Problemas de MECANICA DE FLUIDOS E HIDRAULICA

OSCAR MIRANDA H.   DANTE CAMPOS A.

PROLOGO A LA PRIMERA EDICION

La escasez de material bibliográfico y sobre todo de aquello que traten de problemas resueltos de Mecánica de Fluídos é Hidraúlica, han servido de estímulo a los autores para realizar la compilación y resolución de dichos problemas, y hacer realidad el presente libro "PROBLEMAS DE MACANICA DE FLUIDOS E HIDRAULICA".

Esta obra consta de cinco capítulos, cada uno con teoría concisa seguida de problemas resueltos, los cuales han sido propuestos en EXAMENES y PRACTICAS de la UNI, en el curso de MECANICA DE FLUIDOS I - HH 223, y extraídos de importantes libros. La elaboración de las soluciones de cada uno de los problemas son una verdadera guía para el lector.

Luego del quinto capítulo, se han incluido problemas adicionales que abarcan todo el curso, y que al igual que todos los problemas incluidos en esta obra, son de buen grado de dificultad.

Se recomienda al lector que resuelva los problemas, y luego compare tanto resultados como procedimientos. Esto le servirá para asentar más sus conocimientos. Si se cumpliera lo último, los autores darán por satisfecha su labor.

Agradecemos a todas las personas que han colaborado para la existencia de este libro.. Un agradecimiento especial a los profesores de la UNI por sus enseñanzas vertidas en la materia, y en particular al Profesor Antonio Salvá, a quién felicitamos por su destacada labor en la Cátedra de Mecánica de Fluídos I.

Se agradecerán las críticas y sugerencias que se hagan llegara los autores con respecto al presente libro, el cual no es un ente perfecto, ya que se ha tenido que sortear una serie de limitaciones y dificultades en su elaboración, y así mejorar en próximas ediciones.

Los Autores.

Primera Edición - Diciembre de 1981
Segunda reimpresión - Junio de 1984
Tercera reimpresión - Diciembre de 1988
Segunda Edición - 1991
Tercera Edición - Julio del 2001
Reimpresión - Junio del 2003

Impreso en el Perú
Printed in Perú

PROLOGO A LA SEGUNDA EDICION

Repitiendo las palabras pronunciadas por el ex-Decano de nuestra Facultad Ing. Genaro Humala en la presentación de su libro Mecánica de Suelos I , en el Colegio de Ingenieros del Perú "Escribir un libro en nuestro país, es una tarea muy difícil". Pero la tarea de escribir un solucionario de problemas creo que es una tarea un poco más sencilla, por obvias razones, por ese motivo traté de reformar la totalidad del libro, escrito en 1981, sin haberlo logrado globalmente, pero si se incluye en esta Segunda edición problemas propuestos en el libro de Introducción a la Mecánica de Fluídos de los profesores Alan Mc Donald y Robert Fox que como Uds. conocen tiene una teoría muy sustanciosa y además es uno de los textos mas recientes en nuestro medio.

Agradeciendo a mis colegas por sus valiosas sugerencias y todas las personas que de algún modo colaboraron en la preparación y Edición de este texto, volvemos a presentar esta Segunda Edición preliminar, para que pueda servir de ayuda en la preparación de sus prácticas, tal y como era el objetivo de la Primera Edición.

UNI - FIC - 1991

Ing. CIP Dante Campos Arias
Ing. CIP Oscar Miranda Hospinal

La tercera reimpresión de 1988 fué auspiciada por CONCYTEC va nuestro agradecimiento en la persona del Ing. Carlos del Río Cabrera.

Los Autores.

PROLOGO A LA TERCERA EDICION

Luego de 20 años el proyecto de presentar Problemas resueltos de Mecánica de Fluídos, vemos con beneplácito que haya tenido un relativo éxito, dado que hasta la fecha el compendio, se mantiene vigente y tiene aceptación entre los estudiantes de ingeniería a nivel nacional.

Hoy Dante Campos ha culminado su Doctorado en Estructuras en la UNAM y viene laborando en el Instituto Mexicano del Petróleo y el coautor Oscar Miranda, ha culminado su Maestría en Gerencia de la Construcción en la UNFV y es profesor de la UNI.

Sin embargo se ha logrado en esta oportunidad dos pequeños objetivos, con el apoyo de los alumnos de la UNI, Christian Sánchez y Oscar Mamani, se ha logrado digitalizar la integridad del libro así como también se ha suprimido el anexo de problemas adicionales, poniendo estos en los capítulos correspondientes.

Finalmente, volvemos a invocar a la comunidad universitaria, a expresar sus sugerencias, haciéndonos notar errores involuntarios que pudieran subsistir, así como también sus comentarios, hoy más fácil a través de la magia del Internet, se adjunta los e-mail de los autores.

Dante Campos: dcampos@www.imp.mx
Oscar Miranda: miranda@uni.edu.pe

Lima, Junio 2001.

Los Autores.

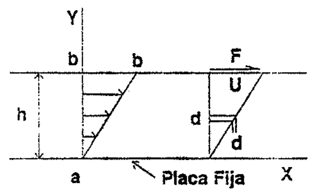
ÍNDICE

Dedicado a nuestros padres que siempre nos alentaron, a nuestras respectivas esposas que confian en nosotros y amamos a plenitud y a nuestros adorados hijos a quienes ofrecemos nuestros esfuerzos.

CAPÍTULO I

PROPIEDADES MECÁNICAS DE LOS FLUIDOS

Los fluidos son sustancias que se deforman continuamente cuando son sometidos a esfuerzos cortantes y que se adaptan a la forma de los recipientes que los contienen. La parte de fluido que está en inmediato contacto con una frontera sólida, adquiere la velocidad de dicha frontera.



Un fluido entre dos placas, una móvil y otra fija.
Además A y F son paralelos.

Se ha encontrado que:

$$F = \mu \cdot \frac{A \cdot U}{h}.$$

donde:

F: fuerza aplicada

μ: constante de proporcionalidad llamada "viscosidad absoluta o dinámica"

A: área sobre la que se aplica F,

U: velocidad máxima del fluido, igual a la de la placa movil,

H: distancia entre las dos placas.

Se sabe que $\tau = F / A$ = *esfuerzo cortante*, entonces se tiene:

$$\tau = \mu \cdot \frac{U}{h},$$

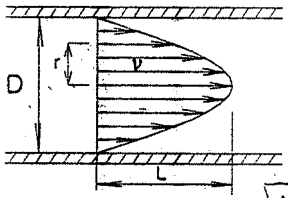
Y en forma diferencial $\boxed{\tau = \mu \cdot du/dy}$ *Ley de Newton de la viscosidad.*

El esfuerzo al corte es proporcional a la velocidad relativa de una molécula con respecto a otra e inversamente proporcional a la distancia que las separa.

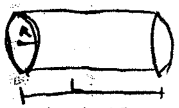
Cuando h es pequeño se asume que la distribución de velocidades es lineal.

PROBLEMAS

1.1. La figura representa una corriente de agua por una tubería circular, si la distribución de velocidades en una sección viene dada matemáticamente por:



$$v = \frac{b}{4\cdot\mu}\cdot\left(\frac{D^2}{4} - r^2\right)$$



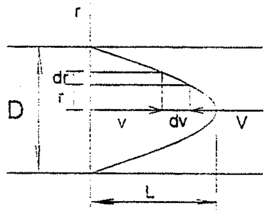
$A = 2\pi R\cdot L$

Calcular:

a) La tensión de corte en la pared de la tubería, y

b) La fuerza de arrastre en la pared del tubo a lo largo de una longitud *L*.

Resolución:



a) $$\tau = \mu\cdot\frac{dv}{dr} = \mu\cdot\frac{d}{dr}\left(\frac{b}{4\cdot\mu}\left(\frac{D^2}{4} - r^2\right)\right)$$

$$\tau = -\frac{1}{2}\cdot b\cdot r$$

En la pared , $r = \frac{D}{2}$ entonces

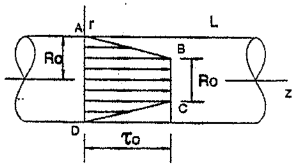
$$\tau = -\frac{b\cdot D}{4} \qquad \textit{Resp.}$$

b) $F = \tau\cdot A$, *A*: área lateral de un cilindro: $A = 2\cdot\pi\cdot\frac{D}{2}\cdot L$,

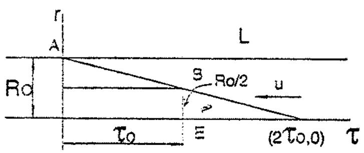
Luego:

$$F = -\frac{\pi}{4}\cdot b\cdot D^2\cdot L \qquad \textit{Resp.}$$

1.2. En la tubería mostrada determinar la ley de velocidades, y calcule la velocidad máxima.



Resolución:



TRAMO BE

Considerando una distribución de velocidades simétrica con respecto al eje Z, se tendrá que para $r = 0$, $u = 0$

Se observa que $\tau = \tau_o$ (una constante), lo que indica una distribución de velocidades lineal. Luego para este tramo:

$$\tau_0 = \mu\cdot\frac{du}{dr} \quad\Rightarrow\quad \frac{\tau_0}{\mu}\cdot dr = du$$

Y se obtiene:

$$\boxed{u_1 = \frac{\tau_0}{\mu}\cdot r}, \text{ para } 0 \le r \le \frac{R_0}{2}$$

Cuando $r = \frac{R_0}{2}$, $u_1 = u_2 = \frac{\tau_0\cdot R_0}{2\cdot\mu}$

TRAMO AB

Aquí se cumple que $\tau = -\frac{2\cdot\tau_0}{R_0}\cdot(r - R_0) = \mu\cdot\frac{du}{dr}$

Entonces: $$\int_{R_0/2}^{r} -\frac{2\cdot\tau_0}{R_0\cdot\mu}\cdot(r - R_0)\cdot dr = \int_{\frac{\tau_0\cdot R_0}{2\cdot\mu}}^{u} du$$

Por lo tanto, la distribución es: $$\boxed{u_2 = \frac{3}{4}\cdot\frac{\tau_0\cdot R_0}{\mu} - \frac{\tau_0}{\mu\cdot R_0}\cdot(r - R_0)^2}, \text{ para } \frac{R_0}{2} \le r \le R_0$$

VELOCIDAD MÁXIMA

La velocidad máxima sucede cuando el esfuerzo cortante es nulo, es decir cuando $r = Ro$, en consecuencia: $$\boxed{u_{max} = \frac{3\cdot\tau_0\cdot R_0}{4\cdot\mu}}$$

SISTEMA DE UNIDADES		MASA	ACELERACIÓN	FUERZA
C.G.S.	Absoluto	gm.	cm/s²	dina
	Gravitatorio	gf/(cm/s²)	cm/s²	gf.
M.K.S.	Absoluto	Kgm.	m/s²	Newton
	Gravitatorio	UTM	m/s²	Kfg.
F.P.S.	Absoluto	lbm.	pie/s²	poundal
	Gravitatorio	slug	pie/s²	lbf.

1 Kgf = 9.807 Newton = 2.205 lbf

1 slug = 32.174 lbm = 14.59 Kgm = 1.438 UTM.

1 HP = 76 Kgf.m / s

1 CV = 75 Kgf.m / s

1 atm = 14.7 lbf / pulg² = 76 cm de Hg = 10.33 m de agua.

DIMENSIONES FUNDAMENTALES Y DERIVADAS

Cantidad física	Dimensiones	
	Sistema MLT	Sistema FLT
Longitud	L	L
Tiempo	T	T
Masa	M	$FL^{-1}T^2$
Fuerza	MLT^{-2}	F
Velocidad	LT^{-1}	LT^{-1}
Aceleración	LT^{-2}	LT^{-2}
Cantidad de movimiento, impulso	MLT^{-1}	FT
Energía, trabajo	ML^2T^{-2}	FL
Potencia	ML^2T^{-3}	FLT^{-1}
Presión, esfuerzo	$ML^{-1}T^{-2}$	FL^{-2}
Viscosidad absoluta μ	$ML^{-1}T^{-1}$	$FL^{-2}T$
Viscosidad cinemática ν	L^2T^{-1}	L^2T^{-1}
Tensión superficial	MT^{-2}	FL^{-1}
Velocidad angular	T^{-1}	T^{-1}
Aceleración angular	T^{-2}	T^{-2}
Par motor	ML^2T^{-2}	FL
Momento de inercia	ML^2	FLT^2

VISCOSIDAD DINÁMICA (μ): $\mu = \dfrac{\tau}{\frac{dv}{dy}} = \dfrac{F \cdot L^{-2}}{\frac{L \cdot T^{-1}}{L}} = \left[F \cdot L^{-2} \cdot T\right] = \left[M \cdot L^{-1} \cdot T^{-1}\right]$

(a) Sistema M.K.S. - TÉCNICO: $\mu = \left[\dfrac{Kgf \cdot s}{m^2}\right] = \left[\dfrac{UTM}{m \cdot s}\right]$

(b) Sistema C.G.S. - ABSOLUTO: $\mu = \left[\dfrac{dina \cdot s}{cm^2}\right] = \left[\dfrac{gm}{m \cdot s}\right] = [poise]$

$$1 poise = 1\frac{dina \cdot s}{cm^2}; \quad 1 centipoise = 10^{-2} poises; \quad 1\frac{Kgf \cdot s}{m^2} = 98 poises$$

(c) Sistema INTERNACIONAL - S.I.: $\mu = \left[\dfrac{New \cdot s}{m^2}\right] = \left[\dfrac{1}{47.9} \cdot \dfrac{lbf \cdot s}{pie^2}\right]$

$$\frac{Newtons \cdot s}{m^2} \cdot \frac{lbf}{4.448\, Newtons} \cdot \frac{(0.3048)^2 m^2}{1 pie^2} = 0.02089 \frac{lbf \cdot s}{pie^2}$$

VISCOSIDAD CINEMÁTICA: $\nu = \dfrac{\mu}{\rho}$, $\nu = \left[L^2 \cdot T^{-1}\right]$

a) Sistema M.K.S.: $\nu = \left[\dfrac{m^2}{s}\right]$

b) Sistema C.G.S.: $\nu = \left[\dfrac{cm^2}{s}\right]$, $1\dfrac{cm^2}{s} = 1 stokes$

PROBLEMAS

1.3. Si $\mu = 0.045$ *poises*, y densidad relativa $\rho_{rel} = 0.75$, determinar:

a) μ en unidades técnicas,

b) ν en stokes, y

c) ν en unidades técnicas (M.K.S.).

Resolución:

a) Aplicando la regla de tres simple, se tiene

$1\ Kgf.s/m^2$ ---------- 98 poises

μ ---------- 0.045 poises

$\mu = 4.59 \times 10^{-4}\ Kgf.s/m^2$ *Resp.*

b) La densidad es: $P = 0.75\ gm/cm^3$

$\nu = \dfrac{\mu}{\rho} = \dfrac{0.045\, ^{gm}/_{cm}}{0.75\, ^{gm}/_{cm^3}} = 0.060 stokes$ *Resp.*

c) $1\ m^2/s$ ---------- 10^4 *stokes*

ν ---------- 0.06 *stokes*

obteniéndose $\nu = 6 \times 10^{-6}\ m^2/s$ *Resp.*

1.4. Un recipiente contiene 10 litros de agua a 4°C. Hallar su masa y su peso:

a) En la Tierra, en los sistemas

a.1 _ C.G.S. absoluto y gravitacional

a.2 _ M.K.S. absoluto (SI) y gravitacional (Técnico)

a.3 _ F.P.S. absoluto y gravitacional

b) En la Luna donde $g = 1.66\ m/s^2$, en los mismos sistemas anteriores.

Resolución:

Volumen $V = 10\ l = 10^{-2}\ m^3 = 10^4\ cm^3$.

A temperatura de 4 °C el peso específico del agua es $\gamma = 1\ g/cm^3 = 1000\ Kgf/m^3$

Se sabe que el peso es: $W = \gamma . V$, entonces $W = 10^4\ gf = 10\ Kgf$

Y la masa es: $M = \dfrac{W}{g}$, *entonces* $M = \dfrac{10}{9.8} UTM = 10 Kgm$

a) En la Tierra

(a.1) Sistema C.G.S. absoluto

$W = 10^4\ gm \times 980\ cm/s^2$

$W = 9.8 \times 10^6\ dinas$ *Resp.*

$M = 10^4\ gm$ *Resp.*

Sistema C.G.S. gravitacional

$W = 10^4\ gf$ *Resp.*

$M = 10.2\ gf.s^2/cm$ *Resp.*

(a.2) M.K.S. absoluto (S. INTERNACIONAL)

$W = 98\ newton$ *Resp.*

$M = 10\ Kgm$ *Resp.*

M.K.S. gravitacional (técnico)

$W = 10\ Kgf$ *Resp.*

$M = 1.02\ UTM$ *Resp.*

(a.3) F.P.S. absoluto

$W = 706\ poundal$ *Resp.*

$M = 22\ lbm$ *Resp.*

F.P.S. gravitacional

$W = 22\ lbf$ *Resp.*

$M = 0.69\ slug$ *Resp.*

b) En la Luna donde $g = 1.66\ m/s^2 = g = 166\ cm/s^2$,

(a.1) Sistema C.G.S. absoluto

$W = 10^4\ gm \times 166\ cm/s^2$

$W = 166 \times 10^4\ dinas$ *Resp.*

$M = 10^4\ gm$ *Resp.*

Sistema C.G.S. gravitacional

$W = 1693.2\ gf$ *Resp.*

$M = 10.2\ gf.s^2/cm$ *Resp.*

(a.2) M.K.S. absoluto (S. INTERNACIONAL)

$W = 16.6\ newton$ *Resp.*

$M = 10\ Kgm$ *Resp.*

M.K.S. gravitacional (técnico)

$W = 1.69\ Kgf$ *Resp.*

$M = 1.02\ UTM$ *Resp.*

(a.3) F.P.S. absoluto

$W = (22\ lbm)\cdot\dfrac{1.66}{s^2}\left(\dfrac{1}{0.3048}\cdot pie\right)$

$W = 119.82\ poundal$ *Resp.*

$M = 22\ lbm$ *Resp.*

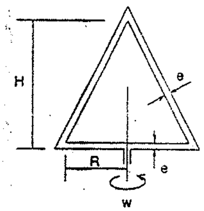
F.P.S. gravitacional

$W = 3.718\ lbf$ *Resp.*

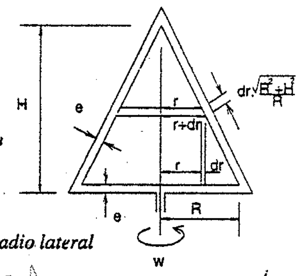
$W = 3.718\ lbf / 5.45\ pie/s^2$

$M = 0.682\ slug$ *Resp.*

1.5. Hallar μ del fluido contenido en el viscosímetro mostrado, si hay que aplicar una potencia P para mantenerlo girando a una velocidad angular uniforme ω dicho aparato es cónico y la distancia entre las



paredes y el fondo es e. La altura y radio interno son H y R respectivamente.



Resolución:

Datos: P, ω, H, R, y e; $\mu = ?$

La potencia es $P = T_T.\omega$,

Donde: T_T: torque total; $T_T = T_L + T_B$

Siendo: T_L: torque lateral

Y T_B: torque de la base

Por otro lado: *Torque = Fuerza de Arrastre x radio lateral*

Además e es pequeño $\Rightarrow$ $\tau = \mu\cdot\dfrac{\varpi\cdot r}{e}$,

y. $dF = \tau\cdot dA$, $dT = r\cdot dF \Rightarrow dT = r\cdot\tau\cdot dA$

a) Cálculo del torque lateral

Por esta parte del cono $dA = 2\pi\cdot r\cdot dr\cdot\dfrac{\sqrt{R^2+H^2}}{R}$ (*por Pappus*)

$$\Rightarrow \int_0^{T_L} dT_L = \mu\cdot\frac{2\pi\cdot\omega}{e}\cdot\frac{\sqrt{R^2+H^2}}{R}\cdot\int_0^R r^3 dr ,$$

Y se obtiene: $T_L = \dfrac{1}{2e}\cdot\mu\cdot\pi\cdot\omega\cdot R^3\cdot\sqrt{R^2+H^2}$

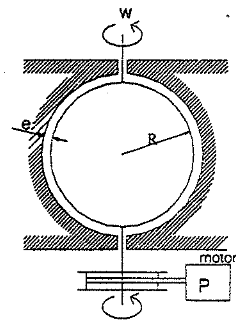
b) Cálculo del torque de la base

Aquí: $dA = 2\pi.r.dr \Rightarrow T_B = \dfrac{2\pi}{e}\cdot\mu\cdot\omega\cdot\int r^3 dr = \dfrac{1}{2e}\cdot\mu\cdot\pi\cdot\omega\cdot R^4$

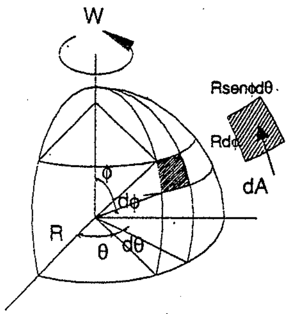
c) Cálculo de μ : $P = (T_L + T_B)\cdot\omega = \dfrac{1}{2e}\cdot\mu\cdot\pi\cdot\omega^2\cdot R^3\cdot\left(\sqrt{R^2+H^2}+R\right)$,

Finalmente: $\mu = \dfrac{2\cdot e\cdot P}{\pi\cdot\omega^2\cdot R^3\cdot\left(\sqrt{R^2+H^2}+R\right)}$ *Resp.*

1.6. Un viscosímetro esférico de radio interno R, necesita cierta potencia P para que la esfera interna gire con una velocidad angular ω y vencer así la resistencia del fluido de viscosidad μ. Hallar dicha potencia.



Resolución:



De la figura: $dA = R^2.sen\phi.d\theta.d\phi$

Además: $\tau = \mu\cdot\frac{\omega\cdot R\cdot sen\phi}{e}$

$dT = R\cdot sen\phi\cdot dF$ y $dF = \tau\cdot dA$

Luego: $dT = R.sen\phi.\tau.dA$

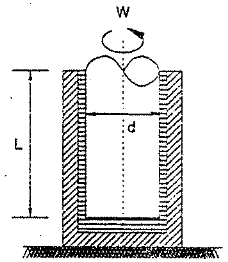
$$\Rightarrow \int_0^T dT = \frac{\mu\cdot\omega\cdot R^4}{e}\cdot\int_0^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} sen^3\phi\cdot d\phi\cdot d\theta$$

Y se obtiene: $T = \frac{8}{3\cdot e}\cdot\mu\cdot\omega\cdot R^4\cdot\pi$,

Como $P = T.\omega$, la potencia es:

$$P = \frac{8}{3\cdot e}\cdot\mu\cdot\omega^2\cdot R^4\cdot\pi \qquad Resp.$$

1.7. En un recipiente cilíndrico con líquido viscoso gira un vástago de diámetro ***d*** y longitud ***L*** coaxial con el recipiente. Para la rotación a la velocidad angular ***ω*** se consume una potencia ***P***.
Suponiendo que en el espacio libre de magnitud ***e*** entre el vástago y la pared del recipiente la velocidad va distribuida según la ley lineal y despreciando el rozamiento en el extremo del vástago, determinar el coeficiente de viscosidad del líquido.



Resolución:

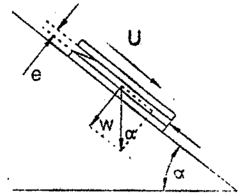
La potencia está ligada con la tensión tangente τ en la superficie del vástago por la fórmula: $P = (\tau\cdot L\cdot\pi\cdot d)\cdot\frac{d}{2}\cdot\omega$ Como: $\tau = \mu\cdot\frac{\omega\cdot\frac{d}{2}}{e}$

En consecuencia: $\mu = \frac{4\cdot e\cdot P}{\omega^2\cdot L\cdot\pi\cdot d^3}$ *Resp.*

1.8. Dos láminas rectangulares de 1.50 x 1.20 *m*, están separadas por una película de aceite de 0.6 *cm* de espesor. Cuando las láminas están inclinadas un cierto ángulo α con la horizontal (estando la lámina inferior fija), la lámina superior cuyo peso es de 10 *Kg* se desliza sobre la inferior a la velocidad de 0.2 m/s.
Si la viscosidad del aceite es de 14.2 *poises*, ¿Cuál es el valor del ángulo de inclinación?

$\frac{m}{s^2}$ W = m·g Kg·N

Resolución:



La fuerza que produce el movimiento es la componente del peso $F_1 = W.sen\alpha$, y la que se opone es $F_2 = \mu\cdot A\cdot\frac{U}{e}$ debido a la viscosidad del fluido.

Como no hay aceleración $F_1 = F_2$

Obteniéndose $sen\alpha = \frac{\mu\cdot A\cdot U}{e\cdot W}$.

$W = 10\ Kg = 9.8\text{x}10^6\ dinas$ reemplazando valores

$e = 0.6\ cm$, $U = 20\ cm/s$ $sen\ \alpha = 0.8694$ => $\alpha = 60°\ 24'$

$\mu = 14.2\ poises$, $A = 1.8\ \text{x}\ 10^4\ cm^2$

1.9. Determinar las dimensiones de ϕ en la expresión: $\bar{V}\left(\bar{V}\cdot\nabla\right) = \frac{1}{\rho}\nabla p - \nabla\phi$

Resolución:

Las dimensiones respectivas son: $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} = L^{-1}$; $V = LT^{-1}$; $\rho = ML^{-3}$; $p = ML^{-1}T^{-2}$

Reemplazando: $(LT^{-1})((LT^{-1})L^{-1}) = \frac{1}{ML^{-3}}L^{-1}(ML^{-1}T^{-2}) - L^{-1}\phi$

Finalmente: $LT^{-2} = LT^{-2} - L^{-1}\phi$ $\Rightarrow$ $\phi = (L^2T^{-2})$ *Resp.*

1.10. Determine las dimensiones de ϕ a partir de las siguientes relaciones:

$$\Pi = \frac{P}{\rho\cdot N^3\cdot D^5} \;..........(1) \qquad \frac{dp}{p} = -k\cdot\Pi\cdot\phi\cdot\left(\frac{dV}{V} + f\cdot\frac{dL}{D}\right) \;.........(2)$$

Donde ***P***: potencia, ***ρ***: densidad, ***N***: revoluciones por minuto, ***D***: diámetro, ***p***: presión, ***V***: velocidad, ***L***: longitud, ***k*** y ***f*** son coeficientes adimensionales.

Resolución:

Determinación de las dimensiones de Π en (1)

Como: $P = ML^2T^{-3}$

$\rho = ML^{-3}$

$N = T^{-1}$

$D = L$,entonces $\Pi = [M^0L^0T^0] = [1]$

Además $\frac{dp}{p}$, $\frac{dV}{V}$, $\frac{dL}{D}$, son adimensionales $\Pi\phi = L^0M^0T^0 = [1]$

$\Rightarrow \boxed{\phi = [1]}$ *Resp.*

(adimensional)

GASES PERFECTOS

Un fluido ideal tiene viscosidad nula, mientras que un gas perfecto posee viscosidad no nula.

Un gas real se aproxima al comportamiento de un gas perfecto a temperatura altas y a baja presión, sin embargo se usan para los cálculos.

La ecuación para los gases perfectos es:

$P = \rho.R.T$ ....(1)

Si $\alpha = \dfrac{1}{\rho}$, el volumen que ocupan X unidades de masa es $V = X.\alpha$, y $\alpha = \dfrac{V}{X}$

α en (1) $\quad P.\alpha = R.T \quad$ luego $\quad P.V = X.R.T$

Como X = *número de moles x peso molecular* $= n.M$

$$P.V = n.M.R.T$$

Ley de Avogadro: *"A volúmenes iguales, presiones iguales y temperaturas iguales, el número de moles es el mismo para gases distintos".*

$$\frac{P \cdot V}{n \cdot T} = M \cdot R = constante$$

$$R = \frac{848}{M} \cdot \frac{Kgf \cdot m}{Kgm \cdot {}^\circ K}$$

$$R = \frac{848}{M} \cdot \frac{Kgf \cdot m}{UTM \cdot {}^\circ K} \times 9.8$$

	M
Aire	*29*
CO	*28*
He	*4*
Oxígeno	*32*
Vapor de agua	*18*

Módulo de Elasticidad y Compresibilidad

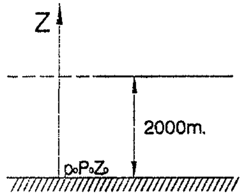
Módulo de compresibilidad $\quad k = -\dfrac{1}{V} \cdot \dfrac{\Delta V}{\Delta P}$ (a temperatura constante)

Módulo de la elasticidad $\quad \varepsilon = \dfrac{1}{k} = -V \cdot \dfrac{\Delta P}{\Delta V}$

PROBLEMAS

1.11. Hallar la presión atmosférica a 2000 m de altura, sabiendo que la gravedad es constante e igualmente la temperatura (isotérmico). $P = 1013\ mb = 1.29\ Kg / m^3$. (Ex. Parcial).

Resolución:



Para un gas perfecto : $\dfrac{P}{\rho} = R$

Como $T = Cte.$, se tiene

$$\frac{P}{\rho} = \frac{P_0}{\rho_0}$$

$$\rho = \frac{\rho_0}{P_0} \cdot P \quad \text{......................(1)}$$

Además $dP = -\rho.g.dz$ ....(2)

Reemplazando (1) en (2) e integrando:

$$dP = -\left(\frac{\rho_0}{P_0} \cdot P\right) \cdot g \cdot dz \qquad \Rightarrow \qquad \int_{z_0}^{z} dz = -\frac{P_0}{\rho_0 \cdot g} \cdot \int_{P_0}^{P} \frac{dP}{P}$$

Entonces $P = P_0 \cdot \exp\left(-\dfrac{\rho_0 \cdot g \cdot (z - z_0)}{P_0}\right)$

Se conocen: $\rho_0 = 0.00129\ g/cm^3$, $g = 980\ cm/s^2$, $P_0 = 1013x10^3\ dinas/cm$

y $z - z_0 = 200000\ cm$.

Luego de reemplazar datos: $\quad P = 1013\ e^{-0.25}$

Finalmente $\quad P = 789.2\ mb \qquad$ *Resp.*

1.12. Calcular el módulo de compresibilidad un gas perfecto isotérmico. (1° práctica)

Resolución:

El módulo de compresibilidad es: $\quad k = -\dfrac{1}{V} \cdot \dfrac{dV}{dP}$ ....(1)

Para un gas perfecto isotérmico $\quad P = C \cdot \rho$ ....(2)

donde $\quad C = R \cdot T = constante$

$\Rightarrow \quad dP = C \cdot d\rho$ ....(3)

Y por definición: $\rho = \dfrac{m}{V} \quad$ ó $\quad V = \dfrac{m}{\rho}$ ....(4)

Si hay un incremento de presión dP, la variación del volumen será:

De (2): $\quad dV = -m \cdot \rho^{-2} \cdot d\rho$ ....(5)

Reemplazando las ecuaciones (3), (4) y (5) en (1): $k = -\dfrac{1}{\left(\dfrac{m}{\rho}\right)}\cdot\dfrac{\left(-m\cdot\rho^{-2}\cdot d\rho\right)}{C\cdot d\rho}$

Queda $k=\dfrac{1}{C\cdot\rho}$, y observando la ecuación (2): $k=\dfrac{1}{\rho}$ ....*Resp.*

1.13. Calcular el módulo de compresibilidad para un gas perfecto adiabático.

Resolución:

En todo proceso adiabático se cumple: $\dfrac{P}{\rho^k}=C$ (*constante*)

$\Rightarrow\ P=\rho^k\cdot C$, derivando $dP=C\cdot k\cdot\rho^{k-1}\cdot d\rho$ ....(1)

Además $V=m\cdot\rho^{-1}\ \Rightarrow\ dV=-m\cdot\rho^{-2}\cdot d\rho$ ....(2)

El módulo de compresibilidad es $K=-\dfrac{1}{V}\cdot\dfrac{dV}{dP}\ \Rightarrow\ K=\dfrac{1}{k\cdot P}$ ....*Resp.*

1.14. Si asumimos que un gas perfecto puede expresar el comportamiento del aire, determinar la presión P para la altura z. Si para $z_0=0$ se registra P_0. Considerar además que la temperatura varía según $T=T_0(1+m.z)$. (Práct.)

Resolución:

$P=\rho\cdot R\cdot T=\rho\cdot R\cdot T_o\cdot(1+m\cdot z)\ \Rightarrow\ \rho=\dfrac{P}{R\cdot T_0\cdot(1+m\cdot z)}$

Como: $dP=-\rho\cdot g\cdot dz$

$\Rightarrow\ dP=-\dfrac{P}{R\cdot T_0\cdot(1+m\cdot z)}\cdot g\cdot dz\ \Rightarrow\ \int_{P_0}^{P}\dfrac{dP}{P}=-\dfrac{g}{R\cdot T_0}\cdot\int_{z_0}^{z}\dfrac{dz}{(1+m\cdot z)}$

$\Rightarrow\ \ln\dfrac{P}{P_0}=-\dfrac{g}{m\cdot R\cdot T_0}\cdot\ln\dfrac{1+m\cdot z}{1+m\cdot z_0}\quad z_0=0\ ..\Rightarrow\ P=P_0\cdot(1+m\cdot z)^{-\frac{g}{m\cdot R\cdot T_0}}$ *Resp.*

1.15. Para una atmósfera donde $\dfrac{P}{\rho^2}=Cte$ deducir la expresión que da la presión a una altura $z=H$, sabiendo que para $z=0$, $\rho=\rho_0$ y $P=P_0$. (Ex parcial).

Resolución:

$\dfrac{P}{\rho^2}=\dfrac{P_0}{\rho_0^{\,2}}\ \Rightarrow\ \rho=\rho_0\cdot\sqrt{\dfrac{P}{P_0}}$ ....(1)

Por otro lado: $dP=-\rho\cdot g\cdot dz$ ....(2)

(1)en (2): $dP=-\rho_0\cdot\sqrt{\dfrac{P}{P_0}}\cdot g\cdot dz\ \Rightarrow\ \sqrt{\dfrac{P_0}{P}}\cdot dP=-\rho_0\cdot g\cdot dz$ ...(3)

Integrando (3): $2\cdot\sqrt{P_0\cdot P}-2\cdot P_0=-\rho_0\cdot g\cdot H$

Finalmente: $P=P_0\cdot\left(1-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\rho_0}{P_0}\cdot g\cdot H\right)^2$ *Resp.*

1.16. A que presión debe ser almacenado el CO_2 a 30 °C de manera que se enfríe adiabáticamente hasta - 40 °C y a una presión de 1 *bar*, siendo $k=1.28$.

Resolución:

$P_1=?$, $P_2=1\ bar$

$T_1=30+273=303\ °K$

$T_2=-40+273=203\ °K$

$k=1.28$

Por ser proceso adiabático: $\dfrac{P_1}{P_2}=\left(\dfrac{\rho}{\rho_2}\right)^k$ ....(1)

Para gases perfectos: $\dfrac{P_1}{P_2}=\dfrac{\rho_1\cdot R\cdot T_1}{\rho_2\cdot R\cdot T_2}$

$\Rightarrow\ \dfrac{\rho_1}{\rho_2}=\dfrac{P_1\cdot T_2}{P_2\cdot T_1}$ ....(2)

(2) en (1): $\Rightarrow\ P_1=P_2\cdot\left(\dfrac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{K}{1-K}}$, *luego*: $P_1=3.32\ bar$ *Resp.*

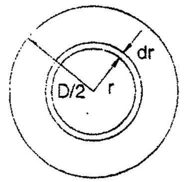
1.17. ¿Qué resistencia se produce cuando se mueve aceite que tiene una viscosidad de $24.4\times10^{-4}\ Kgf\text{-}s/m^2$, a través de una tubería de 75 *mm* de diámetro y que tiene una longitud de 30 *m* a una velocidad media de 0.06 *m/s* ?

El peso específico del aceite es de 801 Kgf/m^3.

$$v=-\frac{\beta}{4\cdot\mu}\cdot\left(\frac{D^2}{4}-r^2\right)\ ,\ donde\quad \beta=-\frac{128\cdot Q\cdot\mu}{\pi\cdot D^4}$$

Resolución:

$\tau=\mu\cdot\dfrac{dv}{dr}$ ....(1)



$v=-\dfrac{\beta}{4\cdot\mu}\cdot\left(\dfrac{D^2}{4}-r^2\right)\ \Rightarrow\ \dfrac{dv}{dr}=\dfrac{2\cdot\beta\cdot r}{4\cdot\mu}=-\dfrac{128\cdot Q\cdot\mu}{2\cdot\pi\cdot D^4}\cdot\left(\dfrac{r}{\mu}\right)$

$Q=v_m\cdot\dfrac{\pi\cdot D^2}{4}\ \Rightarrow\ \dfrac{dv}{dr}=-\dfrac{128}{8\cdot D^2}\cdot v_m\cdot r$ ....(2)

(2) en (1): $\tau=\mu\cdot\left(-\dfrac{128}{8}\cdot\dfrac{v_m\cdot r}{D^2}\right)$

Para $r=\dfrac{D}{2}$: $\tau=-\dfrac{128\,v_m}{16\,D}\ \Rightarrow\ F=\tau\pi\,D\,L=-\dfrac{128\,v_m}{16\,D}(\pi\,D)(L)$

$$\boxed{F=-\frac{128\,\mu\pi\,v_m\,L}{16}}$$

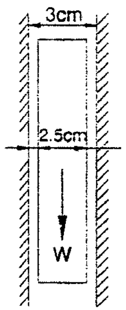
$$\mu = \frac{24.4}{10^4}\, Kgf \cdot s/m^2 \quad , \quad v_m = 0.06 m/s \quad , \quad L = 30m$$

$$\therefore \boxed{F = -0.110 Kgf} \qquad Resp.$$

El signo (-) indica la oposición al flujo.

1.18. Una varilla cilíndrica de 2.5 *cm* de diámetro y 1 *m* de largo es dejada caer dentro de un tubo de 3 *cm* de diámetro interior conteniendo aceite de viscosidad igual a 2 *poises*. Se pregunta con que velocidad resbalará la varilla. La variación de la velocidad de la masa líquida puede considerarse lineal. Densidad relativa del metal de la varilla: 7.0 , ver figura:

Resolución:



El esfuerzo cortante es: $\tau = \mu \cdot \dfrac{dv}{dx}$

Y como la distribución de velocidades es lineal:

$$\tau = \mu \cdot \frac{v}{e} \quad \Rightarrow \quad v = \tau \cdot \frac{e}{\mu} \quad \text{.............................(1)}$$

Donde: $e = \dfrac{3-2.5}{2} = 0.25cm$ ....(2)

$$\text{y} \quad \tau = \frac{Peso\ del\ cuerpo}{\acute{A}rea\ lateral\ del\ cilindro} = \frac{\frac{\pi \cdot (2.5)^2}{4} \cdot (100)(7)(980)}{2.5 \cdot \pi \cdot 100}$$

$$\tau = 4287.5 \frac{dinas}{cm^2} \quad \text{.............................(3)}$$

Reemplazando (2) y (3) en (1), además $\mu = 2\ poises$:

$$v = 4287.5\left(\frac{0.25}{2}\right) \Rightarrow \boxed{v = 536 cm/s}$$

1.19. Hallar la presión a que está sometido un gas, que tiene una masa de 0.70 *Kg.m*; ocupa un volumen de 30 *litros*, su peso molecular es 2.02, y está sometido a una temperatura de - 40 °C.

Resolución:

$$P = \rho \cdot R \cdot T \quad \text{.............................(1)}$$

$$R = \frac{848}{M} \cdot \frac{Kgf \cdot m}{Kgm \cdot °K} = \frac{848}{2.02} = 419.3 \frac{Kgf \cdot m}{Kgm \cdot °K} \ ; \ \rho = \frac{0.7 Kgm}{30 \cdot 10^{-3} m^3} = 23.3 \frac{Kgm}{m^3} \ ; \ T = 233°K$$

Reemplazando R y ρ en (1): $\boxed{p = 2.28 * 10^6 \frac{Kgf}{m^3}}$

PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS

1. Si la variación de entropía (s) se puede escribir así:

$$ds = \frac{1}{T} \cdot \left(dh - \frac{1}{\rho} dP\right)$$

Donde: Temperatura absoluta; h = *entropía específica: d = densidad; y P = presión.*

Demostrar que:

$$s_2 - s_1 = C_P \cdot Ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - R \cdot Ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right)$$

Haciendo la consideración de que el gas es perfecto.

Resolución:

$$ds = \frac{1}{T} \cdot \left(dh - \frac{1}{\rho} \cdot dP\right)$$

$$ds = \frac{dh}{T} - \frac{dP}{\rho \cdot T}$$

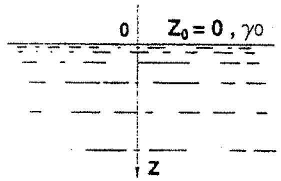
$dh = C_P.dt$, y por ser gas perfecto: $\dfrac{1}{\rho \cdot T} = \dfrac{R}{P}$

Entonces: $ds = C_P \cdot \dfrac{dT}{T} - R \cdot \dfrac{dP}{P}$

Integrando se tiene: $\displaystyle\int_{s_1}^{s_2} ds = C_P \cdot \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} - R \cdot \int_{P_1}^{P_2} \frac{dP}{P}$

$$\boxed{s_2 - s_1 = C_P \cdot Ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - R \cdot Ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right)}$$

2. Si K es el coeficiente de elasticidad de un líquido de peso específico en $z = 0$, mostrar que:



$$\gamma = \frac{K}{\left(\frac{K}{\gamma_0} - z\right)}$$

Resolución:

Módulo de elasticidad es: $K=-V\cdot\dfrac{dP}{dV}$ ....(1)

Se sabe: $\rho=\dfrac{m}{V} \quad\Rightarrow\quad V=m\cdot\rho^{-1}$ ....(2)

$dV=-m\cdot\rho^{-2}\cdot d\rho$ ....(3)

(*la masa es la misma*)

(2) y (3) en (1):

$$K=-(m\cdot\rho^{-1})\cdot\frac{dP}{-m\cdot\rho^{-2}\cdot d\rho}$$

$$K=\frac{dP}{\dfrac{d\rho}{\rho}}$$

$$dP=\frac{d\rho}{\rho}\cdot K\ ,\quad dP=\gamma\cdot dz\ ,\quad g\cdot d\rho=d\gamma\ ,\quad g\cdot\rho=\gamma$$

$$\Rightarrow\quad \gamma\cdot dz=\frac{d\gamma}{\gamma}\cdot K$$

$$dz=\frac{d\gamma}{\gamma^2}\cdot K$$

$$\therefore\quad \int_{z_0=0}^{z} dz=K\cdot\int_{\gamma_0}^{\gamma}\gamma^{-2}\cdot d\gamma$$

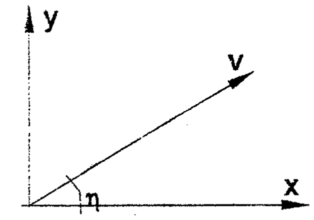
$$z=K\cdot\left(\frac{1}{\gamma_0}-\frac{1}{\gamma}\right),$$

finalmente:

$$\boxed{\gamma=\frac{K}{\left(\dfrac{K}{\gamma_0}-z\right)}}$$

3. Si se dispara un proyectil con una velocidad inicial. $\bar{V}_0$ y con un ángulo de elevación "θ" sobre la horizontal y se desprecia la resistencia ofrecida por el aire, exprese el alcance del proyectil en función de V_0 y θ; determine además el ángulo que permite el máximo alcance.

Resolución:



$\bar{V}=V_0\cdot\cos\theta\ \hat{i}+V_0\cdot sen\theta\ \hat{j}$

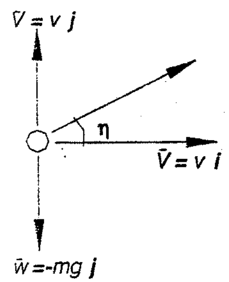
Nos piden determinar el alcance del proyectil $f(V_0, \theta)$ y θ que permite el alcance máximo.

Ecuaciones Básicas: $\sum\bar{F}=m\,\bar{a}$

$$\sum F_x=m\cdot a_x\ ;\quad a_x=\frac{d^2x}{dt^2}\ ;\quad v=\frac{dx}{dt}$$

$$\sum F_y=m\cdot a_y\ ;\quad a_y=\frac{d^2y}{dt^2}\ ;\quad v=\frac{dy}{dt}$$

$$\Rightarrow\quad \sum\bar{F}=m\,\bar{a}_x+m\,\bar{a}_y$$



Dibujando un diagrama de cuerpo libre

El alcance del proyectil será:

$x=u\cdot t=V_0\cdot\cos\theta\cdot t$ ....(1)

Y el tiempo t, es el tiempo que necesita el proyectil para alcanzar la altura máxima y retornar al mismo nivel o lo que es lo mismo el doble tiempo para alcanzar la altura máxima.

De acuerdo al diagrama: $\sum F_y=m\cdot a_y$

$$-W=-m\cdot g=m\cdot a_y=m\cdot\frac{d^2y}{dt^2}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=-g$$

Integrando sucesivamente dos veces y variando el tiempo entre 0 y t, tenemos:

$$\frac{dy}{dt}=v_0-g\cdot t$$

$$y=v_0\cdot t-\frac{1}{2}\cdot g\cdot t^2$$

$$altura\ máxima:\ v=\frac{dy}{dt}=0$$

$$\frac{dy}{dt} = v_0 - g \cdot t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{v_0}{g}$$

$$tiempo\ de\ alcance:\ 2 \cdot t = \frac{2 \cdot v_0}{g} = \frac{2 \cdot V_0 \cdot sen\theta}{g}$$

Cálculo de alcance reemplazando en (1)

$$x = V_0 \cdot \cos\theta \cdot \left(\frac{2 \cdot V_0 \cdot sen\theta}{g} \right) = \frac{2 \cdot V_0^2 \cdot \cos\theta \cdot sen\theta}{g}$$

$$x = \frac{V_0^2}{g} \cdot sen2\theta$$

$$\frac{dx}{d\theta} = 0 = 2 \cdot \cos 2\theta \quad \Rightarrow \quad 2\theta = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta = \frac{\pi}{4}}$$

4. Un campo de velocidades está dado por:

$$\overline{V} = a\,y\,\hat{i} + b\,x\,\hat{j} + c\,\hat{k}$$

Donde: $a = 2s^{-1}$; $b = 1s^{-1}$ y $c = 2\ m/s$

Determine el número de dimensiones del campo de flujo. ¿Es estacionario?. Determine la pendiente en el plano xy, de la línea de corriente que pasa a través del punto *(1, 2, 0)*

Resolución:

$$\overline{V} = a\,y\,\hat{i} + b\,x\,\hat{j} + c\,\hat{k}$$

$$a = 2s^{-1}\ ;\ b = 1s^{-1}\ \ y\ \ c = 2\ m/s$$

Nos piden determinar:

(a) Número de dimensiones del campo de flujo, y determinar si es estacionario.

(b) Componentes de la velocidad u, v, w en el pto. *(1, 2, 0).*

(c) Pendiente de la línea de corriente en el plano xy en el pto. *(1, 2, 0)*

(a) Tiene dos variables x, y; esto implica que el flujo es bidimensional, el flujo es estacionario ya que en la expresión indica que no depende de la variación del tiempo.

(b) El campo de velocidades:

$$\overline{V} = u\,\hat{i} + v\,\hat{j} + w\,\hat{k} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{V} = a\,y\,\hat{i} + b\,x\,\hat{j} + c\,\hat{k}$$

$$\therefore \quad u = a\ y \quad ; \quad v = b\ z \quad ; \quad w = c$$

$$punto: (1,2,0)$$

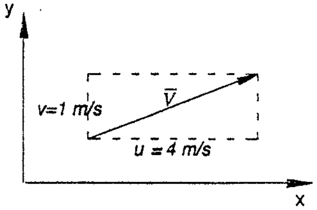
$$u = 2s^{-1} \cdot 2m = 4\ m/s$$

$$v = 1s^{-1} \cdot 1m = 1\ m/s$$

$$w = 2\ m/s$$

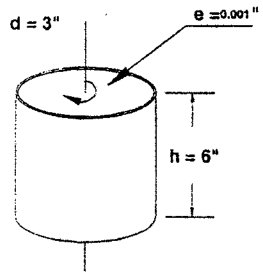
Las líneas de corriente son curvas trazadas en el campo de flujo de tal manera, para un instante dado, resultan tangentes a la dirección del flujo en cada punto. Por lo tanto la pendiente de la línea de corriente que pasa por el punto *(1, 2, 0)* (en el plano xy) es tal que la curva resulta en el punto.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} = \frac{1}{4}$$



5. Se puede construir un viscosímetro mediante dos cilindros concéntricos muy ajustados, haciendo girar el cilindro interior. La separación entre cilindros debe ser muy pequeña con el objeto de lograr un perfil de velocidad lineal.. Considérese un viscosímetro de esta naturaleza con el cilindro interior de *3"* de diámetro y *6"* de altura; supóngase que el espacio entre cilindros, de *0.001"*, está lleno de aceite de ricino a *90°F.* Determine el momento de torsión necesario para hacer girar el cilindro interior a *250 r.p.m*

Resolución:



Para el aceite de ricino:

$$\mu = 0.50 \frac{N-s}{m^2}$$

$$h = 6"\ ;\quad d = 3"\ ;\quad e = 0.001"$$

$$\omega = 250 r.p.m. = \frac{250 * 2\pi * \left(3/2\right) s^{-1}}{60}$$

$$\omega = 39.27 s^{-1}$$

Torque = Momento = Fuerzas de Arrastre x Radio Lateral

(a) Calculando Torque Lateral.

Sabemos: $$\tau = \mu \cdot \frac{\omega \cdot r}{e}$$

Por otro lado: $$dF = \tau\, dA$$
$$dT_L = r\, dF = r\tau\, dA$$
$$dT_L = r\,\mu \frac{\omega\, r}{e}(2\pi\, r\, dh)$$

Integrando: $$T_L = \frac{2\pi\,\mu\,\omega\, r^3}{e} h$$

(b) Calculando el Torque en la base.

$$dA = 2\pi\, r\, dr$$
$$dT_B = r\,\mu \frac{\omega\, r}{e} 2\pi\, r\, dr$$

Integrando: $$T_B = \frac{2\pi\,\mu\,\omega}{e}\int_0^r r^3 dr = \frac{2\pi\,\mu\,\omega}{e}\left(\frac{r^4}{4}\right)$$
$$T_B = \frac{1}{2e}\mu\,\pi\,\omega\, r^4$$

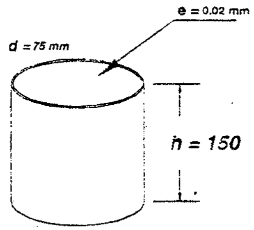
Dado que existen dos bases:

$$2T_B = \frac{1}{e}\mu\,\pi\,\omega\, r^4$$
$$T_{total} = T_L + 2T_B = \frac{2\pi\,\mu\,\omega\, r^3 h}{e} + \frac{1}{e}\mu\,\pi\,\omega\, r^4$$
$$T_{total} = \frac{2*3.14*0.6}{0.001*\frac{1}{12}}*39.27*\left(\frac{1.5}{12}\right)^3 + \frac{12}{0.001}*0.50*3.14*39.27*\left(\frac{1.5}{12}\right)^4$$
$$T_{total} = 2890\, lb\cdot pie + 180.7\, lb\cdot pie$$
$$\boxed{T_{total} = 3070.7\, lb\cdot pie}$$

6. Se puede construir un viscosímetro mediante dos cilindros concéntricos muy ajustados haciendo girar el cilindro externo. Si la holgura entre los dos cilindros debe ser muy pequeña se puede suponer que el perfil de velocidades de líquidos con que se llene dicho espacio es lineal. Un viscosímetro de este tipo tiene un cilindro interior de

75 mm de diámetro y *150 mm* de altura, con un espacio entre cilindros de *0.02 mm*. Se requiere un momento de torsión de *0.021 N.m.* para girar el cilindro externo a *100 rpm*. Determine la viscosidad del líquido que se encuentra en el espacio entre cilindros.

Resolución:



Nos piden μ

$$T = 0.021 N\cdot m$$
$$\omega = 100\, r.p.m. = 100*2*\pi = \frac{100*2*3.14}{60}$$
$$\omega = 10.47\, s^{-1}$$
$$T = \frac{2\pi\,\mu\,\omega\, r^3 h}{e} + \frac{1}{e}\pi\,\mu\,\omega\, r^4$$

Reemplazando datos:

$$0.021 = \frac{2*3.14*10.47*\left(\frac{75}{2}*10^{-3}\right)^3*\left(150*10^{-3}\right)}{0.02*10^{-3}}\mu + \frac{3.14*10.14*\left(\frac{75}{2}*10^{-3}\right)^4}{0.02*10^{-3}}$$

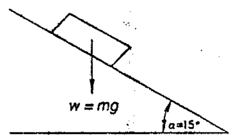
$$0.021 = 26.0\mu + 3.15\mu$$

Si no tenemos en cuenta el momento de las bases:

$$\boxed{\mu = 8.08*10^{-4}\, \tfrac{N\cdot s}{m^2}}$$

7. Un bloque de *10 lbf.* y que tiene *10 pulg.* en cada uno de sus lados, se empuja hacia arriba sobre una superficie inclinada sobre la cual existe una película de aceite *SAE-10* a *100°F*. Si la velocidad del bloque es *5 pies/s.* y la película de aceite tiene *0.001 pulg.* de espesor. Determine la fuerza necesaria para empujar al bloque. Supóngase que la distribución de velocidades en la película de aceite es lineal, y que la superficie se encuentra inclinada un ángulo *15°* respecto a la horizontal.

Resolución:



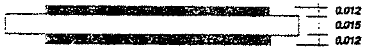
$$100°F \equiv 37.8°C$$
En tablas:
$$\mu = 0.2\, \tfrac{N\cdot s}{m^2} = 0.00418\, \tfrac{lb\cdot s}{pie^2}$$
$$\sum F = m\cdot a$$

$$F_1 = m \cdot g \cdot sen\alpha = 10 lbf \cdot sen15° = 2.59 lbf$$

$$F_2 = \mu \cdot A \cdot \frac{v}{e} = 0.00418 \frac{lbf \cdot s}{pie^2} \cdot \left(\frac{10}{12}\right) pie^2 \cdot \frac{5\, {}^{pie}/_{s}}{\left(\frac{0.001}{12}\right) pie} = 34.8 lbf$$

8. Se desea recubrir ambos lados de una cinta magnética con un lubricante haciéndola pasar a través de una hendidura muy estrecha. La cinta tiene *0.015 pulg.* de espesor y *1.00 pulg.* de ancho: se centra en la hendidura dejando una holgura de *0.012 pulg.* en cada lado. El lubricante, de viscosidad $\mu = 0.021$ *slug/pie-s*, llena completamente el espacio que existe entre la cinta y la pieza que forma la hendidura, a lo largo de *0.75 pulg.* Si la cinta puede soportar una fuerza de tensión máxima de *7.5 lbf*, determine la velocidad máxima con la que se puede pasar la cinta a través de la hendidura.

Resolución:



$$Perímetro = 2 * 1 + 2 * 0.015 = 2.03\, pulg$$

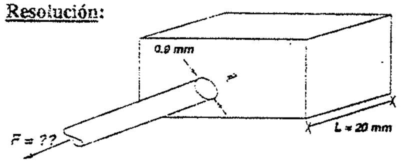
$$F = \mu \cdot A \cdot \frac{v}{e}$$

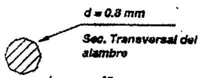
$$F_{máx} = 7.5 lbf = 2.03 * 0.75 * \left(\frac{1}{12}\right)^2 pie^2 * 0.021 \frac{slug}{pie \cdot s} * \frac{v_{máx}}{0.15 * \frac{1}{12} pie}$$

$$\boxed{v_{máx} = \frac{7.5}{0.177625} = 42.22\, {}^{pie}/_{s}}$$

9. Se desea cubrir con barniz un alambre devanado con propósitos de aislamiento; se piensa hacerlo pasar a través de un dado circular de *0.9 mm.* De diámetro. El diámetro del alambre es de *0.8 mm* y se coloca centrado en el dado. El barniz (μ = *20 centipoise*) llena completamente el espacio entre el alambre y el dado a lo largo de *20 mm.* El alambre se mueve longitudinalmente con velocidad de *50 m/s.* Determine la fuerza necesaria para moverlo.

Resolución:





$$A = \pi\, dL$$

$$A = \pi * 0.8 * 20 * 10^{-2} cm^2$$

$$A = 0.5024\, cm^2$$

$$v = 50\, {}^{m}/_{s} = 5000\, {}^{cm}/_{s} \qquad 1\, poise = \frac{1\, dina \cdot s}{cm^2}$$

$$e = 0.1mm = 0.01cm$$

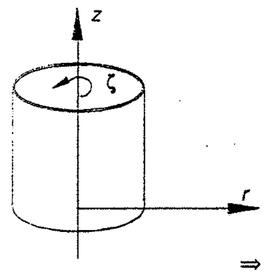
$$F = \mu \cdot A \cdot \frac{v}{e} = \frac{20 * 10^{-2} poises * 0.5024 cm^2 * 5000\, {}^{cm}/_{s}}{0.005 cm}$$

$$\boxed{F = 100.48\, dinas = 1.005\, N}$$

10. Un cilindro que contiene aire, de radio ***R***, gira con velocidad angular ω. Encontrar la presión en un punto interior cualquiera, si en $r = 0$, $P = P_0$ y $\rho = \rho_0$

* Suponer temperatura constante y densidad variable.

Resolución:



$$\frac{\partial P}{\partial r} = \rho \cdot \omega^2 \cdot r \; ; \quad \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho \cdot g$$

$$dP = \frac{\partial P}{\partial r} dr + \frac{\partial P}{\partial z} dz$$

$$dP = \rho \cdot \omega^2 \cdot r \cdot dr - \rho \cdot g \cdot dz \quad ....(1)$$

Además: $P = \rho \cdot R \cdot T$

$$\Rightarrow \quad \frac{P}{P_o} = \frac{\rho}{\rho_0} \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{\rho_0}{P_0} P \quad ....(2)$$

(2) en (1):

$$dP = \frac{\rho_0}{P_0} P \cdot \omega^2 \cdot r \cdot dr - \frac{\rho_0}{P_0} P \cdot g \cdot dz$$

$$\frac{dP}{P} = \frac{\rho_0}{P_0} \omega^2 \cdot r \cdot dr - \frac{\rho_0}{P_0} g \cdot dz$$

Integrando: $\displaystyle\int_{P_0}^{P} \frac{dP}{P} = \frac{\rho_0 \cdot \omega^2}{P_0} \int_{r=0}^{r} r \cdot dr - \frac{\rho_0}{P_0} g \int_{z=z_0}^{z} dz$

$$Ln \frac{P}{P_0} = \frac{\rho_0}{P_0} \frac{\omega^2 r^2}{2} - \frac{\rho_0}{P_0} g (z - z_0)$$

$$\boxed{P = P_0 \exp\left(\frac{1}{2} \frac{\rho_0 \omega^2 r^2}{P_0} - \frac{\rho_0}{P_0} g (z - z_0)\right)}$$

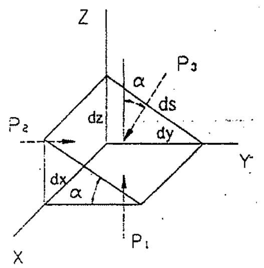
CAPÍTULO II

HIDROSTÁTICA

La HIDROSTÁTICA estudia a los fluidos sin movimiento. Los fluidos estáticos no tienen esfuerzo de corte (τ).

PRINCIPIO DE PASCAL

"La presión en un punto en el seno de una masa fluida en equilibrio, es igual en toda dirección"



$$\sum F_y = 0 \; : \; P_2 \cdot (dx \cdot dz) = P_3 \cdot (dx \cdot ds) \cdot sen\alpha$$

$$ds \cdot sen\alpha = dz \;\Rightarrow\; P_2 = P_3$$

$$\sum F_x = 0 \;\Rightarrow\; \text{Presiones laterales iguales.}$$

$$\sum F_z = 0 \; : \; P_1 (dx\,dy) = P_3 (dx\,ds)\cos\alpha + \rho\, g\, \frac{dx\,dy\,dz}{2}$$

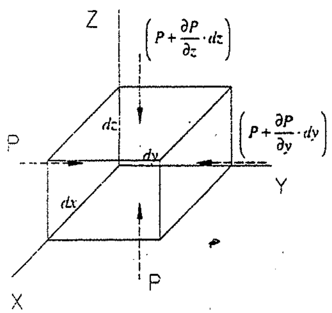
$$\text{Para un punto: } dz \to 0$$

$$y \quad P_1 = P_3$$

$$\therefore \boxed{P_1 = P_2 = P_3}$$

ECUACIÓN DE LA HIDROSTÁTICA

Nos indica el cambio de presión P por cada cambio de posición (x,y,z) dentro del fluido.



$$\sum F_y = 0$$

$$P \cdot dx \cdot dz = \left(P + \frac{\partial P}{\partial y} \cdot dy\right) \cdot dx \cdot dz$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} \cdot dy = 0 \;, \text{como} \quad dy \neq 0$$

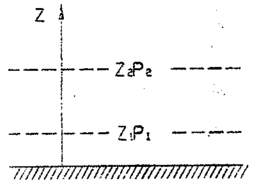
$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \;, \text{también} \quad \frac{\partial P}{\partial x} = 0$$

$$\sum F_z = 0$$

$$P \cdot dx \cdot dy = \left(P + \frac{\partial P}{\partial z} \cdot dz\right) \cdot dx \cdot dy + \rho \cdot g \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

$$\text{y se obtiene: } \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho \cdot g \qquad ó \qquad \boxed{\frac{dP}{dz} = -\rho \cdot g}$$

Ecuación de la Hidrostática en términos de cargas



$$\frac{dP}{dz} = -\rho \cdot g \quad , \quad \gamma = \rho \cdot g$$

$$dP = -\gamma \cdot dz$$

$$P_2 - P_1 = -\gamma \cdot (z_2 - z_1)$$

y se obtiene:

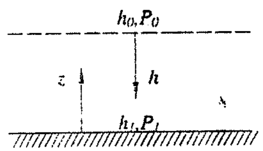
$$\frac{P_1}{\gamma} + z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + z_2 \quad ;\text{y en general} \quad \boxed{\frac{P_1}{\gamma} + z_1 = Cte}$$

$\frac{P_1}{\gamma}$: carga de presion

z_i : carga de elevación.

La suma de la "*carga de presión*" y la "*carga de elevación*" es una constante para cada punto en el seno de una masa líquida en reposo.

En Ingeniería



$$dP = -\rho \cdot g \cdot dz$$

$$\text{como: } \quad dz = -dh \;\Rightarrow\; dP = \rho \cdot g \cdot dh$$

integrando:

$$\int_{P_0}^{P_1} dP = \rho \cdot g \int_{h_0}^{h_1} dh$$

$$\therefore \boxed{P_1 - P_0 = \rho \cdot g \cdot (h_1 - h_0)}$$

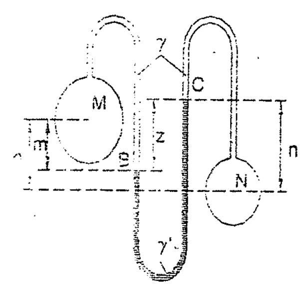
Presión en gases estáticos

Aquí se relacionan las ecuaciones: por un lado la de Hidrostática $dP = -\rho.g.dz$, y por otro lado la de los gases perfectos $P = \rho.R.T$ y los diferentes procesos de estos (isotérmico, adiabático, etc.). Ver los problemas 1.11., 1.14., 1.15..

Manometría

Los manómetros miden la diferencia de presiones entre dos puntos, utilizando columnas de líquido.

Ejemplo de un piezómetro ***diferencial***.-



De la figura:

$P_B = P_M + \gamma . m \Rightarrow P_M = P_B - \gamma . m$

Y $\quad P_N = P_C + \gamma . n$

Restando: $P_M - P_N = (P_B - P_C) - \gamma\,(m + n)$ .....(1)

También: $P_B = P_C + \gamma . z \Rightarrow (P_B - P_C) = \gamma' . z$ .....(2)

Por geometría: $h - m = n - z \Rightarrow (m+n) = h + z$ ... (3)

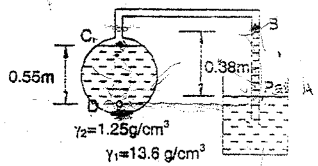
(2) y (3) en (1): $P_M - P_N = \gamma' . z - \gamma . (h + z)$

Si hacemos:

$$S = \frac{\gamma'}{\gamma}, \quad \textit{se tendrá}: \boxed{P_M - P_N = \gamma \cdot (z \cdot (s - 1) - h)}$$

PROBLEMAS

2.1. Un líquido de peso específico 1.25 g/cm^3 llena parcialmente el reservorio esférico de la figura. ¿Cuál será la intensidad de la presión en un punto situado a 0.55 *m* debajo de *C* (punto *D*)?.



Resolución:

La presión en *B* será: $P_B = P_{at} - 0.38\,\gamma_1$ ....(1)

Despreciando el peso del aire encerrado en el tubo *BC*, la presión en la superficie libre del reservorio será la misma que en *B*.

$\therefore P_D = (P_{at} - 0.38\,\gamma_1) + 0.55\,\gamma_2$ .... (2)

Reemplazando valores en (2):

$P_D = 1.033\ Kg/cm^2 - 0.38 \times 13600\ Kg/m^2 + 0.55 \times 1250\ Kg/m^2$

$P_D = (1.033 - 0.448)\ Kg/cm^2$

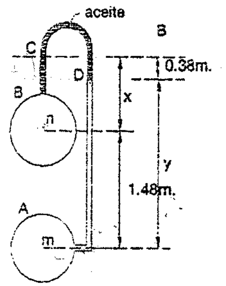
$\Rightarrow P_D = 0.585\ Kg/cm^2$ *(Presión Absoluta)*

y $P_D = -0.448\ Kg/cm^2$ *(Presión Relativa o Manométrica)* *Resp.*

2.2. Dos vasos *A* y *B*, que contienen agua, están conectados por medio de un piezómetro diferencial de aceite. Si el punto *m* del vaso *A*, está a *1.48 m* por debajo del punto *n* del vaso *B*, Determinar la diferencia de presión entre ambos puntos, cuando el

extremo superior de la columna de agua en el tubo que entra a *A*, se halla a *0.38 m*. por debajo del extremo superior de la columna de agua del tubo que entra a *B*. La densidad del aceite es 0.80, (ver figura).

Resolución:



Las presiones en D y C son: $P_D = P_m - \gamma . y$

$P_C = P_n - \gamma . x$

Restando: $\quad P_D - P_C = (P_m - P_n) + \gamma . (x - y)$

$\Rightarrow \quad P_m - P_n = (P_D - P_C) + \gamma . (y - x)$ ...(α)

De la figura: $P_D - P_C = \gamma' \times 0.38\ m = 0.8 \times 0.38\ t/m^2$ ...(β)

Por geometría: $\quad 1.48 + x = y + 0.38$

$y - x = 1.10\ m$ ....($\varnothing$)

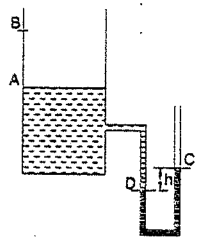
(β) y ($\varnothing$) en (α):

$P_m - P_n = 0.8 \times 0.38\ Tn/m^2 + 1 \times 1.10\ t/m^2$

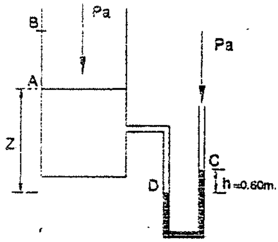
$P_m - P_n = 1.404\ t/m^2$

$\boxed{P_m - P_n = 0.1404\ Kg/cm^2}$ Resp.

2.3. Un piezómetro está conectado a un tanque conteniendo agua como se muestra en la figura. El líquido en el piezómetro es mercurio (γ' = 13.6 g/cm^3). Cuando la superficie del tanque está en *A*, el valor de ***h*** es 0.60 m. Hallar el valor de h cuando la superficie de agua en el tanque está en *B*, 5 *m* sobre *A*.



Resolución:



SITUACION INICIAL

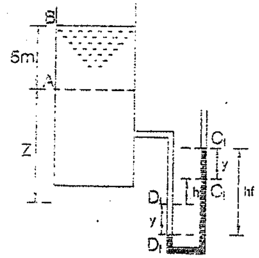
Inicialmente, en el nivel ***D*** **se cumple:**

$$P_a + \gamma \cdot z = P_a + \gamma' \cdot h$$

$$\Rightarrow \quad z = \frac{\gamma'}{\gamma} \cdot h = \frac{13.6}{1} \cdot 0.60m$$

$$\textit{obteniéndose}: \quad z = 8.16m$$

Luego, en la situación final, cuando el nivel del agua en el estanque está en *B*, el punto *D* baja una distancia *Y*, lo mismo que sube *C*. Por tanto, en el nuevo nivel D se cumple: $P_a + 5\cdot\gamma + \gamma\cdot z + \gamma\cdot y = P_a + \gamma'\cdot y + \gamma'\cdot h + \gamma'\cdot y$



luego $\quad y = \dfrac{(5+z)\cdot\gamma - h\cdot\gamma'}{(2\cdot\gamma'-\gamma)}$

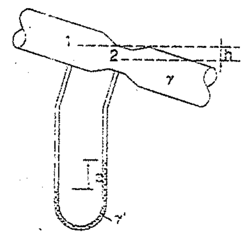
Reemplazando valores: $y = 0.19$ m

$\therefore$ El nuevo valor del desnivel h es:

$$h_f = h + 2\cdot y$$

$$\boxed{h_f = 0.98m} \qquad Resp.$$

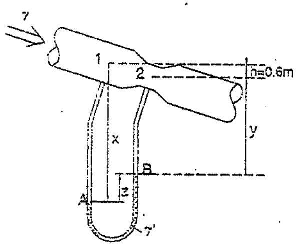
2.4. Calcular la diferencia de presiones entre los puntos 1 y 2 de la tubería de la figura por la que circula agua. El líquido en el piezómetro tiene una densidad relativa de 2.96.



Para la misma diferencia de presión, ¿Cuál sería el desnivel entre las ramas del piezómetro si se hubiese usado otro líquido, de densidad relativa igual a 1.60?.

$h = 0.6\ m,\ z = 0.5\ m$, para el primer caso.

Resolución:



Como el problema debe solucionarse para dos casos, se encontrará una ecuación general para este tipo de piezómetros.

$$P_1 = P_A - \gamma.x$$
$$P_2 = P_B - \gamma.y$$

$P_1 - P_2 = (P_A - P_B) - \gamma.(x - y)$ ....(1)

Por otro lado: $P_A - P_B = \gamma'.x$ ....(2)

De la geometría de la figura:

$$x = h + y + z$$

$\Rightarrow \quad x - y = h + z$ ....(3)

(2) y (3) en (1): $\boxed{P_1 - P_2 = \gamma'.z - \gamma.(h+z)}$ ....(4)

Ecuación que resuelve cualquier problema de este tipo de piezómetros.

a) Para el problema particular donde: $\gamma' = 2.96\ g/cm^3 = 0.00296\ Kg/cm^3$

$$\gamma = 1\ g/cm^3 = 0.001\ Kg/cm^3$$

$$z = 50\ cm\ ,\ h = 60\ cm$$

y reemplazando dichos valores en (4) se tendrá que:

$$\boxed{P_1 - P_2 = 0.038\ Kg/cm^2} \qquad Resp.$$

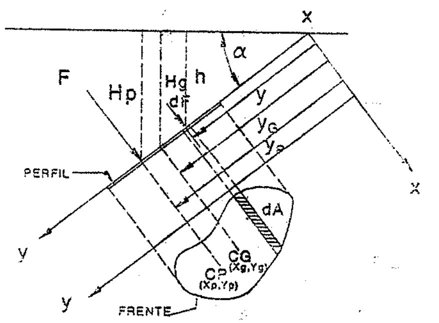
b) Para el segundo caso nos piden z, manteniéndose: $P_1 - P_2 = 0.038\ Kg/cm^2$, $h = 60\ cm$, $\gamma = 1\ g/cm^3 = 0.001\ Kg/cm^3$, y usando en el piezómetro otro líquido de $\gamma' = 1.6\ g/cm^3 = 0.0016\ Kg/cm^3$.

Reemplazando dichos valores en la ecuación (4):

$$0.038 = 0.0016\ z - 0.001(60 + z)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{z = 163\ cm} \qquad Resp.$$

FUERZAS SOBRE ÁREAS PLANAS



La presión que varía linealmente con la profundidad da lugar a una fuerza F, la cual calcularemos.

$dF = P.da\ ,\ P = \gamma.h = \gamma.y\,sen\alpha$

$dF = \gamma\,sen\,\alpha.y\,da$

Luego: $F = \gamma.sen\alpha.\int y.dA$

como: $Y_G.A = \int y.dA$

$\Rightarrow F = A\,Y_G.sen\alpha$

finalmente: $F = \gamma.H_g.A$

Calcularemos ahora las coordenadas del centro de presiones, el cual es el punto por donde pasa la línea de acción de F.

$$Y_p = \frac{\int y\cdot dF}{F} \Rightarrow Y_p = \frac{\int(\gamma\cdot y\cdot sen\alpha\cdot dA)\cdot y}{\gamma\cdot Y_G\cdot sen\alpha\cdot A} = \frac{\int y^2\cdot dA}{Y_G\cdot A} \quad \therefore \boxed{Y_p = \frac{I_x}{Y_G\cdot A}}$$

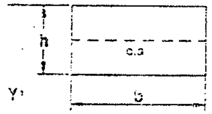
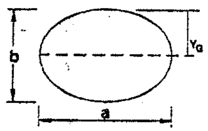
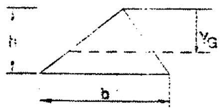
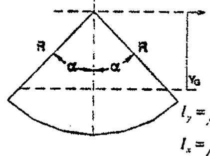
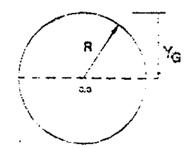
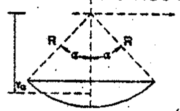
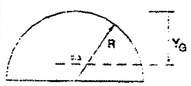
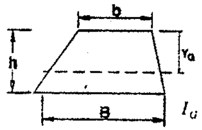
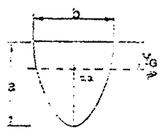
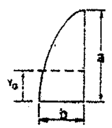
Donde I_x es el momento de inercia del área A con respecto al eje x. Por el teorema de Steiner: $\quad I_x = I_G + A.Y_G^2$, Ig: con respecto al centro de gravedad. Por lo tanto:

$$\boxed{Y_p = Y_G + \frac{I_G}{A\cdot Y_G}}$$

Y por un análisis similar: $\quad \boxed{X_p = X_G + \frac{I_{X_G Y_G}}{A\cdot Y_G}}$

PROPIEDADES DE ALGUNAS SECCIONES GEOMÉTRICAS

TABLA II - 1

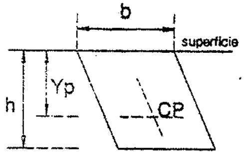
RECTÁNGULO  $A = b\cdot h$ $Y_G = \frac{h}{2}$ $I_G = \frac{b\cdot h^3}{12}$	ELIPSE  $A = \pi\cdot a\cdot b$ $Y_G = \frac{b}{2}$ $I_G = \frac{\pi}{4}\cdot a\cdot b^3$
TRIÁNGULO  $A = \frac{b\cdot h}{2}$ $Y_G = \frac{2}{3}\cdot h$ $I_G = \frac{b\cdot h^3}{36}$	SECCIÓN CIRCULAR  $A = \alpha\cdot R^2$ $Y_G = \frac{2\cdot R\cdot sen\alpha}{3\alpha}$ $I_y = \frac{1}{4}\cdot A\cdot R^2(1 + sen\alpha\cdot\cos\alpha/\alpha)$ $I_x = \frac{1}{4}\cdot A\cdot R^2(1 - sen\alpha\cdot\cos\alpha/\alpha)$
CÍRCULO  $A = \pi\cdot R^2 = \frac{\pi\cdot D^2}{4}$ $Y_G = R = \frac{D}{2}$ $I_G = \frac{\pi\cdot R^4}{4} = \frac{\pi\cdot D^4}{64}$	SEGMENTO CIRCULAR  $A = \frac{R^2}{2}\cdot(2\cdot\alpha - sen\,2\cdot\alpha)$ $Y_G = \frac{2\cdot R\cdot sen^3\alpha}{3A}$ $I_y = \frac{1}{4}\cdot A\cdot R^2\left(1 - \frac{2}{3}\cdot\frac{(sen^3\alpha\cdot\cos\alpha)}{(\alpha - sen\alpha\cdot\cos\alpha)}\right)$ $I_x = \frac{1}{4}\cdot A\cdot R^2\left(1 + \frac{(2\cdot sen^3\alpha\cdot\cos\alpha)}{(\alpha - sen\alpha\cdot\cos\alpha)}\right)$
MEDIO CÍRCULO  $A = \frac{\pi\cdot R^2}{2}$ $Y_G = 0.575587\cdot R$ $I_G = 0.109757\cdot R^4$	TRAPECIO  $A = \left(\frac{B+b}{2}\right)\cdot h$ $Y_G = \frac{h}{3}\cdot\left(\frac{2\cdot B + b}{B + b}\right)$ $I_G = \frac{h^3\cdot(B^2 + 4\cdot B\cdot b + b^2)}{36\cdot(B + b)}$
PARÁBOLA  $A = \frac{4}{3}\cdot a\cdot b$ $Y_G = \frac{2}{5}\cdot a$ $I_G = \frac{16}{175}\cdot a^3\cdot b$	MEDIA PARÁBOLA  $A = \frac{2}{3}\cdot a\cdot b$ $Y_G = \frac{2}{5}\cdot a$ $I_G = \frac{8}{175}\cdot a^3\cdot b$

PROBLEMAS

Determinar la coordenada Y_P del centro de presiones de las siguientes áreas, situadas en planos verticales, y la magnitud de la fuerza F.

$Y = A d^2 + I_G$.

2.5. Caso de un paralelogramo cualquiera. (están incluidos el rectángulo y el cuadrado).



Resolución:

Se sabe que: $\boxed{Y_P = Y_G + \frac{I_G}{A\cdot Y_G}}$

En este caso:

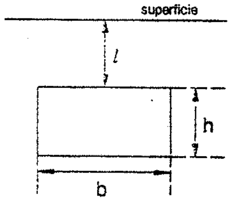
$$Y_G = \frac{h}{2} = H_G, \quad I_G = \frac{b\cdot h^3}{12}, \quad A = b\cdot h$$

Luego: $Y_P = \frac{2}{3}\cdot h$ *Resp.*

Además:

$$\boxed{F = \gamma\cdot H_G\cdot A} \Rightarrow F = \frac{1}{2}\cdot\gamma\cdot b\cdot h^2$$

2.6. Rectángulo.



Resolución:

$$Y_G = H_G = l + \frac{h}{2}$$

$$I_G = \frac{b\cdot h^3}{12}, \quad A = b\cdot h$$

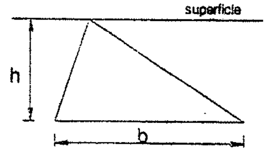
$$\Rightarrow F = \gamma\cdot b\cdot h\cdot\left(l + \frac{h}{2}\right)$$ Resp.

$$Y_P = \frac{I_x}{Y_G\cdot A}, \quad I_x = \int_l^{l+h} y^2\cdot b\cdot dy$$

$$\Rightarrow Y_P = \frac{2}{3}\cdot\frac{(l+h)^3 - l^3}{h\cdot(2\cdot l + h)}$$ Resp.

2.7. Triángulo

Resolución:

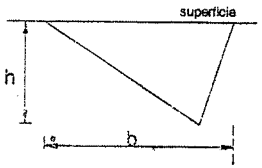


a) $Y_G = H_G = \frac{2}{3}\cdot h$, $I_G = \frac{b\cdot h^3}{36}$

$A = \frac{b\cdot h}{2} \Rightarrow F = \gamma\cdot\frac{b\cdot h^2}{3}$ *Resp.*

$$Y_P = \frac{2}{3}\cdot h + \frac{b\cdot h^3/36}{\left(\frac{2}{3}\cdot h\right)\cdot\left(\frac{b\cdot h}{2}\right)}$$

$\Rightarrow Y_P = \frac{3}{4}\cdot h$ *Resp.*

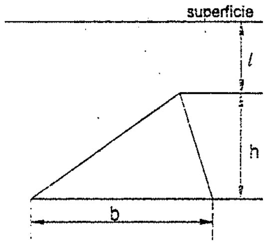


b) $Y_G = H_G = \frac{h}{3}$, $I_G = \frac{b\cdot h^3}{36}$, $A = \frac{b\cdot h}{2}$

$\Rightarrow F = \gamma\cdot\frac{b\cdot h^2}{6}$ *Resp.*

$$Y_P = \frac{h}{3} + \frac{b\cdot h^3/36}{\frac{h}{3}\cdot\left(\frac{b\cdot h}{2}\right)} = \frac{h}{2}$$ *Resp.*

2.8. **Resolución:**



$$Y_G = \left(l + \frac{2}{3}h\right) \quad , \quad A = \frac{bh}{2} \quad , \quad I_G = \frac{bh^3}{36}$$

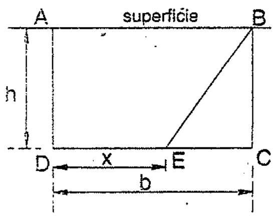
$$\Rightarrow F = \gamma\, b\, h\left(l + \frac{2}{3}h\right) \qquad \textit{Resp.}$$

$$Y_P = \left(l + \frac{2}{3}h\right) + \frac{\dfrac{bh^3}{36}}{\left(\dfrac{bh}{2}\right)\left(l + \dfrac{2}{3}h\right)} = l + \frac{h}{2}\left(\frac{4l + 3h}{3l + 2h}\right)$$

Resp.

2.9. Una placa está sumergida verticalmente en un líquido, con uno de sus lados coincidiendo con la superficie libre de dicho líquido. ¿Cómo debe trazarse una recta, desde un vértice del lado superior de manera que divida el rectángulo en 2 áreas que soporten fuerzas resultantes iguales?.

Resolución:



La fuerza que actúa sobre una superficie plana está dada por: $F = \gamma \cdot H_G \cdot A$

La fuerza sobre el rectángulo es (F_R):

$$F_R = \gamma\left(\frac{h}{2}\right)(a\,h) = \gamma\,\frac{a\,h^2}{2} \quad \text{.........................(1)}$$

La fuerza sobre el triángulo BCE (F_T):

$$F_T = \gamma\left(\frac{2}{3}h\right)(a - x)\frac{h}{2} = \frac{\gamma\,(a - x)\,h^2}{3} \quad \text{........(2)}$$

La fuerza sobre el trapecio ABED (F_{tp}): $F_{t_p} = F_R - F_T$ ....(3)

Por la condición del problema: $F_{t_p} = F_T$ ....(4)

De las ecuaciones (3) y(4) se tiene: $F_R = 2 \cdot F_T$

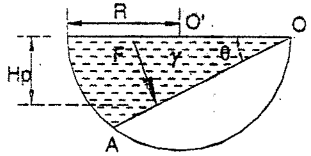
Reemplazando los valores respectivos dados por (1) y (2):

$$\frac{\gamma \cdot a \cdot h^2}{2} = 2 \cdot \frac{\gamma \cdot (a - x) \cdot h^2}{3}$$

Finalmente se obtiene:

$$\boxed{x = \frac{a}{4}} \qquad \textit{Resp.}$$

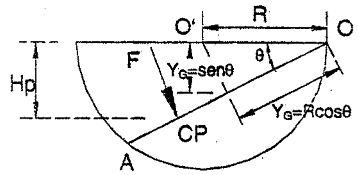
2.10. En un depósito semiesférico parcialmente lleno de líquido, se quiere colocar un tabique divisorio OA.



a) Hallar el valor θ para que la fuerza sobre el tabique sea máxima, y calcular esa fuerza.

b) ¿Cuál será el valor de θ, para que la profundidad del centro de presiones sea máxima?

Resolución:



a) el tabique es un área circular, por tanto:

$A = \pi \cdot R^2 \cdot \cos^2\theta$

$H_G = Y_G \cdot sen\theta = R \cdot \cos\theta \cdot sen\theta$

Como se sabe: $F = \gamma \cdot H_G \cdot A$

$\Rightarrow \quad F = \gamma \cdot \pi \cdot R^3 \cdot sen\theta \cdot \cos^3\theta$

Para que F sea máximo debemos hacer: $\dfrac{dF}{d\theta} = 0$,

Derivando e igualando a cero: $-3 \cdot sen^2\theta \cdot \cos^2\theta + \cos^4\theta = 0$,

Se tiene: $\tan^2\theta = \dfrac{1}{3}$,

O sea: $\theta = 30°$

Y: $F_{máx} = \dfrac{3\sqrt{3}}{16} \cdot \gamma \cdot \pi \cdot R^3$ *Resp.*

b) La profundidad del centro de presiones es:

$$H_P = Y_P \cdot sen\theta \quad , y \qquad Y_P = Y_G + \frac{I_G}{A \cdot Y_G}$$

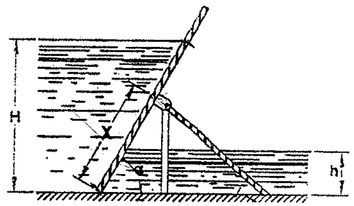
$$Y_G = R \cdot \cos\theta \quad , \quad I_G = \frac{\pi \cdot R^4 \cdot \cos^4\theta}{4} \quad , \quad A = \pi \cdot R^2 \cdot \cos^2\theta$$

$$\Rightarrow \quad Y_P = R \cdot \cos\theta + \frac{\dfrac{\pi \cdot R^4 \cdot \cos^4\theta}{4}}{(\pi \cdot R^2 \cdot \cos^2\theta) \cdot R \cdot \cos\theta} = \frac{5}{4} \cdot R \cdot \cos\theta$$

Finalmente: $H_P = \dfrac{5}{4} \cdot R \cdot \cos\theta \cdot sen\theta = \dfrac{5}{8} \cdot R \cdot sen2\theta$

De donde: $H_{P_{máx}} = \dfrac{5}{8} \cdot R$ y $\boxed{\theta = 45°}$ ...*Resp.*

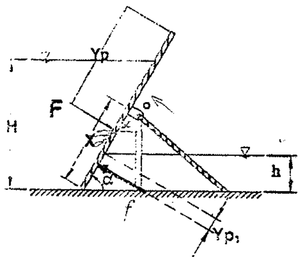
2.11. La presa del sistema de Chanoide es un tablero inclinado que tiene posibilidad de girar alrededor de un eje articulado O. Hallar la posición de la articulación (x) en la cual la elevación del nivel superior de agua arriba de $H = 2\ m$ provocaría el vuelco automático del tablero. El nivel del agua por la parte dacha del tablero es $h = 0.4\ m$, el ángulo $\alpha = 60°$.



Resolución:

En general: $F = \gamma \cdot H_G \cdot A$, y si el ancho es b:

$$\Rightarrow F = \gamma \cdot \frac{H}{2} \cdot \frac{H \cdot b}{sen\alpha} \Rightarrow F = \frac{\gamma \cdot H^2 \cdot b}{2 \cdot sen\alpha} \quad ...(1)$$



Análogamente: $f = \dfrac{\gamma \cdot h^2 \cdot b}{2 \cdot sen\alpha}$ ....(2)

Además:

$$Y_P = \frac{H}{2 \cdot sen\alpha} + \frac{\frac{b}{12} \cdot \left(\frac{H}{sen\alpha}\right)^3}{\frac{b \cdot H}{sen\alpha} \cdot \frac{b \cdot H}{2 sen\alpha}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{H}{sen\alpha}$$

$$Y_P = \frac{2}{3} \cdot \frac{H}{sen\alpha} \quad ....(3)$$

$$y. \quad Y_{P_1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{h}{sen\alpha} \quad ....(4)$$

Por la condición del problema: $\sum M_O = 0$ (giro inminente)

Es decir: $F \cdot \left(Y_P - \dfrac{H - x \cdot sen\alpha}{sen\alpha}\right) = f \cdot \left(Y_{P_1} - \dfrac{x \cdot sen\alpha - h}{sen\alpha}\right)$ ....(5)

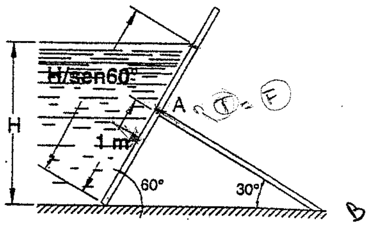
Introduciendo (1), (2), (3) y (4) en (5):

$$\frac{\gamma \cdot H^2 \cdot b}{2 \cdot sen\alpha} \cdot \left(\frac{2 \cdot H}{3 \cdot sen\alpha} - \frac{H}{sen\alpha} + x\right) = \frac{\gamma \cdot h^2 \cdot b}{2 \cdot sen\alpha} \cdot \left(\frac{2 \cdot h}{3 \cdot sen\alpha} + x - \frac{h}{sen\alpha}\right)$$

$$h^2 \cdot x + \frac{h^3}{3 \cdot sen\alpha} = H^2 \cdot x + \frac{H^3}{3 \cdot sen\alpha}$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{H^3 - h^3}{3 \cdot sen\alpha \cdot (H^2 - h^2)}} \quad , \quad \Rightarrow \quad x = 0.8m \quad Resp.$$

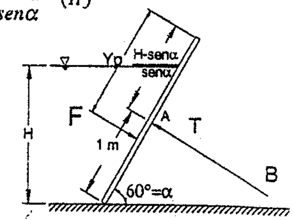
2.12. Se tiene la estructura de la figura. Hallar la profundidad de agua y la fuerza de compresión que sufre el elemento AB, cuando la estructura está a punto de volcarse. (ancho $b = 2$ m).



Resolución:

Se ha visto en las ecuaciones (1) y (3) del problema anterior que:

$$F = \frac{\gamma \cdot H^2 \cdot b}{2 \cdot sen\alpha} \quad (I) \quad , \quad Y_P = \frac{2 \cdot H}{3 \cdot sen\alpha} \quad (II)$$



Para el giro inminente: $\sum M_A = 0$

$$\Rightarrow F \cdot \left(Y_P - \frac{H - sen\alpha}{sen\alpha}\right) = 0$$

Se tiene: $Y_P = \dfrac{2 \cdot H}{3 \cdot sen\alpha} = \dfrac{H - sen\alpha}{sen\alpha}$

$H = 3 \cdot sen\alpha$

$\alpha = 60° \quad \Rightarrow \quad \boxed{H = 2.6m} \quad Resp.$

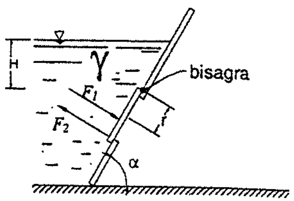
Para que la estructura esté a punto de volcarse; el centro de presión debe pasar por el punto A. Es decir que: [de (I)]

$$F = T \quad \Rightarrow \quad T = \frac{\gamma \cdot H^2 \cdot b}{2 \cdot sen\alpha} = \frac{1000(3sen60°)^2(2)}{2sen60°}$$

$$\boxed{T = 7794\ Kg} \quad Resp.$$

2.13. Encontrar:

a) La magnitud dela fuerza que ejerce el líquido sobre la compuerta circular.
b) El punto de aplicación de dicha fuerza.
c) La magnitud de la fuerza F_2, necesaria para levantar el tapón circular.



