gráficos de las figuras 6 ó 7

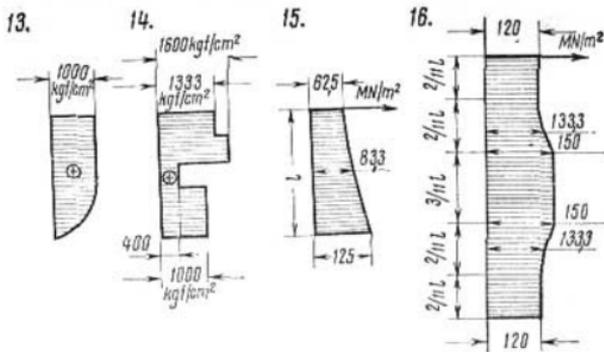


## Soluciones de los problemas

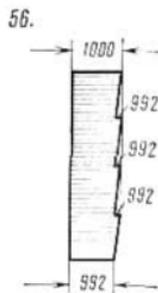
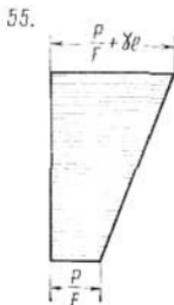


9: 0,15 mm; 2,75 J. 10: a) 0,5 mm; 3,33 J; b) 0; 0,833 J. 11: 1 mm; 120 kgf·cm.  
 12: ~ 0,531 mm; ~ 56,8 kgf·cm. 13: ~ 0,833 mm; ~ 76,7 kgf·cm.  
 14: ~ 1,067 mm; 282,7 kgf·cm. 15: ~ 0,87 mm; ~ 4,35 J. 16: ~ 1,36 mm;  
 ~ 27,2 J. 17:  $\frac{4\mu}{E} \cdot \frac{P}{\pi d^2}$ . 18:  $\frac{Ea}{P} \Delta b$ . 19: 0,09 mm<sup>2</sup>; 0,003 mm. 20:  $\frac{4}{3} \times$   
 $\times \frac{1-2\mu}{E} \cdot \frac{P}{\pi d^2}$ . 21:  $3 \frac{1-2\mu}{E} Pl$ . 22:  $2 \frac{1-2\mu}{E} Pl$ . 23:  $\frac{2}{3} \frac{1-2\mu}{E} \cdot Pl$ .





24: 3750 kgf. 25:  $\delta_y = \frac{Pa}{8EF} (1 + 3\sqrt{3})$ ;  $\delta_x = \frac{Pa}{8EF} (3 - \sqrt{3})$ ;  $\sigma_I = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{P}{F}$ ;  $\sigma_{II} = \frac{P}{2F}$ . 26:  $\delta_y \approx 1,36$  mm;  $\delta_x \approx 0,53$  mm;  $\sim 440$ ;  $\sim 470$  kgf/cm<sup>2</sup>. 27:  $\frac{(2P + \sqrt{2}qa)a}{EF}$ ;  $\frac{P + \sqrt{2}qa}{\sqrt{2}F}$ ;  $\frac{P}{\sqrt{2} \cdot F}$ . 28:  $\frac{Pa}{EF \cos^2 \beta} \times (\sin^2 \beta + 2)$ ;  $\frac{P}{F} \operatorname{tg} \beta$ ;  $\frac{P}{F \cos \beta}$ . 29:  $\delta_x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{Pa}{EF}$ ;  $\delta_y = \frac{Pa}{2EF} (2 + \sqrt{2})$ ;  $\frac{P}{\sqrt{2}F}$ ;  $\frac{P}{F}$ . 30:  $\delta_x = \frac{3}{2} \cdot \frac{Pa}{EF_1}$ ;  $\delta_y = \frac{2Pa}{EF_2}$ ;  $\frac{P}{F_1}$ ;  $\frac{3}{2} \cdot \frac{P}{F_1}$ . 31:  $\frac{(2P + qa)a}{4EF}$ ;  $\frac{2P + qa}{4F}$ . 32:  $\delta_x = \delta_y = \frac{Pa}{EF}$ ;  $\frac{P}{F}$ . 33:  $\frac{Pa}{E_2 F_2}$ ;  $\frac{P}{2F_2}$ . 34:  $\frac{10Pa}{E_1 F_1}$ ;  $\frac{2P}{F_1}$ ;  $\frac{4P}{F_1}$ . 35:  $\delta_x \approx 5,4$  mm;  $\delta_y \approx 1,8$  mm;  $\sim 900$ ;  $\sim 1800$ ;  $\sim 1200$  kgf/cm<sup>2</sup>. 36: 8,5 mm; 1000; 500 kgf/cm<sup>2</sup>. 37: 3,9 mm; 30; 150 MN/m<sup>2</sup>. 38:  $\delta_y = 0,7$  mm;  $\delta_x = 0,35$  mm; 80; 40; 20 MN/m<sup>2</sup>. 39:  $\delta_y = 2,125$  mm;  $\delta_x = 0,08$  mm; 100; 150; 75 MN/m<sup>2</sup>. 40:  $\sim 5,6$  mm;  $\sim 142$ ; 164 MN/m<sup>2</sup>. 41:  $\frac{P}{\sqrt{3}[\sigma]}$ ;  $\frac{P}{2\sqrt{3}[\sigma]}$ ;  $\frac{4P}{2[\sigma]}$ . 42:  $\frac{P}{[\sigma]}$ . 43:  $\frac{3P}{2[\sigma]}$ ;  $\frac{P}{[\sigma]}$ . 44:  $\frac{7qa}{2[\sigma]}$ ;  $\frac{7\sqrt{2}qa}{4[\sigma]}$ . 45: 5 cm<sup>2</sup>. 46: 5,33 cm<sup>2</sup>. 47: 4,9 cm<sup>2</sup>; 8 cm<sup>2</sup>. 48:  $F_1 = F_2 = \frac{7P}{8[\sigma]}$ ;  $F_3 = \frac{7}{4} \cdot \frac{P}{[\sigma]}$ . 49: 9 kN. 50: 64 kN.



51: 176,5 kgf. 52: 2,07 m. 53: 894 kgf/cm<sup>2</sup>. 54:  $d = \sqrt{\frac{P}{\pi([\sigma] - \gamma l)}}$ ;  $\Delta\alpha = \frac{l}{4E} \left( \frac{2P}{F} + \gamma l \right)$ . 55:  $\Delta\alpha = \frac{a}{E} \left[ \frac{P}{F} + \gamma \left( l - \frac{a}{2} \right) \right]$ . 56: 3 m<sup>2</sup>; 617 m<sup>2</sup>; ~ 0,4 cm. 57: 2 500 cm<sup>2</sup>; 2 620 cm<sup>2</sup>; 19,6 tf. 58: 600; 800; -800 kgf/cm<sup>2</sup>. 59: -200; 343; 300 kgf/cm<sup>2</sup>. 60: 130; -20; -120; 5 kgf/cm<sup>2</sup>. 61: max  $\sigma_I = \frac{22}{7} \gamma a$ ; min  $\sigma_{III} = -\frac{31}{14} \gamma a$ . 62: ~ 1 040; ~ 1 560 kgf/cm<sup>2</sup>. 63: ~ 1 164; ~ 875 kgf/cm<sup>2</sup>. 64: ~ 61; ~ 87 kgf/cm<sup>2</sup>. 65: ~ 70,7; ~ 141,4 MN/m<sup>2</sup>. 66: 120 MN/m<sup>2</sup>. 67: ~ 10; ~ 7,1 MN/m<sup>2</sup>. 68: 25; 1 000 kgf/cm<sup>2</sup>. 69: ~ 390; ~ 312 kgf/cm<sup>2</sup>. 70: ~ 903; ~ 903; ~ 452 kgf/cm<sup>2</sup>. 71: ~ 33 mm. 72: ~ 35,7 cm. 73:  $\frac{3}{4} \cdot \frac{P}{[\sigma]}$ . 74: ~ 739; ~ 261 kgf/cm<sup>2</sup>. 75: 300; 200 kgf/cm<sup>2</sup>. 76: ~ 1 091; ~ 545 kgf/cm<sup>2</sup>. 77:  $\frac{\Delta E}{5a} \text{ sen } \beta$ ;  $\frac{2 \Delta E}{5a} \text{ sen } \beta$ . 78: ~ 16,4; ~ 15,4; ~ 16,4 MN/m<sup>2</sup>. 79: 20; 40; 60 MN/m<sup>2</sup>. 80: ~ 764; ~ 917; ~ 1 070 kgf/cm<sup>2</sup>. 81: ~ 87; ~ 302 kgf/cm<sup>2</sup>. 82: ~ 172; ~ 98; 1 000 kgf/cm<sup>2</sup>. 83: ~ 596; ~ 43 kgf/cm<sup>2</sup>. 84: 35 MN/m<sup>2</sup>. 85: ~ 513; ~ 726; 1 025 kgf/cm<sup>2</sup>. 86: ~ 6; ~ 10,4; ~ 10,4 MN/m<sup>2</sup>. 87: ~ 106 MN/m<sup>2</sup>. 88: 800; 600; 1 400 kgf/cm<sup>2</sup>; 120; 200; 160 kgf/cm<sup>2</sup>. 89: 800; 450 kgf/cm<sup>2</sup>. 144; 192 kgf/cm<sup>2</sup>. 90: 500; 1500 kgf/cm<sup>2</sup>; 576; 192 kgf/cm<sup>2</sup>. 91: 400; 450; 550 kgf/cm<sup>2</sup>; 228; 432; 144 kgf/cm<sup>2</sup>. 92: 50; 37,5; 75; 62,5 MN/m<sup>2</sup>; 48; 36; 12; 6 MN/m<sup>2</sup>. 93: 130; 10; 50 MN/m<sup>2</sup>; 16; 32; 16 MN/m<sup>2</sup>. 94: ~ 19,1; 27,5 tf; ~ 671; 322; 168 kgf/cm<sup>2</sup>. 95:  $P = P' \approx 14,3 \text{ tf}$ .  $\sigma_I \approx 147 \text{ kgf/cm}^2$ ;  $\sigma_{II} = \sigma_{III} \approx 93 \text{ kgf/cm}^2$ . 96: ~ 9,06 tf; ~ 11,53 tf; ~ 220; ~ 294; 280 kgf/cm<sup>2</sup>. 97: ~ 7,14 tf; 8,74 tf; ~ 93; 93; 54 kgf/cm<sup>2</sup>. 98: 5,2 tf; 6,4 tf; 72 kgf/cm<sup>2</sup>. 99: ~ 63 kN; ~ 82 kN. 100: 2,05 tf; 2,8 tf; ~ 300; 225 kgf/cm<sup>2</sup>. 101: ~ 28,3 kN; 32 kN; ~ 16,3; ~ 8,1; 5,4 MN/m<sup>2</sup>. 102: 1 000 kgf/cm<sup>2</sup>;  $q = 100 \text{ kgf/cm}$ . 103:  $\sigma_I = \frac{2E}{D} \delta \text{ tg } \alpha$ ;  $\frac{2E}{D+b_1} \delta \text{ tg } \alpha$ ;  $q \approx \frac{4a \delta \text{ tg } \alpha}{D^2} (b_1 E_1 + b_2 E_2)$ . 104: a) 217; 290 kgf/cm<sup>2</sup>; 17,4 kgf/cm<sup>2</sup>; b) 369°. 105: 60 kgf/cm<sup>2</sup>. 106:  $E \left( \alpha \Delta t - \frac{\Delta}{D} \right)$ . 107:  $\sigma_I = \sigma_{III} = 1 333 \text{ kgf/cm}^2$ .

Número del problema	$\tau_1$	$\tau_2$	$\tau_3$	en los planos paralelos al			$\rho_0$	$\sigma_0$	$\tau_0$			
				$\sigma_\alpha$	$\tau_\alpha$	$\sigma_\alpha$				$\tau_\alpha$	$\sigma_\alpha$	$\tau_\alpha$
				eje 1		eje 2				eje 3		
	kgf/cm <sup>2</sup>											
108	0	±600	±600	0	0	300	520	900	520	694	400	566
109	±600	±600	0	-300	+520	-900	520	0	0	694	-400	566
110	±200	±600	±400	300	173	300	520	1000	346	730	533	500
111	±500	±750	±250	-250	+433	-625	649	375	216	645	-167	624
112	±100	±300	±200	-450	87	-450	260	-100	173	416	-333	249
113	±400	±400	0	600	346	200	346	800	0	654	533	377
114	0	±500	±500	-1000	0	-750	433	-250	433	817	-667	471
115	±100	±300	±200	350	87	350	260	700	173	529	467	249
116	±400	±700	±300	0	346	-250	606	650	260	589	133	573
117	±200	±500	±300	-300	173	-350	433	250	260	432	-133	411
118	±100	±300	±200	-850	87	-850	260	-500	173	775	-733	249
119	±450	±450	0	375	390	-75	390	600	0	519	300	424

Número del problema	$\tau_1$	$\tau_2$	$\tau_3$	$\sigma_\alpha$	$\tau_\alpha$	$\sigma_\alpha$	$\tau_\alpha$	$\sigma_\alpha$	$\tau_\alpha$	$\rho_0$	$\sigma_0$	$\tau_0$
				en los planos paralelos al								
				eje 1		eje 2		eje 3				
				MN/m <sup>2</sup>								
120	0	$\pm 50$	$\pm 50$	-80	0	-55	43,3	-5	43,3	66,5	-46,7	47,1
121	0	0	0	50	0	50	0	50	0	50	50	0
122	0	0	0	-70	0	-70	0	-70	0	70	-70	0