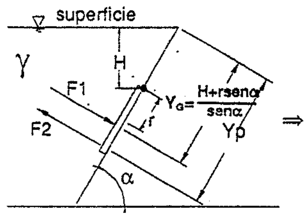
Resolución:

a) $F_1 = \gamma \cdot H_G \cdot A_{COMPUERTA}$

$H_G = \gamma_G \cdot sen\alpha = H + r \cdot sen\alpha \quad , \quad A = \pi \cdot r^2$

$\Rightarrow \boxed{F_1 = \gamma \cdot (H + r \cdot sen\alpha) \cdot \pi \cdot r^2} \quad Resp.$

b)



$$Y_P = Y_G + \frac{I_G}{A \cdot Y_G}$$

$$Y_G = \frac{H}{sen\alpha} + r \quad , \quad I_G = \frac{\pi \cdot r^4}{4}$$

$$\Rightarrow \quad Y_P = \left(\frac{H}{sen\alpha} + r\right) + \frac{\frac{\pi \cdot r^4}{4}}{\pi \cdot r^2 \cdot \left(\frac{H}{sen\alpha} + r\right)}$$

$$Y_P = \frac{4 \cdot \left(\frac{H}{sen\alpha} + r\right)^2 + r^2}{4 \cdot \left(\frac{H}{sen\alpha} + r\right)} \qquad Resp.$$

c) $\sum M_O = 0$ (con respecto a la bisagra)

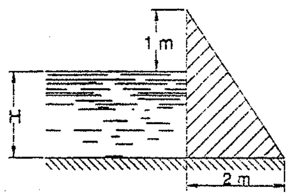
$$F_2(2r) = F_1\left(Y_P - \frac{H}{sen\alpha}\right) \quad \Rightarrow \quad F_2(2r) = \gamma\,(H + r\,sen\alpha)\pi\, r^2\left(Y_P - \frac{H}{sen\alpha}\right)$$

$$F_2 = \gamma \cdot (H + r \cdot sen\alpha) \cdot \frac{\pi \cdot r}{2} \cdot \left(\frac{4 \cdot (H + r \cdot sen\alpha)^2 + r^2 \cdot sen^2\alpha}{4 \cdot (H + r \cdot sen\alpha) \cdot sen\alpha} - \frac{H}{sen\alpha}\right)$$

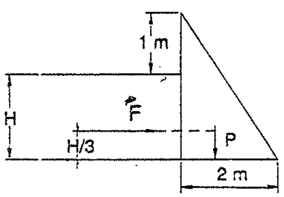
$$\Rightarrow F_2 = \frac{\gamma \cdot \pi \cdot r}{2} \cdot \left(\frac{4 \cdot (H + r \cdot sen\alpha)^2 + r^2 \cdot sen^2\alpha}{4 \cdot sen\alpha} - \frac{H \cdot (H + r \cdot sen\alpha)}{sen\alpha}\right)$$

Simplificando: $\boxed{F_2 = \frac{\gamma \cdot \pi \cdot r}{8} \cdot \left(5 r^2\, sen\alpha \cdot + 4 H\, r\right)}$ *Resp.*

2.14. En la presa mostrada, ¿Cuál es el valor máximo de ***H***, siempre que la resultante delas fuerzas, que ejerce el líquido y el peso de la presa, no pase del tercio medio de la base?. *Peso de la presa* = 2800 *Kg/m³*.



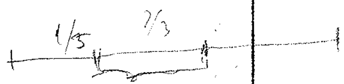
Resolución:



Si la presa es de ancho b, el empuje sobre la presa es: (a $\frac{2}{3} \cdot H$ *bajo la superficie*)

$$F = \gamma \cdot H \cdot A = 1000\left(\frac{H}{2}\right) \cdot b \cdot H$$

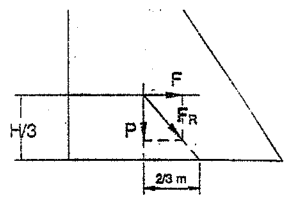
$$F = 500\,H^2 \cdot b \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$



El volumen de la presa es: $V = (H+1) \cdot b$

Luego su peso es: $P = 2800\,(H+1) \cdot b$ ....(2)

Como la resultante no debe pasar del tercio medio de la base, a partir del gráfico que sigue se tiene:



$$\frac{F}{\frac{2}{3}} = \frac{P}{\frac{H}{3}}$$

De (1) y (2):

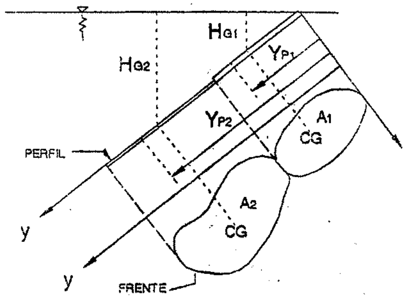
$$H \cdot (500 \cdot H^2 \cdot b) = 2800\,(H+1)2$$

$$5 \cdot H^3 - 56 \cdot H - 56 = 0$$

Resolviendo por aproximaciones:

$\boxed{H = 3.77m}$ *Resp.*

FUERZAS SOBRE ÁREAS PLANAS COMPUESTAS



$$F_1 = \gamma \cdot H_{G_1} \cdot A_1$$

$$F_2 = \gamma \cdot H_{G_2} \cdot A_2$$

$$\vdots$$

$$F_n = \gamma \cdot H_{G_n} \cdot A_n$$

$$\Rightarrow \boxed{F_T = \sum_{i=1}^{n} F_i}$$

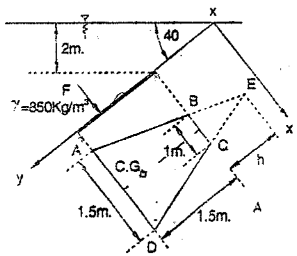
Hallando el punto de aplicación de F_T

$$F_T \cdot Y_P = F_1 \cdot Y_{P_1} + F_2 \cdot Y_{P_2} + \ldots + F_n \cdot Y_{P_n}$$

$$\Rightarrow \boxed{Y_P = \frac{\sum F_i \cdot Y_{P_i}}{\sum F_i}}$$

2.15. Calcular la fuerza actuante sobre el plano inclinado de la figura.

Resolución:



La fuerza sobre el trapecio

$$F_{ABCD} = \gamma \cdot H_G \cdot A_{ABCD} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

<u>Cálculo de A_{ABCD}</u>

$$A_{ABCD} = \left(\frac{1.5+1}{2}\right) * 1.5 = 1.875m^2 \ldots(2)$$

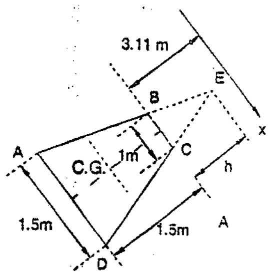
$\Delta_{AED} = \Delta_{BEC}$

$$\frac{h}{h+1.5} = \frac{1}{1.5}$$

$\Rightarrow \quad h = 3m$

luego:

$A_{BEC} = 1.5m^2$



Cálculo de H_G:

$$Y_G = \frac{A_{AED}\cdot Y_{G\,AED} - A_{BEC}\cdot Y_{G\,BEC}}{A_{AED} - A_{BEC}}$$

$$Y_G = \frac{\left(\frac{1.5*4.5}{2}\right)\left(\frac{2}{3}(4.5)+0.11\right)-\left(\frac{1*3}{2}\right)\left(\frac{2}{3}*3+0.11\right)}{1.875}$$

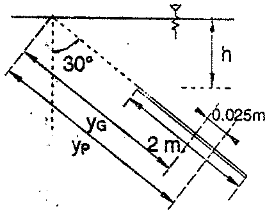
$Y_G = 3.9m \quad \Rightarrow \quad H_G = Y_G \cdot sen40° = 2.50m$ ....(3)

Reemplazando los valores de (2), (3) y $\gamma = 850\ Kg/m^3$ en (1):

$$F = 850\,{}^{Kg}/_{m^3} * 2.5m * 1.875m^2$$

$\Rightarrow \boxed{F = 3984Kg}$ *Resp.*

2.16. ¿a qué profundidad debe sumergirse una placa rectangular de 1 m de base por 2 m de altura, inclinada 30° con respecto a la vertical, para que el centro de presión se halle 0.025 m por debajo del centro de gravedad?.



Resolución:

$Y_P = Y_G + \dfrac{I_G}{A\cdot Y_G}$ ....(1)

por dato: $Y_P - Y_G = 0.025$ ....(2)

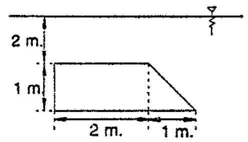
de (1) y (2): $\dfrac{I_G}{A\cdot Y_G} = 0.025$ ....(3)

$$\Rightarrow \frac{\frac{b\cdot h^3}{12}}{(b\cdot h)\left(\frac{h}{sen30°}+1\right)} = 0.025$$

$$\frac{h^2}{12\left(\frac{h}{sen30°}+1\right)} = 0.025 \quad \Rightarrow \quad \boxed{h = 10.65m} \quad \textit{Resp.}$$

$h^2 = 12 \cdot 0{,}025 \left(\frac{h}{sen30°}\ 38 \quad +1\right)$

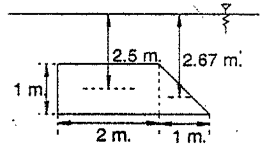
2.17. Encuentre el centro de presiones dela figura:



Resolución:

Descomponemos el trapecio dado, en un rectángulo (R) y un triángulo (T).

En el rectángulo:



$F_R = \gamma \cdot H_G \cdot A = \gamma(2.50)(2) = 5\gamma$

$$Y_{P_R} = Y_G + \frac{I_G}{A\cdot Y_G} = 2.5 + \frac{\frac{2(1)^3}{12}}{2*2.5} = 2.53$$

En el triángulo: $F_T = \gamma \cdot H_G \cdot A = \gamma(2.67)(0.5) = 1.335\gamma$

$$Y_{P_T} = 2.67 + \frac{\frac{1(1)^3}{36}}{(0.5)(2.67)} = 2.69$$

Aplicamos entonces el teorema de momentos:

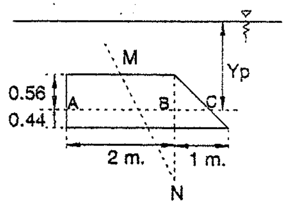
$$\bar{Y}_P = \frac{\sum F\cdot y_P}{\sum F} = \frac{(5\gamma)(2.53)+(1.335\gamma)(2.69)}{5\gamma + 1.335\gamma}$$

$\boxed{Y_P = 2.56m}$

Y la componente X_P estará sobre la línea MN, la cual une los puntos medios de las bases, entonces: (figura de la siguiente página)

$X_P = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{AB+BC}{2} = \dfrac{2+BC}{2}$ ....(1)

Pero BC puede ser hallado por proporciones:



$\dfrac{BC}{1} = \dfrac{0.56}{1} \quad \rightarrow \quad BC = 0.56m$

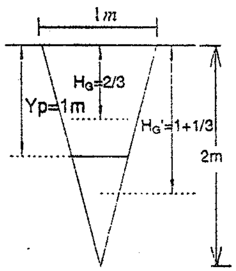
Reemplazando (2) en (1) se tiene:

$X_P = \dfrac{2+0.56}{2}$

$\boxed{X_P = 1.28m}$

2.18. Un triángulo de 1.00 m en la base y de 2.00 m de altura está completamente sumergido en agua con su base en la superficie. El triángulo está en un plano vertical. Hallar la relación entre las fuerzas resultantes de las dos áreas que se formarían al cortar el triángulo con una línea horizontal que pase por su centro de presión.

Resolución:



Por el problema 2.7. (b), sabemos que el centro de presiones de todo triángulo sumergido con la base en la superficie es igual a:

$$Y_P = \frac{h}{2} = \frac{2}{2} = 1m$$

La presión total que soporta el triángulo es:

$$F = \gamma \cdot H_G \cdot A = \gamma \cdot \left(\frac{h}{3}\right) \cdot \frac{b \cdot h}{2} = \frac{2}{3} \cdot \gamma$$

La presión que soporta el triángulo inferior es:

$$F' = \gamma \cdot H_G' \cdot A' = \gamma\left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(\frac{0.5 * 1}{2}\right) = \frac{1}{3}\gamma$$

La fuerza sobre el trapecio será: $F'' = F - F' = \frac{2}{3}\gamma - \frac{1}{3}\gamma = \frac{1}{3}\gamma$

Y la relación entre las fuerzas de las dos áreas será: $\boxed{\frac{F'}{F''} = 1}$ *Rpta.*

2.19. La compuerta circular de la figura, de 2 m de diámetro, pesa 15.708 t. Su plano forma un ángulo de 30° con la horizontal. La compuerta puede pivotear alrededor del punto A y se mantiene cerrada por su propio peso. Se pide determinar la altura de agua sobre la charnela A, capaz de abrir la compuerta.

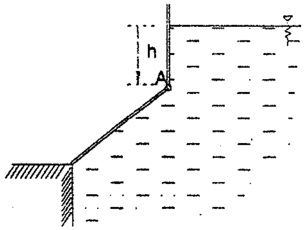


fig.(a)

Resolución:

El empuje hidrostático sobre la compuerta es:

$$F = \gamma \cdot H_G \cdot A = 1000(h + 1\,sen30°)\frac{\pi(2)^2}{4}$$

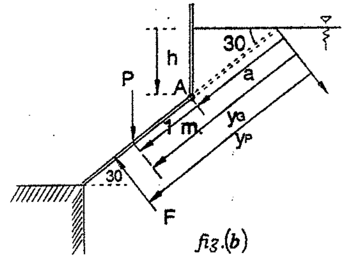


fig.(b)

$$F = 1000(h + 0.5)\pi \quad ....(1)$$

Esta fuerza está ubicada en el centro de presiones:

$$Y_P = Y_G + \frac{I_G}{A \cdot Y_G} = (a+1) + \frac{\frac{\pi(1)^4}{4}}{\pi(1)^2(a+1)}$$

Simplificando:

$$Y_P = (a+1) + \frac{1}{4(a+1)} \quad ....(2)$$

Tomando momentos con respecto al punto A:

$$P(1\cos 30°) = F(Y_P - a) \quad ....(3)$$

Reemplazando (1), (2), como también: $a = \frac{h}{sen30°} = 2h$, $P = 15708\,Kg$. en (3) ,

$$15708(0.866) = 1000(3.1416)(h+0.5)\left((a+1) + \frac{1}{4(a+1)} - a\right)$$

$$4.33 = (h+0.5)\left(\frac{4(2h+1)+1}{4(2h+1)}\right) \qquad Dado\ que: \ a = 2h$$

Ver fig.(b)

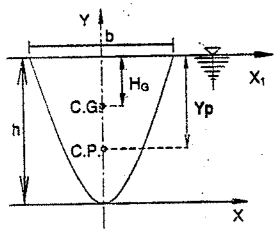
Simplificando y ordenando: $8h^2 - 25.64h - 14.82 = 0$

Resolviendo esta última ecuación: $\boxed{h = 3.71m}$

2.20. Determinar las coordenadas del centro de presión de una sección parabólica, situada en un plano vertical y cuya base esté en la superficie libre del líquido.

Resolución:

En la figura del problema se puede ver que: $Y_P = \frac{I_X}{H_G \cdot A}$ ....(1)



Deduciendo la ecuación de la parábola se obtiene:

$$Y = \frac{4 \cdot h}{b^2} \cdot X^2$$

Cálculo de I_{X_1} :

$$I_{X_1} = \int_0^h (h - Y)^2 \cdot dA \quad ....(2)$$

Cálculo de $H_G \cdot A$:

$$H_G \cdot A = \int_0^h (h-Y)\cdot dA \quad \text{...} (3)$$

Pero: $dA = 2\,X\,dY = b\sqrt{\frac{Y}{h}}dY$ ....(4)

Reemplazando (4) en (2) y (3), y éstos en (1) obtenemos:

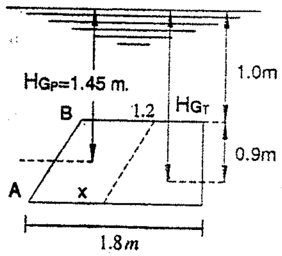
$$Y_P = \frac{\int_0^h (h-Y)^2 \cdot b \cdot \sqrt{Y/h}\cdot dY}{\int_0^h (h-Y)\cdot b \cdot \sqrt{Y/h}\cdot dY} = \frac{\int_0^h (h-Y)^2 \cdot \sqrt{Y}\cdot dY}{\int_0^h (h-Y)\cdot \sqrt{Y}\cdot dY}$$

Luego:

$$Y_P = \frac{h^2\left(h^{3/2}\big/_{3/2}\right) + h^{7/2}\big/_{7/2} - 2h\left(h^{5/2}\big/_{5/2}\right)}{h\left(h^{3/2}\big/_{3/2}\right) - h^{5/2}\big/_{5/2}} = \frac{\frac{70h+30h-84h}{105}}{\frac{10h-6h}{15}}$$

Simplificando: $\boxed{Y_P = \frac{4}{7}\cdot h}$

2.21. La superficie trapezoidal que se muestra en la figura, se encuentra sumergida en agua. Sus bases son paralelas a la superficie libre. Determinar a qué distancia del punto A debe trazarse una paralela a la recta AB, de tal manera que las fuerzas que actúan sobre cada una de las áreas en que queda dividida la figura sean iguales.



Resolución:

Descomponemos la superficie trapezoidal en 2 figuras (*paralelogramo y trapecio*) cuyas distancias al C.G. desde el nivel de agua son:

$$H_{G\ PARAL.} = 1.00 + 0.45 = 1.45$$

$$H_{G\ TRAP} = 1 + \frac{h}{3}\left(\frac{2B+b}{B+b}\right) = 1 + \frac{0.90}{3}\left(\frac{2(1.8-X)+1.2-X}{1.8-X+1.2-X}\right)$$

$$H_{G_r} = \frac{4.44-2.9\,X}{3-2\,X}$$

La presión total sobre el paralelogramo es:

$$F_P = \gamma\, H_{G_P}\, A = 1000\,(1.45)0.90\,X = 1305\,X \quad \text{..........................} (1)$$

La fuerza total sobre el trapecio es:

$$F_T = 1000\left(\frac{4.44-2.9\,X}{3-2\,X}\right)\left(\frac{1.2-X+1.80-X}{2}\right)0.90$$

$$F_T = 900\left(\frac{4.44-2.9\,X}{3-2\,X}\right)(1.5-X) \quad \text{..} (2)$$

Según el enunciado podemos escribir (1) = (2)

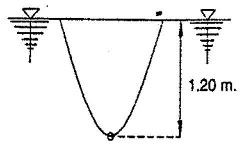
$$1305\,X = 900\left(\frac{4.44-2.9\,X}{3-2\,X}\right)(1.5-X)$$

Ejecutando operaciones queda la ecuación de segundo grado:

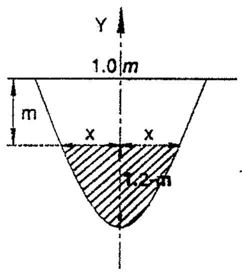
$$5220\,X^2 - 11826\,X + 5994 = 0$$

Y resolviendo: $\boxed{X = 0.76m}$ *Rpta.*

2.22. Calcular a que distancia vertical, medida desde la superficie del agua, debe trazarse una recta paralela a la base de la parábola: $y = 4.8x^2$, de tal forma que la superficie que se encuentre por debajo de la recta trazada soporte una fuerza igual a la tercera parte de la presión que actúa sobre la superficie superior.



Resolución:



Por el enunciado del problema podemos decir que el empuje total que soportará la parábola es igual al cuádruplo de lo que soportará la superficie que se encuentra por debajo de la recta trazada:

$F = 4 \cdot F_1$ ....(1)

Cálculo del área inferior (sombreada):

Cuando $y = 1.2 - m$, *la ecuación parabólica*

Se tiene: $x = \sqrt{\frac{1.2-m}{4.8}}$

Entonces: $b_1 = 2x = \sqrt{\frac{1.20-m}{1.20}}$ y; $A_1 = \frac{2}{3}(1.2-m)\left(\frac{1.20-m}{1.20}\right)^{1/2}$

Cálculo de: $A_1 = \dfrac{2(1.20-m)^{3/2}}{3\sqrt{1.2}}$, $y_G' = \dfrac{2}{5}(1.20-m)+m$ *(ver tabla II – 1)*

La fuerza sobre el área inferior: $F = \gamma \cdot y_g' \cdot A_1$

$$F_1 = \frac{2}{3\sqrt{1.2}}(1.2-m)^{3/2}\left(\frac{2}{5}(1.2-m)+m\right)1000$$

$$F_1 = 243.2(1.20-m)^{5/2} + 608(1.20-m)^{3/2}m \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

La fuerza sobre el área total: $F = \gamma \cdot H_G \cdot A$

$$F = 1000\left(\frac{2}{5}*1.20\right)\left(\frac{2}{3}*1.20*1.00\right) = 384 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

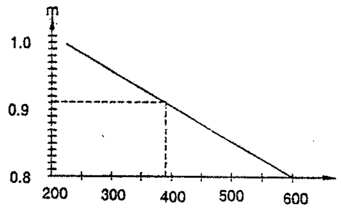
Reemplazando (2) y (3) en (1): $384 = 972.8(1.20-m)^{5/2} + 2432(1.20-m)^{3/2}$

Ecuación que se resuelve por tanteos:

Cuando: $m = 1.00m$: $384 > 233$

$m = 0.80m$: $384 < 588$

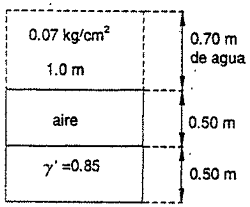
$m = 0.90m$: $384 < 410$



Entrando al gráfico con una abscisa igual a 384: $\boxed{m = 0.915}$

2.23. Una vasija de forma cúbica, de 1 m de lado, está llena hasta la mitad con aceite de 0.85 de densidad relativa, el aire situado en la parte superior está a una presión de 0.07 Kg/cm^2. Determinar la fuerza total sobre la cara superior, fondo y una cara lateral.

Resolución:



La presión sobre la cara superior es:

$F = \gamma \cdot h \cdot A = 1000*0.7*1*1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{F = 700\,Kg}$

La presión sobre el fondo será la suma de la presión sobre la cara superior y el peso del aceite (850 Kg/m^3)

$F = 700\,Kg + 850\,{}^{Kg}/_{m^3}*0.50m*1m^2 \Rightarrow \boxed{F = 1125\,Kg}$

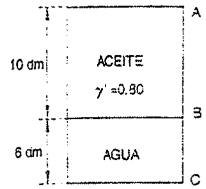
Para calcular la presión sobre una de las caras laterales, convertiremos la presión de aire a altura de aceite: $\gamma' = 0.85$

$h = \dfrac{\rho}{\omega'} = \dfrac{0.70}{0.85} = 0.82m \quad \Rightarrow \quad F = \gamma \cdot H_G \cdot A = 850*0.66*1.32*1$

$\Rightarrow \quad \boxed{F = 740\,Kg.}$

2.24. El tanque de la figura contiene aceite y agua. Determinar la fuerza resultante sobre la pared ABC, el cual tiene 4 dm de fondo, y también su centro de presión.

Resolución:



$F_{ABC} = F_{AB} + F_{BC}$

a) Se tiene la fuerza que corresponde al aceite actuando a una distancia $\frac{2}{3}\cdot(10) = 6.67$ desde A.

Esta distancia puede obtenerse también de la fórmula:

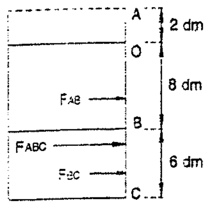
$$F_{AB} = 0.8\left(\frac{10}{2}\right)(10*4) = 160\,Kg$$

$$Y_P = Y_G + \frac{I_G}{A\cdot Y_G} = 5 + \frac{\frac{4(10)^3}{12}}{5(4*10)} = 5 + 1.67 = 6.67dm \quad desde\ A.$$

b) Para hallar F_{BC}, convertiremos la altura de aceite en altura de agua:

10 dm aceite = 10 • 0.8 = 8 dm de agua

Entonces: $F_{BC} = 1\,{}^{Kg}/_{dm^3}(8+3)(6*4) = 264\,Kg$



Actuando a una distancia:

$$Y_P = 11 + \frac{\frac{4\cdot(6)^3}{12}}{11\cdot(4\cdot6)} = 11.27dm \quad de \quad O$$

Es decir a: $(2+11.27)dm = 13.27dm \quad de \quad A$

La fuerza total será: $F_{ABC} = 160 + 264$

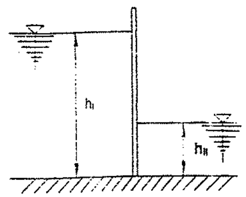
$$\boxed{F_{ABC} = 424\,Kg}$$

c) El centro de presión, lo calcularemos aplicando momentos con respecto al punto A:

$424\,Y_P = 160*6.67 + 264*13.27$

De donde: $\boxed{Y_P = 10.8dm \quad desde \quad A}$

2.25. Dos depósitos separados por una pared vertical están con un cierto líquido hasta una altura h_I y h_{II}. Hallar la relación de las alturas, si se quiere que la fuerza resultante pase por el nivel del segundo depósito.

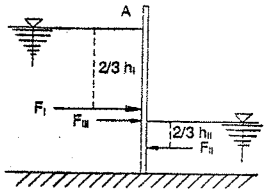


Resolución:

El empuje está dado por: $F = \gamma \cdot H_G \cdot A$

Entonces: $F_I = \dfrac{\gamma \cdot h_I^2}{2}$ (*por unidad de fondo*)

$$F_{II} = \frac{\gamma \cdot h_{II}^2}{2}$$



Luego la fuerza resultante será: $F_{III} = F_I - F_{II}$

Tomando momentos con respecto al punto A

$$F_I\left(\frac{2}{3}\right)h_I - F_{II}\left((h_I - h_{II}) + \frac{2}{3}h_{II}\right) = F_{III}\,(h_I - h_{II})$$

Reemplazando los valores de F_I, F_{II} y F_{III}, se tiene

$$\frac{\gamma \cdot h_I^2}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)\cdot h_I - \frac{\gamma \cdot h_{II}^2}{2}\cdot\left((h_I - h_{II}) + \frac{2}{3}\cdot h_{II}\right) = \left(\frac{\gamma \cdot h_I^2}{2} - \frac{\gamma \cdot h_{II}^2}{2}\right)\cdot(h_I - h_{II})$$

Simplificando: $\dfrac{2}{3}\cdot\left(h_I^3 - h_{II}^3\right) = h_I^2\cdot(h_I - h_{II})$

$$\frac{2}{3}\cdot(h_I - h_{II})\cdot\left(h_I^2 + h_I\cdot h_{II} + h_{II}^2\right) = h_I^2\cdot(h_I - h_{II})$$

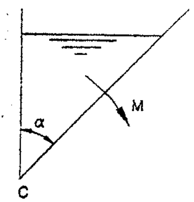
Ó: $1 + \dfrac{h_{II}}{h_I} + \left(\dfrac{h_{II}}{h_I}\right)^2 = \dfrac{3}{2}$

Llamando a la relación pedida $\dfrac{h_I}{h_{II}} = R$, la ecuación queda:

$$1 + \frac{1}{R} + \left(\frac{1}{R}\right)^2 = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad R^2 - 2\cdot R - 2 = 0$$

Y: $R = \dfrac{h_I}{h_{II}} = 1 + \sqrt{3}$

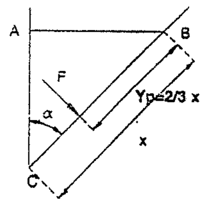
2.26. Entre una pared vertical y otra que puede girar alrededor de un punto "C" queda formado un depósito prismático de eje horizontal, que contiene una determinada cantidad de líquido. Encontrar el valor del ángulo para que el momento del empuje hidrostático sobre la pared inclinada (con respecto al eje "C"), sea mínimo.



Resolución:

La fuerza total sobre la superficie es: $F = \gamma \cdot H_G \cdot A$

Donde: $H_G = \dfrac{x\cdot\cos\alpha}{2}$



y A $= x$ (por unidad de fondo)

luego: $F = \dfrac{\gamma \cdot x^2 \cdot \cos\alpha}{2}$ ....(1)

El momento del empuje hidrostático con respecto al eje C será: $M_C = F\cdot(x - y_P)$ ....(2)

El centro de presión está a: $\frac{2}{3}\cdot x$ de B:

$$\therefore\ M_C = \frac{\gamma \cdot x^2 \cdot \cos\alpha}{2}\cdot\left(x - \frac{2}{3}\cdot x\right) \quad \Rightarrow \quad M_C = \frac{\gamma \cdot x^2 \cdot \cos\alpha}{6} \qquad \text{........(3)}$$

Como el volumen de agua es constante, se puede escribir:

$$V = \frac{CA\cdot AB}{2} = \frac{x\cdot\cos\alpha\cdot x\cdot sen\alpha}{2} = \frac{x^2\cdot sen\alpha\cdot\cos\alpha}{2}$$

De donde: $x = \sqrt{\dfrac{2\cdot V}{sen\alpha\cdot\cos\alpha}}$ ....(4)

Reemplazando (4) en la ecuación (3), se tiene:

Simplificando: $M_C = \dfrac{\gamma}{6}\cdot\dfrac{2\cdot V}{sen\alpha\cdot\cos\alpha}\cdot\sqrt{\dfrac{2\cdot V}{sen\alpha\cdot\cos\alpha}}\cdot\cos\alpha$

$$M_C = \frac{\gamma\cdot V^{3/2}\cdot\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{sen^3\alpha\cdot\cos\alpha}}$$

Derivando e igualando a cero para hallar el mínimo:

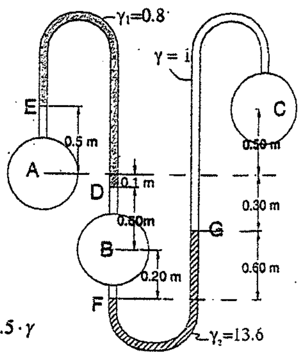
$$\frac{dM_C}{d\alpha} = -\frac{\gamma\ V^{3/2}\sqrt{2}}{2*3}\cdot\left(sen^3\alpha\cos\alpha\right)^{-3/2}\cdot\left(-sen^3\alpha\cdot sen\alpha + 3\cos^2\alpha\cdot sen^2\alpha\right) = 0$$

$$-sen\alpha + 3\cos^2\alpha\, sen^2\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad 3 = \tan^2\alpha \quad \Rightarrow \quad \tan\alpha = \pm\sqrt{3}$$

Finalmente: $\boxed{\alpha = 60°}$

PROBLEMAS SOBRE MANÓMETROS

2.27. Hallar la diferencia de presiones en *Kg/cm²* entre las tuberías A, B y C del sistema mostrado en la figura.



Resolución:

Por la figura, el punto B tiene más presión que A y C.

Además: $P_B = P_D + 0.6\cdot\gamma$ y, $P_A = P_E + 0.5\cdot\gamma$

Restando: $P_B - P_A = P_D - P_E + 0.1 \cdot \gamma$

Pero: $P_D - P_E = \gamma_1 (0.1 + 0.5) = 0.8(0.6) \, {}^{t}\!/\!_{m^2}$

Luego: $P_B - P_A = 0.8(0.6) + 0.1(1) \, {}^{t}\!/\!_{m^2}$

Y: $\boxed{P_B - P_A = 0.058 \, {}^{Kg}\!/\!_{cm^2}}$

Y entre los puntos B y C: $P_B = P_F - 0.2\gamma$

$\wedge \qquad P_C = P_G - \gamma(0.3 + 0.5)$

Entonces: $P_B - P_C = P_F - P_G + 0.6\gamma$

Pero: $P_F - P_G = 0.6\gamma_2 = 13.6(0.6) \, {}^{t}\!/\!_{m^2}$

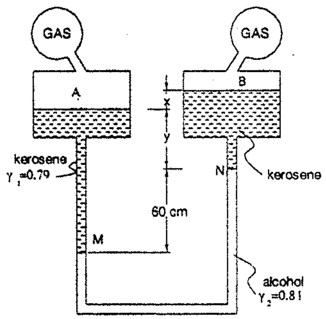
Luego: $P_B - P_C = 13.6(0.6) + 0.6(1) \quad \Rightarrow \quad \boxed{P_B - P_C = 0.876 \, {}^{Kg}\!/\!_{cm^2}}$

2.28. El aparato de la figura es un piezómetro diferencial que da lecturas ampliadas. Originalmente el nivel de ambos depósitos es el mismo, después, se conectan a dos tuberías conteniendo gas, y se lee una deflexión de 0.60 *m*. Se quiere saber la diferencia de presión en *Kg/cm*^{2} de las dos tuberías, si los líquidos usados son:

a) En la parte superior kerosene de densidad relativa 0.79 y

b) En la parte inferior alcohol de densidad relativa 0.81.

La relación entre la sección transversal de los tanques y la de los tubos es 100.



Resolución:

Al conectar los tanques a las tuberías de gas, se produce un deflexión, es decir que la parte del kerosene del tanque A se introduce en el piezómetro, empujando al alcohol que se desplaza de lugar, luego se puede plantear:

$$(Area\ del\ tan\, que) \cdot x = (Area\ del\ tubo) \cdot (deflexión)$$

De donde: $x = \dfrac{Area\ del\ tubo}{Area\ del\ tan\, que} \cdot (deflexión) = \dfrac{1}{100} \cdot (60) = 0.60cm$

Según la figura: $P_M = P_A + (60 + y) \cdot \gamma_1$

$\underline{P_N = P_B + (x + y) \cdot \gamma_1}$

Restando: $P_M - P_N = P_A - P_B + (60 + y) \cdot \gamma_1 - (x + y) \cdot \gamma_1$

De donde: $P_A - P_B = P_M - P_N - (60 + y) \cdot \gamma_1 + (x + y) \cdot \gamma_1$

Pero: $P_M - P_N = \gamma_2 (60) = \dfrac{0.81}{1000} \cdot (60) \, {}^{Kg}\!/\!_{cm^2} \quad \wedge \quad \gamma_1 = \dfrac{0.79}{1000} \, {}^{Kg}\!/\!_{cm^3}$

Entonces: $P_A - P_B = \dfrac{0.81}{1000}(60) - (60 + y)\dfrac{0.79}{1000} + (0.6 + y)\dfrac{0.79}{1000}$

$$\Rightarrow \boxed{P_A - P_B = 0.001674 \, {}^{Kg}\!/\!_{cm^2}}$$

2.29. Hallar el valor de la presión *p* de la caldera que se muestra en la figura, para las condiciones que se indican en el piezómetro diferencial de tres ramas.

Resolución:

La presión de la caldera es la presión en el punto G, y tiene por valor:

$p = p_{atm} + p_{AB} - p_{BC} + p_{CD} - p_{DE} + p_{EF} - p_{FG}$ ....(1)

Pero: $p_{AB} = p_{CD} = p_{EF} = \gamma_1 * 120$

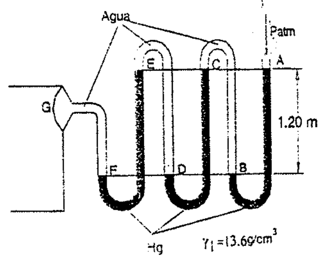
$\wedge \quad p_{BC} = p_{DE} = p_{FG} = \gamma * 120$

Estos valores en (1):

$p = p_{atm} + 3\gamma_1(120) - 3\gamma(120)$

Como: $p_{atm} = 1.033 \, {}^{Kg}\!/\!_{cm^2}$,

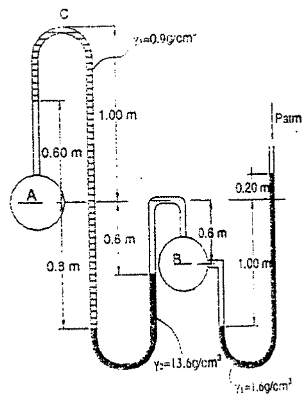
$\gamma_1 = \dfrac{13.6}{1000} \, {}^{Kg}\!/\!_{cm^3} \quad \wedge \quad \gamma = \dfrac{1}{1000} \, {}^{Kg}\!/\!_{cm^3}$



Luego: $p = 1.033 + 3(0.0136)(120) - 3(0.001)120$

$\Rightarrow \boxed{p = 5.569 \, {}^{Kg}\!/\!_{cm^2}} \ (absoluto) \quad \wedge \quad \boxed{p = 4.536 \, {}^{Kg}\!/\!_{cm^2}} \ (relativo)$

2.30. En la figura mostrada, hallar las presiones relativas en *Kg/cm*^{2} en las tuberías A y B, y en C. Las tuberías A y B conducen agua.



Resolución:

Como se piden presiones relativas, se considerará nula a la presión atmosférica.

Partiendo del punto N:

$$p_B = \gamma_1(20+100) - \gamma\cdot(100-60) = \frac{1.6(120)}{1000} - \frac{1(40)}{1000}$$

$$\Rightarrow \qquad p_B = 0.152\ {}^{Kg}\!/_{cm^2}$$

La presión en C será:

$$p_C = p_B - \gamma(60-30) + \gamma_2(80-30) - \gamma_3(80+100)$$

$$p_C = 0.152 - \frac{1}{1000}(30) + \frac{13.6}{1000}(50) - \frac{0.9}{1000}(180) \Rightarrow \boxed{p_C = 0.640\ {}^{Kg}\!/_{cm^2}}$$

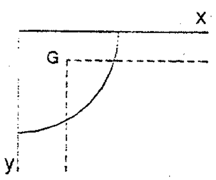
La presión en A será:

$$p_A = p_C + \gamma_3(100-60) + \gamma(60) = 0.640 + \frac{0.9}{1000}(40) + \frac{1}{1000}(60)$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{p_A = 0.736\ {}^{Kg}\!/_{cm^2}}$$

2.31. Hallar las coordenadas del centro de presiones *CP* (X_P, Y_P), en función del radio R, de un cuadrante de círculo en la posición de la figura.

Resolución:



$$X_P = \frac{I_{XY}}{A\cdot Y_G} \qquad \text{.......................................(1)}$$

Cálculo de Ixy: $I_{XY} = \int_0^R \left(\int_0^X X\cdot dX\right)\cdot Y\cdot dY$

$$I_{XY} = \int_0^R \left(\int_0^{\sqrt{R^2-Y^2}} X\cdot dX\right)\cdot Y\cdot dY = \int_0^R \frac{(R^2-Y^2)}{2}\cdot Y\cdot dY$$

$$I_{XY} = \frac{R^4}{8} \quad ; \quad Y_G = \frac{4R}{3\pi} \qquad \text{.........................(2)}$$

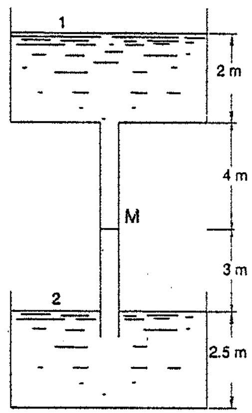
$$(2)\ en\ (1): \quad X_P = \frac{\frac{R^4}{8}}{\left(\frac{\pi R^2}{4}\right)\left(\frac{4R}{3\pi}\right)} = \frac{3}{8}R$$

Cálculo de YP: $Y_P = \dfrac{I_X}{A\cdot Y_G} = \dfrac{\frac{1}{4}\left(\frac{\pi R^2}{4}\right)}{\left(\frac{\pi\cdot R^2}{4}\right)\left(\frac{4R}{3\pi}\right)} = \dfrac{3\pi R}{16}$

2.32. Un tubo circular de 4 *pulgadas* de diámetro, está uniendo dos depósitos a distinto nivel. Si se cierra el tubo en M, según se indica en la figura, ¿Cuál será la fuerza resultante que actúa sobre la superficie de cierre?

Resolución:

La fuerza resultante en el punto M, es igual a la diferencia de fuerzas: *la soportada por la columna de agua sobre M, menos la acción de la columna inferior aplicada sobre el mismo punto.*



Para el agua de la parte superior:

$$P_{m1} = P_{at} + \gamma(2+4)$$

Para la parte inferior:

$$P_{m2} = P_{at} - \gamma(3)$$

La diferencia de presiones es:

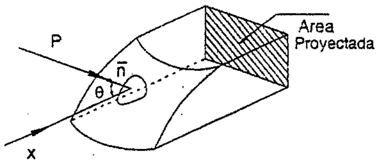
$$P_M = P_{m1} - P_{m2}$$
$$P_M = \gamma\cdot(2+4) - (-3\cdot\gamma) = 9\cdot\gamma$$
$$P_M = 9m\cdot\left(1000\ {}^{Kg}\!/_{m^3}\right) = 9000\ {}^{Kg}\!/_{m^2}$$
$$P_M = 0.9\ {}^{Kg}\!/_{cm^2}$$

La fuerza resultante sobre la superficie M será: $F = P_M \cdot Area = 0.9\dfrac{\pi(10.16)^2}{4}$

Finalmente:

$$\boxed{F = 73\ Kg \qquad (hacia\ abajo)}$$

FUERZAS SOBRE ÁREAS CURVAS



COMPONENTES HORIZONTAL DE F

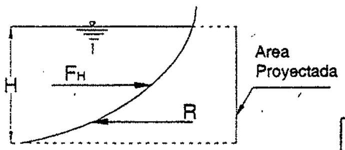
$$dF = (P \cdot dA) \cdot \cos\theta$$

donde: $dA \cdot \cos\theta$ *es la proyección de dA en el plano vertical* $\perp$ *al eje x*

$$\boxed{F = \int P \cdot dA \cdot \cos\theta}$$

Para calcular la componente horizontal de la fuerza sobre la superficie, basta con calcular la fuerza neta sobre una superficie vertical que sea la proyección de la superficie curva.

Ejemplo: calcular "*R*" para que la pared no se mueva.



En equilibrio: $F_H = R$

$$F = \gamma \cdot H_G \cdot A_{PROYC.}$$

$$F = \gamma \cdot \left(\frac{h}{2}\right) \cdot (H \cdot l)$$

$$\boxed{F = \gamma \cdot l \cdot \frac{H^2}{2}} \text{ , } l \rightarrow \textit{profundidad}$$

$$\boxed{Y_P = \frac{2}{3} \cdot H}$$

COMPONENTE VERTICAL

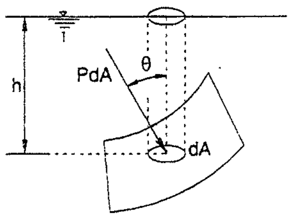
$$dF_v = P \cdot dA \cdot \cos\theta$$

$$F_v = \int P \cdot dA \cdot \cos\theta$$

$$F_v = \gamma \cdot \int h \cdot (dA \cdot \cos\theta)$$

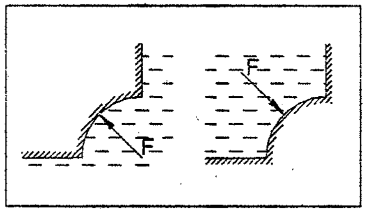
$$F_v = \gamma \cdot \int dVol$$

F_v = *Peso del fluido sobre la superficie*



CASOS EQUIVALENTES:

LINEA DE ACCIÓN.- Con referencia a las coordenadas *x, y*



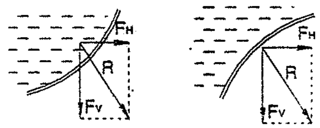
$$F_V \cdot \bar{x} = \int dF_V \cdot x \quad ;$$

$$\bar{x} = \frac{\int dF_V \cdot x}{F_V} = \frac{\gamma \cdot \int dvol \cdot x}{\gamma \cdot vol}$$

donde $\bar{x}$ *es la distancia al eje y*

$$\bar{y} = \frac{\int dvol \cdot y}{vol}$$

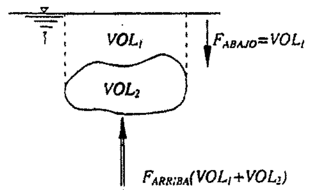
$\bar{x}$ *e* $\bar{y}$ son las coordenadas del centroide del volumen ubicado sobre el área curva, la línea de acción de la F_V pasa por el centroide.



Analíticamente: se encuentra la ecuación de una recta (x, y, z) se la intersecta con la superficie.

Método gráfico

EMPUJE HIDROSTÁTICO



Principio de Arquímedes

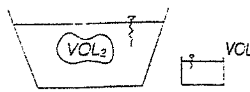
"Sobre un cuerpo sumergido en un líquido actúa la fuerza de empuje, hacia arriba, la cual es igual al peso de la cantidad de líquido desalojado".

El punto de aplicación de dicho empuje es el centro de gravedad del volumen desalojado.

$$F_{\substack{NETA\ O \\ EMPUJE}} = F_{ARRIBA} - F_{ABAJO}$$

$$E = \gamma \cdot (Vol_1 - Vol_2) - \gamma \cdot Vol_1 = \gamma \cdot Vol_2$$

$$\boxed{E = \gamma \cdot Vol_2} \text{ , } Vol_2 = \textit{Volumen Desalojado}$$

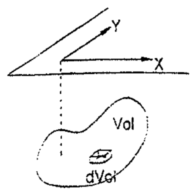


Hallar el punto de aplicación del "*empuje*":

Tomando momentos y:

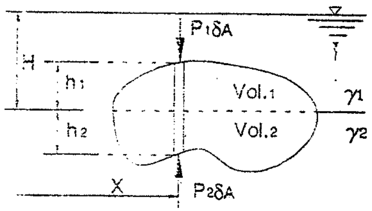
$$\int \gamma \cdot (dVol) \cdot x = \gamma \cdot \bar{x} \cdot Vol$$

$$\boxed{\bar{x} = \frac{\int x \cdot dVol}{Vol}} \quad ; \quad \boxed{\bar{y} = \frac{\int y \cdot dVol}{Vol}} \quad \textit{Centroide}$$



Nos damos cuenta de que el empuje hidrostático pasa **por el centroide** del volumen sumergido mientras que su peso pasa por el C.G.

CUERPO SUMERGIDO ENTRE DOS FLIDOS:



$$\delta E = (P_2 - P_1)\cdot \delta A$$

$$\delta E = ((\gamma_1 \cdot H + \gamma_2 \cdot h_2) - \gamma_1 \cdot (H - h_1))\cdot \delta A$$

$$\delta E = (\gamma_2 \cdot h_2 + \gamma_1 \cdot h_1)\cdot \delta A$$

$$E = \gamma_2 \cdot \int h_2 \cdot dA + \gamma_1 \cdot \int h_1 \cdot dA$$

$$\boxed{E = \gamma_2 \cdot Vol_2 + \gamma_1 \cdot Vol_1} = \sum \gamma_i \cdot Vol_i$$

Cuando $\gamma_1 = \gamma_{aire}$ se considera solamente $\gamma_2 \cdot Vol_2 = E$

$$E \cdot \bar{x} = \gamma_1 \cdot \int x \cdot dVol_1 + \gamma_2 \cdot \int x \cdot dVol_2$$

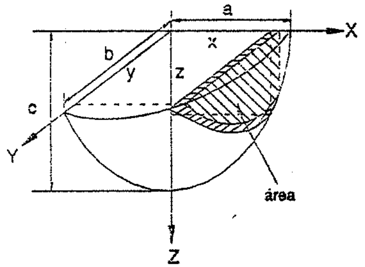
$$\bar{x} = \frac{\gamma_1 \cdot \int x \cdot dVol_1 + \gamma_2 \cdot \int x \cdot dVol_2}{\gamma_1 \cdot Vol_1 + \gamma_2 \cdot Vol_2}$$

$$\bar{x} = \frac{\gamma_1 \cdot \bar{x} \cdot Vol_1 + \gamma_2 \cdot \bar{x} \cdot Vol_2}{\gamma_1 \cdot Vol_1 + \gamma_2 \cdot Vol_2}$$

$$\boxed{\bar{x} = \frac{\sum \gamma_i \cdot \bar{x} \cdot Vol_i}{\sum \gamma_i \cdot Vol_i}}$$

2.33. Hallar el centro de presión $C_P\ (X_P, Y_P)$, y la fuerza vertical a la que está sometido el elipsoide mostrado en la figura.

Resolución:



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(\alpha)$$

(Ecuación del elipsoide)

Hallando F_V

$$F_V = \gamma \cdot Vol = \gamma \cdot \int Area \cdot dx$$

$$F_V = \gamma \cdot \int \left(\frac{1}{4} \cdot y \cdot z\right) \cdot dx \quad \ldots\ldots\ldots(1)$$

Haciendo y, z en función de "x"

De (α), z = 0

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad y^2 = b^2 \cdot \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

$$y_{(x)} = \frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

En y = 0: $\quad \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad z_{(x)} = \dfrac{c}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$

(2) y (3) en (1): $F_V = \gamma \cdot \displaystyle\int_0^a \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2}\right) \cdot \left(\frac{c}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2}\right) \cdot dx$

Finalmente: $\boxed{F_V = \dfrac{1}{6}\gamma \pi a b c}$

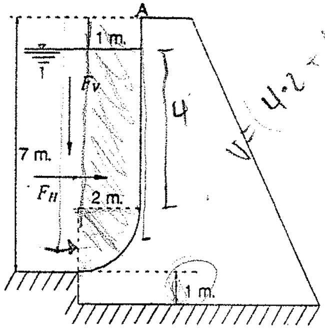
Hallando el CP. $x_p = \dfrac{\int x \cdot dVol}{\int dVol} = \dfrac{\int x \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot \pi \cdot y \cdot z\right) \cdot dx}{\int \left(\frac{1}{4} \cdot \pi \cdot y \cdot z\right) \cdot dx} = \dfrac{3}{8} \cdot a$

$$x_P = \frac{\int y \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot \pi \cdot y \cdot z\right) \cdot dx}{\frac{1}{4} \cdot \pi \cdot a \cdot b \cdot c} = \frac{3}{8} \cdot b$$

2.34. La presa cuya sección se muestra en la figura, está destinada al represamiento de agua con alto contenido de sedimentos y cuyo peso específico puede considerarse igual a 1025 Kg/m^3. para las condiciones mostradas, se pide:

a) El valor de la intensidad de la resultante total de la fuerza que ejerce el agua sobre la presa.

b) La distancia vertical al punto A del punto de aplicación de la resultante.



Resolución:

a) La componente horizontal de la fuerza sobre la presa es:

$$F_H = \gamma \cdot H_G \cdot A = 1025 * 3(7-1)*1Kg \qquad (por\ unidad\ de\ fondo)$$

$$F_H = 18450 Kg$$

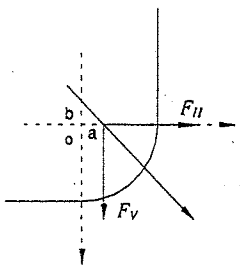
La componente vertical será: $F_V = \gamma \cdot Vol\ sobre\ ella = 1025\left(2*4*1+\frac{\pi(2)^2}{4}*1\right)$

$$F_V = 1025*11.14 = 11420\ Kg$$

El módulo de la fuerza resultante será: $F = \sqrt{F_H^2 + F_V^2} = \sqrt{18450^2 + 11420^2}$

$$\boxed{F = 21.7t}$$

b) Calcularemos la distancia vertical del punto de aplicación de la resultante al punto A, analíticamente:



La ecuación de la línea de acción de la fuerza resultante es: $y = m \cdot x + b$

O también: $x = \frac{y}{m} + a$ ....(1)

Cálculo de la distancia "a" del centro de gravedad C.G. del volumen del líquido al eje Y:

$$a = \frac{\sum_i Vol \cdot x_i}{\sum_i Vol} = \frac{4*2*1+\frac{\pi*2^2}{4}*\frac{4}{3}*\frac{2}{\pi}}{4*2+\frac{\pi*(2)^2}{4}} = 0.96m$$

La pendiente de la recta es: $m = -\frac{F_V}{F_H} = -\frac{11420}{18450} = -0.618m$

Reemplazando estos valores en (1), se tiene: $x = -1.62\,y + 0.96$ ....(2)

La ecuación de la presa en su parte curva es: $x^2 + y^2 = 4$

Reemplazando (2) en (3): $(-1.62\,y + 0.96)^2 + y^2 = 4$

Resolviéndola: $y' = +1.44m$

$y'' = -0.59m$

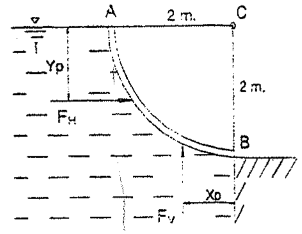
En consecuencia:

Solo es aceptable $y = -0.59\ m$ ya que pertenece al 4° cuadrante.

$$\therefore \boxed{AB = 0.59 + 5.00 = 5.59m}$$

2.35. La compuerta de la figura tiene 3 m de longitud. Calcular la magnitud y ubicación de las componentes de la fuerza que actúa sobre ella.

Resolución:



La componente horizontal, es la fuerza que actúa sobre la proyección CB, es decir:

$$F_H = \gamma \cdot H_G \cdot A_{CB} = 1000*\frac{2}{2}*(2*3)$$

$$\boxed{F_H = 6000\,Kg}$$

Y actúa a una distancia:

$$\boxed{Y_P = \frac{2}{3}*2 = 1.33m}$$

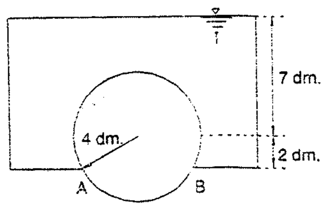
La componente vertical, es el peso de agua que actúa sobre la superficie AB, es decir:

$$F_V = \gamma * \frac{\pi*2^2}{4}*3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{F_V = 9420\,Kg}$$

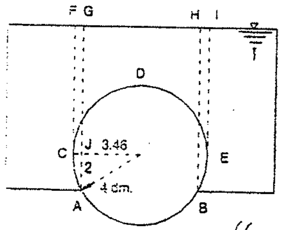
La componente vertical actúa a través del centro de gravedad del volumen del líquido, o sea en el CG de un cuadrante de círculo:

$$X_P = \frac{4*r}{3*\pi} = \frac{4*2}{3*\pi} \quad \Rightarrow \quad \boxed{X_P = 0.85m}$$

2.36. En la figura se tiene un cilindro, de 8dm de diámetro y 3 dm de largo, tapando un hueco de un tanque. ¿Cuál es la fuerza resultante sobre el cilindro, si el tanque tiene una altura de agua de 9 dm?



Resolución:



La presión total será la diferencia entre las fuerzas: hacia arriba en CA y BE, y hacia abajo en CDE:

$F = \gamma \cdot (Vol_{CDEIF} - 2 \cdot Vol_{CAGF})$

Dividiendo estos volúmenes en otros de geometría conveniente, se tiene:

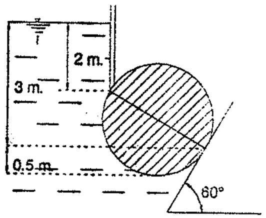
$F = \gamma \cdot Vol_{(CEIF - Semicir.CDE - 2(FGCJ + Secc.Cir.OCA - \Delta OJA))}$

$$F = 3\gamma\left(\left(7*8-\frac{\pi*4^2}{2}\right)-2*\left(7*0.54+\frac{30°}{360°}*\pi*4^2-\frac{2*3.46}{2}\right)\right)$$

Luego: $F = 65.2\gamma$, $\gamma = 1\ {}^{Kg}/_{dm^3}$

$\boxed{F = 65.2\,Kg}$

2.37. Determinar la fuerza horizontal y vertical, debidas a la presión del agua, sobre el cilindro de 2 m de diámetro, por metro de longitud, de acuerdo a los datos que se indican en la figura.



Resolución:

Hay dos empujes horizontales cuyos valores son:

$F_{H_1} = \gamma \cdot H_{G_1} \cdot A_{HE} = 1000\,(2+0.75)(1.50*1)$

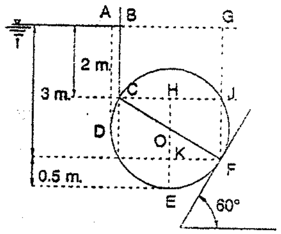
$\Rightarrow F_{H_1} = 4125\,Kg \quad (\rightarrow)$

$\wedge \quad F_{H_2} = \gamma \cdot H_{G_2} \cdot A_{KE} = 1000\,(3+0.25)(0.50*1)$

$\Rightarrow F_{H_2} = 1625\,Kg \quad (\leftarrow)$

El empuje horizontal resultante será:

$F_H = F_{H_1} - F_{H_2} = 4125 - 1625 = 2500\,Kg \quad (\rightarrow)$



Hay dos empujes verticales cuyos valores son:

$F_V \quad en \quad DEF = \gamma \cdot (Vol_{DEFGA}) \quad (\uparrow)$

$F_V \quad en \quad DC = \gamma \cdot (Vol_{ABCD}) \quad (\downarrow)$

El empuje vertical resultante será:

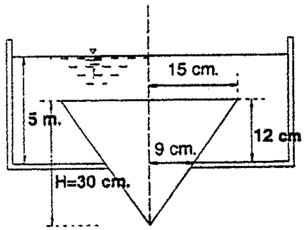
$F_V = \gamma \cdot (Vol_{DEFGA} - Vol_{ABCD}) \quad (\uparrow)$

Pero, como el volumen ABCD está contenido en DEFGA, queda:

$F_V = \gamma \cdot (Vol_{BEFGBCD}) = \gamma \cdot (Vol_{(BCJG + \Delta CJF + SemicircCDEF)})$

$$F_V = 1000\left(1.732*2*1+\frac{1.732*1}{2}*1+\frac{\pi*1^2}{2}\right) = 5900\,Kg \quad (\uparrow)$$

2.38. Un recipiente tiene un orificio circular en el fondo que está obturado por una cuña cónica mostrada en la figura. Calcular la fuerza necesaria para levantar el tapón.

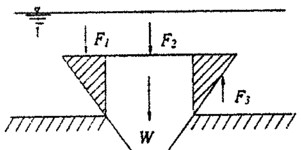


Peso del tapón W

$W = 30\,Kg.$

Líquido: agua

Resolución:



$F = W + F_{TAPA} - F_{CARA\ LATERAL}$

$F = W + (F_1 + F_2) - F_3$

$F = W + F_1 - (F_3 - F_2)$ ....(1)

$F_1 = Fuerza\ sobre\ la\ tapa\ de\ 8\,cm$

$(F_1 - F_2) = Empuje\ sobre\ el\ tronco\ hueco\ (E)$

CÁLCULO DE F_L.- En el sistema M.K.S.

$F_1 = \gamma\,(5 - 0.12)\pi\,(0.09)^2 \quad \Rightarrow \quad F_1 = 124.18\,Kg.$ ....(2)

$E = \gamma \cdot (Vol \quad Tronco\ cono\ hueco)$

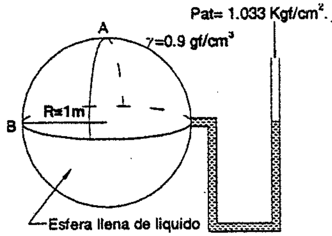
$E = \gamma\left(\pi\frac{R^2 H}{3} - \pi r^2 h - \frac{\pi r^2 (H-h)}{3}\right) \quad \Rightarrow \quad E = 2.48\,Kg$ ....(3)

(3) y (2) en (1): $\Rightarrow$ $\boxed{F = 124.5\,Kg}$

2.39. Para la esfera mostrada, hallar:

a) La componente vertical de la fuerza sobre la superficie AB (1/4 de la esfera)

b) La componente horizontal de la misma fuerza y su punto de aplicación.



Resolución:

En el nivel BB' se cumple: $\dfrac{2 \cdot F_V + W_{LIQUIDO\ SEMIESFERA}}{Area} = P_{at}$

$$\frac{2 \cdot F_V + \gamma \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \pi \cdot R^3\right)}{\pi \cdot R^2} = P_{at}$$

$$\Rightarrow \quad F_V = \frac{\pi R^2}{2}\left(P_{at} - \frac{2}{3}\gamma R\right) \ ;$$

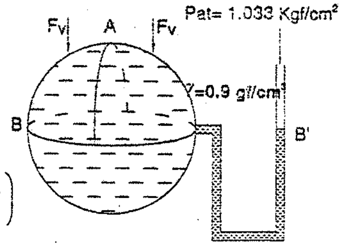
$R = 1m, \quad \gamma = 0.9\ t/_{m^3}; \quad P_{at} = 10.3\ t/_{m^2}$

Se tiene: $\boxed{F_V = 15.2t}$

b) $F_H = \gamma \cdot H_G \cdot A_{PROY}$

$$F_H = \left(900\ ^{Kgf}/_{m^3}\right)\left(1 - \frac{4}{3\pi}\right)m\left(\frac{1}{2} * \pi * 1^2 m^2\right)$$

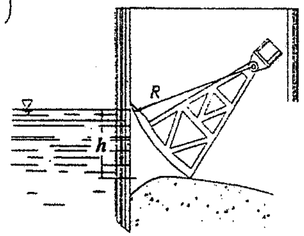
$\boxed{F_H = 814\ Kgf}$



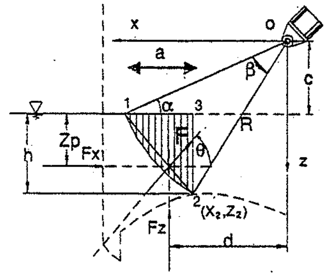
y su punto de aplicación:

$$Y_P = Y_G + \frac{I_G}{A\,Y_G} = \left(R - \frac{4R}{3\pi}\right) + \frac{0.109757\,R^4}{\frac{\pi R^2}{2}\left(R - \frac{4R}{3\pi}\right)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{Y_P = 69\,cm}$$

2.40. Determinar el empuje hidrostático sobre la compuerta radial mostrada en la figura para los datos $h = 1.5\ m$; $R = 3\ m$; y $\alpha = 15°$; el ancho de la compuerta es $b = 5\ m$.



Resolución:



De la geometría de la figura se deduce lo siguiente: $c = R \cdot sen\alpha = 3 \cdot 0.25882 = 0.776m$

Para el sistema de ejes coordenados X-Z, la ecuación del arco de circunferencia es:

$$x^2 + z^2 = R^2 = 9$$

Luego se encuentran las abscisas de los puntos 1 y 2, sustituyendo sus ordenadas en la ecuación anterior:

$z_1 = c = 0.776m \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2.898m$

$z_2 = c + h = 2.276m \quad \Rightarrow \quad x_2 = 1.955m$

Entonces: $a = x_1 - x_2 = 0.943m$

De la figura: $\tan\delta = \frac{z_2}{x_2} = \frac{2.276}{1.955} = 1.1642$

$$\delta = 49°20'17''$$

$$\beta = \delta - \alpha = 34°20'17'' = 0.59931\,rad$$

y: $\quad F_x = \gamma\left(\frac{h}{2}\right)bh = \frac{1}{2}\gamma\,b\,h^2 = \frac{1}{2} * 1 * 5 * 1.5^2 = 5.625t$

Aplicado en: $\boxed{z_P = \frac{2}{3}h = \frac{2}{3}(1.5) = 1.00m}$

La fuerza vertical es: $F_z = \gamma \cdot b \cdot A_{123}$, $A_{123} = A_{121} + A_{123}$,

El área del segmento circular 121 es: (ver tabla II - 1)

$$A_{121} = \frac{1}{2}R^2(\beta - sen\beta) = \frac{1}{2} * 9(0.59931 - 0.5641) = 0.159m$$

El área del triángulo 123 es: $A_{123,} = \frac{1}{2}a\,h = \frac{1}{2} * 0.943 * 1.5 = 0.707m^2$

Finalmente el área sombreada es: $A_{123} = 0.159 + 0.707 = 0.866m^2$

$$\Rightarrow \quad F_z = 1 * 5 * 0.866 = 4.33t$$

$$\wedge \quad \boxed{F = \sqrt{F_x^2 + F_z^2} = 7.098t}$$

Además: $\tan\theta = \frac{F_z}{F_x} = \frac{4.33}{5.625} = 0.7698 \quad \Rightarrow \quad \theta = 37°35'$

Tomando momentos en O: $F_z \cdot d - F_x \cdot (z_P + c) = 0 \quad \Rightarrow \quad d = \frac{F_x \cdot (z_P + c)}{F_z}$

Como: $F_X = \frac{1}{2}bh^2$; $Z_P = \frac{2}{3}h \quad \wedge \quad F_Z = \gamma b\left(\frac{1}{2}R^2(\beta - sen\beta) + \frac{1}{2}a\,h\right)$

$$\Rightarrow \quad d = \frac{\frac{1}{2}\gamma\,b\,h^2\left(\frac{2}{3}h + c\right)}{\frac{1}{2}\gamma\,b\left(R^2(\beta - sen\beta) + a\,h\right)} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{\frac{2}{3}h + c}{\left(\frac{R}{h}\right)^2(\beta - sen\beta) + \frac{a}{h}}$$

Y sustituyendo valores, resulta: $\boxed{d = 2.308m}$

2.41. Hallar las reacciones F_A y F_B en los puntos A y B respectivamente, si la compuerta es un cilindro de peso W.

Resolución:

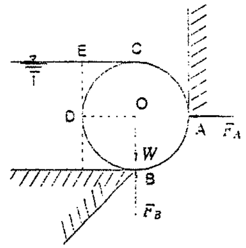
Fza. Horizontal (Reacción en A de F_A)

Fza. Sobre el arco $\widehat{CDB}$

$F_H = \gamma\,H_G\,A_{PROY}$

$F_H = \gamma\,R(2\,R\,L) = 2\gamma\,R^2\,L$

$\boxed{F_A = F_H = 2\gamma\,R^2\,L}$



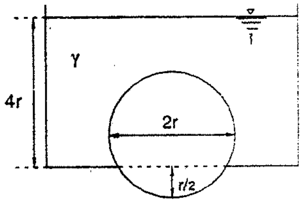
REACCIÓN EN "B"

$$F_B = F_{\widehat{CD}} + W - F_{\widehat{DB}} \quad \Rightarrow \quad F_B = \gamma\, Vol_{CDE} + W - \gamma\left(Vol_{DBO} + Vol_{DOCE}\right)$$

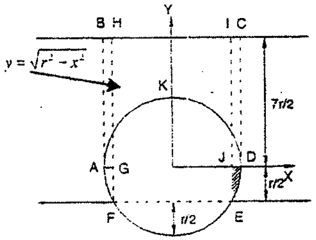
$$F_B = \gamma\, l\left(R^2 - \frac{1}{4}\pi R^2\right) - \gamma\, l\left(\frac{1}{4}\pi R^2 + R^2\right) + W$$

$$F_B = W - \gamma\, l\left(\frac{1}{2}\pi R^2\right)$$

2.42. Determinar la resultante de los empujes verticales sobre la esfera mostrada en la figura para los datos indicados en ella. Si la esfera pesa W, hallar la fuerza necesaria para levantarla.



Resolución:



Cálculo de fuerza que ejerce el líquido sobre la esfera de arriba hacia abajo.

$$F_\downarrow = \gamma \cdot \left(Vol_{cilindroABCD} - Vol_{semi.esferaADK}\right)$$

$$F_\downarrow = \gamma \cdot \left(\frac{7}{2}\cdot\pi\cdot r^3 - \frac{2}{3}\cdot\pi\cdot r^3\right) = \frac{17}{6}\cdot\gamma\cdot\pi\cdot r^3$$

Cálculo de la fuerza del líquido sobre la esfera de abajo hacia arriba.

$$F_\uparrow = \gamma\left(Vol_{ABHG+JICD} + Vol_{AGF+JDE}\right)$$

De la figura: $Vol_{ABHG+JICD} = \pi\cdot\left(r^2 + \frac{3}{4}r^2\right)\frac{7}{2}r = \frac{7}{8}\pi r^3$

$$Vol_{AGF+JDE} = \int 2\pi x\sqrt{r^2 - x^2}\, dx = -\frac{2\pi}{3}\sqrt{\left(r^2 - x^2\right)^3}\Bigg|_{\frac{\sqrt{3}}{2}r}^{r} = \frac{\pi r^3}{12}$$

Luego: $$F_\uparrow = \gamma\left(\frac{7}{8}\pi r^3 + \frac{\pi r^3}{12}\right) = \frac{23}{24}\gamma\pi r^3$$

a) La resultante de los empujes verticales es:

$$F_R = F_\downarrow - F_\uparrow = \frac{17}{6}\gamma\pi r^3 - \frac{23}{24}\gamma\pi r^3$$

$$\boxed{F_R = \frac{15}{8}\gamma\pi r^3 \quad (hacia \quad abajo)}$$

b) La fuerza necesaria para levantar la esfera es: $\boxed{F = W + \frac{15}{8}\gamma\pi r^3}$

Pto CARENA = CENTRO FLOTACIÓN

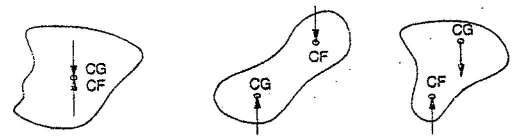
PRINCIPIO DE ARQUÍMEDES

"Las fuerzas que actúan sobre un cuerpo sumergido en un fluido en equilibrio tienen una resultante única, que es el empuje hidrostático y es igual al peso del volumen del fluido desalojado y cuyo punto de aplicación es el centro de gravedad del volumen de dicho fluido"

Centro de Flotación CF: es el centro de gravedad del volumen desalojado.

ESTABILIDAD DE LOS CUERPOS SUMERGIDOS

Equilibrio indiferente — Equilibrio estable — Equilibrio inestable



El peso del cuerpo sumergido está aplicado en su CG y el empuje en el CF ($\vec{F}$ flotac.

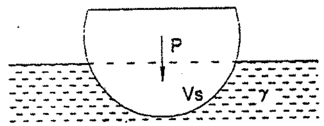
Peso específico relativo del sólido (Sumergido)= Peso en el aire (Pérdida de peso)

FLOTACIÓN

Un cuerpo flota cuando se sumerge parcialmente en un líquido hasta desplazar un volumen igual a su peso.

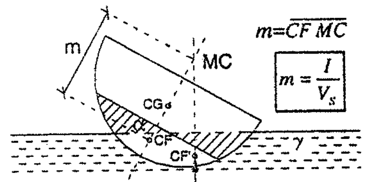
$$\boxed{P = V_S \cdot \gamma}$$

$$V_S = \frac{P}{\gamma}$$



Para que un cuerpo flote, es necesario que el centro de flotación está por debajo del CG del cuerpo.

Para que halla equilibrio y flotación estable, el metacentro debe estar por encima del CG del cuerpo.



$m = \overline{CF\,MC}$

$$\boxed{m = \frac{I}{V_S}}$$

METACENTRO: Es la posición límite que tiende a ocupar la intercepción de la recta formada por el CG y el CF primitivos con la recta formada por el nuevo centro de flotación CF' cuando el ángulo tiende a cero.

Distancia Metacéntrica: $\overline{CG\,MC}$

I = menor momento de inercia de la superficie de la intercepción LÍQUIDO - SÓLIDO

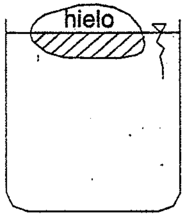
V_S = Volumen de sólido sumergido.

2.43. En un vaso de agua flota un pedazo de hielo. ¿Cómo cambia el nivel del agua en el vaso cuando el hielo se derrite? Analizar los siguientes casos:

1) El hielo es completamente homogéneo
2) En el hielo se encuentra una piedra fuertemente adherida.
3) Dentro del pedazo de hielo hay una burbuja de aire.

Resolución:

1) Como el pedazo de hielo flota, el peso de toda el agua desplazada por éste es igual al peso del propio hielo o del agua recibida de éste. Por eso el agua que se forma después del deshielo ocupará un volumen igual al volumen de la parte hundida del pedazo de hielo y por consiguiente el nivel del agua no cambiará:



Peso hielo = Empuje

$$\gamma_{HIELO} \cdot V_{HIELO} = \gamma_{AGUA} \cdot V_{HIELO\ SUMERGIDO}$$

$$V_{HIELO\ SUMERGIDO} = \frac{\gamma_{HIELO} \cdot V_{HIELO\ TOTAL}}{\gamma_{AGUA}} \quad \text{.....(1)}$$

$$\gamma_{HIELO} \cdot V_{HIELO\ TOTAL} = \gamma_{AGUA} \cdot V_{HIELO\ DERRETIDO}$$

$$V_{HIELO\ DERRETIDO} = \frac{\gamma_{HIELO} \cdot V_{HIELO\ TOTAL}}{\gamma_{AGUA}} \quad \text{......(2)}$$

$\Rightarrow$ (2) = (1)

$$\boxed{V_{HIELO\ SUMERGIDO} = V_{HIELO\ DERRETIDO}}$$

2) El volumen de la parte sumergida del pedazo de hielo con la piedra es mayor que la suma de los volúmenes de la piedra y el agua que se obtiene después del deshielo. Por lo tanto el nivel del agua en el vaso se descenderá.
3) El peso del agua desplazada es igual al peso del hielo (el peso del aire en una burbuja puede despreciarse). Por eso igualmente como en el caso (1) el nivel del agua no cambiará.

2.44. Un cuerpo homogéneo y compacto colocado en un líquido con peso específico γ_1, pesa W_1; y colocado en un líquido con peso específico γ_2, pesa W_2. Determinar el peso específico γ del cuerpo.

Resolución:

El peso del cuerpo hundido en el líquido γ_1

$$W_1 = (\gamma - \gamma_1) \cdot V \quad \text{.....................(1)}$$

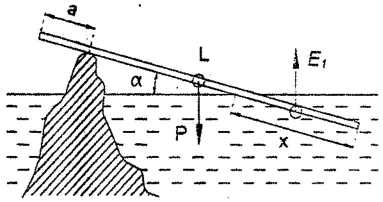
En el segundo caso: $W_2 = (\gamma - \gamma_2) \cdot V$ ....(2)

De (1) y (2)

$$\frac{W_1}{\gamma - \gamma_1} = \frac{W_2}{\gamma - \gamma_2}$$

$$\therefore \quad \boxed{\gamma = \frac{W_1 \cdot \gamma_2 - W_2 \cdot \gamma_1}{W_1 - W_2}}$$

2.45. Una tabla que tiene uno de los extremos fuera del agua se apoya en una piedra que a su vez sobresale del agua. La tabla tiene una longitud "L". Una parte de la tabla de longitud a se encuentra sobre el punto de apoyo. Ver figura, ¿qué parte de la tabla está hundida si el peso específico de la madera es γ ?



Resolución:

$$E_1 \cdot \left(l - a - \frac{x}{2} \right) \cdot \cos\alpha = P \cdot \left(\frac{l}{2} - a \right) \cdot \cos\alpha \quad \text{.....................(1)}$$

Donde:

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= S \cdot x \cdot \gamma_0 \\ P &= S \cdot l \cdot \gamma \end{aligned} \right\} \quad \text{.....................(2)}$$

Además: S = *Área de la sección transversal de la tabla*

γ_0 = *peso específico del agua*

(2) en (1) tenemos:

$$x = (l - a) \pm \sqrt{(l-a)^2 - \frac{\gamma}{\gamma_0} \cdot (l - 2 \cdot a) \cdot l}$$

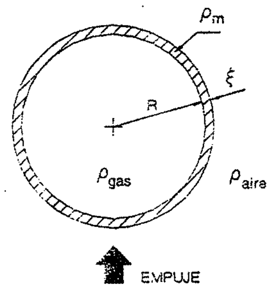
como $(l - a) > x$; entonces es válida solamente una solución.

$$\boxed{x = (l - a) - \sqrt{(l-a)^2 - \frac{\gamma}{\gamma_0} \cdot l \cdot (l - 2 \cdot a)}}$$

2.46. Se necesita que una esfera hueca, de radio interior "*R*", llena de un gas de densidad ρ, flota en el aire. Si el material de que está hecha la esfera tiene una densidad ρ_m, hallar su espesor ξ.

Resolución: $EMPUJE = PESO\ GAS + PESO\ BOLA$

$$g\cdot\rho_{AIRE}\cdot\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot(R+\xi)^3 = g\cdot\rho_{GAS}\cdot\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot R^3 + g\cdot\rho_{GAS}\cdot\left(\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot(R+\xi)^3-\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot R^3\right)$$



$$\rho_{GAS}\cdot R^3+\rho_m\cdot(R+\xi)^3-\rho_m\cdot R^3=\rho_{AIRE}\cdot(R+\xi)^3$$

$$(\rho_{GAS}-\rho_m)\cdot R^3=(\rho_{AIRE}-\rho_m)\cdot(R+\xi)^3$$

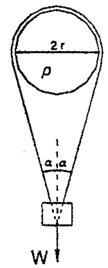
$$\frac{R+\xi}{R}=\sqrt[3]{\frac{\rho_{GAS}-\rho_m}{\rho_{AIRE}-\rho_m}}$$

Finalmente:

$$\xi=R\cdot\sqrt[3]{\frac{\rho_{GAS}-\rho_m}{\rho_{AIRE}-\rho_m}}-R$$

$$\boxed{\xi=R\cdot\left(\sqrt[3]{\frac{\rho_{GAS}-\rho_m}{\rho_{AIRE}-\rho_m}}-1\right)}$$

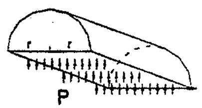
2.47. Un globo cilíndrico de longitud *L* y radio *r*, lleva una barquilla de peso *W* enlazada al globo con *2n* de cables. Determinar la presión mínima *p* del gas para que el globo permanezca perfectamente hinchado. Ver figura.



Resolución:

La parte superior del globo es la que va a sufrir el aplastamiento de los cables, y la fuerza que va a mantener hinchado al globo en esa parte es:

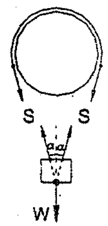
$$F_1=p\cdot(2\cdot r\cdot L)=2\cdot p\cdot r\cdot L$$



La fuerza de los n cables sobre el globo es:

$$F_2=2\cdot S\cdot n$$

Y la presión mínima que debe tener el globo para que permanezca perfectamente hinchado se obtiene igualando estas dos fuerzas, es decir:



$$F_1=F_2$$

$$2\cdot p\cdot r\cdot L=2\cdot S\cdot n$$

Pero: $2\cdot S\cdot n\cdot\cos\alpha=W$

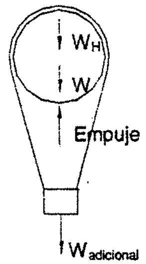
Finalmente la presión mínima es: $\boxed{p=\dfrac{W}{2\cdot r\cdot L\cdot\cos\alpha}}$

2.48. Un globo aerostático debe permanecer estacionario a un nivel de la atmósfera donde las condiciones hacen que el peso específico del aire sea 0.96 Kg/m^3 para lo cual en el momento de la partida debe colocársele peso adicional que debe ser calculado sabiendo que el globo es inflado con hidrógeno de peso específico 0.08 Kg/m^3 ocupando un volumen de 25 m^3 y siendo el peso de la parte sólida 12 *Kg*.

Resolución:

Para que el globo permanezca estacionario debe cumplirse: $\sum F=0$

Entonces:



$$E_{aire}-W-W_H-W_{adicional}=0$$

$$W_{adicional}=E_{aire}-W-W_H \quad\text{.................................(1)}$$

$$E_{aire}=\gamma_{aire}\cdot V=0.96(25)=24\,Kg$$

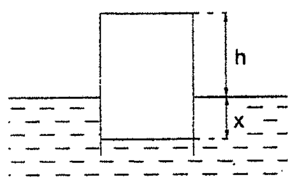
$$W_H=\gamma_H\cdot V=0.08(25)=2\,Kg$$

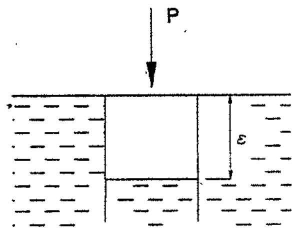
Reemplazando los valores anteriores en (1):

$$W_{adicional}=24-12-2$$

$$\boxed{W_{adicional}=10\,Kg}$$

2.49. Un vaso cilíndrico de peso *W* y sección *A* se encuentra invertido en un fluido de densidad *ρ*, sobresaliendo la altura *h*. Si la relación entre la temperatura inicial y final del aire dentro del vaso es *n*, hallar la fuerza *F(Pat, A, h, W, ρ, n)* necesaria para sumergirla como muestra la figura.





Resolución:

Por la ecuación de los gases perfectos se sabe que: $\frac{P \cdot V}{T} = Constante$

Entonces para el gas dentro del recipiente:

$$\frac{(P_{at} + \gamma \cdot x) \cdot ((h + x) \cdot A)}{T_{inicial}} = \frac{(P_{at} + \gamma \cdot \xi) \cdot (A \cdot \xi)}{T_{final}}$$

$$(P_{at} + \gamma \cdot x) \cdot ((h + x) \cdot A) = (P_{at} + \gamma \cdot \xi) \cdot (A \cdot \xi) \cdot n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

En el primer caso: $W = Empuje$

$$W = \gamma \cdot A \cdot x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

En el segundo caso: $F + W = \gamma \cdot (A \cdot \xi)$ ....(3)

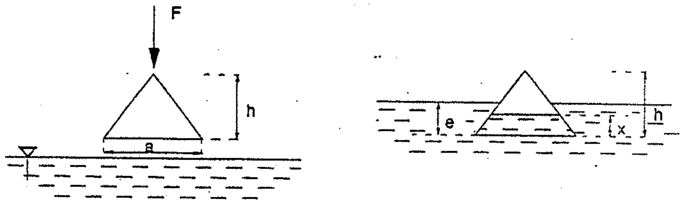
Se reemplaza el valor de x de la ecuación (2) en (1), luego se encuentra el valor de ξ a partir de una ecuación cuadrática, siendo:

$$\gamma \cdot \xi = -\frac{P_{at}}{2} + \sqrt{\frac{P_{at}^{2}}{2^2} + \frac{1}{n} \cdot \left(P_{at} + \frac{W}{A}\right) \cdot \left(\rho \cdot g \cdot h + \frac{W}{A}\right)}$$

Reemplazando en (3), se tiene:

$$\boxed{F = A \cdot \left(-\frac{P_{at}}{2} + \sqrt{\left(\frac{P_{at}}{2}\right)^2 + \frac{1}{n} \cdot \left(P_{at} + \frac{W}{A}\right) \cdot \left(\rho \cdot g \cdot h + \frac{W}{A}\right)}\right) - W}$$

2.50. Un cono hueco es forzado dentro del agua hasta la posición mostrada en la figura, mediante una fuerza F. Desarrollar las ecuaciones necesarias para poder determinar "e". Despreciar el peso del cono y el espesor de sus paredes, establecer las hipótesis necesarias.



Resolución:

Las ecuaciones necesarias para obtener $e = f(a, F, h, \gamma)$ son:

Por la ley de Boyle: $P.V = Constante$

En un instante antes de sumergirse: $P_0 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{\pi \cdot a^2}{4} \cdot h\right) = c$ ....(1)

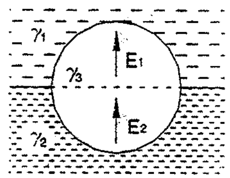
Luego de sumergirse: $(P_0 + \gamma \cdot (e - x)) \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{\pi \cdot s^2}{4} \cdot (h - x)\right) = c$ ....(2)

Donde: $s = \frac{a \cdot (h - x)}{h}$, y finalmente: $F = Empuje$

Por equilibrio:

$$F = \frac{\gamma \cdot \pi \cdot (e - x)}{12} \cdot (s^2 + s \cdot m + m^2) \quad , \quad donde: \boxed{m = \frac{a \cdot (h - e)}{h}}$$

2.51. Determinar el peso específico de una esfera que flota entre dos líquidos de densidad 0.8 y 1. Sabiendo que la línea de separación de los dos líquidos pasa por el centro de la esfera.



Resolución:

Por el principio de Arquímedes: el empuje hidrostático es igual al peso del volumen desalojado.

Los empujes para esta esfera son dos:

$$E_1 = Vol \cdot Peso\ esp. = V \cdot \gamma = \frac{4 \cdot \pi \cdot R^3}{(2)(3)} \cdot \gamma_1$$

$$E_2 = \frac{4 \cdot \pi \cdot R^3}{(2)(3)} \cdot \gamma_2$$

Como la esfera está en equilibrio se debe tener: *Empuje total = Peso de la esfera*

O sea que: $E_1 + E_2 = \frac{4 \cdot \pi \cdot R^3}{3} \cdot \gamma_3$

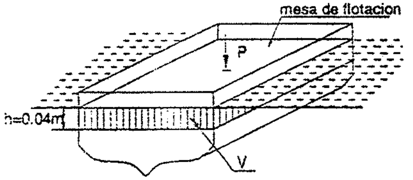
Reemplazando E_1 y E_2: $\frac{4 \cdot \pi \cdot R^3}{(3)(2)} \cdot (\gamma_1 + \gamma_2) = \frac{4 \cdot \pi \cdot R^3}{3} \cdot \gamma_3$

De donde: $\boxed{\gamma_3 = \frac{1}{2} \cdot (\gamma_1 + \gamma_2) = 0.9\ gf/cm^3}$

2.52. Un buque que flota en equilibrio, es cargado con 10250 *Kgf*, lo que hace que éste se sumerja 4 *cm*. Hallar la superficie de flotación sobre el nivel del mar. ($\gamma_{agua\ de\ mar}$ = 1025 Kg/m^3)

Resolución:

Por el principio de Arquímedes: el nuevo peso (10250 *Kgf*) del buque debe ser igual al peso del volumen del líquido desalojado: $P = V \cdot \gamma$



Por datos:

$P = 10250 Kgf$, $\gamma = 1025 \, ^{Kgf}/_{m^3}$

Luego:

$$V = \frac{P}{\gamma} = \frac{10250}{1025} = 10 m^3$$

Éste volumen sumergido debe ser igual a:

$V = Superficie \, . \, h$

Como se sumerge $h = 4 \, cm = 0.04 \, m$

$$Superficie = \frac{V}{h} = \frac{10}{0.04}$$

$$\boxed{Superficie \ de \ flotación: 250 m^2}$$

2.53. Si una bola de acero pesa en el aire 12 Kg. ¿Cuánto pesará en el agua?.

Densidad relativa del acero $= 7.8$.

Resolución:

Se sabe que el peso específico relativo de un sólido sumergido en un líquido, es igual al cociente entre su peso en el aire y la pérdida de peso.

$$\gamma_1 = \frac{P}{P - P'}$$

Donde: $P = 12000 \, g$.

γ_1 = *peso específico relativo del sólido*

P = *peso del sólido en el líquido*

Reemplazando éstos valores en la fórmula, se tiene:

$$7.8 = \frac{12000}{12000 - P'}$$

$$P' = \frac{(12000)(7.8) - 12000}{7.8}$$

$$\boxed{P' = 10462 \, g}$$

2.54. Una pequeña bola de concreto (γ_1 = 2.4 g/cm^3) se deposita suavemente en la superficie de una corriente de agua, con velocidad de 3 m/s y de profundidad 8 m. ¿Cuánto tiempo tarda la bola en tocar el fondo del canal?, ¿A qué distancia medida horizontalmente desde el punto de partida, tocará el fondo?

Resolución:

Cuando la bola se encuentre en el agua, hay una fuerza resultante R que tiende a bajar al cuerpo:

R = *Peso de la bola - Empuje hidrostático*

O sea: $m \cdot a = m \cdot g - \frac{m \cdot g}{2.4} \cdot \gamma = m \cdot g \cdot \left(1 - \frac{1}{2.4} \cdot \gamma\right)$

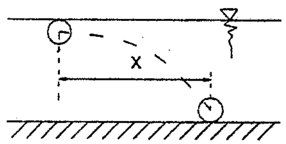
Simplificando: $a = g \cdot \left(1 - \frac{1}{2.4}\right) = 9.8(0.58)$

$a = 5.68 \, ^{m}/_{s^2}$ *(aceleración con que baja el sólido de concreto)*

Con ésta aceleración vertical, recorre un espacio vertical de 8 m, luego como:

$$e = \frac{a \cdot t^2}{2} \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{(2)(8)}{5.68}}$$

$$t = 1.68 s$$



Como la velocidad de la corriente es constante e igual a 3 m/s, la bola recorrerá una distancia:

$$X = v \cdot t = 3(1.68)$$

$$\boxed{X = 5.04 \, m}$$

2.55. Un cilindro hueco, sin tapa, de 4 m de alto y 1 m^2 de sección recta, se introduce invertido en el agua, llevando suspendido un volumen de concreto de 1 m^3.

a) ¿Qué altura "d" del cilindro quedará sumergida?

b) Existe una segunda altura "d", estando el cilindro enteramente sumergido, en que se encuentra en equilibrio.

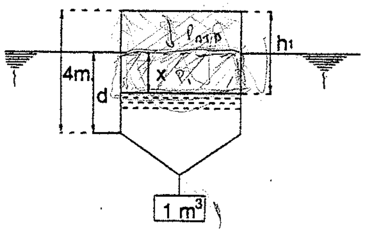
Indique este segundo valor de "d" e indicar si esta posición es estable.

Despréciese el peso de las paredes del cilindro.

Peso específico del concreto = 2400 Kg/m^3

Resolución:

Sabemos que el volumen del agua desalojada por el concreto es de 1 m^3, luego el peso del agua desalojada es: $P = \gamma \cdot V = 1000(1) = 1000 \, Kg$



En consecuencia, el concreto dentro del agua pesará:

$$(2400)1-(1000)1=1400\,Kg$$

Y si "X" es la diferencia de niveles, se tiene:

$$(1m^2)\cdot X\cdot 1000=1400 \Rightarrow X=\frac{1400}{1000}=1.4m$$

Como las presiones son inversamente proporcionales a los volúmenes:

$$\frac{P_e}{P_i}=\frac{V_i}{V_e}$$, donde

P_e = *presión exterior* = 10330 Kg/m^2

P_i = *presión interior* = 10330 + 1400 = 11730 Kg/m^2

V_i = *Volumen reducido* = 1 m^2. $h_1 = h_1$

V_e = *Volumen fuera del agua* = 1 m^2.(4 m) = 4 m^3

Reemplazando los respectivos valores:

$$\frac{10330}{11730}=\frac{h_1}{4} \quad\Rightarrow\quad h_1=\frac{10330(4)}{11730}=3.52m$$

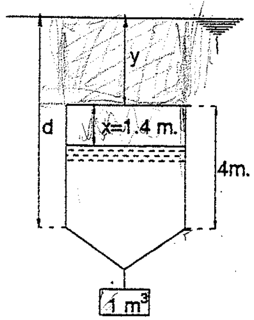
1,033 Vs/cm^2

Luego: $d=4-h_1+X=4-3.52+1.4=1.88$

$$\boxed{d=1.88m}$$

10330 Kg/m^2

Si el cilindro se sumerge una distancia "Y", la presión interior en el cilindro aumentará, porque la diferencia de niveles aumenta. Esta presión interior vale:



$$P_i=10330+1400+1000\,y$$
$$P_i=11730+1000\,y$$

Como el concreto en el agua siempre pesará 1400 Kg, en el cilindro habrá un volumen Vi:

$$1400=1000\,V_i$$
$$V_i=1.4m^3$$

Reemplazando P_i y V_i en la ley de los gases:

$$\frac{10330}{11730+1000\,y}=\frac{1.4}{4}$$

Despejando: $y=\frac{24898}{1400}=17.78m$

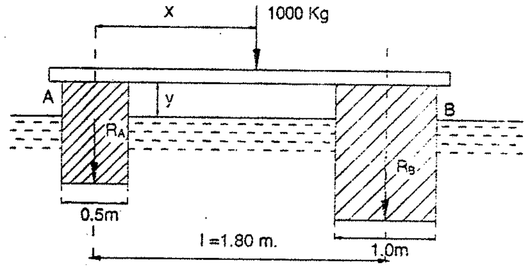
La distancia d será: $d=y+4 \quad\rightarrow\quad d=17.78+4$

Entonces: $\boxed{d=21.78\,m}$

El equilibrio es <u>estable</u>, por estar el CG mas bajo que el CP (condición de estabilidad para los cuerpos sumergidos).