Número del problema	$\varepsilon_1$	$\varepsilon_2$	$\varepsilon_3$	$\frac{\Delta V}{V}$	$U_0$	$U_0^f$	$U_0^{vol}$
	%				kgf · cm/cm <sup>3</sup>		
108'	0,060	-0,018	-0,018	0,024	0,36	0,312	0,048
109'	0,018	0,018	-0,06	-0,024	0,36	0,312	0,048
110'	0,054	0,002	-0,024	0,032	0,328	0,243	0,085
111'	0,04	0,0075	-0,0575	-0,010	0,388	0,379	0,009
112'	0,015	-0,011	-0,024	-0,020	0,094	0,061	0,033
113'	0,028	0,028	-0,024	0,032	0,224	0,139	0,085
114'	0,03	-0,035	-0,035	-0,04	0,350	0,217	0,133
115'	0,031	0,005	-0,008	0,028	0,126	0,061	0,065
116'	0,046	0,007	-0,045	0,008	0,326	0,321	0,005
117'	0,032	-0,007	-0,033	-0,008	0,170	0,165	0,005
118'	0,007	-0,019	-0,032	-0,044	0,222	0,061	0,161
119'	0,0255	0,0255	-0,033	0,018	0,202	0,175	0,025

Número del problema	$\varepsilon_1$	$\varepsilon_2$	$\varepsilon_3$	$\frac{\Delta V}{V}$	$U_0$	$U_0^f$	$U_0^{vol}$
	%				J/m <sup>3</sup>		
120'	0,034	-0,031	-0,031	-0,028	28,2 · 10 <sup>3</sup>	21,7 · 10 <sup>3</sup>	6,5 · 10 <sup>3</sup>
121'	0,01	0,01	0,01	0,03	7,5 · 10 <sup>3</sup>	0	7,5 · 10 <sup>3</sup>
122'	-0,014	-0,014	-0,014	-0,042	14,7 · 10 <sup>3</sup>	0	14,7 · 10 <sup>3</sup>

Número del problema	$\sigma_{eI}$	$\sigma_{eII}$	$\sigma_{eIII}$	$\sigma_{eIV}$	$\sigma_{eV}$
	kgf/cm <sup>2</sup>				
108 <sup>a</sup>	1 200	1 200	1 200	1 200	1 200
109 <sup>a</sup>	—	360	1 200	1 200	600
110 <sup>a</sup>	1 200	1 080	1 200	1 060	1 200
111 <sup>a</sup>	500	800	1 500	1 320	1 000
112 <sup>a</sup>	—	300	600	530	300
113 <sup>a</sup>	800	560	800	800	800
114 <sup>a</sup>	—	600	1 000	1 000	500
115 <sup>a</sup>	800	620	600	530	700
116 <sup>a</sup>	800	920	1 400	1 220	1 100
117 <sup>a</sup>	400	640	1 000	870	700
118 <sup>a</sup>	—	140	600	530	100
119 <sup>a</sup>	600	510	900	900	750

Número del problema	$\sigma_{eI}$	$\sigma_{eII}$	$\sigma_{eIII}$	$\sigma_{eIV}$	$\sigma_{eV}$
	MN/m <sup>2</sup>				
120 <sup>a</sup>	20	68	100	100	60
121 <sup>a</sup>	50	20	0	0	25
122 <sup>a</sup>	—	—	0	0	0

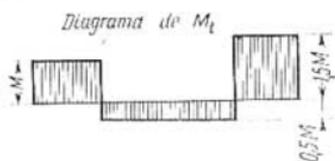
123: a)  $6,6 \cdot 10^{-5}$  mm<sup>2</sup>/kgf;  $1,51 \cdot 10^4$  kgf/mm<sup>2</sup>. b)  $9,6 \cdot 10^{-5}$  mm<sup>2</sup>/kgf;  $1,04 \cdot 10^4$  kgf/mm<sup>2</sup>. c)  $14,6 \cdot 10^{-5}$  mm<sup>2</sup>/kgf;  $0,685 \cdot 10^4$  kgf/mm<sup>2</sup>. 124: 0;  $-\mu p$ ;  $-\rho$ ;  $-\frac{1-\mu^2}{E} pa$ ;  $\frac{\mu(1+\mu)}{E} pb$ ; 125: 0;  $-\frac{4\mu_2 p E_1 F_1}{(E_2 ab + 4E_1 F_1)}$ ;  $-\rho$ ;  $-\frac{(1-2\mu)p(4\mu_2 E_1 F_1 + E_2 ab + 4E_1 F_1)}{E_2(E_2 ab + 4E_1 F_1)}$ . 126:  $\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{-\mu p}{(1-\mu) \frac{d}{(d_1-d)} \frac{E}{E_1}}$ ;  $\sigma_3 = -p$ . 127:  $\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{-\mu p}{1-\mu}$ ;  $\sigma_3 = -p$ ;  $\Delta a = \frac{(\mu-2\mu^2-1)pa}{E(1-\mu)}$ ;  $U = \frac{(1+\mu)(1-2\mu)p^2}{2E(1-\mu)}$ . 128:  $\sigma_1 = \sigma_2 = 1 000$  kgf/cm<sup>2</sup>;  $\sigma_3 = 0$ ;  $\tau_1 = \tau_2 = 500$  kgf/cm<sup>2</sup>;  $\tau_3 = 0$ ;  $\Delta D = 0,35$  mm. 129: 2,5 mm. 130:  $\frac{\rho D}{2[\sigma] \cos \alpha}$ ;  $\frac{\rho D^2 \operatorname{tg} \alpha}{8[\sigma]}$ . 131: 15 mm; 11,1 cm<sup>2</sup>. 132:  $\sigma_1^{\text{esf}} = \sigma_2^{\text{esf}} = 75$  kgf/cm<sup>2</sup>;  $\sigma_3^{\text{esf}} = 0$  (en la superficie interior  $\sigma_3^{\text{esf}} = -0,3$  kgf/cm<sup>2</sup>);  $\sigma_1^{\text{cil}} = 100$  kgf/cm<sup>2</sup>;  $\sigma_2^{\text{cil}} = 83$  kgf/cm<sup>2</sup>;  $\sigma_3^{\text{cil}} = 0$  (en la superficie interior  $\sigma_3^{\text{cil}} = -0,2$  kgf/cm<sup>2</sup>);  $\sigma_\delta = 67$  kgf/cm<sup>2</sup>. 133:  $\frac{\gamma y \operatorname{tg} \alpha}{2\delta \cos \alpha} \left( h - \frac{2}{3} y \right)$ ;  $\frac{\gamma y (h-y) \operatorname{tg} \alpha}{\delta \cos \alpha}$ ;  $\frac{\gamma y (h-y) \operatorname{tg} \alpha}{\delta \cos \alpha}$ , cuando  $0 < y \leq \frac{3}{4} h$ . 134: 69,3; 40 MN/m<sup>2</sup>. 135: 0;  $\pm 80$  MN/m<sup>2</sup>. 136: 50; 70;

20 MN/m<sup>2</sup>; 0,625·10<sup>-3</sup>; 0,785·10<sup>-3</sup>; 0,25·10<sup>-3</sup>. 137: 20; 100; 80; 84,9 MN/m<sup>2</sup>; 0,25·10<sup>-3</sup>; 1,25·10<sup>-3</sup>; 10<sup>-3</sup>; 1,061·10<sup>-3</sup>. 138: 500; 0; -500 kgf/cm<sup>2</sup>; 0,625·10<sup>-3</sup>; 0,27·10<sup>-3</sup>. 139: a) 12,5 kgf·cm; b) 0,86 kgf·cm. 140:  $\sigma_1 = -\sigma_3 = \frac{2M_t}{\pi D^2 \delta}$ ;

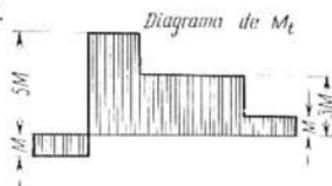
$\sigma_2 = 0$ ;  $[M_t] \approx 157$  kgf·m;  $(M_t)_f \approx 236$  kgf·m. 141:  $d_0 \approx 1,59$  cm;  $d \approx 1,35$  cm;  $\delta \approx 0,74$  cm;  $b \approx 1,35$  cm. 142:  $d \approx 2,8$  cm;  $a = 3$  cm;  $h = 6$  cm;  $b = 3,75$  cm;  $c = 1$  cm;  $f = 1,25$  cm;  $k = 1,25$  cm. 143:  $d = 4$  cm;  $d_1 = 5,6$  cm;  $d_2 \approx 6,9$  cm;  $l_1 \approx 2$  cm;  $l_2 = 1,4$  cm. 144:  $d \approx 3,1$  cm;  $d_1 \approx 4,37$  cm;  $a \approx 1,06$  cm;  $d_2 \approx 4,88$  cm. 145:  $b \approx 4,87$  cm;  $a \approx 5,97$  cm;  $\delta \approx 1,99$  cm;  $h \approx 7,97$  cm;  $c \approx 2,66$  cm;  $l \approx 2,99$  cm. 146:  $a \approx 3,16$  cm;  $d \approx 1,06$  cm;  $c \approx 1,19$  cm;  $b \approx 9,46$  cm<sup>2</sup>;  $l \approx 11,56$  cm. 147:  $a \approx 3,16$  cm;  $c \approx 1,06$  cm;  $b_1 \approx 3,87$  cm;  $b \approx 5$  cm;  $d \approx 0,87$  cm. 148:  $d \approx 3,57$  cm;  $\delta \approx 2,1$  cm;  $b \approx 21,4$  cm;  $l \approx 13,1$  cm. 149:  $d \approx 3,25$  cm;  $\delta_1 \approx 1,92$  cm;  $\delta_2 \approx 1,44$  cm;  $b \approx 9,75$  cm. 150:  $x_c = 1,5a$ ;  $y_c = 4a$ . 151:  $x_c = 2a$ ;  $y_c = 3,9a$ . 152:  $x_c = 2a$ ;  $y_c = 3,71a$ .

$\left( \pi - \alpha - \frac{2}{3} \text{sen } \alpha \right)$   
 153:  $x_c = 0,5a$ ;  $y_c = \frac{\pi - \alpha}{\pi - \alpha} a$ . 154:  $x_c = 0,5a$ ;  $y_c = 0,6 b$ . 155:  $x_c = 17,79$  cm;  $y_c = 11,88$  cm. 156:  $\frac{4}{15} b^4$ . 157:  $\frac{7}{96} a^4$ ;  $\frac{5}{96} a^4$ . 158:  $I_x = I_y = 7869$  cm<sup>4</sup>;  $I_{xy} = 0$ . 159:  $11,9a^4$ ;  $12,4a^4$ . 160:  $5,407a^4$ ;  $5,382a^4$ . 161:  $0,726R^4$ ;  $0,678R^4$ . 162:  $5,25a^4$ ;  $1,57a^4$ . 163:  $5791$  cm<sup>4</sup>;  $11591$  cm<sup>4</sup>. 168:  $\frac{48M}{\pi d^3}$ ;  $\frac{208M^2}{G\pi d^4}$ .

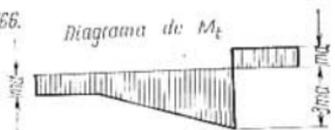
164.



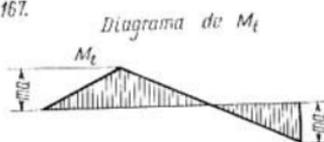
165.



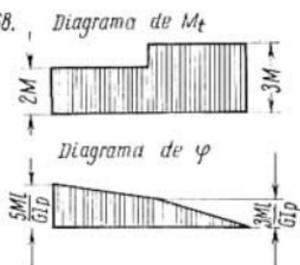
166.



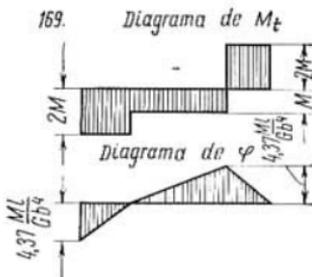
167.

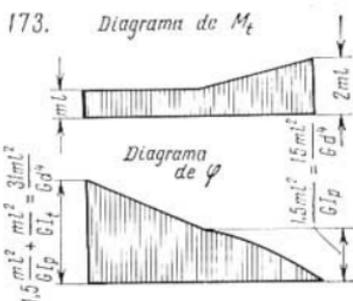
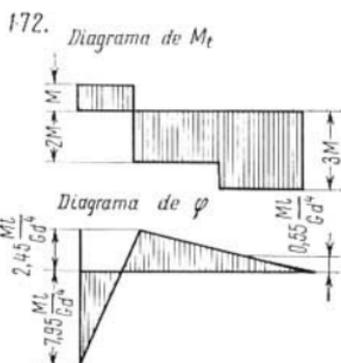
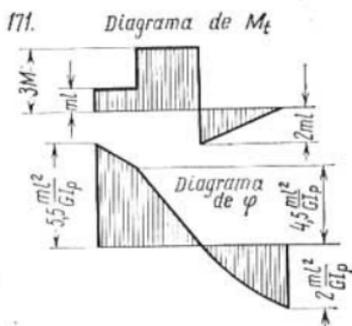
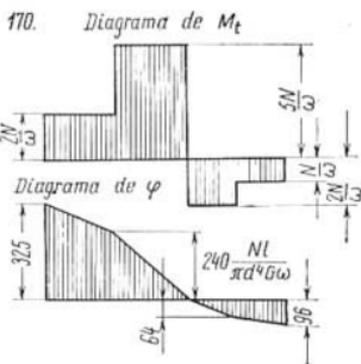


158.



169.





- 169:  $\frac{4,06M}{b^3}$ ,  $\frac{11M^2l}{Gb^4}$ . 170:  $\frac{80N}{\pi\omega d^3}$  N/m<sup>2</sup>;  $\frac{1552N^2l}{\pi\omega^2Gd^4}$  J. 171:  $\frac{15,3ml}{d^3}$ ;  $\frac{262m^2l_g}{Gd^4}$
- 172:  $\frac{16M}{\pi d^3}$ ;  $7,85 \frac{M^2l}{Gd^4}$ . 173:  $\frac{10ml}{d^3}$ ;  $18,85 \frac{m^2l^3}{Gd^4}$ . 174:  $\sim 4,07$  cm.
- 175:  $\sim 4$  cm. 176:  $D \approx 6,84$  cm;  $d \approx 3,42$  cm. 177:  $\sim 3,64$  cm.  
 178:  $d_1 \approx 2,94$  cm;  $d_2 \approx 4$  cm;  $\varphi \approx 9,2^\circ$ . 179:  $d_1 = d_3 \approx 2,94$  cm;  $d_2 \approx 3,72$  cm;  
 $\varphi \approx 1,05 \cdot 10^{-2}$  rad. 180:  $a \approx 2,88$  cm;  $d \approx 2,94$  cm;  $\varphi \approx 0,41^\circ$ . 181:  $d_1 \approx 8$  cm;  
 $d_2 \approx 5,9$  cm;  $\varphi \approx 2,06^\circ$ . 182:  $d \approx 2,5$  cm;  $\varphi \approx 0,98^\circ$ . 183:  $d \approx 2,5$  cm;  $\varphi \approx 6,7'$ .  
 184: 490 r. p. m.; 126 kgf/cm<sup>2</sup>. 185:  $\sim 5$  C. V.; 127 kgf/cm<sup>2</sup>. 186:  $\sim 4,48$  kgf·m;  
 $\sim 105$  kgf/cm<sup>2</sup>. 187:  $\sim 354$  kgf/cm<sup>2</sup>;  $2,38^\circ$ . 188:  $\sim 70$  kgf·m;  $\sim 0,18^\circ$ .  
 189:  $\sim 363$  N·m;  $\sim 77,2$  MN/m<sup>2</sup>;  $\sim 3 \cdot 10^{-2}$  rad. 190: 81,25 kgf·m;  
 $\sim 318$  kgf/cm<sup>2</sup>;  $\sim 1,64^\circ$ . 191:  $\sim 24,6$  kW;  $1,41 \cdot 10^{-2}$  rad. 192:  $\sim 194$  r. p. m.;  
 $\sim 1,18^\circ$ . 193:  $\sim 448$  kgf/cm<sup>2</sup>;  $\sim 2^\circ$ . 194: 400 kgf/cm<sup>2</sup>. 195: 7; 19;  $\frac{1}{3}$ ;  $\frac{2}{3}$ .
- 196:  $\sim 35$  kgf/cm<sup>2</sup>;  $\sim 2^\circ$ . 197:  $\sim 51,3$  N·m;  $\sim 27,5$  MN/m<sup>2</sup>. 198: 78,5 kgf;  
 5 mm (hacia arriba); 30 mm (hacia abajo). 199:  $\sim 425$ ;  $\sim 123$ . 200:  $\sim 0,98$ ;  
 $\sim 1,22$ . 201:  $-693$  kgf/cm<sup>2</sup>;  $\sim 400$  kgf/cm<sup>2</sup>. 202.  $d = \sqrt[3]{\frac{32M}{3\pi[\tau]}}$ ;  $\varphi_A^0 =$   
 $= \frac{180a[\tau]}{\pi G} \sqrt{\frac{3\pi[\tau]}{32M}}$ . 203:  $\sim 3,94$  cm;  $\sim 0,48^\circ$ . 204:  $\sim 1,97$  cm; 0.

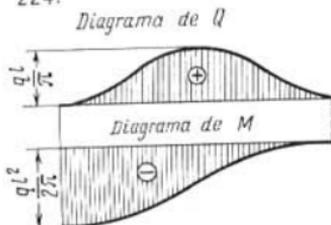
N° del problema	$Q_{\max}$	$M_{\max}$	N° del problema	$Q_{\max}$	$M_{\max}$	N° del problema	$Q_{\max}$	$M_{\max}$
223	$\frac{ql}{4}$	$\frac{ql^2}{6}$	243	4lf	4lf·m	255	$\frac{ql}{2}$	$\frac{ql^2}{16}$
224*	$\frac{ql}{\pi}$	$\frac{ql^2}{2\pi}$	244	$\frac{3}{2} qa$	$\frac{17}{16} qa^2$	256	$\left( \text{para } a = \frac{\sqrt{2}}{4} l \right)$	$\frac{\sqrt{2}}{4} l$
225*	$\frac{ql}{3}$	$\frac{ql^2}{4}$	245	$\frac{7}{6} qa$	$5 \frac{\sqrt{5}}{9} qa^2$			
227*	$\frac{ql}{12}$	$\frac{ql^2}{12 \sqrt{3}}$	247	$\frac{3}{4} qa$	$\frac{qa^2}{4}$	258	$\frac{5}{4} qa$	$qa^2$
228*	$\frac{ql}{4}$	$\frac{3 \sqrt{2} g l^2}{32}$	248	$qa$	$qa^2$	259*	$\frac{2}{3} qa$	$3,531 qa^2$
229*	$\frac{ql}{\pi}$	$\frac{ql^2}{\pi^2}$	249	$2qa$	$qa^2$		$\frac{3}{4} qa$	$0,0128 ql^2$
230*	$\frac{ql}{2\pi}$	$\frac{ql^2}{4\pi^2}$	250	$2P$	$\frac{Pl}{3}$	262*	$\frac{2qa}{3}$	(cuando $a = 0,275l$ )
242	$\frac{qb(t+a)}{2l}$	$\frac{qb^2(t+a)^2}{8l^2}$	252	$0,462ql$ (para $a = 0,21l$ )	$0,0535ql^2$	263	$\frac{qa}{4}$	$1,167 qa^2$
			253	$qa$	$\frac{3}{2} qa^2$	264	$\frac{qa}{2}$	$\frac{qa^2}{8}$
			254	$\frac{3}{2} P$	$\frac{Pl}{6}$	265	4lf	3lf·m

Nota. Para los problemas cuyas soluciones se indican con asteriscos, se dan también los diagramas de Q y M.

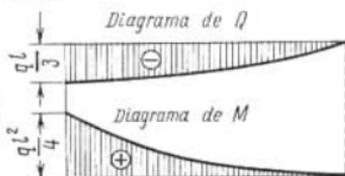
205:  $\sim 2,17 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ;  $1,48 \cdot 10^{-2} \text{ rad}$ ;  $\sim 16,1 \text{ J}$ . 206:  $\sim 126 \text{ kgf}\cdot\text{m}$ ;  $\sim 0,215^\circ$ ;  
 $\sim 23,5 \text{ kgf}\cdot\text{cm}$ . 207:  $\sim 573 \text{ kgf}/\text{cm}^2$ ;  $\sim 0,41^\circ$ . 208:  $\sim 780 \text{ kgf}/\text{cm}^2$ ;  $\sim 1,19^\circ$ .  
 209:  $\sim 33,3 \text{ MN}/\text{m}^2$ ;  $\sim 6,2 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$ . 210:  $b \approx 1,28a$ . 211:  $270 \text{ kgf}/\text{cm}^2$ .  
 212:  $\sim 390 \text{ N}\cdot\text{m}$ ;  $\sim 2,81 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$ . 213:  $\sim 12,7 \text{ mm}$ ;  $\sim 0$ . 214:  $\sim 3,17 \text{ cm}$ ;  
 $\sim 5,8 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$ . 215:  $\tau_{\max_i} = M \frac{d_i}{2 \sum_{i=1}^n I_{p_i}}$ . 216:  $\sim 306$ ;  $\sim 318 \text{ kgf}/\text{cm}^2$ .

217:  $\sim 750 \text{ kgf}/\text{cm}^2$ ;  $\sim 37 \text{ kgf}/\text{cm}^2$ ;  $\sim 1,14^\circ$ . 218:  $\sim 1000 \text{ kgf}/\text{cm}^2$ ;  
 $\sim 100 \text{ kgf}/\text{cm}^2$ . 219:  $\tau_{\max} \approx 0,052 \frac{M}{\pi d^3}$ ;  $\sigma_I \approx 3,3 \frac{M}{\pi d^3}$ ;  $\sigma_{II} \approx 0,45 \frac{M}{\pi d^3}$ ;  
 $\varphi_{AB} \approx 0,57 \frac{Ma}{G \pi d^4}$ . 220:  $\sim 402 \text{ kgf}/\text{cm}^2$ ;  $\sim 134 \text{ kgf}/\text{cm}^2$ ;  $\sim 0,213^\circ$ . 221:  $\sim 468$ ;  
 $\sim 742$ ;  $\sim 883 \text{ kgf}/\text{cm}^2$ ;  $\sim 2,5^\circ$ ;  $\sim 2,13^\circ$ .

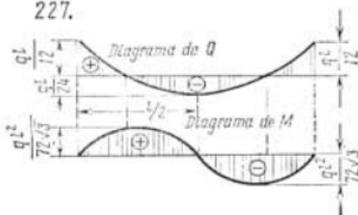
224.



225.



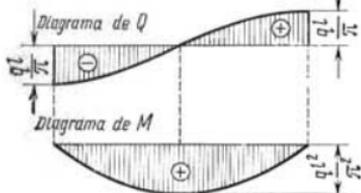
227.



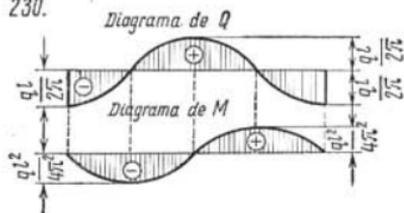
228.

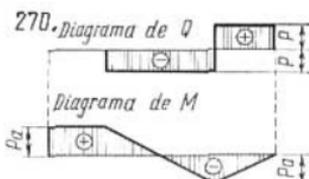
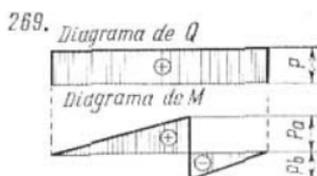
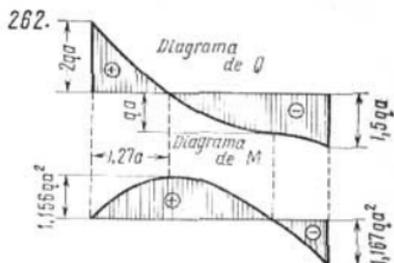
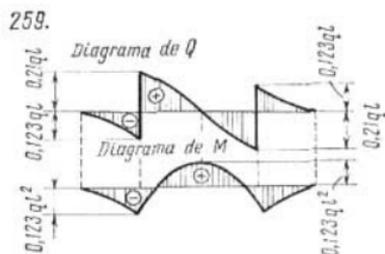


229.

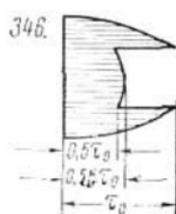
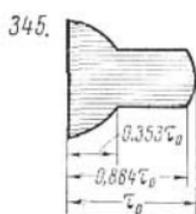
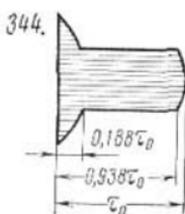
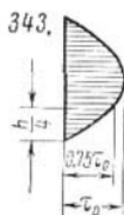


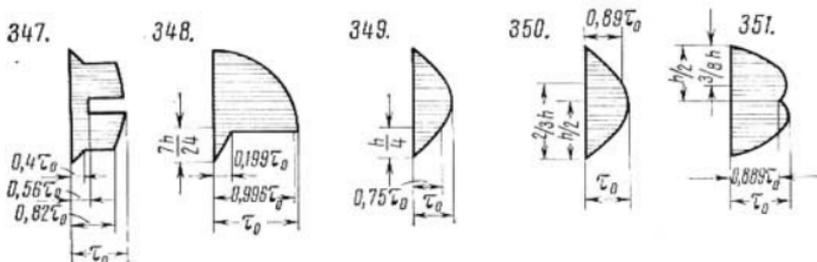
230.