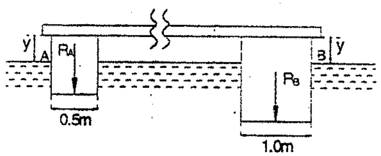
2.56. Una pasarela flotante se compone de dos vigas de 6 m de largo cada una y de 0.5x0.5 y 1.00 de sección respectivamente, siendo su distancia entre ejes de 1.50 m, y el peso de los tableros 300 Kg. Determinar la posición "x" de una carga fija de 1000 Kg que se ha de colocar para que el tablero quede horizontal, y hallar la distancia "y" de su cara inferior a la superficie del agua.

Peso específico de las vigas : 800 Kg/m^3.



<u>Resolución:</u>

Al estar en flotación la pasarela, las vigas sufren un empuje del agua, y trae una reacción de éstas como consecuencia, calculándolas:



Momento con respecto al punto A:

$$R_B(1.50)=1000x$$
$$\Rightarrow R_B=667x \quad \text{.................(1)}$$

Momento con respecto al punto B:

$$R_A(1.50)=1000(1.50-x)$$
$$\Rightarrow R_A=1000-667x \quad \text{......(2)}$$

Para formar dos ecuaciones más, por el centro de la pasarela hacemos un corte.

<u>Por Arquímedes</u>:

Peso del cuerpo flotante = peso del volumen del agua desalojado.

Para la viga A:

$$\frac{300}{2}+R_A+(0.5)(0.5)(6)(800)=0.5\cdot(0.5-y)(6)(1000)$$
$$150+R_A+1200=3000\cdot(0.5-y)$$

$$R_A = 150 - 3000 \cdot y \quad \text{...(3)}$$

Para la viga B:

$$\frac{300}{2} + R_A + (1.0)(1.0)(6)(800) = 1.0(1.0 - y)(6)(1000)$$

$$150 + R_B + 4800 = 6000(1.0 - y)$$

$$R_B = 1050 - 6000\, y \quad \text{...(4)}$$

Igualando (2) con (3) y (1) con (4):

$$1000 - 667\,x = 150 - 3000\, y$$

$$667\,x = 1050 - 6000\, y \quad \text{...(5)}$$

Sumando: $1000 = 1200 - 9000\,y$

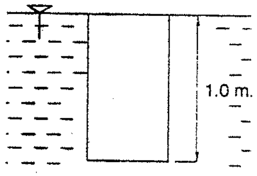
$9000\,y = 200$

$\therefore \quad \boxed{y = 0.022m}$

Este valor "y" en (5): $667\,x = 1050 - 6000(0.022)$

De donde: $\boxed{x = 1.38m}$

2.57. Un prisma de 1 m de altura cuyo peso específico es 750 Kg/m^3, está sumergida en agua limpia, sujeto en la posición indicada en la figura.



Al soltar el prisma, éste sobresale de la superficie del líquido.

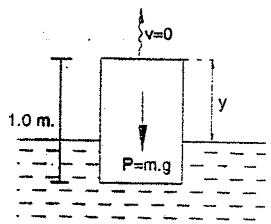
Calcular la altura máxima "x" hasta la cual se elevará

Resolución:

Como el prisma está forzado en esa posición inicial, tiene un empuje superior a su peso. La resultante es la fuerza que elevará dicho prisma.

$$F = E - Peso \quad \text{...(1)}$$

Si llamamos "y" la altura (genérica) que el prisma emerge, se tendrá:



$$E = (1 - y)1000\,A$$

$$P = 1 * 750\,A$$

$$F = m\,a = \frac{1 * 750\,A}{g}a$$

Reemplazando estos valores en (1):

$$\frac{750\,A}{g}a = (1 - y)1000\,A - 750\,A$$

Despejando: $a = g\left(\frac{1000}{750} - \frac{1000\,y}{750} - 1\right)$ ....(2)

Se sabe que: $v\,dv = a\,ds$ ....(3)

Reemplazando (2) en (3): $v \cdot dv = g \cdot \left(\frac{1000}{750} - \frac{1000 \cdot y}{750} - 1\right) \cdot dy$

Integrando: $\frac{v^2}{2} = g \cdot \left(\frac{1000 \cdot y}{750} - \frac{1000 \cdot y^2}{750} - y\right)$ ....(4)

La altura máxima se alcanzará cuando la velocidad sea cero, para luego bajar, hasta quedar en estado de flotación.

Entonces, para: $v = 0 \;\Rightarrow\; y = x$

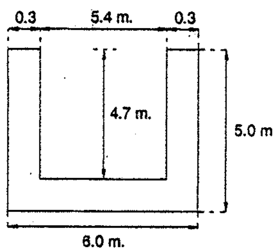
En (4): $\frac{1000\,x}{750} - \frac{1000\,x^2}{750} - x = 0$

Luego queda: $\frac{100}{75} - 1 = \frac{100\,x}{150}$

Finalmente: $\boxed{x = 0.50m}$

2.58. En cierta obra portuaria se requiere construir un cilindro hueco de 6 m de diámetro exterior, 5 m de altura de paredes y fondo de concreto armado, (2500 Kgf/m^3), y un espesor de 0.30 m. Este cilindro deberá ser remolcado a su posición definitiva donde será hundido. Se quiere saber si flotará establemente. Ver figura. ($\gamma' = 1025$ Kg/m^3 agua de mar).

Resolución:



El volumen de la parte lateral del cilindro es:

$$V_1 = \frac{\pi}{4}(6^2 - 5.4^2)4.70$$

$$V_1 = 25.24m^3$$

El volumen del fondo es:

$$V_2 = \frac{\pi}{4}(6^2)(0.30)$$

$$V_2 = 8.48m^3$$

El volumen total del cilindro hueco será:

$$V = 25.24 + 8.48 = 33.72m^3$$

Luego, su peso será:

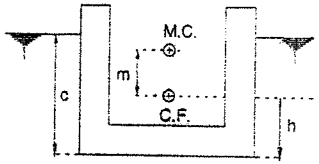
$$W = \gamma' \cdot V = (2500)(33.72) = 84300\,Kg$$

Por Arquímedes: (volumen que desaloja el cilindro)

$$84300 = 1025V_d \quad \rightarrow \quad V_d = \frac{84300}{1025} = 82.24\,m^3$$

Luego podemos calcular su calado:

$$V_d = \left(\begin{array}{c}\textit{Area de la base} \\ \textit{cilindro}\end{array}\right) \cdot \textit{altura}$$



De donde:

$$C = \frac{V_d}{\frac{\pi(6)^2}{4}} = \frac{82.24}{9\pi} = 2.91m$$

El centro de flotación con respecto al fondo del cilindro o al nivel del mar será:

$$h = \frac{2.91}{2} = 1.45m$$

La distancia del centro de flotación al metacentro será:

$$m = \frac{I}{V_d} \quad \Rightarrow \quad donde \qquad I = \frac{\pi(d)^4}{64} = \frac{\pi(6)^4}{64} = 63.5\,m^5$$

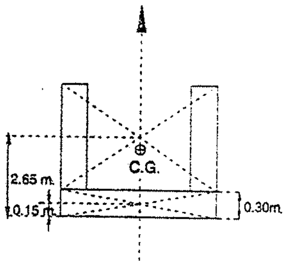
$$V_d = 82.24\,m^3$$

Reemplazando: $m = \dfrac{63.5}{82.24} = 0.77m$

Cálculo del centro de gravedad del cilindro:

$$y_g = \frac{V_1 y_1 + V_2 y_2}{V_1 + V_2}$$

$$y_g = \frac{25.24 * 2.65 + 8.48 * 0.15}{25.24 + 8.48} = \frac{68.10}{33.72} = 2.02$$



Para que halla equilibrio o flotación estable se necesita:

m = Distancia del centro de F del Metacentro > Centro de flotación del centro de gravedad

$0.77 > 2.02 - 1.46$

$0.77 > 0.57$

Como cumple la condición de flotación requerida, se concluye que la flotación será estable. *(Resp.)*

2.59. Un tanque de lados verticales, tiene una base que es un cuadrado de 4' de lado, 10' de altura y está lleno hasta una altura de 9' con agua. Se introduce en el tanque un cubo de madera, de peso específico 0.5 g/cm^3, cuyo lado es 2', en tal forma que

flote con una cara dispuesta horizontalmente. ¿Aumentará la fuerza sobre uno de los lados del tanque?, ¿Cuál será el aumento?, (1 g/cm^3 = 62.4 lb/pie^3)

Resolución:

Si aumentara la fuerza en los costados del tanque, pues al flotar el cubo de madera, aumenta la carga de agua en h, como se observa en la figura.

Cálculo de "h":

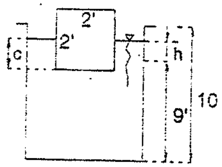
Peso del cubo $= \gamma \cdot V_1$

$62.4(2)^3\, 0.5 = (2)(2)(C)(62)(4)(1.0)$

$\therefore C = 1.0\,pies$

Vol. de agua + Vol. cubo sumergido $= (9 + h)(4)(4)$

$(4)(4)(9) + (2)(2)(1) = (9 + h)(4)(4)$



De donde se obtiene: $\boxed{h = \frac{1}{4}\,de\ pie}$

Entonces la nueva altura del líquido será: $9 + \dfrac{1}{4} = \dfrac{37}{4}\,pies$

La fuerza sobre una cara del tanque es:

$$F' = \gamma \cdot H_G \cdot A = 62.4 * \frac{37}{4}\left(4 * \frac{37}{8}\right) = 10610\ libras$$

La fuerza sobre esta misma cara, inicialmente era:

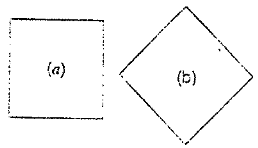
$$F'' = \gamma \cdot H_G \cdot A = (62)(4)(4)(9)\frac{9}{2} = 10044\,libras$$

El aumento de la fuerza será:

$$F = F' - F'' = 10610 - 10044$$

$$\boxed{F = 566\,libras}$$

2.60. Se tiene una barra de sección cuadrada, de material homogéneo, de densidad relativa 0.5. Se quiere saber en cual de las dos posiciones (*a*) ó (*b*) flotaría en el agua, con equilibrio estable.



¿Qué pasaría si la densidad de la barra fuera 0.9?

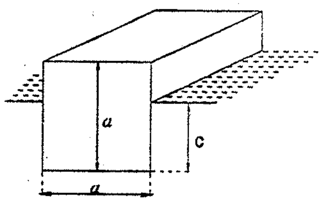
Resolución:

CASO (*a*):

Por Arquímedes:

Peso del cuerpo = peso del agua del volumen desalojado

$$a^2 L(0.5) = \gamma\, a L c$$
$$calado = c = 0.5\,a$$



El centro de flotación, contando a partir del nivel del mar, que es donde está su centro de gravedad, es:

$$h = \frac{0.5\,a}{2} = 0.25\,a$$

La distancia del centro de flotación al metacentro es: $m = \dfrac{I}{V}$

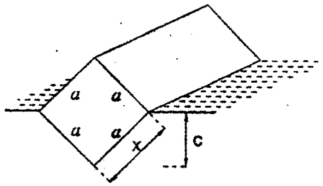
$$m = \frac{\dfrac{a^3 L}{12}}{a\dfrac{a}{2}L} = \frac{a}{6}$$

La flotación estable requiere: m > Distancia CF - CG

Y como para este caso $\dfrac{a}{6} < 0.25\,a$,esta posición es INESTABLE

CASO (b):

Por Arquímedes: $a^2 \cdot L \cdot (0.5) = \gamma \cdot \dfrac{x^2}{2} \cdot L$



De donde: $x = a$

Luego el calado será: $c = \dfrac{a\cdot\sqrt{2}}{2}$

El centro de flotación, contado a partir del nivel del agua o centro de gravedad del sólido es: $h = \dfrac{c}{3} = \dfrac{a\sqrt{2}}{6}$

La distancia del centro de flotación al metacentro es: $m = \dfrac{I}{V}$

$$m = \frac{\dfrac{\left(a\cdot\sqrt{2}\right)^3 \cdot L}{12}}{\dfrac{a^3\cdot L}{2}} = \frac{a\cdot\sqrt{2}}{3}$$

La flotación estable requiere: $m >$ *Distancia CF - CG*

En este caso: $m = \dfrac{a\cdot\sqrt{2}}{3} > \dfrac{a\cdot\sqrt{2}}{6}$

Luego esta posición es ESTABLE.

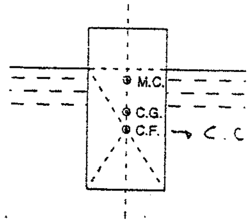
Si la densidad relativa de la barra es 0.9, los resultados son los mismos.

2.61. Un cilindro de madera, llena de un aceite, tiene un diámetro de 20 cm y una altura de 10 cm. si la densidad promedio del cilindro con el aceite es 0.8 g/cm^3, hallar la distancia o altura metacéntrica, ¿Es estable la flotación en el agua?

Resolución:

Por Arquímedes:

Peso del sólido = peso del agua del Vol. desalojado



$$(0.8)\frac{\pi\,(20)^2}{4}(10) = \frac{\pi\,(20)^2}{4}(c)(1)$$

De donde obtenemos el calado: $c = 8\ cm$

El centro de flotación estará a una distancia: $\dfrac{8}{2} = 4cm$, de la base del cilindro.

Contado a partir del CG será: $h = 5 - 4 = 1\ cm$

La distancia del centro de flotación al metacentro es:

$$m = \frac{I}{V} = \frac{\dfrac{\pi\,(20)^4}{64}}{8\dfrac{\pi\,(20)^2}{4}} = 3.125cm$$

$\rho = \dfrac{m}{V}$ $V\cdot\rho$

La distancia o altura metacéntrica es la distancia entre el CG al metacentro y vale:

Distancia (CG - MC) = m - Distancia (CG - CF) = 3.125 - 1 = 2.125 cm

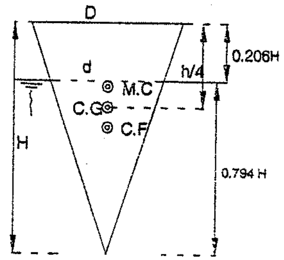
Distancia (CG - MC) = 2.125 cm

Como: $m >$ Distancia (CG - CF) su flotación es ESTABLE.

2.62. ¿ Cuál es la relación mínima entre el diámetro y la altura de un cono recto de material homogéneo, de densidad relativa 0.5, para que flote en el agua con su eje vertical y el vértice hacia abajo?

Resolución:

Sean:



V = *volumen del cono*

V_l = *volumen de la parte sumergida*

γ_l = *peso específico del cono* = 0.5 g/cm^3

γ = *peso específico del agua.*

Por Arquímedes:

$$V\cdot\gamma_1 = V_1\cdot\gamma \qquad V_1=\frac{\gamma_1}{\gamma}\cdot V$$

$$V_1 = 0.5\cdot V$$

Relacionando geométricamente:

$$\frac{V}{V_1}=\frac{R^2\cdot H}{r^2\cdot h} \qquad ,pero:\ R=\frac{H}{h}\cdot r$$

Entonces: $\frac{V}{V_1}=2=\frac{H^3}{h^3} \Rightarrow h=\sqrt[3]{0.5}\,H \Rightarrow h=0.794\,H$

Para que el cono flote establemente, su metacentro debe estar más alto que su centro de gravedad, en la posición límite, estos dos puntos deben coincidir.

A continuación se calculará la distancia del CG del cono al centro de flotación:

El centro de flotación es el centro de gravedad de la parte sumergida, es decir, es el centro de gravedad del cono sumergido y estará a 1/4 de h, debajo de la superficie del líquido.

El centro de flotación contado desde la base del cono será:

$$y=H-0.794\,H+\tfrac{1}{4}h=H\left(1-0.794+\frac{0.794}{4}\right)=0.405\,H$$

Y la distancia del centro de flotación al CG será:

$$Dist.(CF-CG)=y-\tfrac{1}{4}\cdot H=0.156H \quad\text{..................................(1)}$$

Se sabe que la distancia del CF al metacentro es: $m=\frac{I}{V}$

$$m=\frac{\dfrac{\pi d^4}{64}}{\dfrac{\pi d^2}{4}\cdot\dfrac{h}{3}}=\frac{3d^2}{16h} \quad\text{..................................(2)}$$

Por semejanza de triángulos en la figura:

$$d=\frac{h}{H}\cdot D \qquad ;como:\ h=0.794H$$

Se tiene: $d=0.794D$ ....(3)

Reemplazando (3) y h en (2):

$$m=\frac{3(0.794D)^2}{16(0.794H)} \quad\text{..................................(4)}$$

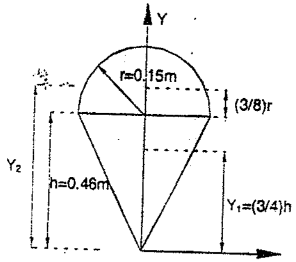
En la posición límite, las ecuaciones (1) y (4) son iguales:

$$0.156H=\frac{3(0.794D)^2}{16(0.794H)} \Rightarrow \frac{H^2}{D^2}=0.954$$

$$\boxed{\frac{H}{D}=0.977}$$

2.63. Hallar la altura metacéntrica y determinar el grado de estabilidad de un sólido homogéneo compuesto de un cono y una semiesfera que está sumergido en tetracloruro de carbono de densidad relativa 1.49 con el vértice del cono hacia abajo, sabiendo que el radio de la semiesfera es 0.15 m, la altura del cono 0.46 m y el peso específico 900 Kg/m^3.

Resolución:



Cálculo del CG del sólido:

$$y_g=\frac{V_1\cdot y_1+V_2\cdot y_2}{V_1+V_2} \quad\text{....................(1)}$$

Donde: $V_1=\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot r^2\cdot h \quad , \quad y_1=\frac{3}{4}\cdot h$

$V_2=\frac{2}{3}\cdot\pi\cdot r^3 \quad , \quad y_2=h+\frac{3}{8}\cdot r$

En (1):

$$y_g=\frac{\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot r^2\cdot h\cdot\left(\frac{3}{4}\cdot h\right)+\frac{2}{3}\cdot\pi\cdot r^3\cdot\left(h+\frac{3}{8}\cdot r\right)}{\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot r^2\cdot h+\frac{2}{3}\cdot\pi\cdot r^3}=\frac{\frac{3}{4}\cdot h^2+2\cdot r\cdot h+\frac{3}{4}\cdot r^2}{h+2r}$$

$y_g=0.41m$

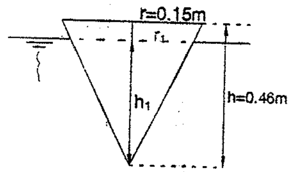
Peso del cuerpo: $P=900\left(\frac{1}{3}\pi r^2 h+\frac{2}{3}\pi r^3\right)=900\,(0.01085+0.0072)$

$P=16.11\,Kg$

Por Arquímedes: $16.11=V_d\,(1490)$, V_d: volumen sumergido

$V_d=0.0108m^3$

Si la parte sumergida tiene altura y radio, se puede plantear:



$$0.0108=\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot r_1^2\cdot h_1 \quad\text{......................(2)}$$

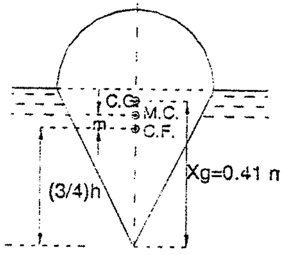
Por semejanza de triángulos:

$$\frac{0.15}{0.46}=\frac{r_1}{h_1} \Rightarrow h_1=3.06\,r_1$$

Estos valores en (2): $0.0108=\frac{1}{3}\pi\,r_1^2\,(3.06\,r_1)$

Luego: $r_1=0.15m$

Como r_l coincide con el radio de la base del cono, el sólido flota con la parte cónica sumergida. Por lo tanto en este caso, el centro de gravedad del cono coincide con el centro de flotación del sólido y está a 3/4 $h = 0.345\ m$



La distancia del al metacentro es: $m = \dfrac{I}{V_d}$

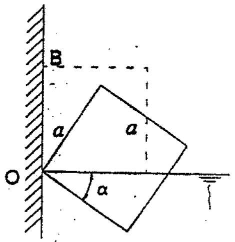
La altura metacéntrica es la distancia del CG del sólido al metacentro y vale:

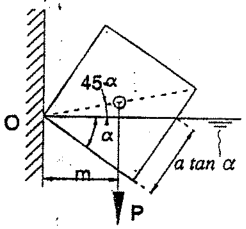
$Dist.(\overline{CG-MC}) = 0.41-(0.345+0.037)$

$Dist.(\overline{CG-MC}) = 0.028m = 2.8cm$

Se aprecia claramente que el CG está más alto que el metacentro, y por lo tanto el equilibrio es <u>INESTABLE</u>.

2.64. Un cubo homogéneo, de densidad relativa con respecto al líquido es de 1/3, puede girar sobre una de sus aristas como se muestra en la figura. Determinar la ecuación de la tangente del ángulo que hará la arista inferior con la horizontal cuando deja de estar sujeta la arista B, suponiendo que el nivel del líquido no varíe.





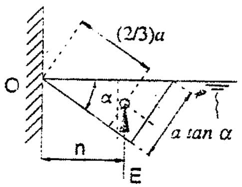
<u>Resolución:</u>

El cubo se hunde hasta que su peso: $P = \gamma_1 a^3$

y el empuje que experimenta hacia arriba:

$$E = \gamma\cdot\frac{a\cdot a\cdot\tan\alpha}{2}\cdot a = \frac{\gamma\cdot a^3\cdot\tan\alpha}{2}$$

tengan momentos opuestos y de igual magnitud con respecto a O.



El brazo de palanca del peso P es:

$$m = \frac{a}{2}\sqrt{2}\cdot\cos(45°-\alpha) \quad ....(1)$$

El brazo de palanca del empuje es:

$$n = \frac{2}{3}\cdot a\cdot\cos\alpha + \frac{1}{3}\cdot a\cdot\tan\alpha\cdot sen\alpha \quad ....(2)$$

Igualando los momentos de empuje y peso:

$$\frac{\gamma\cdot a^3\cdot\tan\alpha}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}a\cdot\cos\alpha+\frac{1}{3}a\cdot\tan\alpha\cdot sen\alpha\right)=\gamma_1\cdot a^3\cdot\left(\frac{a\cdot\sqrt{2}}{2}\cos(45°-\alpha)\right)$$

Simplificando y desarrollando cos(45° - α):

$$\frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}sen\alpha\right)}{\frac{2}{3}a\cdot\cos\alpha+\frac{1}{3}a\cdot\tan\alpha\cdot sen\alpha}=\frac{\gamma}{\gamma_1}\cdot\frac{\tan\alpha}{2}$$

Teniendo presente la densidad relativa: $\dfrac{\gamma}{\gamma_1} = 3$, queda:

$$\frac{\frac{1}{2}(\cos\alpha + sen\alpha)}{\frac{1}{3}(2\cos\alpha+\tan\alpha\cdot sen\alpha)}=\frac{3}{2}\tan\alpha$$

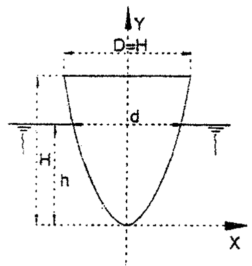
Dividiendo numerador y denominador del primer miembro entre "(*cos α*)" y simplificando:

$$\frac{1+\tan\alpha}{2+\tan\alpha\cdot\tan\alpha}=\tan\alpha$$

Y finalmente: $\boxed{\tan^3\alpha+\tan\alpha = 1}$

2.65. Un paraboloide de revolución cuyo diámetro de la base es igual a su altura, flota con su eje vertical y vértice hacia abajo. Determinar la densidad relativa mínima del paraboloide con respecto al líquido para qué la flotación sea estable.

<u>Resolución:</u>



El volumen del paraboloide es:

$$V = \frac{\pi\cdot(D)^2}{4}\cdot\frac{H}{2} = \frac{\pi\cdot H^3}{8} \quad ya\ que \quad H = D$$

Por Arquímedes:

$$\gamma_1\cdot\frac{\pi H^3}{8} = V_S\gamma \quad\Rightarrow\quad V_S = \frac{\pi H^3}{8}\cdot\frac{\gamma_1}{\gamma} \quad ......(1)$$

También, podemos escribir, según la figura:

$$V_S = \frac{\pi\cdot d^2}{4}\cdot\frac{h}{2} \quad ....(2)$$

Igualando (1) con (2): $\frac{\pi \cdot H^3}{8} \cdot \frac{\gamma_1}{\gamma} = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot \frac{h}{2}$

Reduciendo: $h = \frac{H^3}{d^2} \cdot \left(\frac{\gamma_1}{\gamma} \right)$ ....(3)

La ecuación de la parábola es: $y = K \cdot x^2$ ....(α)

Para: $x = \frac{D}{2}$; $y = H = D$; (según el dato del problema)

$\therefore \quad K = \frac{4}{H}$ ....(4)

Para: $x = \frac{d}{2}$, $y = h$ ....(5)

(4) y (5) en (α):

$\therefore \quad h = \frac{4}{H} \cdot \left(\frac{d}{2} \right)^2 = \frac{d^2}{H}$ ....(6)

multiplicando (3) con (6) obtenemos: $h^2 = H^2 \cdot \left(\frac{\gamma_1}{\gamma} \right)$

de donde: $h = H \cdot \sqrt{\frac{\gamma_1}{\gamma}}$ ....(7)

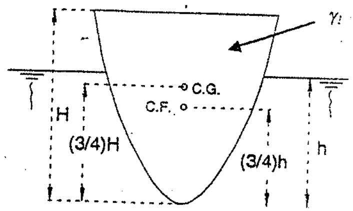
El centro de gravedad del paraboloide dado está a: $\frac{2}{3} H$

el centro de flotación está a: $\frac{2}{3} h$

la distancia del CG al CF es:

$Dist.(CG - CF) = \frac{2}{3} H - \frac{2}{3} h$

$Dist.(CG - CF) = \frac{2}{3} \cdot \left(H - H \cdot \sqrt{\frac{\gamma_1}{\gamma}} \right)$



la distancia del CF al metacentro es:

$$m = \frac{\frac{\pi \cdot d^4}{64}}{\frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot \frac{h}{2}} = \frac{d^2}{8h}$$

la condición límite, para que la flotación del paraboloide sea estable es que el centro de gravedad debe coincidir con el metacentro, por lo tanto se debe tener:

Dist.(CF-CG) = m

$\frac{2}{3} H \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{\gamma_1}{\gamma}} \right) = \frac{d^2}{8h}$ ....(8)

Igualando (3) con (6) obtenemos:

$d^2 = H^2 \cdot \sqrt{\frac{\gamma_1}{\gamma}}$ ....(9)

Reemplazando (7) y (9) en (8):

$$\frac{2}{3} H \cdot \left(1 - \frac{\gamma_1}{\gamma} \right) = \frac{H^2 \cdot \sqrt{\frac{\gamma_1}{\gamma}}}{8H \cdot \sqrt{\frac{\gamma_1}{\gamma}}} = \frac{H}{8}$$

Simplificando ésta última:

$$\left(1 - \sqrt{\frac{\gamma_1}{\gamma}} \right) = \frac{3}{16}$$

$$\sqrt{\frac{\gamma_1}{\gamma}} = 1 - \frac{3}{16} = \frac{13}{16}$$

$$\therefore \quad \boxed{\frac{\gamma_1}{\gamma} = 0.66}$$

2.66. ¿Cómo varían las presiones en el caso de una masa líquida contenida en un recipiente que se mueve verticalmente? Para los siguientes datos:

a) cuando sube con una aceleración $a = 4.9\ m/s^2$

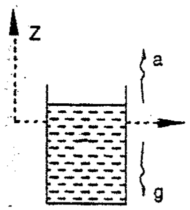
b) cuando baja con una aceleración $a = 4.9\ m/s^2$

c) cuando el depósito cae

d) cuando el depósito suba con una aceleración igual a la gravedad.

e) cuando el depósito baja con una aceleración igual a la gravedad.

Resolución:



En general: $\dfrac{\partial P}{\partial z} = -\rho \cdot a_z$ ....(1)

Donde: $a_z = \begin{cases} g + a_z & \text{,cuando el recipiente sube} \\ g - a_z & \text{,cuando el recipiente baja} \end{cases}$

Integrando (1): $\dfrac{1}{\rho}\int_0^P dP = -a_z \int_0^z dz \Rightarrow \dfrac{P}{\rho} = +a_z \cdot z$

Dividiendo ambos miembros entre g :

$$\frac{P}{\rho \cdot g} = \frac{a_z}{g}\cdot z \Rightarrow P = \frac{a_z}{g}\cdot \gamma \cdot z \qquad \boxed{P = \left(1 \pm \frac{a_z}{g}\right)\gamma \cdot z}$$

a) $P = \left(\dfrac{9.8 + 4.9}{9.8}\right)\cdot \gamma \cdot z = \dfrac{3}{2}\cdot \gamma \cdot z$

b) $P = \left(\dfrac{9.8 - 4.9}{9.8}\right)\cdot \gamma \cdot z = \dfrac{1}{2}\cdot \gamma \cdot z$

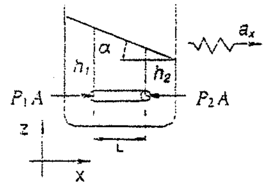
c) $P = \left(\dfrac{9.8 - 9.8}{9.8}\right)\cdot \gamma \cdot z = 0$

d) $P = \left(\dfrac{g + g}{g}\right)\cdot \gamma \cdot z = 2\cdot \gamma \cdot z$

e) $P = \left(\dfrac{g - g}{g}\right)\cdot \gamma \cdot z = 0$

2.67. Un recipiente con cierto líquido, es arrastrado horizontalmente con una aceleración constante a_x ¿Qué ángulo formará la superficie del líquido con la horizontal?

Resolución:



En el tubito de longitud L, se cumple:

$P_1 A - P_2 A = \dfrac{\gamma}{g} L A a_x \rightarrow \dfrac{P_1 - P_2}{L} = \dfrac{\gamma}{g} a_x$...(1)

Pero: $-\dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{P_1 - P_2}{L} \Rightarrow \dfrac{\partial P}{\partial x} = -\gamma \cdot \dfrac{a_x}{g}$

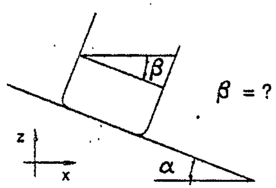
Se sabe: $dP = \dfrac{\partial P}{\partial x}dx + \dfrac{\partial P}{\partial y}dy + \dfrac{\partial P}{\partial z}dz$

$$dP = -\frac{\gamma}{g}a_x \cdot dx + 0 + (-\gamma)dz = 0 \Rightarrow -\frac{\gamma}{g}a_x = \gamma \cdot \frac{dz}{dx}$$

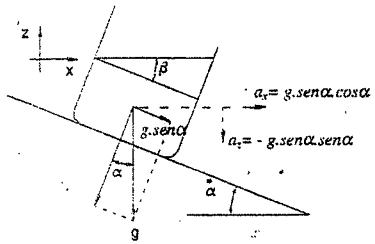
De la figura: $\dfrac{dz}{dx} = -\tan\alpha \rightarrow \tan\alpha = \dfrac{a_x}{g} \Rightarrow \alpha = \tan^{-1}\left(\dfrac{a_x}{g}\right)$

Ó en (1): $P_1 = \gamma \cdot h_1 \wedge P_2 = \gamma \cdot h_2$ se obtiene lo mismo.

2.68. ¿Qué ángulo con la horizontal, la superficie libre de un líquido contenido en un depósito que se desliza en una pendiente de α con la horizontal, si se considera nula la fricción entre el depósito y el plano inclinado?



Resolución:



En la superficie libre:

$dP = 0 \wedge \tan\beta = -\dfrac{dz}{dx}$

$dP = \dfrac{\partial P}{\partial x}dx + \dfrac{\partial P}{\partial y}dy + \dfrac{\partial P}{\partial z}dz$ ...(1)

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} &= -\gamma \frac{a_x}{g} = -\frac{\gamma}{g}\cdot(g \cdot sen\alpha \cdot \cos\alpha) \\ \frac{\partial P}{\partial z} &= -\gamma \cdot \left(1 + \frac{a_z}{g}\right) = -\gamma \cdot \left(1 - \frac{g \cdot sen^2\alpha}{g}\right) \end{aligned}\right\}$$

$\dfrac{\partial P}{\partial x} = -\gamma \cdot sen\alpha \cdot \cos\alpha$ ....(2)

$\dfrac{\partial P}{\partial z} = -\gamma \cdot \cos^2\alpha$ ....(3)

$\dfrac{\partial P}{\partial y} = 0$ ....(4)

(2), (3) y (4) en (1): $0 = -\gamma \cdot sen\alpha \cdot \cos\alpha \cdot dx - \gamma \cdot \cos^2\alpha \cdot dz$

$$-\gamma \cdot \cos^2\alpha \cdot dz = \gamma \cdot sen\alpha \cdot \cos\alpha \cdot dx \quad \Rightarrow \quad -\frac{dz}{dx} = \tan\alpha$$

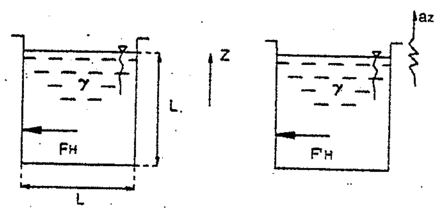
Pero como ya se ha visto, en la superficie libre: $-\frac{dz}{dx} = \tan\beta$

Por tanto: $\tan\beta = \tan\alpha$

$$\therefore \quad \boxed{\beta = \alpha}$$

Lo que significa que la superficie del líquido es paralela a la superficie inclinada por donde se desliza el recipiente.

2.69. Para la figura mostrada, calcular el incremento de la fuerza que ejerce el líquido sobre una de las paredes laterales del recipiente, si inicialmente éste está en reposo y luego es levantado verticalmente con una aceleración a_z.



Resolución:

Cuando el recipiente está en reposo, la fuerza del líquido sobre un de las paredes es:

$$F_H = \gamma \cdot H_G \cdot Area = \gamma \cdot \left(\frac{L}{2}\right)(L^2) \quad \rightarrow \quad F_H = \frac{1}{2}\gamma \cdot L^3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Cuando el recipiente es levantado verticalmente con una aceleración a_z se tiene:

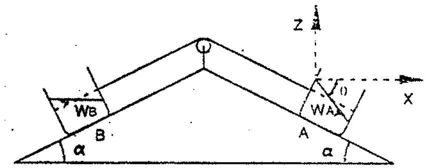
$$F'_H = \rho \cdot (g + a_z) \cdot \frac{L^3}{2} = \rho \cdot g \cdot \left(1 + \frac{a_z}{g}\right) \cdot \frac{L^3}{2}$$

$$F'_H = \gamma \cdot \left(1 + \frac{a_z}{g}\right) \cdot \frac{L^3}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

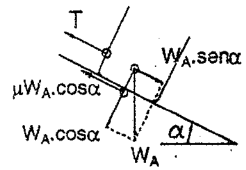
Luego el incremento de la fuerza se obtiene de: (2) - (1), es decir:

$$\boxed{F'_H - F_H = \frac{1}{2} \cdot \frac{a_z}{g} \cdot \gamma \cdot L^3}$$

2.70. Determinar el ángulo que forma la superficie del líquido contenido en un tanque, con la horizontal, si el tanque desciende por efecto del propio peso, por un plano inclinado. El descenso del tanque que pesa W_A produce el ascenso de otro cuyo peso es W_B. El coeficiente de fricción entre el fondo de ambos tanques y la superficie del plano inclinado es μ.



Resolución:

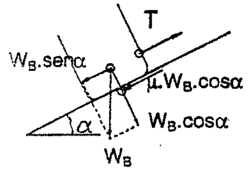


Para el tanque A:

$$W_A \cdot sen\alpha - T - \mu \cdot W_A \cdot \cos\alpha = \frac{W_A}{g} \cdot a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Para el tanque B:

$$T - W_B \cdot sen\alpha - \mu \cdot W_B \cdot \cos\alpha = \frac{W_B}{g} \cdot a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

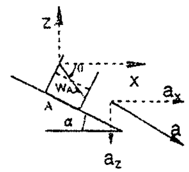


Sumando (1) y (2):

$$-(W_A + W_B) \cdot \mu \cdot \cos\alpha + (W_A - W_B) \cdot sen\alpha = \left(\frac{W_A + W_B}{g}\right) \cdot a$$

$$a = \frac{-(W_A + W_B) \cdot \mu \cdot \cos\alpha + (W_A - W_B) \cdot sen\alpha}{W_A + W_B} \cdot g$$

$$a_x = a \cdot \cos\alpha$$
$$a_z = a \cdot sen\alpha$$



Como: $dP = \frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz$

ó $\frac{dP}{dx} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$

En la superficie libre:

$$dP = 0 \ , \quad \frac{dz}{dx} = -\tan\theta \ , \quad \frac{\partial P}{\partial x} = -\gamma \cdot \frac{a_x}{g} \ , \quad \frac{\partial P}{\partial z} = -\gamma \cdot \left(1 + \frac{a_z}{g}\right) \ , \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

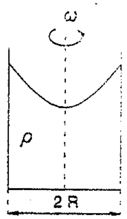
Remplazando valores en (3):

$$0=-\gamma\cdot\frac{a_x}{g}-\gamma\cdot\left(1+\frac{a_z}{g}\right)\cdot(-\tan\theta) \Rightarrow \tan\theta=\frac{a_x}{g+a_z}=\frac{a\cdot\cos\alpha}{g+a\cdot sen\alpha}=\frac{\cos\alpha}{\frac{g}{a}+sen\alpha}$$

Reemplazando "a" en la última expresión, se tiene:

$$\boxed{\theta = arc\tan\left(\frac{\cos\alpha}{\frac{W_A+W_B}{-(W_A+W_B)\cdot\mu\cdot\cos\alpha+(W_A-W_B)\cdot sen\alpha}+sen\alpha}\right)}$$

2.71. Un depósito cilíndrico, conteniendo líquido, está animado de un movimiento rotativo respecto a su eje simétrico. Suponiendo que sus paredes son muy altas e impiden el derrame: se pide calcular:



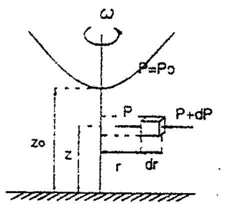
a) Una expresión que indique el valor de la presión en cada punto del seno del líquido.

b) La forma de la superficie libre del líquido.

Resolución:

a) En la figura: $\sum F_H = 0$

$$P\cdot dA-\left(P+\frac{\partial P}{\partial r}dr\right)dA+\frac{\gamma\cdot(dA\cdot dr)}{g}\cdot\omega^2\cdot r=0$$



De donde: $-\frac{\partial P}{\partial r}dr=-\frac{\gamma\cdot\omega^2\cdot r}{g}dr$

$$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial r}=\frac{\gamma}{g}\omega^2\cdot r=\rho\cdot\omega^2\cdot r \quad\wedge\quad \frac{\partial P}{\partial z}=-\rho\cdot g$$

Además: $dP=\frac{\partial P}{\partial r}dr+\frac{\partial P}{\partial z}dz+\frac{\partial P}{\partial \theta}d\theta$

donde $\frac{\partial P}{\partial \theta}=0$

$\Rightarrow dP=\rho\cdot\omega^2\cdot r\cdot dr-\rho\cdot g\cdot dz$

y $P=\frac{1}{2}\rho\cdot\omega^2\cdot r^2-\rho\cdot g\cdot z+C$, $C = Constante.$

En $r=0,\ z=z_0$ => $P=P_0$ => $C=P_0+\rho\cdot g\cdot z_0$

$$\boxed{P=P_0+\rho\cdot g\cdot(z_0-z)+\frac{1}{2}\cdot\rho\cdot\omega^2\cdot r^2}$$

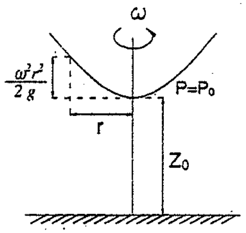
Y se obtiene:

b) La forma de la superficie libre del líquido se obtiene haciendo $P = P_0$, ya que ese es el valor que toma en la superficie.

=> $P_0=P_0+\rho\cdot g\cdot(z_0-z)+\frac{1}{2}\cdot\rho\cdot\omega^2\cdot r^2$

$0=\rho\cdot g\cdot(z_0-z)+\frac{1}{2}\cdot\rho\cdot\omega^2\cdot r^2$

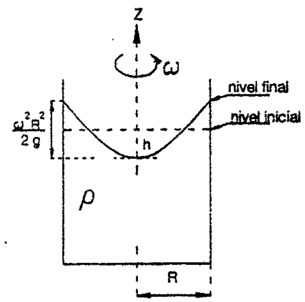
$$\boxed{z=z_0+\frac{\omega^2\cdot r^2}{2\cdot g}}$$



Lo que resulta ser la ecuación de un paraboloide de revolución.

2.72. En la figura, encontrar el valor de h.

Resolución:



Por el teorema:

El volumen interno (o externo) del paraboloide es igual a la mitad del cilindro circunscrito.

$V_{PARABOLOIDE}=\frac{1}{2}V_{CILINDRO\ CIRCUNSCRITO}$

$V_{CILINDRO}=\pi\,R^2\cdot\left(\frac{\omega^2\cdot R^2}{2\cdot g}\right)$

$V_{PARABOLOIDE}=\pi\cdot R^2\cdot h$

$\pi\cdot R^2\cdot h=\frac{1}{2}\left(\pi\cdot R^2\right)\left(\frac{\omega^2\cdot R^2}{2\cdot g}\right)$

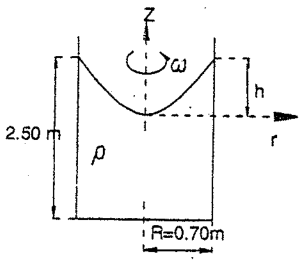
$$\Rightarrow \boxed{h=\frac{1}{2}\left(\frac{\omega^2\cdot R^2}{2\cdot g}\right)}$$

2.73. Un vaso cilíndrico de 2.50 m de altura es llenado con agua hasta los 2 m. El diámetro del vaso es 1.40 m. Hallar la velocidad angular y las revoluciones por minuto que harán elevar el agua hasta los bordes del vaso.

Resolución:

Como el agua no se pierde

Vol. Paraboloide = Vol. de la parte del cilindro sin agua (reposo)



$$\frac{\pi \cdot R^2 \cdot h}{2} = \pi \cdot R^2 \cdot (2.50 - 2.00)$$

=> $h = 1m$

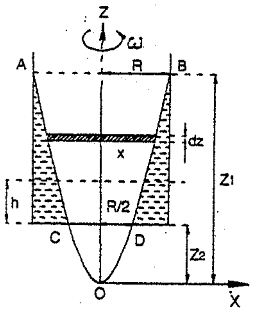
Como la superficie es: $z = \frac{\omega^2 \cdot r^2}{2g}$

=> $\omega^2 = \frac{2g \cdot z}{r^2} = \frac{19.6(1)}{0.49}$

=> $\boxed{\omega = 6.32\ ^{rad}/_{s} = 60.4 R.P.M.}$

2.74. Un depósito cilíndrico está animado con un movimiento rotativo respecto a su eje simétrico. Si h es la altura de agua que contiene el depósito, R su radio y suponiendo que sus paredes son suficientemente altas como para impedir el derrame; se pide calcular la velocidad de rotación que se debe dar al cilindro de manera que en el fondo quede descubierto un círculo de radio $R/2$.

Resolución:



Se sabe que la altura que alcanza un líquido debido al movimiento rotativo está dado por:

$$z = \frac{\omega^2 \cdot x^2}{2g} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (i)$$

Para el paraboloide AOB:

$$z_1 = \frac{\omega^2 \cdot R^2}{2g} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Para el paraboloide COD:

$$z_2 = \frac{\omega^2 \cdot R^2}{8g} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Para relacionar z_1 y z_2 utilizamos la conservación del volumen:

Volumen no ocupado por el agua durante el reposo es:

$$(z_1 - z_2 - h) \cdot \pi \cdot R^2$$

Volumen no ocupado por el agua durante el movimiento:

Tomamos una faja de ancho dz y de radio x, entonces:

$$dV = \pi \cdot x^2 \cdot dz \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

De (i): $x^2 = \frac{2 \cdot z \cdot g}{\omega^2}$

Reemplazando en (3) e integrando: $V = \frac{2 \cdot \pi \cdot g}{\omega^2} \int_{z_2}^{z_1} z \cdot dz = \frac{2 \cdot \pi \cdot g}{\omega^2} (z_1^2 - z_2^2)$

Los volúmenes no ocupados por el agua son iguales:

$$\pi \cdot R^2 \cdot (z_1 - z_2 - h) = \frac{g \cdot \pi}{w^2} (z_1^2 - z_2^2)$$

Reemplazando (1) y (2) en esta última ecuación:

$$\pi \cdot R^2 \cdot \left(\frac{\omega^2 \cdot R^2}{2g} - \frac{\omega^2 \cdot R^2}{8g} - h \right) = \frac{g \cdot \pi}{\omega^2} \left(\frac{\omega^4 \cdot R^4}{4g^2} - \frac{\omega^4 \cdot R^4}{64 g^2} \right)$$

Simplificando: $\frac{\omega^2 \cdot R^2}{g} \left(\frac{3}{8} - \frac{15}{64} \right) = h$

$$\frac{\omega^2 \cdot R^2}{g} \left(\frac{9}{64} \right) = h$$

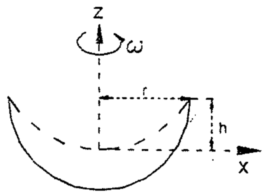
De donde: $\boxed{\omega = \frac{8}{3R} \sqrt{g \cdot h}}$

2.75. Una semiesfera de borde horizontal está llena de líquido. Calcular la cantidad de líquido que desborda cuando la semiesfera gira alrededor de su eje vertical con la velocidad angular ω.

Resolución:

Para movimientos rotativos se sabe:

$$z = \frac{\omega^2 \cdot x^2}{2g}$$



Siendo r el radio de la esfera y h la profundidad, al girar en el centro:

$$h = \frac{\omega^2 \cdot r^2}{2g}$$

La superficie es un paraboloide cuyo volumen es:

$$V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{2}$$

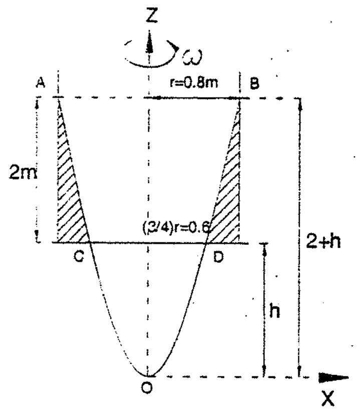
Esta es precisamente la cantidad de líquido que se derrama:

$$\therefore \boxed{V = \frac{\pi \cdot r^4 \cdot \omega^2}{4g}}$$

2.76. Un vaso cilíndrico abierto está lleno de líquido. ¿A qué velocidad deberá girar sobre un eje vertical para que el líquido deje descubierto en el fondo un círculo de radio igual a las 3/4 partes del radio del cilindro? ¿Cuál será el volumen líquido derramado por la rotación?

El vaso cilíndrico tiene 1.6 m de diámetro y 2 m de altura.

Resolución:



La altura **z**, a la que llega un líquido debido al movimiento rotativo está dado por:

$$z = \frac{\omega^2 \cdot x^2}{2g} \quad \therefore \quad \omega^2 = \frac{2g \cdot z}{x^2}$$

La velocidad para el punto B:

$$\omega^2 = \frac{2g \cdot (2+h)}{(0.8)^2} \quad \text{.....................(1)}$$

La velocidad para el punto D:

$$\omega^2 = \frac{2g \cdot h}{0.6^2} \quad \text{.....................(2)}$$

(1) = (2), porque las velocidades angulares son iguales para cualquier punto:

$$\frac{2g \cdot (2+h)}{0.64} = \frac{2g \cdot h}{0.36}$$

De donde h es igual a: $h = 2.57\ m$

Sustituyendo en (2):

$$\omega^2 = \frac{19.6 \cdot 2.57}{0.36} = 140 \qquad \therefore \boxed{\omega = 11.8\ ^{rad}/_{s}}$$

Como estuvo lleno, el volumen derramado será:

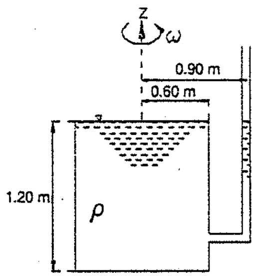
V = *Vol. paraboloide* (*radio* 0.8 m) - *Vol. paraboloide* (*radio* 0.6 m)

$$V = \frac{\pi * 0.8^2 * (h+2)}{2} - \frac{\pi * 0.6^2 * h}{2} = \frac{\pi * 0.64 * (2+2.57)}{2} - \frac{\pi * 0.36 * 2.57}{2}$$

$$V = \frac{\pi\,(0.64 * 4.57 - 0.36 * 2.57)}{2} = \frac{\pi\,(1.9966)}{2}$$

$$\boxed{V = 3.135 m^3}$$

2.77. El cilindro vertical abierto, mostrado en la figura adjunta, gira alrededor de su eje, a *56 R.P.M.* Si fue previamente llenado de agua hasta el borde superior. ¿Hasta que altura por encima de este borde se elevará el agua en el tubo piezométrico?

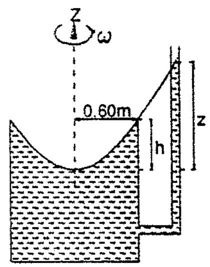


Resolución:

Al girar, la superficie del líquido adquiere la forma parabólica, e incluso se prolonga hasta en el tubo piezométrico, tal como se ve en la figura:

La velocidad anguiar es: $\omega = 56 R.P.M. = \frac{56 * 2\pi}{60} = 5.86\ ^{rad}/_{s}$

La ecuación de la superficie parabólica está dado por: $z = \frac{\omega^2 \cdot x^2}{2g}$



La altura de la parábola en el recipiente es:

$$h = \frac{(5.86)^2\,(0.6)^2}{19.6} = \frac{34.34 * 0.36}{19.6} = 0.63m$$

La altura, a partir del eje X en el piezómetro es:

$$z = \frac{(5.86)^2\,(0.9)^2}{19.6} = \frac{34.34 * 0.81}{19.6} = 1.42m$$

La altura que se elevará el agua en el piezómetro por encima del borde es:

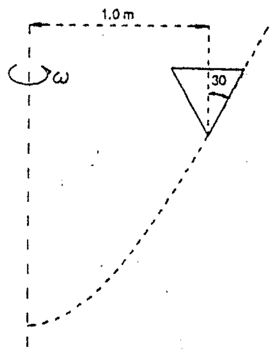
$$\Delta h = z - h = 1.42 - 0.63 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta h = 0.79m}$$

2.78. Un depósito cónico de eje vertical y generatriz inclinada *30°* con respecto a su eje, gira alrededor de un eje vertical, distante 1 m del eje del cono. ¿A cuántas R.P.M. se tendrá que hacer girar el depósito para expulsar toda el agua contenida en él?

Resolución:

Al girar adquiere una superficie parabólica dada por: $z = \frac{\omega^2 \cdot x^2}{2g}$

Para que el agua se derrame completamente esta curva debe ser tangente a una generatriz en el vértice del cono,



Luego la derivada de la curva parabólica será la pendiente de dicha generatriz.

$$\frac{dz}{dx}=\frac{2\omega^2\cdot x}{2g}=\tan 60°=\sqrt{3}$$

De donde: $\omega^2=\dfrac{g\cdot\sqrt{3}}{x}$

Como $x = 1\ m$.

$$\omega^2=g\cdot\sqrt{3}=9.8*1.73=16.954$$

$$\boxed{\omega=4.11\,rad/s}$$

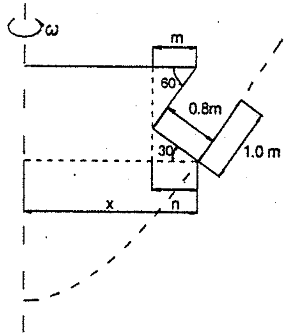
En R.P.M.: $\omega=\dfrac{4.11*60}{2\pi}$ $\boxed{\omega=39.3R.P.M}$

2.79. Un recipiente lleno de líquido cuelga de un brazo horizontal de 1.50 m cuyo extremo está unido a un eje vertical. Calcular el número de *R.P.M.* con el cual se conseguirá vaciar completamente el recipiente siendo el ángulo $Ø$ para esta condición de *60°*.

Resolución:

Al girar una superficie libre será una sección parabólica cuya ecuación es:

$$z=\frac{\omega^2\cdot x^2}{2g}$$



Para que se vacíe el depósito, la pared del recipiente debe ser tangente a la parábola en el punto A.

Derivando la ecuación de la parábola:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\omega^2\cdot x}{g}=\tan\phi=\tan 60°=\sqrt{3}$$

De donde: $\omega^2=\dfrac{g\sqrt{3}}{x}$

Pero en el punto A: $x = 1.5 - m + n$

$x=1.50-1*\cos 60°+0.80*\cos 30°$

$x=1.50-0.5+0.80*0.866$

$x=1.695m.$

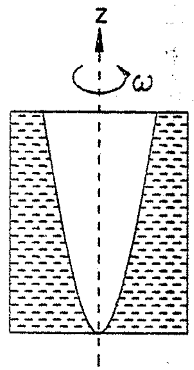
Luego: $\omega=\sqrt{\dfrac{9.8\sqrt{3}}{1.695}}=3.16\,rad/s$

En R.P.M.: $\omega=\dfrac{3.16*60}{2\pi}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\omega=30.18R.P.M.}$

2.80. Un cilindro cerrado de altura H tiene las tres cuartas partes de su volumen ocupadas por un líquido. ¿Con qué velocidad ha de girar el cilindro alrededor de su eje para que el paraboloide que se forme sea tangente a la base?

Resolución:

La ecuación del paraboloide es: $z=\dfrac{\omega^2\cdot x^2}{2g}$; $H=\dfrac{\omega^2\cdot x^2}{2g}$ ....(1)



Además los volúmenes sin agua inicial y final son iguales:

$$\pi\cdot R^2\cdot\left(H-\frac{3}{4}H\right)=\frac{\pi\cdot x^2}{2}H$$

De donde: $\dfrac{R^2}{4}=\dfrac{x^2}{2}$ $\Rightarrow$ $x^2=\dfrac{R^2}{2}$ ....(2)

Reemplazando (2) en (1): $H=\dfrac{\omega^2\left(\dfrac{R^2}{2}\right)}{2g}$

De aquí se despeja: $\boxed{\omega=\dfrac{2*\sqrt{g*H}}{H}}$

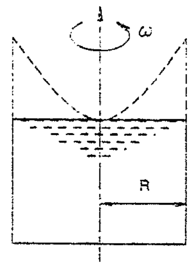
2.81. Se tiene un vaso cerrado ocupado totalmente por un líquido de peso específico γ. El depósito tiene un radio R, si se le anima de un movimiento rotativo ω. ¿Cuál será el empuje que tiende a destapar el vaso?

Resolución:

Se sabe que en este caso el paraboloide de revolución se forma en la parte exterior del depósito y tangente.

La presión a una distancia x, sobre la tapa será: $P=\gamma.z$

Pero como: $z=\dfrac{\omega^2\cdot x^2}{2g}$

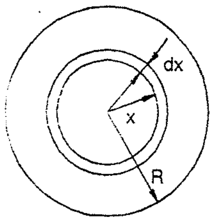


Se tiene que la presión unitaria es: $P = \gamma \dfrac{\omega^2 \cdot x^2}{2g}$ ....(1)

Se sabe que: $F = P.A$; tomando un anillo concéntrico diferencial sobre la tapa:

$$dF = P \cdot dA$$

$$dF = P \cdot 2\pi \cdot x \cdot dx \quad ....(2)$$



Reemplazando (1) en (2) e integrando:

$$F = \gamma \cdot \frac{\omega^2 \cdot 2\pi}{2g} \int_0^R x^3 \cdot dx$$

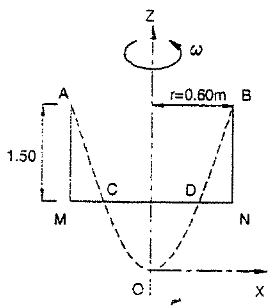
$$\boxed{F = \frac{\gamma \cdot \omega^2 \cdot R^4 \cdot \pi}{4g}}$$

2.82. Un tanque cilíndrico de 1.20 *m* de diámetro y 1.50 *m* de altura, está lleno de agua, y es hecho girar alrededor de su propio eje, que permanece vertical, con una velocidad angular de 180 *R.P.M.*

a) Determinar el diámetro del área circular descubierto en el fondo y el volumen del líquido derramado.

b) Si el mismo tanque lleno de agua, es cerrado en su parte superior ¿Cuál será la máxima presión que se desarrollará en metros de agua absoluta y donde se presentará?

Resolución:



Se sabe que: $z = \dfrac{\omega^2 \cdot x^2}{2g}$

Para el paraboloide AOB:

$$\omega = \frac{180 \cdot 2}{60} = 6\pi \ {}^{rad}/_{s} \quad , \quad x = r = 0.6m$$

$$z = 1.50 + h$$

Luego: $1.50 + h = \dfrac{(6\pi)^2 (0.6)^2}{19.6}$

$$1.50 + h = 6.50$$

$$\boxed{h = 5m}$$

Para el paraboloide COD: $\omega = 6\pi \ {}^{rad}/_{s}$, $x = R$, $z = h = 5m$

Luego: $5 = \dfrac{(6\pi)^2 \cdot R^2}{19.6} \quad \rightarrow \quad R = \frac{1}{6}\pi \cdot \sqrt{5 * 19.6} = 0.525m$

El diámetro será: $D = 2R \quad \Rightarrow \quad D = 1.05\ m$

Vol. Derramado = Vol. parab. AOB - Vol. parab. COD

$$V = \frac{0.6^2(1.50 + h)}{2} - \frac{0.525^2 h}{2} = \frac{(0.36 * 6.50 - 0.2756 * 5)}{2}$$

$$\boxed{V = 1.508m^3}$$

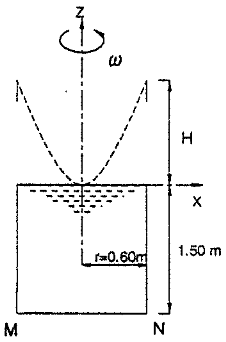
La presión máxima, al cerrar el tanque (suponiéndolo lleno nuevamente) se presenta en los bordes inferiores del cilindro MN.

Esta presión relativa vale: $1.50 + H$

Para hallar el valor de H, nos valemos de la ecuación del paraboloide:

$$H = \frac{\omega^2 \cdot x^2}{2g} = \frac{(6\pi)^2 (0.6)^2}{19.6}$$

$$H = 6.50m$$



Por lo tanto la presión absoluta será:

P = presión relativa + presión atmosférica

Es decir:

$$P = 6.50 + 1.50 + 10.33 \quad \Rightarrow \quad \boxed{P = 18.33\ m\ de\ agua}$$

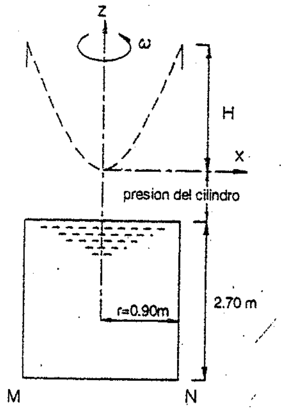
2.83. Un cilindro de 1.80 *m* de diámetro y 2.70 *m* de altura, es llenado con glicerina, cuyo peso específico es 1600 Kg/m^3, a una presión de 4568 Kg/cm^2. ¿A qué velocidad de rotación deberá girar alrededor de su eje para que se produzca la ruptura del cilindro? El espesor de las paredes del tanque es 18 *mm*, de un acero que resiste 3500 Kg/cm^2 a la ruptura.

Resolución:

Se calculará primero la mínima presión para su ruptura:

Se sabe que: $\sigma = \dfrac{p \cdot D}{2t} \quad \rightarrow \quad p = \dfrac{2\sigma \cdot t}{D}$

Donde: $\sigma = 3500\ {}^{kg}/_{cm^2}$. $t = 18\,mm = 1.8\,cm$, $D = 1.80\,m = 180\,cm$



Luego: $p = \frac{2*3500*1.8}{180} \Rightarrow p = 70\,{}^{kg}/_{cm^2}$

Esta presión sucederá en los bordes inferiores del cilindro (MN) y debe ser igual, como se aprecia en la figura, a la suma de presiones sobre ella, es decir:

$p = \gamma \cdot h + \textit{presión del cilindro} + \gamma \cdot z$ ....(1)

Como:

$\gamma = 1600\,{}^{kg}/_{m^3} = 0.0016\,{}^{kg}/_{cm^3}$, $h = 2.70 = 270cm$

$z = \frac{\omega^2 \cdot x^2}{2g} = \frac{\omega^2 (0.90)^2}{19.6} = 0.0413\omega^2 m = 4.13\omega^2 cm$

Presión del cilindro = 4.568 *Kg/cm*²

Se tiene reemplazando en (1):

$70 = (0.0016 * 270) + (4.568) + (0.0016 * 4.13)\omega^2$

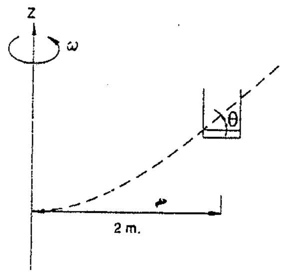
$70 = 0.432 + 4.568 + 0.0066\omega^2$

De donde: $\omega^2 = \frac{65}{0.0066} = 9848 \quad => \quad \omega = 99.25\,{}^{rad}/_{s}$

En R.P.M.: $\omega = \frac{99.25*60}{2\pi} \quad \therefore \boxed{\omega = 948\ R.P.M.}$

2.84. Determínese la pendiente de la superficie libre del agua en un recipiente muy pequeño que está colocado en una mesa horizontal giratoria, si la mesa gira a 30 *R.P.M.* alrededor de un eje vertical situado a 2.00 *m* de distancia del centro del recipiente.

Resolución:



Al girar, la superficie libre del recipiente será una superficie parabólica, pero, como éste es muy pequeño comparado con la distancia al eje vertical, podemos asimilar dicha superficie como un punto de la curva.

Su pendiente será una tangente a la curva en este punto.

$$z = \frac{\omega^2 \cdot x^2}{2g}$$

$$\frac{dz}{dx} = \tan\theta = \frac{2\omega^2 \cdot x^2}{2g} = \frac{\omega^2 \cdot x}{g}$$

Como: $\omega = 30\ R.P.M. = \frac{30 * 2\pi}{60} = \pi\,{}^{rad}/_{s}$, $x = 2m$

Reemplazando se tiene : $\tan\theta = \frac{2\pi^2}{9.8}$

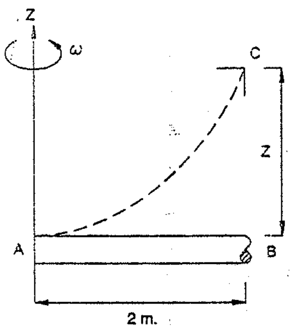
$$\boxed{\tan\theta = 2.014}$$

2.85. Un tubo de acero de 2 *cm* de diámetro y de 2 *m* de longitud, cerrado en ambos extremos, está lleno de mercurio (*Dr = 13.6*) a la presión atmosférica.

El espesor de las paredes del tubo es de 0.001 *m*. Se quiere determinar la máxima velocidad de rotación en *R.P.M.*, que pueda darse al tubo sobre un piano horizontal y alrededor de un eje que pase por uno de sus extremos, para que no se rompan las paredes del tubo por efecto de la presión interna desarrollada. La carga de trabajo a la tensión del acero puede tomarse como 1800 *Kg/cm*².

Resolución:

Según sabemos la presión máxima que resiste la tubería es: $p = \frac{2\sigma \cdot t}{D}$



Donde:

$\sigma = 1200\ Kg/cm^2$

$t = 0.001\ m = 0.1\ cm$

$D = 2\ cm$

Luego: $p = \frac{(2)(1200)(0.1)}{2} = 120\,{}^{kg}/_{cm^2}$

Esta máxima presión debe ser igual a la presión producida por la carga BC = z, es decir en el extremo B, se puede escribir:

$p = \gamma.z$ (se desprecia la altura del diámetro por ser relativamente pequeño)

Donde: $p = 120\,{}^{Kg}/_{cm^2}$

$\gamma = 13600\,{}^{Kg}/_{m^3} = 0.0136\,{}^{Kg}/_{cm^3}$

$z = \frac{\omega^2 \cdot x^2}{2g} = \frac{\omega^2 (200)^2}{1960}$

Luego reemplazando: $120 = 0.0136\dfrac{\omega^2(200)^2}{1960}$

Despejando la incógnita:

$$\omega = \sqrt{\frac{(120)(1960)}{(0.0136)(200^2)}}$$

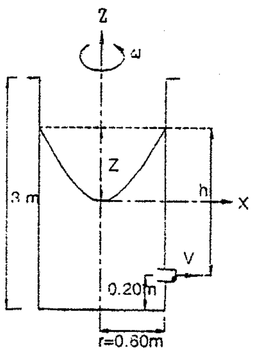
$$\omega = \frac{140}{200}\sqrt{\frac{12}{0.0136}} = \frac{7}{10}\sqrt{883} = 20.79\ ^{rad}/_{s}$$

En R.P.M.: $\omega = \dfrac{20.79 \cdot 60}{2\pi}$

$$\boxed{\omega = 198.5\ R.P.M.}$$

2.86. Un vaso cilíndrico de 3 *m* de altura y 1.20 *m* de diámetro, contiene agua hasta la altura de 1.70 *m* cuando el vaso está en reposo. ¿A cuántas revoluciones por minuto debe girar el vaso alrededor de su eje para que la velocidad de salida por un orificio situado en la pared cilíndrica del vaso y a 0.20 *m* sobre el nivel del fondo, sea 6.20 *m/s*. Supóngase un valor de $C_V = 0.97$.

Resolución:



La velocidad de salida es: $V = C_V\sqrt{2g \cdot h}$

Reemplazando valores: $V = 0.97\sqrt{19.6h} = 6.2\ ^{m}/_{s}$

De donde: $\boxed{h = 2.08\ m}$

Para el cálculo de z igualamos el volumen de agua en movimiento con el de reposo, siendo B el área de la base:

$$B \cdot (0.2 + 2.08) - \frac{B \cdot z}{2} = B \cdot (1.7)$$

Y se obtiene: $\boxed{z = 1.16\ m.}$ ....(1)

La ecuación del paraboloide que se obtiene es:

$$z = \frac{\omega^2 \cdot x^2}{2g} \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{\sqrt{2g \cdot z}}{x} \quad ....(2)$$

Reemplazando (1) en (2): para $x = r = 0.6\ m$

$$\boxed{\omega = 7.94\ ^{rad}/_{s}}$$

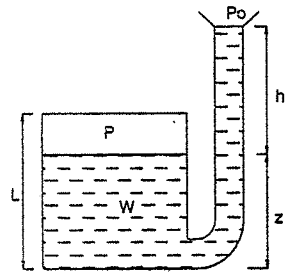
Y en revoluciones por minuto:

$$\omega = \frac{7.94(60)}{2\pi} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega = 75.9\ R.P.M.}$$

2.87. A un depósito de sección "*A*" cerrado y lleno de aire al principio a la presión inicial P_0 se va echando agua por un tubo vertical de sección "*a*". Se pide calcular la cantidad (volumen) de agua "*V*", necesaria para que la diferencia de niveles "*h*", suponga que la operación se realiza a temperatura constante.

$$V = f(A, a, h, L, Po, W)$$

Resolución:



Como se realiza a temperatura constante se cumple:

$$\underset{INICIAL}{P_0 \cdot V_0} = \underset{FINAL}{P_f \cdot V_f} \quad ....(1)$$

$$V_0 = L \cdot A$$

$$V_f = (L - z) \cdot A$$

Reemplazando en (1)

$$P_0 \cdot L \cdot A = P \cdot (L - z) \cdot A$$

$$\frac{P_0}{P} = \frac{(L - z)}{L}$$

$$\Rightarrow \quad (L - z) = \frac{P_0 \cdot L}{P} \quad ....(2)$$

$$z = \frac{L}{P}(P - P_0)$$

Por manometría se cumple: $P = P_0 + \gamma \cdot h$ ....(3)

Luego el volumen *V* de agua que nos piden será:

$$V = z \cdot A + (z + h) \cdot a = z \cdot (A + A) + h \cdot a \quad ....(4)$$

(1) en (4)

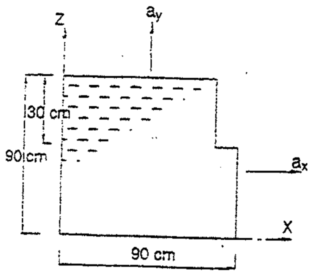
$$V = \left(\frac{L}{P}\right)(P - P_0)(A + a) + h \cdot a$$

$$V = \frac{L}{P_0 + \gamma \cdot h}(P_0 + \gamma \cdot h - P_0)(A + a) + h \cdot a$$

$$\boxed{V = \frac{L \cdot \gamma \cdot h \cdot (A + a)}{P_0 + \gamma \cdot h} + h \cdot a}$$

2.88. Si $a_x = 2.45\ m/s^2$ y $a_y = 4.9\ m/s^2$. determinar la pendiente de la superficie libre imaginaria y las presiones en *C, D y E*; $\gamma = 800\ Kg/m^3$.

Resolución:



$$dP = -\gamma \frac{a_x}{g} dx$$

$$dP = -800 \frac{2.45}{9.8} dx$$

$$dP = -200\,dx$$

Variación de la presión a lo largo de "y"

$$-dP = \gamma \cdot \left(1 + \frac{a_y}{g}\right) dy$$

$$-dP = 800\left(1 + \frac{4.9}{9.8}\right) dy$$

$$\Rightarrow \quad dP = -1200\,dy \quad \Rightarrow \quad dP = -200dx - 1200dy$$

Para hallar la pendiente de la superficie libre hacemos $dP = 0$

$$0 = -200dx - 1200dy \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = 0.1\overset{\frown}{6} \quad ;$$

$$\tan\theta = 0.1\overset{\frown}{6} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta = 9°28'}$$

$$dP = -200dx - 1200dy \quad \Rightarrow \quad P = -200\,x - 1200\,y + P_0$$

Para $(x,y) = (0.9, 0.6)$:

$$P = 0 = -200(0.9) - 1200(0.6) + P_0$$

$$P_0 = 900$$

$$\therefore \quad P = -200\,x - 1200\,y + 900$$

Si: $(x,y) = (0,0.9)$

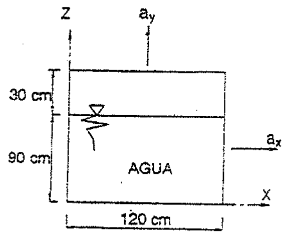
$(x,y) = (0,0)$ $\Rightarrow$

$(x,y) = (0.9,0)$

$$\boxed{\begin{array}{l} P_C = -180\ Kg/m^2 \\ P_D = 900\ Kg/m^2 \\ P_E = 720\ Kg/m^2 \end{array}}$$

2.89. En la figura $a_x = 4.9\ m/s^2$. Determinar las presiones en A, B y C.

Resolución:



La variación de la presión a lo largo de x:

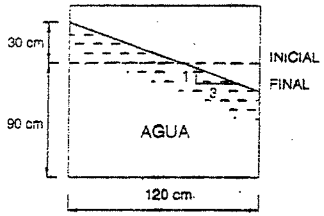
$$\frac{dP}{dx} = -\gamma \frac{a_x}{g} = -\gamma\left(\frac{4.9}{9.8}\right) = -500$$

La variación de la presión a lo largo de y:

$$\frac{dP}{dx} = -\gamma\left(1 + \frac{a_x}{g}\right) = -\gamma\left(1 + \frac{4.9}{9.8}\right) = -1500$$

$$\therefore \quad dP = \frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy = -500dx - 1500dy$$

Para: $dP = 0 \Rightarrow 1500\ dy = -500\ dx \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{3}$



Posición final del nivel del agua

Que es la pendiente de la línea de presión.

$$dP = -500dx - 1500dy$$

$$P = P_0 - 500x - 1500y \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(\alpha)$$

$En\ (x,y) = (0,1.1) \quad \Rightarrow \quad P = 0$

$$0 = P_0 - 1500\cdot(1.1)$$

$$\Rightarrow \quad P_0 = 1650\ Kg/m^2$$

Reemplazando en (α)

$$P = 1650 - 500x - 1500\,y$$

Presión en A: No llega el fluido; $\Rightarrow$ $P_A = 0$

Presión en B: $B = (x,y) = (0,0)$ $\Rightarrow$ $P_B = 1650\ Kg/m^2$

Presión en C: $C = (x,y) = (1.2,0)$ $\Rightarrow$ $P_C = 1650 - 500\,(1.2)$

$P_C = 1050\ Kg/m^2$

2.90. Un gas que contiene una ley $P\rho^{-n} = Cte.$ gira con respecto a un eje vertical como un sólido. Deducir una expresión de la presión en dirección radial para la velocidad "ω", presión P_0 y densidad ρ_0 en un punto del eje.

Resolución:

$$\frac{dP}{dr} = \gamma\frac{\omega^2 \cdot r}{g} \quad ; \quad \frac{dP}{dr} = \rho\cdot\omega^2\cdot r \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\alpha)$$

De acuerdo al dato: $\frac{P}{\rho^n} = \frac{P_0}{\rho_0^n}$

De donde: $\rho = \rho_0\left(\frac{P}{P_0}\right)^{1/n} \quad \Rightarrow \quad En\ (\alpha): \ \frac{dP}{dr} = \rho_0\left(\frac{P}{P_0}\right)^{1/n}\cdot\omega^2\cdot r$

$$\frac{dP}{P^{1/n}} = \frac{\rho_0}{P_0^{1/n}} \quad \Rightarrow \quad Integrando: \ \int\frac{dP}{P^{1/n}} = \int\frac{\rho_0}{P_0^{1/n}}\omega^2\cdot r\cdot dr$$

$$\frac{n}{n+1}P^{\frac{n-1}{n}} = \frac{\rho_0}{P_0^{1/n}}\omega^2\cdot\frac{r^2}{2} + Cte. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\beta)$$

Condiciones de borde: para, $P = P_0$; $\rho = \rho_0$

$$Cte. = \frac{n}{n-1}P_0^{\frac{n-1}{n}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\gamma)$$

(γ) en (β): $\dfrac{n}{n-1}P^{\frac{n-1}{n}} = \dfrac{\rho_0}{P_0^{1/n}}\omega^2\dfrac{r^2}{2} + \dfrac{n}{n-1}P_0^{\frac{n-1}{n}}$

$$\boxed{P = \left(\left(\frac{n-1}{n}\right)\frac{\rho_0}{P_0^{1/n}}\frac{\omega^2 \cdot r^2}{2} + P_0^{\frac{n-1}{n}}\right)^{\frac{n}{n-1}}}$$

2.91. Deducir una expresión para la variación de p en un gas a temperatura constante, que experimenta una aceleración a_x en la dirección x.

Resolución:

$$dP = -\gamma\frac{a_x}{g}dx \quad \Rightarrow \quad dP = -\rho \cdot a_x \cdot dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(\alpha)$$

Como: $t = Cte.$ $\Rightarrow$ $\dfrac{P}{P_0} = \dfrac{\rho}{\rho_0}$;

Reemplazando en (α): $dP = -P\left(\dfrac{\rho_0}{P_0}\right)a_x \cdot dx$

$$\int\frac{dP}{P} = -\int\frac{\rho_0}{P_0}a_x \cdot dx \quad \Rightarrow \quad Ln\,P = -\left(\frac{\rho_0}{P_0}\right)a_x \cdot x + Cte. \quad \ldots\ldots\ldots(\beta)$$

Para $x = 0$ => $P = P_0$

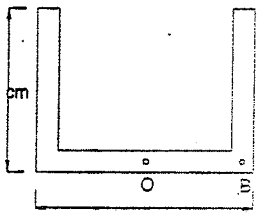
En (β): $Cte. = Ln\,P_0$ $\Rightarrow$ $Ln\,P = -\left(\dfrac{\rho_0}{P_0}\right)\cdot a_x \cdot x + Ln\,P_0$

$$Ln\left(\frac{P}{P_0}\right) = -\left(\frac{\rho_0}{P_0}\right)\cdot a_x \cdot x \quad \rightarrow \quad \frac{P}{P_0} = e^{-\left(\frac{\rho_0}{P_0}\right)a_x \cdot x} \quad \therefore \boxed{P = P_0 \cdot e^{-\left(\frac{\rho_0}{P_0}\right)a_x \cdot x}}$$

2.92. Calcular la ubicación del eje vertical de giro y la velocidad de rotación del tubo en U para que sean nulas las presiones del líquido en el punto medio, en O y en el punto B.

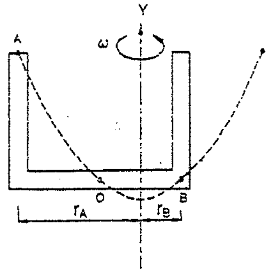
Resolución:

Para que sean nulas las presiones en O y en B, la superficie libre imaginaria debe ser como en la siguiente figura:



Sabemos que la superficie libre imaginaria es una parábola: luego como los puntos O y B están a la misma altura, el eje de la parábola está en el centro de OB.

Sabemos por teoría que la ecuación de la parábola es: $y = \dfrac{\omega^2}{2g}x^2$



Para

$x = r_B$ $\Rightarrow$ $y_B = \dfrac{\omega^2}{2g}(r_B)^2 = \dfrac{\omega^2}{2g}(0.15)^2$

$x = r_A$ $\Rightarrow$ $y_A = \dfrac{\omega^2}{2g}(r_A)^2 = \dfrac{\omega^2}{2g}(0.45)^2$

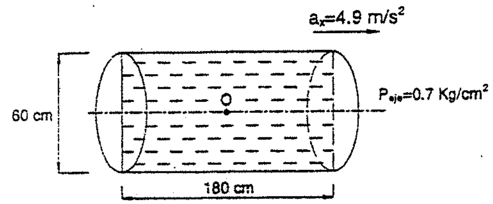
Pero: $y_A - y_B = 0.3$

(Dado que la altura inicial no varía solo la distribución de presiones, debido a que el tubo es cerrado por un lado)

Luego: $\dfrac{\omega^2}{2g}\left((0.45)^2 - (0.15)^2\right) = 0.30$

$$\omega^2 = \frac{(0.30)(19.6)}{(0.45)^2 - (0.15)^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega = 5.7\ rad/s}$$

2.93. Un recipiente cilíndrico de 60 cm de diámetro y 180 cm de longitud, sufre una aceleración uniforme a lo largo de su eje en dirección horizontal de 4.9 m/s^2. El recipiente está lleno de líquido γ = 800 kg/m^3 existiendo una presión de 0.7 kg/cm^2 a lo largo de su eje antes de iniciarse la aceleración. Determinar la fuerza neta ejercida contra el líquido y la pendiente de las superficies de igual presión.



Resolución:

Sabemos que: $dP = \dfrac{\partial P}{\partial x}dx + \dfrac{\partial P}{\partial y}dy$

O sea: $dP = -\gamma\dfrac{a_x}{g}dx - \gamma\left(1 + \dfrac{a_y}{g}\right)dy$

Reemplazando datos: $dP = -800 * \dfrac{4.9}{9.8}dx - 800dy$

$$dP = -400dx - 800dy$$

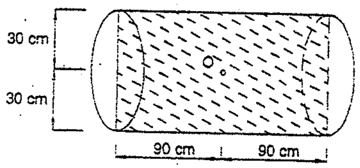
Integrando: $P = -400x - 800y + P_0$ ....(α)

Además se sabe que:

$$\tan\theta = \frac{a_x}{g} \quad \Rightarrow \quad \tan\theta = \frac{4.9}{9.8} = 0.5$$

$$\boxed{\theta = 26.57^\circ}$$

Pendiente de las superficies de igual presión



La posición final de las líneas de igual presión será tal como se muestra en la figura:

En el punto medio del cilindro la presión no ha variado; luego en el punto O:

$$O = (0.9, 0.3)$$

$$\Rightarrow \quad P = 7000\ Kg/cm^2$$

En (α): $7000 = -400*0.9 - 800*0.3 + P_0$

$$\boxed{P_0 = 7600\ {}^{Kg}/_{cm^2}}$$

Luego la distribución de presiones será: $P = -400x - 800y + 7600$

Cálculo de la fuerza neta horizontal: $F_H = F_A - F_B$

$$F_A = P_{CG,A} \cdot AREA \quad \Rightarrow \quad CG_A = (0, 0.3) \quad ; \quad A = \pi(0.3)^2$$

$$F_A = (-400*0 - 800*0.3 + 7600)(\pi(0.3)^2) = 2081\ Kg$$

$$F_B = P_{CG,B} \cdot AREA \quad \Rightarrow \quad CG_B = (1.8, 0.3) \quad ; \quad A = \pi(0.3)^2$$

$$F_B = (-400*1.8 - 800*0.3 + 7600)(\pi(0.3)^2) = 1877.40\ Kg$$

$$F_H = 2081 - 1877.40 \quad \Rightarrow \quad \boxed{F_H = 203.60\ Kg}$$

La fuerza vertical será:

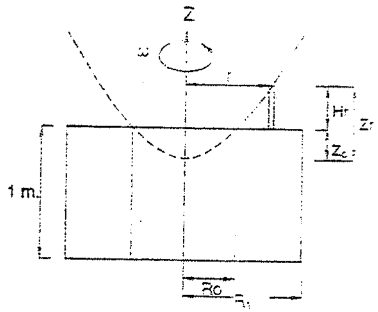
$$F_V = \textit{Peso del cilindro del fluido} = \gamma \cdot Area \cdot L$$

$$F_V = \pi(0.3)^2(1.8)(800)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{F_V = 407.20\ Kg}$$

2.94. Se tiene un cilindro hueco de 0.3 m y 0.9 m de diámetro interior y exterior respectivamente y de 1 m de altura, encontrándose lleno y totalmente cerrado. Este cilindro gira alrededor de su eje vertical a 100 *R.P.M.* Determinar el empuje sobre la tapa.

Resolución:



Al ser un cilindro hueco la presión en el punto A es cero, y la parábola imaginaria tiene la forma mostrada, luego:

$\omega = 100\ R.P.M. = 10.47\ rad/s$

$R_0 = 0.15\text{m} \quad R_1 = 0.45\text{m}$

Sabemos:

$$z_0 = \frac{\omega^2 \cdot R_0^2}{2g} = \frac{(10.47)^2(0.15)^2}{19.6}$$

$$z_0 = 0.126m$$

La presión en un anillo diferencial de la tapa será: $P_r = \gamma \cdot H_r = \gamma \cdot (z_r - z_0)$

Y la fuerza será: $dF = P_r \cdot dA \quad \Rightarrow \quad dF = P_r \cdot 2\pi \cdot r \cdot dr$

O sea: $$dF = \gamma \cdot (z_r - z_0) \cdot 2\pi \cdot r \cdot dr = \gamma \cdot \left(\frac{\omega^2 \cdot r^2}{2g} - z_0\right) \cdot 2\pi \cdot r \cdot dr$$

$$dF = 2\pi \cdot \gamma \cdot \left(\frac{\omega^2 \cdot r^3}{2g} - z_0 \cdot r\right) \cdot dr$$

Integrando: $$F = \int_{R_0}^{R_1} 2\pi \cdot \gamma \cdot \left(\frac{\omega^2 \cdot r^3}{2g} - z_0 \cdot r\right) \cdot dr = 2\pi \cdot \gamma \left(\frac{\omega^2 \cdot r^4}{8g} - \frac{z_0 \cdot r^2}{2}\right)\Bigg|_{R_0}^{R_1}$$

Luego: $$F = 2\pi \cdot \gamma \left(\left(\frac{\omega^2 \cdot R_1^4}{8g} - \frac{\omega^2 \cdot R_0^4}{8g}\right) - \left(\frac{z_0 \cdot R_1^2}{2} - \frac{z_0 \cdot R_0^2}{2}\right)\right)$$

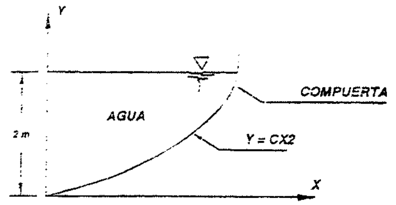
$$F = 2\pi \cdot \gamma \cdot \left(\frac{\omega^2}{8g}(R_1^4 - R_0^4) - \frac{z_0}{2}(R_1^2 - R_0^2)\right)$$

$$F = \pi \cdot \gamma \cdot (R_1^2 - R_0^2)\left(\frac{\omega^2}{4g}(R_1^2 + R_0^2) - z_0\right)$$

Reemplazando datos el empuje sobre la tapa es: $\boxed{F = 284.55\ Kg}$

PROBLEMA SUPLEMENTARIO

1. La compuerta parabólica que se encuentra en la figura tiene $2\ m$ de ancho. Determinar la magnitud y la línea de acción de la fuerza horizontal que actúa sobre la compuerta debido a la presencia del agua: $C = 0.25\ m^{-1}$.



DATOS :

$\omega = 2m$

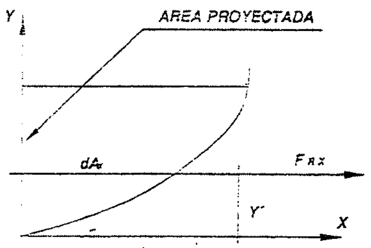
E^C sup.: $y = C \cdot x^2$; $C = 0.25$

Nivel de agua $D = 2m$

Determinar :

F_{R_x} ; y'

Resolución:



$$F_{R_x} = \int_{A_X} p \cdot dA_X = \int_0^D p \cdot \omega \cdot dy$$

$$P = \rho \cdot g \cdot h \ ; \quad h = D - y$$

$$P = \rho \cdot g \cdot (D - y)$$

$$F_{R_x} = \int_0^D \rho \cdot g \cdot h \cdot \omega \cdot dy = \int_0^D \rho \cdot g \cdot \omega \cdot (D - y) \cdot dy = \rho \cdot g \cdot \omega \cdot \left(D \cdot y - \frac{y^2}{2} \right)_0^D$$

$$F_{R_x} = \frac{\rho \cdot g \cdot \omega \cdot D^2}{2} = 999 \tfrac{Kg}{m^3} * 9.81 \tfrac{m}{s} * 2m * \frac{2^2}{2} m^2 * \tfrac{N \cdot m^2}{Kg \cdot m} \quad \Rightarrow \boxed{F_{R_x} = 39.2\ KN}$$

Para determinar la línea de acción F_{Rx}

$$y' = \frac{1}{F_{R_x}} \cdot \int_{A_X} y \cdot P \cdot dA_X = \frac{1}{F_{R_x}} \cdot \int_0^D y \cdot P \cdot \omega \cdot dy = \frac{1}{F_{R_x}} \cdot \int_0^D y \cdot \rho \cdot g \cdot h \cdot \omega \cdot dy$$

$$y' = \frac{\omega \cdot \rho \cdot g}{F_{R_x}} \cdot \int_0^D y \cdot (D - y) \cdot dy = \frac{\omega \cdot \rho \cdot g}{F_{R_x}} \cdot \left(\frac{D \cdot y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right)_0^D = \frac{\omega \cdot \rho \cdot g}{F_{R_x}} \cdot \left(\frac{D^3}{6} \right)$$

$$y' = \frac{\omega \cdot \rho \cdot g \cdot D^3}{6} * \frac{2}{\omega \cdot \rho \cdot g \cdot D^2} = \frac{D}{3} = \frac{2}{3} = 0.67m$$

$$\boxed{y' = 0.67m}$$

CAPITULO III

CINEMÁTICA DE LOS FLUIDOS

La cinemática de los fluidos es una parte de la MECÁNICA DE LOS FLUIDOS que estudia los movimientos de los fluidos sin tomar en cuenta las fuerzas que la provocan.

EL CAMPO DE VELOCIDADES. DESCRIPCIÓN DE MOVIMIENTOS

Para identificar partículas de un flujo en cada instante, se utilizan coordenadas espaciales, es decir, que la velocidad de todas las partículas pueden expresarse de la siguiente manera:

$$\bar{V} = \bar{V}_{(x,y,z,t)}$$

o desarrollada en sus tres proyecciones es:

$$\bar{V} = u_{(x,y,z,t)}\hat{i} + v_{(x,y,z,t)}\hat{j} + w_{(x,y,z,t)}\hat{k}$$

Físicamente, estas ecuaciones indican que en el instante t, la partícula de fluido cuya posición es $P_{(x,y,z)}$, tiene una velocidad $\bar{V}$

Cuando la velocidad es independiente del tiempo el movimiento se llama estacionario o permanente, y :

$$\bar{V} = \bar{V}_{(x,y,z)}$$

Método de Euler: .- Estudia las variaciones del flujo con el tiempo en un punto, proporcionando el campo de velocidades del fluido en el espacio y en cada instante:

$$\bar{V} = u_{(x,y,z,t)}\hat{i} + v_{(x,y,z,t)}\hat{j} + w_{(x,y,z,t)}\hat{k}$$

Método de Lagrange: .- Consiste en seguir la trayectoria de la partícula, con el tiempo. Esto significa que (x,y,z) no permanecerán constantes en la expresión $\bar{V}_{(x,y,z,t)}$. Las coordenadas espaciales en este caso serán funciones del tiempo, con valores iniciales x_0, y_0, z_0 en el instante t_0. Así, la velocidad de una partícula en el instante $t = t_0$, pasa por x_0, y_0, z_0 puede expresarse de la siguiente forma:

$$V_x = u_{(x(t),y(t),z(t))}$$
$$V_y = v_{(x(t),y(t),z(t))}$$
$$V_z = w_{(x(t),y(t),z(t))}$$

ACELERACIÓN DE UNA PARTÍCULA FLUIDA

En el método de Lagrange se observa que x, y, z son funciones del tiempo, luego se puede establecer el campo de aceleraciones derivando el campo de velocidades con respecto al tiempo.

$$\bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{\partial \bar{V}}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial t}$$

Por definición, las componentes de la velocidad son:

$$u = \frac{dx}{dt} \quad , \quad v = \frac{dy}{dt} \quad , \quad w = \frac{dz}{dt}$$

$$\bar{a} = \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + u\frac{\partial \bar{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \bar{V}}{\partial y} + w\frac{\partial \bar{V}}{\partial z}$$

o lo que es lo mismo: $\bar{a} = \dfrac{\partial \bar{V}}{\partial t} + (\bar{V}\cdot\nabla)\bar{V}$

$\dfrac{\partial V}{\partial t}$ = Aceleración local: Proviene de la variación de la velocidad en un punto de la masa fluida, con el paso del tiempo. Indica la traslación del campo.