- 286:  $0,082H^3$ . 287:  $0,0183a^3$ . 288:  $\frac{13}{60}b^3$ . 289:  $\frac{a^3}{6}(1-1,5k^2-4k^4)$ . 290:  $229 \text{ cm}^3$ .  
 291:  $0,0597a^3$ . 292:  $0,0706a^3$ . 293:  $359,3 \text{ cm}^3$ . 294:  $79 \text{ cm}^3$ . 295:  $0,0425a^3$ . 296:  
 $0,147a^3$ . 297:  $0,74R^3$ . 298:  $205 \text{ cm}^3$ . 299:  $-737 \text{ cm}^3$ . 300:  $\sim 663 \text{ cm}^3$ . 301:  
 $0,560 \text{ cm}^3$ . 302:  $0,470 \text{ cm}^3$ . 303:  $1,865 \text{ cm}^3$ . 304:  $0,780 \text{ cm}^3$ . 305:  $1,478 \text{ cm}^3$ .  
 306:  $2770 \text{ cm}^3$ . 307:  $1196 \text{ kgf/cm}^2$ . 308:  $91,7 \text{ kgf/cm}^2$ . 309:  $865$ ;  $-432 \text{ kgf/cm}^2$ .  
 310:  $\frac{4\sqrt{3}}{\pi d^3}M$ . 311:  $\sim 3,83 \frac{Pa}{d^3}$ ;  $0$ . 312:  $12\sigma_0$ . 313:  $\sim 0,0894\sigma_0$ . 314:  $a=5 \text{ cm}$ .  
 315:  $b=19 \text{ cm}$ . 316: № 24a. 317:  $D=29,3 \text{ cm}$ . 318:  $b=13,4 \text{ cm}$ . 319:  $n=4$   
 barras. 320: № 33. 321: № 14a. 322: № 45. 323:  $a=3,42 \text{ cm}$ . 324:  $16 \text{ cm}$ .  
 325: № 50. 326:  $a=1 \text{ cm}$ . 327:  $b=20 \text{ cm}$ . 328:  $h_1=177,7 \text{ cm}$ ;  $h_2=38,3 \text{ cm}$ .  
 329:  $a=1 \text{ cm}$ . 330:  $P=1067 \text{ kgf}$ . 331:  $P=1400 \text{ kgf}$ . 332:  $P=453 \text{ kgf}$ . 333:  
 $q=330 \text{ kgf/m}$ . 334:  $P \approx 2,14 \text{ tf}$ . 335:  $P \approx 2,16 \text{ tf}$ . 336:  $M \approx 1,92 \text{ kN}\cdot\text{m}$ . 337:  
 $M \approx 3,44 \text{ kN}\cdot\text{m}$ . 338:  $q=9,36 \text{ kN/m}$ . 339:  $q=3,75 \text{ kN/m}$ . 340:  $q=38,4 \text{ kgf/cm}$ .  
 341:  $P=a^2\sigma_0$ . 342:  $P=1 \text{ tf}$ . 352:  $d=8 \text{ cm}$ ;  $\tau_{\max}=16 \text{ kgf/cm}^2$ . 353:  $h=24,2 \text{ cm}$ ;





$\tau_{\max} = 5,6 \text{ kgf/cm}^2$ . 354: № 27a;  $\tau_{\max} = 125 \text{ kgf/cm}^2$ . 355:  $l = 3 \text{ m}$ ;  $\tau_{\max} = 60,5 \text{ kgf/cm}^2$ . 356:  $2,79 \text{ MN/m}^2$ . 357:  $H \approx 8,0 \text{ cm}$ ;  $\tau_{\max} = 1,82 \text{ MN/m}^2$ . 358: 1.2a. 359:  $\sim 6,65 \text{ cm}$ . 360:  $\sim 1,034a$ . 361:  $\sim 0,702a$ . 362:  $-0,5827r$ . 363:  $-0,762a$ . 364: 1.745;  $-417 \text{ kgf/cm}^2$ ;  $\alpha = 26^\circ$ . 365\*: 11,3;  $-120,3 \text{ kgf/cm}^2$ . 366\*: 370;  $-5 \text{ kgf/cm}^2$ . 367\*: 26;  $-0,4 \text{ kgf/cm}^2$ . 368:  $P = 49 \text{ tf}$ . 369: № 24. 370: № 40. 371:  $b = 15,7 \text{ cm}$ . 372: № 55. 373: № 50. 374: 1,59. 375: 1,4. 376: 3. 377: 1.28. 378: 1,70. 379: 2. 380:  $b = 20 \text{ mm}$ ;  $b' = 17,5 \text{ mm}$ . 381:  $d = 10 \text{ cm}$ ;  $d' = 8,4 \text{ cm}$ . 382:  $q = 2,93 \text{ tf/m}$ ;  $q' = 4,16 \text{ tf/m}$ . 383:  $P = 1,47 \text{ tf}$ ;  $P' = 1,66 \text{ tf}$ . 384:  $q = 10,7 \text{ kN/m}$ ;  $q' = 12,2 \text{ kN/m}$ . 385:  $P = 8,05 \text{ kN}$ ;  $P' = 14,56 \text{ kN}$ . 387: Menos

№ del problema	222	223	224	225	226
$f$	$-\frac{ql^4}{30EI}$	$\frac{7}{120} \frac{ql^4}{EI}$	$\sim -0,057 \frac{ql^4}{EI}$	$\frac{13}{180} \frac{ql^4}{EI}$	$\frac{ml^3}{3EI}$
$\theta$	$-\frac{ql^3}{24EI}$	$\frac{ql^3}{12EI}$	$-\frac{ql^3}{4\pi EI}$	$\frac{ql^3}{10EI}$	$\frac{ml^2}{2EI}$
№ del problema	227	228	229	230	231
$f$	$\sim 0,000204 \frac{ql^4}{EI}$	$\sim 0,00386 \frac{ql^4}{EI}$	$\frac{ql^4}{\pi^4 EI}$	$-\frac{ql^4}{16\pi^4 EI}$	0
$\theta_1$	$-\frac{ql^3}{720EI}$	$\frac{ql^3}{90EI}$	$\frac{ql^3}{\pi^3 EI}$	$\frac{ql^3}{8\pi EI}$	0
$\theta_d$	$+\frac{ql^3}{720EI}$	$-\frac{ql^3}{72EI}$	$-\frac{ql^3}{\pi^3 EI}$		

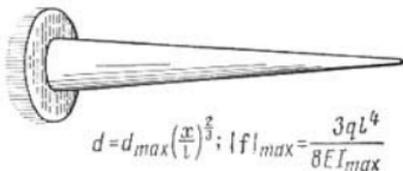
de 0,05%. 388: 100%; 60%. 389: 33%; 28%. 390: 25%; 22%. 391: 27,3%; 23,8%.

Nota. En las soluciones de los problemas 392-443 se dan solamente los valores de los coeficientes de  $\frac{Ma^2}{EI}$ ,  $\frac{Pa^3}{EI}$  ó  $\frac{qa^4}{EI}$  en el caso de las flechas y los coeficientes de  $\frac{Ma}{EI}$ ,  $\frac{Pa^2}{EI}$  ó  $\frac{qa^3}{EI}$ , en el caso de los ángulos de giro.

\* Las tensiones corresponden al alma, en el lugar de variación brusca de la anchura de la sección

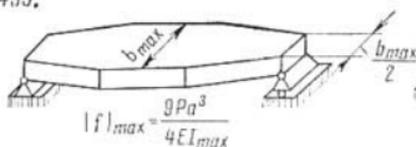
392:  $-\frac{23}{8}$ ;  $-\frac{3}{2}$ . 393:  $-\frac{19}{24}$ ;  $-\frac{1}{3}$ . 394:  $-\frac{25}{4}$ ;  $-\frac{5}{3}$ . 395:  $-\frac{13}{6}$ ;  $-\frac{5}{3}$ .  
 396:  $-\frac{59}{24}$ ;  $-\frac{3}{2}$ . 397:  $-2$ ;  $-\frac{13}{12}$ . 398:  $-2$ ;  $-\frac{17}{16}$ . 399:  $-\frac{85}{72}$ ;  $-\frac{65}{72}$ .  
 400:  $-\frac{5}{8}$ ;  $-\frac{7}{36}$ . 401:  $\frac{1}{6}$ ;  $\frac{1}{3}$ . 402:  $-\frac{1}{3}$ ;  $-\frac{1}{12}$ . 403:  $-\frac{7}{9}$ ;  $\frac{2}{9}$ . 404:  
 $-\frac{5}{12}$ ;  $\frac{1}{6}$ . 405:  $\frac{19}{24}$ ;  $-\frac{2}{3}$ . 406:  $\frac{19}{90}$ ;  $\frac{101}{360}$ . 407:  $\frac{1}{72}$ ;  $\frac{1}{15}$ . 408:  $\frac{25}{24}$ ;  $\frac{7}{6}$ .  
 409:  $-\frac{62}{45}$ ;  $\frac{187}{120}$ . 410:  $-\frac{11}{6}$ ;  $-1$ . 411:  $-\frac{7}{6}$ ;  $-\frac{1}{2}$ . 412:  $-7$ ;  $2$ . 413:  $-\frac{5}{12}$ ;  
 $-\frac{1}{2}$ . 414:  $-\frac{11}{36}$ ;  $\frac{1}{9}$ . 415:  $0$ ;  $-\frac{1}{3}$ . 416:  $-\frac{11}{24}$ ;  $-\frac{7}{12}$ . 417:  $\frac{1}{12}$ ;  $-\frac{11}{12}$ . 418:  
 $-\frac{2}{3}$ ;  $\frac{1}{3}$ . 419:  $\frac{1}{3}$ ;  $-\frac{1}{6}$ . 420:  $-\frac{4}{3}$ ;  $-\frac{3}{2}$ . 421:  $-\frac{10}{3}$ ;  $3$ . 422:  $-\frac{7}{12}$ ;  
 $-\frac{1}{2}$ ;  $\frac{1}{4}$ . 423:  $-\frac{5}{12}$ ;  $-\frac{7}{12}$ ;  $0$ . 424:  $\frac{1}{6}$ ;  $\frac{7}{12}$ ;  $-\frac{3}{4}$ . 425:  $-\frac{17}{18}$ ;  $-\frac{1}{2}$ ;  
 $-\frac{7}{9}$ . 426:  $\frac{45}{8}$ ;  $2$ . 427:  $3$ ;  $2$ . 428:  $\frac{19}{8}$ ;  $\frac{11}{6}$ . 429:  $\frac{2}{9}$ ;  $\frac{2}{3}$ . 430:  $\frac{9}{4}$ ;  $\frac{27}{8}$ . 431:  
 $\frac{65}{162}$ ;  $\frac{5}{9}$ . 432:  $\frac{131}{90}$ ;  $\frac{5}{4}$ . 433:  $\frac{733}{648}$ ;  $\frac{10}{9}$ . 434:  $-\frac{23}{24}$ ;  $-\frac{71}{24}$ . 435:  $-2$ ;  $-11$ .  
 436:  $-\frac{7}{3}$ . 437:  $-\frac{31}{12}$ . 438:  $-\frac{5}{8}$ . 439:  $-\frac{1}{12}$ ;  $-\frac{1}{8}$ . 440:  $\frac{1}{6}$ ;  $-\frac{5}{6}$ . 441:  $-\frac{1}{4}$ .  
 442:  $-\frac{13}{12}$ . 443:  $-\frac{11}{12}$ . 444:  $1,31$  cm. 445:  $3,55$  cm. 446:  $1,35$  cm. 447:  
 $1,29$  cm. 448:  $1,6$  cm. 449: № 22. 450: № 22 (16). 451: № 27. 452:  $12 \times 20$  cm<sup>2</sup>.  
 453:  $20$  cm. 454:  $\frac{4}{3}$ . 455:  $\frac{19}{18}$ . 456:  $\frac{144}{7}$ . 457:  $4,4$ . 467:  $160$  kgf;  $4$  cm.

458.



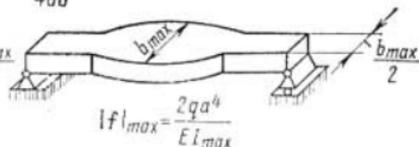
$$d = d_{\max} \left(\frac{x}{l}\right)^{\frac{2}{3}}; |f|_{\max} = \frac{3ql^4}{8EI_{\max}}$$

459.



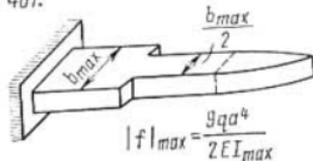
$$|f|_{\max} = \frac{9Pa^3}{4EI_{\max}}$$

460



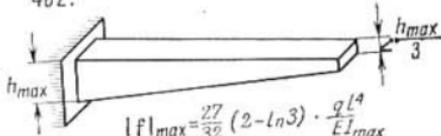
$$|f|_{\max} = \frac{2qa^4}{EI_{\max}}$$

461.



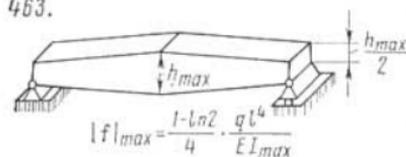
$$|f|_{\max} = \frac{9qa^4}{2EI_{\max}}$$

462.



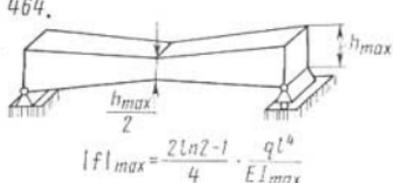
$$|f|_{\max} = \frac{27}{32} (2 - \ln 3) \cdot \frac{ql^4}{EI_{\max}}$$

463.



$$|f|_{\max} = \frac{l - \ln 2}{4} \cdot \frac{q l^4}{EI_{\max}}$$

464.



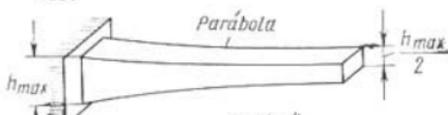
$$|f|_{\max} = \frac{2 \ln 2 - 1}{4} \cdot \frac{q l^4}{EI_{\max}}$$

465.



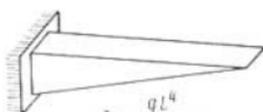
$$h = \frac{2h_{\max}}{l} \sqrt{l x - x^2}; \quad |f|_{\max} = \frac{\pi - 2}{64} \cdot \frac{q l^4}{EI_{\max}}$$

466.



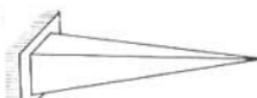
$$|f|_{\max} = \frac{2 \ln 2 q l^4}{EI_{\max}}$$

468.



$$f = \frac{q l^4}{2EI_{\max}}$$

469.



$$f = \frac{q l^4}{6EI_{\max}}$$

Las tensiones tangenciales no influyen sobre la forma de las vigas.  $\theta = \infty$ . Ya que en las proximidades de los extremos libres de las vigas la curvatura  $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$  es grande, en este caso, no podrá aplicarse la ecuación aproximada de la línea elástica.

470\*: 1)  $\frac{3}{4}l$ ; 2) 2; 3; 10. 471\*: 1)  $\frac{2}{5}l$ ; 2)  $\frac{81}{77}$ ;  $\sim 2.082$ ;  $\sim 2.912$ . 472\*: 1)  $\frac{l}{3}$ ; 2)  $\sim 1.10$ ;  $\sim 2.420$ ;  $\sim 3.251$ . 473\*: 1)  $\frac{l}{4}$ ; 2)  $\frac{4}{3}$ ;  $\sim 2.841$ ;  $\sim 3.271$ ; 474\*: 1)  $\frac{l}{4}$ ; 2)  $\frac{32}{27}$ ; 2;  $\frac{8}{3}$ . 475\*: 1)  $\frac{l}{2}$ ; 2)  $\frac{32}{27}$ ;  $\sim 2.898$ ; 4 y 2. 476:  $1.061 \frac{M_{\max}}{W_{\max}}$ , para  $x = 0.3826l$ . 477:  $1.294 \frac{M_{\max}}{W_{\max}}$ , para  $x = 0.2665l$ .

Nota. En las soluciones de los problemas 478—491 figuran los coeficientes numéricos de  $\frac{Ql^3}{EI_{\max}}$ ,  $\frac{Pa^3}{EI_{\max}}$  ó  $\frac{M_0 a^2}{EI_{\max}}$  en el caso de las flechas y de  $\frac{Pa^2}{EI_{\max}}$  ó  $\frac{M_0 a}{EI_{\max}}$ , en el de los ángulos de giro.

478:  $\frac{1}{12}$ . 479:  $\frac{1}{6}$ . 480:  $\frac{2}{3}(3 - 4 \ln 2) \approx 0.1516$ . 481:  $\frac{1}{7}$ . 482:  $\frac{17}{6}$ ;  $\frac{3}{2}$ . 483: 10;  $\frac{9}{2}$ . 484:  $\frac{4}{3}$ ;  $\frac{1}{3}$ . 485:  $\frac{7}{6}$ ;  $\frac{2}{3}$ . 486: 3; 2. 487:  $\frac{265}{72}$ ;  $\frac{14}{3}$ . 488:  $\frac{205}{108}$ ;  $\frac{41}{18}$ . 489:  $\frac{121}{576}$ ;

\* La distancia se indica desde el extremo izquierdo de la viga.

$$\begin{aligned}
& \frac{11}{24} \cdot 490: \frac{25}{72}; \frac{5}{6} \cdot 491: \frac{98}{81}; \frac{14}{9} \cdot 492: |M|_{\max} = \frac{7}{32} qa^2; |Q|_{\max} = \frac{41}{63} qa. \\
& 493: |M|_{\max} = \frac{13}{24} qa^2; |Q|_{\max} = \frac{49}{72} qa. 494: \theta = \frac{ql^3}{240EI}. 495: f_B = \frac{ql^4}{16EI}. \\
& 496: |M|_{\max} = \frac{5}{6} M; |Q|_{\max} = \frac{1}{6} \frac{M}{a}. 497: |M|_{\max} = Pa; |Q|_{\max} = \frac{4}{3} P. \\
& 498: |M|_{\max} = \frac{9}{32} qa^2; |Q|_{\max} = \frac{57}{64} qa. 499: |M|_{\max} = Pa; |Q|_{\max} = P. \\
& 500: [M] = 3,14 \text{ tf}\cdot\text{m}. 501: [M] = 2,85 \text{ tf}\cdot\text{m}. 502: [P] = 7,73 \text{ tf}. 503: [P] = \\
& = 11,6 \text{ tf}. 504: [q] = 7,4 \text{ tf/m}. 505: [q] = 5,2 \text{ tf/m}. 506: № 12. 507: № 14. \\
& 508: № 18. 509: № 10. 510: \frac{15}{28} M. 511: \frac{8}{11} Pa. 512: \frac{9}{8} qa^2. 513: \frac{3}{4} Pa. \\
& 514: \frac{3qa^4}{32EI}. 515: \frac{qa^4}{20EI}. 516: \frac{7Ma^2}{12EI}. 517: \frac{Pa^3}{4EI}. 518: \frac{ql^4}{24EI}. 519: \frac{Pa^3}{12EI} \\
& 520: 720 \text{ kgf}. 521: \frac{5\sqrt{3}}{12} qa. 522: 47 \text{ kgf}. 523: 172 \text{ kgf}. 524: \frac{12M}{5a} \text{ tf}. 525: 2,56; \\
& 3,2 \text{ kN}. 526: \sigma_1 = 109 \text{ MN/m}^2. 527: N_3 = \frac{64\Delta EI}{3a^3}. 528: -7,5; 15 \text{ MN/m}^2. \\
& 529: 288,5; 43,3 \text{ kgf/cm}^2. 530: B = \frac{3}{20} P; M_{\max} = \frac{7}{10} Pl. 531: B_y = \frac{17}{12} P; B_x = \\
& = \frac{3}{16} P; M_{\max} = Pa. 532: B_x = \frac{3}{13} P; M_{\max} = \frac{7}{13} Pa. 533: B_x = \frac{P}{8}; M_{\max} = \\
& = \frac{Pa}{3}. 534: N = 25 \text{ kgf}; M_{\max} = 750 \text{ kgf}\cdot\text{cm}. 535: N = 98 \text{ kgf}; M_{\max} = \\
& = 1440 \text{ kgf}\cdot\text{cm}. 536: N = \frac{3}{38} qa; M_{\max} = \frac{11}{152} qa^2. 537: La presión en la arti- \\
& culación es N = \frac{3}{4} P; M_{\max} = \frac{Pa}{2}. 538: B_x = \frac{48\Delta EI}{7a^3}; B_y = \frac{3}{8} B_x. 539: B_x = \\
& = \frac{3\Delta EI}{8a^3}. 540: N = \frac{3(\alpha_c - \alpha_a) \Delta t E_a E_c FI}{5a^2 E_c F + 3E_a I}. 541: N = 180 \text{ kgf}. 542: B_x = \frac{3\alpha \Delta t EI}{5a^2}. \\
& 543: B_x = \frac{12\alpha \Delta t EI}{a^2}. 544: Sobre el apoyo intermedio M_2 = 1,5 \text{ tf}\cdot\text{m}. 545: Sobre \\
& los apoyos intermedios M_2 = -\frac{31}{12} Pa; M_3 = \frac{25}{92} Pa. 546: \sqrt[3]{\frac{32qa^2}{\pi[\sigma]}}. \\
& 547: \sqrt[3]{\frac{6Pa}{[\sigma]}}. 548: № 16. 549: № 18a. 550: 6,28 \text{ tf/m}. 551: 5,9 \text{ tf/m}. \\
& 552: \sim 2,6 \text{ tf}\cdot\text{m}. 553: 1,86 \text{ tf/m}. 554: 19,6 \text{ kN}\cdot\text{m}. 555: 24,3 \text{ kN}. 556: -\frac{7Pa^3}{6EI}. \\
& 557: -\frac{13}{768} \frac{Pl^3}{EI}. 558: 0,707Pl; 0,293l; 0,707l. 559: 0,662 \text{ tf}\cdot\text{m}. 560: \sim \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI}. \\
& 561: \frac{Pl^3}{14EI}. 562: 2 \text{ tf}. 563: 3,65 \text{ tf}. 564: \frac{3\eta W[\sigma]}{a}. 565: \eta W[\sigma]. 566: \frac{16\eta W[\sigma]}{a^2}. \\
& 567^a: 2[\sigma] \left( F + \frac{\sqrt{2}\eta W}{a} \right). 568: 17,6 \text{ cm}; 8,8 \text{ cm}. 569: 14 \text{ cm}, 7 \text{ cm}. 570: 9,2 \text{ cm}; \\
& 4,6 \text{ cm}. 571: 9,2 \text{ cm}; 4,6 \text{ cm}. 572: 1,97. 573: 1,62. 574: 3,06. 575: 1,6.
\end{aligned}$$

\* Aquí  $F$  es el área de la sección transversal de la barra diagonal.

N.º del problema	222	223	224	225	226
$U$	$\frac{q^2 l^5}{504EI}$	$\frac{187q^2 l^5}{20\,160EI}$	$\frac{(3-8\pi^2)q^2 l^5}{192\pi^4 EI}$	$\frac{13q^2 l^5}{1\,620EI}$	$\frac{m^2 l^3}{6EI}$
N.º del problema	227	228	229	230	231
$U$	$\frac{q^2 l^5}{60\,480EI}$	$\frac{q^2 l^5}{2\,592EI}$	$\frac{q^2 l^5}{4\pi^4 EI}$	$\frac{\pi^4 q^2 l^5}{64EI}$	0

577: 985 kgf·cm. 578: 210 kgf·cm. 579: 3 565 kgf·cm. 580:  $\frac{3P^2 a^3}{8b^4 E}$ .

581:  $\frac{[\sigma] l^2}{4E} \sqrt{bq[\sigma]}$ . 582:  $U_1 : U_2 : U_3 = 1 : \frac{7}{16} : 0,25$ . 583: En la viga de igual

resistencia  $U$  es 1,5 veces mayor. 584: 1) 1,2; 2)  $\frac{32}{27}$ ; 3)  $\frac{4}{3}$ ; 4) 2; 5) 2,4;

6) 1,8. 585: (577)  $U_\tau = 535$  kgf·cm, es decir, el 35% de  $U$ ; (578)  $U_\tau = 1$  kgf·cm, es decir, el 0,5 % de  $U$ ; (579)  $U_\tau = 314$  kgf·cm, es decir, el 11,3% de  $U$ .

586: 1 104 kgf/cm<sup>2</sup>;  $\beta = 67^\circ 35'$ . 587: 1 454 kgf/cm<sup>2</sup>;  $\beta = 59^\circ 53'$ ;  $f_b = 1,13$  cm;  $f_h = 0,65$  cm. 588: 95 kgf/cm<sup>2</sup>;  $\beta = 61^\circ 38'$ . 589: 1 059 kgf/cm<sup>2</sup>;  $\beta = 84^\circ 20'$ .

590: 118,9 kgf/cm<sup>2</sup>;  $\beta = 49^\circ 06'$ . 591: 1 210 kgf/cm<sup>2</sup>;  $\beta = 74^\circ 35'$ . 592: 82,6 kgf/cm<sup>2</sup>;  $\beta = 16^\circ 06'$ . 593: 9,13 MN/m<sup>2</sup>;  $\beta = 82^\circ 59'$ ;  $f_1 = 1,030$  cm;  $\beta_1 = 7^\circ 11,6'$  respecto

a la dirección de la fuerza  $P_1$ . 594:  $\sim 4,025 \frac{Pl}{a^3}$ ;  $\beta = 75^\circ$ . 595: 9 MN/m<sup>2</sup>;  $\beta = 14^\circ 56'$ . 596: 160 kgf;  $\beta = 23^\circ 58'$ ;  $f = 1,334$  cm;  $\beta_1 = 34^\circ 56'$  respecto a la

línea vertical. 597: 9 220 kgf;  $\beta = 73^\circ 26'$ . 598: 47,5 kN;  $\beta = 33^\circ 40'$ . 599: 12,9 kN;  $\beta = 75^\circ 37'$ ;  $f = 0,377$  cm;  $\beta_1 = 88^\circ 11'$  respecto a la línea vertical.

600:  $44,9 \frac{a^3[\sigma]}{l}$ ;  $\beta = 26^\circ 47'$ . 601:  $0,0295 \frac{d^3[\sigma]}{a}$ ;  $\beta = 15^\circ 37'$ . 602:  $\sim 12 \times 18$  cm<sup>2</sup>;

$\beta = 52^\circ 25'$ . 603: N.º 27;  $\beta \approx 84^\circ 52'$ . 604:  $\sim 18 \times 24$  cm<sup>2</sup>;  $\beta = 36^\circ 15'$ ;  $f \approx 1,94$  cm;

$\beta_1 \approx 41^\circ 30'$ . 605:  $D \approx 12$  cm;  $\beta \approx 70^\circ 54'$ . 608:  $f_{\max} = 5,5 \frac{Pa^3}{Eb^4}$ ;  $\sim 45^\circ$  respecto

a los lados del rectángulo. 609:  $\sigma_{\max} = \frac{27Pl}{16\sqrt{5}a^3}$ , cuando  $x = \frac{3}{4}l$  desde el

extremo libre. 610:  $\sigma_{\max} \approx 0,453 \frac{ql^2}{a^3}$ , cuando  $x \approx 0,317l$  desde el apoyo.

611:  $f_{\max} \approx 17,8 \frac{Pa^3}{Eb^4}$ ;  $\sim 15^\circ 42'$ .

*Nota.* En las soluciones de los problemas 612—620 la posición de la línea neutra se determina por los segmentos  $y_0$  y  $z_0$  que la línea neutra corta sobre los ejes principales de inercia de la sección. 612: 0;  $-40$  kgf/cm<sup>2</sup>.

$y_0 = \infty$ ;  $z_0 = 15$  cm. 613:  $-3,51$ ;  $-4,63$  kgf/cm<sup>2</sup>;  $\infty$ ;  $-363$  cm. 614: 25;  $-50$  kgf/cm<sup>2</sup>;  $-6,67$  cm;  $-8$  cm; 615: 65;  $-286$  kgf/cm<sup>2</sup>;  $-12,5$  cm;  $\infty$ .

616:  $26,5 \frac{P}{a^2}$ ;  $-27,5 \frac{P}{a^2}$ ;  $\frac{a}{54}$ ;  $-\frac{a}{27}$ . 617: 1 285;  $-1\,355$  kgf/cm<sup>2</sup>; 0,29 cm;

1,47 cm. 618: 17,6;  $-14,4$  MN/m<sup>2</sup>;  $-0,834$  cm; 0,625 cm. 619:  $-4,88p$ .