$(\bar{V}\cdot\nabla)\bar{V}$ = Aceleración Convectiva: Proviene de un campo permanente (en un instante t), en el que la velocidad de una partícula sufrirá variaciones en los diversos puntos del campo. Está relacionada con el gradiente de las componentes de la velocidad.

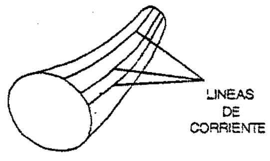
LÍNEAS DE CORRIENTE DE FLUJO.

Las líneas de flujo son definidas como aquellas líneas que son tangentes a los vectores velocidad en cada punto y en un instante dado. Significa que para hallar las líneas de flujo hay que congelar las trayectorias en un instante dado (hacer $t = constante$)

Las líneas de flujo coinciden con las trayectorias, solamente cuando la velocidad no depende del tiempo.

TUBO DE FLUJO

Es la superficie formada por todas las líneas de corriente trazadas por todos los puntos de una curva cerrada. Si el flujo depende del tiempo, se tendrá en tubo del flujo en un instante.



TUBO DE FLUJO

VORTICIDAD (ξ)

Nos indica el giro del fluido.

$$\bar{\xi} = \nabla\times\bar{V}$$

Por componentes: $\xi_x = \dfrac{\partial w}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial z}$, $\xi_y = \dfrac{\partial u}{\partial z} - \dfrac{\partial w}{\partial x}$, $\xi_z = \dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}$

Se puede demostrar que la vorticidad es dos veces la velocidad angular del fluido:

$$\bar{\xi} = 2 * \bar{\omega}$$

TORBELLINO (T)

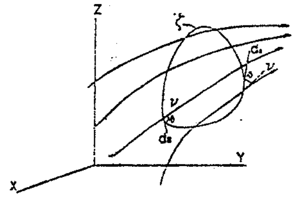
Es equivalente a la velocidad angular para todo tipo de fluidos.

$$T = \frac{1}{2}(\nabla\times\bar{V})$$

Líneas de torbellino, son aquellas que tienen como tangentes a los vectores torbellino.

CIRCULACIÓN (Γ)

Se define como la integral de línea en torno a una curva cerrada, en el instante t, de la componente tangencial de la velocidad a lo largo de dicha curva.



$$\boxed{\Gamma = \oint_C \bar{V}.ds}$$

Teorema de Stokes

$$\Gamma = \oint_C \bar{V}.ds = \iint_R (\nabla\times\bar{V})d\bar{A}$$

Relación entre Γ y ξ

Del teorema de Stokes:

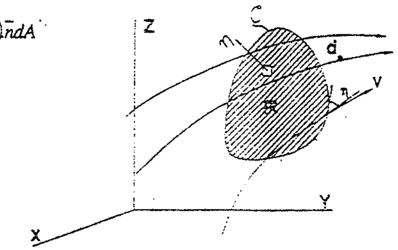
$$d\Gamma = (\nabla\times\bar{V})d\bar{A} = (\nabla\times\bar{V})\bar{n}dA$$

$$d\Gamma = (\nabla\times\bar{V})_n dA$$

Como: $\xi = \nabla\times\bar{V}$

$$\Rightarrow \quad \xi_n = \frac{d\Gamma}{dA}$$

ó $\boxed{\xi_n = \lim_{\Delta A\to 0}\dfrac{\Delta\Gamma}{\Delta A}}$



3.1. Si la velocidad de un fluido está dada por: $u = x - y$; $v = x + y$

Hallar las líneas de flujo.

Resolución:

Puede notarse que el flujo es permanente, por lo tanto, las líneas de corriente coinciden con las trayectorias.

$$u = \frac{dx}{dt} = x - y \quad \text{...} \quad (1)$$

$$v = \frac{dy}{dt} = x + y \quad \text{...} \quad (2)$$

De las ecuaciones (1) y (2):

$$\frac{dx}{x-y} = \frac{dy}{x+y}, \quad \text{entonces:} \quad (x+y)dx + (y-x)dy = 0 \quad \text{............}(3)$$

Hacemos $y = sx \Rightarrow dy = sdx + xds$ y la ecuación (3) se transforma en:

$$\frac{dx}{x} + \frac{s}{s^2+1}ds - \frac{ds}{s^2+1} = 0$$

integrando:

$$\ln(x) + \frac{1}{2}\ln(s^2+1) - arc\tan(s) = C$$

$$\Rightarrow \ln(x) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2+y^2}{x^2}\right) - arc\tan\left(\frac{y}{x}\right) = C$$

$$\ln\sqrt{x^2+y^2} = arctan\frac{y}{x} + C$$

$$\sqrt{x^2+y^2} = e^{arctan\frac{y}{x}+C}$$

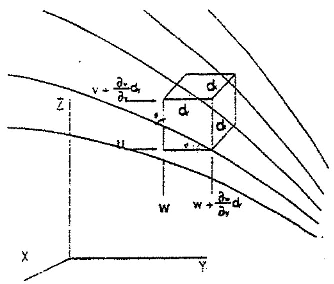
En coordenadas polares:

$$\boxed{r = Ce^{\phi}} \quad \text{Rpta.}$$

Ecuación que nos indica que las líneas de corriente son una familia de espirales logarítmicas.

3.2. Demostrar que la velocidad angular de un elemento infinitesimal de fluido se relaciona con la vorticidad por: $\bar{\xi} = 2.\bar{\omega}$

Resolución:



Para la demostración es conveniente tomar un elemento fluido de forma cúbica como se muestra en la figura.

Observando la figura se deduce que la velocidad angular de la partícula fluida, en su componente es:

$$\omega_x = \frac{\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2}{2} \quad \text{..................................} \quad (1)$$

$$\dot{\theta}_1 = \frac{w + \frac{\partial w}{\partial y}dy - w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial y} \quad \text{..............}(2)$$

$$\dot{\theta}_2 = \frac{v + \frac{\partial v}{\partial z}dz - v}{\partial z} = -\frac{\partial v}{\partial z} \quad \text{.............} (3)$$

Reemplazando (2) y (3) en (1), se obtiene que la componente en la dirección x de la velocidad angular media es: $\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)$

Las otras componentes pueden calcularse análogamente, obteniéndose:

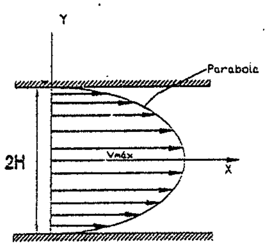
$$\omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \quad \text{y} \quad \omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

o en notación vectorial:

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\hat{\imath} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\hat{\jmath} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\hat{k}\right) = \frac{1}{2}(\xi_x\hat{\imath} + \xi_y\hat{\jmath} + \xi_z\hat{k})$$

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2}\bar{\xi} \qquad \therefore \quad \boxed{\bar{\xi} = 2.\bar{\omega}}$$

3.3. Entre dos paredes paralelas planas fluye rectilíneamente un líquido; la distribución de la velocidad en la sección es parabólica. Calcular las velocidades angulares de rotación



de las partículas del líquido. ¿Es esta corriente un torbellino o carente de torbellino? Resolver el mismo problema para una corriente de un líquido en una tubería cilíndrica con la misma distribución de las velocidades en al sección.

Resolución:

Por definición $\quad \overline{\xi} = \nabla \times \overline{V} \quad$ y $\quad \xi = 2\overline{\omega}$

$$\Rightarrow \overline{\omega} = \frac{1}{2}\nabla \times \overline{V} \qquad \text{(velocidad angular)}$$

$$y \quad T = \overline{\omega} \qquad \text{(vector torbellino).}$$

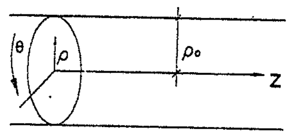
a) Para el caso de las dos paredes paralelas:

$$V_x = V_{máx}\left[1 - \left(\frac{y}{H}\right)^2\right] \qquad V_y = 0 \quad , \quad V_z = 0$$

$$y \quad \nabla \times \overline{V} = \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right)\hat{\imath} + \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}\right)\hat{\jmath} + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)\hat{k}$$

$$\Rightarrow \quad \nabla \times \overline{V} = 2.V_{máx}\frac{y}{H^2}\overline{k} \qquad \Rightarrow \boxed{\overline{\omega} = V_{máx}\frac{y}{H^2}\overline{k} = T} \quad \text{Rpta.}$$

b) Para el caso de tubería. Utilizando coordenadas cilíndricas.



$$V_z = V_{máx}\left[1 - \left(\frac{\rho}{\rho_o}\right)^2\right]$$

$$V_\rho = 0 \quad , \quad V_\theta = 0$$

$$y \quad \nabla \times \overline{V} = \frac{1}{\rho}\left[\left(\frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial(\rho V_\theta)}{\partial z}\right)\overline{e}_\rho + \left(\frac{\partial V_\rho}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial \rho}\right)\rho.\overline{e}_\theta + \left(\frac{\partial(\rho V_\theta)}{\partial \rho} - \frac{\partial \rho}{\partial \theta}\right)\overline{e}_z\right]$$

$$\Rightarrow \quad \nabla \times \overline{V} = -\frac{\partial V_z}{\partial \rho}.\overline{e}_\theta = 2.V_{máx}\frac{\rho}{\rho_0^2}.\overline{e}_\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{\omega} = V_{máx}\frac{\rho}{\rho_0^2}.\overline{e}_\theta = T} \qquad \text{....... Rpta.}$$

Como se ha podido observar, en ambos casos la corriente es de torbellino.

ECUACIÓN DE CONTINUIDAD.

a) **Forma diferencial**

ρ : *densidad*
$\overline{V}$: *velocidad*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \nabla \cdot \rho \times \overline{V} = 0$$

ó

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\nabla \cdot \overline{V} + \overline{V} \cdot \nabla \rho = 0$$

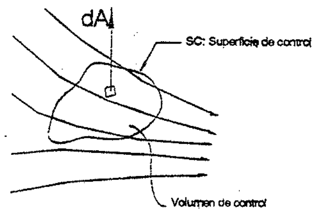
Si el flujo es permanente : $\quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

Si el flujo es incompresible: $\quad \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0 = \nabla \rho$

En consecuencia para flujos permanentes e incompresibles: $\quad \nabla.\overline{V} = 0$

b) **Forma Integral**

$$\oiint_{SC} \rho\overline{V}.d\overline{A} + \iiint_{VC}\frac{\partial \rho}{\partial t}dv = 0$$

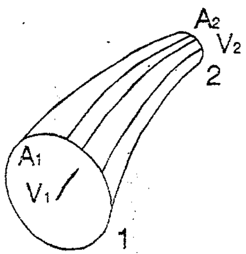


Ecuación que nos indica que el caudal en masa a través de la superficie de control (SC) es igual a la disminución, por unidad de tiempo, de la masa que ocupa el volumen de control (VC)

Para un flujo permanente: $\quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \oiint_{SC} \rho\overline{V}.d\overline{A} = 0$

o lo que es lo mismo:

$$\rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2$$



Entonces para un tubo de flujo, de un fluido incompresible se tiene:

$$V_1 A_1 = V_2 A_2$$

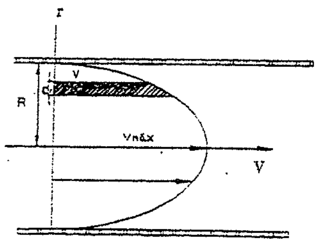
donde V es la velocidad media de la sección recta del tubo de flujo.

3.4. En la sección transversal al flujo del líquido que corre entre dos paredes paralelas, la velocidad va distribuida según la ley parabólica. (corriente laminar.)

Hallar la relación entre las velocidades media y máxima de la sección.

Resolver el mismo problema para el líquido que fluye en una tubería cilíndrica con la misma distribución de velocidades en la sección.

<u>Resolución:</u>



La Ley de distribución de velocidades en una sección la obtenemos utilizando nuestros conocimientos matemáticos y resulta:

$$V = V_{máx}\left[1-\left(\frac{y}{H}\right)^2\right]$$

La velocidad media en una sección es :

$$V_{med} = \frac{\int V dA}{\int dA} = \frac{Q}{A}$$

a) Para el caso de las dos paredes paralelas:

$dA = L.dy$

$$V_{med} = \frac{V_{máx}.L.\int_{-H}^{H}\left[1-\left(\frac{y}{H}\right)^2\right]dy}{2.L.H}$$

$$\Rightarrow \boxed{V_{med} = \frac{2}{3}V_{máx}}$$ Resp.

b) Para el caso de una tubería:

$y = r$, $H = R$, $dA = 2\pi r.dr$, $V = V_{máx}\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$

$$\Rightarrow V_{med} = \frac{\int_0^R V_{máx}\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]2\pi r dr}{\pi.R^2}$$

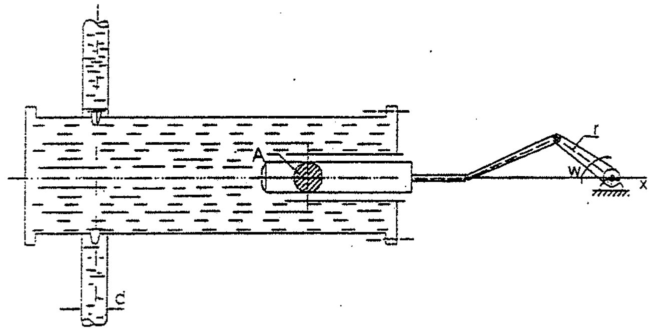
y se obtiene: $\Rightarrow \boxed{V_{med} = \frac{1}{2}V_{máx}}$ Resp.

3.5. El movimiento del émbolo buzo en le cilindro hidráulico de la bomba está descrito aproximadamente por la ecuación

$$x = x_0 - r.\cos(\omega t)$$

donde t es el tiempo. w es la velocidad angular, r es el radio de la manivela, x_0 es la abscisa de la posición inicial del émbolo buzo (para $t = \pi / 2\omega$).

Calcular las velocidades medias en la sección y las aceleraciones de las partículas del líquido en la tubería acoplada al cilindro, si la superficie transversal del émbolo buzo es igual a A y el diámetro de la tubería es d.



<u>Resolución:</u>

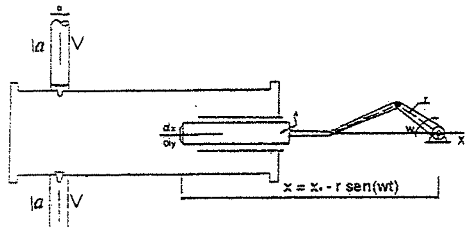
De la ecuación del movimiento del émbolo buzo hay que hallar su velocidad:

$$x = x_0 - r.\cos(\omega t)$$

$$\frac{dx}{dt} = r\cdot\omega\cdot sen(\omega\cdot t)$$

Luego la velocidad y la aceleración del líquido en la tubería se determinan por la ecuación de continuidad.

$$v\left(\frac{\pi.d^2}{4}\right) = \left(\frac{dx}{dt}\right)A$$



$$\Rightarrow v = \frac{4A}{\pi d^2}r\cdot\omega.sen(\omega\cdot t)$$

(velocidad)

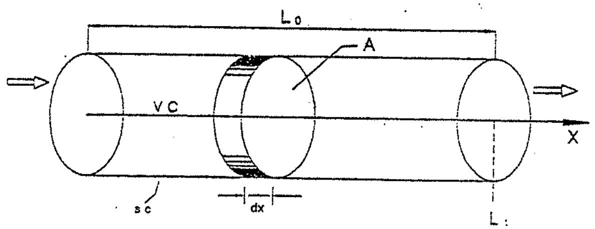
$$\Rightarrow a = \frac{dv}{dt} = \frac{4.A}{\pi d^2}r\omega^2\cos(\omega t)$$

(aceleración)

3.6. La densidad de un gas que circula por una tubería de sección constante A, con una longitud L_0, varía de acuerdo con la siguiente ley:

$$\rho = \rho_0\left(1-\frac{x}{2.L_0}\right)sen\frac{V_0 t}{L_0} \qquad L_0 \geq x \geq 0 \qquad \frac{L_0}{V_0}\frac{\pi}{2} \geq t \geq 0$$

donde x es una distancia medida a lo largo del eje de la tubería y V_0 es una velocidad de flujo de referencia. Encuentre la diferencia entre el flujo que entra y sale de la tubería, en un instante cualquiera.



Resolución:

Sabemos que la ecuación de continuidad en su forma integral es:

$$\int_{sc}\rho\overline{V}\,d\overline{A}+\int_{vc}\frac{\partial\rho}{\partial t}dv=0$$

Donde: $\int_{vc}\frac{\partial\rho}{\partial t}dv$, es igual a la disminución por unidad de tiempo de la masa que ocupa el volumen de control (VC) y es el termino a calcular.

Entonces:
$$\int_{vc}\frac{\partial\rho}{\partial t}dv = \int_0^{L_0}\left[\rho_0\left(1-\frac{x}{2.L_0}\right)\frac{V_0}{L_0}\cos\frac{V_0 t}{L_0}\right].A.dx$$

$$= \rho_0 A.\frac{V_0}{L_0}\cos\left(\frac{V_0 t}{L_0}\right)\int_0^{L_0}\left[\left(1-\frac{x}{2.L_0}\right)\right]dx$$

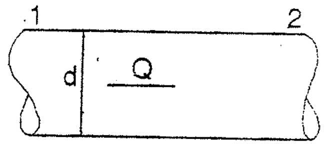
$$= \rho_0 A.\frac{V_0}{L_0}\cos\left(\frac{V_0 t}{L_0}\right)\left[x-\frac{x^2}{4L_0}\right]_0^{L_0}$$

Finalmente:
$$\boxed{\int_{vc}\frac{\partial\rho}{\partial t}dv = \frac{3}{4}\rho_0 A.\frac{V_0}{L_0}\cos\left(\frac{V_0 t}{L_0}\right)}$$ Resp.

3.7. Por una tubería cilíndrica de diámetro d = 150 mm. El agua se bombea de un recipiente caliente a otro frío, a razón de G = 20 Kgf/s.

Determinar la velocidad media de la corriente de agua en la sección al principio y al final de la tubería, si la temperatura en el agua al principio de ésta es igual a +80 °C y al final de ésta es igual a +15 °C. Las densidades relativas del agua a +80 °C y a +15 °C son 0.954 y 0.999 respectivamente.

Resolución:



G: es gasto en Kgf

$$\Rightarrow \quad G = \gamma\frac{V}{t} \quad \Rightarrow \quad \frac{G}{\gamma} = \frac{V}{t}$$

como: $Q = \frac{G}{t}$

$$\Rightarrow \boxed{Q = \frac{G}{\gamma}} \quad ....(1)$$

+80°C d = 150mm +15°C

γ_1 = 954Kgf/m^3 γ_2 = 999Kgf/m^3

G = 20 Kgf/s A_2 = A

A_1 = A = $\pi.d^2/4$ = 0.0177m^2

de (1) $$Q_1 = \frac{20\ Kgf/seg}{954\ Kgf/m^3}$$

$$Q_1 = 0.021\ m^3/seg$$

por continuidad: $\rho_1 Q_1 A_1 = \rho_2 Q_2 A_2$

como: $A_1 = A_2 = A$, y $\rho = \frac{\gamma}{g}$ se obtiene:

$$Q_2 = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}Q_1$$

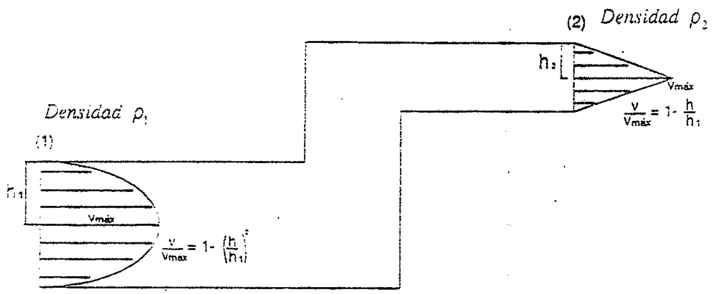
Reemplazando valores:

$$Q_2 = 0.020\ m^3/seg$$

Las velocidades medias serán:

$$\boxed{\begin{aligned} V_1 &= \frac{Q_1}{A} = 1.186\frac{m}{s} \\ V_2 &= \frac{Q_2}{A} = 1.130\frac{m}{s}\end{aligned}}$$ Rpta.

3.8. Suponiendo que la configuración mostrada en la figura del problema, sea bidimensional, calcule la rapidez de variación de la masa dentro de la configuración, por unidad de espesor.



Resolución:

La cantidad de masa que ingresa por (1) en la unidad de tiempo es:

$$\dot{M}_1 = \rho_1 Q_1 = \rho_1 \cdot \int_{-h_1}^{h_1} V_{máx}\left[1-\left(\frac{h}{h_1}\right)^2\right] x\,dh$$

$$= \rho_1 . V_{máx}\left[h - \frac{h^3}{3h_1^2}\right]_{-h_1}^{h_1}$$

$$\Rightarrow \quad M_1 = \frac{4}{3}\rho_1 . V_{máx} h_1 \quad \text{...} (I)$$

La cantidad de masa que sale, en la unidad de tiempo por (2) es:

$$M_2 = \rho_2 Q_2 = \rho_2 . 2 . \int_0^{h_2} V_{máx}\left[1-\left(\frac{h}{h_2}\right)\right] 1x\,dh$$

$$= 2\rho_2 . V_{máx}\left[h - \frac{h^2}{2h_2}\right]_0^{h_2}$$

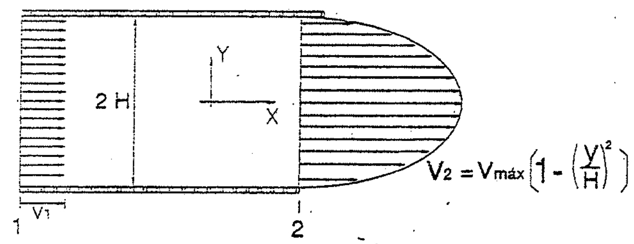
$$\Rightarrow \quad M_2 = \rho_2 . V_{máx} h_2 \quad \text{...} (II)$$

Luego, la rapidez de variación de la masa dentro de la configuración es:

$$\boxed{M_1 - M_2 = \frac{4}{3}\rho_1 . V_{máx} h_1 - \rho_2 . V_{máx} h_2}$$ Rpta.

3.9. Un flujo de gas pasa por entre dos placas. En la sección (1) la velocidad es uniforme ($V_1 = 1.1\ m/s$)

Si la distribución de velocidades en (2) es $V_2 = V_{máx}\left[1-\left(\frac{y}{H}\right)^2\right]$ y T_2 es el doble que T_1. Hallar cuánto vale $V_{máx}$, si $P_1 = 3\ Kgf/cm^2$ y $P_2 = 1.5\ Kgf/cm^2$ absolutos.



Resolución:

Aplicando la ecuación de continuidad en la forma integral.

$$\oiint_{SC} \rho \overline{V} . d\overline{A} + \iiint_{VC} \frac{\partial \rho}{\partial t} dv = 0$$

y como se trata de un flujo permanente: $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

$\Rightarrow \quad \oiint \rho \overline{V} . d\overline{A} = 0$, (que nos indica que la masa que entra es igual a la que sale.)

Es decir: $\rho_1 \int_{-H}^{H} V_1 . L . dy = \rho_2 \int_{-H}^{H} V_{máx}\left[1-\left(\frac{y}{H}\right)^2\right] L . dy$ L: ancho de cada placa.

Integrando: $2\rho_1 H . V_1 = \frac{4}{3}\rho_2 . V_{máx} H$

$$\boxed{V_{máx} = \frac{3}{2}\frac{\rho_1}{\rho_2} V_1}$$

Como: $\rho_1 = \frac{P_1}{RT_1} = \frac{3}{RT_1}$, $\rho_2 = \frac{P_2}{RT_2} = \frac{1.5}{R(2T_1)}$, $V_1 = 1.1\ m/s$

Se obtiene: $\boxed{V_{máx} = 6.6\ m/s}$ Resp.

FLUJO SOLENOIDAL

Cumplen con esta condición los movimientos de los fluidos incompresibles. La ecuación de continuidad nos da la condición característica del campo solenoidal.

$$\nabla.\overline{V} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(A)}$$

es decir, si $\overline{V} = u\overline{i} + v\overline{j} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

Se define una función de flujo Ψ, tal que:

$$\left.\begin{aligned} u &= -\frac{\partial \Psi}{\partial y} \\ v &= \frac{\partial \Psi}{\partial x} \end{aligned}\right\} (2)$$

(2) en (1): $\quad \dfrac{\partial}{\partial x}\left(-\dfrac{\partial \Psi}{\partial y}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial \Psi}{\partial x}\right) = 0,$

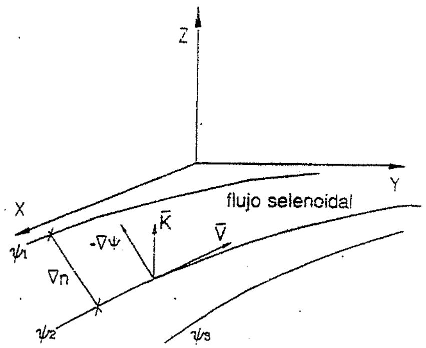
lo que indica que cumple la condición (A):

Luego como: $\overline{V} = u\overline{i} + v\overline{j}$

$$\Rightarrow \overline{V} = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}\overline{i} + \frac{\partial \Psi}{\partial x}\overline{j}$$

ó $\quad \boxed{\overline{V} = -\nabla \Psi x \overline{k}}$

la función de flujo Ψ, es bidimensional.



FLUJO POTENCIAL

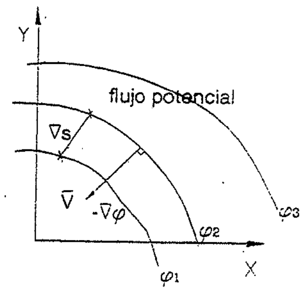
Aquí se cumple que:

$$\nabla x \overline{V} = 0$$

Entonces existe un potencial Φ de velocidades verificándose

$$\overline{V} = -\nabla\Phi$$

La función potencial es tridimensional.



FLUJO LAPLACIANO

Sucede cuando el movimiento del fluido es incompresible e irrotacional.

A) Por ser incompresible:

$$\nabla.\overline{V} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \ldots\ldots (1) \quad \text{y:} \quad \left.\begin{aligned} u &= -\frac{\partial \Psi}{\partial y} \\ v &= \frac{\partial \Psi}{\partial x} \end{aligned}\right\} (1A)$$

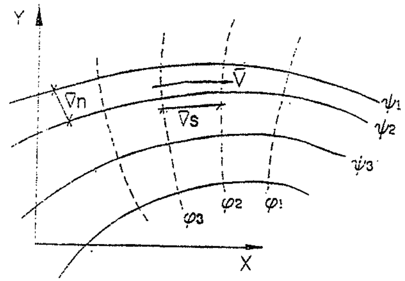
B) Por ser irrotacional:

$$\nabla x\overline{V} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \ldots\ldots (2) \quad \text{y:} \quad \left.\begin{aligned} u &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ v &= -\frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{aligned}\right\} (2A)$$

(2A) en (1)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\nabla^2\Phi = 0}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\nabla^2\Psi = 0}$$



$$|\overline{V}| = \left|\frac{\Delta\Phi}{\Delta s}\right| = \left|\frac{\Delta\Psi}{\Delta n}\right|$$

Soluciones de las ecuaciones de Laplace

a) Método Gráfico

b) Por Métodos Numéricos.

c) Por Métodos Analógicos.

d) Por Métodos Analíticos.

- **Método de la variable compleja** $\quad z = x + i.y\,, \quad f_{(z)} = \Phi_{(x,y)} - i\Psi_{(x,y)}$

Consiste en encontrar una función compleja, que en su parte real nos da una función de potencial y en su parte imaginaria una función de flujo, tal que:

$$u = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}$$
$$v = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \Psi}{\partial x}$$
llamadas condiciones de Cauchy – Rieman

3.10. Si se sabe que la función potencial complejo y su conjugado son respectivamente:

$$f_{(z)} = \Phi + i\Psi \qquad \text{y} \qquad f^{*}(z^{*}) = \Phi - i\Psi$$

donde: $z = x + iy$ y $z^{*} = x - iy$

Demostrar que la relación entre $f_{(z)}$ y la velocidad $|\overline{V}|$ del teorema de Bernoulli se relacionan así:

$$\left(\frac{df}{dz}\right)\left(\frac{df^{*}}{dz^{*}}\right) = |\overline{V}|^{2}$$

<u>Resolución</u>:

$$f_{(z)} = \Phi + i\Psi \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + i\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad \text{.................(1)}$$

Como: $z = x + iy \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = 1$; $z^{*} = x - iy \Rightarrow \frac{\partial z^{*}}{\partial x} = 1$

Además: $u = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ y $v = \frac{\partial \Psi}{\partial x}$

Entonces en (1) se obtendrá:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -u + i.v \quad \text{.. (2)}$$

$$f_{(z^{*})}^{*} = \Phi - i\Psi \qquad \frac{\partial f^{*}}{\partial x} = \frac{\partial f^{*}}{\partial z^{*}}\frac{\partial z^{*}}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} - i\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

$$\text{ó} \qquad \frac{\partial f^{*}}{\partial z^{*}} = -u - iv \quad \text{.............................. (2a)}$$

Multiplicando miembro a miembro las ecuaciones (2) y (2a), se obtiene:

$$\boxed{\left(\frac{df}{dz}\right)\left(\frac{df^{*}}{dz^{*}}\right) = |\overline{V}|^{2}}$$

<u>LA FUNCIÓN COMPLEJA PARA ALGUNOS FLUJOS SIMPLES</u>

El conocimiento del potencial complejo ($f_{(z)} = \Phi + i\Psi$) permite dibujar una red de corriente del movimiento.

A cada $f = f_{(z)}$ le corresponde un problema físico determinado, y aquí se dará su interpretación correspondiente.

3.11. El campo de FLUJO UNIFORME.

Sea la transformación $f_{(z)} = (a + ib).z$

Tendremos: $\Phi + i\Psi = (a + ib)(x + iy) = (ax - by) + i(ay + bx)$

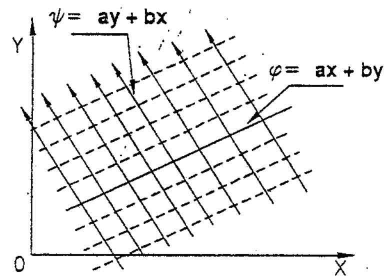
Igualando partes reales e imaginarias:

$$\Phi = (ax - by)$$
$$\Psi = (ay + bx)$$

Es decir que para $\Phi = constante$ y $\Psi = constante$ se obtiene respectivamente:

$$ax - by = C$$
$$ay + bx = C_2$$

Que en el plano x-y son dos haces de rectas paralelas, ortogonales entre sí, que representan un movimiento paralelo.



Red de corriente en el movimiento paralelo

$$u = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -a$$
$$v = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} = b$$
$$\Rightarrow \quad \overline{V} = -a\overline{i} + b\overline{j}$$
$$y \quad |\overline{V}| = \sqrt{a^{2} + b^{2}}$$

Para que el flujo sea uniforme hacia +X:

$$\left\{\begin{matrix} b = 0 \\ a = -U \end{matrix}\right\} \Rightarrow \quad \begin{matrix} \overline{V} = U\overline{i} \\ \Phi = -U_x \\ \Psi = -U_y \\ f_{(z)} = -U_z \end{matrix}$$

3.12. FLUJO EN EL INTERIOR DE UN CONTORNO.

$$f_{(z)} = a.z^{\frac{\pi}{\alpha}}$$

Es lo mismo que:

$$f_{(z)} = a.\left(r.e^{i\theta}\right)^{\frac{\pi}{\alpha}}$$

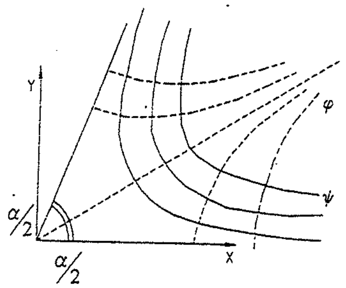
$$f_{(z)} = a.r^{\pi/\alpha}\left(\cos\left(\frac{\pi}{\alpha}\theta\right) + i.sen\left(\frac{\pi}{\alpha}\theta\right)\right)$$

$$\Rightarrow \quad f_{(z)} = a.r^{\pi/\alpha}\cos\left(\frac{\pi}{\alpha}\theta\right) + i.a.r^{\pi/\alpha}.sen\left(\frac{\pi}{\alpha}\theta\right)$$

Luego:

$$\Phi = a.r^{\pi/\alpha}\cos\left(\frac{\pi}{\alpha}\theta\right)$$

$$\Psi = a.r^{\pi/\alpha}.sen\left(\frac{\pi}{\alpha}\theta\right)$$



$2\pi > \alpha > 0$

En coordenadas polares:

$$V_r = -\frac{\partial\Phi}{\partial r}$$

$$V_\theta = -\frac{\partial\Phi}{r\partial\theta}$$

luego:

$$V_r = -\frac{\pi}{\alpha}a.r^{\pi/\alpha - 1}\cos\left(\frac{\pi}{\alpha}\theta\right)$$

$$V_\theta = -\frac{\pi}{\alpha}a.r^{\pi/\alpha - 1}$$

$$\therefore \quad |\vec{V}| = -\frac{\pi}{\alpha}a.r^{\pi/\alpha - 1}$$

Las curvas Ψ son validas hasta cierta distancia de las paredes, en donde ya hay turbulencia.

3.13. MANANTIALES Y SUMIDEROS

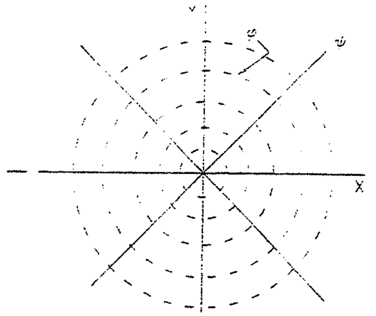
$$f_{(z)} = -a.\ln z$$

$$f_{(z)} = -a.\ln re^{i\theta} = -a(\ln r + i\theta)$$

$$f_{(z)} = -a.\ln r - ia\theta$$

$$\Phi = -a.\ln r \ (circunferencia)$$

$$\Psi = -a\theta \ (rectas)$$



En este caso:

$$V_r = -\frac{\partial\Phi}{\partial r} = \frac{a}{r}, \quad y$$

$$V_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = 0$$

$si \quad a > 0 \quad \Rightarrow \quad V_r > 0 \quad$ (*fuente*)

$si \quad a < 0 \quad \Rightarrow \quad V_r < 0 \quad$ (*Sumidero*)

Caudal por unidad de profundidad:

$$Q = V_r(2\pi r)$$

$$Q = \frac{a}{r}(2\pi r) = 2\pi a$$

y al valor $a = \dfrac{Q}{2\pi}$ se le denomina: Fuerza de fuente a sumidero.

Se obtendrá entonces:

$$f_{(z)} = -\frac{Q}{2\pi}.\ln z$$

$$\Phi = -\frac{Q}{2\pi}.\ln r$$

$$\Psi = -\frac{Q}{2\pi}.\theta$$

3.14. VÓRTICE IRROTACIONAL

Para este caso:

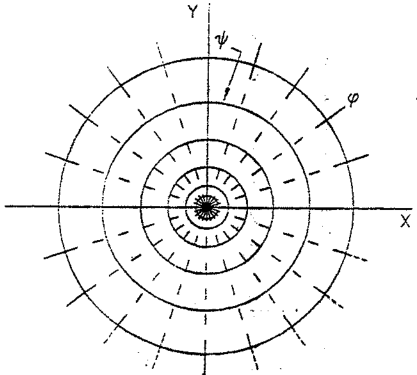
$$f_{(z)} = i.b.\ln z$$

$$\Rightarrow \quad f_{(z)} = -b\theta - i.b.\ln x$$

se obtiene:

$\Phi = -b\theta$ (*rectas*)

$\Psi = b.\ln r$ (*circunferencia*)



Red de corriente de un remolino irrotacional

Además:

$$V_r = 0$$

$$V_\theta = \frac{b}{r}$$

Sabemos que la circulación es:

$$\Gamma = \oint_C \bar{V}.d\bar{s} \qquad \text{C: circunferencia de radio } r$$

$$\Gamma = \int_0^{2\pi}(V_\theta)(r.d\theta) = \int_0^{2\pi}\frac{b}{r}r.d\theta = 2\pi b$$

$$\boxed{b = \frac{\Gamma}{2\pi}}$$

Expresión llamada fuerza o intensidad de vórtice

$$si \quad b > 0 \;\Rightarrow\; V_\theta \circlearrowleft$$

$$si \quad a < 0 \;\Rightarrow\; V_\theta \circlearrowright$$

Entonces:

$$f_{(z)} = \frac{i.\Gamma}{2\pi}.\ln z$$

$$\Phi \doteq -\frac{\Gamma}{2\pi}.\theta$$

$$\Psi = \frac{\Gamma}{2\pi}.\ln r$$

3.15. DIPOLO O DOBLETE

$$\boxed{f_{(z)} = -\frac{C}{z}}$$

$$f_{(z)} = -C\left(re^{i\theta}\right)^{-1} = -\frac{C}{r}.e^{-i\theta} = -\frac{C}{r}(\cos\theta - isen\theta)$$

$$f_{(z)} = -\frac{C}{r}\cos\theta + i\frac{C}{r}sen\theta$$

$$\Phi = -\frac{C}{r}\cos\theta$$

$$\Psi = \frac{C}{r}sen\theta$$

Se ha obtenido como líneas de corriente y equipotenciales, dos haces de circunferencia pasando por el origen y un centro en cada uno de los ejes x e y.

Se ha visto en el problema (3.10), ecuación (2) que :

$$\frac{\partial f_{(z)}}{\partial z} = -u + iv,$$

y para este caso resulta:

$$\frac{\partial f_{(z)}}{\partial z} = C.z^{-2}$$

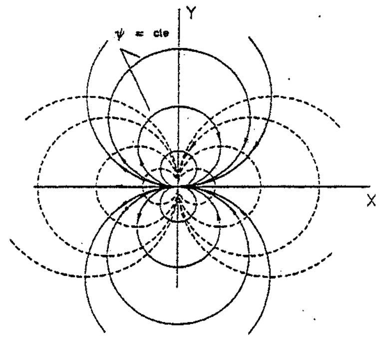
$$\frac{\partial f_{(z)}}{\partial z} = C.\left(re^{-i\theta}\right)^{-2}$$

$$\frac{\partial f_{(z)}}{\partial z} = C.r^{-2}e^{-2i\theta} = \frac{C}{r^2}(\cos 2\theta - isen2\theta)$$

$$\therefore \quad u = -\frac{C}{r^2}\cos 2\theta$$

$$v = -\frac{C}{r^2}sen2\theta$$

$$\boxed{|\bar{V}| = \frac{C}{r^2}}$$



Red de corriente de un dipolo

Físicamente el doblete nos indica una fuente y sumidero muy juntos. Las líneas de corriente salen y entran en un mismo punto.

3.16. Sabiendo que $z = C.\cosh(f_z)$, graficar Φ y Ψ e interpretar físicamente.

Resolución

$$\cosh f_{(z)} = \frac{e^{f(z)} + e^{-f(z)}}{2} = \frac{e^{\Phi+i\Psi} + e^{-\Phi-i\Psi}}{2}$$

$$= \frac{e^{\Phi}(\cos\Psi + isen\Psi) + e^{-\Phi}(\cos\Psi - isen\Psi)}{2}$$

$$= \frac{e^{\Phi} + e^{-\Phi}}{2}\cos\Psi + i\frac{e^{\Phi} - e^{-\Phi}}{2}sen\Psi$$

$$\cosh f_{(z)} = \cosh\Phi.\cos\Psi + isenh\Phi.sen\Psi$$

Como:

$$z = C.\cosh f_{(z)}$$

y

$$z = x + i.y$$

$$\Rightarrow \quad x = C.\cosh\Phi\cos\Psi \quad ......(1)$$

$$y = C.senh\Phi.sen\Psi \quad ......(2)$$

elevando, las ecuaciones (1) y (2) al cuadrado:

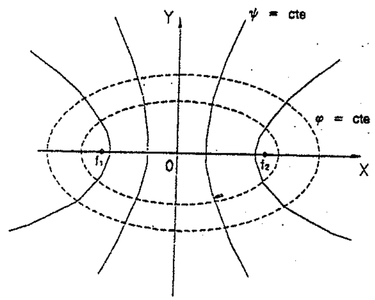
$$x^2 = C^2.\cosh^2\Phi\cos^2\Psi \quad ......(1)$$

$$y^2 = C^2.senh^2\Phi.sen^2\Psi \quad ......(2)$$

eliminando Ψ resulta:

$$\frac{x^2}{C^2.\cosh^2\Phi} + \frac{y^2}{C^2.senh^2\Phi} = 1$$

que representa un haz de elipses homo focales de focos (C,0) y (-C,0) y de semiejes C.coshΦ , C.senhΦ



y eliminando Φ:

$$\frac{x^2}{C^2.\cos^2\Psi} - \frac{y^2}{C^2.sen^2\Psi} = 1;$$

resulta un haz de hipérboles para las líneas de corriente de semiejes: C.coshΨ , C.senhΨ Y de focos: (C,0) y (-C,0)

El movimiento representado es el flujo a través de una abertura f_1 f_2

3.17. Si $z = a.\cos f_{(z)}$ ..interpretar físicamente.

Resolución

Si $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, cuando $z = x + iy$

Análogamente:

$$\cos f_{(z)} = \cos(\Phi + i\Psi) = \frac{1}{2}\left[e^{i(\Phi+i\Psi)} + e^{-i(\Phi+i\Psi)}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{i\Phi-\Psi} + e^{-i\Phi+\Psi}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{-\Psi}(\cos\Phi + isen\Phi) + e^{\Psi}(\cos\Phi - isen\Phi)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[(e^{\Psi} + e^{-\Psi})\cos\Phi - i(e^{\Psi} - e^{-\Psi})sen\Phi)\right]$$

finalmente:

$$\cos f_{(z)} = \cosh\Psi.\cos\Phi - isenh\Psi.sen\Phi$$

Se obtiene:

$$z = a.\cosh\Psi.\cos\Phi - ia.senh\Psi.sen\Phi$$

$$x = a.\cosh\Psi.\cos\Phi \quad \Rightarrow \quad x^2 = a^2.\cosh^2\Psi.\cos^2\Phi$$

$$y = a.senh\Psi.sen\Phi \quad \Rightarrow \quad y^2 = a^2.senh^2\Psi.sen^2\Phi$$

eliminando Φ:

$$\frac{x^2}{a^2.\cosh^2\Psi} + \frac{y^2}{a^2.senh^2\Psi} = 1$$

que es un haz de elipses homo focales de focos (a,0) y (-a,0), y semiejes $a.\cosh\Psi$, $a.senh\Psi$.

eliminando ψ :

$$\frac{x^2}{a^2.\cos^2\Phi} - \frac{y^2}{a^2.sen^2\Phi} = 1;$$

que es un haz de hipérbolas y representan las líneas equipotenciales.

Este flujo se trata del movimiento rotatorio de un fluido en torno a una elipse o a un segmento rectilíneo (f_1 f_2). Puede verse la figura del problema anterior, en el cual, Ψ son las elipses y Φ las hipérboles, para este caso.

SUPERPOSICIÓN DE FLUJOS - APLICACIONES

Si se componen dos movimientos descritos ambos por sus funciones potencial complejo, el potencial complejo resultante se obtiene sumando los potenciales correspondientes.

Es decir, si se dan dos potenciales complejos:

$$f_{1(z)} = \Phi_1 + i\Psi_1$$
$$f_{2(z)} = \Phi_2 + i\Psi_2$$

Sumando:

$$f_{(z)} = f_{1(z)} + f_{2(z)} = (\Phi_1 + \Phi_2) + i(\Psi_1 + \Psi_2)$$

indica que:

$$f_{(z)} = \sum_i f_{i(z)}$$

$$\Phi = \sum_i \Phi_i \quad \wedge \quad \Psi = \sum_i \Psi_i$$

Además las expresiones (A) nos indican que:

$$u = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\sum_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} = \sum_i u_i$$
$$v = +\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\sum \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} = \sum_i v_i$$

Para ayuda en los cálculos que siguen se ha tabulado el siguiente cuadro:

	Φ	Ψ	$f_{(z)}$
Flujo Uniforme (hacia +X)	-Ux=-Ur.cosθ	-Uy	-Uz
Manantial	$-\frac{Q}{2\pi}\ln r$	$-\frac{Q}{2\pi}\theta$	$-\frac{Q}{2\pi}\ln z$
Vórtice irrotacional	$-\frac{\Gamma}{2\pi}\theta$	$\frac{\Gamma}{2\pi}\ln r$	$i\frac{\Gamma}{2\pi}\ln z$
Doblete (Fluyendo hacia -X)	$-\frac{c}{r}\cos\theta$	$\frac{c}{r}sen\theta$	$-\frac{c}{z}$

3.18. Adición de los campos de un DIPOLO y de MOVIMIENTO UNIFORME. El movimiento uniforme es paralelo al eje del dipolo.

Resolución:

Por superposición:

Flujo uniforme	+	dipolo	=	resultado
$\Phi = -Ur.\cos\theta$		$\Phi = -\frac{c}{r}.\cos\theta$		$\Phi = -\left(Ur + \frac{c}{r}\right)\cos\theta$
$\Psi = -Ur.sen\theta$		$\Psi = \frac{c}{r}.sen\theta$		$\Psi = -\left(Ur - \frac{c}{r}\right)sen\theta$

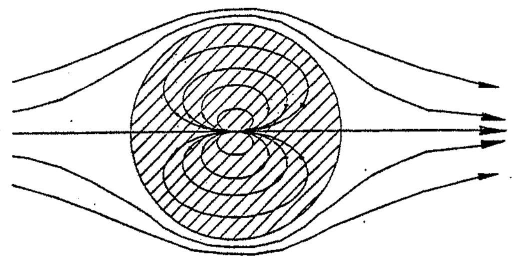
$$V_r = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \left(U - \frac{c}{r^2}\right)\cos\theta$$
$$V_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = -\left(U + \frac{c}{r^2}\right)sen\theta$$

De forma que para $r = r_0 = \sqrt{\frac{c}{U}}$ la componente de la velocidad según el radio es nulo y también $\Psi = 0$, lo que comprueba la existencia de dos corrientes, una exterior al círculo (físicamente puede ser un cilindro), cuyo caudal es igual al de la corriente paralela, y otra interior al mismo y constituido por un dipolo que queda encerrado en él.

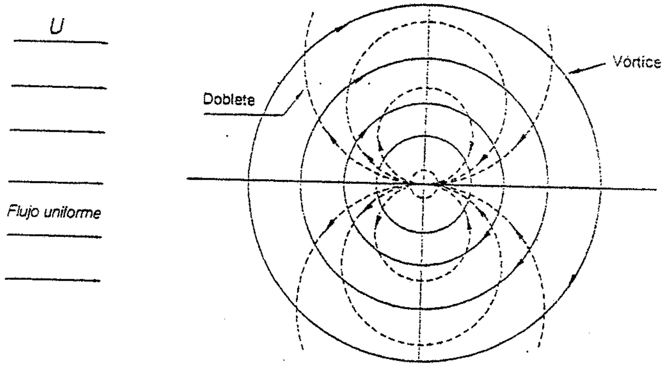
Ambas corrientes discurren sin mezclarse y su línea de separación es el círculo de radio $r_0 = \sqrt{\frac{c}{U}}$

De manera que se tendría:

$$V_r = \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right)U\cos\theta$$
$$V_\theta = -\left(1 + \frac{r_0^2}{r^2}\right)Usen\theta$$
$$\Phi = -\left(r + \frac{r_0^2}{r}\right)U\cos\theta$$
$$\Psi = -\left(r - \frac{r_0^2}{r}\right)Usen\theta$$



3.19. Superposición de un VÓRTICE y un DOBLETE en un FLUJO UNIFORME:



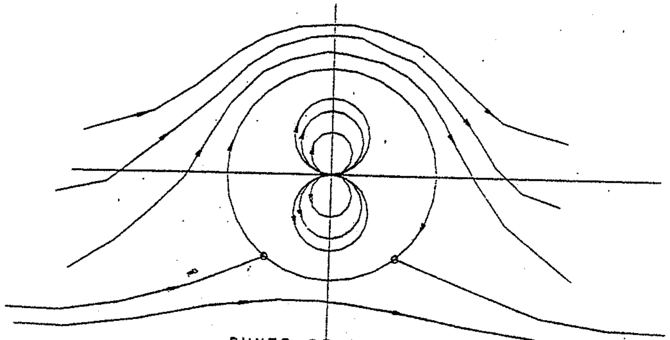
La función de corriente y el potencial de velocidad para la combinación del doblete, el vórtice y el flujo uniforme será:

$$\Phi = -Ur.\cos\theta - \frac{c}{r}\cos\theta + \frac{\Gamma}{2\pi}\theta$$

$$\Psi = -Ur.sen\theta + \frac{c}{r}sen\theta - \frac{\Gamma}{2\pi}\ln r$$

$$\Rightarrow \quad V_r = U\cos\theta - \frac{c}{r^2}\cos\theta = \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right)U\cos\theta \qquad r_0 = \sqrt{\frac{c}{U}}$$

$$y \quad V_\theta = -Usen\theta - \frac{c}{r^2}sen\theta - \frac{\Gamma}{2\pi r} = -\left(1 + \frac{r_0^2}{r^2}\right)U.sen\theta - \frac{\Gamma}{2\pi r}$$



3.20. A partir del problema anterior, establecer las condiciones para la existencia de los puntos de estancamiento.

Resolución

En: $r = r_0$

$V_r = 0$

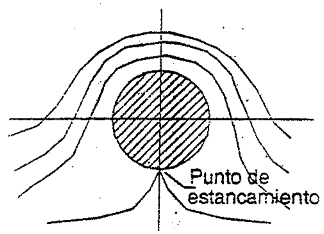
$$V_\theta = -2Usen\theta - \frac{\Gamma}{2\pi r_0}$$

El punto de estancamiento cumple:

$V_r = 0 = V_\theta$

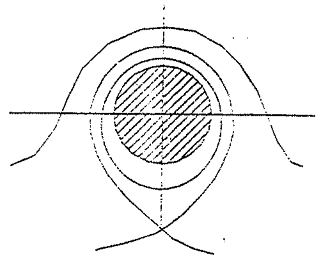
$$\Rightarrow \quad \boxed{sen\theta_{estancamiento} = -\frac{\Gamma}{4\pi \cdot r_0 \cdot U}}$$

Cuando $\Gamma = 4\pi \cdot r_0 \cdot U$, los dos puntos de estancamiento se confunden en uno solo correspondiente al eje transversal del cilindro. Si $\Gamma > 4\pi \cdot r_0 \cdot U$, desaparecen los puntos de estancamiento, quedando el cilindro envuelto en un vórtice que lo es, a su vez, por el movimiento de arrastre.



$\Gamma = 4\pi r_0 U$

Un solo punto de estancamiento.



$\Gamma > 4\pi r_0 U$

No hay punto de estancamiento en el contorno del cilindro.

3.21. Sumidero y Remolino (REMOLINO ESPIRAL).

Consideremos un remolino de circulación Γ y un sumidero de caudal Q situados ambos en el origen de coordenadas.

El potencial complejo del sumidero es:

$$f_1 = \frac{Q}{2\pi} \ln z$$

y del remolino.

$$f_2 = i\frac{\Gamma}{2\pi} \ln z$$

El movimiento resultante tiene por potencial:

$$f = \frac{1}{2\pi}(Q + i.\Gamma)\ln z$$

La función corriente es:

$$\Psi = \frac{Q}{2\pi}\theta + \frac{\Gamma}{2\pi}\ln r$$

Las líneas de corriente son espirales logarítmicas y también las equipotenciales.

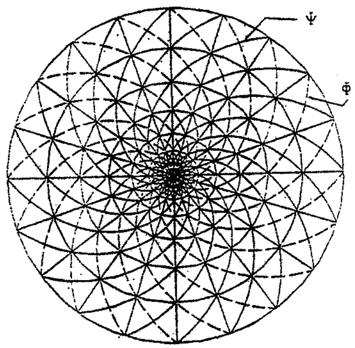
Las componentes de la velocidad son:

$$V_r = -\frac{\partial\Psi}{r\partial\theta} = -\frac{Q}{2\pi r}$$

$$V_\theta = \frac{\partial\Psi}{\partial r} = \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

y el módulo de la velocidad es:

$$|\overline{V}| = \frac{1}{2\pi r}\sqrt{Q^2 + r^2}$$



Red de corriente del remolino espiral

3.22. Sea:

$$z = f_{(z)} + e^{f_z} \quad \text{.......................................} (I)$$

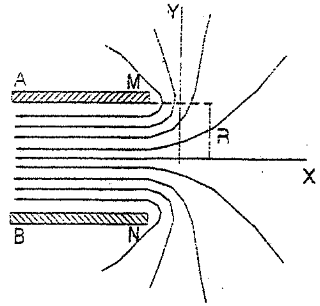
$$\Rightarrow \quad x + iy = \Phi + i\Psi + e^{\Phi}\cos\Psi + ie^{\Phi}sen\Psi$$

$$x = \Phi + e^{\Phi}\cos\Psi ;$$

$$y = \Psi + e^{\Phi}sen\Psi ;$$

en (I) $\quad -\dfrac{\partial z}{\partial f} = -1 - e^{f_z} = -1 - e^{\Phi}\cos\Psi - ie^{\Phi}sen\Psi$

para: $\quad \Phi \to -\infty, \qquad -\dfrac{\partial f}{\partial z} = -1$



líneas de corriente de un fluido que penetra en un canal

es decir que la velocidad tiende a un valor constante, ya que $\dfrac{\partial f}{\partial z} = -u + iv$

Si $\quad \Phi \to +\infty, \qquad \dfrac{\partial f}{\partial z} = 0$

Que indica que el fluido está en reposo.

La línea de corriente $\Psi = 0$ coincide con el eje de las x.

La línea de corriente $\Psi = \pi$ da:

$$\left.\begin{aligned} x &= \Phi - e^{\Phi} \\ y &= \pi \end{aligned}\right\}$$

y como : $\quad \Phi - e^{\Phi} \leq -1$

Al pasar Φ de $-\infty$ a $+\infty$ se dos veces la semirrecta AM.

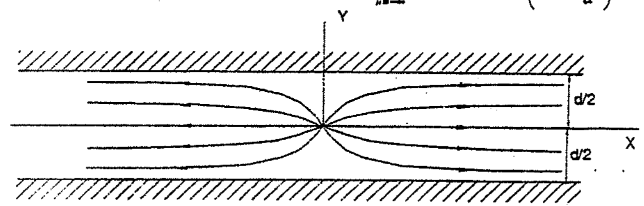
Análogamente. para $\Psi = -\pi$ se obtiene.

$$\left.\begin{aligned} x &= \Phi - e^{\Phi} \\ y &= -\pi \end{aligned}\right\}$$

que representa la semirrecta BN dos veces.

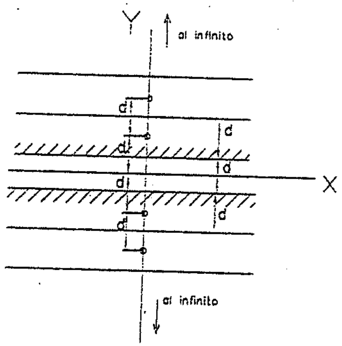
El movimiento caracterizado por ésta transformación es el de un fluido que penetra en un canal, conforme lo indica la figura.

3.23. Encontrar la función potencial complejo para una fuente localizada en el centro de un canal bidimensional, si se cumple que: $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \ln(z + ind) = \ln\left(senh\frac{\pi z}{d}\right)$



Resolución

Utilizando el método de las imágenes establecemos un conjunto infinito.



Para un manantial aislado en el eje 'y' el potencial complejo es:

$$f_n(z) = -\frac{Q}{2\pi}\ln(z + ind)$$

Por superposición:

$$F_{(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{Q}{2\pi}\ln(z+ind) + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{Q}{2\pi}\ln(z-ind)$$

$$F_{(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{Q}{2\pi}\ln(z+ind) + \sum_{n=-\infty}^{0} -\frac{Q}{2\pi}\ln(z+ind)$$

$$F_{(z)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -\frac{Q}{2\pi}\ln(z+ind)$$

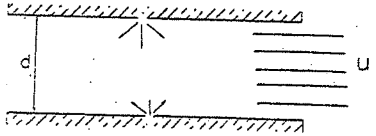
Por dato: $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\ln(z+ind) = \ln\left(senh\frac{\pi z}{d}\right)$

Entonces:

$$\boxed{F_{(z)} = -\frac{Q}{2\pi}\ln(senh\frac{\pi z}{d})} \text{...... Rpta.}$$

Evaluando F para $-\frac{d}{2} < y < \frac{d}{2}$ tenemos el flujo entre las paredes $\pm\frac{d}{2}$

3.24. Se desea representar el flujo que se indica en la figura. Escriba Ud. el potencial complejo que permita su expresión



F: fuentes de intensidad Q.

Resolución

Aquí se aprecia la utilidad del problema anterior y de la importantísima aportación del método de las imágenes.

Entonces la función potencial del conjunto es obtenido así:

Para los manantiales: $f_1(z) = -\frac{Q}{2\pi}\ln\left(senh\frac{\pi z}{d}\right)$

Para el flujo uniforme: $f_2(z) = Uz$

Entonces para la función buscada es:

$$\boxed{f(z) = Uz - \frac{Q}{2\pi}\ln\left(senh\frac{\pi z}{d}\right)}$$

evaluada para 0< y <d

3.25. Discutir el flujo $f_{(z)} = 2 - z^2$ graficar su red de flujo (Φ,Ψ) y calcular su velocidad, en el punto (5.5) así como su aceleración convectiva.

Resolución

$$f_{(z)} = 2 - z^2$$

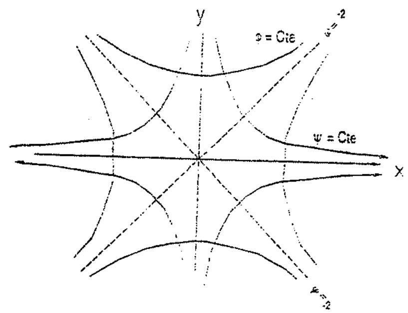
$$f_{(z)} = 2 - (x+iy)^2 = 2 - x^2 + y^2 - i2xy = (2 - x^2 - y^2) + i(-2xy)$$

Luego:

$$\Phi = 2 - x^2 + y^2$$

$$\Psi = 2xy$$

(hipérbolas)



y:

$$u = -\frac{\partial\Phi}{\partial x} = 2x$$

$$v = -\frac{\partial\Phi}{\partial y} = -2y$$

$$\Rightarrow \bar{V} = 2x\bar{i} - 2y\bar{j}$$

para el punto (5,5)

$$\rightarrow \bar{V} = 10\bar{i} - 10\bar{j}$$

se sabe que la aceleración de una partícula es:

Movimiento entre planos ortogonales. Ver problema 3.12., en este caso $\alpha = 90°$.

$$\bar{a} = \frac{\partial\bar{V}}{\partial t} + (\bar{V}.\nabla)\bar{V}$$

$$\frac{\partial\bar{V}}{\partial t} = aceleración\ local$$

$$(\bar{V}.\nabla)\bar{V} = aceleración\ convectiva$$

La aceleración convectiva es:

$$\bar{a}_c = (\bar{V}.\nabla)\bar{V} = \left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right)\bar{i} + \left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right)\bar{j}$$

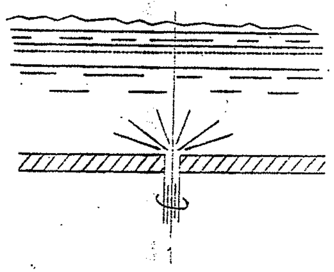
y se obtiene:

$$\bar{a}_c = (\bar{V}.\nabla)\bar{V} = 4x\bar{i} + 4y\bar{j}$$

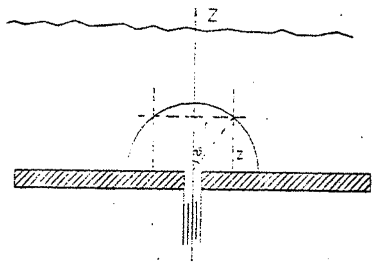
aceleración convectiva, para $(x,y) = (5,5)$ $\rightarrow$

$$\bar{a}_c = 20\bar{i} + 20\bar{j}$$

3.26. El líquido que se halla en un depósito fluye a través de un orificio pequeño en su fondo, con un gasto volumétrico Q, y al mismo tiempo gira alrededor del eje vertical, con una circulación Γ. Suponiendo que el orificio es el centro del derrame y el eje vertical 1 es el del torbellino, calcular la distribución de velocidades en el depósito y las líneas de corriente.



Resolución:



Para este problema se utilizará el sistema cilíndrico de coordenadas, cuyo eje coincide con el eje del torbellino.

Como el caudal Q atraviesa la superficie esférica de radio $\sqrt{r^2+z^2}$

El módulo de la velocidad es:

$$V_1 = \frac{Q}{4\pi}\cdot\frac{1}{(r^2+z^2)}$$

(para el derrame).

$\Rightarrow \quad V_z = V_1\cos\Phi \qquad$ y $\qquad \Rightarrow \quad V_r = V_1 sen\Phi$

$$\cos\Phi = \frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}} \qquad sen\Phi = \frac{r}{\sqrt{r^2+z^2}}$$

$$\Rightarrow \quad \overline{V}_1 = -\frac{Q}{4\pi}\frac{r}{(r^2+z^2)^{3/2}}\overline{e}_r - \frac{Q}{4\pi}\frac{z}{(r^2+z^2)^{3/2}}\overline{e}_z$$

Ahora:

$$\Gamma = \int_0^{2\pi} V_\theta . r . d\theta = 2.V_\theta \pi r$$

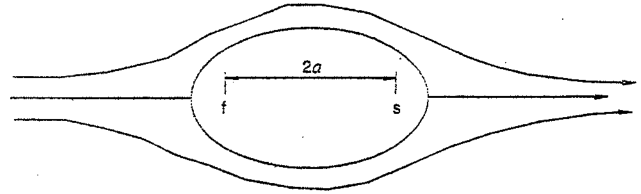
$$\Rightarrow \quad V_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (\textit{para el torbellino})$$

la velocidad resultante es:

$$\overline{V} = \overline{V}_1 + \overline{V}_\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{V} = \frac{\Gamma}{2\pi r}\overline{e}_\theta - \frac{Q}{4\pi}\frac{r}{(r^2+z^2)^{3/2}}\overline{e}_r - \frac{Q}{4\pi}\frac{z}{(r^2+z^2)^{3/2}}\overline{e}_z} \quad \text{......... Rpta.}$$

3.27. Una forma de líneas de corriente, denominada óvalo de Rankine, se define colocando un punto de origen y otro de conclusión de igual magnitud en un flujo uniforme. En la figura del problema se representa el dibujo de ésta forma.



a) Demuestre que una forma apropiada de la función de corriente de éste flujo sería:

$$\Psi = -Uy + \frac{Q}{2\pi} arc\ tan\frac{2ay}{x^2+y^2-a^2}$$

Donde $2a$ es el esparcimiento entre los puntos de salida y entrada.

b) Encuentre las coordenadas de velocidad del flujo.

c) De acuerdo con las variables del flujo, encuentre una expresión para la diferencia entre la presión en el punto de estancamiento y la que se registra en el infinito.

Resolución:

a) Óvalo de Rankine: *FLUJO UNIFORME + MANANTIAL + SUMIDERO*

Observando la figura:

PARA EL FLUJO UNIFORME: $\Psi = -Uy$

PARA EL MANANTIAL: $\Psi = \frac{-Q}{2\pi}\theta_1$

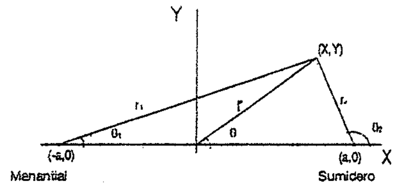
PARA EL SUMIDERO: $\Psi = \frac{Q}{2\pi}\theta_2$

$$\Rightarrow \Psi = -Uy - \frac{Q}{2\pi}\theta_1 + \frac{Q}{2\pi}\theta_2$$

$$\Rightarrow \Psi = -Uy + \frac{Q}{2\pi}(\theta_2 - \theta_1),$$

$$tan(\theta_2 - \theta_1) = \frac{tan\theta_2 - tan\theta_1}{1 + tan\theta_2 . tan\theta_1}$$

$$\tan\theta_1 = \frac{y}{x+a}, \ \tan\theta_2 = -\frac{y}{a-x}$$



$$\therefore\quad \tan(\theta_1-\theta_2)=\frac{\dfrac{y}{x-a}-\dfrac{y}{x+a}}{1-\left(\dfrac{y}{x-a}\right)\left(\dfrac{y}{x+a}\right)}=\frac{2ay}{x^2+y^2-a^2}$$

luego queda demostrado que para el óvalo de Rankine:

$$\boxed{\Psi=-Uy+\frac{Q}{2\pi}\,arc\;\tan\frac{2ay}{x^2+y^2-a^2}}$$

b) Componentes de la velocidad del flujo:

$$\boxed{\begin{gathered}\overline{V}=-\frac{\partial\Psi}{r\partial\theta}\overline{e}_r+\frac{\partial\Psi}{\partial r}\overline{e}_\theta=-\frac{\partial\Psi}{\partial y}\overline{i}+\frac{\partial\Psi}{\partial x}\overline{j}\\ \overline{V}=-\frac{\partial\Phi}{\partial r}\overline{e}_r-\frac{\partial\Phi}{r\partial\theta}\overline{e}_\theta=-\frac{\partial\Phi}{\partial x}\overline{i}-\frac{\partial\Phi}{\partial y}\overline{j}\end{gathered}}$$

$$\Psi=-Uy+\frac{Q}{2\pi}arc\;\tan\frac{2ay}{x^2+y^2-a^2}$$

componente $V_x=u$

$$u=-\frac{\partial\Psi}{\partial y}=U-\frac{Q}{2\pi}\left[\frac{2a(x^2+y^2-a^2)-4ay^2}{(x^2+y^2-a^2)^2+4a^2y^2}\right]\qquad\text{......... Rpta.}$$

componente $V_y=v$

$$v=+\frac{\partial\Psi}{\partial x}=-\frac{Q}{2\pi}\left[\frac{4axy}{(x^2+y^2-a^2)^2+4a^2y^2}\right]\qquad\text{......... Rpta.}$$

c) Para el punto de estancamiento $\qquad \overline{V}=0$

Entonces empleando el teorema de Bernoulli entre el infinito y el punto de estancamiento se tiene:

$$z+\frac{U^2}{2g}+\frac{P_\infty}{\gamma}=\frac{P_E}{\gamma}+\frac{V_E^2}{2g}+z$$

$V_E=0$ (estancamiento)

luego: $\boxed{P_E-P_\infty=\frac{1}{2}\rho U^2}$ ..... Rpta.

3.28. Probar que:

$$\overline{a}=\frac{d\overline{V}}{dt}=\frac{\partial\overline{V}}{\partial t}+(\overline{V}.\nabla)\overline{V}=\frac{\partial\overline{V}}{\partial t}+\frac{1}{2}\nabla|\overline{V}|^2+(\nabla x\overline{V})x\overline{V}\qquad\text{...... (1)}$$

Resolución

Esencialmente se quiere probar:

$$(\overline{V}.\nabla)\overline{V}=\frac{1}{2}\nabla|\overline{V}|^2+(\nabla x\overline{V})x\overline{V}$$

Usando tensores podemos expresar:

$$|\overline{V}|^2=v_jv_j\Rightarrow\frac{1}{2}\nabla|\overline{V}|^2=\frac{1}{2}\frac{\delta}{\delta x_i}(v_jv_j)$$

$$\therefore\quad\frac{1}{2}\nabla|\overline{V}|^2=\frac{1}{2}\left(v_j\frac{\partial}{\partial x_i}v_j+v_j\frac{\partial}{\partial x_i}v_j\right)=v_j\frac{\partial}{\partial x_i}v_j\qquad\text{............... (2)}$$

Desarrollaremos el otro término usando tensores alternantes.

$$(\nabla x\overline{V})x\overline{V}=\underbrace{e_{pkq}\,e_{pij}}_{\text{tensores alternantes}}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}v_j\right)v_k\qquad\text{......... ..}(\alpha)$$

$$\downarrow\;\downarrow\;\;\downarrow$$

$$\underbrace{\underbrace{i\;\;j}_{p}\quad k}_{q}$$

Ahora usaremos una propiedad fundamental en tensores:

$$e_{pkj}.e_{pij}=\delta_{ki}\delta_{qj}-\delta_{kj}\delta_{qi}$$

en (α):

$$(\nabla x\overline{V})x\overline{V}=(\delta_{ki}\delta_{qj}-\delta_{kj}\delta_{qi})v_k\frac{\partial}{\partial x_i}v_j$$

$$(\nabla x\overline{V})x\overline{V}=\left(\delta_{ki}\delta_{qj}v_k\frac{\partial}{\partial x_i}v_j-\delta_{kj}\delta_{qi}v_k\frac{\partial}{\partial x_i}v_j\right)$$

Ahora los Delta de KRONECKER TIENE UNA PROPIEDAD. Su valor es "uno" si sus índices son iguales y es "cero" si sus índices son desiguales. luego hacemos:

$k=i \qquad q=j$ En el primer término.

$k=j \qquad q=i$ En el segundo término.

$\Rightarrow$ de (2) y (3) tenemos:

$$\frac{1}{2}\nabla|\overline{V}|^2+(\nabla x\overline{V})x\overline{V}=v_j\frac{\partial}{\partial x_i}v_j+v_i\frac{\partial}{\partial x_i}v_j-v_j\frac{\partial}{\partial x_i}v_j=v_i\frac{\partial}{\partial x_i}v_j$$

pero: $\left(v_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)v_j = (\overline{V}.\nabla).\overline{V}$

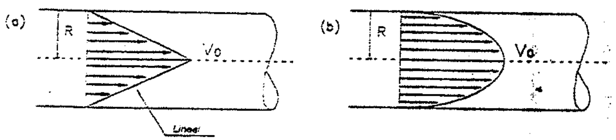
luego: $\frac{1}{2}\nabla|\overline{V}|^2 + (\nabla x\overline{V})x\overline{V} = (\overline{V}.\nabla).\overline{V}$

De aquí:

$$\frac{d\overline{V}}{dt} = \frac{\partial\overline{V}}{\partial t} + (\overline{V}.\nabla)\overline{V}$$

$$\frac{d\overline{V}}{dt} = \frac{\partial\overline{V}}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla|\overline{V}|^2 + (\nabla x\overline{V})x\overline{V} \qquad \text{Lqqd.}$$

3.29. Hallar la velocidad media y el caudal para las siguientes distribuciones de velocidades:

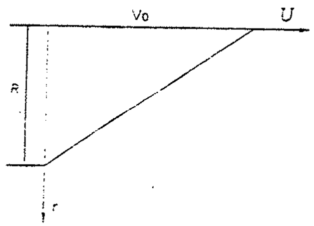


$$U = V_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

Resolución:

a) 1° Método:

Como la variación es lineal, determinaremos una V genérica.



$$u = -\frac{V_0}{R}r + V_0$$

Luego la velocidad media será:

$$Vm = \frac{1}{A}\int u dA$$

$$Vm = \frac{1}{\pi R^2}\int\left(V_0 - \frac{V_0}{R}r\right)(2\pi r dr)$$

$$Vm = \frac{2V_0}{\pi R^2}\int_0^R\left(r - \frac{r^2}{R}\right)dr = \frac{2V_0}{\pi R^2}\left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3R}\right]_0^R$$

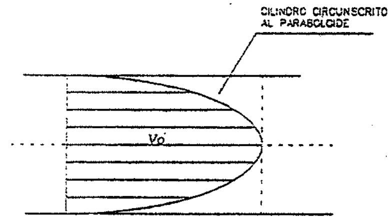
$$Vm = \frac{2V_0}{R^2}\left[\frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{3}\right] \quad \Rightarrow \quad Vm = \frac{V_0}{3}$$

El caudal es igual a: $Q = V_m \cdot A$

$$Q = \frac{V_0}{3}\pi \cdot R^2 = \frac{\pi \cdot R^2}{3}V_0$$

b) 2° Método

Otra forma de hallar el caudal, es determinando el volumen generado por la distribución de velocidades, en este caso el volumen de un paraboloide de revolución, que equivale a la mitad de un cilindro circunscrito al mismo.



$$Q = Vol_{cil} - Vol_{paraboloi.}$$

$$Q = \frac{1}{2}Vol_{cil}$$

$$Q = \frac{1}{2}\left[\pi R^2 V_0\right]$$

$$\therefore \quad V_m = \frac{Q}{A} = \frac{\pi R^2 V_0}{2\pi R^2} = \frac{V_0}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{Vm = \frac{V_0}{2}}$$

3.30. Por una tubería fluye oxígeno puro, teniendo:

Sección A:	$T = 15°C$	**Sección B:**	$T = -5°C$
	$P = 3\ Bar$		$P = 1.5\ Bar$
	$V_m = 25\ m/s$		$D = 200\ mm$
	$D = 100\ mm$		

Hallar Vm en B y el caudal de masa.

Resolución:

Tenemos: $\rho_A = \frac{P_A}{RT_A}$ donde: $R_{OXIG.} = 259.8\ \frac{Kgf-m}{Kgm-°k}$

$T_A = 15°+273° = 288°\ K \qquad p_A = 3\ Bar = 3x1.02x10^4\ Kg/m^2$

$\rho_A = 0.409\ Kg/m^3$

Del mismo modo: $\rho_B = \frac{P_B}{RT_B} = \frac{1.5\times1.02X10^4}{259.8(-5+273)} = 0.22\ Kg/m^3$

De la ecuación de continuidad:

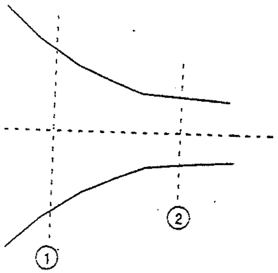
$$\rho_A V_A A_A = \rho_B V_B A_B$$

$$V_B = \frac{\rho_A}{\rho_B}\left(\frac{A_A}{A_B}\right)V_A = \frac{0.409}{0.220}\left(\frac{100}{200}\right)^2 25$$

$$V_B = 11.62\ m/s$$

$$Q = \rho_B V_B A_B = 0.22x11.62x\pi.\frac{(0.2)^2}{4} = 0.08\ Kg/s$$

3.31. El aire fluye en régimen permanente por una tobera convergente, se dan las siguientes condiciones en las dos ecuaciones (1) y (2)



$\rho_1 = 1.50\ Kg/m^3$ $\quad P_1 = 1.3\ Bar$

$u_1 = 100\ m/s$ $\quad A_1 = 0.06\ m^2$

$A_2 = 0.035\ m^2$ $\quad P_2 = 1.10\ Bar$

Se pide ρ_2 y u_2; sabiendo que:

a) El flujo es isotérmico

b) El flujo es adiabático (K =1.4)

Resolución

a) Flujo Isotérmico: Se cumple que: $\dfrac{P_1}{\rho_1} = \dfrac{P_2}{\rho_2} \quad \Rightarrow \quad \rho_2 = \rho_1\dfrac{P_2}{P_1}$

$$\rho_2 = 1.5\left(\frac{1.1}{1.3}\right) \qquad \rho_2 = 1.27\ Kg/m^3$$

Por caudal: $\rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2 \quad \Rightarrow \quad V_2 = \dfrac{\rho_1 V_1 A_1}{\rho_2 A_2}$

$$V_2 = \frac{1.5x100x0.06}{1.27x0.035} = 202\ m/s$$

b). Flujo Adiabático:

Se cumple que: $\dfrac{P_1}{\rho_1^{\ K}} = \dfrac{P_2}{\rho_2^{\ K}}$; K = 1.4

$$\rho_2^{1.4} = \rho_1^{1.4}\left(\frac{P_2}{P_1}\right) \quad \Rightarrow \quad \rho_2 = \left(\frac{1.1x(1.5^{1.4})}{1.3}\right)^{1/1.4}$$

$\rho_2 = 1.33\ Kg/m^3$

por caudal: $\rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2$

$$V_2 = \frac{\rho_1 V_1 A_1}{\rho_2 A_2} \quad \Rightarrow \quad V_2 = \frac{1.5x100x0.06}{1.33x0.035}$$

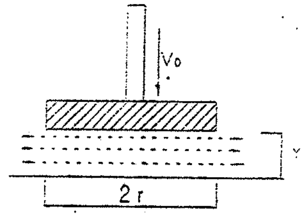
$V_2 = 193\ m/s$

* Nota: 1 Bar: Unidad de Presión

1 Bar: 1.02 Kgf/cm^2

3.32 Una lámina circular de gran diámetro, se acerca con una velocidad constante V_0 a un plano infinito. Calcular la velocidad V con que el líquido entre los dos planos fluye radialmente en función de y, se supondrá que es prácticamente la misma sobre todo el espesor de la lámina líquida.

Resolución



A medida que se acerca la lámina el volumen que disminuye en un diferencial de t es:

$d_{vol} = \pi r^2 dy$

el caudal $\quad Q = \dfrac{d_{vol}}{dt}$

$$\Rightarrow \quad Q = \pi r^2\frac{dy}{dt} = \pi r^2 V_0$$

El caudal que fluye radialmente es:

$$\Rightarrow \quad Q = 2\pi r y V$$

Pero los caudales son iguales dado que no se pierde líquido de otra forma:

$$\pi r^2 V_0 = 2\pi r y V \quad \Rightarrow \quad \boxed{V = \frac{rV_0}{2y}}$$

3.33 Un flujo turbulento dentro de una tubería circular tiene una distribución de velocidades:

$$U = U_0\left(1 - \frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{7}}$$

Hallar la velocidad media y el caudal.

Resolución:

$$U_m = \frac{1}{A}\int U dA = \frac{1}{\pi R^2}U_0\int\left(1-\frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{7}} dA = \frac{1}{\pi R^2}U_0\int\left(1-\frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{7}} 2\pi r dr$$

$$U_m = \frac{2U_0}{R^2}\int_0^R r\left(1-\frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{7}} dr$$

$u = r \qquad du = dr$

$$dr = \left(1-\frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{7}} dr \quad \Rightarrow \quad V = -\frac{7R}{8}\left(1-\frac{r}{R}\right)^{\frac{8}{7}}$$

$$U_m = \frac{2U_0}{R^2}\left[\left[-\frac{7}{8}rR\left(1-\frac{r}{R}\right)^{\frac{8}{7}}\right]_0^R + \int_0^R \frac{7}{8}R\left(1-\frac{r}{R}\right)^{\frac{8}{7}} dr\right]$$

$$U_m = \frac{2U_0}{R^2}\left[0 + \left\{\frac{7}{15}r\left(-R\right)\left(1-\frac{r}{R}\right)^{\frac{15}{7}}\right\}_0^R \frac{7}{8}R\right]$$

$$U_m = \frac{49}{60}U_0$$

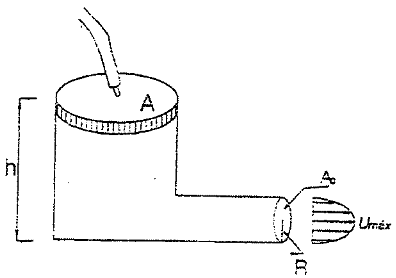
$$Q = Vm.A = \frac{49}{60}\pi R^2 U_0$$

3.34 Se bombea agua a un depósito mediante un tubo que está unida a la tapa del depósito. Esta tapa puede desplazarse verticalmente. Por otra parte el depósito tiene un tubo de salida en la base con una distribución de velocidades dada por:

$$\frac{U}{U_{max}} = 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2$$

El caudal de entrada es Q, la altura del líquido es h en un momento dado. Si se sabe que $Umáx = C_1.h$ con C_1 dado. se pide encontrar h en función del tiempo, se supondrá una altura inicial H.

Resolución



La velocidad con que desciende h, $\left(\frac{dh}{dt}\right)$, será igual a la velocidad de entrada del chorro en el depósito menos la velocidad de salida.

Luego:

$$\left(\frac{dh}{dt}\right) = \frac{Q}{A} - \frac{Q_s}{A} \quad \text{.............}(\alpha)$$

Cálculo de Q_S:

$$Um = \frac{U\max}{Ac}\int_0^R \left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right)dA = \frac{U\max}{Ac}\int_0^R\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)2\pi r dr$$

$$Um = \frac{2\pi.U\max}{Ac}\int_0^R\left(r-\frac{r^3}{R^2}\right)dr = \frac{2\pi.U\max}{Ac}\left[\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4R^2}\right]_0^R$$

$$Um = \frac{2\pi.U\max}{Ac}\left[\frac{R^2}{2}-\frac{R^2}{4}\right] = \frac{\pi R^2}{2}\frac{Umáx}{Ac} = \frac{Umáx}{2} = \frac{C_1.h}{2}$$

$$\therefore \; Q = \frac{C_1.h}{2}Ae \quad \text{..........}\,\text{....}(\beta)$$

(β) en (α):

$$\frac{dh}{dt} = \frac{Q}{A} - \frac{Ae}{A}\frac{C_1.h}{2}$$

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{Ae}{A}\frac{C_1}{2}\left[h - \frac{2Q}{AeC_1}\right]$$

$$\frac{dh}{\left[h-\frac{2Q}{AeC_1}\right]} = -\frac{Ae}{A}\frac{C_1}{2}dt$$

$$Ln\left[h-\frac{2Q}{AeC_1}\right] = -\frac{Ae}{A}\frac{C_1}{2}t + K_0$$

De aquí:

$$h - \frac{2Q}{AeC_1} = Ke^{-\frac{AeC_1}{A\,2}t}$$

$$h = Ke^{-\frac{AeC_1}{A\,2}t} + \frac{2Q}{AeC_1}$$

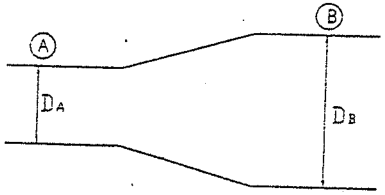
De la condición de l problema en $t = 0$, $h = H$. Reemplazando obtenemos:

$$K = H - \frac{2Q}{AeC_1}$$

$$\boxed{h = \left[H - \frac{2Q}{AeC_1}\right]^{-\frac{AeC_1}{A\,2}t} + \frac{2Q}{Ae.C_1}}$$

3.35. Por una tubería fluye aire. En la sección A el diámetro es $100\ mm$. La temperatura es 15 °C y la velocidad 25 m/s, en la sección B donde el diámetro es $200\ mm$ la temperatura es de –5 °C y la presión 1Bar. Calcular la velocidad media en B.

Resolución



Sabemos que:

$P = \rho RT$

$$\left.\begin{matrix} P_A = \rho_A R T_A \\ P_B = \rho_B R T_B \end{matrix}\right\} \quad \text{.........}(1)$$

Por definición de caudal en masa:

$Q = \rho VA$

En donde:

$$\rho_A V_A A_A = \rho_B V_B A_B \quad \text{..}(2)$$

$P_A = 3\ Bar$ $\qquad$ $P_B = 3\ Bar$

$T_A = 15°C = 288°K$ $\qquad$ $T_B = -5°C = 268°K$

$D_A = 100\ mm$ $\qquad$ $D_B = 100\ mm$

$V_A = 25\ m/s$

(1) en (2): $$\left(\frac{P_A}{RT_A}\right)V_A A_A = \left(\frac{P_B}{RT_B}\right)V_B A_B \quad \text{.........................}(4)$$

$$\left.\begin{matrix} A_A = \dfrac{\pi D_A^2}{4} \\ A_B = \dfrac{\pi D_B^2}{4} \end{matrix}\right\}(5)$$

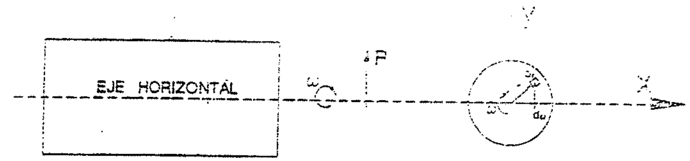
(5) en (4):

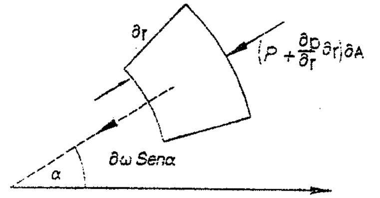
$$V_B = V_A\left(\frac{P_A}{P_B}\frac{T_B}{T_A}\right)\left(\frac{D_A}{D_B}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad V_B = 25\left(\frac{3x268}{1.5x288}\right)\left(\frac{100}{200}\right)^2 \qquad \boxed{V_B = 11.68\ m/s}$$

3.36. Un líquido está girando alrededor de un eje horizontal como un sólido y en el eje existe una presión P_0. Determinar la ecuación de la superficie de presión constante. *Velocidad* $= \omega$, *densidad* $= \rho$

Resolución





$\sum dF = dma$

$$PdA - \left(P + \frac{\partial P}{\partial r}dr\right)dA - dw\,sen\alpha = -dma$$

pero:

$$dm = \frac{dV}{g}\gamma = \frac{dA\,dr}{g}\gamma$$

El diferencial de peso:

$$dw = dv\gamma = dA.dr.\gamma$$

$$P.dA - \left(P + \frac{\partial P}{\partial r}dr\right)dA - dA.dr\gamma.sen\alpha = -\frac{dA.dr\gamma}{g}a$$

Pero: $a = \omega^2 r$; $\qquad$ Reemplazando tenemos:

$$P.dA - \left(P + \frac{\partial P}{\partial r}dr\right)dA - dA.dr\gamma.sen\alpha = -\frac{dA.dr\gamma}{g}\omega^2 r$$

Después de simplificar y dividir por el volumen del elemento $dA.dr$, tendremos:

$$\frac{dP}{dr} = -\gamma.sen\alpha + \frac{\gamma}{g}\omega^2 r \quad \Rightarrow \quad dP = \left(-\gamma.sen\alpha + \frac{\gamma}{g}\omega^2 r\right)dr$$

Integrando: $\quad dP = -\gamma.r.sen\alpha + \dfrac{\gamma}{2g}\omega^2 r^2 + cte$

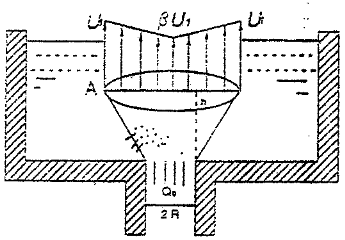
Para: $r = 0$, $\quad P = P_0 \quad \Rightarrow \quad cte = P_0$

Reemplazando $cte = P_0$, y $\gamma = \rho.g$ y ordenando:

$$\boxed{\frac{P - P_0}{\rho.g} = \frac{r^2\omega^2}{2.g} - r.sen\alpha}$$

3.37. Un reactor nuclear experimental está diseñado con un núcleo que contiene pequeñas esferitas de material fisionable colocados en un recipiente como indica la figura. Un líquido de peso específico γ entró en el núcleo a razón de Q_0 m^3/s. La distribución de velocidades a la salida del núcleo varía como se indica. ¿Cuál es el caudal del líquido que se pierde por las paredes?

Resolución:



La ley de variación de velocidades en la sección A es:

$$u = \frac{U_1(1-\beta)}{R+h.\tan\alpha}r + \beta.U_1$$

El caudal que sale por el núcleo es: $Q = \int_0^{R+h.Tan\alpha} u.dA$

$$Q = \int_0^{R+h.Tan\alpha}\left[\frac{U_1(1-\beta)}{R+h.\tan\alpha}r + \beta U_1\right]2\pi r dr = \frac{2\pi U_1(1-\beta)}{3(R+h.\tan\alpha)}r^3 + \pi\beta U_1.r^2\Big|_0^{R+h.\tan\alpha}$$

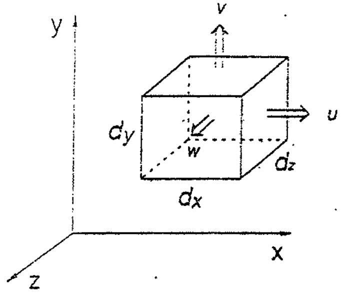
$$Q = \pi U_1(R+h.\tan\alpha)^2\left(\frac{2}{3}(1-\beta)+\beta\right) = \frac{\pi U_1}{3}(R+h.\tan\alpha)^2(2+\beta)$$

Como el caudal que entra es Q_0 y el caudal que sale por el núcleo es Q, entonces el caudal Q_p que se pierde por la porosidad de las paredes es:

$$Q_p = Q_0 - Q$$

$$\boxed{Q_p = Q_0 - \frac{\pi U_1}{3}(2+\beta)(R+h.\tan\alpha)^2}$$

3.38. Deducir la ecuación de continuidad partiendo de un elemento de volumen $dx.dy.dz$ en forma de paralelepípedo usado como volumen de control.



Resolución

Se sabe que:

$$Flujo = \frac{Masa}{Tiempo} = \int \rho V_n dA$$

$V_n =$ Velocidad normal de superficie que atraviesa.

Analizando el flujo que atraviesa el área $dydz$.

Masa que entra: $m = \rho.u.(dydz)dt$

Masa que sale: $dm = \rho.u.(dydz)dt + \frac{\partial}{\partial x}(\rho.u.dydzdt)dx$

Luego la pérdida es:

$$-\frac{\partial}{\partial x}(\rho.u.dydzdt)dx \quad ó \quad -\frac{\partial}{\partial x}(\rho.u.dydzdx)dt$$

La pérdida por unidad de tiempo.