$-7,37p$ ; 6,2a;  $\infty$ . 620: 9,3;  $-11,3$  MN/m<sup>2</sup>;  $-4,67$  cm;  $-1,43$  cm.

621: 650 kgf/cm<sup>2</sup>;  $z_0 = -\frac{d}{24}$ . 622: 44,7 kgf/cm<sup>2</sup>;  $y_0 = \frac{a}{6}$ ;  $z_0 = \frac{a}{15}$ .

623: 300 kgf/cm<sup>2</sup>;  $y_0 = 8,3$  cm;  $z_0 = 7,8$  cm. 624: 85,8;  $-80,8$  kgf/cm<sup>2</sup>

- 625:  $79,3 \frac{P}{d^2}$ ;  $-93,5 \frac{P}{d^2}$ . 626: 58,4;  $-63,6 \text{ MN/m}^2$ . 627: 1 122;  $-1 034 \text{ kgf/cm}^2$ .  
 628:  $\frac{P}{3ab}$ , para  $a_x=3a$ ;  $-\frac{4P}{3ab}$ , para  $a_x=\frac{3}{2}a$ . 629:  $\frac{P}{\pi d^2}$ , para  $d_x=2d$ ;  
 $-\frac{125P}{27d^2}$ , para  $d_x=1,2d$ . 630:  $a \geq 2 \sqrt{\frac{Pa}{[\sigma]}}$ . 631:  $a = 4 \text{ cm}$ . 632: № 22a;  
 $d \approx 1,26 \text{ cm}$ . 633: № 27. 634:  $d \approx 17 \sqrt{\frac{Pa}{[\sigma]}}$ . 635:  $d \approx 1,5 \text{ cm}$ . 636:  $t_1 \approx 4,65 \text{ t}$ .  
 637:  $d=3 \text{ m}$ . 638: 64 kgf. 639: 9 040 kgf. 640: 2 780 kgf. 641: 19 550 kgf.  
 642: 4 180 kgf. 643: 360 kgf. 644: 6 000 kgf. 645: 368 kgf. 646:  $\frac{\pi d^3 [\sigma]}{176}$ .  
 647: 4 590 kgf. 648:  $8,68 \text{ kN} \leq P \leq 12,15 \text{ kN}$ . 649:  $P_1=8P$ ;  $\sigma_{\min}=-\frac{32P}{3a^2}$ .

*Nota.* En las soluciones de los problemas 650—655 se dan las coordenadas (en cm) de los vértices del contorno del núcleo central en el sistema YZ formada por los ejes centrales principales de inercia.

- 650: cuadrilátero; 0,160a; 0;  $-0,072a$ ; 0; 0;  $\pm 0,166a$ . 651: cuadrilátero 0,697a; 0;  $-0,650a$ ; 0; 0;  $\pm 0,532a$ . 652: octágono; 0;  $\pm 0,107a$ ;  $\pm 0,107a$ ; 0;  $\pm 0,08a$ ;  $\pm 0,08a$ . 653: hexágono; 0,226a; 0;  $-0,131a$ ; 0; 0;  $\pm 0,107a$ ; 0,086a;  
 $a$ ;  $\pm 0,113a$ . 654: rectángulo;  $\frac{a \sqrt{3}}{12}$ ;  $\pm 12a$ ;  $-\frac{a \sqrt{3}}{12}$ ;  $\pm 12a$ . 655: cuadrilátero;  $\frac{13}{36}b$ ; 0;  $\frac{13}{45}b$ ; 0;  $-\frac{13}{126}b$ ;  $\pm \frac{15}{56}b$ . 656:  $51 \frac{Pa}{d^3}$ . 657: 1 075 kgf/cm<sup>2</sup>.  
 658:  $91,6 \frac{Pa}{d^3}$ . 659:  $78 \frac{q}{a}$ . 660: 1 000 kgf/cm<sup>2</sup>. 661:  $\sim 107 \text{ MN/m}^2$ .  
 662:  $\approx 4,9 \frac{Pl}{\pi d_0^3}$ , para  $x \approx 0,448l$ , medido desde el extremo libre. 663:  $19,4 \frac{Pa}{d^3}$ .  
 664:  $\sim 1 040 \text{ kgf/cm}^2$ . 665:  $\sigma_{\max_f} = 827 \text{ kgf/cm}^2$ ;  $\sigma_{\min_f} = -223 \text{ kgf/cm}^2$ ;  
 $\sigma_{\max_{II}} = 1 755 \text{ kgf/cm}^2$ ;  $\sigma_{\min_{II}} = -35 \text{ kgf/cm}^2$ ;  $\delta_p = 0,53 \text{ mm}$ . 666:  $d \geq$   
 $> 3,7 \sqrt[3]{\frac{Pa}{[\sigma]}}$ . 667:  $b = 3,35 \sqrt[3]{\frac{Pa}{[\sigma]}}$ . 668:  $d \approx 40 \text{ mm}$ . 669:  $d \approx 60 \text{ mm}$ .  
 670:  $d \approx 85 \text{ mm}$ . 671:  $d_1 \approx 22 \text{ mm}$ ;  $b \approx 22 \text{ mm}$ ;  $d_2 \approx 36 \text{ mm}$ . 672:  $a =$   
 $= 3 \sqrt{\frac{2P}{[\sigma]}}$ . 673:  $d \geq 2,46 \sqrt[3]{\frac{Pa}{[\sigma]}}$ . 674:  $d \approx 50 \text{ mm}$ . 675:  $d \approx 38 \text{ mm}$ ;  
 $b \approx 22 \text{ mm}$ . 676:  $d_1 \approx 54,5 \text{ mm}$ ;  $d_2 \approx 64 \text{ mm}$ . 677:  $d \approx 70 \text{ mm}$ . 678:  $d \geq$   
 $> 1,84 \sqrt[3]{\frac{Pa}{[\sigma]}}$ . 679:  $d \approx 24,2 \text{ mm}$ . 680:  $d \approx 80 \text{ mm}$ . 681:  $P \leq \frac{[\sigma] d^3}{51a}$ .  
 682:  $q \leq \frac{0,082 [\sigma] h^3}{a^2}$ . 683:  $M \leq 0,026 [\sigma] D^3$ . 684:  $q \leq 1,4 \text{ kN/m}$ . 685:  $P \leq$   
 $\leq 100 \text{ kgf}$ . 686:  $P \leq 0,556 [\sigma] \frac{d^3}{l}$ . 687:  $M \approx 117 \text{ kgf}\cdot\text{cm}$ . 688:  $P \approx 6,4 \text{ kgf}$ .  
 689:  $\sigma_{III} = 47,4 \frac{P}{d^2}$ . 690:  $\sigma_{III} = 1 240 \text{ kgf/cm}^2$ . 691:  $\sigma_{III} = 1 510 \text{ kgf/cm}^2$ .  
 692:  $\sigma_{III} = 89 \frac{P}{d^2}$ . 693:  $96 \frac{P}{b^2} \leq [\sigma]$ . 694:  $8,14 \frac{P}{b^2} \leq [\sigma]$ . 695:  $1 570 \text{ kgf/cm}^2 <$   
 $< 1 600 \text{ kgf/cm}^2$ . 696:  $b = 12 \text{ cm}$ ;  $h = 8,3 \text{ cm}$ . 697:  $d_1 \approx 8,5 \text{ cm}$ ;  $d_2 \approx 8,5 \text{ cm}$ ;  
 $d_3 \approx 6,1 \text{ cm}$ . 698:  $d_1 = 6 \text{ cm}$ ;  $b = 3,63 \text{ cm}$ ;  $d_2 = 5,71 \text{ cm}$ ;  $c = 2,72 \text{ cm}$ .  
 699: 715 N;  $\tau_{\max} = 685 \text{ MN/m}^2$ . 700:  $\frac{\max \tau_1}{\max \tau_2} = 0,74$ ;  $\frac{\delta_1}{\delta_2} = 0,88$ . 701:  $\max \tau_1 =$   
 $= 955 \text{ kgf/cm}^2$ ,  $\max \tau_2 = 2 550 \text{ kgf/cm}^2$ ;  $\delta = 26 \text{ cm}$ . 702:  $\tau_{\max} = 4 760 \text{ kgf/cm}^2$ ;

$n=15$ ;  $\delta_0=8,1$  cm. 703:  $\max \tau_1=128$  kgf/cm<sup>2</sup>;  $\max \tau_2=417$  kgf/cm<sup>2</sup>. 704:  $P \approx 800$  kgf. 705: 10%. 706:  $P_0=902$  N. 707:  $d=1$  cm;  $n=10$ . 708:  $P=109$  kgf. 709:  $P=50$  kgf. 710: 43 kgf, 20,5 kgf/cm<sup>2</sup>. 711: 132,5 tf; 2 630 kgf/cm<sup>2</sup>. 712: a) 1 070 kgf; 713 kgf/cm<sup>2</sup>; b) 3 460 kgf; 2 310 kgf/cm<sup>2</sup>. 713: a) 171 tf; 4 530 kgf/cm<sup>2</sup>; b) 124 tf; 3 300 kgf/cm<sup>2</sup>. 714: 1 210 kgf; 192 kgf/cm<sup>2</sup>.

715: 5,47 tf; 17,1 kgf/cm<sup>2</sup>. 716: 7,4. 717: 2. 718:  $\frac{F}{2} \sqrt{\frac{\pi E \cos \alpha}{P}}$ . 719: 9,5 m.

720:  $\frac{F}{2} \sqrt{\frac{\pi E}{qa}}$ . 721: a) 31,9 cm; b) 17,8 cm. 722: 82°. 723: a) 37,5°; b) 10,1°.

724: 63°. 725:  $d=13,5$  cm. 726:  $d=6$  cm. 727:  $d=6$  cm. 728: № 22a. 729: sobretensión 33%. 730: sobretensión 2,4%. 731: subtenión 24%. 732: subtenión 4,8%. 733: subtenión 14%. 734: 9,1 tf. 735: 54,6 tf. 736: 177,6 tf. 737:  $b \approx 11,3$  cm. 738:  $b=2,86a$ . 739:  $b=2a$ . 740: № 30. 741: № 20 (16). 742:  $b=10$  cm. 743: 20 cm. 744:  $d=8$  cm. 745: № 14;  $B=14$  cm;  $l_0=40$  cm. 746: № 16;  $B=22$  cm;  $l_0=70$  cm. 747: № 10 (10);  $B=39$  cm;  $l_0=60$  cm (una de las posibles variantes para  $\varphi=0,81$ ). 748: № 10 (7);  $B=34$  cm;  $l_0=60$  cm (una de las variantes posibles, para  $\varphi=0,81$ ). 749: 4,91 cm; 1 462 kgf/cm<sup>2</sup>; 750: 10,96 cm; 107,4 kgf/cm<sup>2</sup>. 751: 1,30 cm; 67,1 kgf/cm<sup>2</sup>. 752: 0,303 cm; 1 240 kgf/cm<sup>2</sup>; 2,52; 1,84. 753: 229 cm; 1 275 kgf/cm<sup>2</sup>; 2,27; 1,78. 754:  $80 \times 50 \times 6$  (una de las variantes posibles). 755:  $d=16$  cm.

Nota. En las soluciones de los problemas 756—765 figuran las magnitudes siguientes:  $N_{\max}$ ,  $Q_{\max}$  y  $M_{\max}$ . 756:  $2P$ ;  $2P$ ;  $\frac{3}{2} Pa$ . 757:  $P$ ;  $3P$ ;  $3Pa$ .

758:  $P \sqrt{2}$ ;  $P \sqrt{2}$ ;  $2Pa$ . 759:  $qa \sqrt{2}$ ;  $qa \sqrt{2}$ ;  $2,414qa^2$ . 760:  $\frac{qa}{2}$ ;  $\frac{qa}{2}$ ;  $\frac{qa^2}{3}$ .

761:  $\frac{3}{2} P$ ;  $\frac{3}{2} P$ ;  $2Pa$ . 762:  $2qa$ ;  $3qa$ ;  $\frac{9}{2} qa^2$ . 763:  $2qa$ ;  $qa$ ;  $2qa^2$ . 764:  $qa$ ;  $2qa$ ;

$5,713qa^2$ . 765:  $P$ ;  $P$ ;  $\frac{5}{2} Pa$ . 766: 127; —206; 111 kgf/cm<sup>2</sup>. 767: 105; —87;

—48 MN/m<sup>2</sup>. 768: 1 050; —700; —382 kgf/cm<sup>2</sup>. 769: 805; —403 kgf/cm<sup>2</sup>

770:  $P=208$  m. 771:  $M_1=123$  kgf·m;  $M_2=303$  kgf·m;  $M_3=128$  kgf·m;  $M_4=134$  kgf·m. 772:  $782 < 1600$  kgf/cm<sup>2</sup>. 773:  $360 < 1600$  kgf/cm<sup>2</sup>.

774:  $\frac{17Ph}{EF}$ ;  $\frac{1,73Ph}{EF}$ . 775:  $2,12 \frac{Pa}{EF}$ ;  $3,6 \frac{Pa}{EF}$ . 776:  $\frac{qr^2}{EF}$ . 777:  $34,4 \frac{Ma}{Gd^4}$ .

778:  $\frac{28Ma}{3GI_1}$ . 779:  $\frac{41 qa^4}{24 EI}$ ;  $\frac{7 Pa^2}{6 EI}$ . 780:  $\frac{qa^4}{4EI}$ ;  $\frac{qa^3}{12EI}$ . 781:  $\frac{qa^4}{15EI}$ ;  $\frac{17qa^3}{180EI}$ .

782:  $\frac{2 qa^4}{3 EI}$ ;  $-k \frac{qa^2}{GF}$ . 783:  $\frac{768P}{bE}$ .