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{\partial}{\partial x}(\rho.u.dxdydz)$$

Repitiendo estos pasos en las otras direcciones obtendremos la pérdida total sumando:

$$-\frac{dm}{dt} = \frac{\partial}{\partial x}(\rho.u.dxdydz) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho.v.dxdydz) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho.w.dxdydz)$$

$$-\frac{\partial m}{\partial t} = dxdydz\left[\frac{\partial}{\partial x}\rho.u + \frac{\partial}{\partial y}\rho.v + \frac{\partial}{\partial z}\rho.w\right]$$

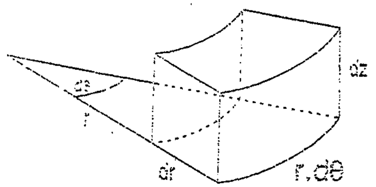
$$-\frac{\partial}{\partial t}\rho d_{vol} = d_{vol}\left[\frac{\partial}{\partial x}\rho.u + \frac{\partial}{\partial y}\rho.v + \frac{\partial}{\partial z}\rho.w\right]$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\rho.u + \frac{\partial}{\partial y}\rho.v + \frac{\partial}{\partial z}\rho.w = 0$$

ó $$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla.(\rho.\overline{V}) = 0$$

3.39. Deducir la ecuación de continuidad en coordenadas cilíndricas.

Resolución:



$$m_r = (\rho V_r r d\theta . dz) dt$$
$$m_\theta = (\rho V_\theta r dr . dz) dt$$
$$m_z = (\rho V_z r d\theta . dr) dt$$

Masa que sale: $m + dm$

Luego pérdida es: dm.

$$-dm_r = \frac{d}{dr}(\rho V_r r d\theta dz dt) dr \quad ; \qquad -\partial m_\theta = \frac{\partial}{\partial\theta}(\rho V_\theta dr dz dt) d\theta$$

$$-\partial m_z = \frac{\partial}{\partial z}(\rho V_z r d\theta dr dt) dt$$

Pero:
$$-\frac{dm_r}{dt} = \frac{\partial}{\partial r}(\rho V_r r d\theta dz dr)$$
$$-\frac{dm_\theta}{dt} = \frac{\partial}{\partial\theta}(\rho V_\theta dr dz d\theta)$$
$$-\frac{dm_z}{dt} = \frac{\partial}{\partial z}(\rho V_z r d\theta dr dz)$$

$$-\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dr}(\rho V_r r d\theta dz dr) + \frac{d}{d\theta}(\rho V_\theta dr dz d\theta) + \frac{d}{dz}(\rho V_z r d\theta dr dz)$$

$$-\frac{\rho d\theta . dr . dz . r}{dt} = d\theta . dr . dz\left[\frac{d}{dr}(r\rho V_r) + \frac{d}{d\theta}(\rho V_\theta) + \frac{d}{dz}(r\rho V_z)\right]$$

$$-\frac{d(r\rho)}{dt} = \frac{d}{dr}(r\rho V_r) + \frac{d}{d\theta}(\rho V_\theta) + \frac{d}{dz}(r\rho V_z)$$

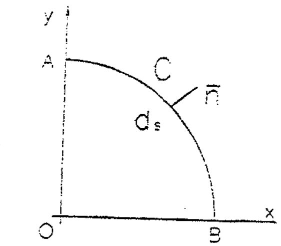
$$-\frac{r.d(\rho)}{dt} = \frac{d}{dr}(r\rho V_r) + \frac{d}{d\theta}(\rho V_\theta) + r\frac{d}{dz}(\rho V_z)$$

$$-\frac{d(\rho)}{dt} = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\rho V_r) + \frac{1}{r}\frac{d}{d\theta}(\rho V_\theta) + \frac{d}{dz}(\rho V_z)$$

$$\frac{d(\rho)}{dt} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\rho V_r) + \frac{1}{r}\frac{d}{d\theta}(\rho V_\theta) + \frac{d}{dz}(\rho V_z) = 0$$

3.40. En un flujo bidimensional sea el campo de velocidades $\overline{V} = -4y\bar{i} - 4x\bar{j}$. Calcular el caudal que fluye a través de la superficie ACB, con la unidad de ancho en el sentido OZ. Calcular también el caudal neto sobre la superficie cerrada ACBO. ¿Cómo se podría prever este resultado?

Resolución



El caudal por unidad de ancho es:

$$q = \int \overline{V}.\bar{n} ds$$

En coordenadas polares tendremos:

$$\overline{V} = -4 sen\theta \bar{i} - 4.\cos\theta.\bar{j}$$
$$\bar{n} = \cos\theta \bar{i} - sen\theta.\bar{j}$$
$$ds = \rho d\theta = d\theta \qquad \rho = 1$$

Luego:

$$q = \int(-4 sen\theta.\bar{i} - 4.\cos\theta.\bar{j})(\cos\theta\,\bar{i} + sen\theta.\bar{j}) d\theta$$

$$q = -8\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen\theta.\cos\theta.d\theta = -8\left[\frac{sen^2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$q = -4$ Caudal a través de ACB

En la cara A0 tenemos: $ds.\bar{n} = -dy.\bar{i}$

$$q_{AO} = \int_0^1 (-4y\bar{i} - 4.x.\bar{j})(-dy.\bar{i}) = \int_0^1 4y.dy = 2$$

En la cara OB tenemos: $\bar{n} = -\bar{j}$ $\qquad ds = dx$

$$q_{BO} = \int_0^1 (-4y\bar{i} - 4.x.\bar{j})(dx.\bar{j}) = \int_0^1 4x.dx = 2$$

Luego el caudal neto será la suma de caudales:

$$q_N = -4 + 2 + 2 = 0$$

Este resultado se podría prever, ya que todo caudal que entra, sale por el principio de conservación de la masa, de modo que el caudal neto es cero.

PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS

1. Dado el potencial:

$$\phi = \frac{y^3}{3} - x^2 y$$

Hallar: (a) ψ (c) Aceleración

(b) Velocidad (d) Potencial Complejo

Resolución:

$$u = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad v = -\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

(a) $$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial x} = -2xy \quad \Rightarrow \quad d\psi = -2xy\,dy$$

$$\Rightarrow \quad \psi = -x^2 y + h_{(x)} \quad \text{.......................................(1)}$$

de (1): $\frac{\partial \psi}{\partial x} = -y^2 + h'_{(x)}$; pero: $\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \phi}{\partial y} = x^2 - y^2$

$$\Rightarrow \; -y^2 + h'_{(x)} = x^2 - y^2$$

$$\frac{dh}{dx} = h'_{(x)} = x^2 \quad \Rightarrow \quad h_{(x)} = \frac{x^3}{3} \quad \text{.......................................(2)}$$

(2) en (1): $\boxed{\psi = \frac{x^3}{3} - x \cdot y^2}$

(b) $$u = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y^3}{3} - x^2 y\right) \quad \Rightarrow \quad u = 2xy$$

$$v = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = x^2 - y^2 \qquad \therefore \quad \boxed{\overline{V} = 2xy\,\hat{\imath} + (x^2 - y^2)\,\hat{\jmath}}$$

(c) $$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0 = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} \quad ; \quad w = 0$$

$$u = 2xy \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 2y$$

$$v = x^2 - y^2 \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2x$$

$$\Rightarrow \quad a_x = 2x(2y) + (x^2 - y^2)2x = 4xy^2 + 2x^3 - 2xy^2$$

$$a_x = 2xy^2 + 2x^3$$

$$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}$$

$$a_y = 2xy(2x) + (x^2 - y^2)(-2y) = 4x^2 y - 2x^2 y + 2y^3$$

$$a_y = 2x^2 y + 2y^3$$

$$\therefore \quad \boxed{\overline{a} = (2xy^2 + 2x^3)\,\hat{\imath} + (2x^2 y + 2y^3)\,\hat{\jmath}}$$

(d) $$f(z) = \phi + \psi \quad \Rightarrow \quad \boxed{f(z) = \left(\frac{y^3}{3} - x^2 y\right) + i\left(\frac{x^3}{3} - xy^2\right)}$$

2. El campo de velocidades en la región que se muestra en la figura está dada por:

$$\overline{V} = a\,y\,\hat{\jmath} + b\hat{k}$$

Donde; $a = 10\ s^{-1}$ y $b = 10\ m/s$. Si se supone un espesor w perpendicular al plano de la pared, un elemento de área "1" puede representarse mediante $wdz\ (-\hat{\jmath})$ y un elemento de área "2" mediante $wdy\ (-\hat{k})$. (Obsérvese que ambos elementos se han considerado hacia fuera del volumen de control, de ahí el signo menos).

a. Determine una expresión para $\overline{V} \cdot d\overline{A}_1$

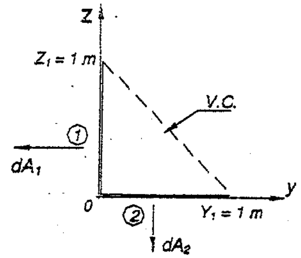
b. Evalúe $\int_{A_1} \overline{V} \cdot d\overline{A}_1$

c. Encuentre una expresión para $\overline{V} \cdot d\overline{A}_2$

d. Determine un expresión para $\overline{V}(\overline{V} \cdot d\overline{A}_2)$

e. Calcule $\int_{A_2} \overline{V}(\overline{V} \cdot d\overline{A}_2)$

Resolución:



a. $$\overline{V} \cdot d\overline{A}_1 = (a\,y\,\hat{\jmath} + b\hat{k}) \cdot (wdz(-\hat{\jmath}))$$

$$\overline{V} \cdot d\overline{A}_1 = -a\,y\,w\,dz$$

b. $$\int_{A_1} \overline{V} \cdot d\overline{A}_1 = -\int_0^1 a\,y\,w\,dz = -a\,y\,w\,z\Big|_0^1 = 0$$

$$(y = 0)$$

c. $$\overline{V} \cdot d\overline{A}_2 = (a\,y\,\hat{\jmath} + b\hat{k}) \cdot w\,dy\,(-\hat{k}) = -b\,w\,dy$$

d. $$\overline{V} \cdot (\overline{V} \cdot d\overline{A}_2) = (a\,y\,\hat{\jmath} + b\hat{k})(-b\,w\,dy) = -a\,b\,w\,y\,dy\,\hat{\jmath} - b^2\,w\,dy\,\hat{k}$$

e. $$\int_{A_2} \overline{V}(\overline{V} \cdot d\overline{A}_2) = -a\,b\,w\frac{y^2}{2}\hat{\jmath}\Big|_0^1 - b\,w\,y\,\hat{k}\Big|_0^1 = -50\,w\,\hat{\jmath} - 100\,w\,\hat{k}$$

3. La distribución de velocidades para un flujo laminar a través de un tubo circular de gran longitud está dada mediante la expresión unidimensional.

$$\overline{V} = u\,\hat{i} = U_{máx}\left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right)\hat{i}$$

Para este perfil, utilícese el vector de área:

$d\overline{A} = 2\pi\, r\, dr\, \hat{i}$ *para calcular:*

a) $\int \overline{V}\cdot d\overline{A}$ b) $\int \overline{V}(\overline{V}\cdot d\overline{A})$

Correspondiente a una sección transversal del tubo.

Resolución:

a) $\overline{V}\cdot d\overline{A} = U_{máx}\left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right)2\pi\, r\, dr$

$$\int \overline{V}\cdot d\overline{A} = \int_0^R 2\pi\, U_{máx}\left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right) r\, dr$$

$$\int \overline{V}\cdot d\overline{A} = 2\pi\, U_{máx}\int_0^R\left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right) r\, dr = 2\pi\, U_{máx}\left(\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4R^2}\right)\Bigg|_0^R$$

$$\int \overline{V}\cdot d\overline{A} = 2\pi\, U_{máx}\left(\frac{R^2}{4}\right) = \frac{U_{máx}\,\pi\, R^2}{2}$$

b) $\overline{V}(\overline{V}\cdot d\overline{A}) = U_{máx}\left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right)\left(U_{máx}\left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right)2\pi\, r\, dr\right)$

$$\overline{V}(\overline{V}\cdot d\overline{A}) = 2\pi\, U_{máx}^2\left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right)^2 r\, dr$$

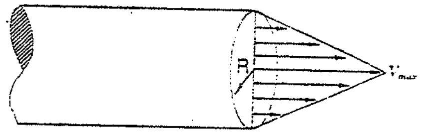
$$\int \overline{V}(\overline{V}\cdot d\overline{A}) = 2\pi\, U_{máx}^2\int_0^R\left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right)^2 r\, dr$$

$$\int \overline{V}(\overline{V}\cdot d\overline{A}) = 2\pi\, U_{máx}^2\left(\frac{r^2}{2}+\frac{r^6}{6R^4}-\frac{2r^4}{4R^2}\right)\Bigg|_0^R$$

$$\int \overline{V}(\overline{V}\cdot d\overline{A}) = 2\pi\, U_{máx}^2\left(\frac{R^2}{2}+\frac{R^6}{6}-\frac{R^2}{2}\right) = 2\pi\, U_{máx}^2\,\frac{R^2}{6} = \boxed{\frac{U_{máx}^2\,\pi\, R^2}{3}}$$

4. El agua que fluye a través de una tubería circular se puede suponer que tiene una distribución lineal de velocidades como se muestra en la figura. ¿Cuál es la velocidad promedio del flujo expresado en términos de $V_{máx}$. ?

Resolución:



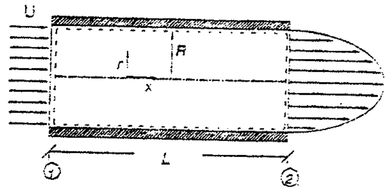
$V_{med} = \dfrac{Q}{A}$ $\qquad Q = \int_A v\,dA = $ *Volumen del cono con altura igual a* $V_{máx}$

$Q = \dfrac{V_{máx}}{3}(\pi R^2) \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_{med} = \dfrac{V_{máx}}{3}}$

5. A través del tubo de longitud L y radio R = 3" fluye agua en estado estacionario. Calcule el valor de la velocidad uniforme a la entrada, U: si la distribución de velocidades en la sección de salida está dada por:

$$u = 10\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)\,{}^{pie}/_{s}$$

Se pide determinar la velocidad de entrada U.



Resolución:

El volumen de control es el que se indica con líneas segmentadas.

Ecuación Fundamental: $0 = \dfrac{\partial}{\partial t}\int_{V.C} \rho\, d\forall + \int_{S.C} \rho\,\overline{V}\cdot d\overline{A} \quad \Rightarrow \quad 0 = \int_{S.C} \rho\,\overline{V}\cdot d\overline{A}$

En las dos secciones a través de las cuales se tiene un flujo que cruza la superficie de control; podemos escribir:

$$\int_{S.C.} \rho\,\overline{V}\, dA = \int_{A_1} \rho\,\overline{V}\cdot d\overline{A} + \int_{A_2} \rho\,\overline{V}\cdot d\overline{A} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Evaluando las integrales una por una:

$$\int_{A_1} \rho\,\overline{V}\cdot d\overline{A} = -\int_{A_1} |\,\rho\, V\, dA\,| = -|\,\rho\, U\, A_1\,|$$

$$\int_{A_2} \rho\,\overline{V}\cdot d\overline{A} = \int_{A_2} |\,\rho\, u\, dA\,| = \rho\int_0^R 10\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)2\pi\, r\, dr$$

$$\int_{A_2} \rho\,\overline{V}\cdot d\overline{A} = 20\pi\,\rho\left(\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4R^2}\right)\Bigg|_0^R = 20\pi\,\rho\left(\frac{R^2}{4}\right)$$

Reemplazando estas últimas integrales en (1)

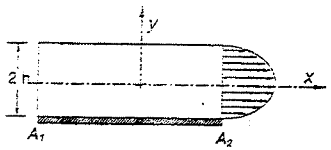
$\rho\, U\, A_1 = 5\pi\,\rho\, R^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{U = 5\,{}^{pie}/_{s}}$

6. Se alimenta agua a un canal ancho, de fondo plano, de tirante $2h$, con velocidad uniforme de 5 m/s. A la salida del canal, la distribución de velocidades está dada por:

$$\frac{U}{U_{máx}}=1-\left(\frac{y}{h}\right)^2$$

La coordenada y se mide desde la línea de centros del canal. Determine la velocidad de salida en el centro: $U_{máx}$.

Resolución:



Se pide: $U_{máx}$

Sabemos que para flujo estacionario:

$\int \rho \overline{V}\cdot d\overline{A}=0$ ....(1)

Evaluando las dos secciones que cruza el flujo: A_1, A_2

$$\int_{A_1} \rho \overline{V}\cdot d\overline{A}=-\int_{A_1}|\rho V\, dA|=-|\rho U A_1|=-\rho U b(2h)$$

$$\int_{A_2} \rho \overline{V}\cdot d\overline{A}=\int_{A_2}|\rho U\, dA|=\rho\int_{-h}^{h}U_{máx}\left(1-\left(\frac{y}{h}\right)^2\right)b\,dy$$

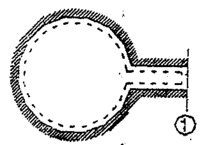
$$\int_{A_2} \rho \overline{V}\cdot d\overline{A}=\rho U_{máx}b\left(y-\frac{y^3}{3h^2}\right)\Bigg|_{-h}^{h}=\rho b U_{máx}\left(\frac{4}{3}h\right)$$

Reemplazando en (1):

$$\rho b U_{máx}\left(\frac{4}{3}h\right)=\rho U b(2h)\quad\Rightarrow\quad \boxed{U_{máx}=\frac{6}{4}U=7.5\,m/s}$$

7. Un tanque de 0.5 m de volumen contiene aire comprimido. Se abre una válvula y el aire se escapa con una velocidad de 300 m/s. a través de la abertura de 130 mm^2 de área. La temperatura del aire que pasa a través de la abertura es 15°C y la presión absoluta es 350 Kpa. Determine la rapidez con que cambia la densidad del aire dentro del tanque en el instante en que se abre.

Resolución:



Datos: $\forall = 0.5\, m^3$

Velocidad de salida = 300 m/s

Área de salida = 130 mm^2

$T = 15°C$

$P_{absoluta} = 350\ Kpa$

Determinar:

La rapidez con que cambia la densidad del aire en el tanque en el instante $t = 0$.

$\Rightarrow$ *La línea segmentada representa nuestro volumen de control.*

Ecuación Fundamental: $0=\frac{\partial}{\partial t}\int_{V.C.}\rho\, d\forall+\int_{S.C.}\rho\overline{V}\, d\overline{A}$

Dado que las propiedades en el tanque para cualquier instante, $\rho = Cte.$; por lo tanto puede salir de la integral:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\int_{V.C.}d\forall\right)+\int_{S.C.}\rho\overline{V}\cdot d\overline{A}=0$$

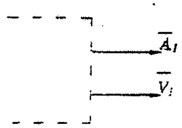
Además: $\int_{V.C.}d\forall=\forall$

$$\therefore\quad \frac{\partial}{\partial t}(\rho\forall)+\int_{S.C.}\rho\overline{V}\, d\overline{A}=0$$

El flujo solo cruza la superficie (1).

$$\Rightarrow\quad \int_{S.C.}\rho\overline{V}\cdot d\overline{A}=\int_{A_1}\rho\overline{V}\cdot d\overline{A}\quad y\quad \frac{\partial}{\partial t}(\rho\forall)+\int_{A_1}\rho\overline{V}\cdot d\overline{A}=0$$

Evaluando la integral en la sección (1); es positivo.



$$\therefore\quad \frac{\partial}{\partial t}(\rho\forall)+\int_{A_1}|\rho V\, dA|=0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\forall)+|\rho_1 V_1 A_1|=0$$

$$ó\quad \frac{\partial}{\partial t}(\rho\forall)=-|\rho_1 V_1 A_1|$$

Como el volumen $\forall$ del tanque no es función del tiempo

$$\forall\frac{\partial}{\partial t}\rho=-|\rho_1 V_1 A_1|$$

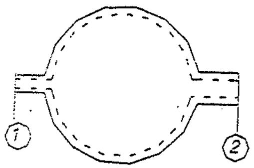
En el instante $t = 0$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho=-\frac{1}{\forall}|\rho_1 V_1 A_1|=-6.13\tfrac{Kg}{m^3}*300\tfrac{m}{s}*130mm^2*\frac{1}{0.5m^3}*\frac{m^2}{10^6\,mm^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\rho=-0.48\tfrac{Kg/m^3}{s}}$$

8. Un recipiente de un área de entrada de 0.2 pie^2 por donde pasa aire con velocidad 15 *pie/s* y densidad 0.03 *slug/pie*^{3}. El área de salida de 0.4 pie^2 y la velocidad del aire que pasa a través de ella es 5 *pies/s* siendo su densidad igual a la densidad del aire en el recipiente. La densidad inicial del aire en el recipiente es 0.02 *slug/pie*^{3} y el volumen total del recipiente es 20 pie^3. Determine la rapidez con que cambia la densidad del recipiente en el instante inicial.

Resolución:



Datos: $\forall = 20\ pie^3$

$A_1 = 0.2\ pie^2$ $\qquad A_2 = 0.4\ pie^2$

$V_1 = 15\ ^{pie}/_{s}$ $\qquad V_2 = 5\ ^{pie}/_{s}$

$\rho_1 = 0.03\ ^{slug}/_{pie^3}$ $\qquad \rho_1 = 0.02\ ^{slug}/_{pie^3}$

$\rho_i = \rho_{tanque}$

Determinar: $\left(\dfrac{\partial P}{\partial t}\right)_{t=0}$

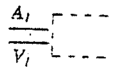
Se ha seleccionado un volumen de control (*VC*) que es el que está con líneas segmentadas.

Ecuación Fundamental: $0 = \dfrac{\partial}{\partial t}\int_{V.C.} \rho\, d\forall + \int_{S.C.} \rho \bar{V}\cdot d\bar{A}$ ....(1)

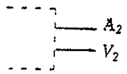
$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\, d\forall = \frac{\partial}{\partial t}(\rho_1 \forall - \rho_2 \forall) \quad ; \quad \forall_{recip.} = Cte.$$

El flujo cruza las secciones (1) y (2)

$$\int_{S.C.} \rho \bar{V}\cdot dA = \int_{A_1} \rho \bar{V}\cdot d\bar{A} + \int_{A_2} \rho \bar{V}\cdot d\bar{A}$$



$$\int_{A_1} \rho \bar{V}\cdot d\bar{A} = -\int_{A_1} |\rho V\, dA| = -|\rho_1 V_1 A_1|$$



$$\int_{A_2} \rho \bar{V}\cdot d\bar{A} = +\int_{A_2} |\rho V\, dA| = |\rho_2 V_2 A_2|$$

Reemplazando en (1):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_1 \forall) - \frac{\partial}{\partial t}(\rho_2 \forall) - |\rho_1 V_1 A_1| + |\rho_2 V_2 A_2| = 0 \quad \Rightarrow \quad \forall \frac{\partial \rho_1}{\partial t} = |\rho_1 V_1 A_1| - |\rho_2 V_2 A_2|$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = \frac{1}{20\ pie^3}\left(0.03 \tfrac{slug}{pie^3} * 15 \tfrac{pie}{s} * 0.2\ pie^2 - 0.02 \tfrac{slug}{pie^3} * 5 \tfrac{pie}{s} * 0.4\ pie^2\right)$$

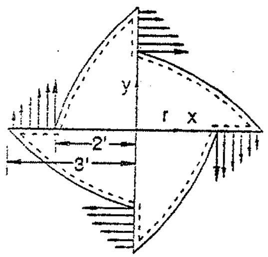
$$\boxed{\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = 0.0025 \frac{slug/pie^3}{s}}$$

9. El recipiente mostrado en la figura tiene 6 *pies* de longitud en la dirección perpendicular al plano del papel. No existe flujo hacia el interior del recipiente, pero un reacción química que se desarrolla en su interior genera gas que sale a través de las cuatro aberturas (cada uno de 1 *pie* por 6 *pies* de área de sección transversal), como se muestra. La velocidad del gas respecto al recipiente y su densidad al momento de salir varían con el radio según las siguientes expresiones:

$$V = \frac{10}{r} \quad y \quad \rho = 0.0020 + 0.001\, r$$

Donde *V* está dado en *pie/s*, ρ en *slug/pie*^{3} y *r* en *pies*. Determine la rapidez con que cambia la masa en el recipiente, en *slug/s*.

Resolución:



Ecuación Fundamental:

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}\int_{V.C.} \rho\, d\forall + \int_{S.C.} \rho \bar{V}\cdot d\bar{A} \ ....(1)$$

(Rapidez con que cambia la masa dentro del volumen de control que en este caso concuerda con el recipiente de línea segmentada).

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{V.C.} \rho\, d\forall = \frac{\partial}{\partial t}(\rho_1 \forall - \rho_2 \forall)$$

En este caso el flujo cruza las cuatro secciones. (1), (2), (3) y (4)

$$\int_{S.C.} \rho \bar{V}\cdot d\bar{A} = \int_{A_1} \rho \bar{V}\cdot d\bar{A} + \int_{A_2} \rho \bar{V}\cdot d\bar{A} + \int_{A_3} \rho \bar{V}\cdot d\bar{A} + \int_{A_4} \rho \bar{V}\cdot d\bar{A}$$

Por otro lado:

$$\int_{A_1} \rho \bar{V}\cdot d\bar{A} = \int_{A_2} \rho \bar{V}\cdot d\bar{A} = \int_{A_3} \rho \bar{V}\cdot d\bar{A} = \int_{A_4} \rho \bar{V}\cdot d\bar{A}$$

$$\therefore \quad \int_{S.C.} \rho \bar{V}\cdot d\bar{A} = 4\int_{A_1} \rho \bar{V}\cdot d\bar{A} \ ....(2)$$

$$\int_{A_1} \rho \bar{V}\cdot d\bar{A} = \int_2^3 (0.002 + 0.001\, r)\left(\frac{10}{r}\right)(6\, dr) \qquad donde:\ dA = 6\, dr$$

$$\int_{A_1} \rho \bar{V}\cdot d\bar{A} = 6\int_2^3 \left(\frac{0.02}{r} + 0.01\right) dr = 6\left(0.02\, Ln\, r + 0.01\, r\right)\Big|_2^3$$

$$\int_{A_1} \rho \bar{V}\cdot d\bar{A} = 6\left[(0.02\, Ln 3 + 0.01 * 3) - (0.02\, Ln 2 + 0.01 * 2)\right]$$

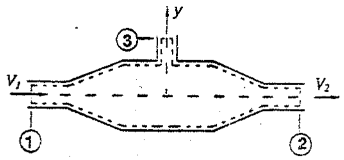
$$\int_{A_1} \rho \bar{V}\cdot d\bar{A} = 6(0.05197 - 0.03386) = 0.10866$$

En la ecuación (2): $\int_{s.c.} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = 4 * 0.10866 = 0.435$

En la ecuación (1): $\boxed{\dfrac{\partial}{\partial t} \int_{v.c.} \rho \, d\forall = -0.435 \, ^{slug}/_{s}}$

10. El tramo de una tubería que conduce agua está constituido por una cámara de expansión que incluye una superficie libre de 2 m^2 de área (ver figura). Las tuberías de entada y salida a la cámara tienen una sección transversal de 1 m^2 de área. En cierto instante dado, la velocidad en la sección *1* de entrada es 3 *m/s*: en la sección *2* de salida. el gasto de agua es 4 m^3/s. Ambos flujos son uniformes. Determine la rapidez con que cambia el nivel de la superficie libre en el instante dado, en *m/s*. Señale si el nivel sube o baja.

Determinar la rapidez con que cambia el volumen de agua en la cámara , para el instante "t"



Resolución:

El volumen de control se indica con línea segmentada.

Ecuación Fundamental: $0 = \dfrac{\partial}{\partial t} \int_{v.c.} \rho \, d\forall + \int_{s.c.} \rho \vec{V} d\vec{A}$

Como se suponen uniformes las propiedades en el tanque para cualquier instante, podemos sacar ρ fuera de la integral.

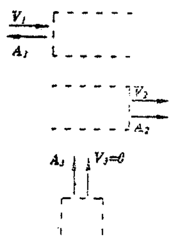
$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho \int_{v.c.} d\forall \right) + \int_{s.c} \rho \vec{V} d\vec{A} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \forall) + \int_{s.c.} \rho \vec{V} d\vec{A} = 0 \quad \text{.......................................(1)}$$

El flujo cruza 3 secciones:

$$\int_{s.c.} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = \int_{A_1} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} + \int_{A_2} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} + \int_{A_3} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \quad \text{.....(2)}$$

Evaluando cada una de las integrales:



$$\int_{A_1} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = -|\rho V_1 A_1| = -\rho * 3 \, ^{m}/_{s} * 1m^2$$

$$= -\rho * 3 \, ^{m^3}/_{s}$$

$$\int_{A_2} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = |\rho V_2 A_2| = \rho * 4 \, ^{m^3}/_{s}$$

$$\int_{A_3} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = |\rho V_3 A_3| = 0$$

Reemplazando estos valores en la ecuación (2)

$$\int_{s.c.} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = \rho\left(-3 \, ^{m^3}/_{s} + 4 \, ^{m^3}/_{s} + 0\right) = \rho\left(1 \, ^{m^3}/_{s}\right)$$

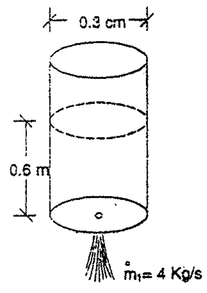
Reemplazando en la ecuación (1): $\rho \dfrac{\partial}{\partial t} \forall = -\int_{s.c.} \rho \vec{V} \cdot c\vec{A} = -\rho\left(1 \, ^{m^3}/_{s}\right)$

$A \dfrac{\partial}{\partial t} y = -1 \, ^{m^3}/_{s}$ *donde : A : área media en* m^2

finalmente : $\boxed{\dfrac{\partial}{\partial t} y = -1 \, ^{m}/_{s}}$ $\therefore$ El nivel disminuye.

11. Un recipiente cilíndrico de 0.3 *cm* de diámetro se vacía a través de un orificio practicado en su fondo. En un instante dado, cuando el nivel de agua es 0.6 *m*, el gasto másico que pasa por el orificio es 4 *Kg/s*. Determine la rapidez con que cambia el nivel del agua en el instante señalado.

Resolución:



Ecuación Fundamental: $0 = \dfrac{\partial}{\partial t} \int \rho \, d\forall + \int \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$

Por propiedades uniformes: $\dfrac{\partial}{\partial t}(\rho \forall) + \int_{A_1} \rho \vec{V} d\vec{A} = 0$

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \forall = -|\rho V_1 A_1| = -\dot{m}_1$$

$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial t} A y\right) = -\dot{m}_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial y}{\partial t} = -\frac{\dot{m}}{A \rho}$$

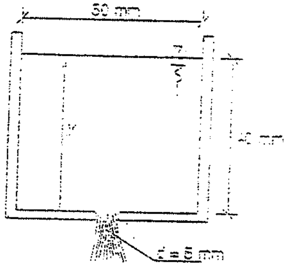
$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{-4 \, ^{Kg}/_{s}}{\dfrac{\pi (0.03)^2 m^2}{4} * 999 \, ^{Kg}/_{m^3}} = -5.66 \, ^{m}/_{s}$$

12. Un recipiente cilíndrico de diámetro D = 50 *mm* se vacía a través de un orificio con diámetro d = 5 *mm* practicado en el fondo del tanque. La velocidad del líquido que sale del recipiente se puede aproximar como $V = \sqrt{2 g y}$ donde y es la altura desde el fondo del recipiente hasta la superficie libre. Si el tanque se encuentra lleno inicialmente con agua hasta el nivel y_0 = 0.4 *m*. Determine el nivel del agua en el instante, t = 12 *s*.

Resolución:

Ecuación Fundamental:

$$0=\frac{\partial}{\partial t}\int_{V.C.}\rho\, d\forall+\int_{S.C.}\rho\overline{V}\cdot d\overline{A}$$



Propiedades uniformes:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\forall)+\int_{A_1}\rho\overline{V}\cdot d\overline{A}=0$$

$$\rho\frac{\partial}{\partial t}\forall=-\int_0^{y_0}\rho\, v_y\,\frac{\pi d^2}{4}\,dy$$

$$\rho\,\frac{\pi D^2}{4}\frac{\partial y}{\partial t}=-\rho\left(\frac{\pi d^2}{4}\right)\int_0^{0.4}\sqrt{2g}\,y^{1/2}\,dy$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}=-\left(\frac{d}{D}\right)^2\sqrt{2g}\left(\frac{2}{3}y^{3/2}\right)\Bigg|_0^{0.4}\quad ; \quad \frac{\partial y}{\partial t}=-\frac{2}{3}\left(\frac{d}{D}\right)^2\sqrt{2g}\,(0.4)^{3/2}$$

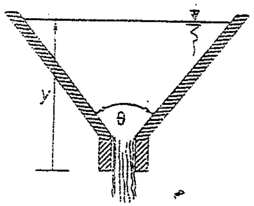
$$\frac{\partial y}{\partial t}=-0.0075\quad\Rightarrow\quad \boxed{y=0.0075(t-t_0)}$$

$$\boxed{h=-y=+0.0896\,m}$$

13. Un embudo de ángulo θ, se vacía a través de un orificio de área A, practicado en el vértice. La velocidad del líquido conforme sale del embudo es cerca de $V=\sqrt{2gy}$; donde y es la altura de la superficie libre del líquido por encima del orificio. El embudo se encuentra inicialmente lleno hasta la altura y_0. Obtenga una expresión para el tiempo t, necesaria para vaciar el embudo. Exprese el resultado en términos del volumen inicial $\forall_0$, del líquido en el embudo y del gasto volumétrico inicial:

$$Q_0=A\sqrt{2g\,y_0}=AV_0$$

Resolución:



Datos geométricos: $\tan\frac{\theta}{2}=\frac{R}{y}$

$$\Rightarrow\quad R=y\tan\frac{\theta}{2}\quad,\quad dR=\tan\frac{\theta}{2}dy$$

$$d\forall=\pi R^2\,dy=\pi\,y^2\tan^2\frac{\theta}{2}dy$$

Ecuación Fundamental: $0=\frac{\partial}{\partial t}\int_{V.C.}\rho\, d\forall+\int_{S.C.}\rho\overline{V}\cdot d\overline{A}$

Por propiedades uniformes: $\frac{\partial}{\partial t}(\rho\forall)+\int_{A_1}\rho\overline{V}\cdot d\overline{A}=0$

$$\rho\frac{\partial}{\partial t}\forall=-|\rho V_1 A_1|=-|\rho\sqrt{2gy}\,A|\quad\Rightarrow\quad\frac{\partial}{\partial t}\left(\pi y^2\tan^2\frac{\theta}{2}dy\right)=-\sqrt{2g}\sqrt{y}\,A$$

$$\frac{\pi\tan^2\frac{\theta}{2}}{A\sqrt{2g}}y^{3/2}\,dy=-dt\quad\Rightarrow\quad\boxed{\frac{2}{5}\frac{\pi\tan^2\frac{\theta}{2}}{A\sqrt{2g}}y^{5/2}=t}$$

$$\boxed{t=\frac{6\forall_0}{5Q_0}y_0}$$

14. Dado el potencial: $\phi=\frac{y^3}{3}-x^2y$

Hallar:

a) ψ

b) *Velocidad*

c) *Aceleración*

d) *Potencial Complejo*

Resolución:

$$u=-\frac{\partial\phi}{\partial x}=-\frac{\partial\psi}{\partial y}\qquad\qquad v=-\frac{\partial\phi}{\partial y}=\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

a) $\frac{\partial\psi}{\partial y}=\frac{\partial\phi}{\partial x}=-2xy\quad\Rightarrow\quad\partial\psi=-2xy\,\partial y$

$$\Rightarrow\quad\psi=-xy^2+h_{(y)}\quad\text{.......................................}(1)$$

de (1) $\frac{\partial\psi}{\partial x}=-y^2+h'_{(y)}\quad,\quad$ *pero* $\frac{\partial\psi}{\partial x}=-\frac{\partial\phi}{\partial y}=x^2-y^2$

$$\Rightarrow\quad -y^2+h'_{(y)}=x^2-y^2$$

$$\frac{dh}{dx}=h'_{(y)}=x^2\quad\Rightarrow\quad h_{(y)}=\frac{x^3}{3}\quad\text{.......................................}(2)$$

(2) *en* (1):

$$\boxed{\psi=\frac{x^3}{3}-xy^2}$$

b) $u=-\frac{\partial\phi}{\partial x}=-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y^3}{3}-x^2y\right)\quad\Rightarrow\quad u=2xy$

$$v=-\frac{\partial\phi}{\partial y}=x^2-y^2\qquad\therefore\qquad\boxed{\overline{V}=2xy\,\hat{i}-\left(x^2-y^2\right)\hat{j}}$$

c) $a_x=\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=0=\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial w}{\partial t} \quad , \quad w=0 \quad , \quad u=2xy \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial x}=2y$$

$$v=x^2-y^2 \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y}=2x$$

$$\Rightarrow \quad a_x=2xy(2y)+(x^2-y^2)2x=4xy^2+2x^3-2xy^2$$

$$\wedge \quad a_x=2xy^2+2x^3$$

$$a_y=\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}$$

$$a_y=2xy(2x)+(x^2-y^2)(-2y)=4x^2y-2x^2y+2y^3$$

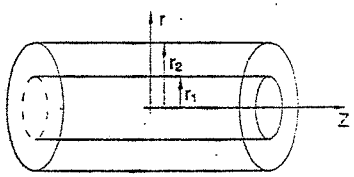
$$\wedge \quad a_y=2x^2y+2y^3$$

$$\therefore \quad \boxed{\bar{a}=(2xy^2+2x^3)\hat{i}+(2x^2y+2y^3)\hat{j}}$$

d) $\quad f_{(z)}=\phi+i\psi$

$$\Rightarrow \quad \boxed{f_{(z)}=\left(\frac{y^3}{3}-x^2y\right)+i\left(\frac{x^3}{3}-xy^2\right)}$$

15. Un fluido cuya viscosidad es μ y peso específico γ fluye entre dos tuberías cilíndricas coaxiales de radios r_1 y r_2. El gradiente de presiones es $-K$, el flujo es incompresible. Determinar el patrón de velocidades totalmente desarrollado.



Resolución:

Por dato: $\frac{\partial P}{\partial z}=-K \qquad (Constante)$

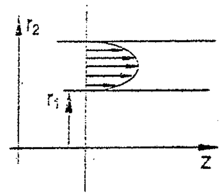
Para determinar la velocidad $V_z(r)$, tengo que utilizar la ecuación de Navier Stokes, la cual se puede expresar como:

$$0=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}+\upsilon\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V_z}{\partial r}\right)$$

De donde: $-\frac{Kr}{\rho\upsilon}=\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V_z}{\partial r}\right) \quad \Rightarrow \quad -\frac{Kr}{\rho\upsilon}\partial r=\partial\left(r\frac{\partial V_z}{\partial r}\right)$

$$C_1-\frac{Kr^2}{2\rho\upsilon}=r\frac{\partial V_z}{\partial r} \quad \Rightarrow \quad -\frac{Kr}{2\rho\upsilon}\partial r+\frac{C_1}{r}\partial r=\partial V_z$$

$$\Rightarrow \quad V_{z(r)}=-\frac{Kr^2}{4\rho\upsilon}+C_1\,Ln\,r+C_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(I)$$



Para: $r=r_2 \quad \rightarrow \quad V_z=0$

Para: $r=r_1 \quad \rightarrow \quad V_z=0$

Es decir: $0=-\frac{Kr_2^2}{4\rho\upsilon}+C_1\,Ln\,r_2+C_2$

$$0=-\frac{Kr_1^2}{4\rho\upsilon}+C_1\,Ln\,r_1+C_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(II)$$

$$\rho\upsilon=\mu \quad \Rightarrow \quad 0=-\frac{K}{4\mu}(r_2^2-r_1^2)+C_1\,Ln\frac{r_2}{r_1} \quad \Rightarrow \quad C_1=\frac{K(r_2^2-r_1^2)}{4\mu\,Ln\frac{r_2}{r_1}}$$

En (II): $C_2=+\frac{Kr_2^2}{4\mu}-\frac{K(r_2^2-r_1^2)}{4\mu\,Ln\frac{r_2}{r_1}}Ln\,r_2$

Reemplazando los valores de C_1 y C_2 en (I), se tiene:

$$\boxed{V_{z(r)}=-\frac{Kr^2}{4\mu}+\frac{K(r_2^2-r_1^2)}{4\mu\,Ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}Ln\,r+\frac{Kr_2^2}{4\mu}-\frac{K(r_2^2-r_1^2)}{4\mu}\frac{Ln\,r_2}{Ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}} \quad Rpta.$$

NOTA: $V_{máx} \quad \Leftrightarrow \quad r=\frac{r_1+r_2}{2}$

Y: $Q=\int_{r_1}^{r_2}V_z\,dA=\int_{r_1}^{r_2}V_z\,(2\pi r\,dr) \quad \Rightarrow \quad Q=2\pi\int_{r_1}^{r_2}V_z\,r\,dr$

16. Si $f=f(z)$ es un potencial complejo, demostrar que: $f'_{(z)}=e^{-i\theta}\frac{\partial f_{(z)}}{\partial r}$

Demostración:

Un potencial complejo depende del número complejo $z=r\cdot e^{i\theta}$.

Entonces si f es un potencial complejo:

$$f=f_{(z)} \quad \Rightarrow \quad \frac{df}{dz}=f'_{(z)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Pero, a su vez: $z=z_{(r,\theta)}=re^{i\theta} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial r}=e^{i\theta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$

$$\Rightarrow \quad f=f_{(z(r,\theta))} \quad ; \quad luego: \quad \frac{\partial f_{(z)}}{\partial r}=\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

(1) y (2) en (3): $\frac{\partial f_{(z)}}{\partial r}=f'_{(z)}e^{i\theta} \quad ; \qquad \therefore \quad \boxed{f'_{(z)}=e^{-i\theta}\frac{\partial f_{(z)}}{\partial r}} \quad l.q.q.d.$

CAPÍTULO IV

DINÁMICA DE LOS FLUIDOS

ECUACIÓN DE EULER

(para flujo no viscoso)

forma desarrollada

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + a_x$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} + a_y$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} + a_z$$

forma tensorial

$$\frac{dv_i}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_i} + a_i$$

$i = 1,2,3.$

forma vectorial

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \bar{a}$$

ó

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla P - g\nabla z$$

ECUACIÓN DE BERNOULLI

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{P}{\gamma} + z = constante$$

La ecuación de Bernoulli expresa la energía por unidad de peso, y es simplemente el principio de conservación de la energía. El Teorema de Bernoulli fue establecido por una línea de corriente. Esto significa que cada línea de corriente tiene un valor propio para la suma de Bernoulli.

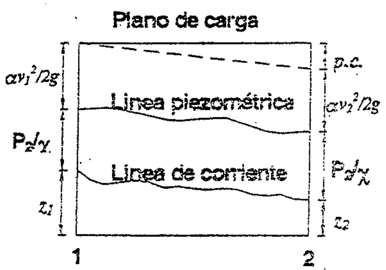
Como al ingeniero le interesa trabajar con la totalidad del escurrimiento, se busca una aproximación mediante el cálculo de la energía que corresponde a la velocidad media, al cual debe corregirse por medio de un coeficiente α llamado coeficiente de Coriolis, y la ecuación de Bernoulli se transforma en:

$$\alpha\frac{V_m^2}{2g} + \frac{P}{\gamma} + z = cte$$

V_m = Velocidad media de la sección.

Si hay pérdida de energía entre dos secciones:

$$\alpha\frac{V_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\gamma} + z_1 = \alpha\frac{V_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\gamma} + z_2 + p.c.$$



GASTO O CAUDAL

Es el volúmen de líquido que pasa a través de una sección transversal en la unidad de tiempo

$$\boxed{Q = v.A}$$

Donde: Q = gasto o caudal

v = velocidad media

A = área de la sección

TEOREMA DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO

"La fuerza que actúa sobre una masa en movimiento es igual al cambio de la cantidad de movimiento por unidad de tiempo".

Impulso = Cambio de Cantidad de Movimiento.

$$\bar{F}\Delta t = m\Delta\bar{v} \quad , \quad m = \rho\cdot Q\cdot\Delta t$$

Luego:

$$\bar{F} = \rho\cdot Q\cdot\Delta\bar{v} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\bar{F} = \rho\cdot Q\cdot(\bar{v}_2 - \bar{v}_1)}$$

POTENCIA HIDRÁULICA

Es el producto de la suma de Bernoulli por el peso de líquido que circula por unidad de tiempo. $\boxed{Pot. = \gamma\cdot Q\cdot H}$, *H = suma de Bernoulli*

Pot. de bomba = Pot. salida - Pot. entrada

Pot. de turbina = Pot. entrada - Pot. salida

4.1. Deducir la expresión del coeficiente α de Coriolis para un flujo permanente e incompresible.

Resolución:

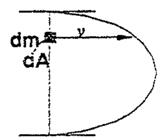
Se sabe que la energía cinética de una partícula es:

$$dE_c = \frac{1}{2}dm\cdot v^2$$

$$dm = \rho\cdot dV$$

$$dm = \rho\cdot v\cdot dA$$

$$\Rightarrow \quad dE_c = \frac{1}{2}\rho\cdot v^3\cdot dA$$



Y la energía total del fluido en la sección será: $E_c = \frac{1}{2}\rho\cdot\int_A v^3\cdot dA$ ....(1)

La energía cinética calculada por la velocidad media es: (incluyendo la corrección α).

$$E_c = \alpha \frac{1}{2} m \cdot v_m^2$$

$$m = \rho \cdot Vol = \rho \cdot v_m \cdot A$$

$$\Rightarrow \quad E_c = \alpha \frac{1}{2} \rho \cdot A \cdot v_m^3 \quad \text{...(2)}$$

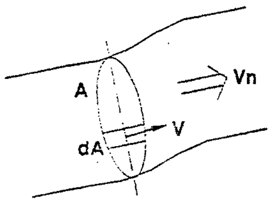
Igualando las expresiones (1) y (2) se tiene que:

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{A}\int_A \left(\frac{v}{v_m}\right)^3 dA} \text{ ....Resp.}$$

4.2. El valor de la cantidad de movimiento obtenido para toda la sección transversal de un tubo de corriente a partir de la velocidad media, debe corregirse por medio de un coeficiente designado con la letra β (coeficiente de Boussinesq o de la cantidad de movimiento). Determinar el valor de β para dicha sección.

Resolución:

Si v es la velocidad media, en la sección transversal del tubo de corriente, la cantidad de movimiento se expresa por: $\rho \cdot Q \cdot v_m = \rho \cdot v_m^2 \cdot A$ *(aproximado)*



Y para un tubo de corriente menor, de sección transversal dA, es: $\rho \cdot v^2 \cdot dA$

Entonces la cantidad de movimiento de toda la sección transversal será:

$$\int_A \rho \cdot v^2 dA \quad (exacto)$$

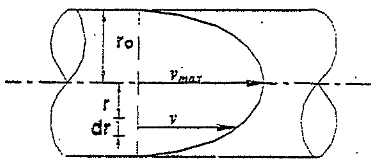
Para que el valor aproximado sea igual al exacto debe multiplicarse por el coeficiente β: $\Rightarrow \quad \beta \cdot \rho \cdot v_m^2 \cdot A = \int_A \rho \cdot v^2 dA$

Luego:

$$\boxed{\beta = \frac{1}{A}\int \left(\frac{v}{v_m}\right)^2 dA} \qquad \text{Resp.}$$

Por lo tanto el término $\beta \cdot \rho \cdot v_m^2 \cdot A$ expresa la cantidad de movimiento en una sección dada.

4.3. Suponiendo que la ley de distribución de velocidades, en una tubería, se puede aproximar según la figura, calcular el coeficiente de Coriolis. (Tubería circular) $\quad v = v_{max}\left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right)$



Resolución:

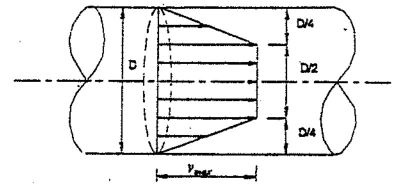
$$v_{med} = \frac{\int v \cdot dA}{A} = \frac{\int_0^{r_0} v_{max}\left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right)(2\pi \cdot r \cdot dr)}{\pi \cdot r_0^2}$$

$$v_{med} = \frac{2 \cdot v_{max}}{r_0^4}\int_0^{r_0}\left(r_0^2 \cdot r - r^3\right) \cdot dr = \frac{v_{MAX}}{2}$$

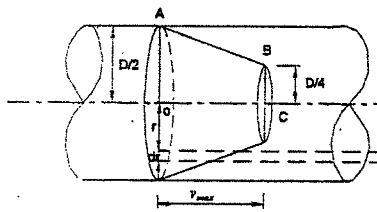
$$\alpha = \frac{1}{A}\int\left(\frac{v}{v_{MOD}}\right)^3 dA = \frac{1}{\pi \cdot r_0^2}\int_0^{r_0}\left(\frac{v_{max}\left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right)}{\frac{1}{2}V_{max}}\right)^{3}(2\pi \cdot r \cdot dr)$$

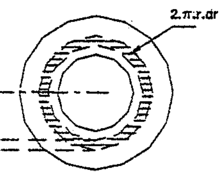
$\boxed{\alpha = 2}$ Resp.

4.4. Para la distribución de velocidades de la figura, hallar el coeficiente de Coriolis. (Tubería circular).



Resolución:



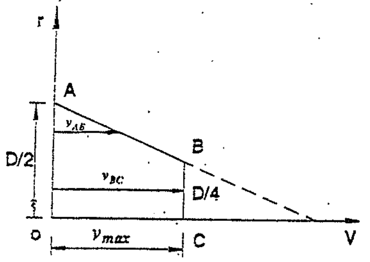


Se sabe que: $v_{med} = \frac{Q}{A}$

Y: $Q = \int_A v \cdot dA =$ "volumen" del tronco de cono producido por la ley de distribución de velocidades

$$\Rightarrow \quad Q = \frac{\pi \cdot v_{max}}{3}\left(\frac{D^2}{4} + \frac{D}{2}\frac{D}{4} + \frac{D^2}{16}\right)$$

$\wedge \quad A = \dfrac{\pi \cdot D^2}{4}$ *luego:* $v_{med} = \dfrac{7}{12} v_{máx}$



De la figura:

$\underline{parte \quad AB}: \quad \dfrac{D}{4} \le r \le \dfrac{D}{2}$

$$v_{AB} = \frac{4}{D} v_{máx}\left(-r + \frac{D}{2}\right)$$

$\wedge \quad v_{BC} = v_{máx}$

Por definición:

$$\alpha = \frac{1}{A}\int\left(\frac{v}{v_{med}}\right)^3 dA$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = \frac{1}{\frac{\pi \cdot D^2}{4}}\left(\int_0^{\frac{D}{4}}\left(\frac{v_{máx}}{\frac{7}{12}v_{máx}}\right)^3 2\pi \cdot r \cdot dr + \int_{\frac{D}{4}}^{\frac{D}{2}}\left(\frac{\frac{4}{D}v_{máx}\left(-r + \frac{D}{2}\right)}{\frac{7}{12}v_{máx}}\right)^3 2\pi \cdot r \cdot dr\right)$$

$$\alpha = \frac{4}{\pi D^2}\left(\left(\frac{12}{7}\right)^3 \frac{\pi D^2}{16} + \left(\frac{\left(-r + \frac{D}{2}\right)^5}{5} - \frac{\frac{D}{2}\left(-r + \frac{D}{2}\right)^4}{4}\right)_{\frac{D}{4}}^{\frac{D}{2}} 2\pi\left(\frac{12 \cdot 4}{7D}\right)^3\right)$$

$$\alpha = \frac{4}{\pi D^2}\left(\frac{108}{343}\pi D^2 + \left(0 - 0 - \frac{D^5}{5120} + \frac{D^5}{4096}\right)\frac{221184\pi}{343 D^3}\right)$$

Finalmente:

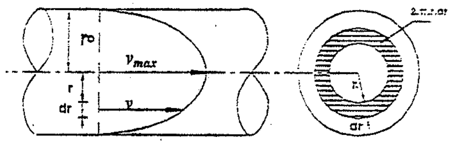
$\boxed{\alpha = 1.385}$ Re *sp.*

<u>NOTA</u>: En muchos casos se justifica considerar $\alpha = \beta = 1$, y la razón es que se encuentran con mucha frecuencia con flujos turbulentos, ya que para estos flujos la distribución de velocidades se hace más uniforme y por ende es más cierta dicha suposición.

En el flujo laminar, dado el fuerte gradiente (variación) de velocidades, los valores de α y β son grandes: $\alpha = 2$ y $\beta = 4/3$

4.5. Para la distribución de velocidades del problema 4.3., determinar el coeficiente de Boussinesq.

<u>**Resolución:**</u>



$$v = v_{MÁX}\left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right)$$

$$v_{med} = \frac{v_{máx}}{2}$$

$$\beta = \frac{1}{A}\int\left(\frac{v}{v_{med}}\right)^2 dA$$

$$\beta = \frac{1}{\pi \cdot r_0^2}\int_0^{r_0}\left(\frac{v_{máx}\left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right)}{\frac{1}{2}v_{máx}}\right)^2 2\pi \cdot r \cdot dr$$

Finalmente: $\boxed{\beta = \frac{4}{3}}$ Re *sp.*

TEOREMA DE TORRICELLI

<u>Coeficientes usados en la práctica</u> (casos reales)

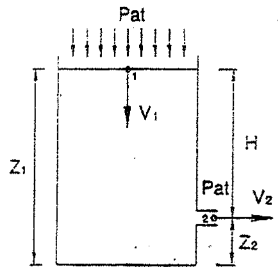
Coeficiente de descarga (C) $\quad C = \dfrac{Q_{real}}{Q_{ideal}}$

Coeficiente de velocidad (C_V) $\quad C_v = \dfrac{v_{real}}{v_{ideal}}$

Coeficiente de contracción: (C_C) $\quad C_C = \dfrac{A_{real}}{A_{ideal}}$

$\wedge \quad \boxed{C = C_V \cdot C_C}$

Teorema de Torricelli: $\quad \dfrac{v_1^2}{2g} + \dfrac{P_1}{\gamma} + z_1 = \dfrac{v_2^2}{2g} + \dfrac{P_2}{\gamma} + z_2$



Estanque grande

$P_1 = P_2 = P_{at}$

Ya que el estanque es grande: $\quad v_1 \to 0$

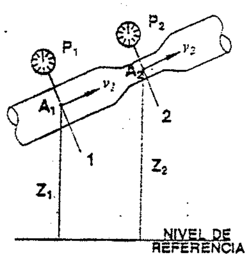
$\Rightarrow \quad \boxed{v_2 = \sqrt{2g(z_1 - z_2)} = \sqrt{2g \cdot H}} \quad (ideal)$

$\Rightarrow \quad \boxed{v_2 = C_V\sqrt{2g \cdot H}} \quad (real)$

$\boxed{Q_{ideal} = \sqrt{2g \cdot H} \cdot A_2}$

$\boxed{Q_{real} = \left(C_V\sqrt{2g \cdot H}\right)\left(C_C A_2\right) = C \cdot A_2\sqrt{2g \cdot H}}$

4.6. En dos secciones de una tubería, se indican las secciones A_1 y A_2, y con manómetros las presiones P_1 y P_2. Hallar el gasto.(Venturímetro).



Resolución:

Por la ecuación de Bernoulli:

$$\frac{v_1^2}{2g}+\frac{P_1}{\gamma}+z_1=\frac{v_2^2}{2g}+\frac{P_2}{\gamma}+z_2 \qquad ......(1)$$

Por continuidad: $A_1\cdot v_1=A_2\cdot v_2$

$$\Rightarrow \quad \frac{v_1^2}{2g}=\frac{1}{2g}\left(\frac{A_2}{A_1}v_2\right)^2$$

En (1):

$$\frac{v_2^2}{2g}\left(1-\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right)=\left(\frac{P_1}{\gamma}-\frac{P_2}{\gamma}\right)+(z_1-z_2)$$

Luego:

$$v_2=\sqrt{\frac{2g\cdot\left(\frac{P_1-P_2}{\gamma}+(z_1-z_2)\right)}{1-\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}}$$

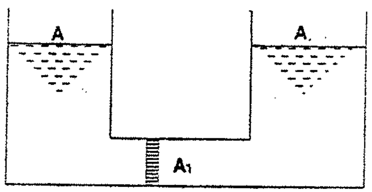
Como:

$Q_{real}=C\cdot Q_{ideal}$ Donde C = coeficiente de descarga.

Se obtiene:

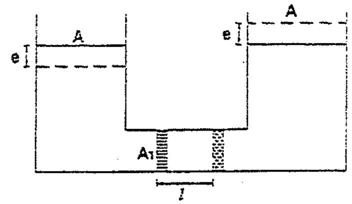
$$\boxed{Q=C\cdot A_2\sqrt{\frac{2g\cdot\left(\frac{P_1-P_2}{\gamma}+(z_1-z_2)\right)}{1-\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}}}$$ Re *sp.*

4.7. Dos depósitos idénticos están unidos por un tubo en el que puede moverse un émbolo, perfectamente ajustado, de sección A_1.
Hallar el trabajo necesario para desplazar el émbolo la longitud l.



Resolución:

Desplazando el émbolo la magnitud l, el nivel de la izquierda baja.



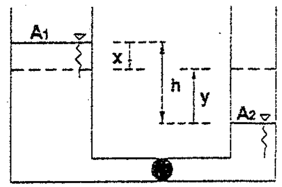
$$e=l\frac{A_1}{A}$$

Y el de la derecha se eleva la misma cantidad. El trabajo consiste, en definitivo, en elevar la cantidad de agua $(A_1.l)$ a la altura e; por lo tanto: $W=\gamma\cdot A_1\cdot l\cdot e$

$$\Rightarrow \boxed{W=\gamma\frac{A_1^2}{A}l^2}$$ Re *sp.*

4.8. Dos depósitos con distinto nivel de agua pueden ponerse en comunicación por medio de la llave ***H***. Calcular la energía que se gana al igualarse los dos niveles.

Resolución:



Al abrir la llave H; y dejar igualarse los dos niveles, la superficie de nivel A_1 bajará "x", la superficie A_2 subirá "y" hasta que ambas están a igual altura, de modo que:

$$A_1\cdot x=A_2\cdot y \quad , \quad x+y=h$$

De donde: $x=\dfrac{A_2\cdot h}{A_1+A_2}$ e $y=\dfrac{A_1\cdot h}{A_1+A_2}$

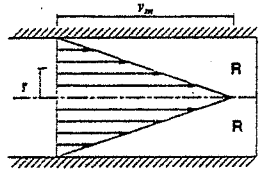
El peso de agua $\gamma\cdot A_1\cdot x$, baja "x" y pierde por lo tanto, la energía $\gamma\cdot A_1\cdot x^2$;

Del mismo modo, el peso $\gamma\cdot A_2\cdot y$ gana $\gamma\cdot A_2\cdot y^2$;

La ganancia total de energía es pues,

$$\boxed{\Delta E=-\gamma\cdot A_1\cdot x^2+\gamma\cdot A_2\cdot y^2=\gamma\cdot A_1\cdot A_2\cdot h^2\frac{A_1-A_2}{(A_1+A_2)^2}}$$ ....Re *sp.*

4.9. Hallar el coeficiente α de Coriolis para un flujo cuya variación de velocidades es:



$$\alpha=\frac{1}{A}\int_A\left(\frac{v_r}{v_m}\right)^3 dA$$

$$\alpha=\frac{\int v_r^3\cdot dA}{v_m^3}$$

Resolución:

Del gráfico la ley de variación, es una recta $v_r = v_0 - \dfrac{v_0 \cdot r}{R}$

$$\int v_r^3 \cdot dA = \int \left(v_0 - \frac{v_0 \cdot r}{R} \right)^3 2\pi \cdot r \cdot dr = \int \frac{v_0^3}{R^3}(R-r)^3 2\pi \cdot r \cdot dr$$

$$= \frac{2\pi \cdot v_0^3}{R^3} \int \left(R^3 - 3R^2 \cdot r + 3R \cdot r^2 - r^3 \right) \cdot r \cdot dr$$

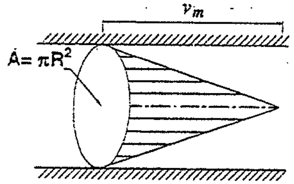
$$= \frac{2\pi \cdot v_0^3}{R^3} \int \left(R^3 \cdot r - 3R^2 \cdot r^2 + 3R \cdot r^3 - r^4 \right) \cdot dr$$

$$= \frac{2\pi \cdot v_0^3}{R^3} \left(\frac{R^3 \cdot r^2}{2} - R^2 \cdot r^3 + \frac{3R \cdot r^4}{4} - \frac{r^5}{5} \right)_0^R$$

$$= \frac{\pi \cdot v_0^3 \cdot R^2}{10} \quad \text{..(1)}$$

Se sabe que el caudal es el volumen formado por la ley de variación de velocidades.

En nuestro problema es un cono:



$$Q = v_m A \quad \text{.................(2)}$$

$$Q = \frac{1}{3} A \cdot v_0 \quad \text{.............(3)}$$

$$\therefore \quad v_m = \frac{v_0}{3}$$

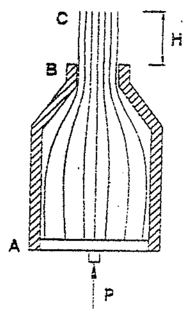
Entonces:

$$A \cdot v_m^3 = \pi \cdot R^2 \left(\frac{v_0}{3} \right)^3 = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot v_0^3}{27} \quad \text{.....(4)}$$

Reemplazando (1) y (4) en α

$$\alpha = \frac{\dfrac{\pi \cdot v_0^3 \cdot R^2}{10}}{\dfrac{\pi \cdot v_0^3 \cdot R^2}{27}} = \frac{27}{10} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha = 2.7}$$

4.10. Un pistón al cual se aplica una fuerza constante F, actúa sobre un tubo corto terminado en boquilla. El área del pistón es A_P y la del chorro A_C, si el coeficiente de velocidad de la boquilla es C_V.¿Hasta qué altura subirá el chorro? (*Densidad* = ρ)



Resolución:

Bernoulli entre A y B:

$$\frac{v_A^2}{2g} + \frac{P_A}{\gamma} + z_A = \frac{v_B^2}{2g} + \frac{P_B}{\gamma} + z_B + \frac{K \cdot v_B^2}{2g}$$

Continuidad:

$$v_A \cdot A_P = v_B \cdot A_B \quad \Rightarrow \quad pero: \quad A_B = A_C$$

$$v_A \cdot A_P = v_B \cdot A_C \quad \Rightarrow \quad v_A = v_B \frac{A_C}{A_P}$$

Reemplazando:

$$\frac{v_B^2}{2g}\left(\frac{A_C}{A_P} \right)^2 + \frac{P_A}{\gamma} = \frac{v_B^2}{2g} + \frac{P_B}{\gamma} + \frac{K \cdot v_B^2}{2g}$$

$$z_B - z_A \cong 0 \quad (\textit{tubo corto})$$

De aquí:

$$v_B^2 = \frac{2g \cdot P_A}{\gamma \left(1 + K - \left(\dfrac{A_C}{A_P} \right)^2 \right)} \quad \text{...}(\alpha)$$

Bernoulli entre B y C:

$$\Rightarrow \quad \frac{v_B^2}{2g} = H \quad \text{..}(\beta)$$

(α) en (β):

$$H = \frac{P_A}{\gamma \left(1 + K - \left(\dfrac{A_C}{A_P} \right)^2 \right)}$$

Pero:

$$K = \frac{1}{C_V^2} - 1$$

Entonces:

$$\boxed{H = \frac{F}{A_P \cdot \rho \cdot g \left(\dfrac{1}{C_V^2} - \left(\dfrac{A_C}{A_P} \right)^2 \right)}}$$

4.11. Un depósito de agua tiene un orificio en el fondo y es de nivel constante. El área del chorro que sale del tanque es inicialmente A_0 (para $y = 0$). Si el nivel del agua en el depósito es H_1, se pide el área A de la sección recta del chorro en función de y.

Resolución:

Por continuidad: $A_C \cdot v_C = A_0 \cdot v_0$

$$A_C = A_0 \cdot \frac{v_0}{v_C}$$

Bernoulli entre A y B:

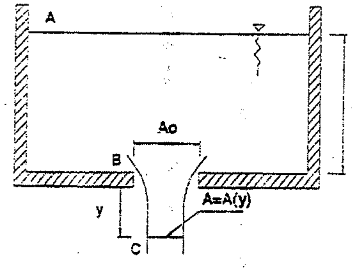
$$v_0 = \sqrt{2g\cdot H}$$

Bernoulli entre A y C:

$$v_C = \sqrt{2g\cdot(H+y)}$$

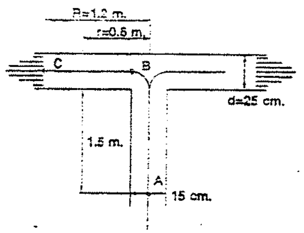
Luego:

$$\boxed{A_C = A_{(y)} = A_0\sqrt{\frac{H}{H+y}}}$$



4.12. El agua fluye verticalmente por la tubería de *15 cm.* de diámetro y entra en la región anular limitado por dos planos circulares como se muestra en la figura. Despreciando las pérdidas si la altura de presión en *A* es *- 0.30 m*. Determinar la altura de presión en *B* y el caudal.

Resolución:



Podemos establecer un Bernoulli entre el pto. *A* en la tubería y un pto. *C* en el borde circular de salida:

$$\frac{P_A}{\gamma}+\frac{v_A^2}{2g}=\frac{v_C^2}{2g}+1.5 \quad\Rightarrow\quad \frac{P_A}{\gamma}=-0.3$$

$$\frac{v_A^2-v_C^2}{2g}=0.3+1.5 \quad\text{..................(1)}$$

Por continuidad: $\quad v_A\cdot A_A = v_C\cdot A_C$ ....(2)

Siendo A_C el área total de salida, por el que el agua fluye radialmente, o sea:

$$A_C = 2\pi\cdot R\cdot d$$

En (2)

$$\frac{v_A\cdot\pi\cdot D^2}{4} = v_C\cdot 2\pi\cdot R\cdot d$$

$$v_A = \frac{8\cdot R\cdot d}{D^2}v_C$$

Reemplazando datos: $\quad v_A = 10.667\cdot v_C$

En (1): $\quad 5.75v_C^2 = 1.6$

$$v_C = 0.56\ {}^{m}/_{s}$$

O sea: $\quad Q = v_C\cdot A_C = 0.56\cdot 2\pi\cdot 1.2 = 0.025$

$$Q = 0.1066\ {}^{m^3}/_{s} \quad = \quad 106.6\ {}^{l}/_{s}$$

Ahora hacemos un Bernoulli entre B y C.

$$\frac{P_B}{\gamma}+\frac{v_B^2}{2g}=\frac{v_C^2}{2g} \quad\Rightarrow\quad \frac{P_B}{\gamma}=\frac{v_C^2-v_B^2}{2g} \quad\text{..................................(3)}$$

Pero:

$$v_C\cdot A_C = v_B\cdot A_B$$

$$v_C\cdot 2\pi\cdot R\cdot d = v_B\cdot 2\pi\cdot r\cdot d \quad\Rightarrow\quad v_C\cdot R = v_B\cdot r$$

$$v_B = \frac{v_C\cdot R}{r} = \frac{v_C\cdot 1.2}{0.6} = 2\cdot v_C = 1.12\ {}^{m}/_{s}$$

En (3)

$$\frac{P_B}{\gamma} = \frac{0.56^2-1.12^2}{19.6} = -0.048m \quad \textit{Resp}$$

4.13. Probar que en coordenadas cartesianas:

$$\frac{d\bar v}{dt}=\frac{\partial\bar v}{\partial t}+(\bar v\cdot\nabla)\bar v=\frac{\partial\bar v}{\partial t}+\frac{1}{2}\nabla|\bar v|^2+(\nabla\times\bar v)\times\bar v \quad\text{..................................}(A)$$

Resolución:

Prueba de: $\quad (\bar v\cdot\nabla)\bar v = \frac{1}{2}\nabla|\bar v|^2+(\nabla\times\bar v)\times\bar v = \frac{1}{2}\nabla|\bar v|^2-\bar v\times(\nabla\times\bar v)$

Ya que en la expresión (A), aparece el término $\frac{\partial v}{\partial t}$ en ambos miembros.

Mediante tensores (notación tensorial):

$$(\bar v\cdot\nabla)\,\bar v = v_j\frac{\partial}{\partial x_j}v_j \quad\text{.......................................}(\alpha)$$

$$\downarrow\ \downarrow\ \downarrow$$

$$j\quad j\quad j$$

Por otro lado:

$$\bar v\times(\nabla\times\bar v) = e_{nkm}e_{mjk}v_k\frac{\partial}{\partial x_j}v_k = e_{mnk}e_{mjk}v_k\frac{\partial}{\partial x_j}v_k$$

$$\downarrow\ \downarrow\ \downarrow$$

$$\underbrace{j\ \underbrace{j\ k}_{m}}_{n}$$

$$\Rightarrow\quad \bar v\times(\nabla\times\bar v) = (\delta_{kj}\delta_{kk}-\delta_{kk}\delta_{kj})v_k\frac{\partial}{\partial x_j}v_k$$

$$\Rightarrow\quad \bar v\times(\nabla\times\bar v) = \underbrace{\delta_{kj}\delta_{kk}v_k\frac{\partial}{\partial x_j}v_k}_{para\ n=j} - \underbrace{\delta_{kk}\delta_{kj}v_k\frac{\partial}{\partial x_j}v_k}_{\substack{para\ n=k\\ k=j}}$$

Luego se obtiene:

$$\bar v\times(\nabla\times\bar v) = v_k\frac{\partial}{\partial x_j}v_k - v_j\frac{\partial}{\partial j}v_j$$

$$\bar{v}\times(\nabla\times\bar{v})=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_j}(v_k v_k)-v_j\frac{\partial}{\partial j}v_j$$

$$\bar{v}\times(\nabla\times\bar{v})=\frac{1}{2}\nabla|\bar{v}|^2-v_j\frac{\partial}{\partial j}v_j$$

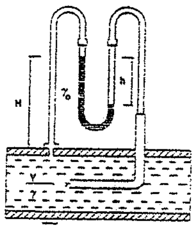
$$\wedge\quad v_j\frac{\partial}{\partial j}v_j=\frac{1}{2}\nabla|\bar{v}|^2-\bar{v}\times(\nabla\times\bar{v})\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\beta)$$

(β) en (α):

$$(\bar{v}\cdot\nabla)\bar{v}=\frac{1}{2}\nabla|\bar{v}|^2-\bar{v}\times(\nabla\times\bar{v})=\frac{1}{2}\nabla|\bar{v}|^2+(\nabla\times\bar{v})\times\bar{v}$$

$$\therefore\quad\boxed{\frac{\partial\bar{v}}{\partial t}+(\bar{v}\cdot\nabla)\bar{v}=\frac{\partial\bar{v}}{\partial t}+\frac{1}{2}\nabla|\bar{v}|^2+(\nabla\times\bar{v})\times\bar{v}}\ldots lqqp.$$

4.14. Hallar la velocidad de la corriente de agua en el tubo si la lectura del manómetro de mercurio unido al tubo de Pitot y a los orificios de presión estática es $h = 600\ mm$.



Resolución:

La ecuación de Bernoulli

Entre 1 y 2.

$$\frac{P_1}{\gamma}+\frac{v^2}{2g}=\frac{P_2}{\gamma}$$

De donde:

$$v=\sqrt{\frac{2g}{\gamma}(P_2-P_1)}\quad\ldots\ldots\ldots(1)$$

Ahora, suponiendo una altura H en la figura, se tendrá:

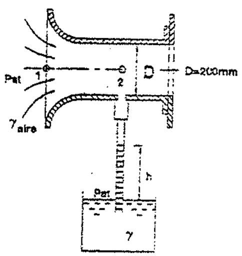
$$P_1-\gamma\cdot H+\gamma_0\cdot h+\gamma\cdot(H)-h=P_2$$

$$\Rightarrow\quad P_2-P_1=\gamma\cdot h\left(\frac{\gamma_0}{\gamma}-1\right)$$

En (1): $v=\sqrt{2g\cdot h\left(\frac{\gamma_0}{\gamma}-1\right)}$

Reemplazando valores: $\boxed{v=12.2\,m/s}$ Resp.

4.15. El ventilador centrífugo aspira aire de la atmósfera a través de una tobera. A la parte cilíndrica de la tobera va acoplado un tubo de cristal cuyo extremo inferior está sumergido en un recipiente con agua. El agua en el tubo se elevó hasta la altura $h=250\ mm$. Determinar la cantidad de aire que se aspira por segundo. ($\gamma_{aire} = 1.29\ kgf/m^3$).



Resolución:

Escribiendo la ecuación de Bernoulli para el aire en calma (a la entrada de la tobera) y para la sección a la que está acopiado el tubo vertical (vacuómetro)

Obtenemos:

$$\frac{P_1}{\gamma_{aire}}+\frac{v_1^2}{2g}=\frac{P_2}{\gamma_{aire}}+\frac{v_2^2}{2g}\quad\ldots\ldots\ldots(1)\quad,\quad\{v_1\to 0\quad\wedge\quad P_1=P_A\}\quad\ldots\ldots\ldots(2)$$

Además: $P_2=P_A-\gamma\cdot h$ ....(3)

(3) y (2) en (1): $\Rightarrow\quad v_2=\sqrt{2g\frac{\gamma}{\gamma_{aire}}h}$

Luego la cantidad de aire que se aspira por segundo es:

$$Q=\frac{\pi\cdot D^2}{4}\sqrt{2g\frac{\gamma}{\gamma_{aire}}h}$$

$$Q=\frac{\pi\cdot(0.2)^2}{4}\sqrt{2(9.8)\frac{1000}{1.29}(0.25)}=1.93\,m^3/s\quad\ldots\ldots\ldots\text{Resp.}$$

4.16. Dada la ecuación de Euler en su forma vectorial:

$$-\frac{1}{\rho}\nabla p-g\nabla z=(\bar{v}\cdot\nabla)\bar{v}$$

Donde ρ: densidad; p: presión; z: altitud; g: gravedad; $\bar{v}$: vector velocidad y utilizando la identidad vectorial:

$$\bar{v}\times(\nabla\bar{v})=\frac{1}{2}\nabla(\bar{v}\cdot\bar{v})-(\bar{v}\cdot\nabla)\bar{v}$$

Demostrar que integrando la expresión sobre un $d\bar{r}$ se puede concluir en un flujo que cumple con la ecuación de Bernoulli:

$$\int\frac{\partial p}{\rho}+g\cdot z+\frac{v^2}{2}=cte.$$

Demostración:

De la identidad vectorial se obtiene: $(\bar{v}\cdot\nabla)\bar{v}=\frac{1}{2}\nabla(\bar{v}\cdot\bar{v})-\bar{v}\times(\nabla\times\bar{v})$

Luego la ecuación de Euler queda: $-\frac{1}{\rho}\nabla p-g\nabla z=\frac{1}{2}\nabla(\bar{v}\cdot\bar{v})-\bar{v}\times(\nabla\times\bar{v})$

Multiplicando por un $d\bar{r}$: $-\frac{1}{\rho}\nabla p\cdot d\bar{r}-g\nabla z\cdot d\bar{r}=\frac{1}{2}\nabla(\bar{v}\cdot\bar{v})\cdot d\bar{r}-(\bar{v}\times(\nabla\times\bar{v}))\cdot d\bar{r}$

$$i\qquad i\qquad i\qquad i\qquad i\qquad i\qquad \underbrace{j\;\underbrace{i\;\;j}_{k}}_{j}\qquad i$$

Utilizando notación tensorial, en coordenadas cartesianas se tiene:

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i} p\, dx_i - g\,\frac{\partial}{\partial x_i} z\, dx_i = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(v_j\, v_j\right)dx_i - \left(e_{ijk}\,e_{kij}\; v_j\,\frac{\partial}{\partial x_i}\,v_j\right)dx_i$$

Luego:

$$-\frac{1}{\rho}\,dp - g\;dz = \frac{1}{2}\,d\left(\bar{v}\;\bar{v}\right) - e_{kij}\,e_{kij}\;v_j\,\frac{\partial}{\partial x_i}\,v_j\;dx_i$$

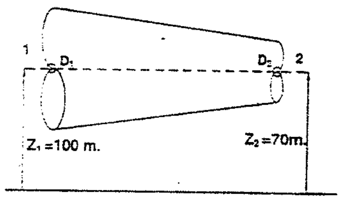
$$\Rightarrow\quad -\frac{1}{\rho}\,dp - g\;dz = \frac{1}{2}\,dv^2 - \left(\underset{i=j}{\delta_{ii}\;\delta_{jj}\;v_j\,\frac{\partial}{\partial x_i}\,v_j\;dx_i} - \underset{i=j}{\delta_{ij}\;\delta_{ji}\;v_j\,\frac{\partial}{\partial x_i}\,v_j\;dx_i}\right),$$

y los términos ubicados dentro del paréntesis se anulan. por lo tanto:

$$-\frac{1}{\rho}\,dp - g\;dz = \frac{1}{2}\,dv^2 \qquad\Rightarrow\qquad \frac{1}{\rho}\,dp + g\;dz + \frac{1}{2}\,dv^2 = 0$$

integrando se obtiene: $\boxed{\int \frac{1}{\rho}\,dp + g\;dz + \frac{1}{2}\,dv^2 = Cte}$ lqqd.

4.17. Por la tubería indicada en la figura circula agua, siendo la relación entre el diámetro en el punto *1* y el diámetro en el punto *2* igual a $\sqrt{2}$. En *1* la presión es de *0.5 kg/cm²* y la elevación *100 m*. En *2* la presión es *3.38 kg/cm²* y la elevación *70 m*. Calcular la velocidad en dichos puntos despreciándolas por rozamiento.



Resolución:

Por continuidad se tiene: $v_1 \cdot A_1 = v_2 \cdot A_2 \quad\Rightarrow\quad v_1 = \frac{A_2}{A_1}v_2 = \frac{d_2^2}{d_1^2}v_2$

Como: $\frac{d_2}{d_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ *(por dato)* $\Rightarrow\quad v_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ ....(1)

La ecuación de Bernoulli entre las secciones "1" y "2" es:

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\gamma} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\gamma} + z_2 \qquad \text{...............................(2)}$$

Reemplazando (1) en (2): $\frac{v_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\gamma} + z_1 = \frac{2v_1^2}{g} + \frac{P_2}{\gamma} + z_2$

Luego: $v_1 = \sqrt{\frac{2}{3}g\left(\left(\frac{P_1 - P_2}{\gamma}\right) + \left(z_1 - z_2\right)\right)}$

Como: $P_1 = 0.5\,{}^{kg}/_{cm^2} = 5000\,{}^{kg}/_{m^2}$

$P_2 = 3.38\,{}^{kg}/_{cm^2} = 33800\,{}^{kg}/_{m^2}$

$z_1 = 100m$

$z_2 = 70m$, $g = 9.8\,{}^{m}/_{s^2}$

$\gamma = 1000\,{}^{kg}/_{m^3}$,

Se obtiene: $\boxed{v_1 = 2.8\,{}^{m}/_{s}}$ Re*sp.*

Y en (1): $\boxed{v_2 = 5.6\,{}^{m}/_{s}}$ Re*sp.*

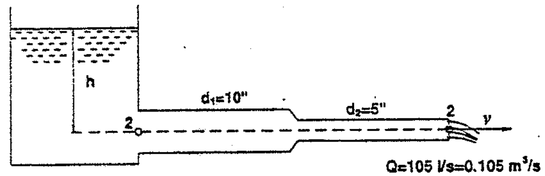
4.18. De un depósito sale una tubería de *10"* de diámetro, la que por medio de una reducción pasa a *5"* descargando luego libremente en la atmósfera. Si el gasto a la salida es *105 l/s*, calcular:

a) La presión en la sección inicial de la tubería.

b) Altura del agua en el depósito, medida sobre el eje de la tunería.

c) La potencia bruta del chorro.

Resolución:



El caudal es el mismo en todas las secciones, luego:

$$v_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{0.105}{\frac{\pi(10 * 0.0254)^2}{4}} = 2.08\,{}^{m}/_{s} \quad\wedge\quad v_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{0.105}{\frac{\pi(5 \cdot 0.0254)^2}{4}} = 8.32\,{}^{m}/_{s}$$

a) Aplicación del teorema de Bernoulli entre los puntos 1 y 2:

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2$$

$z_1 = z_2 = 0$,

Y si trabajamos con presiones manométricas, $\frac{P_2}{\gamma} = 0$

Luego: $\frac{P_1}{\gamma}+\frac{v_1^2}{2g}=\frac{v_2^2}{2g} \quad \Rightarrow \quad P_1=\frac{\gamma}{2g}\left(v_2^2-v_1^2\right)$

Como conocemos las velocidades: $P_1=\frac{1000\,kg/m^3}{2\cdot 9.8\,m/s^2}\left((8.32)^2-(2.08)^2\right)m^2/s^2$

Finalmente: $P_1 = 0.33\,kg/cm^2 \quad = \quad 1.363\,kg/cm^2$

(*manométrica*) (*absoluta*)

b) Por Torricelli: $v_2=\sqrt{2g\cdot h}$

De donde: $h=\frac{v_2^2}{2g}=\frac{(8.32)^2}{2*9.8}=3.54m \quad (Resp.)$

c) La potencia del chorro es:

$$P=\gamma\cdot Q\cdot H \quad ,donde \quad H=\frac{P_2}{\gamma}+\frac{v_2^2}{2g}+z_2=3.54m$$

$$pero: \; P_2=0 \;\wedge\; z_2=0 \;\Rightarrow\; H=3.54m$$

$$\wedge \; \gamma=1000\,kg/m^3 \; , \; Q=0.105\,m^3/s$$

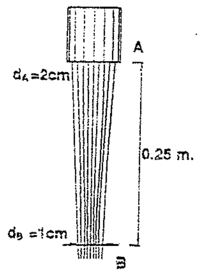
$$\Rightarrow \boxed{P=371.70\,\tfrac{kg-m}{s}=4.89HP} \quad .....Resp.$$

$$\left(1HP=76\,\tfrac{kg-m}{s}\right)$$

4.19. Una vena líquida es descargada verticalmente hacia abajo por un tubo de *2 cm* de diámetro. A *0.25 m* por debajo de la boca de descarga el diámetro de la vena se ha reducido a *1 cm*.

a) Calcular el gasto descargado por el tubo.

b) Si el tubo descargara verticalmente hacia arriba un gasto *5* veces mayor, ¿Cuál sería el diámetro de la vena a una altura de *0.25 m* sobre la boca de descarga?



Resolución:

a) Aplicando la ecuación de Bernoulli entre los puntos A y B:

$$\frac{P_A}{\gamma}+\frac{v_A^2}{2g}+z_A=\frac{P_B}{\gamma}+\frac{v_B^2}{2g}+z_B$$

$$z_B=0 \quad , \quad z_A=0.25m \quad \wedge \quad \frac{P_A}{\gamma}=\frac{P_B}{\gamma}=\frac{P_{atm}}{\gamma}$$

$$\Rightarrow \frac{v_A^2}{2g}+z_A=\frac{v_B^2}{2g} \quad ....(1)$$

Por continuidad:

$$v_A\cdot A_A=v_B\cdot A_B \quad \Rightarrow \quad v_B=v_A\left(\frac{d_A}{d_B}\right)^2$$

Como: $d_A=2cm \;\wedge\; d_B=1cm \;\Rightarrow\; v_B=4v_A$ .....(2)

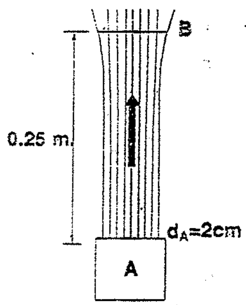
(2) en (1): $\frac{v_A^2}{2g}+z_A=\frac{16v_A^2}{2g}$

y: $v_A=\sqrt{\frac{2g}{15}z_A}$

$$\Rightarrow \quad Q=v_A\cdot A_A=\frac{\pi}{4}d_A^2\sqrt{\frac{2g}{15}z_A}$$

Reemplazando valores: $\boxed{Q=\frac{\pi(2)^2}{4}\sqrt{\frac{2}{15}*980*25}=180\,cm^3/s}$ ....Resp.

b) Planteando la ecuación de Bernoulli entre A y B, se tiene:



$$\frac{v_A^2}{2g}=\frac{v_B^2}{2g}+z_B \quad ....(3)$$

Como el caudal ha sido incrementado en 5 veces por continuidad se obtiene:

$$v_A=\frac{5Q}{A_A}=\frac{5*180}{\frac{\pi(2)^2}{4}}=286\,cm/s \quad ....(4)$$

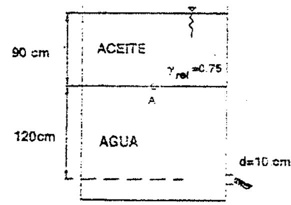
Y: $v_B=\frac{5Q}{A_B}=\frac{5*180}{\frac{\pi\cdot d_B^2}{4}}=\frac{1146}{d_B^2}$ ....(5)

(5) y (4) en (3):

$$\frac{(286)^2}{2(980)}=\frac{\left(\frac{1146}{d_B^2}\right)^2}{2(980)}+25$$

De donde: $\boxed{d_B=2.5cm}$

4.20. Calcular el caudal desaguado en la figura. No considerar pérdidas de carga.



Resolución:

Supongamos que la presión ejercida por el aceite sobre el nivel A, es reemplazada por cierta cantidad de agua, es decir:

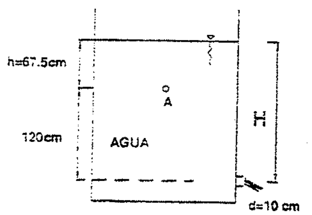
Presión del aceite sobre A = presión del agua sobre A

Ó $\quad \gamma_{aceite} \cdot h_{aceite} = \gamma \cdot h$

$$h = \frac{\gamma_{aceite}}{\gamma} \cdot h_{aceite} = (0.75)(90cm)$$

$h = 67.5cm$ *(altura del agua que reemplaza al aceite)*

Por Torricelli ó aplicando el teorema de Bernoulli entre 1 y 2 se tiene:



$v_2 = \sqrt{2g \cdot H}$, $H = 1.20 + 0.675 = 1.875m$

y el caudal saliente será:

$$Q = \frac{\pi \cdot d^2}{4}\sqrt{2g \cdot H}$$

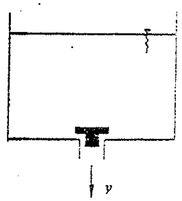
Reemplazando valores:

$$Q = \frac{\pi \cdot (0.1)^2}{4}\sqrt{2(9.8)(1.875)}$$

$$\Rightarrow \boxed{Q = 47.6 \, l/s}$$

4.21. El líquido que sale de un depósito a través de una válvula tiende a cerrarla. Exponer la explicación de este fenómeno.

Resolución:

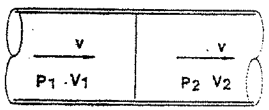


Siendo constante la energía del líquido circulante (prescindiendo del rozamiento), tenemos:

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z = constante;$$

La velocidad v bajo la válvula aumenta rápidamente y, por lo tanto, la presión p del líquido disminuye, con lo cual la presión superior tiende a cerrar la válvula.

4.22. En un tubo se mueve un tabique, en cuyas caras hay líquido de la misma naturaleza pero de distintos volúmenes, V_1 y V_2; y a distintas presiones, p_1 y p_2, que se mueve también con el tabique. Si se retira súbitamente el tabique:



a) ¿Cuál será la nueva velocidad?

b) ¿Cuál será la nueva presión?

Resolución:

a) Llenando líquido ambos lados del tabique y siendo incompresible, no puede haber variación de movimiento y, por lo tanto, de energías cinéticas.

La velocidad no varía. Resp.

b) Sabemos que la ecuación de Bernoulli está expresado en energía por unidad de peso, por lo tanto, la energía de presión total a un lado del tabique es:

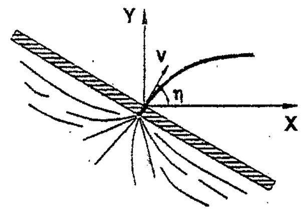
$$\frac{p_1}{\gamma}W = \frac{p_1}{\gamma}V_1 \cdot \gamma = p_1 \cdot V_1 \quad ;$$

Del mismo modo sucederá en la otra cara: $p_2 \cdot V_2$. si p es la presión cuando se retira el tabique, la energía de presión total final será: $p \cdot (V_1 + V_2)$

Como la energía no se pierde: $p_1 \cdot V_1 + p_2 \cdot V_2 = p \cdot (V_1 + V_2)$

Entonces queda: $\boxed{p = \frac{p_1 \cdot V_1 + p_2 \cdot V_2}{V_1 + V_2}}$ Re *sp.*

4.23. Calcular la ecuación de la trayectoria de la vena líquida,



Resolución:

$$\frac{dx}{dt} = v_x = v \cdot \cos\theta \qquad \text{.....................(1)}$$

$$\frac{dy}{dt} = v_y = v \cdot sen\theta - g \cdot t \qquad \text{.....................(2)}$$

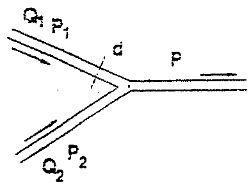
En (1): $x = v \cdot \cos\theta \cdot t \quad \Rightarrow \quad t = \dfrac{x}{v \cdot \cos\theta}$

Como: $y = v \cdot sen\theta \cdot t - \dfrac{1}{2}g \cdot t^2$

Re*emplazando* "t": $y = \dfrac{v \cdot x \cdot sen\theta}{v \cdot \cos\theta} - \dfrac{1}{2}\dfrac{g \cdot x^2}{v^2 \cdot \cos^2\theta}$

$$\Rightarrow \boxed{y = x \cdot \tan\theta - \frac{g}{2v^2 \cdot \cos^2\theta} \cdot x^2} \quad ...\text{Re } sp.$$

4.24. En un plano horizontal, dos tuberías desembocan en una tercera de igual diámetro d. Conocidos los gastos Q_1 y Q_2, y las presiones p_1 y p_2; determinar la presión p en el tubo de salida. No se tendrán en cuenta las resistencias.



Resolución:

Cada kilogramo de agua en los tubos de llegada posee la energía:

$$E_1 = \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 \qquad \Rightarrow \qquad E_2 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2$$

Respectivamente.

En el tubo de salida: $E = \dfrac{v^2}{2g} + \dfrac{p}{\gamma} + z$

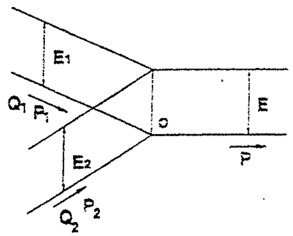
Como: $z_1 = z_2 = z = 0$

Y: $E_1 = E_2 = E$

Por no haber pérdidas de energía

$$\Rightarrow \quad E_1 + E_2 = 2E$$

$$ó \quad \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} = 2\left(\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\gamma}\right)$$



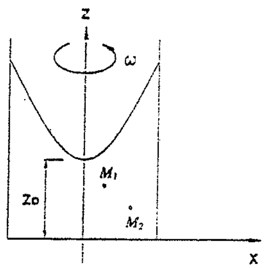
Y observando que:

$$Q_1 = \frac{\pi \cdot d^2}{4} v_1 \quad , \quad Q_2 = \frac{\pi \cdot d^2}{4} v_2 \quad , \quad Q_1 + Q_2 = Q = \frac{\pi \cdot d^2}{4} v$$

Queda:

$$\boxed{p = \frac{p_1 + p_2}{2} - \frac{4\gamma}{g \cdot \pi^2 \cdot d^4}\left(Q_1^2 + 4Q_1 \cdot Q_2 + Q_2^2\right)} \quad \text{....... Re } sp.$$

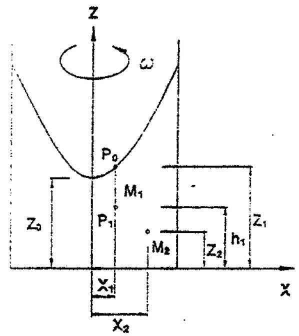
4.25. Un líquido pesado gira con velocidad angular constante ω alrededor de un eje vertical. M_1 y M_2 son dos partículas de igual masa. Hallar su diferencia de energía. $M_1(x_1,z_1)$, $M_2(x_2,z_2)$.



Resolución:

$$p_1 = p_0 + \gamma(z_1 - h_1) \qquad ; \qquad v_1 = x_1 \cdot \omega$$

Se sabe que la ecuación de la superficie es:



$$x^2 = \frac{2g}{\omega^2}(z - z_0)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{v_1^2}{2g} = z - z_0$$

Por lo tanto la energía en M_1:

$$E_1 = \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} + h_1$$

$$E_1 = \frac{1}{\gamma}\left(p_0 + \gamma(z_1 - h_1)\right) + (z_1 - z_0) + h_1$$

$$\Rightarrow \quad E_1 = \frac{p_0}{\gamma} + 2z_1 + z_0$$

Análogamente, la energía en M_2: $\quad E_2 = \dfrac{p_0}{\gamma} + 2z_2 + z_0$

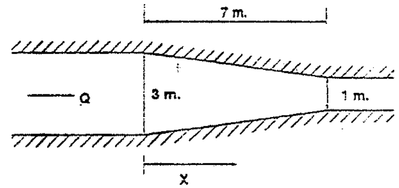
Y la diferencia de energía: $\quad \boxed{E_2 - E_1 = 2(z_2 - z_1)}$ .... Re sp.

4.26. En el canal bidimensional convergente y con flujo estacionario:

a) Hallar la aceleración del fluido para cualquier distancia x, si el caudal Q es constante

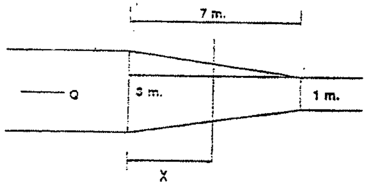
b) Calcular dicha aceleración para $x = 2\ m$ si el caudal es de $10\ m^3/s$ por unidad de profundidad.

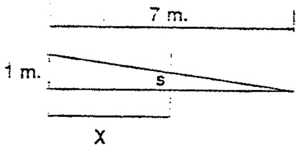
c) Suponga que el caudal no es estacionario y se incrementa en $2\ m^3/s$ en cada segundo, ¿Cuál será la nueva aceleración en el mismo punto $x = 2\ m$?



Resolución:

Ya que el flujo no varía con la profundidad, los cálculos se realizarán por unidad de profundidad.





Por semejanza de triángulos: $s = \dfrac{7-x}{7}$

Entonces el área de la sección transversal a una distancia x, será:

$$A_{(x)} = 1 + 2\left(\frac{7-x}{7}\right) = \frac{21-2x}{7}$$

Por continuidad: $Q = v_{(x)} \cdot A_{(x)}$

Y la velocidad en x será: $v_{(x)} = \dfrac{Q}{\left(\dfrac{21-2x}{7}\right)}$

a) Aceleración para cualquier distancia x:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \quad a = v\frac{dv}{dx}$$

Luego:

$$a = \frac{Q}{\left(\dfrac{21-2x}{7}\right)} \cdot \frac{-Q\left(-\dfrac{2}{7}\right)}{\left(\dfrac{21-2x}{7}\right)^2} = \frac{2Q^2}{7\left(\dfrac{21-2x}{7}\right)^3}$$

Y: $\boxed{a = \dfrac{98Q^2}{(21-2x)^3}}$ ....Resp.

b) Si: $Q = 10m^3/s/m$

Y: $x = 2\ m$

Se obtiene: $\boxed{a = 2\,m/s^2}$ ....Resp

c) Si: $Q = 10 + 2t$

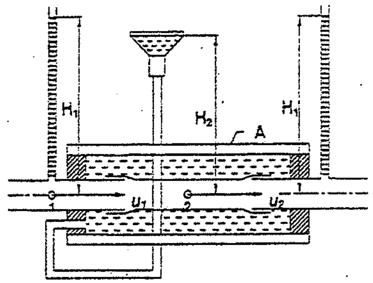
Y como para x = 2m el área es: $A_{(2)} = \dfrac{17}{7}$ metro/metro de profundidad

Entonces: $v = \dfrac{Q}{A} = \dfrac{10+2t}{\dfrac{17}{7}} = \dfrac{7}{17}(10+2t)$

Entonces la aceleración para dicha sección es: $\boxed{a = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{14}{17}\,m/s^2}$ ....Resp.

4.27. Un tubo metálico de diámetro d_1, por el cual fluye agua, está colocado en el interior de un cilindro de cristal A donde una parte del tubo está sustituido por otro B de goma con paredes delgadas del mismo d_1. El cilindro de cristal está cerrado

apretadamente con tapones y lleno de agua cuya presión se puede variar elevando o bajando el embudo con agua en C.



a) ¿Qué ocurrirá con el diámetro del tubo de goma en caso de equilibrio?.

b) ¿Qué ocurrirá con el tubo de goma, si variamos la altura del embudo? Despreciar la elasticidad de la goma.

Resolución:

Bernoulli entre 1 y 2: $\dfrac{p_1}{\gamma} + \dfrac{u_1^2}{2g} = \dfrac{p_2}{\gamma} + \dfrac{u_2^2}{2g}$

$$\Rightarrow \quad H_1 + \frac{u_1^2 - u_2^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} \quad \text{..............................(1)}$$

$$Q_1 = u_1 \cdot A_1 = u_1\frac{\pi \cdot d_1^2}{4} \quad \Rightarrow \quad u_1^2 = \frac{16Q^2}{\pi^2 \cdot d_1^4}$$

$$\text{análogamente}: \quad u_2^2 = \frac{16Q^2}{\pi^2 \cdot d_2^4} \quad \text{....................(2)}$$

a) Para que haya equilibrio: $p_2 = H_2 \cdot \gamma$ ....(3)

(3) y (2) en (1):

$$H + \frac{16Q^2}{\pi^2 \cdot 2g}\left(\frac{1}{d_1^4} - \frac{1}{d_2^4}\right) = H_2$$

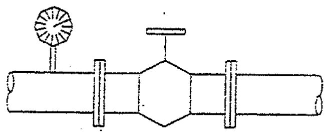
$$\frac{1}{d_1^4} - \frac{2g \cdot \pi^2}{16Q^2}(H_2 - H_1) = \frac{1}{d_2^4}$$

$$\Rightarrow \boxed{d_2 = \frac{d_1}{\sqrt[4]{1 + \dfrac{2g \cdot \pi^2 \cdot d_1^4}{16Q^2}(H_1 - H_2)}}}$$

b) En la ecuación (4) podemos observar que:

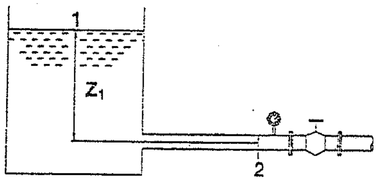
- Cuando $H_2 < H_1$, el tubo de goma se comprime $(d_2 < d_1)$
- Cuando $H_2 > H_1$, el tubo se ensancha $(d_2 > d_1)$
- Cuando $H_2 = H_1$, $d_1 = d_2$

4.28. En una tubería de diámetro $D = 50\ mm$ se ha colocado delante de la válvula un manómetro. Estando cerrada la válvula, el manómetro indica una presión de $6\ atm$. Cuando la válvula está abierta la lectura disminuye hasta $2\ atm$. Determinar el gasto del agua en la tubería.



Resolución:

Suponiendo que el agua proviene de un gran depósito, entonces la primera lectura me indica la altura de la superficie libre del agua en dicho depósito, es decir:



Primera lectura del manómetro $= \gamma . z_1$

ó $\quad 6\ atm. = \gamma . z_1$, entonces: $\quad z_1 = \dfrac{6atm}{\gamma}$

Aplicando Bernoulli entre las secciones 1 y 2, se tiene:

$$z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} \quad \Rightarrow \quad v_2 = \sqrt{\left(z_1 - \frac{p_2}{\gamma}\right) 2g}$$

$$ó \quad v_2 = \sqrt{2g\left(\frac{6\,atm}{\gamma} - \frac{2\,atm}{\gamma}\right)} = \sqrt{2g\left(\frac{4\,atm}{\gamma}\right)}$$

El gasto es:

$$Q_2 = v_2 \cdot A_2 = \sqrt{2g\left(\frac{4atm}{\gamma}\right)} \cdot \frac{\pi (0.050)^2}{4}$$

$$1atm = 10330\,{}^{kg}/_{m^2} \quad , \quad \gamma = 1000\,{}^{kg}/_{m^3} \quad \Rightarrow \quad Q_2 = 0.05588\,{}^{m^3}/_{s}$$

$$ó \quad \boxed{Q_2 = 55.9\,{}^{l}/_{s}}$$

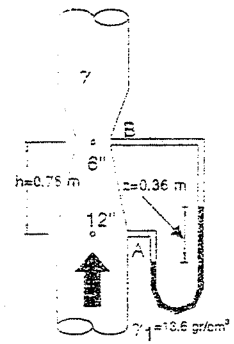
4.29. La deflexión del mercurio en el piezómetro diferencial conectado al medidor de Venturi, es de $0.36\ m$ determinar el gasto que pasa por el medidor suponiendo despreciable la pérdida de energía entre A y B. Ver figura:

Resolución:

Aplicación de Bernoulli entre A y B: $\quad \dfrac{v_A^2}{2g} + \dfrac{P_A}{\gamma} + z_A = \dfrac{v_B^2}{2g} + \dfrac{P_B}{\gamma} + z_B$

$T = P \cdot$

De donde:



$$\frac{P_A - P_B}{\gamma} = \frac{v_B^2 - v_A^2}{2g} + z_B - z_A \quad ....(1)$$

Para estos tipos de piezómetros, la diferencia de presiones es:

$$P_A - P_B = \gamma_1 \cdot z - \gamma \cdot (h + z)$$

$$P_A - P_B = 13.6(36) - (76 + 36) = 377.67\,cm^2$$

$$\frac{P_A - P_B}{\gamma} = 3.78m\ de\ agua \quad ....(2)$$

Por continuidad:

$$v_A = \frac{Q}{A_A} = \frac{Q}{0.0730} \quad ....(3)$$

$$v_B = \frac{Q}{A_B} = \frac{Q}{0.0182} \quad ....(4)$$

Además: $\quad z_B - z_A = h = 0.76m \quad ....(5)$

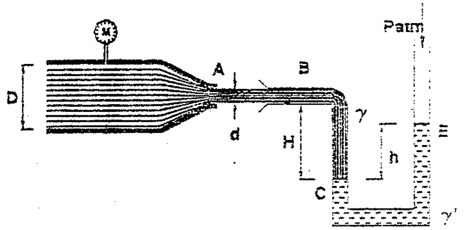
Reemplazando los valores (2), (3), (4) y (5) en (1):

$$3.78 = \frac{Q^2}{2g}\left(\frac{1}{0.0182^2} - \frac{1}{0.0730^2}\right) + 0.76$$

$$3.78 * 18.6 = Q^2 (2831.31) + 0.76$$

$$\therefore \boxed{Q = 0.161\,{}^{m^3}/_{s} = 161\,{}^{l}/_{s}}$$

4.30. En el sistema mostrado en la figura, calcular la presión en el manómetro M.



Resolución:

Presión en B: $\quad P_B = P_{atm} + \gamma'(h) - \gamma \cdot H \quad ....(1)$

Manométrica: $\quad P_B = \gamma'(h) - \gamma \cdot H \quad ....(1')$

$$\frac{P_1}{\rho_1 \cdot g} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 + h_{bomba} = \frac{P_2}{\rho_2 \cdot g} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2 + h_{turbina} + h_L$$

Bernoulli entre (M) y (A)

$$\frac{P_M}{\gamma}+\frac{v_M^2}{2g}+0=0+\frac{v_A^2}{2g}+0 \quad \text{..(2)}$$

Continuidad: $A_M\cdot v_M = A_A\cdot v_A$

$$v_M=\frac{A_A}{A_M}v_A \quad \text{..(3)}$$

(3) en (2): $$\frac{P_M}{\gamma}=\frac{v_A^2}{2g}\left(1-\frac{A_A^2}{A_M^2}\right) \quad \text{..(4)}$$

Bernoulli entre A y B

$$0+\frac{v_A^2}{2g}+0=0+0+\frac{P_B}{\gamma} \quad \text{..(5)}$$

De (5) y (1'): $$\frac{v_A^2}{2g}=\frac{1}{\gamma}(\gamma'\cdot h-\gamma\cdot H) \quad \text{..(6)}$$

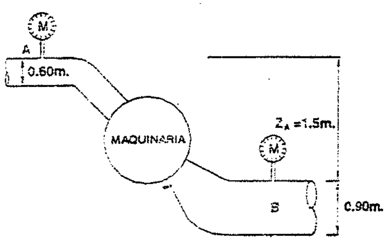
(6) en (4) $$\boxed{P_M=(\gamma'\cdot h-\gamma\cdot H)\left(1-\frac{A_A^2}{A_M^2}\right)}$$

4.31. El conducto de entrada a una máquina hidráulica tiene un diámetro de *0.60 m*. El conducto de salida es de *0.90 m* de diámetro. Se ha medido las presiones en los conductos de entrada y salida obteniéndose *1.4 kg/cm²* y *0.35 kg/cm²*, respectivamente. El manómetro de entrada se encuentra *1.5 m* por arriba del de salida. Si se conoce que el gasto que circula en la máquina hidráulica es *0.44 m³/s*. ¿Cuál será la potencia suministrada a la misma?

1,4 Kg / 1000

Resolución:

La potencia de entrada es: $Pot_A=\gamma\cdot Q\cdot B_A$



Donde: $B_A=\frac{v_A^2}{2g}+\frac{P_A}{\gamma}+z_A$

Siendo:

$$v_A=\frac{Q}{A_A}=\frac{0.44}{\frac{\pi(0.6)^2}{4}}=1.55\,m/s$$

Luego:

$$Pot_A=1000*0.44\left(\frac{1.55^2}{19.6}+14+1.5\right)$$

$$Pot_A=6874\ Kg\text{-}m/s$$

La potencia de salida es: $Pot_B=\gamma\cdot Q\cdot B_B$

Donde: $$B_B=\frac{v_B^2}{2g}+\frac{P_B}{\gamma}+z$$

Siendo: $$v_B=\frac{Q}{A_B}=\frac{0.44}{\frac{\pi(0.9)^2}{4}}=0.69\,m/s$$

Entonces: $$Pot_B=1000*0.44\left(\frac{0.69^2}{19.6}+3.5+0\right)$$

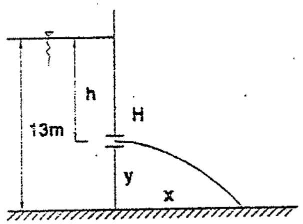
$$Pot_B=1500\ Kg\text{-}m/s$$

La potencia de la máquina será: = Pot. entrada - Pot. salida

$$Pot.\,máq.=Pot._A-Pot._B=6874-1550=5324\ Kg\text{-}m/s$$

En H.P.: $Pot.\,máq.=\frac{5324}{76}$, entonces: $\boxed{Pot.\ máq.=70\ H.P.}$

4.32. Se tiene un recipiente de paredes verticales lleno de agua hasta una altura de *13 m* Se pregunta: ¿Cuál será la posición de un orificio cuyo chorro encuentre el suelo a una distancia máxima?. ¿A qué altura habrá que colocar otros dos orificios, de características similares al primero, para que sus chorros corten al suelo en un punto situado *1 m* más atrás del punto donde lo hace el chorro del primer orificio?



Resolución:

La ecuación de la trayectoria es: $y=\frac{g\cdot x^2}{2v^2}$

Despejando: $x=v\sqrt{\frac{2y}{g}}$

$$x=\sqrt{2g\cdot h}\cdot\sqrt{\frac{2y}{g}}=2\sqrt{h\cdot y}$$

Pero: h = 13 - y

Luego: $x=2\sqrt{13y-y^2}$ ....(1)

Para que "x" sea máxima, derivo la ecuación (1) e igualo a cero:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{13-2y}{\sqrt{13y-y^2}}=0$$

$$13-2y=0\quad;\quad y=\frac{13}{2}=6.5m$$

$$\boxed{y=6.50m}$$

Reemplazando este valor en (1) obtenemos la máxima distancia horizontal:

$$x=\sqrt{13*6.5-6.5*6.5}=13m$$

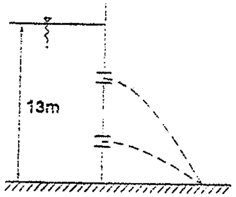
Cálculo de los otros dos orificios:

Según el enunciado: $x = 13 - 1 = 12m$

Reemplazando este valor en (1): $12 = 2\sqrt{13y - y^2}$

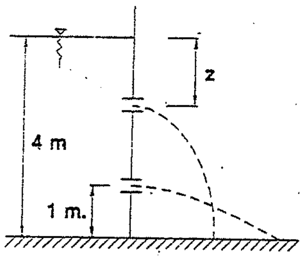
Resulta: $y^2 - 13y + 36 = 0$

De donde: $\boxed{\begin{array}{c} y' = 9m \\ y'' = 4m \end{array}}$



4.33. En la pared vertical de un reservorio de *4 m* de altura de agua, se han abierto dos orificios. El primero de ellos a *1 m* del nivel del suelo y el segundo a una distancia *z* del nivel superficial del agua. Calcular el valor de *z* sabiendo que el alcance horizontal, al nivel del suelo, del primer orificio es el doble que el del segundo. La relación de coeficientes de velocidad de ambos orificios es: $\frac{C_{V1}}{C_{V2}} = 1.04$

Resolución:



De la ecuación de la trayectoria, obtenemos la velocidad real de salida:

$$v_r = \sqrt{\frac{g \cdot x^2}{2y}}$$

Luego se tiene:

$$v_{r1} = \sqrt{\frac{g(2x)^2}{2(1)}} = \sqrt{2g \cdot x}$$

$$v_{r2} = \sqrt{\frac{g \cdot x^2}{2(4-z)}}$$

Las velocidades teóricas en el primer y segundo orificio son:

$$v_{t1} = \sqrt{2g(4-1)} = \sqrt{6g} \quad ; \quad v_{t2} = \sqrt{2g \cdot z}$$

Los coeficientes de velocidad serán:

$$C_{V1} = \left(\frac{x^2}{3}\right)^{1/2} \quad ....(1) \qquad C_{V2} = \left(\frac{x^2}{4z(4-z)}\right)^{1/2} \quad ....(2), \qquad C_V = \frac{v_{REAL}}{v_{TEÓRICA}}$$

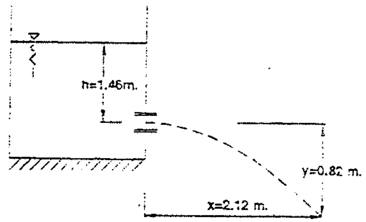
Por dato del problema: $\frac{C_{V1}}{C_{V2}} = 1.04$

Entonces: (1) y (2) en (3) $\frac{4z(4-z)}{3} = 1.04$

Ó: $4z^2 - 16z + 3.24 = 0$

Y se obtiene: $\boxed{\begin{array}{c} z' = 3.785m \\ z'' = 0.215m \end{array}}$

4.34. Con los datos de la figura, calcular el coeficiente de contracción, el de velocidad y el de gasto, sabiendo además que el diámetro del orificio es *0.05 m* y el de la vena contraída *0.0396 m*. ¿Cuál es la velocidad del chorro en la salida y el gasto?



Resolución:

Las áreas son proporcionales a los cuadrados de sus diámetros:

$$C_C = \frac{A_{CONTRAÍDA}}{A_{ORIFICIO}} = \frac{(0.0396)^2}{(0.05)^2} = \frac{0.001568}{0.0025}$$

$$\boxed{C_C = 0.627}$$

De la ecuación de la trayectoria obtenemos la velocidad real de salida.

$$v_{REAL} = \sqrt{\frac{g \cdot x^2}{2y}} = \sqrt{\frac{9.8(2.12)^2}{2(0.82)}} = 5.18 \, m/s$$

La velocidad teórica es: $v_{TEÓRICA} = \sqrt{2g \cdot h} = \sqrt{19.6(1.46)} = 5.35 \, m/s$

Entonces: $C_V = \frac{v_{REAL}}{v_{TEÓRICA}} = \frac{5.18}{5.35}$

$$\boxed{C_V = 0.97}$$

El coeficiente de gasto será: $C = C_V \cdot C_C = 0.97(0.627)$

$$\boxed{C = 0.608}$$

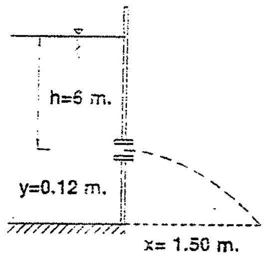
El gasto: $Q = C \cdot A\sqrt{2g \cdot h}$

$$Q = 0.609 \frac{\pi(0.05)^2}{4}\sqrt{19.6(1.46)} = 0.00638 \, m^3/s \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q = 6.38 \, l/s}$$

4.35. El chorro que sale por un orificio de $1/2''$ de diámetro, situado en una pared vertical, pasa por un punto a $1.50\ m$ en distancia horizontal y a $0.12\ m$ en vertical del centro de la sección contraída. El gasto es $0.8\ l/s$.

Calcular los coeficientes de gastos, velocidad y contracción, si la carga de agua sobre el centro del orificio es $6\ m$.

Resolución:



De la ecuación de la trayectoria, tenemos que la velocidad real de salida es:

$$v_{REAL} = \sqrt{\frac{g \cdot x^2}{2y}} = \sqrt{\frac{9.8(1.50)^2}{2(0.12)}} = 9.6\ m/s$$

La velocidad teórica es:

$$v_{TEÓRICA} = \sqrt{2g \cdot h} = \sqrt{2(9.8)6}$$

$$v_{TEÓRICA} = 10.84\ m/s$$

El coeficiente de velocidad será:

$$C_V = \frac{v_{REAL}}{v_{TEÓRICA}} = \frac{9.6}{10.84} = 0.885$$

El gasto teórico es: $Q = \sqrt{2g \cdot h} \cdot a = \sqrt{19.6 * 6}\left(\frac{\pi(0.5 * 0.0254)^2}{4}\right)$

$$Q_{TEÓRICO} = 10.84(0.00012667) = 1.38 * 10^{-3}\ m^3/s = 1.38\ l/s$$

El coeficiente de gasto será: $C_V = \frac{Q_{REAL}}{Q_{TEÓRICO}} = \frac{0.8}{1.38}$

$$\boxed{C = 0.58}$$

Se sabe que: $C = C_V \cdot C_C$

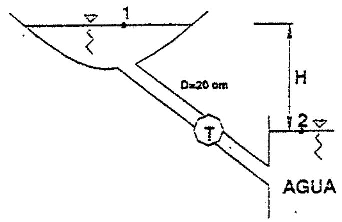
Despejando: $C_C = \frac{C}{C_V} = \frac{0.58}{0.885} = 0.655$

$$\boxed{C_c = 0.655}$$

4.36. Las pérdidas de agua a través del sistema mostrado son $\frac{4v^2}{2g}$, excluída la turbina, si el rendimiento de la turbina es de $n = 90\ \%$.

Determinar el caudal para producir $1000\ C.V.$ si $H = 100\ m$.

Resolución:



Bernoulli entre las superficies:

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 - h_l - H_T = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2$$

$$(z_1 - z_2) - h_l = H_T$$

$$H - \frac{4V^2}{2g} = H_T \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\alpha)$$

Por otro lado: $Pot = \frac{n \cdot \gamma \cdot Q \cdot H_T}{75} = 1000\ CV$

Con n = 0.9

γ = 1000 $\Rightarrow H_T = \frac{83.33}{Q} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\beta)$

(α) = (β) $\frac{83.33}{Q} = 100 - \frac{2Q^2}{g \cdot A^2} = 100 - 2.89Q^2$

$$83.33 = 100Q - 2.89Q^3$$

Por aproximaciones sucesivas: $\boxed{Q = 0.851\ m^3/s}$

4.37. Un orificio con embocadura de $2.5\ cm$ de diámetro, se le añade una tubería del mismo diámetro, desaguando bajo una carga fija de $3.3\ m$. Si el coeficiente de contracción en la garganta es 0.61 y el coeficiente de velocidad es a lo largo de la tubería 0.85, se pide:

a) Calcular el gasto.

b) La velocidad en el punto de contracción y en la salida.

c) La presión en la garganta. (Ver figura).

Resolución:

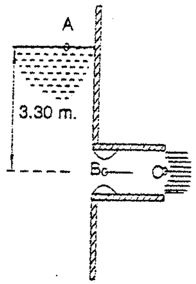
a) El gasto que sale por la boquilla es:

$$Q = v_C \cdot a_C$$
$$Q = C_V\sqrt{2g\cdot h}\cdot a_C$$

Reemplazando valores:

$$Q = 0.85\sqrt{19.6\cdot 3.3}\,\frac{\pi(0.025)^2}{4}$$

$$\boxed{Q = 0.00335\ m^3/s}$$



Tomando Bernoulli entre A y C:

$$0+0+3.3 = \frac{v_C^2}{2g} + \left(\frac{1}{C_V^2}-1\right)\frac{v_C^2}{2g}$$

$$3.3 = \frac{v_C^2}{2g\cdot C_V^2}$$

$$\Rightarrow\quad v_C = C_V\sqrt{2g(3.3)} = 0.85\sqrt{19.6 * 3.3}$$

$$\boxed{v_C = 6.85\ m/s}$$

b) Continuidad entre B y C:

$$C_C\cdot v_B\cdot a_B = v_C\cdot a_C$$

Como $a_B = a_C$, tiene:

$$v_B = \frac{v_c}{C_C} = \frac{6.85}{0.61}$$

$$\boxed{v_B = 11.2\ m/s}$$

c) Tomando Bernoulli entre A y B: $0+0+3.3 = \frac{v_A^2}{2g}+\frac{P_B}{\gamma}+0$

Despejando: $\boxed{\frac{P_B}{\gamma} = -3.1m\ de\ agua\ relativos}$

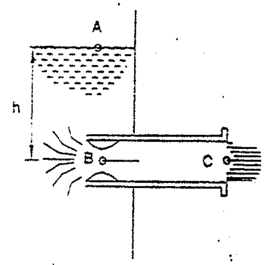
4.38. Se ha instalado en la pared vertical de un reservorio, una boquilla cilíndrica reentrante larga, que se introduce en el reservorio la mitad de su longitud. El coeficiente de contracción es *0.50* y el de velocidad a lo largo de la boquilla *0.70*. ¿Cuál será la carga sobre el centro de la boquilla para que la presión en la vena contraída sea cero absoluto?

Resolución:

Tomando Bernoulli entre A y B: $0+10.33+h = \frac{v_B^2}{2g}+0$

De donde: $h = \frac{v_B^2}{2g} - 10.33$ ....(1)

Tomando Bernoulli entre B y C:



$$\frac{v_B^2}{2g}+0 = \frac{v_C^2}{2g}+10.33+P_C$$

$$\frac{v_B^2}{2g} = \frac{v_C^2}{2g}+10.33+\left(\frac{1}{C_V^2}-1\right)\frac{v_C^2}{2g}$$

$$\frac{v_B^2}{2g} = \frac{v_C^2}{C_V^2\cdot 2g}+10.33 \quad \text{............(2)}$$

Por continuidad: $v_B\cdot a_B\cdot C_C = v_C\cdot a_C$; $v_C = C_C\cdot v_B$ ....(3)

Reemplazando (3) en (2)

$$\frac{v_B^2}{2g} = \frac{C_C^2\cdot v_B^2}{C_V^2\cdot 2g}+10.33 \quad\Rightarrow\quad \frac{v_B^2}{2g}\left(1-\frac{C_C^2}{C_V^2}\right)=10.33$$

Reemplazando valores:

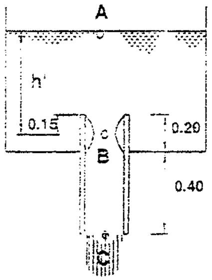
$$\frac{v_B^2}{2g}\left(1-\frac{0.50^2}{0.70^2}\right)=10.33 \quad\Rightarrow\quad \frac{v_B^2}{2g} = \frac{10.33}{1-0.51} = 21.08 \quad \text{.............(4)}$$

Sustituyendo (4) en (1): $h = 21.08-10.33$

$$\boxed{h = 10.75m}$$

4.39. Una boquilla cilíndrica, reentrante largo, es acoplada en posición vertical al fondo de un depósito. El diámetro de la boquilla es de *0.20 m* y su longitud de *0.60 m*. El extremo de la entrada de la boquilla queda *0.20 m* sobre el fondo del depósito. El coeficiente de velocidad de la boquilla es *0.75* y la contracción de la entrada *0.52*. ¿Cuál será la máxima altura sobre el fondo del depósito a que podrá llegar el agua para que la presión absoluta de la vena contraída no resulte menor de *0.30 m* de agua (presión del vapor de agua a la temperatura dada). La sección de máxima contracción se puede suponer ubicada a *0.15 m* por debajo de la entrada de la boquilla.

Resolución:



La máxima altura sucederá cuando la presión en la vena contraída sea *0.30 m* de agua.

Tomando Bernoulli entre A y B:

Luego:

$$h' = \frac{v_B^2}{2g} - 10.03 \qquad \ldots\ldots(\alpha)$$

Bernoulli entre B y C:

$$\frac{v_B^2}{2g} + 0.30 + 0.45 = \frac{v_C^2}{2g} + 10.33 + P_C$$

$$\frac{v_B^2}{2g} = \frac{v_C^2}{2g} + 9.58 + \left(\frac{1}{C_V^2} - 1\right)\frac{v_C^2}{2g}$$

$$\frac{v_B^2}{2g} = 9.58 + \frac{v_C^2}{C_V^2 \cdot 2g} \qquad \ldots\ldots(1)$$

Por continuidad: $0.52\, v_B\, a = v_C\, a$, de donde; $v_C = 0.52\, v_B$ ....(2)

Reemplazando (2) en (1):

$$\frac{v_B^2}{2g} = \frac{(0.52 v_B)^2}{C_V^2 \cdot 2g} + 9.58$$

$$\frac{v_B^2}{2g}\left(1 - \frac{0.52^2}{C_V^2}\right) = 9.58 \quad \Rightarrow \quad \frac{v_B^2}{2g} = \frac{9.58}{1 - \dfrac{0.52^2}{0.75^2}} \qquad \ldots\ldots(3)$$

Reemplazando (3) en (α):

$$h' = \frac{9.58}{1 - 0.58} - 10.03 = 18.43 - 10.03 = 8.40\, m$$

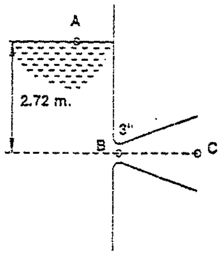
La altura sobre el fondo será:

$$h = h' + 0.05 \qquad \boxed{h = 8.45\, m}$$

4.40. Una boquilla divergente tiene *3"* y *5"* de diámetro respectivamente y está unida a un orificio con embocadura redondeada. El coeficiente de descarga de la boquilla es *0.70* y el coeficiente de velocidad del orificio $C_V = 0.98$.

Sabiendo que la carga constante sobre la boquilla es *2.72 m*, se desea hallar el gasto y la presión en el punto de unión de la boquilla con el orificio.

Resolución:



El coeficiente de descarga es:

$$C = C_C \cdot C_V$$

Como la boquilla tiene embocadura redondeada, $C_C = 1$, luego el coeficiente de velocidad para la boquilla será el de descarga: $C_{V'} = 0.70$

Tomando Bernoulli entre los puntos A y C:

$$2.72 = \frac{v_C^2}{2g} + p.c._{AB} + p.c._{BC}$$

$$2.72 = \frac{v_C^2}{2g} + \left(\frac{1}{C_{V'}^2} - 1\right)\frac{v_C^2}{2g} + \left(\frac{1}{C_{V}^2} - 1\right)\frac{v_B^2}{2g} \qquad \ldots(1)$$

Por continuidad entre los puntos B y C:

$$v_B \cdot a_B = v_C \cdot a_C$$

De donde:

$$v_C = v_B\left(\frac{a_B}{a_C}\right) = v_B\left(\frac{d_B}{d_C}\right)^2 = v_B\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}v_B \qquad \ldots\ldots(2)$$

Reemplazando (2) en (1):

$$2.72 = \frac{81\, v_B^2}{625\,(2g)} + \left(\frac{1}{0.70^2} - 1\right)\frac{81\, v_B^2}{625\,(2g)} + \left(\frac{1}{0.98^2} - 1\right)\frac{v_B^2}{2g}$$

$$\frac{2.72\,(625)\,2g}{81} = v_B^2 + \left(\frac{1}{0.49} - 1\right)v_B^2 + \left(\frac{1}{0.96} - 1\right)\frac{625}{81}\cdot v_B^2$$

$$411 = v_B^2 + 1.04\, v_B^2 + 0.308\, v_B^2$$

$$411 = 2.348 \cdot v_B^2$$

Luego:

$$v_B = \frac{\sqrt{411}}{\sqrt{2.348}} = \sqrt{176} = 13.27\ m/s \qquad \ldots\ldots(3)$$

=> El gasto que circula es: $Q = v_B \cdot a_B = 13.27\left(\dfrac{\pi\,(3 \cdot 0.0254)^2}{4}\right)$

$$\boxed{Q=0.0605\ m^3/s}$$

Para hallar la presión en el punto de unión, tomamos Bernoulli entre B y C

$$\frac{v_B^2}{2g}+\frac{P_B}{\gamma}=\frac{v_C^2}{2g}+0+\left(\frac{1}{C_V^2}-1\right)\frac{v_C^2}{2g}$$

Reemplazando la expresión (2) en ésta última:

$$\frac{v_B^2}{2g}+\frac{P_B}{\gamma}=\frac{81v_B^2}{625(2g)}+\left(\frac{1}{0.70^2}-1\right)\frac{81v_B^2}{625(2g)}$$

$$\frac{13.27^2}{2g}+\frac{P_B}{\gamma}=\frac{81(13.27)^2}{0.70^2*625(2g)}$$

$$8.98+\frac{P_B}{\gamma}=2.37$$

$$\therefore\quad \boxed{\frac{P_B}{\gamma}=-6.61m \quad de\ agua\ relativos}$$

4.41. Un orificio de *2.5 cm* de diámetro y coeficiente de gasto de *0.97* desagua bajo una carga fija de *0.86 m* de agua. Calcular el aumento de caudal en tanto por ciento que resultará de añadir una boquilla horizontal divergente cuyo diámetro de salida es de *3.4 cm*. Se considera que la pérdida de carga por remolinos y rozamientos que tienen lugar en el orificio y tubo adicional es del orden del *20%* de "*h*".

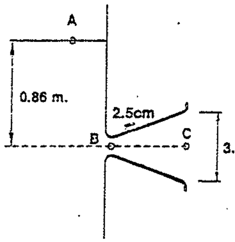
Al emplear la boquilla divergente, calcular:

a) El coeficiente de gasto referido a la sección de salida de la boquilla divergente.

b) El coeficiente de gasto reparado a la sección del orificio.

c) La carga negativa en la unión del orificio con la boquilla.

Resolución:



El área del orificio es:

$$a_B=\frac{\pi(0.025)^2}{4}=0.00049\ m^2$$

El área en la salida de la boquilla es:

$$a_C=\frac{\pi(0.034)^2}{4}=0.000905\ m^2$$

El gasto en el orificio es: $Q_1=C\cdot a_B\sqrt{2g\cdot h}=0.97*0.00049\sqrt{19.6*0.86}$

$$Q_1=0.001960\ m^3/s$$

Tomando Bernoulli entre A y C:

$$0+0+h=\frac{v_C^2}{2g}+0+p.c. \quad\Rightarrow\quad \frac{v_C^2}{2g}=h-p.c.$$

Pero la pérdida de carga es el 20% de "*h*", luego: $\frac{v_C^2}{2g}=h-0.2h$

$$\frac{v_C^2}{2g}=0.86-0.2*0.86=0.688$$

$$\therefore\quad v_C=3.67\ m/s$$

El gasto en la boquilla será: $Q_2=v_C\cdot a_C=3.67*0.000905$

$$Q_2=0.00333\ m^3/s$$

Relacionando: $\frac{Q_2}{Q_1}=\frac{0.00333}{0.00196}=1.71$

El aumento de caudal será: $(1.71-1)100\%$

$$\boxed{\Delta Q=71\%}$$

a) Se sabe que el gasto es: $Q_2=C_2\cdot a_C\sqrt{2g\cdot h}$

Despejando:

$$C_2=\frac{Q_2}{a_C\sqrt{2g\cdot h}}=\frac{0.00333}{0.000905\sqrt{19.6*0.86}}$$

$$\boxed{C_2=0.895}$$

b) Por continuidad en los puntos B y C:

$$C_1\cdot a_B\sqrt{2g\cdot h}=C_2\cdot a_C\sqrt{2g\cdot h}$$

Simplificando y despejando:

$$C_1=C_2\frac{a_C}{a_B}=0.895*\frac{0.000905}{0.00049}$$

$$\boxed{C_1=1.65}$$

c) Tomando Bernoulli entre los puntos: A y B:

$$0+0+h=\frac{v_B^2}{2g}+\frac{P_B}{\gamma}\quad\text{.......................................(1)}$$

Donde:

$$v_B=\frac{Q_2}{a_B}=\frac{0.00333}{0.00049}=6.80\ m/s\quad\text{.......................................(2)}$$

Reemplazando (2) en (1): $0.86 = \frac{6.80}{19.6} + \frac{P_B}{\gamma} = 2.36 + \frac{P_B}{\gamma}$

$$\therefore \boxed{\frac{P_B}{\gamma} = -1.50m}$$

4.42. Se quiere diseñar un pitón para ser usado en una rueda Pelton que generará *120 kw*. La eficiencia de la turbina se estima en *95%*. Se dispone de un caudal de *150 l/s*. La tubería de conducción es de *10"*. Se pregunta:

a) ¿Cuál deberá ser el diámetro de la boca del pitón en *cm.* y en pulgadas?

b) La presión que deberá tenerse a la entrada del mismo en *kg/cm* relativos?

c) ¿Qué potencia se pierde en el pitón, en *HP*?

d) ¿Cuál es la eficiencia del pitón en porcentaje?

Úsese $C_V = 0.96$ y $C_c = 1.00$; $1HP = 746$ *watts*.

Resolución:

a) Como debe generar *120 kw*, considerando la eficiencia de la turbina, debe usar una potencia en *HP* igual a:

$$Pot. = \frac{120*1000}{0.95*746} = 169.25\,HP$$

Esta potencia será igual a la que producirá la descarga del pitón, es decir:

$$Pot. = \frac{\gamma \cdot Q \cdot B}{75}\,HP$$

Reemplazando valores:

$$169.25 = \frac{1000*0.150*\frac{v_S^2}{2g}}{75}$$

Despejando: $v_S^2 = \frac{2g*169.25*75}{1000*0.150} = 1.656$

$v_S = 40.70\,m/s$ (*velocidad teórica*)

Como el gasto es constante, se tendrá en la boca del pitón:

$$Q = v_S \cdot a_S \cdot C_V \cdot C_c$$

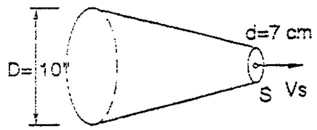
$$0.150 = 0.96*1.00*40.70*\frac{\pi \cdot d^2}{4}$$

$$d^2 = \frac{4*0.150}{0.96*1.00*40.70*\pi} = 0.0049$$

$$d = \textit{diámetro del pitón} = 0.07m = 2\tfrac{3}{4}" = 7cm$$

b) Tomando Bernoulli entre (A) y la salida:

$$\frac{v_A^2}{2g} + \frac{P_A}{\gamma} + 0 = \frac{v_S^2 real}{2g} + 0 + 0$$



Despejando:

$$\frac{P_A}{\gamma} = \frac{v_S^2 real - v_A^2}{2g} \quad ....(1)$$

Pero: $v_A \cdot a_A = v_S real \cdot a_S$

$$\therefore \frac{v_A}{v_{S\,real}} = \left(\frac{d}{D}\right)^2 = \left(\frac{11/4}{10}\right)^2$$

Del cual: $v_A = v_{S\,real}\left(\frac{1.21}{16}\right)$

$$v_A = 0.96*40.70*\left(\frac{1.21}{16}\right) = 2.95\,m/s \quad ....(2)$$

Reemplazando (2) y la velocidad real en (1):

$$\frac{P_A}{\gamma} = \frac{(0.96*40.70)^2 - (2.95)^2}{19.6} = 77.1m \textit{ de agua}$$

$$\boxed{P_A = 7.71\,kg/cm^2 \textit{ relativos}}$$

c) Potencia perdida en el pitón: se debe al coeficiente de velocidad:

$$\Delta Pot. = \frac{\gamma \cdot Q}{75}\left(\frac{v_S^2 - v_{S\,real}^2}{2g}\right) = \frac{1000*0.150}{75}\left(\frac{40.70^2 - 0.96*40.70}{19.6}\right)^2$$

$$\boxed{Pot. = 13.8\,HP}$$

d) EFICIENCIA:

$$Eficiencia = \frac{Pot.útil}{Pot.total} = \frac{\frac{\gamma \cdot Q}{75}\left(\frac{v_{S\,real}^2}{2g}\right)}{\frac{\gamma \cdot Q}{75}\left(\frac{v_S^2}{2g}\right)} = \frac{(0.96*40.70)^2}{(40.70)^2} = 0.92$$

$$\boxed{Eficiencia = 92\%}$$

4.43. Determínese la potencia bruta entregada por la corriente de agua a la máquina hidráulica de la figura, mediante la comparación de las potencias de entrada "E" y salida "S". En la sección "E" el diámetro es de $1.25\ m$, la presión $4\ kg/cm^2$ y la elevación con respecto a la sección "S" es $1.50\ m$.

En la sección "S" el diámetro es $1.50\ m$ y la altura con respecto al nivel del agua de restitución es $6.50\ m$. El tubo divergente (de aspiración es de $10°$ y de $7.00\ m$ de longitud). El caudal de la corriente que circula a través de la máquina es $10\ m^3/s$. La pérdida de carga en el tubo está dado por: $\frac{1}{5}\left(\frac{A}{a}-1\right)^2\frac{v_D^2}{2g}$

Donde:

A = área de la boca del tubo divergente.

a = área de la sección de salida de la máquina o entrada al tubo divergente.

v_D = velocidad en la boca de descarga del tubo divergente.

<u>**Resolución:**</u>

El diámetro de salida será:

$$d_D = 1.50 + 2*7*\tan 5° = 1.50 + 14*0.087$$
$$d_D = 2.72m$$

Tomando Bernoulli entre los puntos "S" y "D":

$$\frac{v_S^2}{2g}+\frac{P_S}{\gamma}+z_S=\frac{v_D^2}{2g}+\frac{P_D}{\gamma}+z_D+p.c._{(S-D)} \quad \text{.........(1)}$$

La velocidad en "S":

$$v_S=\frac{Q}{a}=\frac{10}{\frac{(1.50)^2}{4}}=5.65\,m/s \quad \text{.........(2)}$$

La velocidad en "D":

$$v_D=\frac{Q}{A}=\frac{10}{\frac{(2.72)^2}{4}}=1.72\,m/s \quad \text{.........(3)}$$

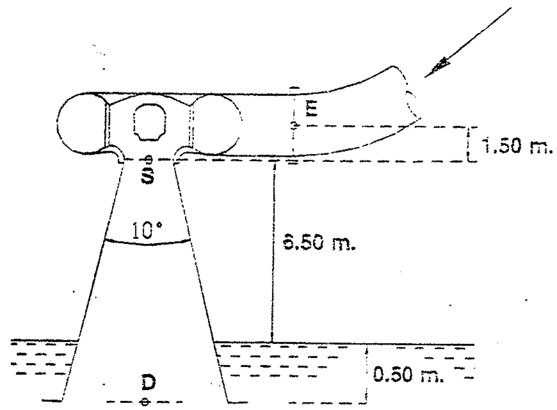
La presión en "D" será igual a la altura de agua con respecto al nivel de agua de restitución:

$$\frac{P_D}{\gamma}=0.50m\ de\ agua \quad \text{.........(4)}$$

Reemplazando (2), (3) y (4) en (1), como demás datos:

$$\frac{(5.65)^2}{19.6}+\frac{P_S}{\gamma}+7.00=\frac{(1.72)^2}{19.6}+0.50+0+\frac{1}{5}\left(\left(\frac{d_D}{d_S}\right)^2-1\right)^2\left(\frac{1.72^2}{19.6}\right)$$

$$1.63+\frac{P_S}{\gamma}+7.00=0.151+0.50+\frac{1}{5}\left(\left(\frac{2.72}{1.50}\right)^2-1\right)^2(0.151)$$



De donde: $\frac{P_S}{\gamma}=-7.82m\ de\ agua\ relativos$

La potencia bruta será la diferencia de potencias de Entrada y Salida, sin considerar las pérdidas de carga, por no pedir la útil.

$$Pot.=\gamma\cdot Q(B_{Entrada}-B_{Salida})$$

$$Pot.=1000*10\left(\left(\frac{P_E}{\gamma}+\frac{v_E^2}{2g}+z_E\right)-\left(\frac{P_S}{\gamma}+\frac{v_S^2}{2g}+z_S\right)\right)$$

Donde:

$$v_E=\frac{Q}{A_E}=\frac{10}{\frac{\pi(1.25)^2}{4}}=8.15\,m/s;\quad \frac{P_E}{\gamma}=40m\ de\ agua.$$

Reemplazando:

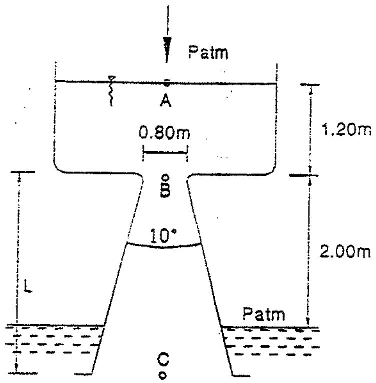
$$Pot.=1000*10*\left(\left(\frac{8.15^2}{19.6}+40+1.50\right)-\left(\frac{5.65^2}{19.6}-7.82+0\right)\right)$$
$$Pot.=1000*10*((3.39+40+1.50)-(1.63-7.82))$$
$$Pot.=1000*10*(51.08)=510800\ Kg\text{-}m/s$$

Como $1HP$ es igual a $75\ kg\text{-}m/s$, la potencia bruta será:

$$\boxed{Pot.Bruta=6800HP}$$

4.44. El depósito de la figura, descarga a través de una pieza redondeada (*coeficiente de velocidad = 0.98*) de $0.80\ m$ de diámetro, conectada a un tubo troncocónico con $10°$ de divergencia, en el que la pérdida de carga es: $0.2\left(\frac{A_S}{a}-1\right)^2\cdot\frac{v_S^2}{2g}$

Determinar el gasto correspondiente a la longitud máxima que podría darse al tubo divergente sin que la presión en la garganta resulte menor que *0.1* kg/cm^2 absolutos. Calcular dicha longitud. Considere despreciable la velocidad en el depósito.



Resolución:

Tomando Bernoulli entre A y B:

$$\frac{v_A^2}{2g}+\frac{P_A}{\gamma}+z_A=\frac{v_B^2}{2g}+\frac{P_B}{\gamma}+z_B+\left(\frac{1}{C_v^2}-1\right)\frac{v_B^2}{2g}$$

Simplificando: $\frac{v_A^2}{2g}+\frac{P_A}{\gamma}+z_A=\frac{P_B}{\gamma}+z_B+\frac{v_B^2}{C_v^2\cdot 2g}$

Reemplazando valores:

$$0+(10.33)+1.2=1+0+\frac{v_B^2}{(0.98)^2\cdot(2g)}$$

Del cual:

$$v_B=0.98\sqrt{10.53*19.6}=14.1\,m/s$$

Llamando "L" la longitud del tubo divergente, la presión en el punto C, será la altura de agua respecto al nivel X-X': $\frac{P_C}{\gamma}=L-2+10.33$

Tomando Bernoulli entre B y C:

$$\frac{(14.1)^2}{19.6}+1+L=\frac{v_C^2}{2g}+(L-2+10.33)+0+0.2\left(\frac{A_S}{a}-1\right)^2\frac{v_C^2}{2g}\ ....(1)$$

Continuidad entre B y C: $a\cdot v_B=A_S\cdot v_C$

Luego:

$$\frac{A_S}{a}=\frac{v_B}{v_C}=\frac{14.1}{v_C}\ ....(2)$$

Reemplazando (2) en (1) y reduciendo:

$$2.77=\frac{v_C^2}{2g}+0.2\left(\frac{14.1}{v_C}-1\right)^2\frac{v_C^2}{2g}=\frac{v_C^2}{2g}+0.2\frac{(14.1-v_C)^2}{2g}$$

$$2.77=\frac{v_C^2+0.2(14.1-C)^2}{2g}$$

Del cual se llega a: $v_C^2-4.7-13.7=0$

Resolviendo la ecuación: $v_C=6.72\,m/s$

Por continuidad entre las secciones B y C: $v_B\cdot a=v_C\cdot A_S$

Reemplazando valores: $14.1\left(\frac{\pi*0.8^2}{4}\right)=6.72\left(\frac{\pi\cdot D^2}{4}\right)$

Del cual:

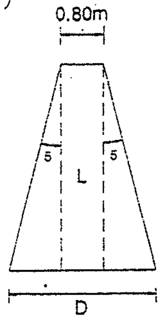
$$D=0.8\sqrt{\frac{14.1}{6.72}}=1.16m$$

De la figura se saca:

$D=0.80+2L\cdot\tan 5°$

$1.16=0.80+2*0.087*L$

$\therefore\ \boxed{L=2.06\,m}$



El gasto será: $Q=v_B\cdot a=v_C\cdot A_S$

$$Q=14.1\frac{\pi(0.8)^2}{4}=14.1*0.5026$$

$$\boxed{Q=7.088\,m^3/s}$$

4.45. ¿Qué diámetro de salida debería tener una abertura abocinada (*coeficiente de velocidad = 0.98 y coeficiente de contracción = 1.00*) practicada en la pared de un depósito para permitir descargar *2.5* m^3/s, con un consumo total de potencia que no sobrepasa *400 HP*?

Si se quisiera reducir el consumo de potencia a un mínimo, ¿Qué longitud de tubo divergente de *10°* de eje horizontal, se deberá adosar a la abertura anterior, sin que la presión en la garganta resulte inferior a *0.08* kilogramos por centímetro cuadrado de presión absoluta?¿Cuál sería la potencia consumida? Considere la velocidad en el depósito despreciable. La pérdida de carga en el tubo divergente es:

$$p.c=\frac{1}{5}\left(\frac{A}{a}-1\right)^2\frac{v_S^2}{2g}$$

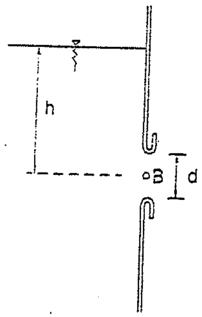
Donde: A = área de salida

a = área de la garganta

v_S = velocidad de salida

Resolución:

Con la abertura abocinada:



Se sabe que: $Pot. = \gamma \cdot Q \cdot B$ ....(1)

Tomando Bernoulli entre A y B:

$$h = \frac{v_B^2}{2g} + \left(\frac{1}{C_V^2} - 1\right)^2 \frac{v_B^2}{2g}$$

Reemplazando (2) en (1):

$$Pot. = \gamma \cdot Q \cdot \frac{v_B^2}{2g \cdot C_V^2}$$

De donde, despejando y reemplazando datos:

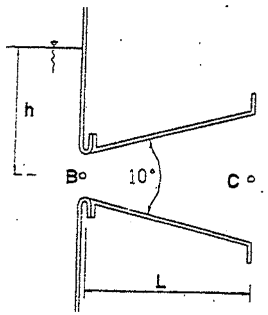
$$v_B = C_V \cdot \sqrt{\frac{2g \cdot Pot.}{\gamma \cdot Q}} = 0.98\sqrt{\frac{19.6 * 400 * 75}{1000 * 2.5}}$$

$$v_B = 15 \,\text{m/s} \quad \text{..............................(3)}$$

Pero el gasto es: $Q = v \cdot a$

$$2.5 = 15\,\frac{\pi \cdot d^2}{4} \quad \Rightarrow \quad \boxed{d = 0.46m}$$

Con el tubo divergente:



Tomando Bernoulli entre las secciones B y C:

$$\frac{v_B^2}{2g} + \frac{P_B}{\gamma} = \frac{v_C^2}{2g} + \frac{P_C}{\gamma} + \frac{1}{5}\left(\frac{A}{a} - 1\right)^2 \frac{v_C^2}{2g} \quad \text{.......(4)}$$

Por continuidad: $v_C \cdot A = v_B \cdot a$

$$\frac{A}{a} = \frac{v_B}{v_C} \quad \text{..(5)}$$

Datos son:

$\frac{P_B}{\gamma} = 0.8m$ *de agua absolutas*

$\frac{P_C}{\gamma} = 10.33m$ *de agua absolutas* (*P.atm.*)

Reemplazando (5) en (4) como éstos últimos datos:

$$\frac{v_B^2}{2g} + 0.8 = \frac{v_C^2}{2g} + 10.33 + \frac{1}{5}\left(\frac{v_B}{v_C} - 1\right)^2 \frac{v_C^2}{2g}$$

$$\frac{v_B^2}{2g} + 0.8 = \frac{v_C^2}{2g} + 10.33 + \frac{(v_B - v_C)^2}{10g} \quad \text{..(6)}$$

Reemplazando (3) en (6):

$$\frac{15^2}{2g} + 0.8 = \frac{v_C^2}{2g} + 10.33 + \frac{(15 - v_C)^2}{10g}$$

$$11.48 + 0.8 = \frac{v_C^2}{2g} + 10.33 + \frac{(15 - v_C)^2}{10g}$$

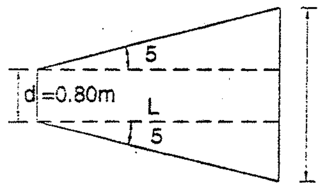
De la cual queda una ecuación de segundo grado:

$$6v_C^2 - 30v_C + 34 = 0$$

Obteniéndose dos valores para la velocidad en la salida:

$\frac{\pi \cdot D^2}{4} = \frac{2.5}{1.74}$ Sólo se acepta: $v_C = 1.74$ *m/s* (la más baja), para que el consumo de potencia sea **mínima**:

Como: $Q = v_C \cdot A_C \quad \Rightarrow \quad A_C = \frac{Q}{v_C} \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi \cdot D^2}{4} = \frac{2.5}{1.74}$



De donde: $D = 1.35\ m$

En la figura: $D = d - 2L \cdot \tan 5°$

$1.35 = 0.46 + 2 * 0.087\,L$

$\therefore \quad \boxed{L = 5.11m}$

La potencia mínima será:

$$Pot. = \frac{\gamma \cdot Q \cdot B}{75} = \frac{\gamma \cdot Q}{75}\left(\frac{v_C^2}{2g}\right) = \frac{1000 * 2.5}{75}\left(\frac{1.74^2}{19.6}\right)$$

$$\boxed{Pot. = 5.15\ HP}$$

4.46. Se bombea agua a razón de *139 l/s*, en las condiciones que se indican en la figura. La energía suministrada por la bomba a la corriente es de *27.8 HP*. Determinar las presiones en ***kg/cm²*** que registrarán los manómetros en los puntos (1) y (2), teniendo en cuenta que le nivel de agua en el depósito permanece constante, punto (0); y que las pérdidas de carga en las tuberías de ingreso y de descarga, punto (1) y (2) respectivamente son iguales a *0.5* de las alturas de velocidad del agua en las tuberías correspondientes.

Resolución:

Tomando Bernoulli entre los puntos (0) y (1):

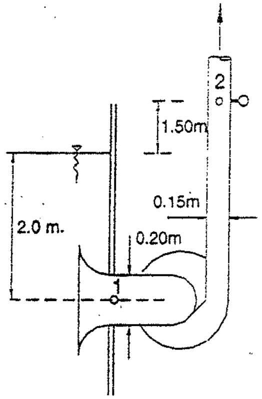
$$\frac{v_0^2}{2g} + \frac{P_0}{\gamma} + z_0 = \frac{v_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\gamma} + z_1 + p.c. \quad \text{..(1)}$$

Donde:

$v_0 = 0 \; ; \; P_0 = 0 \, {}^{Kg}\!/_{cm^2} \; relativos;$

$z_0 = 2\,m \; ; \; z_1 = 0\,m$

$$v_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{0.139}{\frac{\pi\,(0.2)^2}{4}} = 4.42 \, {}^{m}\!/_{s}$$



La pérdida de carga de 0 a 1 es:

$$p.c. = 0.5\frac{v_1^2}{2g} = 0.5 * \frac{(4.42)^2}{19.6} = 0.5\,m$$

Reemplazando todos estos valores en (1)

$$0 + 0 + 2 = \frac{(4.42)^2}{19.6} + \frac{P_1}{\gamma} + 0 + 0.5$$

De donde se obtiene:

$$\frac{P_1}{\gamma} = 0.5\,m \; de \; agua \; relativos. \quad \Rightarrow \quad \boxed{P_1 = 0.05 \, {}^{Kg}\!/_{cm^2} \; relativos.}$$

La potencia de la bomba es:

$$Pot. = \frac{\gamma \cdot Q \cdot (B_{salida} - B_{entrada})}{75} HP \quad \text{.....................................}(2)$$

El Bernoulli de entrada es:

$$B_{entrada} = \frac{v_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\gamma} = 1.00 + 0.50 = 1.50m \quad \text{..............................}(3)$$

Reemplazando (3) y demás datos en (2): $27.8 = \dfrac{1000 \cdot 0.139 \cdot (B_{salida} - 1.50)}{75}$

Del cual se obtiene:

$$B_{salida} = 16.5m \; de \; agua = B_3 \quad \text{.....................................}(4)$$

Tomando Bernoulli entre las secciones (3) y (2), donde se conoce, de la expresión (4), el Bernoulli del punto (3):

$$16.50 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\gamma} + z_2 + 0.5\frac{v_2^2}{2g}$$

Donde:

$$v_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{0.139}{\frac{\pi \cdot (0.15)^2}{4}} = 7.85 \, {}^{m}\!/_{s}$$

$$z_2 = 2.00 + 1.50 = 3.50m$$

Luego queda:

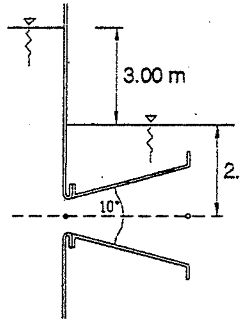
$$16.50 = \frac{7.85^2}{19.6} + \frac{P_2}{\gamma} + 3.50 + 0.5\frac{7.85^2}{19.6}$$

$$16.50 = 3.14 + \frac{P_2}{\gamma} + 3.50 + 1.57$$

Luego: $\dfrac{P_2}{\gamma} = 8.29m \; de \, agua \; relativos.$

$$\boxed{P_2 = 0.829 \, {}^{Kg}\!/_{cm^2} \; relativos}$$

4.47. En la pared vertical de un depósito se tiene una abertura de bordes redondeados convenientemente ($C_V = 0.98$ y $C_C = 1.00$), de $0.50\ m$ de diámetro por la que se produce la descarga del agua bajo una carga hidráulica de $3.00\ m$. Determínese la longitud de tubo troncocónico divergente de $10°$ que sería necesario adosar a la boca de la abertura para duplicar el gasto descargado por ella sin que la carga hidráulica aumente. La pérdida de carga en el tubo divergente es: $\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{A}{a}-1\right)^2 \dfrac{v_S^2}{2g}$, *donde:*

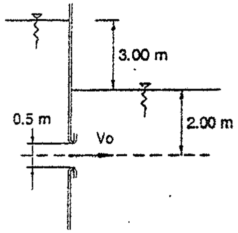


A = área de salida

a = área de la garganta

v_S = velocidad de salida del tubo divergente, considérese despreciable la velocidad de aproximación.

Resolución:



Primera parte: Sin boquilla.

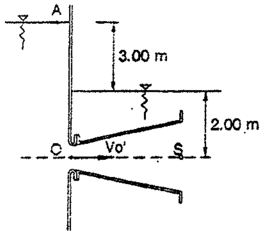
El gasto será: $Q = v_0 \cdot a$

Donde: $v_C = C_V\sqrt{2g \cdot h} = 0.98\sqrt{19.6 * 3}$

$v_C = 7.50 \, {}^{m}\!/_{s}$

$$a = \frac{\pi \cdot (0.50)^2}{4} = 0.196\,m^2$$

$$\therefore \; Q = 7.50 * 0.196 = 1.47 \, {}^{m^3}\!/_{s}$$



Segunda parte: Con boquilla.

El gasto se duplica, o sea:

$$Q' = 2Q = 2.94 \, {}^{m^3}\!/_{s}$$

Esto trae como consecuencia que la velocidad en el punto (0) se duplique también:

$$v'_0 = 2 \cdot v_0 = 15 \, {}^{m}\!/_{s}$$

Tomando Bernoulli entre (A) y (0):

$$\frac{v_A^2}{2g}+\frac{P_A}{\gamma}+z_A=\frac{v_0^2}{2g}+\frac{P_0}{\gamma}+z_0+\left(\frac{1}{C_V^2}-1\right)^2\frac{v_C^2}{2g}$$

$$0+0+5=\frac{15}{19.6}+\frac{P_0}{\gamma}+0+\left(\frac{1}{0.98^2}-1\right)^2\frac{15^2}{19.6}$$

$$5=11.48+\frac{P_0}{\gamma}+(0.04)11.48$$

De donde: $\frac{P_0}{\gamma}=-6.95m\ de\ agua\ relativos$

Tomando Bernoulli entre las secciones 0(garganta) y S(salida)

$$\frac{v_0^2}{2g}+\frac{P_0}{\gamma}+z_0=\frac{v_S^2}{2g}+\frac{P_S}{\gamma}+z_S+\frac{1}{5}\left(\frac{A}{a}-1\right)^2\frac{v_S^2}{2g}\quad\text{.......................................(1)}$$

En la cual la presión del punto B será la altura de agua: $\frac{P_S}{\gamma}=2m$

$$Q=v_S\cdot A \quad\Rightarrow\quad v_S=\frac{Q}{A}=\frac{2.94}{A}$$

$$\frac{v_S^2}{2g}=\frac{0.445}{A^2}$$

$$a=\frac{\pi(0.50)^2}{4}=0.196$$

Reemplazando estos valores y demás datos en (1):

$$\frac{15^2}{19.6}-6.95+0=\frac{0.445}{A^2}+2+0+\frac{1}{5}\left(\frac{A}{0.196}-1\right)^2\frac{0.445}{A^2}$$

$$11.48-6.95=\frac{0.445}{A^2}+2+\left(\frac{A-0.196}{0.196}\right)^2\frac{0.445}{A^2}$$

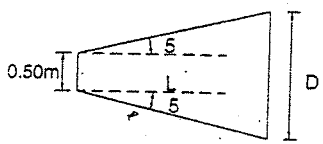
$$2.53=\frac{0.445}{A^2}+\frac{2.31}{A^2}(A-0.196)^2$$

$$2.53A^2=0.445+2.31\left(A^2-0.392A+0.0384\right)$$

Reducienda queda la ecuación: $0.22A^2+0.91A-0.534=0$

De donde se obtiene: $A=0.52m^2$

$$\frac{\pi\cdot D^2}{4}=0.52 \quad\Rightarrow\quad D=0.82m$$



De la figura:

$$D=0.50+2\cdot L\cdot\tan 5°$$

$$0.82=0.50+2*0.087L$$

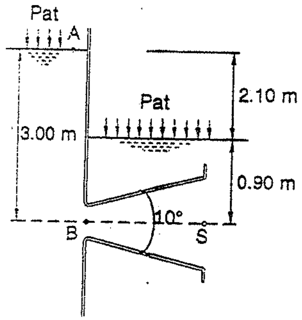
$$\therefore\ \boxed{L=1.84m}$$

4.48. Una boquilla horizontal divergente, conecta dos reservorios. El extremo de la entrada es redondeado (*C = 0.98*) y se halla a *3 m* por debajo de la superficie del reservorio de alimentación. El diámetro de la garganta es *0.05 m* estando el eje de la boquilla a *0.90 m* por debajo de la superficie de agua del reservorio de descarga. La pérdida de carga en el tubo divergente se estima en *0.30 m*. ¿Qué longitud de boquilla proporcionará el gasto máximo si el ángulo de divergencia es de *10°*? La presión de vapor para la temperatura a que se encuentra el agua es de *0.02 kg/cm²*.

Resolución:

Para que el gasto que circule por la boquilla sea máximo, es necesario que la velocidad de salida por el punto B, sea también máxima. Para esto, la presión de dicho punto (B) debe ser mínima, es decir debe tener la presión de vapor:

$$\frac{P_B}{\gamma}=0.2m\ de\ agua\ absolutos$$



Tomando Bernoulli entre los puntos A y B:

$$\frac{v_A^2}{2g}+\frac{P_A}{\gamma}+z_A=\frac{v_B^2}{2g}+\frac{P_B}{\gamma}+z_B+p.c.$$

Reemplazando valores:

$$0+10.33+3=\frac{v_B^2}{2g}+0.2+0+\left(\frac{1}{C_V^2}-1\right)\frac{v_B^2}{2g}$$

$$13.13=\frac{v_B^2}{C_V^2\cdot 2g}$$

Despejando:

$$v_B=C_V\sqrt{2g*13.13}=0.98\sqrt{19.6*13.13}$$

$$v_B=15.78\,m/s$$

Tomando Bernoulli entre las secciones: B y S (donde: $\frac{P_B}{\gamma}=10.33+0.90=11.23m$)

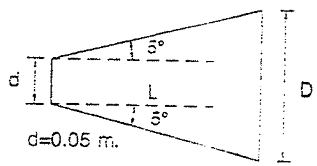
$$\frac{v_B^2}{2g}+\frac{P_B}{\gamma}+z_B=\frac{v_S^2}{2g}+\frac{P_S}{\gamma}+z_S+p.c.$$

$$\frac{15.78^2}{19.6}+0.2+0=\frac{v_S^2}{2g}+11.23+0+0.30$$

$$12.63+0.2=\frac{v_B^2}{2g}+11.23+0.30$$

$$1.30=\frac{v_S^2}{2g}$$

$$v_S=\sqrt{19.6*1.30}=5.05\,m/s$$



Continuidad entre las secciones B y S:

$$v_S \cdot A_S = v_B \cdot A_B \quad \Rightarrow \quad A_S = A_B \cdot \left(\frac{v_B}{v_S}\right)$$

O también:

$$D^2 = d^2\left(\frac{v_B}{v_S}\right)$$

Reemplazando valores:

$$D = 0.05\sqrt{\frac{15.78}{5.05}}$$

$$D = 0.0885m$$

De la figura se tiene:

$$D = d + 2L \cdot \tan 5°$$

$$0.0885 = 0.05 + 2 * 0.087\,L$$

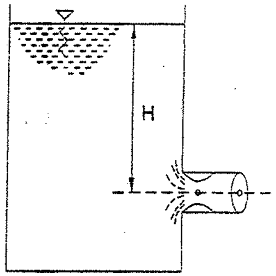
$$L = \frac{0.0885 - 0.05}{2 * 0.087} = 0.221m$$

$$\boxed{L = 22.1cm}$$

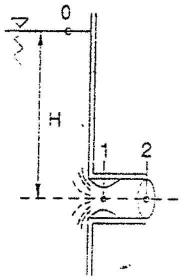
4.49. Hallar la altura máxima, H (en metros), antes de que se produzca cavitación en la boquilla, sabiendo que el fluido es agua; y el coeficiente de contracción C_C de la boquilla es *0.7*.

Presión de vapor $= 0.18\gamma_{agua}$

Presión atmosférica $= 10.33\ \gamma_{agua}$



Resolución:



Bernoulli entre "0" y "1"

$$\frac{P_0}{\gamma} + \frac{v_0^2}{2g} + H - K\frac{v_1^2}{2g} = \frac{P_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} + 0$$

$$\frac{P_0}{\gamma} + H = \frac{v_1^2}{2g}(1 + K) + \frac{P_1}{\gamma} \quad \text{.........................(1)}$$

Continuidad entre "1" y "2"

$$A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2$$

$$(C_C \cdot A_2) \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2$$

$$\boxed{v_1 = \frac{1}{C_C} \cdot v_2} \quad \text{.......................................(2)}$$

Pero:

$$v_2 = C_V\sqrt{2g \cdot H} \quad \text{..(3)}$$

(3) en (2):

$$v_1 = \frac{C_V}{C_C}\sqrt{2g \cdot H} \quad \text{..(4)}$$

Sabemos:

$$K = \left(\frac{1}{C_V^2} - 1\right) \quad \text{..(5)}$$

(4) y (5) en (1)

$$H + \frac{P_0}{\gamma} = \left(\frac{C_V}{C_C}\sqrt{2g \cdot H}\right)^2 \frac{1}{2g} \cdot \left(\frac{1}{C_V^2}\right) + \frac{P_1}{\gamma}$$

$$H + \frac{P_0}{\gamma} = \frac{1}{C_C^2}H + \frac{P_1}{\gamma}$$

$$H\left(\frac{1}{C_C^2} - 1\right) = \frac{P_0 - P_1}{\gamma}$$

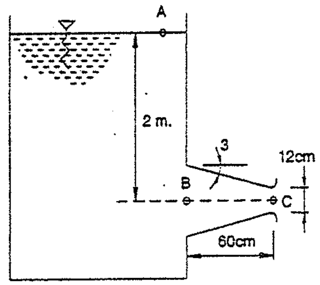
$$\boxed{H_{MÁX} = \frac{1}{\left(\frac{1}{C_C^2} - 1\right)} \cdot \left(\frac{P_0 - P_1}{\gamma}\right)}$$

$P_0 = P_{atm} = 10.33\ \gamma_{agua}$ $\qquad$ $P_1 = P_{vapor} = 0.18\ \gamma_{agua}$

$C_C = 0.7$

$$\boxed{H_{máx} = 9.752\ m}$$

4.50. Una boquilla divergente cuyo diámetro menor es de *12 cm* tiene un ángulo de divergencia de *6°*. La longitud de la boquilla es de *60 cm* y se une por su extremo más ancho a un depósito en que la superficie del agua está a *2.00 m* sobre el eje del tubo. La temperatura del agua es *60°C*, y la tensión correspondiente del vapor del agua es de *0.2 kg/cm²*, siendo la presión atmosférica de *1.033 kg/cm²* y el coeficiente de pérdida de carga o energía es igual a *0.16*. Calcular el gasto máximo que podrá aportar el tubo al depósito entes que se produzca cavitación plenamente desarrollada.



Resolución:

El diámetro de la parte más ancha es: $d_B = 12 + 2(60\tan 3^\circ) = 0.183m$

La carga correspondiente a la presión atmosférica es: $10.33m$

La carga correspondiente a la presión de vapor es: $2m$

La presión límite que podemos tener para que el gasto sea máximo, en el punto C, es:

$$\frac{P_C}{\gamma} = 2 - 10.33 = -8.33m \quad \ldots\ldots(1)$$

La pérdida de carga que se produce en la boquilla es:

$$p.c. = K\frac{(v_C - v_B)^2}{2g} = 0.16\frac{(v_C - v_B)^2}{2g} \quad \ldots\ldots(2)$$

Tomando Bernoulli entre C y B:

$$\frac{v_C^2}{2g} + \frac{P_C}{\gamma} = \frac{v_B^2}{2g} + \frac{P_B}{\gamma} + p.c. \quad \ldots\ldots(3)$$

Aplicando continuidad entre las secciones B y C: $v_B \cdot a_B = v_C \cdot a_C$

De donde: $v_B = v_C\frac{a_C}{a_B} = v_C\left(\frac{d_C}{d_B}\right)^2 = v_C\left(\frac{12}{18.3}\right)^2 \Rightarrow v_B = 0.43v_C \quad \ldots\ldots(4)$

Reemplazando (1), (2) y (4) en (3):

$$\frac{v_C^2}{2g} + (-8.33) = \frac{0.185v_C^2}{2g} + 2 + 0.16\frac{(v_C - 0.43v_C)^2}{2g}$$

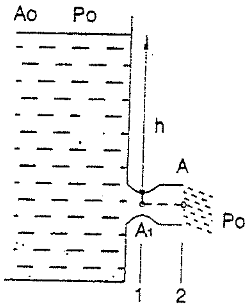
De donde se obtiene: $v_C = 16.31\ m/s$

Luego el gasto es:

$$Q = v_C \cdot a_C = 16.31 * \frac{\pi(0.12)^2}{4}$$

$$\boxed{Q = 0.184\ m^3/s}$$

4.51. De un depósito sale líquido a través de una pieza lateral que tiene primeramente sección estrecha A_1 y que se ensancha paulatinamente hasta A. Determinar el valor mínimo de A_1, con la condición de que el líquido llene completamente la pieza desde A_1 hasta A.



Resolución:

Bernoulli A_0 - A_1:

$$P_1 = P_0 + \left(h - \frac{v_1^2 - v_0^2}{2g}\right)\cdot\gamma \quad \ldots\ldots(1)$$

$$v_0 = 0 \quad \ldots\ldots(\alpha)$$

$$v = \sqrt{2g \cdot h}$$

Aplicando continuidad: $A_1 \cdot v_1 = A \cdot v$

$$\Rightarrow v_1 = \frac{A}{A_1}\cdot v \quad \ldots\ldots(2)$$

(2) y (α) en (1): $P_1 = P_0 + h\cdot\gamma\cdot\left(1 - \frac{A^2}{A_1^2}\right)$

Para mantener llenas las secciones; se tendrá $P_1 > 0$

$$\therefore\ P_0 + h\cdot\gamma\left(1 - \frac{A^2}{A_1^2}\right) > 0$$

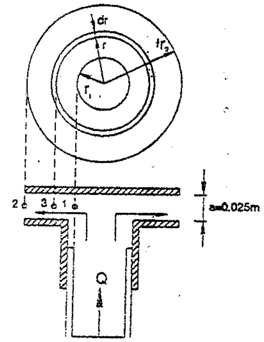
Resolviendo: $\frac{A_1^2}{A^2} > \frac{h\cdot\gamma}{P_0 + h\cdot\gamma}$

Finalmente haciendo: $h_0 = \frac{P_0}{\gamma}$

$$\boxed{A_1 > A\sqrt{\frac{h}{h + h_0}}}$$

4.52. Se tiene dos placas circulares horizontales de $0.60\ m$ de diámetro. La placa inferior se puede deslizar sobre un tubo vertical de $0.15\ m$ de diámetro exterior siendo su peso propio $2\ kg$. La placa superior es fija, siendo la separación entre ambas placas de $2.5\ cm$. Por el tubo vertical entra un caudal de agua de $30\ l/s$ que fluye radialmente hacia la salida.

Determinar que peso total puede soportar la placa móvil para mantener la separación de $2.5\ cm$ entre las placas. Asúmase $\alpha = 1.2$ y despréciese las pérdidas de carga.



Resolución:

Al fluir el agua radialmente hacia afuera, el área normal a la velocidad es una superficie lateral cilíndrica; para un radio r, la superficie es: $2\pi.r.a$

$$\therefore\ v = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{2\pi\cdot r\cdot a} \quad \ldots\ldots(1)$$

Aplicando Bernoulli entre los puntos 3 y 2:

$$\alpha\frac{v_3^2}{2g} + \frac{P_3}{\gamma} + z_3 = \alpha\frac{v_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\gamma} + z_2$$

Como 3 y 2 están sobre un mismo eje, y el punto 2 está sometido a la presión atmosférica, se tiene: $P_3 = \frac{\alpha}{2g}\left(v_2^2 - v_3^2\right)$

Por la relación *(I)* queda:

$$P_3 = \frac{\alpha}{2g}\left(\left(\frac{Q^2}{2\pi \cdot r_2 \cdot a}\right)^2 - \left(\frac{Q^2}{2\pi \cdot r \cdot a}\right)^2\right) = \frac{\alpha \cdot Q^2}{8g \cdot \pi^2 \cdot a^2}\left(\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r^2}\right)$$

El peso total que puede soportar la placa móvil debe ser igual al empuje axial que tiende a aproximar las placas entre sí. Está dada por:

$$F = \int P \cdot dA$$

Donde: $P = P_3$, $P_{absoluta} < P_{atm}$ (succión)

$$dA = 2\pi \cdot r \cdot dr$$

Por lo tanto, el peso total que puede soportar la placa será la integral entre los puntos 1 y 2: $F = \frac{\alpha \cdot Q^2}{8g \cdot \pi^2 \cdot a^2}\int_{r_1}^{r_2}\left(\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r^2}\right) \cdot 2\pi \cdot r \cdot dr$

integrando y reemplazando valores:

$$F = \frac{1.2(0.030)^2}{4 * 9.8\pi \cdot (0.025)^2}\left(\frac{r^2}{2r_2^2} - Ln(r)\right)\Bigg|_{0.30}^{0.075} \qquad Ln = Log_e$$

$$F = 0.01403\left(\frac{1}{32} - \frac{1}{2} + Ln\left(\frac{0.300}{0.075}\right)\right)$$

$$F = 0.01403(0.9176) = 0.012874\,t$$

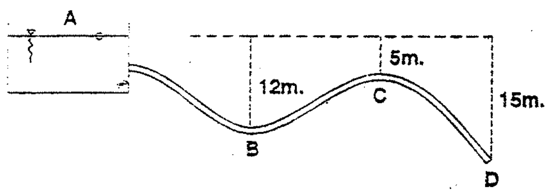
$$F = 12.874\,Kg$$

El peso que podrá soportar la placa móvil será:

$$W = F - Peso\ de\ la\ placa = 12.874 - 2$$

$$\boxed{W = 10.874\,Kg}$$

4.53. La pérdida de carga en el sistema mostrado en la figura es de una carga de velocidad de *A* a *B*; de *B* a *C* es de dos cargas de velocidad y de *C* a *D* de una carga de velocidad. El diámetro de la tubería es de *15 cm*. Considerando $\alpha = 1$ se pide:



a) Hallar la carga de presión en metros de agua relativas en los puntos *B* y *C*.

b) Asumiendo que todos los datos permanecieran iguales, excepto el diámetro de la tubería. ¿Qué diámetro debería ponerse para que la presión en *C* sea igual a *-0.7 kg/cm²* relativos?

c) Asumiendo todos los datos iguales al enunciado del problema, excepto la elevación del punto *C*. ¿Cuál deberá ser la altura de *C* para obtener en ese punto un vacío de *0.4 kg/cm²*?

Resolución:

Aplicando Bernoulli entre A y D: $\frac{v_A^2}{2g} + \frac{P_A}{\gamma} + z_A = \frac{v_D^2}{2g} + \frac{P_D}{\gamma} + z_D + p.c.$

Donde: $P_A = P_D = 0\,relativos$

$$v_A = 0\ ;\quad z_A = 0\ ;\quad z_D = -15m.\ ;\quad p.c. = 4\frac{v_D^2}{2g}$$

Reemplazando valores en (1): $0 = 5\frac{v_D^2}{2g} - 15$

De donde:

$v_D = \sqrt{6g} = v$; *(que es la velocidad en cualquier punto de la tubería, por ser de diámetro único: 15cm)*

a) Cálculo de la presión en B: Aplicando Bernoulli entre A y B (donde la pérdida de carga es una carga de velocidad):

$$0 = \frac{v^2}{2g} + \frac{P_B}{\gamma} - 12 + \frac{v^2}{2g}$$

$$\frac{P_B}{\gamma} = 12 - \frac{2v^2}{2g} = 12 - \frac{2\left(\sqrt{6g}\right)^2}{2g} = 12 - 6$$

$$\boxed{\frac{P_B}{\gamma} = 6m\ de\ agua\ relativos}$$

Cálculo de la presión relativa en C: Bernoulli entre A y C (donde la pérdida de carga es 3 cargas de velocidad):

$$0 = \frac{v^2}{2g} + \frac{P_C}{\gamma} - 5 + 3\frac{v^2}{2g}$$

$$\frac{P_C}{\gamma} = 5 - 2\frac{v^2}{g} = 5 - 2\frac{\left(\sqrt{6g}\right)^2}{g} = 5 - 12$$

$$\boxed{\frac{P_C}{\gamma} = -7m\ de\ agua\ relativos}$$

b) Si todos los datos permanecen iguales y si la presión en C es igual a $-0.7\ kg/cm^2 = -7m$ *de agua*, coincide con la presión hallada anteriormente, esto quiere decir que como el gasto es invariable, el diámetro se mantiene en sus:

$$\boxed{d = 15cm}$$

c) Se aplica nuevamente Bernoulli entre A y C: $0 = \frac{v^2}{2g} + \frac{P_C}{\gamma} + z_C + 3\frac{v^2}{2g}$

De donde:

$$z_C = -\left(4\frac{v^2}{2g} + \frac{P_C}{\gamma}\right) = -\left(2\frac{v^2}{g} + \frac{P_C}{\gamma}\right) \quad \text{..............................(2)}$$

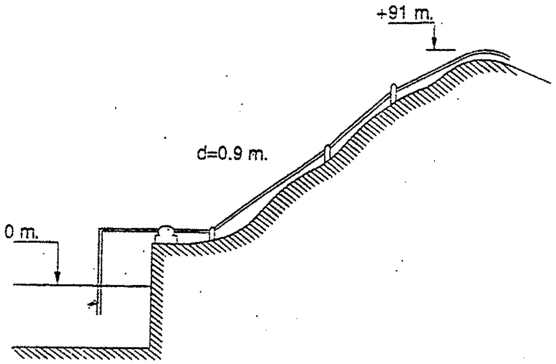
En el cual, por ser la presión en C vacío de $0.4\ kg/cm^2$, es relativa, bajo 0 relativo. o sea: $\frac{P_C}{\gamma} = -4m$ *de agua* ....(3)

Reemplazando (3) y demás datos en (2):

$$z_C = -2\left(\frac{\sqrt{6g}^2}{g} - 4\right) = -(12 - 4)$$

$$\boxed{z_C = -8m}$$

4.54. El agua de un reservorio es bombeada por encima de un cerro a través de una tubería de *0.90 m* de diámetro, manteniéndose una presión de *2.1* kg/cm^2 en la parte más alta de la tubería que se encuentra a *91 m* sobre el nivel del agua. El caudal bombeado es de *1.4* m^3/s y la pérdida de carga es de *10 m* entre el reservorio y la cumbre. ¿Qué cantidad de energía por segundo en caballos debe proporcionar el motor, sabiendo que su eficiencia es de *90%* y la de la bomba *80%*?



Resolución:

La energía que debe proporcionar el motor es: $E = \gamma \cdot Q \cdot B$ (*al 100%*)

$$E = \gamma \cdot Q\left(\frac{v_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\gamma} + z_1 + p.c.\right) \quad \text{.......................(1)}$$

Donde:

$\gamma = 1000\ ^{Kg}/_{m^3}$

$Q = 1.4\ ^{m^3}/_{s}$

$v_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{1.4}{\frac{\pi(0.9)^2}{4}} = \frac{1400}{0.636} = 2.20\ ^{m}/_{s}$

$P_1 = 2.1\ ^{Kg}/_{cm^2} = 21m$ *de agua*

$z_1 = 91m$

$p.c. = 10m$

Reemplazando estos datos en (1):

$$E = 1000 * 1.4\left(\frac{2.20^2}{19.6} + 21 + 91 + 10\right)$$

$$E = 1000 * 1.4(0.247 + 21 + 91 + 10)$$

$$E = 171146\ ^{Kg\text{-}m}/_{s}$$

Esta energía en caballos, considerando la eficiencia es:

$$E = \frac{171146}{76 \cdot 0.90 \cdot 0.80}$$

$$\boxed{E = 3128\ HP}$$

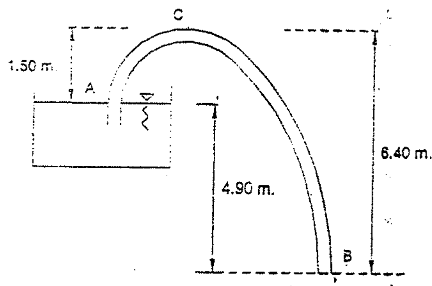
4.55. En la figura se demuestra un sifón que descarga agua del tanque. La diferencia de nivel entre un punto A en la superficie libre y el vértice del sifón es *1.50 m*, y la diferencia de nivel entre el vértice y el punto B en la salida es *6.40 m*. El diámetro de la tubería es de *6"*. Si hay una pérdida de carga de *0.90 m* entre A y C, y de *1.10 m* entre C y B, se desea saber:

a) ¿Cuál es el gasto en *l/s*?

b) ¿Cuál es la presión absoluta en el vértice C expresada en kg/cm^2?

La presión atmosférica del lugar es de *58.6 cm* de mercurio y la temperatura ambiente de *25°C*.

Resolución:



a) Cálculo del gasto:

Tomando Bernoulli entre la superficie del reservorio A y la salida B:

$$\frac{v_A^2}{2g}+\frac{P_A}{\gamma}+z_A=\frac{v_B^2}{2g}+\frac{P_B}{\gamma}+z_B$$

Como las presiones en ambos puntos son iguales tenemos: $(v_A = 0)$

$$0+0+4.90=\frac{v_B^2}{2g}+(0.90+1.10)$$

$$\frac{v_B^2}{2g}=2.90m \ de\ agua$$

$$v_B = 2.90*19.6 = 7.50 \, m/s$$

$$Q = v_B \cdot A_6 = 7.50*0.0182 = 0.37 \, m^3/s$$

$$\boxed{Q = 137 \, l/s}$$

b) Presión absoluta en C:

Tomando Bernoulli entre A y C:

$$0+\frac{P_A}{\gamma}+z_A=\frac{v_C^2}{2g}+\frac{P_C}{\gamma}+z_C+p.c._{AC}$$

Donde: $\frac{P_A}{\gamma}=58.6*13.6=796.96cm=7.97m \ de\ agua$

Luego: $0+7.97+0=2.90+\frac{P_C}{\gamma}+1.50+0.90$

$\frac{P_C}{\gamma}=2.67m \ de\ agua$ (presión mayor a la del vapor de agua a 25°C : 0.320m de agua)

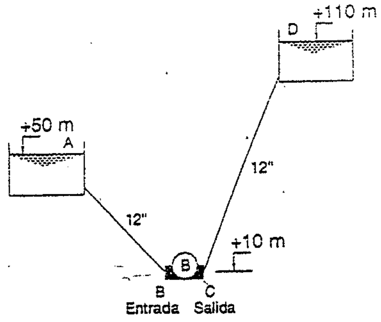
$\boxed{Respuesta: P_C = 0.267 \, Kg/cm^2}$

4.56. En el sistema de la figura, la bomba BC, extrae $65 \ l/s$ de aceite, cuya densidad relativa es 0.82 del reservorio A para el D.

La pérdida de carga de A - B es $8 \ m$ de aceite y de C - D, $22 \ m$.

a) ¿Qué potencia debe tener la bomba, si su eficiencia es 80%?

b) Dibujar la línea de energía total.



Resolución:

La potencia de la bomba será:

$$Pot.Bomba=\frac{\gamma \cdot Q(B_S-B_E)}{eficiencia} \quad \text{.........(1)}$$

Siendo el Bernoulli de entrada:

$$B_E=\frac{v_A^2}{2g}+\frac{P_A}{\gamma}+z_A-p.c.$$

(Se notará que la pérdida de carga lleva signo negativo; es diferente a cuando se toma Bernoulli entre dos puntos)

Donde: $P_A=0\,;\,v_A=0\,;\,z_A=50-10=40m\,;\,p.c.=8m$

$\therefore \ B_E=0+0+40-8=32m \ de\ aceite$ ....(2)

El Bernoulli de salida será:

$$B_S=\frac{v_D^2}{2g}+\frac{P_D}{\gamma}+z_D+p.c.$$

(Se notará que ahora la pérdida de carga es positiva, porque es una carga que debe vencer la bomba para llevar el aceite a D).

Donde: $P_D=0\,;\,v_D=0\,;\,z_D=110-10=100m\,;\,p.c.=22m$

$\therefore \ B=0+0+100+22=122m \ de\ aceite$ ....(3)

Reemplazando (2) y (3) y demás datos en (1), dividiendo entre $76 \ kg\text{-}m/s$ para que nos de en HP.

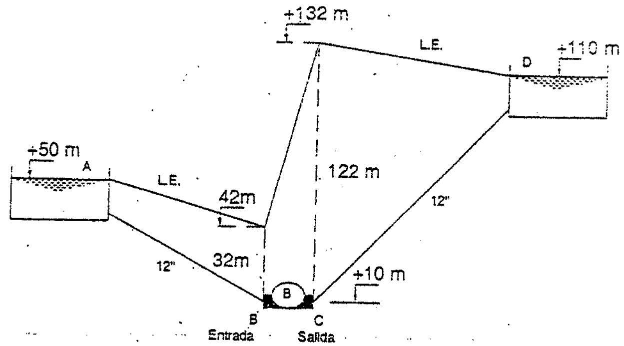
$$Pot.Bomba=\frac{820*0.065*(122-32)}{0.80*76}=\frac{820*0.065*90}{0.80*76}$$

$$\boxed{Pot.Bomba = 79 \, HP}$$

Para hallar la línea de energía, a las cotas de los puntos A, B, C y D, se le suma la carga de presión y la velocidad. Se obtiene tomando Bernoulli entre dos puntos.

De (2): $\dfrac{v_B^2}{2g}+\dfrac{P_B}{\gamma}=32m$ *de aceite*

De (3): $\dfrac{v_C^2}{2g}+\dfrac{P_C}{\gamma}=122m$ *de aceite*

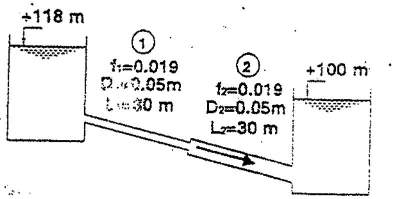


La línea piezométrica, es la que une presiones de los puntos A, B, C y D.