En las soluciones de los problemas 784—790, 797—819 y 822—823 figuran los coeficientes de  $\frac{Ma^2}{EI}$ ,  $\frac{Pa^3}{EI}$  ó  $\frac{qa^4}{EI}$  (en el caso de desplazamientos lineales) y los coeficientes de  $\frac{Ma}{EI}$ ,  $\frac{Pa^2}{EI}$  ó  $\frac{qa^3}{EI}$  (en el caso de desplazamientos

angulares). 784:  $16 \left( \frac{1}{3} - \frac{I}{a^2F} \right)$ ; 8; 2. 785:  $2 \left( \frac{8}{3} + \frac{I}{a^2F} \right)$ ; 1; 1.

786:  $\frac{1}{2} \left( 1 + \frac{I}{2a^2F} \right)$ ;  $\frac{1}{4}$ . 787:  $2 \left( 11 + \frac{I}{a^2F} \right)$ ;  $2 \left( 9,1 + \frac{I}{a^2F} \right)$ . 788:  $4 \left( 3 + \frac{I}{a^2F} \right)$ .

789:  $2 + \frac{3I}{a^2F}$ . 790:  $\frac{1}{2}$ . 791:  $103,7 \frac{Pa^3}{Ed^4}$ . 792:  $85 \frac{Pa^3}{Ed^4}$ . 793:  $39,1 \frac{Pa^3}{Ed^4}$ .

794:  $\frac{80Pa^3}{Ed^4} \left( 1 + \frac{d^2}{63a^2} \right)$ . 795:  $\frac{170Pa^3}{Eb^4} \left( 1 + \frac{b^2}{170a^2} \right)$ . 796:  $\frac{56,9Pa^3}{Eb^4} \times$

$\times \left( 1 + \frac{b^2}{56,9a^2} \right)$ . 797: 13,6;  $\frac{1}{2}$ ; 6,85. 798:  $\frac{7}{6}$ ; 1,45;  $\frac{5}{3}$ . 799: 39; 19,1; 20,1.

800:  $0,36; \frac{1}{2}; 0,57$ . 801:  $0,071; 0; 0,142$ . 802:  $\frac{1}{12}; 0,010; 0,028$ . 803:  $0,47; 0,85; 0,24$ . 804:  $8; 37,4; 4\pi$ . 805:  $\frac{1}{12}; 0,0927; 0,0181$ . 806:  $\frac{1}{2}; 1,225$ . 807:  $\frac{2}{3}; 0,392$ . 808:  $5,14; 3,14$ ; 809:  $\frac{3\pi}{2}; \frac{1}{2}$ . 810:  $1,1; \frac{1}{2}$ . 811:  $0,312$ . 812:  $0,071$ .  
 813:  $0,355$ . 814:  $0,0198 \left[ 1 + 3,57 \frac{b^2}{a^2} \right]$ . 815:  $12,4$ . 816:  $\frac{28}{3}$ . 817:  $3\pi$ . 818:  $\frac{1}{2}$ .  
 819:  $7,24$ . 820:  $45^\circ$ . 821:  $48^\circ 15'$ . 822:  $\frac{5}{12}; \frac{1}{12}$ . 823:  $\frac{1}{2}; \frac{1}{2}$ . 824:  $\frac{2}{9}; \frac{2}{9}$ .  
 825:  $\frac{28}{3} + \frac{I}{a^2 F}; \frac{44}{9}$ . 826:  $\frac{7}{3} + 2 \frac{I}{a^2 F}$ ;  $2,5$ . 827:  $\frac{23}{3}$ ;  $3$ . 828:  $14; 8,5$ . 829:  $0,5; 0$ .  
 830:  $3,1$ . 831:  $\frac{5}{6}$ . 832:  $\frac{7}{2}$ . 833:  $\frac{32}{3}$ . 834:  $0; \frac{P}{2} \sin \beta; \frac{P}{2} \cos \beta$ . 835:  $\sim -0,739P$ ;  
 $\sim 0,369P$ . 836:  $ma$ . 837:  $2,7M$ . 838:  $\frac{qa}{8}; \frac{7 qa^4}{48 EI}$ . 839:  $\frac{7}{8} qa; \frac{5 qa^4}{24 EI}$ . 840:  $\frac{6M}{7a}$ ;  
 $\frac{Ma^2}{21EI}$ . 841:  $\frac{25}{16} qa; \frac{qa^4}{48EI}$ ;  $M_A = \frac{23}{48} qa^2$ . 842:  $\frac{P}{10}; \frac{19Pa^3}{60EI}$ . 843:  $\frac{qa}{3}; \frac{16}{9} \frac{qa^4}{EI}$ .  
 844:  $\frac{3}{8} \cdot \frac{M}{a}$ ;  $\frac{Ma^2}{2EI}$ . 845:  $\frac{3}{4} qa; \frac{3}{4} \frac{qa^4}{EI}$ . 846:  $\frac{qa}{7}$ ;  $\sim 0,137 \frac{qa^4}{EI}$ . 847:  $\frac{3}{10} P$ ;  
 $\frac{11 Pa^3}{15 EI}$ . 848:  $\frac{15}{28} P$ . 849:  $\frac{45}{44} qa$ . 850:  $\sim 0,162P$ . 851:  $\frac{3}{2} qa$ . 852:  $A_y = 0; A_x = \frac{P}{4}$ .  
 853:  $A_y = A_x = \frac{9M}{20a}$ . 854:  $A_y = \frac{32}{25} qa; A_x = \frac{14}{25} qa$ . 855:  $A_y = \frac{125}{54} qa; A_x = \frac{91}{54} qa$ .  
 856:  $A_y = \frac{14}{19} P$ ;  $A_x = \frac{9}{38} P$ . 857:  $A_y = A_x = \frac{qa}{6}$ . 858:  $\frac{3}{5} Pa$ . 859:  $\frac{3}{4} Pa$ .  
 860:  $0,1642qa^2$ . 861:  $0,0634qa^2$ . 862:  $A_y = 0; A_x = \frac{3P}{16}$ ;  $M_A = \frac{Pa}{4}$ . 863:  $A_y = \frac{2}{11} qa$ ;  
 $A_x = \frac{57}{55} qa$ . 864:  $A_y = \frac{P}{2}$ ;  $A_x = \frac{3P}{62}$ . 865:  $A_y = \frac{40}{71} qa; A_x = \frac{76}{71} qa$ . 866:  $A_y =$   
 $= \frac{11}{20} qa; A_x = \frac{qa}{40}$ ;  $M_A = \frac{qa^2}{10}$ . 867:  $A_y = \frac{P}{8}$ ;  $A_x = \frac{15}{16} P$ . 868:  $\frac{44}{23} P$ ;  $\frac{68}{69} \frac{Pa^3}{EI}$ .  
 869:  $\frac{10}{27} P$ .  $\frac{191}{81} \frac{Pa^3}{EI}$ . 870:  $\frac{19}{47} P$ ;  $\sim 0,0722 \frac{Pa^3}{EI}$ . 871:  $0,75E\alpha\Delta t \frac{h}{a}$ . 872:  $\frac{3}{11} \times$   
 $\times E\alpha\Delta t \frac{h}{a}$ . 873:  $0,3E\alpha\Delta t \frac{h}{a}$ . 874:  $0,6E\alpha\Delta t \frac{h}{a}$ . 875:  $\frac{24}{31} E\alpha\Delta t \frac{h}{a}$ . 876:  $\frac{3}{11} \frac{\Delta Eh}{a^2}$ .  
 877:  $\frac{3\Delta Eh}{16a^2}$ . 878:  $\frac{\Delta Eh}{7a^2}$ . 879:  $\frac{3\Delta Eh}{8a^2}$ . 880:  $\frac{P}{3}; \frac{\pi+1}{3} \cdot \frac{Pa^3}{EI}$ . 881:  $0,0372qa$ ;  
 $0,1188 \frac{qa^4}{EI}$ . 882:  $\frac{5}{6} qa; \frac{\pi}{24} \frac{qa^4}{EI}$ . 883:  $0,0638P$ ;  $0,1052 \frac{Pa^3}{EI}$ . 884:  $0,1867qa$ ;  
 $0,115 \frac{qa^4}{EI}$ . 885:  $R_y = \frac{qa}{2}$ ;  $R_x = 0,590qa$ . 886:  $R_y = \frac{P}{2}$ ;  $R_x = 0,786P$ . 887:  $R_y =$   
 $= 0; R_x = \frac{4qa}{\pi}$ . 888:  $R_y = \pi qa; R_x = 3qa$ . 889:  $R_y = \frac{P}{2}$ ;  $R_x = 0,722P$ ;  $M_R =$   
 $= 1,077Pa$ . 890:  $3,44 \frac{Pa^3}{EI}$ . 891:  $\frac{2\pi}{9} \cdot \frac{Pa^3}{EI}$ . 892:  $0,586 \frac{Pa^3}{EI}$ . 893:  $0,25 \frac{Pa^3}{EI}$ .  
 894:  $\frac{2\pi}{5} \cdot \frac{Pa^3}{EI}$ . 895:  $0,0994 \frac{Pa^3}{EI}$ . 896:  $0,369Pa$ . 897:  $0,273qa^2$ . 898:  $0,629Pa$ .  
 899:  $1,452Pa$ . 900:  $A_y = 0,216P$ ;  $A_x = 0,433P$ . 901:  $A_y = 0,961P$ ;  $A_x = 0,774P$ .  
 902:  $A_y = \frac{3}{4} qa; A_x = \frac{qa}{4}$ . 903:  $A_y = 0,271qa; A_x = 0,277qa$ . 904:  $A_y = \frac{P}{2}$ ;

$A_x = 0,0522P$ ;  $N = 0,437P$ . 905:  $A_y = 0,519qa$ ;  $A_x = 0,339qa$ . 906:  $A_y = 0,214qa$ ;  $A_x = 0,701qa$ ;  $M_A = 0,569qa^2$ . 907: 2,414; 2,515. 908: 2,75; 9,40. 909: 2,48; 8,52. 910: 3,30; 15,26. 911:  $M_f = \frac{M}{2}$ ;  $M_t = \frac{M}{9\pi}$ ;  $\delta = 0,298 \frac{Ma^2}{EI}$ . 912:  $M_f = \frac{Pa}{2}$ ;  $M_t = 0,565Pa$ ;  $\delta = 0,625 \frac{Pa^3}{EI}$ . 913:  $M_f = 2qa^2$ ;  $M_t = 0,934qa^2$ ;  $\delta = 1,435 \frac{qa^4}{EI}$ .  
 914:  $d \approx 1,362 \sqrt[3]{\frac{Pa}{[\sigma]}}$ . 915:  $b \approx 1,371 \sqrt[3]{\frac{qa^2}{[\sigma]}}$ . 916:  $r_2 = 17,3$  cm;  $\Delta r_1 = 0,23$  mm.  
 917:  $p_2 = 111$  MN/m<sup>2</sup>;  $\Delta r_2 = -0,19$  mm. 918: a)  $r_2 = 14,4$  cm;  $\Delta r_1 = 0,23$  mm;  $\Delta r_2 = 0,19$  mm; b)  $p_1 = 24$  MN/m<sup>2</sup>. 919:  $p_0 = \frac{a\beta E (r_2^2 - r_1^2)}{2r_1 [r_2^2 + r_1^2 + \mu (r_2^2 + r_1^2)]}$ ;  $\max |\sigma_r| = p_0$ ;  
 $\max \sigma_t = p_0 \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}$ . 920:  $\beta = \frac{\Delta}{ar_1 r_2} [r_2^2 + r_1^2 + \mu (r_2^2 - r_1^2)] \approx 0,017$  rad  $\approx 1^\circ$ .  
 921:  $\beta = 0,028 \approx 1,6^\circ$ . 922:  $p_0 = 17,4$  kgf/cm<sup>2</sup>;  $\sigma_{eV} = 17,4$  kgf/cm<sup>2</sup>. 923:  $p = 8,6$  kgf/cm<sup>2</sup>;  $p_0 = 3,8$  kgf/cm<sup>2</sup>. 924:  $p_0 = \frac{\mu q}{\frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} - \mu}$ . 925:  $p_0 = 0$ .

N° del problema	$\sigma_r$ , kgf/cm <sup>2</sup>			$\sigma_t$ , kgf/cm <sup>2</sup>				$p_0$ , kgf/cm <sup>2</sup>
	Tubo			Tubo				
	I	II		I	II			
	Puntos			Puntos				
	1	2	3	1	2	2	3	
926	-2 000	-577	0	1 800	371	962	385	577
927	-2 000	-248	0	2 670	920	413	165	248
928	0	-173	0	-460	-290	290	115	173

929:  $p_0 = \frac{\Delta}{2r_2 A} E_I E_{II} (1 - n_1^2)(1 - n_2^2)$ , siendo  $n_1 = \frac{r_1}{r_2}$ ,  $n_2 = \frac{r_2}{r_3}$ ,  $A = (1 - n_1^2 n_2^2) (E_I + E_{II}) + (n_1^2 - n_2^2) (E_{II} - E_I) - (1 - n_1^2) (1 - n_2^2) (\mu_1 E_{II} - \mu_{II} E_I)$ .