4.57. Para el sistema mostrado determine el caudal que pasa por las tuberías *1* y *2*. Dibujar luego la LÍNEA DE ENERGIA Y LÍNEA PIEZOMÉTRICA, si las pérdidas de carga son:

p.c. entrada en 1 $=0.5\dfrac{v_1^2}{2g}$

p.c. transición 1–2 $=9\dfrac{v_2^2}{2g}$



Resolución:

Aplicando Bernoulli entre A y B:

$$z_A+\frac{P_A}{\gamma}+\frac{v_A^2}{2g}=z_B+\frac{P_B}{\gamma}+\frac{v_B^2}{2g}+\sum p.c._{AB}$$

$$\Rightarrow \sum p.c._{AB}=18m$$

O sea:
$$18=0.5\frac{v_1^2}{2g}+f_1\frac{L_1}{D_1}\frac{v_1^2}{2g}+9\frac{v_2^2}{2g}+f_2\frac{L_2}{D_2}\frac{v_2^2}{2g}+\frac{v_2^2}{2g}$$

El último término del segundo miembro es incluido como pérdida de carga, porque el flujo pierde toda su energía cinética al salir de la tubería.

$$18=\frac{v_1^2}{2g}(0.5+11.4)+\frac{v_2^2}{2g}(9+9.25+1)\quad\text{.........(1)}$$

Por continuidad: $Q=v_1\cdot A_1=v_2\cdot A_2\quad\Rightarrow\quad v_1=4\cdot v_2$ ....(2)

$$\wedge\quad \frac{v_1^2}{2g}=16\frac{v_2^2}{2g}\quad\text{.........(3)}$$

(3) en (1): $$18=\frac{16\cdot v_2^2}{2g}(11.9)+\frac{v_2^2}{2g}(19.25)=209.65\frac{v_2^2}{2g}$$

$$\Rightarrow v_2=1.29\,m/s\ ,\ en\ (2)\ \rightarrow\ v_1=5.16\,m/s$$

$$Q=v_2\cdot A_2=1.29\frac{\pi\cdot(0.10)^2}{4}=0.010$$

$$\Rightarrow \boxed{Q=10\,l/s}$$

TRAZOS DE LA LÍNEA DE ENERGÍA Y LÍNEA PIEZOMÉTRICA.

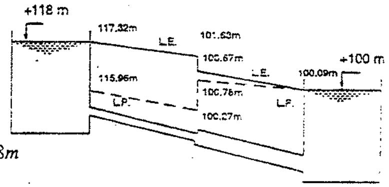
$p.c.\ entrada\ 1=0.5\dfrac{v_1^2}{2g}=0.68m$

$p.c.\ fricción\ 1=f_1\dfrac{L_1}{D_1}\dfrac{v_1^2}{2g}=15.69m$

$p.c.\ transición\ 1\!-\!2=9\dfrac{v_2^2}{2g}=0.76m$

$p.c.\ por\ fricción\ 2=f_2\dfrac{L_2}{D_2}\dfrac{v_2^2}{2g}=0.78m$

$p.c.\ salida=\dfrac{v_2^2}{2g}=0.09m$

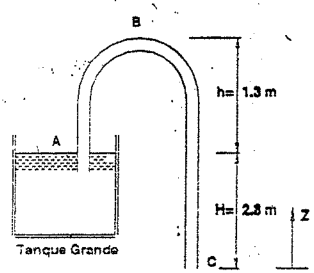


4.58. Para el sifón mostrado:

a) Hallar la velocidad de salida v_C y la presión manométrica en B.

b) Hallar la altura máxima del punto B antes que se produzca cavitación.

$P_{vapor}=0.18\cdot\gamma_{H_2O}$ $\qquad P_{atm}=10.33\cdot\gamma_{H_2O}$



Resolución:

Bernoulli entre A y C:

$$\frac{P_A}{\rho}+\frac{v_A^2}{2}+g\cdot z_A=\frac{P_C}{\rho}+\frac{v_C^2}{2}+g\cdot z_C\quad\text{.....(1)}$$

$P_A=P_C=P_{atm}$

$v_A=0$

$z_C=0\ ;\ z_A=2.8$

De (1):

$$g \cdot z_A = \frac{v_C^2}{2} + g \cdot z_C$$

$$v = \sqrt{2g \cdot z_A} = 7.408 \, m/s$$

Hallando P_B

Bernoulli entre B y C: $\frac{P_B}{\rho} + \frac{v_B^2}{2} + g \cdot z_B = \frac{P_C}{\rho} + \frac{v_C^2}{2} + g \cdot z_C$; $v_B = v_C$

$$\boxed{P_B = P_C + \rho \cdot g\,(z_C - z_B)} \quad P_C = P_{atm}$$

$$P_B = -0.410 \, Kgf/cm^2 \quad (manométrica)$$

Altura máxima

Bernoulli entre A y B: $\frac{P_{atm}}{\gamma_{H_2O}} + z_A + \frac{v_A^2}{2g} = \frac{P_{vap}}{\gamma_{H_2O}} + z_B + \frac{v_B^2}{2g}$

$v_B \to 0$ (*condición para altura máxima*)

$$\boxed{z_B = 12.95 m}$$

4.59. Para el sistema mostrado, hallar:

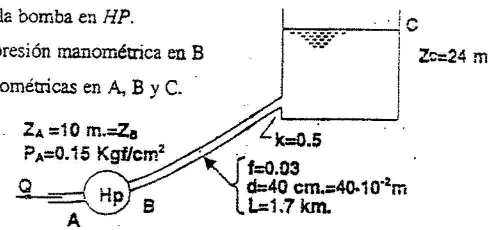
a) La potencia de la bomba en *HP*.

b) La carga de la presión manométrica en B

c) Las alturas piezométricas en A, B y C.

Q = 200 l/s

$\rho_{relativa} = 0.86$



Resolución:

Datos: $Q = 200 \, l/s = 200 * 10^{-3} \, m^3/s$

$z_A = 10m = z_B$

$P_A = 0.15 \, Kgf/cm^2 = 0.15 * 10^4 \, Kgf/m^2$

a) Bernoulli entre A y C:

$$\frac{P_A}{\gamma} + \frac{v_A^2}{2g} + z_A + H_{bomba} - h_f - k\frac{v_A^2}{2g} = \frac{P_C}{\gamma} + \frac{v_C^2}{2g} + z_C \quad \text{.............(1)}$$

$$v_D = v_B = v_A = \frac{200 * 10^{-3} \, m^3/s}{\frac{\pi}{4}(40 * 10^{-2})m^2} = 1.59 \, m/s$$

$$h_f = f \cdot \frac{L}{d} \cdot \frac{v_B^2}{2g} = 0.03 * \frac{1700}{40 * 10^{-2}} * \frac{1.59}{2(9.8)^2} = 16.44 \, m$$

En (1): $H_{BOMBA} = z_C - \frac{P_A}{\gamma} - \frac{v_A^2}{2g} - z_A + h_f + K\frac{v_D^2}{2g}$

$$H_B = 24 - \frac{0.15 * 10^4}{0.86 * 10^3} - \frac{(1.59)^2}{2(9.8)} - 10 + 16.44 + 0.5 * \frac{(1.59)^2}{2(9.8)}$$

$$\Rightarrow \boxed{H_B = 28.69 \, m}$$

$$Pot_{BOMBA} = \gamma \cdot Q \cdot H_{BOMBA} = (0.86 * 10^3)(200 * 10^{-3})(28.69)$$

$$\boxed{Pot_{BOMBA} = \frac{4934.68}{75} HP = 66 \, HP}$$

b) Bernoulli entre A y B:

$$\frac{P_A}{\gamma} + \frac{v_A^2}{2g} + H_{BOMBA} = \frac{P_B}{\gamma} + \frac{v_B^2}{2g}$$

$$P_B = P_A + \gamma \cdot H_{BOMBA} = 0.15 * 10^4 \, Kgf/m^2 + 0.86 * 10^3 * 28.69 \, Kgf/m^2$$

$$\Rightarrow \boxed{P_B = 26173.4 \, Kgf/m^2 = 2.167 \, Kgf/m^2} \; (manométrica)$$

c) Alturas piezométricas en A, B, y C => h_A, h_B y h_C.

$P_A = 0.15 \cdot 10^4 \, Kgf/m^2 \quad \Rightarrow \quad h'_A = \frac{P_A}{\gamma} = 1.74 m$

$\Rightarrow \boxed{h_A = 11.74 m}$

$P_B = 26173 \, Kgf/m^2 \quad \Rightarrow \quad h'_B = \frac{P_B}{\gamma} = 30.43 m$

$\Rightarrow \boxed{h_B = 40.43 m}$

$P_C = 0 \quad \Rightarrow \quad h'_C = 0$

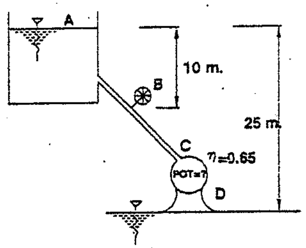
$\Rightarrow \boxed{h_C = 24 m}$

4.60. En el sistema mostrado en la figura, hallar:

a) El caudal que pasa por la tubería

b) La potencia de la turbina C - E.

Tubo de diámetro = 0.5 m



$\frac{Kg}{m^3} \cdot \frac{m^2}{s^2} = \frac{Kg}{m^2 s^2} \quad hr = \frac{Kg}{h\,s^3}$

Pérdidas: $h_{L\,A\to B} = h_{L\,B\to C} = h_{L\,D\to E} = 2m$

$P_B = 0.4\ ^{kg}/_{cm^2}$

$v_E \to 0$

Resolución:

$$Pot_{\cdot ideal} = \gamma \cdot Q \cdot H_{\substack{pérdida\ de\ carga \\ entre\ C-D}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Cálculo del caudal de Q en el tubo:

$$\frac{P_A}{\gamma} + \frac{v_A^2}{2g} + z_A - h_{AB} = \frac{v_B^2}{2g} + \frac{P_B}{\gamma} + z_B$$

$$v_B^2 = 2g\left(\left(\frac{P_A - P_B}{\gamma} + (z_A - z_B)\right) - h_{L\,A-B}\right)$$

$$v_B = \sqrt{2(9.8)\left(\frac{-0.4}{1\cdot 10^{-3}} * 10^{-2} + 10 - 2\right)}$$

$$\boxed{v_B = 8.85\ ^{m}/_{s}}$$

$$Q_B = v_B \cdot A_{tubo} = 8.85 * \frac{(0.5)^2}{4}\pi = 1.74\ ^{m^3}/_{s}$$

Cálculo HL_{C-D}: Cálculo : $\begin{cases} h_{L\,A-C} \\ h_{L\,D-E} \end{cases}$

$$\frac{v_A^2}{2g} + \frac{P_{atm}}{\gamma} - \overset{\text{Pérdida}}{H} + z_A = \frac{v_C^2}{2g} + \frac{P_C}{\gamma} + z_C$$

$$\frac{v_D^2}{2g} + \frac{P_D}{\gamma} + z_D - 2 = \frac{v_E^2}{2g} + \frac{P_{atm}}{\gamma} + z_E$$

Restando:

$$H_{L\,C-D} = \frac{v_A^2}{2g} + \frac{P_{atm}}{\gamma} - 4 + z_A - \left(\frac{v_E^2}{2g} + P_{atm} + z_E + 2\right)$$

$$H_{L-D} = (z_A - 4) - (z_B + 2) = (25 - 4) - (0 + 2) = 19$$

$$\Rightarrow Pot = \frac{\gamma \cdot Q_B \cdot H_{L\,C-D} \cdot (rendimiento)}{75}$$

$$\boxed{Pot. = 286\ HP}$$

4.61. Una tubería conduce un líquido de *900 kg/m³* de peso específico, experimenta un cambio de sección en tal forma que de un diámetro de *6"* en la sección *A*, pasa a tener un diámetro de *18"* en la sección *B*. La intensidad de presión en *A* es *0.9 kg/cm²* y en *B* *0.6 kg/cm²*. Determínese la dirección del flujo y la pérdida de carga entre las dos secciones mencionadas. El nivel de *B* es *4 m* superior al de A.

Resolución:

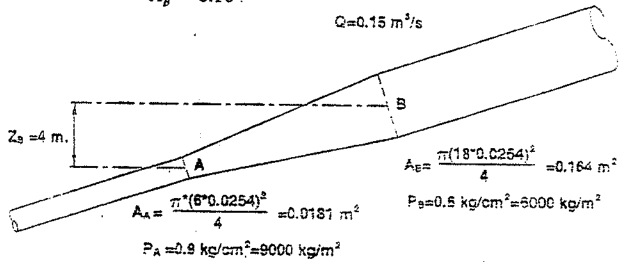
Como la dirección del flujo es desconocida, supongamos que sube de *A* hacia *B*:

Por Bernoulli: $$\frac{v_A^2}{2g} + \frac{P_A}{\gamma} + z_A = \frac{v_B^2}{2g} + \frac{P_B}{\gamma} + z_B + p.c._{AB} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Por continuidad: $Q = v_A \cdot A_A = v_B \cdot A_B$

Luego: $$v_A = \frac{Q}{A_A} = \frac{0.15}{0.0181} = 8.29\ ^{m}/_{s}$$

$$v_B = \frac{Q}{A_B} = \frac{0.15}{0.164} = 0.915\ ^{m}/_{s}$$



Reemplazando valores en (1):

$$\frac{(8.29)^2}{19.6} + \frac{9000}{900} + 0 = \frac{(0.915)^2}{19.6} + \frac{6000}{900} + 4 + p.c._{AB}$$

$$3.5 + 10 = 0.04 + 6.68 + 4 + p.c._{AB} \quad \Rightarrow \quad p.c._{AB} = 2.78m$$

Como la pérdida de carga es positiva, el sentido que se supuso al comienzo es el correcto, si hubiera salido negativo, la dirección del flujo era contraria a la que se supuso.

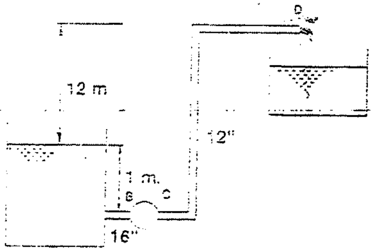
Por lo tanto: $\boxed{\text{Dirección del flujo = Sube de A hacia B}}$

4.62. En el sistema de la figura se ha medido una descarga de *100 l/s*. El diámetro de la tubería de succión es de *16"* y el de la descarga *12"*. Determinar la potencia que debe tener una bomba de *80%* de eficiencia si la pérdida de carga entre *A* y *B* es equivalente a *4* cargas de velocidad y la pérdida entre *D* y *C* es igual a *5 m* de agua. Halle la presión en los puntos *B* y *C* en *kg/cm²* relativos.

Resolución:

Aplicando Bernoulli entre A y B

Donde: $v_A = 0$; $P_A = 0$; $z_A = 0$



Luego: $$0=\frac{v_B^2}{2g}+\frac{P_B}{\gamma}+z_B+p.c.$$

De donde: $$\frac{P_B}{\gamma}=-\left(\frac{v_B^2}{2g}+z_B+p.c.\right)$$

Reemplazando datos:

$$\frac{P_B}{\gamma}=-\left(\frac{v_B^2}{2g}-1+4\frac{v_B^2}{2g}\right)=1-5\frac{v_B^2}{2g}$$

Pero: $$v_B=\frac{Q}{A_B}=\frac{0.100}{\frac{\pi(16*0.0254)^2}{4}}=\frac{0.100}{0.1295}=0.77\ m/s$$

$$\therefore\ \frac{P_B}{\gamma}=1-5*\frac{(0.77)^2}{19.6}=1-0.151=0.849\,m\ de\ agua.$$

$$\boxed{P_B=0.0849\ Kg/cm^2}$$

Aplicando Bernoulli entre C y D; donde: $v_C=v_D$, por tener la misma área.

$$\frac{v^2}{2g}+\frac{P_C}{\gamma}+z_C=\frac{v^2}{2g}+\frac{P_D}{\gamma}+z_D+p.c.$$

$$\Rightarrow\quad \frac{P_C}{\gamma}=\frac{P_D}{\gamma}+z_D+p.c.-z_C$$

En el cual: $P_D=0$ *relativos* ; $z_D=1+12=13m$; $p.c.=5m$; $z_C=0$

Sustituyendo estos datos: $\frac{P_B}{\gamma}=0+13+5-0=18m$ *de agua.*

$$\boxed{P_C=1.8\ Kg/cm^2}$$

A la bomba entra una potencia: $Pot._E=\gamma\cdot Q\cdot B_B$

$$Pot._E=1000*0.1*\left(\frac{v_B^2}{2g}+\frac{P_B}{\gamma}+z_B\right)=1000*0.1*\left(\frac{0.77^2}{19.6}+0.849+0\right)$$

$$Pot._E=87.9\ Kg\text{-}m/s$$

De la bomba sale una potencia: $Pot._S=\gamma\,Q\,B_C$

$$Pot._S=1000*0.1*\left(\frac{v_C^2}{2g}+\frac{P_C}{\gamma}+z_C\right)=1000*0.1*\left(\frac{v_C^2}{2g}+18.0+0\right)$$

Pero: $$v_C=\frac{Q}{A_C}=\frac{0.100}{\frac{\pi(12*0.0254)^2}{4}}=\frac{0.100}{0.073}=1.37\ m/s$$

$$\therefore\ Pot._S=1809.6\ Kg\text{-}m/s$$

La potencia que debe tener la bomba será:

$$Pot._{BOMBA}=(Pot._S-Pot._E)\frac{1}{Eficiencia}$$

$$Pot._{BOMBA}=\frac{(1809.6-87.9)}{0.80}=2152\ Kg\text{-}m/s$$

En HP: $$Pot._{Bomba}=\frac{2152}{76}$$

$$\boxed{Pot._{Bomba}=28.3\,HP.}$$

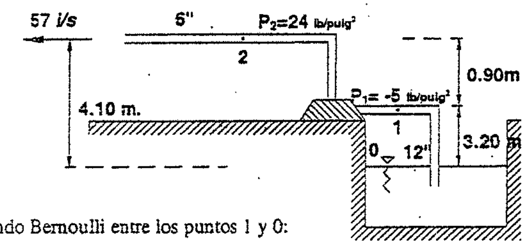
4.63. Una bomba centrífuga, bombea agua de un pozo a través de una tubería vertical de *12"*, la que se extiende debajo de la superficie del agua. La descarga se efectúa por medio de una tubería horizontal de *6"* de diámetro situada a *4.10 m* sobre el nivel del agua. Mientras se bombea *57 l/s* un manómetro colocado en la descarga registra una presión de *24 lb/pulg²* y un manómetro colocado en la succión registra *-5 lb/pulg²*. Ambos manómetros están separados verticalmente por una distancia de *0.90m.*

Se desea:

a) Computar la pérdida de carga en la tubería de succión.

b) Computar la variación de energía en *kg-m/s* entre las dos secciones que llevan los manómetros.

<u>Resolución:</u>



a) Tomando Bernoulli entre los puntos 1 y 0:

$$\frac{v_0^2}{2g}+\frac{P_0}{\gamma}+z_0=\frac{v_1^2}{2g}+\frac{P_1}{\gamma}+z_1+p.c.\ \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Donde:

$$v_0=0\ ;\ P_0=0\ ;\ z_0=0\ ;\ z_1=3.20m$$

$$v_1=\frac{Q}{A_1}=\frac{0.057}{\pi(12*0.0254)^2}=\frac{0.057}{0.073}=0.78\ m/s$$

$$P_1=-5\ lb/pulg^2=-0.352\ Kg/cm^2=-3.52m\ de\ agua$$

Reemplazando estos datos en (1):

$$0+0+0=\frac{0.78^2}{19.6}-3.52+3.20+p.c.$$
$$0=0.03-3.52+3.20+p.c.$$

$$\boxed{p.c.=0.29m\ de\ agua}$$

b) La variación de energía entre las dos secciones *1* y *2*, será la diferencia de Bernoulli, es decir:

$$\Delta H=\frac{v_2^2}{2g}+\frac{P_2}{\gamma}+z_2-\left(\frac{v_1^2}{2g}+\frac{P_1}{\gamma}+z_1\right)\ \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

Donde:

$$v_2=\frac{Q}{A_2}=\frac{0.057}{\frac{\pi*(6*0.0254)^2}{4}}=\frac{0.057}{0.0182}=3.12\,m/s$$

$$P_2=21\,lb/pulg^2=1.692\,Kg/cm^2=16.92\,m\ de\ agua$$

$$z_1=3.20\,m$$

$$z_2=4.10\,m$$

Reemplazando datos en (2):

$$\Delta H=\frac{3.12^2}{19.6}+16.92+4.10-\left(\left(\frac{0.78^2}{19.6}\right)-3.52+3.20\right)$$
$$\Delta H=0.496+16.92+4.10-(0.03-3.52+3.20)$$
$$\therefore\quad \Delta H=21.806\,m\ de\ agua$$

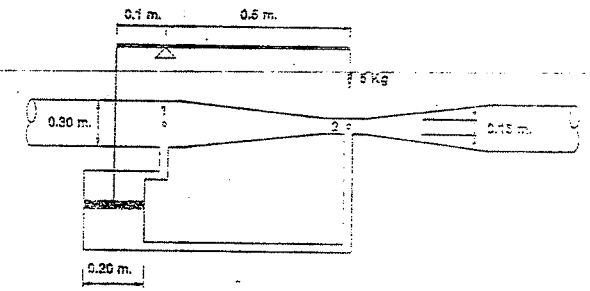
La variación de energía en kg-m/s será: $E=\gamma\cdot Q\cdot\Delta H$

$$\Delta E=1000*0.057*21.806$$

$$\boxed{\Delta E=1242.9\,Kg\text{-}m/s}$$

4.64. En una tubería horizontal de *0.30 m* de diámetro se tiene un regulador de gasto consistente en una válvula colocada agua arriba de una estrangulación. La válvula es accionada por un émbolo de *0.20 m* de diámetro. Sobre la cara superior de este émbolo actúa la presión del agua en la parte ancha de la tubería y sobre la cara inferior actúa la presión en la parte estrangulada de la tubería. La prolongación superior del vástago de la válvula está conectada a uno de los extremos de una palanca cuyo eje de giro queda a *0.10 m* del vástago, en el otro extremo de la palanca actúa un peso de *5 kg*. Se quiere saber qué gasto debe pasar por la tubería para que el sistema esté en equilibrio. El peso del vástago y del émbolo es *5 kg*. Puede considerarse que no existe pérdida de carga en la tubería.

<u>Resolución:</u>



Para que el sistema esté en equilibrio, se debe tener:

$$(5-F)0.10=5*0.5$$

Siendo *F* la diferencia de presiones que actúan sobre las caras del émbolo.

Despejando: $F=20\ Kg$

Como "*A*" es el área del émbolo:

$$P=\frac{F}{A}=\frac{20}{\frac{\pi(0.20)^2}{4}}=\frac{20}{0.0314}=638\,Kg/m^2$$

Aplicando Bernoulli entre *1* y 2:

$$\frac{v_1^2}{2g}+\frac{P_1}{\gamma}+z_1=\frac{v_2^2}{2g}+\frac{P_2}{\gamma}+z_2$$

$$\frac{P_1-P_2}{\gamma}=\frac{v_2^2-v_1^2}{2g}+z_2-z_1\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

En el cual:
$$\frac{P_1-P_2}{\gamma}=\frac{P}{\gamma}=\frac{638\,kg/m^2}{1000\,kg/m^3}=0.638m\ de\ agua.$$

Por continuidad:

$$v_2\cdot A_2=v_1\cdot A_1\quad\Rightarrow\quad v_2=\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 v_1=v_1\left(\frac{0.30}{0.15}\right)^2$$

$z_2-z_1=0$ (por estar en el mismo eje)

reemplazando estos valores en (1): $0.638=\frac{(4v_1)^2-v_1^2}{19.6}+0$

$$15v_1^2=0.638(19.6)=12.47$$
$$v_1=0.912\,m/s$$

El gasto será:
$$Q_1=v_1\cdot A_1=0.912*\frac{\pi(0.30)^2}{4}=0.912*0.07=0.06384\,m^3/s$$

$$\boxed{Q=63.84\,l/s}$$

4.65. Hallar la presión en el punto A. en kg/cm^2 relativos, cuando la altura de agua sobre el centro del tubo divergente es *1.20 m.* ¿Cuál será la altura de agua, para que la presión en *A* sea *0.035* kg/cm^2 absolutos? *Considérese la pérdida de carga = 0*

<u>Resolución</u>:

La velocidad del flujo en el punto *B*, de salida es:

$$v_B = \sqrt{2g \cdot h} \quad \text{...}(1)$$

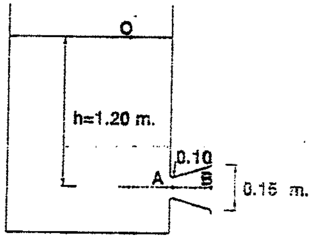
$$v_B = \sqrt{2g \cdot 1.20} = 4.85\ m/s$$

Por continuidad:

$$v_A = v_B\left(\frac{A_B}{A_A}\right) = v_B\left(\frac{d_B}{d_A}\right)^2 = v_B\left(\frac{0.15}{0.10}\right)^2 = 2.25v_B \quad \text{..............................}(2)$$

$$v_A = 2.25 * 4.85 = 10.91\ m/s$$

Tomando Bernoulli entre *0* y *A*:



$$0 - 0 + 1.2 = \frac{10.91^2}{19.6} + \frac{P_A}{\gamma} + 0$$

$$\frac{P_A}{\gamma} = 1.2 - 6.08 = -4.88\,m\ de\ agua$$

$$\boxed{P_A = -0.488\ kg/cm^2\ relativos}$$

Si en *A* debe haber una presión *0.035* kg/cm^2 *absoluta* = - *(1.033 - 0.035)* kg/cm^2 *relativos* = *-0.998* kg/cm^2 *relativos*, la altura de agua debe variar;

Tomando Bernoulli entre *0* y *A*: $$0 + 0 + h = \frac{v_A^2}{2g} + \frac{P_A}{\gamma} + 0$$

Reemplazando (2) a esta última: $$h = \frac{(2.25v_B)^2}{2g} + \frac{P_A}{\gamma}$$

$$h = \frac{5.0625v_B^2}{2g} + \frac{P_A}{\gamma} \quad \text{..............................}(3)$$

Pero tenemos que: $P_A = -0.988\ kg/cm^2$ *relativos*

$$\frac{P_A}{\gamma} = -9.98m\ de\ agua\ relativos \quad \text{........................}(4)$$

Sustituyendo (1) y (4) en (3): $$h = \frac{5.0625\left(\sqrt{2g \cdot h}\right)^2}{2g} - 9.98$$

$$h = \frac{5.0625(2g \cdot h)}{2g} - 9.98$$

$$h = 5.0625h - 9.98$$

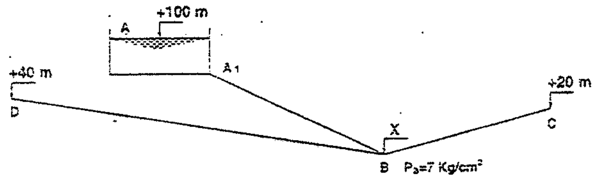
$$4.0625h = 9.98$$

$$\therefore \quad \boxed{h = 2.46m}$$

4.66. En el croquis mostrado en la figura se sabe que la pérdida de carga en los tres tramos suma *120 m.* Considerando despreciable la pérdida de carga debida a la velocidad, hallar la cota del punto *B* y la longitud de cada tramo, sabiendo que las pendientes hidráulicas $\left(\frac{h^*}{L}\right)$ son:

Para *AB = 0.02;* *BC = 0.03;* *BD = 0.08*

Los puntos *C* y *D* son de descarga libre.



<u>Resolución</u>:

La presión en el punto *A* es *0* kg/cm^2 relativos, como también en los puntos de descarga *C* y *D*. Despreciaremos la pérdida de carga debida a la velocidad según los datos del problema.

Ahora bien, sea *"x"* la cota en el punto *B*, cuya presión es *7* kg/cm^2, de lo que se tiene: $$\frac{P_B}{\gamma} = 70m\ de\ agua$$

Aplicando Bernoulli en cada uno de los tramos:

TRAMO *AB*: $100 = 70 + x + p.c._{AB}$ ....(1)

TRAMO *BD*: $70 + x = 40 + p.c._{BD}$ ....(2)

TRAMO *BC*: $70 + x = 20 + p.c._{BC}$ ....(3)

Sumando y ordenando: $x - (p.c._{AB} + p.c._{BD} + p.c._{BC}) = -110$

Pero dato es: $p.c._{AB} + p.c._{BD} + p.c._{BC} = 120m$

Luego: $x - 120 = -110$

$\boxed{\text{Cota del punto } B = x = 10\ m}$ ....(4)

Como: $pendiente = \frac{hf}{L}$; $\quad L = \frac{hf}{pendiente}$ $\quad$ *(donde hf = pérdida de carga)*

Reemplazando (4) en (1): $p.c._{AB} = 20m$ $\therefore\ \overline{AB} = \dfrac{20}{0.02} = 1000m$

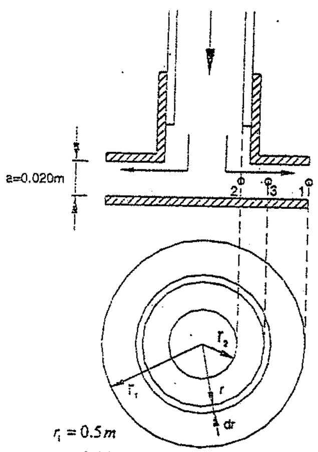
Reemplazando (4) en (2): $p.c._{BD} = 40m$

$\therefore\ BD = \dfrac{40}{0.08} = 500m\ ,\ \ \therefore\ \ BC = \dfrac{40}{0.03} = 2000m\ \ \ ya\ que\ \ p.c._{BC} = 60m$

$$\boxed{AB = 1000m}$$
$$\boxed{BC = 2000m}$$
$$\boxed{BD = 500m}$$

4.67. Se tiene dos placas circulares horizontales, de 1m de diámetro, paralelas entre sí. La placa inferior es fija y la superior puede deslizarse sobre un tubo vertical central. Obténgase la magnitud de la fuerza total que habría que hacer hacia arriba para que el gasto de *50 l/s* descargue con una separación de *0.02 m* entre las planchas. El agua hace su ingreso por el tubo central y luego fluye radialmente hacia fuera, con la velocidad decreciente, para descargar en la periferie. Despréciese la pérdida de carga y el peso propio de la placa. (ver figura)

Q = 50 l/s



$r_1 = 0.5m$
$r_2 = 0.05m$

Resolución:

El agua fluye radialmente hacia fuera con velocidad variable, pues según el radio, su área transversal (superficie lateral cilíndrica) varía. Por continuidad, la velocidad en un punto de radio *r*, será:

$$v = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{2\pi\cdot r\cdot a}\quad donde\ \begin{cases} Q = 0.05\,m^3/s \\ a = 0.02m \end{cases}$$

Luego:

$$v = \frac{0.05}{2\pi(0.02)r} = \frac{0.398}{r}\,m/s\ \ ....(1)$$

Tomando Bernoulli entre los puntos 3 y 2:

$$\frac{v_3^2}{2g} + \frac{P_3}{\gamma} + 0 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\gamma} + 0$$

Reemplazando (1) a esta última:

$$\frac{0.398^2}{2g\cdot r_3^2} + \frac{P_3}{\gamma} = \frac{0.398^2}{2g\cdot r_1^2} + 0$$

$$\frac{P_3}{\gamma} = \frac{0.398^2}{2g}\left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_3^2}\right)$$

Como: $\gamma = 1\ t/m^3$; $r_1 = 0.5\ m$; r_3 = radio en punto cualquiera = r, P_3 será una presión expresada en t/m^2. $P_3 = 0.00808\left(\dfrac{1}{0.25} - \dfrac{1}{r^2}\right)$

La fuerza total que se necesitará para levantar la placa, debe ser igual al empuje axial: $F = \int P\cdot dA$

Donde: $P = P_3\ ;\ \ dA = 2\pi\cdot r\cdot dr$

La fuerza total, será la integral entre los puntos 1 y 2:

$$F = 2\pi(0.00808)\int_{0.5}^{0.05} r\left(\frac{1}{0.25} - \frac{1}{r^2}\right)dr$$

$$F = 0.0509\left(\frac{r^2}{0.50} - Ln(r)\right)_{0.5}^{0.05}$$

$$F = 0.0509\left(\frac{0.05^2}{0.50} - \frac{0.5^2}{0.50} - Ln(0.05) + Ln(0.5)\right)$$

$$F = 0.0509\left(0.005 - 0.5 + Ln\left(\frac{0.5}{0.05}\right)\right)$$

$$F = 0.0509(0.005 - 0.5 + Ln(10))$$

$$F = 0.0509(1.8076) = 0.092\ toneladas$$

$$\boxed{F = 92kg.}$$

4.68. La presión en el punto de entrada de la tubería de succión de una bomba centrífuga; debe ser *0.28 kg/cm²* menos que la presión atmosférica. En el lado de salida de la tubería de impulsión, la presión será de *2.10 kg/cm²* sobre la presión atmosférica; el punto en que se mida esta presión debe situarse *0.90 m* por encima del punto en que se mida la primera presión. La potencia de la bomba es de *25 HP* y su rendimiento *81%*.

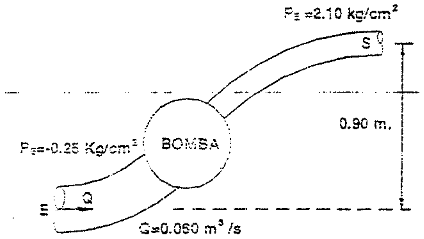
El gasto bombeado es *60 l/s*.

Determinar los diámetros de las tuberías de succión y de impulsión sabiendo que están en la relación de *4* a *3*.

Resolución:

La potencia de la bomba en *HP*, está dada por:

$$Pot. = \frac{\gamma\cdot Q(B_S - B_E)}{76\cdot Efic.}$$



Esta se puede escribir:

$$Pot. = \frac{\gamma \cdot Q}{76 \cdot Efic.}\left(\frac{v_S^2}{2g} + \frac{P_S}{\gamma} + z_S - \frac{v_E^2}{2g} - \frac{P_E}{\gamma} - z_E\right)$$

$$Pot. = \frac{\gamma \cdot Q}{76 \cdot Efic.}\left(\frac{v_S^2 - v_E^2}{2g} + \frac{P_S - P_E}{\gamma} + z_S - z_E\right)$$

Reemplazando valores:

$$25 = \frac{1000 * 0.060}{76 * 0.81}\left(\frac{v_S^2 - v_E^2}{2g} + \frac{2.10 - (-0.28)}{\gamma} + 0.90\right)$$

$$\frac{25 * 76 * 0.81}{1000 * 0.060} = \frac{v_S^2 - v_E^2}{2g} + 23.8 + 0.90$$

$$25.65 = \frac{v_S^2 - v_E^2}{2g} + 24.7$$

De donde: $v_S^2 - v_E^2 = 0.95 * 19.6$ .... (1)

De la ecuación de continuidad: $v_E \cdot A_E = v_S \cdot A_S$

$$\Rightarrow \frac{v_E}{v_S} = \frac{A_S}{A_E} = \left(\frac{D_S}{D_E}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \Rightarrow v_E = \frac{9}{16} v_S$$

Luego la expresión (1) quedaría: $v_S^2 - v_S^2\left(\frac{81}{256}\right) = 18.62$

Entonces: $v_S^2 = \frac{18.62 * 256}{175} \Rightarrow v_S = 5.22 \, m/s$

Luego: $D_S^2 = \frac{Q}{\frac{\pi}{4} v_S} = \frac{0.060}{0.785 * 5.22} = 0.0146$

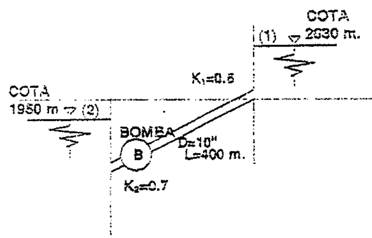
$\therefore$

$$\boxed{\begin{array}{l} D_S = 0.121\,m \\ D_E = \frac{4}{3} D_S = 0.161\,m \end{array}}$$

4.69. Calcular la potencia de una bomba que se interpondría en la tubería mostrada para que circule un caudal de reservorio (2) al reservorio (1); igual al que se origina de (1) a (2) sin bomba. Considerar las pérdidas mostradas, aparte de la fricción:

f = 0.02 ; eficiencia = 75%

Resolución:



Hay que señalar primero que Bernoulli; siempre se hace en el sentido de la velocidad.

Por lo tanto no consideramos la bomba.

Bernoulli entre (1) y (2).

$$2030 - K_1\frac{v^2}{2g} - K_2\frac{v^2}{2g} - f\frac{L}{D}\frac{v^2}{2g} = 1950$$

Despejando v^2: $v^2 = \frac{2g(2030-1950)}{K_1 + K_2 + f\frac{L}{d}}$

Reemplazando datos: $v^2 = \frac{19.6(2030-1950)}{0.5 + 0.7 + 0.02\left(\frac{400}{0.25}\right)}$

$$v = 6.87 \, m/s \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q = 0.337 \, m^3/s}$$

Entonces con esta misma velocidad pero en sentido inverso tendremos el Bernoulli entre (2) y (1), con bomba.

$$1950 - K_2\frac{v^2}{2g} - K_1\frac{v^2}{2g} - f\frac{L}{D}\frac{v^2}{2g} + H_B = 2030$$

Despejando H_B:

$$H_B = 2030 - 1950 + \left(K_1 + K_2 + f\frac{L}{D}\right)\frac{v^2}{2g}$$

$$H_B = 80 + \left(0.5 + 0.1 + 0.02\frac{(400)}{(0.254)}\right)\frac{(6.87)^2}{19.6}$$

$$H_B = 157.29\,m$$

Luego la potencia de la bomba considerando su eficiencia será:

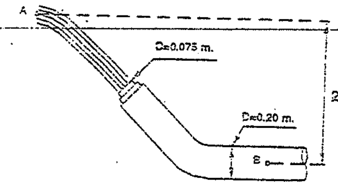
$$Pot. = \frac{\gamma \cdot Q \cdot H_B}{76\eta} = \frac{1000 * 0.337 * 157.3}{76 * 0.75} \Rightarrow \boxed{Pot. = 930\,HP}$$

4.70. La velocidad en el punto *A* de la figura es de *18 m/s*. ¿Cuál es la presión en el punto *B* sin considerar fricción?

Resolución:

Bernoulli entre *B* y *A*:

$$\frac{P_B}{\gamma}+\frac{v_B^2}{2g}=\frac{v_A^2}{2g}+z_A \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$



Entre D y A:

$$\frac{v_D^2}{2g}+z_D=\frac{v_A^2}{2g}+z_A$$

$$z_D \cong 0$$

$$\frac{v_D^2}{2g}=\frac{v_A^2}{2g}+z_A \quad \ldots\ldots\ldots(\alpha)$$

Reemplazando valores:

$$\frac{v_D^2}{2g}=\frac{(18)^2}{19.6}+21$$

$$\boxed{v_D=27.12\ m/s}$$

Por continuidad: $v_D\cdot A_D=v_B\cdot A_B$

$$v_D\cdot\frac{\pi}{4}(0.075)^2=v_B\cdot\frac{\pi}{4}(0.20)^2$$

$$v_B=0.1406\,v_D \quad\Rightarrow\quad \boxed{v_B=3.81\ m/s}$$

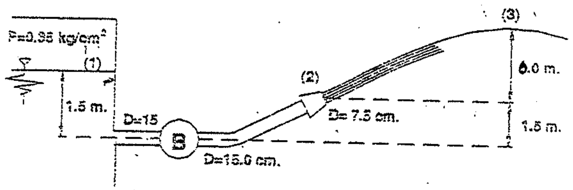
En (1): $$\frac{P_B}{\gamma}=\left(\frac{v_A^2}{2g}+z_A\right)-\frac{v_B^2}{2g}$$

$$\frac{P_B}{\gamma}=37.53-\frac{(3.81)^2}{19.60}=36.79m$$

$$\boxed{P_B=3.68\ kg/cm^2}$$

4.71. El agua de un gran depósito, tiene su superficie libre sometido a una presión manométrica de $0.35\ kg/cm^2$. El agua es bombeada y expulsada en forma de chorro libre mediante una boquilla. ¿Cuál es la potencia teórica de la bomba en HP?.

Resolución:



Q = V·A

Si el agua es expulsada en forma de chorro libre entonces en el punto (3) la velocidad es cero.

Bernoulli entre (2) y (3): $\frac{v_2^2}{2g}=6 \quad\ldots\ldots\ldots\ldots(\beta)$

Bernoulli entre (1) y (2): $H_B+\frac{P_1}{\gamma}=\frac{v_2^2}{2g} \quad\ldots\ldots(\alpha)$

$$H_B+\frac{P_1}{\gamma}=6$$

$$H_B=6-\frac{3500}{100} \quad\Rightarrow\quad H_B=2.5m$$

De (β):

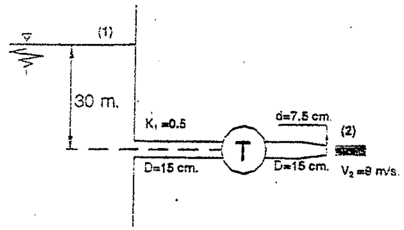
$$v_2=10.84\ m/s \quad\Rightarrow\quad Q=0.048\ m^3/s$$

$$Pot.=\frac{\gamma\cdot Q\cdot H}{76}=\frac{1000*0.048*2.5}{76}$$

$$\boxed{Pot.=1.58\ HP}$$

4.72. Despreciando el rozamiento en la tubería mostrada, calcular la potencia en HP desarrollada en la tubería por el agua procedente de un depósito de grandes dimensiones, teniendo la boquilla un coeficiente de velocidad de $C_V = 0.62$; *el rendimiento de la turbina = 80%;* $K_T = 1.5$

Resolución:



Haciendo un Bernoulli entre (1) y (2)

$$z_1-K_1\frac{v_1^2}{2g}-K_T\frac{v_1^2}{2g}-E_T-hf=\frac{v_2^2}{2g}$$

Por continuidad:

$$v_1\cdot A_1=v_2\cdot A_2$$

$$v_1=v_2\frac{A_2}{A_1}=9*\frac{(7.5)^2}{(15)^2}=2.25\ m/s$$

Por otro lado hf es la pérdida de carga en la boquilla e igual a:

$$h_f=K_2\cdot\frac{v_2^2}{2g} \quad con; \quad K_2=\frac{1}{C_v^2}-1=\frac{1}{(0.62)^2}-1=1.60 \quad\Rightarrow\quad K_2=1.60$$

Entonces:

$$30-0.5*\frac{(2.25)^2}{2g}-1.5*\frac{(2.25)^2}{2g}-1.6*\frac{(9)^2}{2g}-E_T=\frac{9^2}{2g}$$

De aquí: $E_T = 18.74m$

Si:

$$Q = 2.25 * \frac{\pi (0.15)^2}{4} = 0.0398\, m^3/s$$

$$Pot. = \gamma \cdot Q \cdot E_T \cdot n = 1000 * 0.0398 * 18.74 * 0.8$$

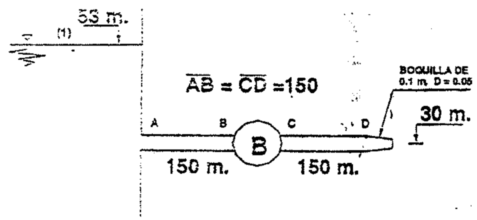
$$Pot. = 596.10\, kg\text{-}m/s$$

La potencia en HP desarrollada por la turbina será:

$$Pot. = \frac{596.10}{76} \quad \Rightarrow \quad \boxed{Pot. = 7.84\, HP}$$

4.73. En el sistema fluye agua. el diámetro de las tuberías es de $D = 0.10m$, $f = 0.02$ (Darcy) ¿Cuál es la potencia de la bomba para que fluya un caudal igual al que ocurriría sin bomba y sin fricción?. Considere sólo pérdida de carga por fricción.

Resolución:



Sin bomba, ni fricción:

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2$$

$$0 + 0 + 53 = 0 + \frac{v_2^2}{2g} + 30 \quad \Rightarrow \quad v_2 = 21.20\, m/s$$

$$Q = 21.2\left(\frac{0.05}{2}\right)^2 \pi \quad \Rightarrow \quad Q = 0.042\, m^3/s$$

Con bomba y fricción:

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\gamma} + z_1 - hf_1 + H - hf_2 = \frac{v_2^2}{2g} + z_2$$

$$0 + 0 + 53 - hf_1 + H - hf_2 = \frac{v_2^2}{2g} + 30$$

$$H = \frac{v_2^2}{2g} + hf_1 + hf_2 - 23$$

$$H = \frac{(21.2)^2}{2 \cdot 9.8} + hf_1 + hf_2 - 23 \quad \Rightarrow \quad H = hf_1 + hf_2 \quad ....(i)$$

Pero: $hf = f \dfrac{L}{D} \dfrac{v^2}{2g}$ ....(α)

Cálculo de v: $Q = v \cdot A \Rightarrow 0.042 = v\left(\dfrac{0.1}{2}\right)^2 \pi \Rightarrow v = 5.35\, m/s$

$$En\ (\alpha):\ hf_1 = 0.02\left(\frac{150}{0.1}\right)\left(\frac{(5.35)^2}{2 \cdot 9.8}\right) = 43.8 \quad \Rightarrow \quad hf_1 = 43.8m$$

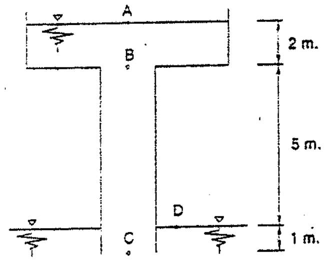
$$hf_2 = 43.8m$$

$$En\ (i):\ H = hf_1 + hf_2 = 43.8 + 43.8 = 87.60m$$

$$Pot. = \gamma \cdot Q \cdot H = (1000\, kg/m^3)(0.042\, m^3/s)(87.6m)$$

$$Pot. = 3679.20\, kg\text{-}m/s \quad \Rightarrow \quad \boxed{Pot. = 48.40\ HP}$$

4.74. Calcular el caudal que fluye en el sistema mostrado en la figura. Las tuberías son de $10\ cm$ de diámetro. Fluye un aceite de viscosidad $2.01x10^{-4}\ m^2/s$. Suponer flujo laminar.



Resolución:

Si aplicamos Bernoulli entre A y D:

$$\frac{P_A}{\gamma} + \frac{v_A^2}{2g} + z_A - hl = \frac{P_D}{\gamma} + \frac{v_D^2}{2g} + z_D$$

Como $P_A = P_D = P_{atm} = 0$ (manométrica)

Además: $V_A = V_D = 0$

$$\Rightarrow z_A - hl = z_D \quad \Rightarrow \quad z_A - z_D = hl$$

Por otro lado, la pérdida de carga se produce en la tubería BC y será igual:

$$hl = f \frac{L}{D}\frac{v^2}{2g} \quad \Rightarrow \quad z_A - z_D = f \frac{L}{D}\frac{v^2}{2g}$$

Si tomamos un plano de referencia que pase por D:

$$\Rightarrow z_A = 7m\ ;\ z_D = 0\ ;\ L = 6m\,(longitud\ de\ BC)$$
$$D = 0.1m$$

$$\therefore\ z_A = f \frac{6v^2}{0.1 * 19.6} \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{2.2867}{f} \quad ....(1)$$

Como el flujo es laminar:

$$f = \frac{64}{\text{Re}} \quad y \quad \text{Re} = \frac{v \cdot D}{\upsilon}$$

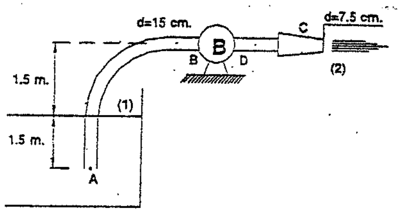
$$\Rightarrow f = \frac{64\upsilon}{v \cdot D} \quad \text{.......................} (2)$$

(2) en (1): $v^2 = \frac{2.2867\, v \cdot D}{64\upsilon} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{2.2867\, D}{64\upsilon}$

$D = 0.1m \; ; \quad \upsilon = 2.01 * 10^{-4}\, m^2/s \quad \Rightarrow \quad v = 17.8\, m/s$

$$Q = v \cdot A = 17.8 * \frac{\pi (0.1)^2}{4} \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q = 0.14\, m^3/s}$$

4.75. Una bomba extrae agua de un recipiente como se muestra. La bomba desarrolla sobre el flujo *10 HP*. ¿Cuál es la fuerza horizontal, que sobre el apoyo *D* desarrolla el flujo?



Resolución:

Hacemos Bernoulli entre (1) y (2):

$$H_B = \frac{v_2^2}{2g} + 1.5 \quad \text{.................} (1)$$

Por otro lado:

$$Pot. = \frac{\gamma \cdot Q \cdot H_B}{76} = 10$$

$$H_B = \frac{760}{\gamma \cdot Q} \quad \Rightarrow \quad H_B = \frac{0.760}{Q} \quad \text{.................................} (\alpha)$$

$$\Rightarrow en\ (1): \quad \frac{0.76}{Q} = \frac{v_2^2}{2g} + 1.5 = \frac{Q^2}{2g \cdot A^2} + 1.5$$

$$\frac{1}{2g \cdot A_2^2} = 11.55 \quad \Rightarrow \quad 11.55Q^3 + 1.5Q - 0.76 = 0$$

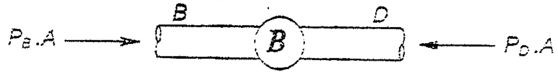
Resolviendo por aproximaciones; da: $Q = 0.3\ m^3/s$

De (α):

$$H = \frac{0.76}{Q} = \frac{0.76}{0.30} = 2.53m$$

$$v_D = \frac{Q}{A_0} = 16.98\, m/s$$

Debido a la presencia de una bomba se origina entre los puntos *B* y *D* una diferencia de presiones:



Luego la resultante de estas fuerzas será tomada por el apoyo.

$$F = P_D \cdot A - P_B \cdot A$$

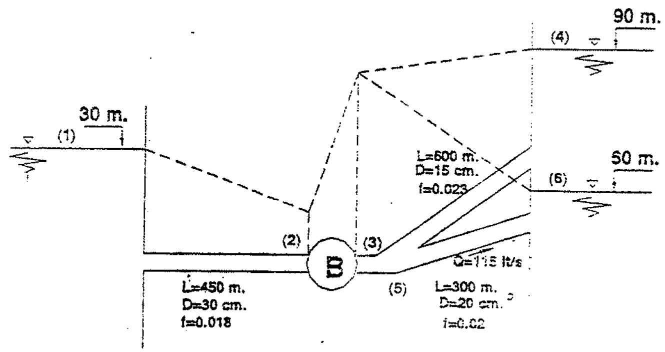
Luego:

$$\frac{F}{\gamma} = \frac{P_D}{\gamma} A - \frac{P_B}{\gamma} A = \left(\frac{P_D}{\gamma} - \frac{P_A}{\gamma} \right) A$$

$$\frac{F}{\gamma} = H_B \cdot A \quad \Rightarrow \quad F = \gamma \cdot H_B \cdot A = \frac{\gamma \cdot Q \cdot H}{v} = \frac{Pot.}{Veloc.}$$

$$\boxed{F = \frac{760}{16.98} = 44.76\, kgf}$$

4.76. En el sistema mostrado fluye agua para un caudal de *115 l/s*, por la tubería de *0.20 m* de diámetro hacia el recipiente. Conociendo las alturas de los recipientes, y los *f* de Darcy. Determinar los flujos en los otros tubos.



Resolución:

Utilizaremos en este problema el concepto de cota y línea piezométrica:

Si: $Q_5 = 115 * 10^{-3}\, m^3/s \quad \Rightarrow \quad v_5 = 3.66\, m/s$

Bernoulli entre (5) y (6):

$$\frac{P_5}{\gamma} + z_5 + \frac{v_5^2}{2g} - h_{5-6} = 60 \quad \Rightarrow \quad \frac{P_5}{\gamma} + z_5 = 60 + h_{5-6} - \frac{v_5^2}{2g}$$

Si: $hf = f \frac{L}{D} \frac{v_5^2}{2g}$, Reemplazando tenemos:

$$P = \frac{P_5}{\gamma} - z_5 = 79.82 \quad \left\{ \begin{array}{l} \textit{Cota piezométrica a} \\ \textit{la salida de la bomba} \end{array} \right.$$

Como el punto (5) y (3) están a la misma salida de la bomba, tendrán la misma cota piezométrica y como el flujo es siempre en el sentido en que cae la línea piezométrica o de la energía, que en este caso son paralelas; tendremos un flujo de (4) a (3), con el siguiente Bernoulli:

$$90 - h_{4-3} = \frac{P_3}{\gamma} + z_3 + \frac{v_3^2}{2g}$$

$$90 - h_{4-3} = 79.82 + \frac{v_3^2}{2g}$$

$$90 - 79.82 = \left(0.023 * \frac{600}{0.15} + 1\right)\frac{v_3^2}{2g}$$

$$\Rightarrow \quad v_3 = 2.15 \, m/s \qquad \Rightarrow \quad Q_3 = A_3 \cdot v_3 = 0.03799 \, m^3/s$$

De los resultados anteriores deducimos:

$$Q_2 + Q_3 = Q_5$$

$$Q_2 + 0.03799 = 0.115$$

$$Q_2 = 0.077 \, m^3/s \qquad \Rightarrow \qquad v_2 = \frac{Q_2}{A_2} = 1.09 \, m/s$$

Hacemos un Bernoulli entre (1) y (2)

$$30 - h_{1-2} = \frac{P_2}{\gamma} + z_2 + \frac{v_2^2}{2g}$$

De donde:

$$Q = \frac{P_2}{\gamma} + z_2 = 30 - \left(0.018 * \frac{450}{0.3} + 1\right) * \frac{(1.09)^2}{19.6}$$

$$Q = \frac{P_2}{\gamma} + z_2 = 28.3m \quad \left\{ \begin{array}{l} \textit{Cota piezométrica a} \\ \textit{la entrada de la bomba} \end{array} \right.$$

Luego para calcular la potencia tendremos:

$$Pot. = \frac{\gamma \cdot Q \cdot H}{76}$$

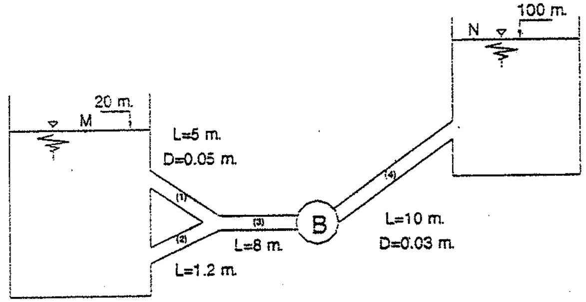
$$H_{BOMBA} = \textit{Cota Piezométrica}_{SALIDA} - \textit{Cota Piezométrica}_{ENTRADA} = 51.52m$$

$Q_{BOMBA} = Q_2 = 0.077 \, m^3/s \quad \Rightarrow$ Este es el caudal que pasa por la bomba. El caudal que viene de (4) llega a (3) y va a (6), sin pasar por la bomba.

$$Pot. = \frac{1000 * 0.077 * 51.52}{76}$$

$$\boxed{Pot. = 52.2 \ HP}$$

4.77. En el sistema de tuberías mostrado fluye petróleo de viscosidad cinemática $\upsilon = 1x10^{-5} \ m^2/s$. Si se sabe que la tubería (4) tiene un Reynolds $Re = 2000$. Hallar la velocidad del fluido en la tubería (2) y la potencia de la bomba, si su rendimiento es del *80%*. Además todos los coeficientes *f* de Darcy son iguales.



__Resolución:__

Como: $\quad f_1 = f_2 = f_3 = f_4 \quad \Rightarrow \quad \frac{64}{Re_1} = \frac{64}{Re_2} = \frac{64}{Re_3} = \frac{64}{Re_4}$

Entonces: $\quad Re_1 = Re_2 = Re_3 = Re_4 \ ; \quad si: \ Re \cdot \upsilon = v \cdot D$

$$\Rightarrow \quad v_1 \cdot D_1 = v_2 \cdot D_2 = v_3 \cdot D_3 = v_4 \cdot D_4 = 2000\,\upsilon \quad \text{..........................(1)}$$

Como: $\quad Q_3 = Q_4 \ ; \quad A_3 \cdot v_3 = A_4 \cdot v_4 \quad \Rightarrow \quad \frac{v_3}{v_4} = \frac{D_4^2}{D_3^2} \quad \text{....................(2)}$

De (1): $\quad \frac{v_3}{v_4} = \frac{D_4}{D_3} \qquad en \ (2): \ \frac{D_4}{D_3} = \frac{D_4^2}{D_3^2}$

$$\Rightarrow \quad D_3 = D_4 \qquad \Rightarrow \qquad D_3 = 0.03m$$

Luego: $\quad v_3 = v_4$

De (1): $\quad v_3 = v_4 = \frac{2000\left(1 * 10^{-5}\right)}{0.03} = 0.67 \, m/s$

Y: $\quad Q_3 = Q_4 = A_3 \cdot v_3 = \frac{\pi}{4}(0.03)^2(0.67) = 4.74 * 10^{-4} \, m^3/s$

Ahora, en las tuberías (1) y (2) hay la misma pérdida de carga, ya que del punto M al punto O hay una sola pérdida de carga ya sea por la tubería (1) y (2), este es el concepto de tuberías en paralelo.

O sea: $hf_1 = hf_2$

$$f\frac{L_1}{D_1}\frac{v_1^2}{2g} = f\frac{L_2}{D_2}\frac{v_2^2}{2g} \quad\Rightarrow\quad \frac{L_1}{D_1}v_1^2 = \frac{L_2}{D_2}v_2^2$$

Entonces:

$$v_2 = v_1\frac{L_1\cdot D_2}{L_2\cdot D_1} \quad \text{.....................}(3)$$

De (1):

$$v_1\cdot D_1 = 2000\,\upsilon$$

$$v_1 = \frac{2000(1*10^{-5})}{0.05} = 0.4\ m/s$$

Reemplazando en (3) con los datos:

$$v_2 = 3.65\sqrt{D_2} \quad\Rightarrow\quad v_2^2 = 13.3\,D_2 \quad \text{.....................}(4)$$

De (1):

$$v_2\cdot D_2 = 2000\upsilon \quad\Rightarrow\quad D_2 = \frac{2000\,\upsilon}{v_2}$$

En (4):

$$v_2^2 = 13.3\left(\frac{2000\,\upsilon}{v_2}\right)$$

$$v_2^3 = 13.3*2000*1*10^{-5} \quad\Rightarrow\quad v_2 = 0.645\ m/s$$

Ahora hacemos un Bernoulli entre M y N:

$$\frac{P_M}{\gamma}+\frac{v_M^2}{2g}+z_M-hf_1-hf_3+H_B-hf_4=\frac{P_N}{\gamma}+\frac{v_N^2}{2g}+z_N$$

NOTA: Cuando existen tuberías como (1) y (2) que funcionan en paralelo solo debe tomarse la pérdida de carga de una de ellas en el Bernoulli. Pues en todas estas tuberías la pérdida es la misma, por eso escogemos el camino de M a N a través de las tuberías (1) - (3) - (4).

Luego:

$$H_B = hf_1 + hf_3 + hf_4 + (z_N - z_M)$$

$$H_B = \frac{f}{2g}\left(\frac{L_1}{D_1}v_1^2+\frac{L_3}{D_3}v_3^2+\frac{L_4}{D_4}v_4^2\right)+(100-20)$$

$$H_B = \frac{64}{2g\,(2000)}\left(\frac{5}{0.05}(0.4)^2+\frac{8}{0.03}(0.67)^2+\frac{10}{0.03}(0.67)^2\right)+80$$

$$H_B = 80.47m$$

Luego:

$$Pot._B = \frac{\gamma\cdot Q\cdot H_B}{76\cdot n} = \frac{1000(4.74\cdot10^{-4})(80.47)}{76\cdot0.8}$$

$$\boxed{Pot._{BOMBA} = 0.63\,HP}$$

4.78. En un cierto tramo de un oleoducto de $25\ cm$ de diámetro, aproximadamente horizontal debe transportar 1800 barriles de petróleo por hora, la viscosidad es de 2.025 *poises* y su densidad relativa es 0.837. Calcular la separación que debe existir entre las estaciones de bombeo para el tramo mencionado, si se dispone de bombas cuya potencia útil es $48\ HP$ ($1\ barril = 159\ l$).

Resolución:

Trabajando en el sistema CGS.

$D = 25\,cm\ ;\ \ \mu = 2.025\ poises.$

$$Q = 1800\ barril/h = 1800*159\ l/h = \frac{1800*159*10^3\ cm^3/s}{3600}$$

$$Q = 79500\ cm^3/s$$

$$\rho = 0.837\ g/cm^3$$

$$Pot. = 48\,HP = 48*76\frac{kg\cdot m}{s} = 3.58*10^{11}\frac{dina\cdot cm}{s}$$

Por otro lado, tenemos:

$$Pot. = \gamma\cdot Q\cdot H \quad\Rightarrow\quad H = \frac{Pot.}{\gamma\cdot Q} = \frac{3.58*10^{11}\ \frac{dina\cdot cm}{s}}{981*0.837\frac{g\cdot m}{cm^3}*79500\frac{cm^3}{s}}$$

$$H = 5484.30\ cm$$

Esta es la carga que da la bomba; la misma que debe consumirse en la fricción ya que la tubería es horizontal.

$$H = f\frac{L}{D}\frac{v^2}{2g}\ ;\ de\ donde:\ L = \frac{H\cdot D\cdot 2g}{f\cdot v^2} \quad \text{.....................}(1)$$

Cálculo de f:

Sabemos que: $\mathrm{Re} = \dfrac{\rho\cdot v\cdot D}{\mu}$, $si:\ v = \dfrac{Q}{A} = \dfrac{79500}{\frac{\pi(25)^2}{4}} = 161.76\ cm/s$

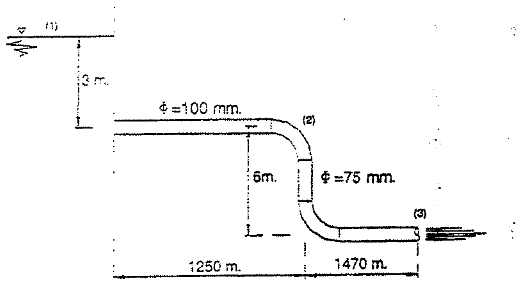
Luego: $\mathrm{Re} = 1673.60$

Entonces: $f = \dfrac{64}{\mathrm{Re}} \quad\Rightarrow\quad f = 0.0382$

En (1): $L = \dfrac{5484.3\cdot25\cdot2\cdot981}{0.0382\cdot(161.96)^2}$

Luego la separación entre estaciones será: $\boxed{L = 2681.80m}$

4.79. En el sistema mostrado, aceptando una altura de la superficie libre constante y un flujo laminar en la tubería, averiguar el caudal. **Considerar sólo pérdidas por fricción.** La viscosidad del aceite es $11.15*10^{-6}\ m^2/s$ **y su densidad es** $98\ UTM/m^3$.



Resolución:

La pérdida de carga por fricción es:

$$Hf = f\frac{L}{D}\frac{v^2}{2g} \quad\Rightarrow\quad f=\frac{64}{Re}\ ;\ Re=\frac{v\cdot D}{\upsilon} \quad\Rightarrow\quad f=\frac{64}{v\cdot D}$$

$$Hf = 64\upsilon\cdot L\cdot D^{-2}\frac{v}{2g} \quad\ldots\ldots\ldots\ldots(\alpha)$$

Aplicando Bernoulli entre (1) y (2): $z_1 - H_{1-2} = \frac{P_2}{\gamma}+\alpha\frac{v_2^2}{2g}+z_2$

De (α) $z_1 = 9m$; $z_2 = 6m$

$L = 1260m$

$D_2 = 15\cdot10^{-2}m$; $\alpha = 2$

$$9-\frac{64\cdot\upsilon\cdot L\cdot v^2}{D_2^2\cdot(2g)} = \frac{P_2}{\gamma}+\alpha\frac{v_2^2}{2g}+6 \ ;\ de\ aquí:$$

$$3-2.139v_2^2-1.04\cdot10^{-3}P_2=0 \quad\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Bernoulli entre (2) y (3):

$$\frac{P_2}{\gamma}+\alpha\frac{v_2^2}{2g}+z_2-\frac{64\cdot\upsilon\cdot L\cdot v_3^2}{D_3^2(2g)}=\alpha\frac{v_3^2}{2g}$$

Con: $L = 1476m$ $\qquad D_B = 7.5x10^{-2}m$

Reemplazando:

$$6+1.04*10^{-3}P_2+0.102v_2^2-9.646v_3^2=0$$

Por continuidad: $A_2\cdot v_2 = A_3\cdot v_3$

$$v_3=\frac{A_2\cdot v_2}{A_3}=\frac{(1.5*10^{-2})^2}{(7.5*10^{-2})^2}v_2=4v_2 \quad\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

(3) en (2): $6+1.04*10^{-3}P_2-154.332v_2^2=0$

De aquí:

$$P_2 = 148396.36v_2^2-5769.23 \quad\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

(4) en (1):

$3-2.139v_2^2-154.332v_2^2+6=0$

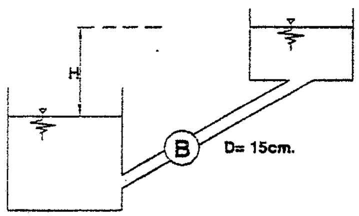
$9=156.471v_2^2$

$v_2 = 0.24\ m/s$

El caudal: $Q=A_2\cdot v_2=\frac{\pi(15*10^{-2})^2}{4}*0.24$

$$\boxed{Q=4.24*10^{-3}\ m^3/s}$$

4.80. La potencia comunicada al fluido por la bomba es de $10\ CV$. Para $H = 20\ m$ y unas pérdidas en el sistema de $8v^2/2g$. Determinar el caudal y la altura de la bomba (carga).



Resolución:

Aplicando Bernoulli:

$$H_B = 20+\frac{8v^2}{2g} \quad\ldots\ldots\ldots(1)$$

Además:

$$\frac{\gamma\cdot Q\cdot H_B}{75}=10CV$$

De aquí: $Q=\frac{750}{\gamma\cdot H_B} \quad\Rightarrow\quad v=\frac{750}{A\cdot\gamma\cdot H_B}=\frac{42.44}{H_B} \quad\ldots\ldots\ldots(2)$

$$H_B = 20+\frac{8}{2g}\left(\frac{42.44}{H_B}\right)^2 = 20+\frac{735.21}{H_B^2}$$

Por aproximaciones sucesivas obtenemos:

$H_B = 21.60m$

En (2):

$$v=\frac{42.44}{21.6}=1.96\ m/s$$

$$Q=v\cdot A=1.96\left(\frac{\pi}{4}(0.15)^2\right)=0.035\ m^3/s$$

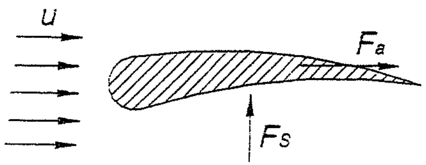
$$\boxed{Q=35\ l/s}$$

SUSTENTACIÓN Y ARRASTRE

La sustentación y el arrastre se definen como las fuerzas por unidad de longitud de un elemento, que actúan sobre éste en dirección normal y paralela respectivamente, al flujo uniforme.

F_s: *sustentación*

F_a: *arrastre*



Puede demostrarse que, en un flujo permanente bidimensional e incompresible sufre una sustentación que es siempre igual a:

$$F_s = \rho \cdot U \cdot \Gamma$$

Y es verdadera para fluidos reales (valor teórico).

El arrastre sobre cualquier cuerpo fluido dinámico inmerso en una corriente será nulo cuando no exista fricción en toda la región del flujo, lo cual es consecuencia del uso de la teoría del flujo potencial.

Como el arrastre de un cuerpo en un fluido real es difícil de determinar por diversos factores, nos vemos obligados a utilizar fórmulas experimentales.

$$\text{Arrastre o Resistencia} = C_A \frac{\rho \cdot U^2 \cdot A}{2}$$

$$\text{Sustentación} = C_S \frac{\rho \cdot U^2 \cdot A}{2}$$

C_A : *Coeficiente de arrastre (sin dimensiones)*

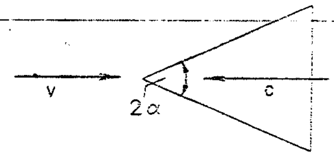
C_S : *Coeficiente de sustentación (sin dimensiones)*

A : *Área proyectada en dirección del flujo*

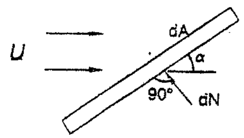
U : *Velocidad de la corriente libre*

ρ : *Densidad del fluido*

4.81. Un cono, de abertura 2α y de base con radio r, se hace desplazar con velocidad c en contra de una corriente de agua con velocidad v. Calcular la fuerza necesaria para ello.



Resolución:



La fuerza de arrastre es: $F = C_D \rho \frac{U^2}{2} A$

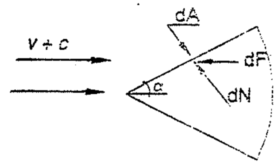
Luego un dN sobre una pared dA inclinada un ángulo α con la horizontal es:

$$dN = C_D \cdot \rho \frac{(v \cdot sen\alpha)^2}{2} dA$$

Si la plaquita está en movimiento y su velocidad es c en dirección contraria a la dirección del flujo: $U = v + c$, esto es, si se consideran los de referencia moviéndose con dicha plaquita.

Entonces: $dN = C_D \rho \frac{(v+c)^2}{2} sen^2\alpha \; dA$

Ecuación que puede ser aplicada para encontrar una fuerza dN normal a la superficie lateral del cono:

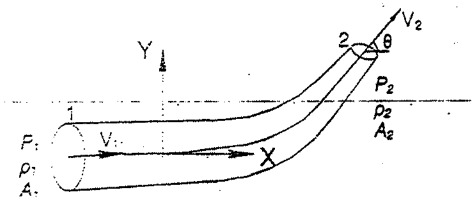


Pero: $dN \cdot sen\alpha = dF \quad \Rightarrow \quad dF = C_D \cdot \rho \frac{(v+c)^2}{2} sen^2\alpha \; dA \, sen\alpha$

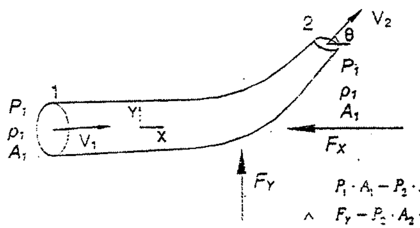
Donde $dA.sen\alpha$ es la proyección del dA sobre la base del cono.

$\therefore$ Integrando queda: $\boxed{F = C_D \cdot \rho \frac{(v+c)^2}{2} sen^2\alpha \cdot \pi \cdot r^2}$

4.82. Si se tiene un flujo permanente de un fluido compresible a través de un tubo curvo. Determinar la fuerza del fluido sobre el tubo entre las secciones 1 y 2. Determínese también dichas fuerzas cuando el fluido sea incompresible.



Resolución:



Por el teorema de la cantidad de movimiento: $\overline{F} = \rho_2 Q_2 \overline{V}_2 - \rho_1 Q_1 \overline{V}_1$

Trabajando con presiones manométricas y por componentes, se tiene:

$$P_1 \cdot A_1 - P_2 \cdot A_2 \cdot \cos\theta - F_X = \rho_2 \cdot Q_2 \cdot v_2 \cdot \cos\theta - \rho_1 \cdot Q_1 \cdot v_1$$
$$\wedge \quad F_Y - P_2 \cdot A_2 \cdot sen\theta - W = \rho_2 \cdot Q_2 \cdot v_2 \cdot sen\theta$$

Luego:
$$\left.\begin{aligned} F_X &= \rho_1 \cdot Q_1 \cdot v_1 - \rho_2 \cdot Q_2 \cdot v_2 \cdot \cos\theta + P_1 \cdot A_1 - P_2 \cdot A_2 \cdot \cos\theta \\ F_Y &= \rho_2 \cdot Q_2 \cdot v_2 \cdot sen\theta + P_2 \cdot A_2 \cdot sen\theta + W \end{aligned}\right\} Resp.$$

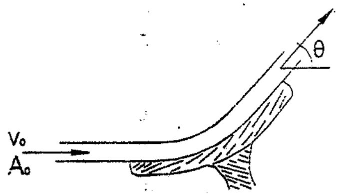
Si el fluido fuese incompresible:

$$\left.\begin{aligned} F_X &= \rho \cdot Q \cdot (v_1 - v_2 \cdot \cos\theta) + P_1 \cdot A_1 - P_2 \cdot A_2 \cdot \cos\theta \\ F_Y &= \rho \cdot Q \cdot v_2 \cdot sen\theta + P_2 \cdot A_2 \cdot sen\theta + W \end{aligned}\right\} Resp.$$

En la práctica W es despreciable en comparación con los otros términos.

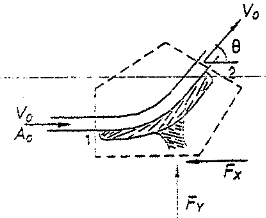
NOTA: Se puede demostrar que el uso de las presiones manométricas en los cálculos de las reacciones arrojan los mismos resultados que cuando se usan presiones absolutas.

4.83. Determinar la fuerza que se necesita para que el álabe permanezca en su sitio, si el flujo permanente de un chorro de agua golpea sobre él.



Resolución:

En este tipo de problemas se supone que no hay cambio de velocidad, ni de área de la sección transversal del chorro.



El álabe es utilizado para cambiar la dirección del chorro, sin pérdidas por fricción.

Por el problema anterior, se tiene:

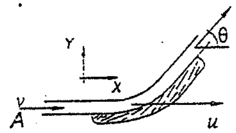
$$F_X = \rho \cdot Q(v_1 - v_2 \cdot \cos\theta) + P_1 \cdot A_1 - P_2 \cdot A_2 \cdot \cos\theta$$
$$\wedge \quad F_Y = \rho \cdot Q \cdot v_2 \cdot sen\theta + P_2 \cdot A_2 \cdot sen\theta + W$$

Se puede despreciar W por ser pequeño en relación a los otros términos.

Además: $A_1 = A_2 = A_0$, $v_1 = v_2 = v_0$ y $P_1 = P_2 = 0$ ya que en todo momento actúa la presión atmosférica. Así tenemos:

$$\left.\begin{aligned} F_X &= \rho \cdot Q \cdot v_0(1 - \cos\theta) = \rho \cdot A \cdot v_0^2(1 - \cos\theta) \\ F_Y &= \rho \cdot Q \cdot v_0 \cdot sen\theta = \rho \cdot A \cdot v_0^2 \cdot sen\theta \end{aligned}\right\} Resp.$$

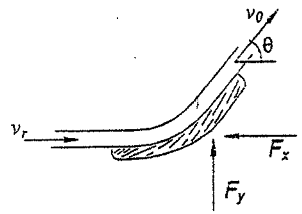
4.84. Determinar la fuerza necesaria para mantener el álabe moviéndose a velocidad constante, si la velocidad absoluta del chorro es v, y la del álabe es u (menor que v), como se muestra en la figura.



Resolución:

La velocidad absoluta del chorro es igual a la velocidad del álabe, más la velocidad relativa del chorro con respecto al álabe:

$v = u + v_r$, entonces: $v_r = v - u$



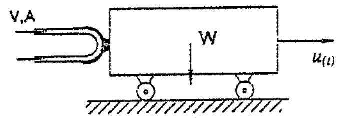
Luego para un sistema de referencia en reposo con respecto al álabe, la ecuación de cantidad de movimiento es:

$$F_X = \rho \cdot Q \cdot v_r(1 - \cos\theta)$$
$$F_Y = \rho \cdot Q \cdot v_r \cdot sen\theta$$

Como: $Q = v_r \cdot A$, y $v_r = v - u$

$$\left.\begin{aligned} F_X &= \rho \cdot A \cdot (v - u)^2 \cdot (1 - \cos\theta) \\ \text{y,} \quad F_Y &= \rho \cdot A \cdot (v - u)^2 \cdot sen\theta \end{aligned}\right\} Resp.$$

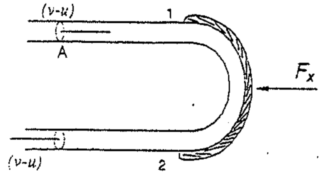
4.85. En la figura, un chorro (ρ = .104 UTM/m^3) es desviado un ángulo θ = $180°$ por un álabe. Suponer que el carro



no tiene rozamiento y es libre de moverse en sentido horizontal. Su peso es *100 kgf*. Determinar la velocidad y la distancia que ha recorrido el carro *10 s* después de que el chorro se dirigiera contra el álabe. $A = 0.2\ dm^2$, $v = 30\ m/s$.

Resolución:

Se hallará primero la fuerza que ejerce el chorro sobre el carro, para lo cual establezco en sistema de referencia en reposo con respecto al álabe.



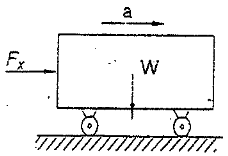
La ecuación de cantidad de movimiento será:

$$-F_x = \rho \cdot Q \cdot (v_2 - v_1)$$

$$-F_x = -\rho \cdot Q \cdot (v-u) - \rho \cdot Q \cdot (v-u) = -2\rho \cdot Q \cdot (v-u)$$

$$\boxed{F_x = 2\rho \cdot A \cdot (v-u)^2}$$

Como: $F_x = m \cdot a$



Es decir: $2\rho \cdot A \cdot (v-u)^2 = \frac{W}{g} \cdot \frac{du}{dt}$

$$\Rightarrow \int_0^t \frac{2\rho \cdot g \cdot A}{W} dt = \int_0^u \frac{du}{(v-u)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{2g \cdot \rho \cdot A \cdot t}{W} = \frac{1}{v-u} - \frac{1}{v}$$

Se tiene: $\boxed{u = v - \frac{1}{\frac{2\rho \cdot g \cdot A}{W} t + \frac{1}{v}}}$ ....(1)

Por datos: $v = 30\ m/s$, $\rho = 104\ UTM/m^3$, $g = 9.8\ m/s^2$

$A = 0.2 \cdot 10^{-2}\ m^2$ y $t = 10 s$

Reemplazando datos en la ecuación (1), se tiene:

$\boxed{u_{(t=10s)} = 27.7\ m/s}$ *Resp.*

Nuevamente en (1): $u = \frac{dx}{dt} = v - \frac{1}{\frac{2\rho \cdot g \cdot A}{W} t + \frac{1}{v}}$, *integrando*: $\int_0^x dx = \int_0^t u\, dt$

Se tiene:

$$x = v \cdot t - \frac{W}{2\rho \cdot g \cdot A} Ln\left(\frac{2\rho \cdot g \cdot A \cdot t}{W} + \frac{1}{v}\right) + \frac{W}{2\rho \cdot g \cdot A} Ln \frac{1}{v}$$

$\Rightarrow \boxed{x_{(t)} = v \cdot t + \frac{W}{2\rho \cdot g \cdot A} Ln\left(\frac{W}{2\rho \cdot g \cdot A \cdot v \cdot t + W}\right)}$, *luego* $\boxed{x_{(10s)} = 236.7 m}$ *Resp.*

4.36. En la figura se muestra un chorro sobre una lámina inclinada.

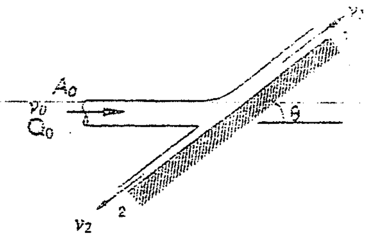
Calcular:

a) v_1 y v_2

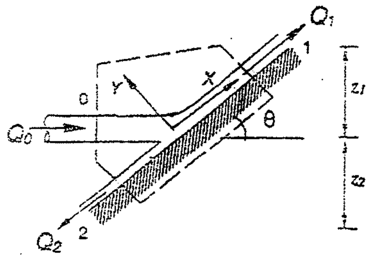
b) Q_1 y Q_2

c) A_1 y A_2

d) La fuerza que ejerce el chorro sobre la placa inclinada.



Resolución:



a) La ecuación de Bernoulli escrita a lo largo de una línea de corriente entre las secciones 0 y 1, y entre 0 y 2.

$$\frac{P_0}{\gamma} + \frac{v_0^2}{2g} = \frac{P_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1$$

$$\frac{P_0}{\gamma} + \frac{v_0^2}{2g} = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} - z_2$$

$P_0 = P_1 = P_2 = 0$, por actuar solamente la presión atmosférica.

$\left.\begin{matrix} z_1 \to 0 \\ z_2 \to 0 \end{matrix}\right\}$ Se desprecian por ser valores pequeños, en relación con los otros términos.

Entonces queda: $\boxed{v_1 = v_0}$

$\boxed{v_2 = v_0}$

b) La ecuación de cantidad de movimiento en la dirección X es:

$$F_x = CM_{inicial\ x} - CM_{final\ x}$$

$$0 = \rho \cdot Q_0 \cdot v_0 \cdot \cos\theta - (\rho \cdot Q_1 \cdot v_0 - \rho \cdot Q_2 \cdot v_0)$$

$$\Rightarrow Q_1 - Q_2 = Q_0 \cdot \cos\theta$$

Por continuidad: $Q_1 + Q_2 = Q_0$

Entonces:

$$\boxed{Q_1 = \frac{Q_0}{2}(1+\cos\theta)} \quad \wedge \quad \boxed{Q_2 = \frac{Q_0}{2}(1-\cos\theta)}$$

c) Como: $Q_1 = \frac{Q_0}{2}(1+\cos\theta)$ ∧ $Q_2 = \frac{Q_0}{2}(1-\cos\theta)$

Y: $v_1 = v_0$ ∧ $v_2 = 0$

Se tiene: $\boxed{A_1 = \frac{A_0}{2}(1+\cos\theta)}$ ∧ $\boxed{A_2 = \frac{A_0}{2}(1-\cos\theta)}$

d) De la ecuación de la cantidad de movimiento en la dirección Y, se tiene:

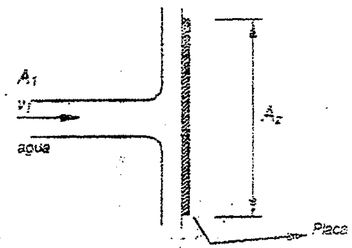
$$\boxed{F_Y = \rho \cdot Q_0 \cdot v_0 \cdot sen\theta}$$

4.87. En la figura determinar:

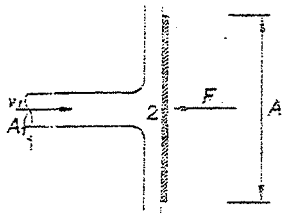
a) La presión media que ejerce el fluido sobre la placa $(\bar{P})$.

b) La presión de estancamiento (P_E)

c) La relación entre la presión media y la de estancamiento.



Resolución:



a) Por la ecuación de cantidad de movimiento se tiene: $F = \rho \cdot Q \cdot v_1 = \rho \cdot v_1^2 \cdot A_1$

Entonces, la presión media que ejerce el fluido sobre la placa es:

$$\boxed{\bar{P} = \frac{F}{A_2} = \rho \cdot v_1^2 \frac{A_1}{A_2}}$$

b) Aplicando la ecuación de Bernoulli entre 1 y 2, se tiene: $\frac{P_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g}$

Realizando el cálculo con presiones absolutas se tiene: $P_1 = P_{atm}$, $P_2 = P_{atm} + P_E$

Además: $v_2 = 0$

Entonces: $\boxed{P_e = \frac{1}{2}\rho \cdot v_1^2}$

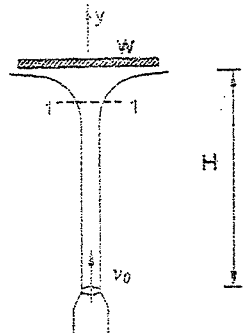
c) De los resultados anteriores, obtenemos que:

$$\frac{\bar{P}}{P_e} = \frac{\rho \cdot v_1^2 \cdot \frac{A_1}{A_2}}{\frac{1}{2}\rho \cdot v_1^2} \Rightarrow \boxed{\frac{\bar{P}}{P_e} = 2\frac{A_1}{A_2}}$$

NOTA: En la práctica siempre $P_e > \bar{P}$, *debido a que* $A_2 > 2A_1$.

4.88. Hallar el peso W en kilogramos que está siendo sostenido por el chorro de agua mostrado, si el diámetro de la boquilla es de 8 cm y la velocidad v_0 es 15 m/s. La altura de equilibrio H es de 3m.

Resolución:



Si v_1 es la velocidad de entrada y aplicando la ecuación de cantidad de movimiento:

$P_1 \cdot A_1 - W = \rho \cdot Q \cdot (v_{S_y} - v_1)$ ....(1)

Donde v_{S_y} es la proyección de la velocidad de salida en el eje "y" y como, $P_1 = P_{atm}$:

$0 - W = \rho \cdot Q \cdot (0 - v_1)$

$W = \rho \cdot Q \cdot v_1$ ....(2)

Aplicando Bernoulli entre 0 y 1:

$0 + \frac{v_0^2}{2g} + 0 = 0 + \frac{v_1^2}{2g} + H$, $v_1^2 = v_0^2 - 2g \cdot H$

$v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2g \cdot H}$ ....(3)

Además sabemos: $Q = A_0 \cdot v_0$ ....(4)

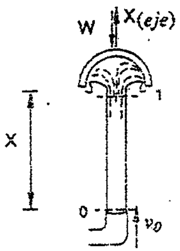
(4) y (3) en (2): $W = \rho \cdot A_0 \cdot v_0 \cdot \sqrt{v_0^2 - 2g \cdot H}$

$$W = 1000 * 15 * \frac{\pi * (0.08)^2}{4}\sqrt{(15)^2 - 19.6 * 3}$$

$$\boxed{W = 972\,N = 99.2\,Kg}$$

4.89. Una semiesfera hueca de peso W, se mantiene en equilibrio por acción de un surtidor, cuya velocidad de salida v_0 es vertical. Calcular la altura "x" en que se establece el equilibrio, prescindiendo de la resistencia del aire.

Resolución:



Sabemos: $F_X = Q \cdot \rho \cdot v_1(1 - \cos\theta)$ ....(1)

Para las condiciones del problema: $\theta = 180°$

Además: $Q = A.v_1$

Reemplazando en (1)

$F_X = 2\rho \cdot A \cdot v_1^2$ ....(2)

Siendo A el orificio del surtidor.

Bernoulli entre "0" y "1": $0+\dfrac{v_0^2}{2g}+0=0+\dfrac{v_1^2}{2g}+X$

$$X=\frac{v_0^2}{2g}-\frac{v_1^2}{2g} \quad \text{...............(3)}$$

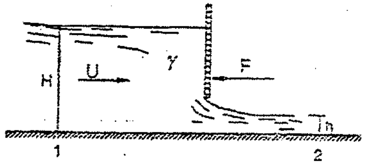
Por otro lado: $F_X = W$ ....(4)

(4) = (2): $\Rightarrow$ $v_1^2=\dfrac{W}{2\rho\cdot A}$ ....(5)

(5) en (3): $X=\dfrac{v_0^2}{2g}-\dfrac{W}{4\rho\cdot g\cdot A}$

Finalmente: $\rho\cdot g=\gamma$ $\Rightarrow$ $\boxed{X=\dfrac{v_0^2}{2g}-\dfrac{W}{4\gamma\cdot A}}$

4.90. Para el aliviadero mostrado, hallar la fuerza F para retener la plancha de ancho b, asumir que la presión en 1 y 2 se distribuye hidrostáticamente y no hay pérdidas menores.



Resolución:

Por continuidad: $U\cdot b\cdot H=v_2\cdot b\cdot h$ $\Rightarrow$ $v_2=\dfrac{H}{h}U$ ....(1)

De la ecuación de cantidad de movimiento, entre 1 y 2:

$$P_1\cdot A_1-P_2\cdot A_2-F=\rho\cdot Q\cdot(v_2-v_1) \quad \text{...............(2)}$$

$$P_1\cdot A_1=F_1=\gamma\cdot H_G\cdot A_1=\gamma\cdot\frac{H}{2}\cdot b\cdot H=\gamma\cdot b\cdot\frac{H^2}{2} \quad \text{...............(3)}$$

$$P_2\cdot A_2=F_2=\gamma\, b\frac{h^2}{2} \quad \text{...............(4)}$$

Reemplazando los valores de (1), (3) y (4) en (2):

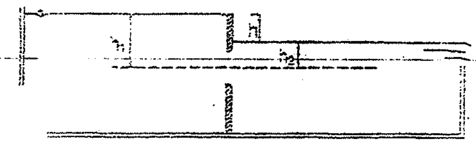
$$\gamma\cdot b\cdot\frac{H^2}{2}-\gamma\cdot b\cdot\frac{h^2}{2}-F=\rho\cdot Q\cdot\left(U\frac{H}{h}-U\right) \quad , \; Q=U\cdot(b\cdot H)$$

$$F=\gamma\cdot b\cdot\frac{H^2}{2}-\gamma\cdot b\cdot\frac{h^2}{2}+\frac{\gamma}{g}\cdot U\cdot b\cdot H\cdot\left(U-\frac{H}{h}U\right)$$

$$F=\gamma\cdot\frac{b}{2}\cdot(H^2-h^2)+\frac{\gamma}{g}\cdot U^2\cdot b\cdot H\cdot\left(1-\frac{H}{h}\right)$$

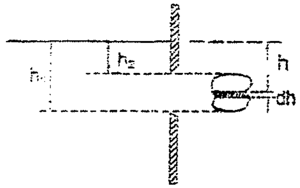
$$\boxed{F=\frac{\gamma\cdot b}{2}\cdot\left((H^2-h^2)+\frac{2}{g}U^2\cdot H\cdot\left(1-\frac{H}{h}\right)\right)}$$

VELOCIDAD DE DESCARGA EN ORIFICIOS SUMERGIDOS



$$v=\sqrt{2g\cdot(h_1-h_2)}=\sqrt{2g\cdot h}$$

ORIFICIOS VERTICALES GRANDES EN COMPARACIÓN CON SU CARGA

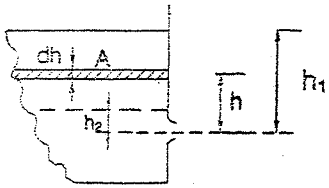


$$dQ=C\cdot\sqrt{2g\cdot h}\cdot dA$$

$$Q=C\cdot\sqrt{2g}\int_{h_2}^{h_1}x\cdot h^{1/2}\cdot dh$$

cuando: $h\geq 2\cdot(h_1-h_2)$ *aproximadamente*

TIEMPO DE VACIADO CON CARGA VARIABLE



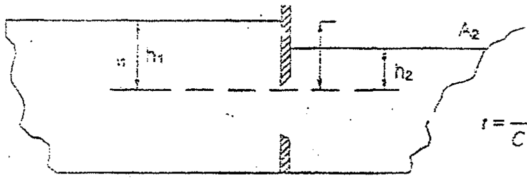
$$t=\frac{1}{C\cdot a\cdot\sqrt{2g}}\int_{h_2}^{h_1}A\cdot h^{-1/2}\cdot dA$$

A = *área del reservorio*

a = *área del orificio*

c = *coeficiente de gasto*

DEPÓSITOS LIMITADOS COMUNICANTES



$$t=\frac{1}{C\cdot a\cdot\sqrt{2g}}\int_{h_1}\frac{A_1\cdot A_2}{A_1+A_2}h^{-1/2}\cdot dh$$

DESCARGA CON CARGA VARIABLE Y ALIMENTACIÓN CONSTANTE

$$t=A\cdot\int_{h_2}^{h_1}\frac{dh}{C\cdot a\cdot\sqrt{2g\cdot h}-Q_0}$$

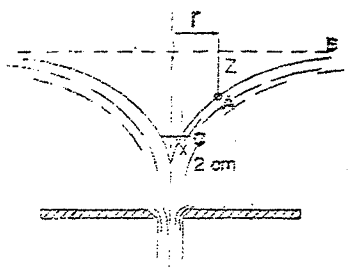
4.91. El vórtice o remolino irrotacional que tiende a formarse sobre un orificio de desagüe en un tanque de poca profundidad se caracteriza por una velocidad tangencial que varía inversamente con la distancia radial a partir del vórtice del orificio de desagüe.