N° del problema	$\sigma_r$ , kgf/cm <sup>2</sup>			$\sigma_t$ , kgf/cm <sup>2</sup>				Disminución de la tensión efectiva
	Tubo			Tubo				
	I	II		I	II			
	Puntos			Puntos				
	1	2	3	1	2	2	3	
931	-2 000	-825	0	917	-309	1 291	517	30%
932	-3 000	-1 500	0	1 000	-500	2 500	1 000	—
	$r_2 = 20$ cm		$r_3 = 40$ cm	$\Delta = 0,6$ mm				

933	Tubo	I		II		III	
	Puntos	1	2	2	3	3	4
$\sigma_{eIII}$ , kgf/cm <sup>2</sup>	Tubo simple	5 717	3 650	3 650	1 860	1 860	914
	Tubo compuesto	3 615	2 304	3 624	1 852	3 365	1 654

930:  $p_0 = \frac{\Delta E}{2r_2 \left( \frac{r_2}{\delta} + \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} - \mu \right)}$ . 934:  $\max \sigma_I = 3\gamma l$ ;  $\max \sigma_{II} = 66\gamma l$ . 935:  $\sigma_I =$   
 $= 216 \text{ MN/m}^2$ ;  $\sigma_{II} = 10,8 \text{ MN/m}^2$ . 936:  $\sigma_I = 181 \text{ kgf/cm}^2$ ;  $\sigma_{II} = 287 \text{ kgf/cm}^2$ .  
937: a)  $\sigma_I = \sigma_{III} = \sigma_{II} \cos^2 \alpha = \frac{Q \cos^2 \alpha}{(1 + 2 \cos^2 \alpha) F} \left( 1 + \frac{\omega^2 l}{g} \right)$ ; b)  $\sigma_{III} = \frac{\sigma_I}{\sqrt{3}} =$   
 $= \frac{\sigma_{II}}{1 + \sqrt{3}} = \frac{Q}{(3 + \sqrt{3}) F} \left( 1 + \frac{\omega^2 l}{g} \right)$ . 938:  $\sim 66,8 \text{ MN/m}^2$ . 939:  $\frac{32Q\omega^2 l^2}{g\pi d^3}$ .  
940:  $d = 14,3 \text{ cm}$ ;  $h = 12 \text{ cm}$ . 941: 250 r.p.m. 942:  $\frac{4\gamma r l^2}{g\pi d^3} \sqrt{\varepsilon_0^2 + \omega_0^4}$ . 943:  $\sim 03 \times$   
 $\times \sqrt{\frac{Qn^2 r l}{g [\sigma]}}$ . 944: ( $\max \sigma_I = 1 420 \text{ kgf/cm}^2$ ;  $\max \sigma_{II} = 2 220 \text{ kgf/cm}^2$ .  
945:  $\sim 1 350 \text{ kgf/cm}^2$ . 946:  $\frac{Q\omega^2 r^4}{2gEI} (3\pi + 8)$ . 947: 195 r.p.m.,  $\sim 1,59 \text{ cm}$ .  
948:  $\frac{16Q\omega^2 R^2}{g\pi d^3}$ . 949:  $4 \frac{\gamma \omega^2 R^3}{gd}$ . 950:  $4,9 \frac{Q\omega^2 R^2}{g\pi d^3}$ ;  $28,5 \frac{Q\omega^2 R^4}{gEI^4}$ . 951:  $\frac{\pi b}{32r} \times$   
 $\times \sqrt{\frac{E\pi b g a}{Qr}}$ . 952:  $\frac{\pi d^2}{32a} \sqrt{\frac{\pi E g}{2Qa}}$ . 953: 672 r.p.m. 954: a) 50 1/s; b) 5,6 1/s.  
955:  $\sqrt{\frac{2gEF}{7Qa}}$ . 956:  $2\pi \operatorname{tg} \alpha \sqrt{\frac{Q}{Cg}}$ . 957:  $\frac{4\pi}{3} \sqrt{\frac{Qn^3}{EIg}}$ . 958:  $4\pi \sqrt{\frac{Qa^3}{3EIg}}$ .  
959: 1/40 s. 960:  $\frac{\pi l}{2} \sqrt{\frac{Ql}{6EIg}}$ . 961: 0,106 s. 962: 1,17  $\sqrt{\frac{EIg}{Qa^3}}$ . 963: 0,075 s.  
964:  $\frac{d^2}{12R} \sqrt{\frac{\pi Gg}{2Qa}}$ . 965: 2,82 1/s. 966:  $\frac{61}{35}$ . 967:  $\frac{41}{70}$ . 968:  $\frac{333}{2 240}$ . 969:  $\frac{1}{3}$ .  
970:  $\frac{4}{3}$ . 971: 0,144 s. 972: 0,147 s. 973:  $2\pi \sqrt{\frac{6Ql^3}{bh^3 E g} \left( 1 + \frac{Qr}{15Q} \right)}$ .  
974:  $\frac{2\pi}{\sqrt{g \left( \frac{2C}{Q + \frac{1}{3} \gamma Fl} - \frac{1}{l} \right)}}$ . 975:  $2\pi \sqrt{\frac{I_m a}{2GI_p} \left( 1 + \frac{2\gamma l p a}{3Img} \right)}$ . 976: 2000 r.p.m.  
977:  $\Delta = \frac{P_0 F g}{Cg - Q\omega_0^2}$ . 978: 1,65 mm. 979: 0,8 mm. 980: 0,54 rad. 981: 20 cm;  
2 160 kgf/cm<sup>2</sup>. 982: 550 kgf/cm<sup>2</sup>. 983: 510 kgf/cm<sup>2</sup>. 984: 2,1 kgf. 985: 12,8 cm.  
986:  $\sigma_{dI} = \frac{1}{2} \sigma_{dII} = \sqrt{\frac{QhE}{3Fa}}$ ;  $\delta_d^i = \sqrt{\frac{4Qha}{3EF}}$ . 987:  $\sqrt{\frac{18Qh}{C_I + 4C_{II}}}$ . 988: a)  $\frac{Q}{C} \times$   
 $\times \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2Ch}{Q}} \right)$ ; b)  $v \sqrt{\frac{Q}{Cg}}$ ; c)  $\frac{Q}{C} \operatorname{sen} \alpha \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2Ch}{Q \operatorname{sen} \alpha}} \right)$ .

- 989:  $\frac{[\sigma]^2 W^2 a}{2QEI}$ . 990:  $\sqrt{\frac{20Qha^3}{EI}}$ . 991:  $av \sqrt{\frac{Qa}{2gEI}}$ . 992: 33,2 kgf. 993:  $\frac{[\sigma]^2 W^2 l}{6QEI}$ .  
 994:  $\frac{5,2}{W} \sqrt{\frac{QhEI}{a}}$ . 995:  $\frac{1,65}{W} \sqrt{\frac{QhEI}{a}}$ . 996:  $7,46 \sqrt{\frac{Qha^3}{EI}}$ . 997:  $\frac{1}{W} \times$   
 $\times \sqrt{\frac{1,6QhEI}{\pi a}}$ . 998:  $v \sqrt{\frac{0,0379Qa^3}{gEI}}$ . 999:  $\frac{1,88}{W} \sqrt{\frac{QhEI}{a}}$ . 1000: 9,3 MN/m<sup>2</sup>.  
 1001:  $\sqrt{\frac{3,84Qha^3}{EI}}$ . 1002:  $\sqrt{\frac{2Qha^3}{3GI_p}}$ . 1003:  $2 \sqrt{\frac{Qha^3}{3GI_p}}$ . 1005: 1)  $a = \frac{l}{2}$  ;  
 2)  $a = (2 - \sqrt{2}) l$ . 1006: a)  $\frac{4\omega}{d} \sqrt{\frac{I_m G}{\pi l}}$ ; b)  $\frac{4\omega}{d} \sqrt{\frac{2I_m G}{\pi l}}$ . 1007:  $\frac{4\omega}{d} \times$   
 $\times \sqrt{\frac{I_m G}{\pi a}}$ . 1008: 1260 kgf/cm<sup>2</sup>. 1009:  $\sqrt{\frac{6QE}{5F}}$ . 1010: 337 kgf/cm<sup>2</sup>; 0,78 mm.  
 1011: 336 kgf/cm<sup>2</sup>. 1012:  $h = \frac{W^2 l [\sigma]^2}{6QEI} \left(1 + \frac{13}{35} \frac{Q_0}{Q}\right)$ ; con mayor exactitud  
 $h = \frac{W^2 l [\sigma]^2}{6QEI} \left(1 + \frac{13}{35} \frac{Q_0}{Q}\right) \left(1 - \frac{Ql}{4W[\sigma]}\right)$ . 1013:  $\omega \sqrt{\frac{2I_m G}{V \left(\frac{3}{2} \frac{I_a}{3I_m}\right)}}$ . siendo  
 $V = \frac{\pi d^2}{4} l$ . 1014:  $\sigma_{dI} = 366$  kgf/cm<sup>2</sup>;  $\sigma_{dII} = 512$  kgf/cm<sup>2</sup>;  $\sigma_{dIII} = 720$  kgf/cm<sup>2</sup>.  
 1015: 1 MN/m<sup>2</sup>. 1016:  $\sim 12$  mm. 1017:  $\sim 1,74$ . 1018: 6,25 kN. 1019: es más  
 resistente el árbol de acero Cr. 5. 1020:  $\sigma_{-0,6} \approx 80$  kgf/mm<sup>2</sup>;  $\sigma_{0,6} \approx 80$  kgf/mm<sup>2</sup>.  
 1021:  $\sim 26$  kgf/mm<sup>2</sup>. 1022:  $\sim 1,38$ . 1023:  $\sim -0,5$ . 1024:  $\sim 7,8$  kgf/mm<sup>2</sup>.  
 1025:  $\sim 118$  kgf.m. 1026:  $\sim 1,3$ . 1027:  $\sim 9,2$  kN. 1028:  $\sim 1,47$ .

# I N D I C E

Introducción . . . . .	7
Notaciones fundamentales . . . . .	9
Unidades de medición . . . . .	13
Observaciones generales sobre las condiciones de los problemas . . . . .	14
<b>I. Tracción y compresión</b>	<b>15</b>
1. Esfuerzo axial . . . . .	15
2. Tensiones normales, alargamiento absoluto y energía potencial	17
3. Deformación transversal y variación del volumen . . . . .	20
4. Desplazamientos de los puntos de sistemas de barras articuladas	23
5. Resistencia y rigidez . . . . .	26
6. Consideración del peso propio . . . . .	30
7. Sistemas estáticamente indeterminados (hiperestáticos) . . . . .	34
<b>II. Estados tensionales e hipótesis de resistencia</b>	<b>46</b>
1. Estados tensionales lineal, plano y de volumen . . . . .	46
2. Hipótesis de resistencia y tensiones equivalentes . . . . .	54
<b>III. Recipientes de paredes delgadas</b>	<b>56</b>
<b>IV. Deslizamiento</b>	<b>63</b>
<b>V. Cálculo de las juntas más simples de los elementos de las construcciones</b>	<b>66</b>
<b>VI. Características geométricas de las figuras planas</b>	<b>70</b>
1. Areas y sus momentos estáticos . . . . .	70
2. Momentos de inercia del área de la figura . . . . .	72
<b>VII. Torsión</b>	<b>81</b>
1. Momento torsor . . . . .	81
2. Tensiones tangenciales, ángulo de torsión y energía potencial de la deformación elástica . . . . .	83
3. Resistencia y rigidez . . . . .	87
4. Problemas hiperestáticos . . . . .	94
<b>VIII. Flexión recta transversal</b>	<b>102</b>
1. Fuerza cortante y momento flector . . . . .	102
2. Tensiones normales y cálculo de la sección transversal de la viga	121
3. Tensiones tangenciales, centro de flexión y comprobación de la resistencia de las vigas por tensiones tangenciales . . . . .	132
4. Tensiones principales y comprobación de la resistencia de la viga	141
5. Fundamentos del cálculo de la resistencia de las vigas por capacidad resistente . . . . .	149
6. Desplazamientos en la flexión . . . . .	152
7. Vigas de sección variable . . . . .	169
8. Vigas hiperestáticas . . . . .	182
9. Energía potencial de la deformación elástica en la flexión	210
	503

<b>IX. Resistencia compuesta de una barra recta de gran rigidez</b>	<b>217</b>
1. Flexión desviada	217
2. Tracción o compresión y flexión combinadas	226
3. Tracción o compresión y torsión combinadas	243
4. Torsión y flexión simultáneas	245
5. Caso general de resistencia compuesta	258
6. Resortes helicoidales cilíndricos de tracción o compresión	266
<b>X. Flexión longitudinal (pandeo)</b>	<b>272</b>
1. Fuerza crítica y tensión crítica	272
2. Cálculo por estabilidad de barras comprimidas	276
3. Flexión longitudinal y transversal combinadas	289
<b>XI. Barras curvas planas</b>	<b>295</b>
1. Esfuerzo axial, fuerza cortante y momento flector	295
2. Tensiones	307
3. Cálculo por resistencia	312
<b>XII. Método energético de cálculo de sistemas elásticos</b>	<b>315</b>
1. Determinación de los desplazamientos elásticos generalizados	315
2. Cálculo de sistemas hiperestáticos	335
3. Cálculo de anillos planos de paredes delgadas	352
<b>XIII. Cálculo de tubos de paredes gruesas</b>	<b>377</b>
1. Tubo cilíndrico	377
2. Tubos cilíndricos compuestos	384
<b>XIV. Acción dinámica de las fuerzas</b>	<b>391</b>
1. Cálculo de sólidos (sistemas) en movimiento (considerando las fuerzas de inercia)	391
2. Oscilaciones elásticas	402
3. Impacto	425
<b>XV. Tensiones alternadas</b>	<b>444</b>
1. Factores principales que influyen sobre la resistencia del material a la fatiga	446
2. Cálculo de la resistencia en el caso de un estado tensional lineal y del deslizamiento puro (torsión)	450
3. Cálculo de la resistencia en el caso de un estado tensional complejo	456
Apéndice 1	464
Apéndice 2	465
Apéndice 3	478
Apéndice 4	479
Apéndice 5	480
Soluciones de los problemas	482