Si la velocidad tangencial de un vórtice determinado es de 8 *cm/s* a 400 *cm* del eje, ¿Cuál será la disminución de altura de la superficie?

a) A esta distancia: y

b) A 2 cm del eje.

Resolución:



a) Tomando Bernoulli entre A y B:

$$\frac{v_A^2}{2g}+\frac{P_A}{\gamma}+z_A=\frac{v_B^2}{2g}+\frac{P_B}{\gamma}+z_B$$

$$\frac{0.08^2}{19.6}+0+Z_A=0+0+0$$

De donde:

$$z_A=\frac{-0.0064}{19.6}=-0.00032m$$

$$\boxed{z_A=-0.32mm}$$

b) La velocidad en un punto a 2 *cm* del eje es: $v_c=\frac{8\,cm/s\cdot 400cm}{2cm}=1600\,cm/s=16\,m/s$

Tomando Bernoulli entre C y B: $\frac{16^2}{19.6}+0+z_C=0+0+z_B$

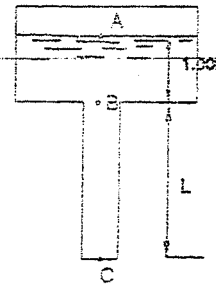
De donde: $\boxed{z_C=-13.06m}$

4.92. El orificio de desagüe del fondo de un tanque tiene tal forma que la velocidad en el punto B es 1.5 veces la velocidad media en el interior del tubo. Si la altura del agua en el interior del tanque es de 1 *m*. ¿Cuál será la máxima longitud *L* de la tubería que puede utilizarse sin que se produzca cavitación?

Supóngase una tensión de vapor absoluta de 0.035 Kg/cm^2.

Resolución:

Tomando Bernoulli entre A y B, tenemos:



$$0+0+1=\frac{v_B^2}{2g}+(0.35-10.33m)+0$$

$$\frac{v_B^2}{2g}=10.98 \qquad\qquad (1)$$

Tomando Bernoulli entre A y C, tenemos:

$$0+0+(1+L)=\frac{v_C^2}{2g}+0+0 \quad\Rightarrow\quad \frac{v_C^2}{2g}=1+L$$

Según el problema: $v_B = 1.5\,v_C$

Entonces: $\frac{1}{2g}\left(\frac{v_B}{1.5}\right)^2=1+L$

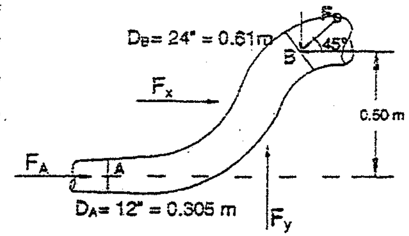
$$\frac{v_B^2}{2g}=2.25(1+L) \qquad\qquad (2)$$

Igualando las expresiones (1) y (2):

$$10.98=2.25*(1+L)\ ,\quad \frac{10.98}{2.25}-1=L$$

$$\boxed{L=3.88m}$$

4.93. Por un codo de ampliación de 12" de diámetro aguas abajo y 24" aguas arriba circula un gasto de 250 *l/s*. La presión en el punto A es de 1.48 Kg/cm^2. Calcular la fuerza ejercida por el agua sobre el codo, despreciando las pérdidas de carga.



Resolución:

Las velocidades en los puntos A y B, serán respectivamente:

$$v_A=\frac{Q}{A_A}=\frac{0.250}{\frac{\pi}{4}(0.305)^2}=3.43\,m/s$$

$$v_B=\frac{Q}{A_B}=\frac{0.250}{\frac{\pi}{4}(0.61)^2}=0.86\,m/s$$

Tomando Bernoulli entre los puntos A y B: $\frac{3.43^2}{19.6}+14.8+0=\frac{0.86^2}{19.6}+\frac{P_B}{\gamma}+0.50$

$$0.60 + 14.8 + 0 = 0.038 + \frac{P_B}{\gamma} + 0.50$$

$$\frac{P_B}{\gamma} = 14.862m \; de \; agua = 1.4862 \, {}^{kg}\!/_{cm^2}$$

La fuerza en A será: $F_A = P_A \cdot A_A = 1.48 * 730 \;\; \Rightarrow \;\; F_A = 1080 Kg$

La fuerza en B será: $F_B = P_B \cdot A_B = 1.4862 * 2920 \;\; , \;\; F_B = 4340 Kg.$

El teorema de la cantidad de movimiento dice: $F = \dfrac{\gamma \cdot Q}{g} \Delta v$

Para las fuerzas horizontales:

$$4340 * \cos 45° - 1080 - F_x = \frac{1000 * 0.250}{9.8} \cdot (0.86 * \cos 45° - 3.43)$$

$$3060 - 1080 - F_x = 25.5 * (0.61 - 3.43)$$

$$1980 - F_x = -72$$

$$F_x = 2052 \; Kg$$

Para las fuerzas vertical :

$$F_Y - 4340 * sen45° = \frac{1000 * 0.250}{9.8} (0.86 * sen45° - 0)$$

$$F_Y - 3060 = 15.5$$

$$F_Y = 3075.5 \; Kg$$

La resultante de la fuerza ejercida por el agua sobre el codo será:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_Y^2} = \sqrt{2052^2 + 3075.5^2}$$

$\boxed{F = 3700 \; Kg. \text{ hacia la izquierda y abajo.}}$

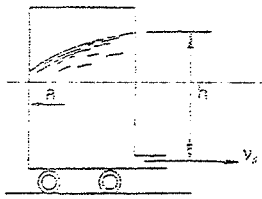
$$\phi = arc \; tan \frac{3075.5}{2052} = 56°20'$$

4.94. El depósito prismático móvil de la figura, se desplaza por la reacción que provoca la descarga del chorro a través del orificio (cambio en la cantidad de movimiento de la corriente líquida).

Determinar:

a) El ángulo que tiende adoptar (como término medio de las oscilaciones) la superficie libre del líquido con la horizontal, en el momento que el contenido del líquido en el depósito es de 2 metros cúbicos.

b) El gasto descargado por el orificio en el momento antes señalado.



Los datos del orificio son los siguientes:

$C_V = 0.98 \; ; \; C = 0.60 \; ; \; A_0 = 0.04 \; m^2$

El líquido contenido en el depósito es agua:

$\gamma = 1000 \; Kg/m^3$.

Las dimensiones en planta del depósito son:

1.00 m en la dirección del movimiento y 0.50 m perpendicularmente a él.

El peso del depósito vacío es 300 Kg.

Considérese despreciables: la velocidad de aproximación del agua al orificio y las resistencias al desplazamiento del depósito.

Resolución:

a) El desplazamiento del depósito se debe al cambio en la cantidad de movimiento debido a la velocidad de salida por el orificio. Esta reacción horizontal tiene por valor:

$$R = \frac{\gamma}{g} Q \cdot v_s = \frac{\gamma}{g} (C_c \cdot A_0)(C_v \cdot v)(C_v \cdot v)$$

$$R = \frac{\gamma}{g} (C_c \cdot C_v) \cdot C_v \cdot A_0 \cdot v^2 = \frac{\gamma}{g} C \cdot C_v \cdot A_0 (2g \cdot h)$$

Es decir: $R = C \cdot C_v \cdot \gamma \cdot A_0 (2h)$ ....(1)

Donde: $h = \dfrac{Volumen}{Área \; depósito} = \dfrac{2}{1 * 0.5} = 4m$

Reemplazando éste y demás valores en (1):

$$R = 0.60 * 0.98 * 1000 * 0.04 * (2 \cdot 4) \;\; \Rightarrow \;\; R = 188.16 \; Kg$$

Esta reacción debe ser igual a la masa que movería por su aceleración:

$$188.16 = \left(\frac{300 + 2000}{9.8} \right) \cdot a$$

De donde: $a = 0.80 \, {}^{m}\!/_{s^2}$

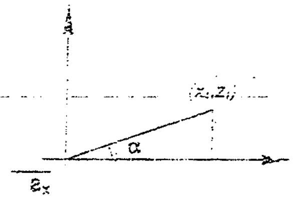
Esta es la aceleración que producirá el movimiento del depósito, luego, para calcular el ángulo que adopta debemos aplicar Euler:

$$\frac{1}{\rho} dP = a_x dx + a_y dy + a_z dz$$

Donde: $a_x = -(-0.80) = 0.80 \, {}^{m}\!/_{s^2} \; (por \; D'Alambert)$

$a_y = 0$

$a_z = -g$



Reemplazando estos valores en la fórmula de Euler e integrando: $\frac{1}{\rho}\int_{P_0}^{P} dP = 0.80\int_{x_0}^{x_1} dx - \int_{z_0}^{z_1} dz$

$$0 = 0.80\,x_1 - g \cdot z_1$$

$$\frac{z_1}{x_1} = \frac{0.80}{g} = \frac{0.80}{9.81} = 0.0817$$

α = *arc. cuya tangente vale 0,0817*

$\alpha = 4°\,40'$

b) El gasto descargado en el momento señalado será:

$$Q = C \cdot A_0 \cdot \sqrt{2g \cdot h} = 0.60 * 0.04 * \sqrt{19.6 * 4}$$

$$\boxed{Q = 0.212640\ m^3/s}$$

4.95. Un depósito tronco cónico, lleno de líquido, tiene orificios de iguales dimensiones y características en sus dos bases. Diga en cuál de las dos siguientes posiciones se vaciará más rápidamente:

a) Eje vertical, base mayor hacia abajo.

b) Eje vertical, base menor hacia abajo.

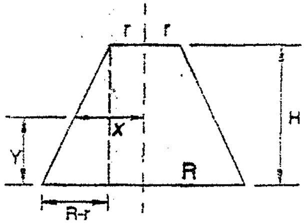
Calcule la relación de los tiempos de vaciado.

<u>Resolución:</u>

El tiempo de vaciado se calcula por:

$$t = \frac{1}{C \cdot A_0 \cdot \sqrt{2g}}\int_{h_2}^{h_1} A \cdot h^{-1/2} \cdot dh \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

a) Por semejanza de triángulos: $\frac{R-r}{H} = \frac{x-r}{H-h}$



De donde despejando y simplificando se obtiene: $x = R - \frac{(R-r)}{H} \cdot h$

Por lo tanto el área variable del tronco cónico será:

$$A = \pi \cdot x^2 = \pi \cdot \left(R - \frac{(R-r)}{H} \cdot h\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

Reemplazando (2) en la fórmula (1):

$$t = \frac{\pi}{C \cdot A_0\sqrt{2g}} \cdot \int_0^H \left(R^2 \cdot h^{-1/2} - \frac{2R \cdot (R-r)}{H} \cdot h^{1/2} + \left(\frac{R-r}{H}\right)^2 \cdot h^{3/2}\right) dh$$

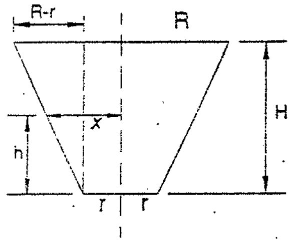
$$t_1 = \frac{\pi}{C \cdot A_0\sqrt{2g}} \cdot \left(2R^2 \cdot h^{1/2} - \frac{2R \cdot (R-r)}{H} \cdot \frac{2}{3}h^{3/2} + \left(\frac{R-r}{H}\right)^2 \cdot \frac{2}{5}h^{5/2}\right)_0^H$$

$$t_1 = \frac{\pi}{C \cdot A_0\sqrt{2g}} \cdot \left(2R^2 \cdot H^{1/2} - \frac{4R \cdot (R-r)}{3} \cdot H^{1/2} + \frac{2}{5}(R-r)^2 H^{1/2}\right)$$

Factorizando $H^{1/2}$ y reduciendo términos semejantes se llega a:

$$t_1 = \frac{\pi \cdot \sqrt{H}}{C \cdot A_0 \cdot \sqrt{2g}}\left(\frac{16R^2 + 8R \cdot r + 6r^2}{15}\right)$$

b) Por semejanza de triángulos:



$$\frac{R-r}{H} = \frac{x-r}{h}$$

Despejando: $x = r + \left(\frac{R-r}{H}\right) \cdot h$

El área variable sería:

$$A = \pi \cdot \left(r + \left(\frac{R-r}{H}\right) \cdot h\right)^2 \quad \ldots(3)$$

Reemplazando (3) en la fórmula (1):

$$t_2 = \frac{\pi}{C \cdot A_0\sqrt{2g}} \cdot \int_0^H \left(r^2 \cdot h^{-1/2} + \frac{2r \cdot (R-r)}{H} \cdot h^{1/2} + \left(\frac{R-r}{H}\right)^2 \cdot h^{3/2}\right) \cdot dh$$

$$t_2 = \frac{\pi}{C \cdot A_0\sqrt{2g}} \cdot \left(2r^2 \cdot h^{1/2} + \frac{2r \cdot (R-r)}{H} \cdot \frac{2}{3}h^{3/2} + \left(\frac{R-r}{H}\right)^2 \cdot \frac{2}{5}h^{5/2}\right)_0^H$$

$$t_2 = \frac{\pi\sqrt{H}}{C \cdot A_0\sqrt{2g}} \cdot \left(2r^2 + \frac{4R \cdot r - 4r^2}{3} + \frac{2R^2 - 4R \cdot r + 2r^2}{5}\right)$$

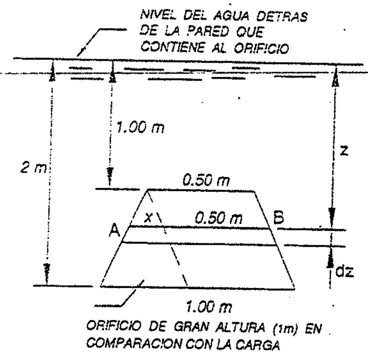
Luego: $t_2 = \frac{\pi \cdot \sqrt{H}}{C \cdot A_0 \cdot \sqrt{2g}}\left(\frac{16r^2 + 8R \cdot r + 6R^2}{15}\right)$

Dividiendo las ecuaciones (A) entre (B) obtenemos la relación de los tiempos de vaciado: $\frac{t_1}{t_2} = \frac{16R^2 + 8R \cdot r + 6r^2}{16r^2 + 8R \cdot r + 6R^2}$

Relación donde se aprecia que el que descarga más rápido es la <u>posición b</u>.

4.96. Calcular la descarga que se obtendrá en el orificio, de gran altura en comparación con la carga, que se muestra en la figura, suponiendo que el coeficiente de descarga permanece constante e igual a 0.60.

Resolución:



Sea A-B una franja infinitesimal de área trazada en forma horizontal en el orificio, a una distancia "z" del nivel de aguas.

Por dicha área elemental pasará un gasto:

$dQ = C \cdot v \cdot dA$ ....(1)

Donde:

$dA = (0.50 + x) \cdot dx$ ....(2)

Relacionando figuras semejantes:

$$\frac{x}{1.0 - 0.50} = \frac{z - 1.00}{2.00 - 1.00}$$

Despejando: $x = (z-1) \cdot 0.5$ ....(3)

Reemplazando (3) en (2): $dA = (0.5 + 0.5z - 0.5) \cdot dz$

$dA = 0.5z\,dz$ ....(4)

Reemplazando (4) en (1) como también:

$v = \sqrt{2g \cdot z}$ y $C = 0.6$

$$dQ = 0.6\sqrt{2g \cdot z}\,(0.5z)dz = 0.3\sqrt{2g \cdot z}\,(z)dz$$

Integrando entre los límites 1.00 m y 2.00 m distancias de los extremos del orificio, medidos del nivel de aguas;

$$Q = 0.3\sqrt{2g}\int_1^2 \sqrt{z}\; z\,dz = 0.3\sqrt{2g}\int_1^2 z^{3/2}\,dz = 0.3\sqrt{2g}\left(z^{5/2}\right)_1^2\left(\frac{2}{5}\right)$$

$$Q = \frac{2}{5} * 0.3 * \sqrt{2g} * \left(2^{5/2} - 1^{5/2}\right) = 0.12 * \sqrt{2g} * (5.65 - 1)$$

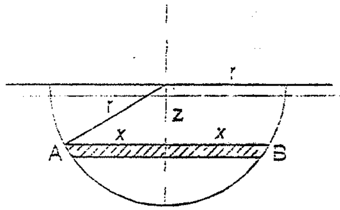
$$\boxed{Q = 2.475\,{}^{m^3}\!/\!_s}$$

4.97. Determinar el gasto de un orificio semicircular en pared vertical, con nivel constante, suponiendo el diámetro horizontal coincidiendo con la superficie libre del líquido.

Resolución:

El gasto diferencial que pasará a través de la faja A-B, será:

$dQ = C \cdot v \cdot dA$ ....(1)



Donde:

$dA = 2x \cdot dz = 2 \cdot \sqrt{r^2 - z^2} \cdot dz$ .....(2)

$v = \sqrt{2gz}$ ....(3)

Reemplazando (2) y (3) en (1):

$dQ = C \cdot \sqrt{2g \cdot z}\,(2)\sqrt{r^2 - z^2} \cdot dz$

Integrando entre los límites del orificio al nivel del agua, o sea 0 y r:

$$Q = 2C \cdot \sqrt{2g} \cdot \int_0^r \left(r^2 - z^2\right)^{1/2} \cdot z^{1/2} \cdot dz$$

$$Q = 2C \cdot \sqrt{2g} \cdot \int_0^r \left(r^2 z - z^3\right)^{1/2} \cdot dz$$

Desarrollando el binomio:

$$Q = 2C\sqrt{2g}\int_0^r\left((r^2z)^{1/2} - \frac{1}{2}(r^2z)^{-1/2}z^3 + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)(r^2z)^{-3/2}z^6}{2} + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)(r^2z)^{-5/2}(-z)^9}{2 \cdot 3} + \ldots\ldots\right)dz$$

$$Q = 2C \cdot \sqrt{2g} \cdot \int_0^r\left(r \cdot z^{1/2} - \frac{1}{2}r^{-1}z^{5/2} - \frac{1}{8}r^{-3}z^{9/2} - \frac{1}{16}r^{-5}z^{13/2} - \ldots\ldots\right) \cdot dz$$

$$Q = 2C \cdot \sqrt{2g} \cdot \left(r \cdot \frac{z^{3/2}}{3/2} - \frac{1}{2}r^{-1}\frac{z^{7/2}}{7/2} - \frac{1}{8}r^{-3}\frac{z^{11/2}}{11/2} - \frac{1}{16}r^{-5}\frac{z^{15/2}}{15/2} - \ldots\ldots\right)_0^r$$

Reemplazando límites:

$$Q = 2C \cdot \sqrt{2g} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot r^{5/2} - \frac{1}{7} \cdot r^{5/2} - \frac{1}{44} \cdot r^{5/2} - \frac{1}{120} \cdot r^{5/2} - \ldots\ldots\ldots\right)$$

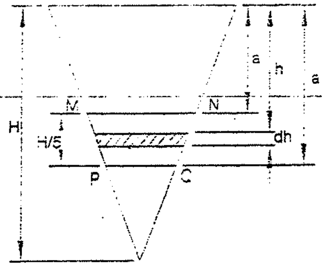
$$Q = 2C \cdot \sqrt{2g} \cdot r^{5/2} \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{7} - \frac{1}{44} - \frac{1}{120} - \ldots\ldots\ldots\ldots\right)$$

$$Q = 2C \cdot \sqrt{2g} \cdot r^{5/2}\,(0.492)$$

$$\boxed{Q = 4.36 \cdot C \cdot r^{5/2}}$$

4.98. En la pared de un depósito que tiene forma de un triángulo isósceles con eje de simetría vertical y con el vértice hacia abajo, se quiere abrir un orificio a todo su ancho. Este orificio, que resulta trapezoidal, será de una altura igual a 1/5 de la altura de la pared. Encontrar la profundidad de la arista superior del orificio para que el gasto sea máximo. Considérese el coeficiente de gasto igual para cualquier posición que se de al orificio.

Resolución:



El orificio pedido será MUPQ.

El gasto en una sección diferencial será:

$dQ = C \cdot v \cdot dA$ ....(1)

Donde:

$v = 2g \cdot h$ ....(2)

$dA = b \cdot dh$ ....(3)

Por semejanza: $\dfrac{b}{B} = \dfrac{(H-h)}{H}$

Del cual: $b = \dfrac{(H-h)B}{H}$

Este valor en (3): $dA = \dfrac{(H-h)B}{H} \cdot dh$ ....(4)

Reemplazando (2) y (4) en (1): $dQ = C \cdot \sqrt{2g \cdot h} \cdot \dfrac{(H-h)B}{H} \cdot dh$

Integrando entre los límites del problema, siendo "a" la profundidad de la arista superior:

$$Q = \int_{a+\frac{H}{5}}^{a} C \cdot \sqrt{2g \cdot h} \cdot \frac{B \cdot (H-h)}{H} dh$$

Para que Q sea máximo debe cumplirse: $\dfrac{dQ}{dh} = 0$

Entonces: $$\frac{dQ}{dh} = \left(C \cdot \sqrt{2g \cdot h} \cdot \frac{B \cdot (H-h)}{H} \right)_{a+\frac{H}{5}}^{a} = 0$$

$$\sqrt{2g \cdot a} \cdot \frac{B \cdot (H-a)}{H} - \sqrt{2g \cdot \left(a + \frac{H}{5}\right)} \cdot \frac{B \cdot \left(H - \left(a + \frac{H}{5}\right)\right)}{H} = 0$$

Simplificando: $$a \cdot (H-a) - \sqrt{\left(a - \frac{H}{5}\right)} \cdot \left(H - \left(a + \frac{H}{5}\right)\right) = 0$$

$$a \cdot (H-a) = \sqrt{a + \frac{H}{2}} \cdot \left(\frac{4H}{5} - a\right)$$

Elevando al cuadrado ambos miembros y simplificando, obtenemos:

$$75a^2 - 85Ha + 16H^2 = 0$$

Resolviendo la ecuación se llega a: $a = \dfrac{H\left(17 \pm \sqrt{97}\right)}{30}$

El único valor que cumple: $a + \dfrac{H}{5} < H$, es: $a = \dfrac{H(17 - 9.85)}{30}$

$$\boxed{a = 0.238H}$$

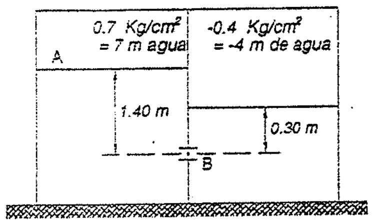
4.99. Un orificio de 5 cm de diámetro conecta dos tanques cerrados A y B. En el tanque A, la altura de agua sobre el centro del orificio es de 1.40 m y está sometido a una presión de vapor de 0.7 Kg/cm^2 relativos.

En el tanque B el nivel de la superficie de agua está a 30 cm por encima del centro del orificio y la presión del aire es de - 0.4 Kg/cm^2. Calcular la descarga a través del orificio. Use $C = 0.60$.

__Resolución:__

Tomando Bernoulli entre A y B:

$$\frac{v_A^2}{2g} + \frac{P_A}{\gamma} + z_A = \frac{v_B^2}{2g} + \frac{P_B}{\gamma} + z_B$$



$$0 + 7 + 1.40 = \frac{v_B^2}{2g} + (0.3 - 4) + 0$$

De donde: $\dfrac{v_B^2}{2g} = 12.1m$

que según Bernoulli, representa la altura "h" desde la cual debe caer libremente el líquido, para adquirir la velocidad v_B.

$$v_B = \sqrt{2g(12.1)} = \sqrt{19.6(12.1)} = 15.4\,m/s$$

El gasto será: $Q = C \cdot v_B \cdot a = 0.60 * 15.4 * \dfrac{\pi(0.05)^2}{4} = 0.60 * 15.4 * 0.00196$

$$\boxed{Q = 0.01813\,m^3/s = 18.13\,l/s}$$

4.100. Se tiene un recipiente de forma cónica con un orificio en la cúspide y otro de igual dimensión en la base. Siendo el coeficiente de descarga el mismo para los dos orificios, indique por cual de ellos descargaría más rápido y la relación que existe entre los tiempos de descarga.

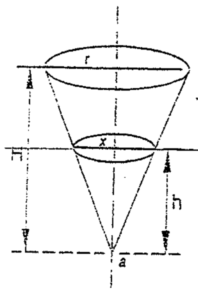
__Resolución:__

El tiempo de vaciado está dado por la fórmula:

$$t = \frac{1}{C \cdot a \cdot \sqrt{2g}} \int_0^{h_1} A \cdot h^{-1/2} dh \quad \text{..............................}(\phi)$$

Donde A es el área del nivel del líquido que es variable e igual a:

$A = \pi \cdot x^2$ ....(1)



Por semejanza de triángulos:

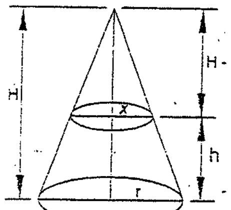
$$\frac{x}{h}=\frac{r}{H} \quad\Rightarrow\quad x=\frac{r\cdot h}{H} \quad\text{.................(2)}$$

Reemplazando (2) en (1): $A=\pi\dfrac{r^2\cdot h^2}{H^2}$

Reemplazando éste último valor en la fórmula (ϕ):

$$t_I=\frac{\pi\cdot r^2}{C\cdot a\cdot\sqrt{2g}\cdot H^2}\cdot\int_0^H h^{3/2}\cdot dh$$

Integrando y reemplazando límites: $t_I=\dfrac{r^2}{C\cdot a\cdot 2g\cdot H^2}\cdot\dfrac{H^{5/2}}{\frac{5}{2}}$ ....(α)



En la otra posición (figura adjunta) el área también es variable: $A=\pi\cdot x^2$ ....(3)

Por semejanza de triángulos:

$$\frac{x}{r}=\frac{H-h}{H} \quad\Rightarrow\quad x=\frac{(H-h)r}{H} \quad\text{............(4)}$$

Reemplazando (4) en (3): $A=\dfrac{\pi(H-h)^2r^2}{H^2}$

Reemplazando este último valor en (ϕ):

$$t_{II}=\frac{\pi\cdot r^2}{C\cdot a\cdot\sqrt{2g}\cdot H^2}\cdot\int_0^H (H-h)^2h^{-1/2}dh$$

$$t_{II}=\frac{\pi\cdot r^2}{C\cdot a\cdot\sqrt{2g}\cdot H^2}\cdot\int_0^H\left(H^2h^{-1/2}-2H\cdot h^{1/2}+h^{3/2}\right)dh$$

Integrando y reemplazando límites:

$$t_{II}=\frac{\pi\cdot r^2}{C\cdot a\cdot\sqrt{2g}\cdot H^2}\cdot\left(2H^{5/2}-\frac{4H^{5/2}}{3}+\frac{2H^{5/2}}{5}\right)$$

$$\Rightarrow\quad t_{II}=\frac{\pi\cdot r^2}{C\cdot a\cdot\sqrt{2g}\cdot H^2}\cdot\frac{16H^{5/2}}{15} \quad\text{.......................................(A)}$$

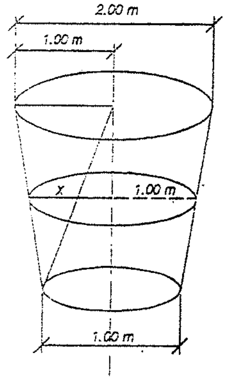
Dividiendo (α) entre (A) obtenemos la relación de tiempos de vaciado:

$$\frac{t_I}{t_{II}}=\frac{\frac{2}{5}}{\frac{16}{15}}=\frac{3}{8} \quad\Rightarrow\quad \boxed{\frac{t_I}{t_{II}}=\frac{3}{8}}$$

Se aprecia en la relación de tiempos que la primera posición es la que descarga más rápido.

4.101. ¿Cuál será el tiempo de vaciado de un reservorio de forma de tronco de cono invertido. La base mayor es de 2 m de diámetro y la base menor es de 1 m de diámetro, la altura es de 2 m. El orificio de descarga está practicado en la base menor y es de 36 cm^2 de área con un coeficiente de descarga 0.8.

Resolución:



La fórmula para el tiempo de vaciado es:

$$t=\frac{1}{C\cdot a\cdot\sqrt{2g}}\int_{h_2}^{h_1}A\cdot h^{-1/2}dh$$

Siendo variable el área de nivel de líquido conforme desagua: $A=\dfrac{\pi\cdot(1+x)^2}{4}$ ....(1)

Por semejanza de triángulos: $\dfrac{x}{1}=\dfrac{h}{2}$; $x=\dfrac{h}{2}$

Reemplazando este valor en (1): $A=\dfrac{\pi}{4}\left(1+\dfrac{h}{2}\right)^2$

$$A=\frac{\pi}{16}(2+h)^2=\frac{\pi}{16}\left(4+4h+h^2\right) \quad\text{............(2)}$$

Reemplazando (2) en la fórmula, entre los límites 0 y 2 m.

$$t=\frac{\pi}{C\cdot a\cdot\sqrt{2g}(16)}\int_0^2\left(4h^{-1/2}+4h^{1/2}+h^{3/2}\right)dh$$

Integrando:

$$t=\frac{\pi}{C\cdot a\cdot\sqrt{2g}(16)}\cdot\left(8h^{1/2}+\frac{8h^{3/2}}{3}+\frac{2h^{5/2}}{5}\right)_0^2$$

$$t=\frac{\pi}{C\cdot a\cdot\sqrt{2g}(16)}\cdot\left(\frac{224}{15}\sqrt{2}\right) \quad\text{.....................................(3)}$$

Se sabe por el enunciado: $C=0.8$, $a=0.0036m^2$, $g=9.8\,m/s^2$

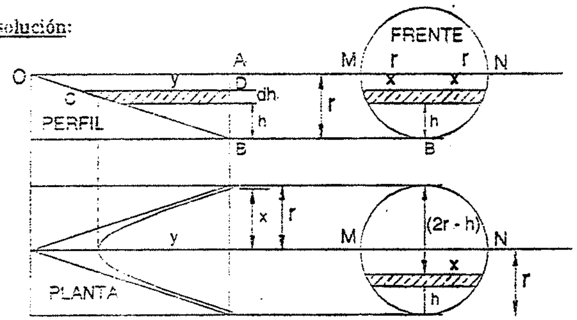
Reemplazando estos valores en (3):

$$t=\frac{3.1416*224\sqrt{2}}{0.8*0.0036*\sqrt{19.6}*16*15}=325\,s$$

$$\boxed{t=325\,s=3\,\text{min.}\;45\,seg.}$$

4.102. Determinar el tiempo de vaciado total de un embalse (reservorio formado por represamiento) a través de un orificio en el fondo de área "a" y coeficiente de descarga "C" cuya forma puede asimilarse a la de un semicono de eje horizontal de radio "r" y altura "L".

Resolución:



El tiempo de vaciado se da por la fórmula: $t = \dfrac{1}{C \cdot a \cdot \sqrt{2g}} \cdot \displaystyle\int_{h_2}^{h_1} A \cdot h^{-1/2} \cdot dh$

Donde "A" es el área del nivel del líquido, variable y tiene la forma de una parábola como se ve en la figura, es igual a:

$$A = 2\left(\frac{2}{3} x \cdot y\right) = \frac{4}{3} x \cdot y \quad \text{...} (1)$$

Por semejanza de triángulos: OAB y CDB

$$\frac{y}{h} = \frac{L}{r} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{L}{r} h \quad \text{...} (2)$$

Del círculo obtenemos:

$$x^2 = (2r - h)h$$

$$x = \sqrt{(2r - h)h} \quad \text{...} (3)$$

Reemplazando (2) y (3) en (1):

$$A = \frac{4}{3} \sqrt{(2r - h)h} \, \frac{L \cdot h}{r} \quad \text{...} (4)$$

Esta expresión de (4) en la fórmula, e integrando entre los límites 0 y r.

$$t = \frac{1}{C \cdot a \cdot \sqrt{2g}} \int_0^r \frac{4}{3} \sqrt{(2r - h)h} \, \frac{L \cdot h}{r} \cdot h^{-1/2} \cdot dh$$

$$t = \frac{4L}{3r \cdot C \cdot a \cdot \sqrt{2g}} \int_0^r h \sqrt{(2r - h)} \cdot dh \quad \text{...} (5)$$

Resolviendo la integral por separado:

Se hace: $2r - h = u^2$

$$h = 2r - u^2$$

$$dh = -2u \cdot du$$

$$\therefore \quad I = \int (2r - u^2) u (-2u \cdot du) = \int -4r \cdot u^2 \cdot du + \int 2u^4 du$$

$$I = \left(-\frac{4r \cdot u^3}{3} + \frac{2u^5}{5}\right) = \left(-\frac{4}{3} r (2r - h)^{3/2} + \frac{2}{5}(2r - h)^{5/2}\right)_0^r$$

$$I = -\frac{4}{3} r (2r - r)^{3/2} + \frac{2}{5}(2r - r)^{5/2} + \frac{4}{3} r (2r)^{3/2} - \frac{2}{5}(2r)^{5/2}$$

$$I = -\frac{4}{3} r^{5/2} + \frac{2}{5} r^{5/2} + \frac{4}{3} r^{5/2} (2)^{3/2} - \frac{2}{5} r^{5/2} (2)^{5/2}$$

$$I = r^{5/2}\left(-\frac{4}{3} + \frac{2}{5} + \frac{8}{3}\sqrt{2} - \frac{8}{5}\sqrt{2}\right) = r^{5/2}\left(\frac{16\sqrt{2} - 14}{15}\right)$$

Reemplazando esta integral en (5): $t = \dfrac{4L}{3r \cdot C \cdot a \cdot \sqrt{2g}} \left(\dfrac{16\sqrt{2} - 14}{15}\right) r^{5/2}$

Simplificando: $t = \dfrac{8 \cdot L \cdot (8\sqrt{2} - 7) r^{3/2}}{45 C \cdot a \cdot \sqrt{2g}}$

$$\boxed{t = \frac{0.173 \, L \cdot r^{3/2}}{C \cdot a}}$$

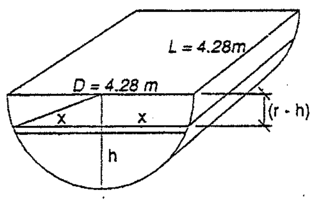
4.103. Calcular el tiempo necesario para evacuar un depósito cilíndrico horizontal de 4.28 m de diámetro y 4.28 m de longitud a través de un orificio circular de 0.05 m de diámetro practicado en la parte más baja del cilindro.

Se supone el depósito con agua hasta la mitad.

El coeficiente de gasto del orificio es 0.62.

Resolución:

El tiempo de vaciado está dado por la fórmula:



$$t = \frac{1}{C \cdot a \cdot \sqrt{2g}} \int_{h_2}^{h_1} A \cdot h^{-1/2} \cdot dh$$

Cuando la carga sobre el orificio sea "h", el área de la superficie del agua será: $A = 4.28(2x)$

Donde por Pitágoras: $x = \sqrt{r^2 - (r-h)^2} = \sqrt{h(2r-h)}$

$$x = \sqrt{h(4.28-h)}$$

Luego: $A = 8.56\sqrt{h(4.28-h)}$

Reemplazando este último valor y demás datos en la fórmula:

$$t = \frac{8.56}{0.62\frac{\pi(0.05)^2}{4}\sqrt{19.6}}\int_0^{2.14}\left(4.28h - h^2\right)^{1/2} h^{-1/2}\,dh$$

$$t = \frac{8.56}{0.62 * 0.001963 * 4.43}\int_0^{2.14}(4.28-h)^{1/2}\,dh \quad \text{...(1)}$$

Hagamos: $4.28 - h = u^2$

$$h = 4.28 - u^2$$

$$dh = -2u \cdot du$$

Entonces la integral: $I = \int u(-2u \cdot du) = -2\int u^2 du = -\frac{2}{3}u^3$

Luego llevando a su variable primitiva, y límites:

$$I = \left(-\frac{2}{3}(4.28-h)^{3/2}\right)_0^{2.14} = \left(-\frac{2}{3}(4.28-2.14)^{3/2} + \frac{2}{3}(4.28)^{3/2}\right)$$

$$I = -\frac{2}{3}(2.14)^{3/2} + \frac{2}{3}(4.28)^{3/2} = -\frac{2}{3}(3.13) + \frac{2}{3}(8.85) = 3.82$$

Reemplazando este valor de la integral en (1):

$$t = \frac{8.56}{0.62 * 0.001963 * 4.43}(3.82) = 6065s$$

$$\boxed{t = 6060\,s}$$

4.104. Encontrar la expresión del tiempo de vaciado total de un depósito prismático de eje vertical que descarga por dos orificios iguales (igual área y coeficiente). El primero situado a la mitad de la altura inicial del líquido en el depósito y el segundo en el fondo.

Acepte la constancia del coeficiente.

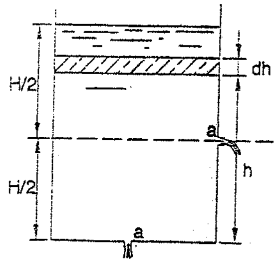
Escribir la expresión obtenida en función del volumen total del líquido obtenido inicialmente en el depósito y el gasto inicial correspondiente al orificio del fondo.

Resolución:

Para el vaciado de la primera mitad del depósito se consideran los dos orificios. donde el gasto que sale es:

$$Q = C \cdot a \cdot \sqrt{2g \cdot \left(h - \frac{H}{2}\right)} + C \cdot a \cdot \sqrt{2g \cdot h} \quad \text{...(1)}$$

Pero: $Q = \frac{dVol.}{dt} = \frac{A(-dh)}{dt}$ ....(2)



Reemplazando (1) en (2):

$$C \cdot a \cdot 2g \cdot \left(h - \frac{H}{2}\right) + C \cdot a \cdot \sqrt{2g \cdot h} = \frac{A \cdot (-dh)}{dt}$$

Despejando el tiempo e integrando:

$$t = \frac{-A}{C \cdot a \cdot \sqrt{2g}} \cdot \int_H^{H/2} \frac{dh}{\sqrt{h - \frac{H}{2}} + \sqrt{h}}$$

Racionalizando: $t = \frac{-A}{C a \sqrt{2g}} \int_H^{H/2} \frac{\sqrt{h - \frac{H}{2}} - \sqrt{h}}{h - \frac{H}{2} - h}\,dh$

$$t = \frac{2A}{H \cdot C \cdot a \cdot \sqrt{2g}} \int_H^{H/2} \left(\sqrt{h - \frac{H}{2}} - \sqrt{h}\right) dh = \frac{2A}{H \cdot C \cdot a \cdot \sqrt{2g}} \left(\left(h - \frac{H}{2}\right)^{3/2} \frac{2}{3} - h^{3/2}\frac{2}{3}\right)_H^{H/2}$$

Reemplazando límites:

$$t_I = \frac{4}{3}\frac{A}{C \cdot a \cdot \sqrt{2g \cdot H}}\left(-\left(\frac{H}{2}\right)^{3/2} - \left(\frac{H}{2}\right)^{3/2} + H^{3/2}\right) = \frac{4}{3}\frac{AH}{C \cdot a \cdot \sqrt{2g \cdot H}}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)$$

$$t_I = 0.39\frac{A \cdot H}{C \cdot a \cdot \sqrt{2g \cdot H}}$$

En el cual: *$A.H$ = Volumen inicial*

$C \cdot a \cdot \sqrt{2g \cdot H}$ = Gasto inicial correspondiente al orificio del fondo.

Luego: $t_I = 0.39\frac{V_0}{Q_0}$ ....(3)

El vaciado de la otra mitad se realiza sólo por el orificio del fondo y está dado por la expresión:

$$t_{II} = \frac{A}{C \cdot a \cdot \sqrt{2g}} \cdot \int_0^{H/2} h^{-1/2} \cdot dh$$

$$t_{II} = \frac{A}{C \cdot a \cdot \sqrt{2g}} \cdot \left(2\left(\frac{H}{2}\right)^{1/2}\right) = \frac{A \cdot H \cdot \sqrt{2}}{C \cdot a \cdot \sqrt{2gH}}$$

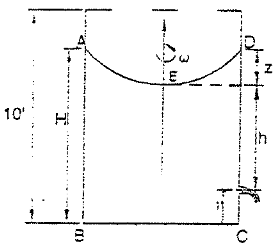
$$t_{II} = 1.41\frac{V_0}{Q_0} \quad \text{..} (4)$$

El tiempo total para el vaciado será: $t = t_I + t_{II}$

$$\boxed{t = 1.8\frac{V_0}{Q_0}}$$

4.105. Un vaso cilíndrico de 10 *pies* de altura y 4 *pies* de diámetro está lleno con agua hasta una altura de 8 pies. En la pared cilíndrica se ha practicado un orificio circular de 2 *pulgadas* de diámetro ($C = 0.6$) situado a la altura de un pie por encima del fondo del vaso. Si el vaso gira alrededor de su eje vertical, a razón de 45 R.P.M. y durante la revolución se permite la salida del agua por el orificio por un tiempo exacto de 2 *minutos*, se desea saber cuál será la altura que alcanzará el agua que queda dentro del depósito cuando se vuelva al estado de reposo.

Resolución:



Al girar el vaso cilíndrico, se forma un paraboloide de altura:

$$z = \frac{\omega^2 x^2}{2g} = \frac{(1.5\pi)^2 2^2}{2(32.2)} \quad \Rightarrow \quad z = 1.38 \text{ pies}$$

Cálculo de la altura "H" a que llega el agua al iniciar el movimiento.

Como al girar, no se derrama el agua, se puede plantear:

$$Vol.\ de\ agua = Vol.\ del\ cili._{ABCD} - Vol.\ parab._{AED}$$

$$8'(\text{Área de la base}) = H(\text{Área de la base}) - \frac{1.38(\text{Área de la base})}{2}$$

$$8' = H - \frac{1.38'}{2}$$

De donde: $H = 8.69'$

Se sabe que el gasto que sale por el orificio está dado por:

$$Q = \frac{dVol.}{dt} = \frac{\text{Área de la base} \cdot dh}{dt} = \frac{A \cdot dh}{dt}$$

De donde: $dt = \dfrac{A \cdot dh}{Q} = \dfrac{A \cdot dh}{C \cdot a \cdot \sqrt{2g \cdot (h + 1.38)}}$

Integrando: $t = \dfrac{A}{C \cdot a \cdot \sqrt{2g}} \cdot \displaystyle\int_{h_2}^{h_1} \frac{dh}{\sqrt{h + 1.38}}$

En el cual: $t = 120s$

$C = 0.6$

$g = 32.2\ pies/s^2$

$h_1 = 8.69 - 1.38 - 1 = 6.31'$

$$\frac{A}{a} = \frac{D^2}{d} = \frac{4^2}{\left(\frac{2}{12}\right)^2} = \frac{16}{\frac{1}{36}} = 576$$

Luego: $120 = \dfrac{576}{0.6\sqrt{64.4}} \cdot \displaystyle\int_{h_2}^{6.31'} \frac{dh}{\sqrt{h + 1.38}}$ ....(1)

Para resolver la integral se hace: $\sqrt{h + 1.38} = u$

$h + 1.38 = u^2$

$dh = 2u \cdot du$

$$\therefore\ I = \int \frac{2u \cdot du}{u} = 2\int du = 2u = 2\sqrt{h + 1.38}$$

Este valor en (1): $120 = \dfrac{576}{0.6\sqrt{64.4}}\left(2\sqrt{h + 1.38}\right)_{h_2}^{6.31'}$

Reemplazando límites y simplificando:

$$120 = \frac{960}{\sqrt{64.4}} * 2 * \left(\sqrt{6.31 + 1.38} - \sqrt{h_2 + 1.38}\right)$$

$$0.5 = \sqrt{7.69} - \sqrt{h_2 + 1.38}$$

$$\sqrt{h_2 + 1.38} = 2.77 - 0.5 = 2.27$$

$$h_2 + 1.38 = 5.15 \text{ pies}$$

Luego, la altura que alcanzará el agua que queda dentro del cilindro, se puede calcular de la ecuación:

$$Vol.de\ agua = Vol.\ cilin._{A'B'C'D'} - Vol.\ parab._{A'E'D'}$$

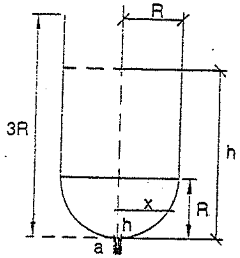
$$H'(\text{Área de la base}) = (5.15 + 1)\text{Área de la base} - \frac{1.38(\text{Área de la base})}{2}$$

$$H' = 6.15 - 0.69$$

$$\boxed{H' = 5.46 \text{ pies}}$$

4.106. Encontrar la expresión del vaciado total (en función del volumen y gasto inicial) a través de un orificio situado en la parte superior de un depósito cuyo cuerpo es cilíndrico con altura igual al diámetro y cuyo fondo es semiesférico. Considérese constante el coeficiente de gasto.

Resolución:



Llamando R al radio de la semiesfera, la altura del cilindro será $2R$. El vaciado de la parte cilíndrica durará:

$$t_I = \frac{A}{C \cdot a \cdot \sqrt{2g}} \cdot \int_R^{3R} h^{-1/2} \cdot dh$$

$$t_I = \frac{A}{C \cdot a \cdot \sqrt{2g}} \cdot \left(2h^{1/2}\right)_R^{3R}$$

$$t_I = \frac{2A \cdot R}{C \cdot a \cdot \sqrt{2g \cdot R}} \cdot \left(\sqrt{3} - 1\right) \quad \text{.......................(1)}$$

Para el vaciado de la semiesfera, el área de la superficie libre del agua es variable:

$$A = \pi \cdot x^2$$

Por Pitágoras: $x^2 = \left(R^2 - (R-h)^2\right)$

$$x^2 = 2R \cdot h - h^2$$

Luego: $A = \pi \cdot \left(2R \cdot h - h^2\right)$

Reemplazando en la fórmula para el tiempo de vaciado:

$$t_{II} = \frac{\pi}{C \cdot a \cdot \sqrt{2g}} \int_0^R \left(2R \cdot h - h^2\right) \cdot h^{-1/2} \cdot dh$$

$$t_{II} = \frac{\pi}{C \cdot a \cdot \sqrt{2g}} \left(2R \cdot h^{3/2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right) - h^{5/2} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)\right)_0^R$$

$$t_{II} = \frac{\pi \cdot R^{5/2}}{C \cdot a \cdot \sqrt{2g}} \left(\frac{14}{15}\right) = \frac{\pi \cdot R^3}{C \cdot a \cdot \sqrt{2g \cdot R}} \left(\frac{14}{15}\right) \quad \text{.......................(2)}$$

El tiempo total será: $t = t_I + t_{II}$

Multiplicando y dividiendo por $\sqrt{3}$: $t = \dfrac{2.397\pi\sqrt{3}R^3}{C a \sqrt{2g(3R)}} = \dfrac{4.15\pi R^3}{Q_0}$

El volumen inicial era: $V_0 = \pi \cdot R^2 \cdot 2R + \dfrac{2}{3}\pi \cdot R^3 = 2.67\pi \cdot R^3$

$$\therefore \; t = \frac{4.15\pi \cdot R^3 V_0}{2.67\pi \cdot R^3 Q_0} = \frac{4.15 V_0}{2.67 Q_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = 1.55\frac{V_0}{Q_0}}$$

4.107. Un tanque que tiene la forma tronco cónica está abierto en la parte superior y tiene las siguientes dimensiones:

Diámetro superior: 0.90 m

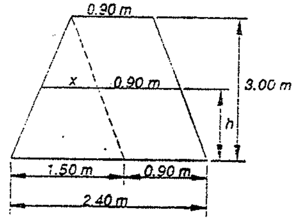
Diámetro en el fondo: 2.40 m

Altura del tanque: 3.00 m

El tanque tiene un orificio estándar de 10 cm de diámetro en el centro del círculo de base. En un instante determinado el nivel de agua es de 2.70 m sobre el orificio y después de 1.40 *minutos* ha bajado 1.50 m. Determine el coeficiente de descarga del orificio.

Resolución:

El área transversal es variable cuyo diámetro AB será: $d = x + 0.90$



Por semejanza de triángulos:

$$\frac{x}{1.50} = \frac{3-h}{3} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1.50}{3}(3-h)$$

Luego: $d = 0.5(3-h)$

El área de la superficie libre será:

$$A = \frac{0.25(3-h)^2\pi}{4} = 0.0625\pi(3-h)^2$$

La fórmula para hallar el tiempo de vaciado es: $t = \dfrac{1}{C \cdot a \cdot \sqrt{2g}} \cdot \int_{h_2}^{h_1} A \cdot h^{-1/2} \cdot dh$

Despejando: $C = \dfrac{1}{t \cdot a \cdot \sqrt{2g}} \cdot \int_{h_2}^{h_1} A \cdot h^{-1/2} \cdot dh$

Reemplazando valores, e integrando entre los límites que dura el vaciado:

$$h_1 = 2.70m$$

$$h_2 = 2.70 - 1.50 = 1.20m$$

$$C = \frac{0.0625\pi}{84 * \frac{\pi(0.10)^2}{4}\sqrt{2g}} \cdot \int_{1.20}^{2.70} \left(9 - 6h + h^2\right) \cdot h^{-1/2} \cdot dh$$

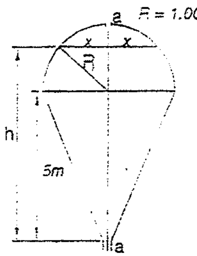
$$C = 0.0671\left(2 * 9h^{1/2} - 4h^{3/2} + \frac{2}{5}h^{5/2}\right)_{1.20}^{2.70}$$

Reemplazando los límites tenemos:

$$\boxed{C = 0.633}$$

4.108. Calcule los tiempos del vaciado para el tanque mostrado en la figura, compuesto de una semiesfera y un cono. El tanque tiene dos orificios iguales de 2 cm de diámetro, uno en el vértice del cono y el otro en la parte superior de la semiesfera. Asuma un coeficiente de descarga constante e igual a 0.60 para ambos orificios. Ver figura.

Resolución:



Para la posición (a):

La fórmula es: $t = \dfrac{1}{C \cdot a \cdot \sqrt{2g}} \cdot \int_{h_2}^{h_1} A \cdot h^{-1/2} \cdot dh$

El área variable en la semiesfera es:

$A = \pi \cdot x^2 = \pi \cdot \left(R^2 - (h-5)^2\right)$

$A = \pi \cdot \left(1 - h^2 + 10h - 25\right)$

$A = \pi \cdot \left(10h - 24 - h^2\right)$

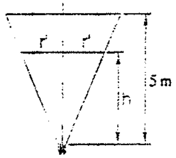
Reemplazando en la fórmula e integrando entre los límites: 5 m y 6 m.

$$t_I = \frac{\pi}{C a \sqrt{2g}} \int_5^6 \left(10h^{1/2} - 24h^{-1/2} - h^{3/2}\right) dh$$

$$t_I = \frac{\pi}{C a \sqrt{2g}} \left(\frac{20}{3} h^{3/2} - 48h^{1/2} - \frac{2}{5} h^{5/2}\right)_5^6$$

$$t_I = \frac{\pi}{C a \sqrt{2g}} \left(24.67\sqrt{5} - 22.4\sqrt{6}\right) \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

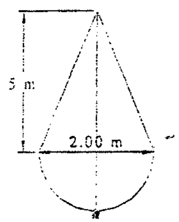
Para el vaciado del cono:



Por semejanza de triángulos: $\dfrac{r'}{1} = \dfrac{h}{5} \quad \Rightarrow \quad r' = \dfrac{h}{5}$

Entonces: $A = \dfrac{\pi}{25} h^2$

Reemplazando valores en la fórmula:



$$t_{II} = \frac{\pi}{C \cdot a \cdot \sqrt{2g} \cdot 25} \cdot \int_0^5 h^{3/2} \cdot dh$$

$$t_{II} = \frac{\pi}{C \cdot a \cdot \sqrt{2g} \cdot 25} \cdot \left(\frac{2}{5} h^{5/2}\right)_0^5$$

$$t_{II} = \frac{0.4 \cdot \sqrt{5} \cdot \pi}{C \cdot a \cdot \sqrt{2g}} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

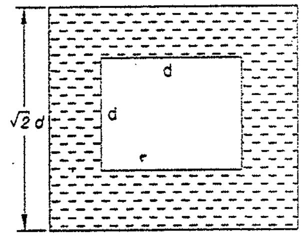
El tiempo total de vaciado será: $t = t_I + t_{II}$

$$t = \frac{\left(25.07 * \sqrt{5} - 22.4 * \sqrt{6}\right) * \pi}{0.6 * \dfrac{\pi * (0.02)^2}{4} * \sqrt{2g}}$$

$$\boxed{t = 4479\, s}$$

La posición (b), figura adjunta, se deja como ejercicio cuya respuesta es: $t' = 7970\ s$.

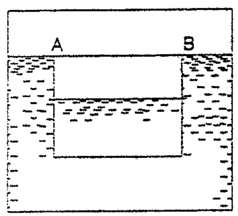
4.109. Se tiene dos depósitos prismáticos, de sección cuadrada, concéntricos y con el eje común horizontal, y las caras horizontales y verticales; la longitud de ambos depósitos es la misma. El depósito exterior está lleno de líquido y el interior está vacío.



Encuéntrese la expresión del tiempo de igualación de niveles, en función del volumen de agua y el gasto inicial, si se comunica ambos depósitos por la abertura de un orificio en el fondo del depósito interior. Ambos depósitos están ventilados para asegurar que la presión atmosférica actúa sobre las dos superficies líquidas. Despréciese el espesor de las paredes y considérese constante el coeficiente del gasto del orificio.

Resolución:

Primera etapa: El nivel de agua del depósito exterior llega a la cara AB del depósito interior.



Como son dos depósitos limitados comunicantes la fórmula a usarse es:

$$t = \frac{1}{C \cdot a \cdot \sqrt{2g}} \cdot \left(\frac{A_1 \cdot A_2}{A_1 + A_2}\right) \cdot \int_{h_2}^{h_1} h^{-1/2} \cdot dh$$

Donde: $A_1 = \sqrt{2}\, d\, L$

$A_2 = d\, L$

$h_1 = d + \dfrac{\sqrt{2}\, d - d}{2} = \left(\dfrac{\sqrt{2} + 1}{2}\right) d$

$h_1 = 1.2\, d$

$$h_2 = d - a = d - \frac{Vol.\ que\ sale}{\acute{A}rea\ dep\acute{o}sito\ interior} = d - \frac{\left(\frac{\sqrt{2}\,d - d}{2}\right)\sqrt{2}\,d\,L}{d\,L} = \frac{\sqrt{2}\,d}{2} = 0.71d$$

Reemplazando valores en la fórmula e integrando:

$$t_I = \frac{1}{C\,a\sqrt{2g}}\left(\frac{\sqrt{2}\,d\,L\,d\,L}{\sqrt{2}\,d\,L + d\,L}\right)\left(2h^{1/2}\right)_{0.71d}^{1.2d}$$

$$t_I = \frac{1}{C\,a\sqrt{2g}}\left(\frac{d\,L\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}\right)(2)\left(\sqrt{1.2d} - \sqrt{0.71d}\right)$$

Para que la expresión quede en función del volumen y gasto inicial, multiplicamos y dividimos por la carga inicial elevado a la *1/2: 1.2d*:

$$t_I = \left(\frac{2\sqrt{2}\,d^2\,L}{C\,a\sqrt{2g(1.2d)}}\right) * \frac{1.2 - \sqrt{1.2*0.71}}{\sqrt{2}+1}$$

$$t_I = 0.33 * \frac{d^2\,L}{C\,a\sqrt{2g(1.2d)}} = 0.33 * \frac{V_0}{Q_0} \quad \text{...(1)}$$

Segunda etapa: Los niveles deben igualarse. En este caso, las cargas serán:

$$h_1 = 0.71d$$
$$h_2 = 0$$

Las áreas serán: $A_1 = \sqrt{2}\cdot d\cdot L - d\cdot L\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)$

$$A_2 = d\cdot L$$

Reemplazando en la fórmula e integrando:

$$t_{II} = \frac{1}{C\cdot a\cdot\sqrt{2g}}\cdot\frac{d\cdot L\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot d\cdot L}{d\cdot L\cdot\left(\sqrt{2}-1\right) + d\cdot L}\left(2h^{1/2}\right)_0^{0.71d}$$

$$t_{II} = \frac{1}{C\cdot a\cdot\sqrt{2g}}\cdot\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot d\cdot L}{\sqrt{2}-1+1} * 2 * \sqrt{0.71d}$$

Multiplicando y dividiendo por la carga inicial elevado a la 1/2: $\sqrt{1.2d}$

$$t_{II} = \frac{1}{C\,a\sqrt{2g(1.2d)}}\cdot\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)*2*\sqrt{0.71*1.2}*d^2\,L}{\sqrt{2}}$$

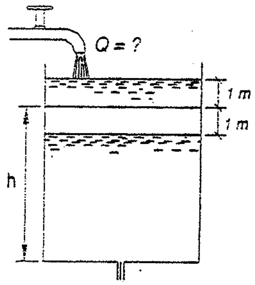
$$t_{II} = 0.54 * \frac{d^2\,L}{C\,a\sqrt{2g(1.2d)}} = 0.54\frac{V_0}{Q_0} \quad \text{...(2)}$$

El tiempo de igualación de niveles será: $t = t_I + t_{II}$

$$\boxed{t = 0.87\frac{V_0}{Q_0}}$$

4.110. En un depósito cilíndrico de eje vertical se ha establecido régimen permanente por la entrada de un gasto constante igual al gasto saliente, a través de un orificio en el fondo. En un momento dado se interrumpe el ingreso, produciéndose un descenso de 1 *m* en el nivel de la superficie de agua en 5 *minutos*. En los 6 *minutos* siguientes se registra un nuevo descenso de 1 *m*. ¿Cuál será el gasto entrante en el reservorio? El área de la superficie de agua en el reservorio es de 10 m^2. Acepte la constancia del coeficiente.

__Resolución:__



La fórmula que da el tiempo de vaciado es:

$$t = \frac{1}{C\cdot a\cdot\sqrt{2g}}\cdot\int_{h_2}^{h_1} A\cdot h^{-1/2}\cdot dh$$

Sea "*h*" la carga sobre el orificio después de los 5 *minutos*, luego la carga inicial fue:

$$h_I = h + 1$$

Integrando para los primeros 5 minutos:

$$5*60 = \frac{2A}{C\cdot a\cdot\sqrt{2g}}\cdot\left(h^{1/2}\right)_h^{h+1}$$

$$300 = \frac{2A}{C\cdot a\cdot\sqrt{2g}}\cdot\left(\sqrt{h+1} - \sqrt{h}\right) \quad \text{...(1)}$$

En los 6 minutos restantes se tiene: $h_1 = h$

$$h_2 = h - 1$$

Reemplazando en la fórmula e integrando:

$$6*60 = \frac{2A}{C\cdot a\cdot\sqrt{2g}}\cdot\left(\sqrt{h} - \sqrt{h-1}\right) \quad \text{...(2)}$$

Dividiendo (1) entre (2): $\frac{5}{6} = \frac{\sqrt{h+1} - \sqrt{h}}{\sqrt{h} - \sqrt{h-1}}$

Racionalizando:

$$\frac{5}{6} = \sqrt{h\cdot(h+1)} + \sqrt{(h+1)\cdot(h-1)} - h - \sqrt{h\cdot(h-1)}$$

$$\frac{5}{6} + h - \sqrt{(h+1)\cdot(h-1)} = \sqrt{h\cdot(h+1)} - \sqrt{h\cdot(h-1)}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros:

$$\frac{25}{36} + \frac{10}{6}h + h^2 - 2\cdot\left(\frac{5}{6} + h\right)\cdot\sqrt{h^2-1} + h^2 - 1 = h\cdot(h+1) + h\cdot(h-1) - 2h\cdot\sqrt{h^2-1}$$

Simplificando: $\frac{10}{6}\sqrt{h^2-1} = \frac{10}{6}h - \frac{11}{36}$

$$10\sqrt{h^2-1} = 10h - \frac{11}{6}$$

Elevando al cuadrado nuevamente y simplificando: $\frac{110}{3}h = \frac{3721}{36}$

De donde: $h = 2.82\ m$

El gasto entrante en el reservorio era: $Q = Ca \cdot \sqrt{2g \cdot (h_1)}$

$Q = C \cdot a \cdot \sqrt{2g\,(h-1)}$

$Q = C \cdot a \cdot \sqrt{2g\,(2.82+1)} = C \cdot a \cdot \sqrt{2g\,(3.82)}$ ....(3)

Reemplazando el valor de "h" hallado en (1): $300 = \frac{2A}{C \cdot a \cdot \sqrt{2g}}\left(\sqrt{3.82} - \sqrt{2.82}\right)$

Reemplazando el dato del problema: $A = 10\ m^2$ y despejando:

$C \cdot a \cdot \sqrt{2g} = \frac{2 * 10}{300}\left(\sqrt{3.82} - \sqrt{2.82}\right) = \frac{1}{15}(1.955 - 1.679)$

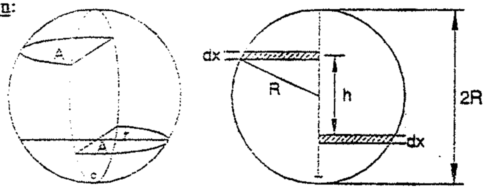
$C \cdot a \cdot \sqrt{2g} = 0.0184$ ....(4)

Reemplazando (4) en (3): $Q = 0.0184\sqrt{3.82} = 0.035972\ m^3/s$

$$\boxed{Q = 35.972\ l/s}$$

4.111. Se tiene un depósito esférico con un tabique diametral vertical. En la parte inferior del tabique existe un orificio que comunica a ambas mitades del depósito. Si en el momento inicial una de las mitades está completamente llena y la otra vacía, encontrar la expresión del tiempo transcurrido para que se produzca la igualación de niveles en ambas mitades, en función del volumen de agua y del gasto inicial.
La presión atmosférica actúa siempre sobre las dos mitades.

Resolución:



En un diferencial de tiempo, circula por el orificio un volumen:

$dV = Q \cdot dt$

$dV = C \cdot a \cdot \sqrt{2g \cdot h} \cdot dt$ ....(1)

Pero, este volumen, según la figura es: $dV = A \cdot dx$

Donde el decremento de la carga hidráulica es: $dh = 2\ dx$ (porque mientras en el lado izquierdo baja el nivel, en el derecho sube).

Luego: $dV = A \cdot \left(\frac{dh}{2}\right) = \frac{\pi \cdot r^2}{2}\left(\frac{dh}{2}\right)$ ....(2)

Por Pitágoras: $r^2 = R^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2 = R^2 - \frac{h^2}{4}$

Reemplazando este valor en (2): $dV = \frac{\pi}{4}\left(R^2 - \frac{h^2}{4}\right)dh$ ....(3)

Igualando (1) con (2): $C \cdot a \cdot \sqrt{2g \cdot h} \cdot dt = \frac{\pi}{4} \cdot \left(R^2 - \frac{h^2}{4}\right) \cdot dh$

Despejando el tiempo e integrando: $t = \frac{\pi}{C \cdot a \cdot \sqrt{2g} \cdot 4} \cdot \int_{h_1}^{h_2}\left(R^2 - \frac{h^2}{4}\right) \cdot (dh) \cdot h^{-1/2}$

Los límites son: $h_1 = 2R$

$h_2 = 0$

Luego: $t = \frac{\pi}{Ca\sqrt{2g} * 4}\int_0^{2R}\left(R^2 h^{-1/2} - \frac{h^{3/2}}{4}\right)dh$

$$t = \frac{\pi}{Ca\sqrt{2g} * 4}\left(2R^2 h^{1/2} - \frac{h^{5/2}}{10}\right)_0^{2R}$$

$$t = \frac{\pi}{Ca\sqrt{2g} * 4}\left(2\sqrt{2}\,R^{5/2} - \frac{2}{5}\sqrt{2}\,R^{5/2}\right)$$

$$t = \frac{\pi \cdot R^{5/2}}{Ca\sqrt{2g} * 4} * 2\sqrt{2}\left(1 - \frac{1}{5}\right)$$

Multiplicando y dividiendo por: $\sqrt{2R}$

$$t = \frac{\pi R^{5/2}\sqrt{2R}}{Ca\sqrt{2g} * 4\sqrt{2R}}\left(2\sqrt{2} * \frac{4}{5}\right) = \frac{4}{5}\left(\frac{\pi \cdot R^3}{Ca\sqrt{2g} * 2R}\right)$$

$$t = \frac{4}{5} * \frac{3}{2} * \frac{3}{Ca\sqrt{2g} * 2R} = \frac{12}{10} * \frac{Vol.\ de\ agua}{Gasto\ inicial}$$

$$\boxed{t = \frac{6}{5} * \frac{Vol}{Q_0}}$$

4.112. Un cilíndrico metálico de 0.80 m de diámetro y 1.20 m de altura tiene una de sus bases abierta. En el centro de la otra base hay un orificio estándar de 2.5 cm de diámetro. Se coloca el cilindro en una poza de agua con la base cerrada hacia abajo. Se pide calcular el tiempo que tardará el cilindro para sumergirse completamente si su peso es de 25 Kg. Úsese $C_C = 0.60$.

Resolución:

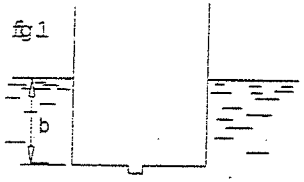
Datos: $G = 25\ Kg$

b = *calado*

A = *área del cilindro*

γ = *peso específico*

Fig. 1: posición del cilindro antes de sumergirse (cerrado el orificio)



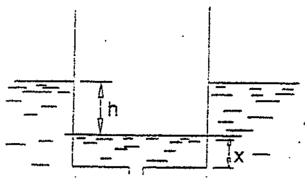
Peso cilindro = Peso del volumen desalojado del líquido

$$G = A \cdot b$$

$$Calado = b = \frac{G}{A \cdot \gamma} \quad \text{.......................(1)}$$

fig. 2: posición del cilindro en un instante cualquiera (abierto el orificio)

Peso líquido introducido+ Peso cilindro = Peso del volumen desalojado de líquido.



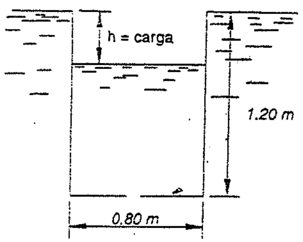
$$A \cdot x \cdot \gamma + G = A \cdot (h + x) \cdot \gamma$$

De donde:

$$h = \frac{G}{A \cdot \gamma} \quad \text{..............................(2)}$$

Comparando (1) con (2), se saca como conclusión:

Que si el área del recipiente permanece constante, la carga será constante también.



Se sabe que: $Q = \frac{Vol.}{t} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{V}{Q}$

Siendo V = *volumen que falta sumergirse*, y

t = *tiempo que demorará.*

$$\therefore \quad t = \frac{\pi \cdot (0.80)^2 (1.20 - calado)}{4C \cdot a \cdot \sqrt{2g \cdot h}} \quad \text{.........(3)}$$

De (1) y (2):

$$calado = b = h = \frac{25}{\frac{\pi (0.8)^2}{4} * 1000} = 0.05m$$

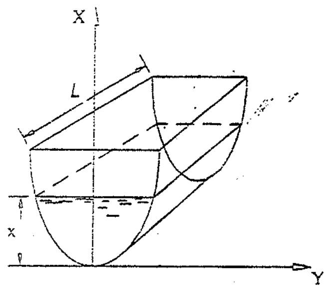
Reemplazando este último valor en (3), como demás datos

$$t = \frac{\pi (0.80)^2 (1.20 - 0.05)}{4 * 0.6 * \frac{\pi (0.025)^2}{4} * \sqrt{19.6 * 0.05}}$$

Simplificando y ejecutando: $\boxed{t = 1980s}$

4.113. Se desea determinar la forma que debe darse a un depósito prismático para que su velocidad de descenso del nivel sea constante, al vaciarse por un orificio en el fondo.

Resolución:



La velocidad de salida por el orificio es:

$$v = \sqrt{2g \cdot x} \quad \text{..............................(1)}$$

Llamando v_i la velocidad de descenso, por continuidad se tiene:

$$v_i \cdot A = v \cdot a \quad \text{..............................(2)}$$

Donde:

A = *área de la superficie libre.*

a = *área del orificio.*

Reemplazando (1) en (2): $v_i\, A = \sqrt{2g\,x} \cdot a$

Donde $\sqrt{2g}$, "a" son constantes, y como v_i debe también serlo, se tiene:

$$A = K\sqrt{x} \quad \text{..............................(3)}$$

Como el depósito es prismático, el área de la superficie del líquido será:

$$A = 2y \cdot L \quad \text{..............................(4)}$$

Donde "L" es el largo del prisma.

Reemplazando (4) en (3): $2L \cdot y = K \cdot \sqrt{x}$

$$y = \frac{K}{2L} \cdot \sqrt{x}$$

Elevando al cuadrado esta última expresión donde $\frac{K}{2L}$ es constante.

$y^2 = K \cdot x$ (que indica la forma que debe tener la sección del depósito prismático).

La sección es PARABÓLICA, con Vértice en la generatriz que pasa por el orificio.

4.114. Un recipiente cilíndrico de la forma mostrada en la figura tiene en el fondo un orificio de 3 cm de diámetro ($C = 0.62$). El tanque vacío es colocado en una laguna, con el orificio tapado. Cuando el tanque llega a su profundidad de flotación se abre el orificio y penetra agua al interior del tanque. Se desea saber: ¿Cuánto tiempo tardará éste en hundirse completamente?. El peso del tanque es de 900 *Kg*.

Resolución:

1° Calado del recipiente sobre el agua, que será la carga inicial.

Peso recipiente = Peso volumen desalojado.

$$P = Vol.\cdot\gamma$$

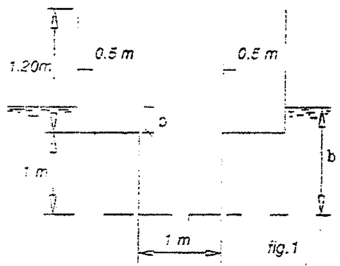


fig.1

$$900 = \frac{\pi(1)^2}{4}*1000 + (b+1)*\frac{\pi(2)^2}{4}*1000$$

$$900 = 1000\left(\frac{\pi}{4}\right)(1 + 4b - 4)$$

De donde: $b = 1.04m$

En este instante el orificio del fondo se abre y comienza a hundirse.

En la figura N° 2, llamaremos:

$A_1 =$ *área pequeña*

$A_2 =$ *área grande*

2° Tiempo en llenar el recipiente pequeño.

Por Arquímedes deducimos que el volumen de agua que entra es igual al volumen que se sumerge, luego:

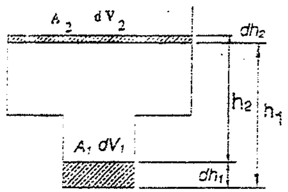


fig.2

$$dV_1 = dV_2 = dV$$

$$A_1\cdot dh_1 = A_2\cdot dh_2 = dV$$

De aquí se saca:

$$dh_1 = \frac{dV}{A_1} \quad\text{...(1)}$$

$$dh_2 = \frac{dV}{A_2} \quad\text{...(2)}$$

Restando (1) - (2) obtenemos el decremento de carga hidráulica:

$$-dh = dh_1 - dh_2 = \frac{dV}{A_1} - \frac{dV}{A_2}$$

$$-dh = dV\left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2}\right) \quad\text{...(3)}$$

Pero el gasto que sale en un diferencial de tiempo es:

$$Q = C\cdot a\cdot\sqrt{2g\cdot h} = \frac{dV}{dt} \quad\text{...(4)}$$

Dividiendo (3) con (4): $\dfrac{-dh}{C\cdot a\cdot\sqrt{2g\cdot h}} = \left(\dfrac{1}{A_1} - \dfrac{1}{A_2}\right)dt$

$$\therefore\quad dt = \frac{A_1\cdot A_2\cdot dh}{C\cdot a\cdot\sqrt{2g\cdot h}\cdot(A_1 - A_2)}$$

El tiempo que demorará en llenarse el cilindro menor es:

$$t_I = \frac{A_1\cdot A_2}{C\cdot a\cdot(A_2 - A_1)\cdot\sqrt{2g}}\cdot\int_{h_2}^{h_1} h^{-1/2}\cdot dh \quad\text{...(5)}$$

Donde se han invertido los límites de la integral para eliminar el signo negativo.

La carga inicial es: $h_1 = 1.04m$ *(calado)*

La carga final se deduce por Arquímedes: $0.900 = \dfrac{\pi(2)^2}{4}\cdot h_2 \Rightarrow h_2 = 0.29m$

Reemplazando valores en (5) e integrando:

$$t_I = \frac{\frac{\pi}{4}*\pi}{0.62*\frac{\pi}{4}*(0.03)^2*\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)*\sqrt{2g}}*2*\left(\sqrt{1.04} - \sqrt{0.29}\right)$$

Simplificando: $t_I = \dfrac{2*(1.02 - 0.538)}{0.62*0.0009*\left(1 - \frac{1}{4}\right)*\sqrt{2g}} = 517s$ ....(6)

3° Tiempo que falta para hundirse: Llenado el recipiente pequeño, como el volumen que entra es igual al que se sumerge, la carga hidráulica será constante a partir de este instante, por ser el área A_2 constante.

Como: $Q = \dfrac{Vol}{t} \Rightarrow t = \dfrac{V}{Q}$ donde: $V =$ *Volumen que falta sumergirse.*

$t =$ *tiempo que demorará.*

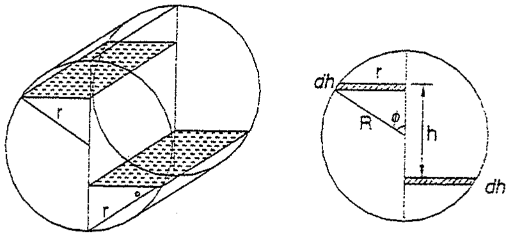
$Q = \sqrt{2g\cdot h_2}$

$$\therefore\quad t_{II} = \frac{\frac{\pi*(2)^2}{4}*(1.20 - 0.29)}{0.62*\frac{\pi}{4}*(0.03)^2*\sqrt{19.6*0.29}} = 2723s \quad\text{.............................(7)}$$

El tiempo que tardará en sumergirse será: $t = t_I + t_{II}$

$$\boxed{t = 3240s}$$

4.115. Se tiene un depósito cilíndrico de eje horizontal, dividido en dos mitades por un tabique diametral vertical. Una de las mitades está llena de líquido y la otra vacía. Determínese la expresión del tiempo de igualación de niveles en ambas mitades al abrirse un orificio en la parte inferior del tabique. El cilindro está ventilado en sus dos mitades en forma que la presión atmosférica actúa sobre las dos superficies libres en todo momento. Considere constante el coeficiente de gasto del orificio. Exprese el resultado en función del volumen total del líquido y del gasto en el momento inicial.



Resolución:

En un diferencial de tiempo, circula por el orificio un volumen:

$dV = Q \cdot dt$

$dV = C \cdot a \cdot \sqrt{2g \cdot h} \cdot dt$ ....(1)

Pero éste volumen según la figura es: $dV = A.dx$, donde el decremento de carga hidráulica es: $dh = 2dx$ (ya que mientras en el lado izquierdo baja el nivel, en el derecho sube). Luego:

$dV = A \cdot \frac{dh}{2} = r \cdot L \cdot \frac{dh}{2}$ ....(2)

Donde: $r = R \cdot sen\phi$

$\frac{h}{2} = R \cdot \cos\phi \;\Rightarrow\; \frac{dh}{2} = -R \cdot sen\phi \cdot d\phi$

$\therefore\; dV = R \cdot sen\phi \cdot L \cdot (-R \cdot sen\phi \cdot d\phi)$

$\therefore dV = -R^2 \cdot L \cdot sen^2\phi \cdot d\phi$ ....(3)

Igualando (1) con (3): $C \cdot a \cdot \sqrt{2g \cdot h} \cdot dt = -R^2 \cdot L \cdot sen^2\phi \cdot d\phi$

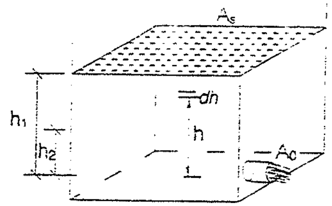
Despejando e integrando: $t = \frac{-R^2 \cdot L}{C \cdot a \cdot \sqrt{2g}} \cdot \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{sen^2\phi \cdot d\phi}{\sqrt{h}}$

Donde: $h = 2R \cdot \cos\phi$; y para que se produzca la igualación de niveles:

$\phi_1 = 0 \;;\; \phi_2 = \frac{\pi}{2}$

Entonces: $t = \frac{-R^2 \cdot L}{C \cdot a \cdot \sqrt{2g} \cdot \sqrt{2R}} \cdot \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{sen^2\phi}{\sqrt{\cos\phi}} \cdot d\phi$

4.116. Para el reservorio indicado, encontrar el tiempo de vaciado del líquido por el orificio A_0 indicándolo como una expresión general.



Resolución:

Tiempo de vaciado de h_1 a h_2: $Q_{real} = C \cdot A_0 \cdot \sqrt{2g \cdot h}$

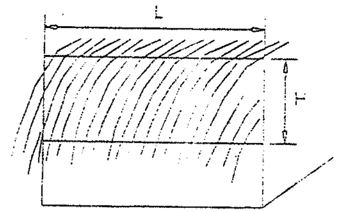
Volumen vaciado: $Q = \frac{dV}{dt} \;\Rightarrow\; dV = Q \cdot dt = -A_S \cdot dh$

$\Rightarrow\; dt = \frac{-A_S \cdot dh}{C \cdot A_0 \cdot \sqrt{2g \cdot h}} \;\Rightarrow\; t = \int_{t_1}^{t_2} dt = -\frac{A_S}{C \cdot A_0 \cdot \sqrt{2g}} \cdot \int_{h_1}^{h_2} \frac{1}{\sqrt{h}} \cdot dh$

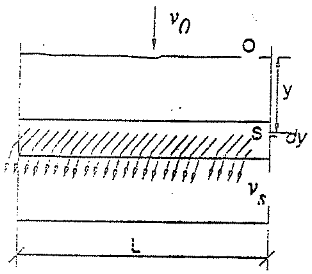
Finalmente:

$$\boxed{t = \frac{2A_S}{C \cdot A_0 \cdot \sqrt{2g}} \cdot \left(\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}\right)}$$

4.117. Hallar el caudal que sale por el vertedero rectangular de la figura. Sin considerar pérdidas de carga.



Resolución:



Bernoulli entre "O" y "S":

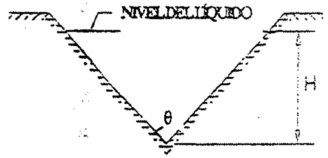
$0 + \frac{v_O^2}{2g} + y = 0 + \frac{v_S^2}{2g} + 0 \;\Rightarrow\; v_S = \sqrt{2g \cdot \left(y + \frac{v_O^2}{2g}\right)}$

$dQ_{ideal} = v_S \cdot dA = \sqrt{2g \cdot \left(y + \frac{v_O^2}{2g}\right)} \cdot L \cdot dy$

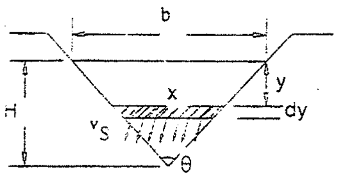
$Q_{ideal} = L \cdot \sqrt{2g} \cdot \int_{h_1=0}^{h_2=H} \left(y + \frac{v_O^2}{2g}\right)^{1/2} \cdot dy$

$$\Rightarrow \quad \boxed{Q_{real} = \frac{2}{3}\cdot C\cdot L\cdot\sqrt{2g}\cdot\left(\left(H+\frac{v_0^2}{2g}\right)^{3/2}-\left(\frac{v_0^2}{2g}\right)^{3/2}\right)} \quad donde;\ v_0 \to 0$$

4.118. Hallar el caudal real que sale del vertedero triangular mostrado, si se sabe que el caudal es pequeño.



Resolución:



$$v_s = \sqrt{2g\cdot h}$$

$$dQ_{ideal} = \sqrt{2g\cdot y}\cdot x\cdot dy$$

Por semejanza de triángulos:

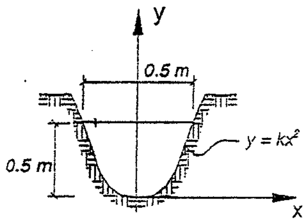
$$x = \frac{b\cdot(H-y)}{H}$$

Además: $b = 2H\cdot\tan\frac{\theta}{2}$

$$\Rightarrow \quad Q_{real} = C\cdot\int_0^H \frac{b}{H}\cdot(H-y)\cdot\sqrt{2g\cdot y}\cdot dy$$

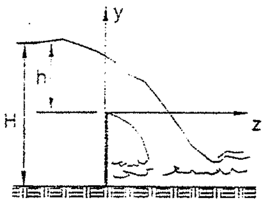
$$\therefore \quad \boxed{Q_{real} = \frac{8}{15}\cdot C\cdot\sqrt{2g}\cdot H^{5/2}\cdot\tan\frac{\theta}{2}}$$

4.119. Calcular le descarga en un vertedero de forma parabólica según se indica; asumir un coeficiente de contracción $C_C = 0.95$

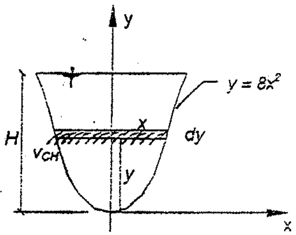


$H = 1.2m \qquad \gamma = 1000\ ^{Kg}/_{m^3}$

$h = 0.5m$



Resolución:



$$v_{CH} = \sqrt{2g\cdot(h-y)}$$

$$dQ = \sqrt{2g\cdot(h-y)}\cdot dA$$

$$dA = 2x\cdot dy = \sqrt{\frac{y}{2}}\cdot dy$$

$$dQ = \sqrt{2g\cdot(h-y)}\cdot\sqrt{\frac{y}{2}}\cdot dy$$

$$Q = \int_0^h \sqrt{g\cdot y\cdot(h-y)}\cdot dy = \sqrt{g}\cdot\int_0^h\sqrt{y\cdot(h-y)}\cdot dy = \sqrt{g}\cdot\int_0^h\sqrt{y\cdot h-y^2}\cdot dy$$

$$Q = \sqrt{g}\cdot\int_0^h\sqrt{-\left(y^2-y\cdot h+\left(\frac{h}{2}\right)^2-\frac{h^2}{4}\right)}\cdot dy = \sqrt{g}\cdot\int_0^h\sqrt{\frac{h^2}{4}-\left(y-\frac{h}{2}\right)^2}\cdot dy$$

Si hago: $u = y-\frac{h}{2} \quad\Rightarrow\quad du = dy$

$$\text{Y:}\quad Q = \sqrt{g}\cdot\int_0^h\sqrt{\frac{h^2}{4}-u^2}\cdot du = \sqrt{g}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(u\cdot\sqrt{\frac{h^2}{4}-u^2}+\frac{h^2}{4}\cdot arc\,sen\frac{u}{h/2}\right)$$

$$Q = \frac{\sqrt{g}}{2}\left[\left(y-\frac{h}{2}\right)\cdot\sqrt{\frac{h^2}{4}-\left(y-\frac{h}{2}\right)^2}+\frac{h^2}{4}\cdot arc\,sen\left(\frac{2}{h}\cdot\left(y-\frac{h}{2}\right)\right)\right]_0^h$$

$$Q = \frac{\sqrt{g}}{2}\left(\frac{h}{2}\sqrt{\frac{h^2}{4}-\frac{h^2}{4}}+\frac{h^2}{4}arc\,sen\left(\frac{2}{h}\left(\frac{h}{2}\right)\right)+\frac{h}{2}\sqrt{\frac{h^2}{4}-\frac{h^2}{4}}-\frac{h^2}{4}arc\,sen\left(\frac{2}{h}\left(-\frac{h}{2}\right)\right)\right)$$

$$Q = \frac{\sqrt{g}\,h^2}{2*4}\left(arc\,sen(1)-arc\,sen(-1)\right) = \frac{\sqrt{g}\,h^2}{8}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow\quad Q_{real} = C_C\,\frac{\pi\cdot\sqrt{g}\,h^2}{8}$$

Reemplazando datos:

$$Q_{real} = \frac{0.95*\pi*\sqrt{9.8}*(0.5)^2}{8}$$

Finalmente:

$$\boxed{Q_{real} = 0.292\ ^{m^3}/_{s}}$$

PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS

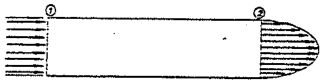
1. Un fluido de densidad constante ρ, entra a una tubería de radio R con velocidad uniforme v. En una sección transversal situado un poco más aguas abajo, la velocidad varía con el radio según la ec.: $$u = 2v\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)$$

La presión en las secciones *1 (de entrada)* y *2 (situado aguas abajo)* son P_1 y P_2, respectivamente.

Demuestre que la fuerza de rozamiento F, que la pared del tubo ejerce sobre el fluido entre las secciones *1* y *2* es: $$F = \pi R^2\left(-(P_1 - P_2) + \frac{1}{3}\rho v^2\right)$$

Con una dirección que se opone al flujo.

Resolución:



Ecuaciones fundamentales:

$$\sum F_x = \int_{s.c.} u\,\rho\,\bar{v}\,dA \quad (\textit{Cantidad de Movimiento})$$

$$0 = \int_{s.c.} \rho\,\bar{v}\,dA \quad (\textit{Ecuación de Continuidad})$$

Aplicando la primera ecuación:

$$F + P_1 A_1 - P_2 A_2 = u_1\left(-|\rho\, v_1 A_1|\right) + \rho\int_0^R \left(2v\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)\right)^2 (2\pi r\,dr)$$

$$F + \pi R^2 (P_1 - P_2) = -\rho v^2 \pi R^2 + 8\rho v^2 \pi \int_0^R \left(r - \frac{r^3}{R^2}\right)^2 r\,dr$$

Evaluando la integral: $$\int_0^R \left(r - \frac{r^3}{R^2}\right)^2 r\,dr = \frac{R^2}{6}$$

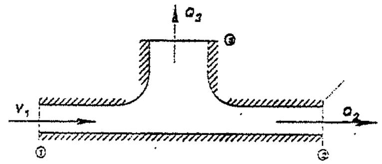
$$F + \pi R^2 (P_1 - P_2) = -\rho v^2 \pi R^2 + \frac{8}{6}\rho v^2 \pi R^2$$

$$\boxed{F = \pi R^2\left(-(P_1 - P_2) + \frac{1}{3}\rho v^2\right)}$$

2. En la figura mostrada esquemáticamente el flujo de un líquido a través de una sección de tubería en forma de *"T"*. Una parte del flujo se desvía por la rama vertical *3*,

mientras que el resto continúa a través de la rama *2*. Obtenga una expresión para el cambio de presión, $\Delta P = P_1 - P_2$, que el líquido experimenta al pasar por la sección en forma de *"T"*. Exprese el resultado en función de las propiedades del fluido a la entrada y del cociente Q_3/Q_1. Dibuje $\frac{\Delta P}{g\,\bar{v}_1^2}$, como una función de Q_3/Q_1.

Resolución:



Ecuaciones fundamentales:

$$\sum F_x = \int_{s.c.} u\,\rho\,\bar{v}\cdot d\bar{A} \quad \text{y}$$

$$0 = \int_{s.c.} \rho\,\bar{v}\cdot dA$$

$$P_1 A - P_2 A = u_1\left(-|\rho\, v_1 A_1|\right) + u_2\left(|\rho\, v_2 A_2|\right) + u_3\left(|\rho\, v_3 A_3|\right)$$

Aplicando la **Ecuación de Continuidad:**

$$0 = -|\rho\, v_1 A_1| + |\rho\, v_2 A_2| + |\rho\, v_3 A_3|$$

$$A_1 = A_2 = A_3 = A$$

$$v_1 A = v_2 A + v_3 A \quad \Rightarrow \quad v_2 = v_1 - v_3$$

$$(P_1 - P_2)A = -\rho v_1^2 A + \rho (v_1 - v_3)^2 A$$

$$(P_1 - P_2)A = -\rho v_1^2 A + \rho\left(v_1^2 + v_3^2 - 2 v_1 v_3\right)A$$

$$(P_1 - P_2)A = \rho v_1^2\left(\frac{v_3^2}{v_1^2} - 2\frac{v_3}{v_1}\right)A$$

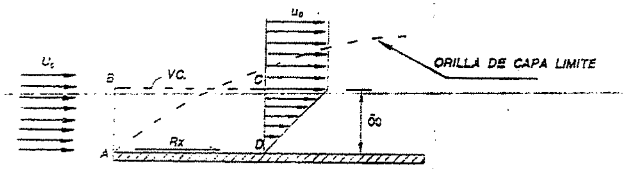
$$P_1 - P_2 = \Delta P = \rho v_1^2\left(\left(\frac{Q_3}{Q_1}\right)^2 - 2\left(\frac{Q_3}{Q_1}\right)\right)$$

$$\boxed{\frac{\Delta P}{\frac{1}{2}\rho v_1^2} = 2\left(1 - \left(1 - \frac{Q_3}{Q_1}\right)^2\right)}$$

3. Considérese el flujo incompresible en la capa límite descrita en el ejemplo *4.3 (FOX)*. Demuestre que la fuerza de arrastre que ejerce el fluido sobre la superficie está dado por: $$D = \int_0^\delta \rho\,u\,(U - u)\,w\,dy$$

Calcule la fuerza de arrastre para las condiciones del mismo ejemplo.

Resolución:



Ecuaciones fundamentales considerando flujo estacionario:

$$\sum F_x = \int_{s.c} u\,\rho\,\bar{v}\cdot d\bar{A} \quad \wedge \quad 0 = \int_{s.c.} \rho\,\bar{v}\cdot dA$$

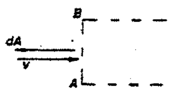
Utilizando la primera ecuación de cantidad de movimiento. **La única fuerza** que existe es el de rozamiento entre el fluido y la placa (**fuerza de arrastre**).

$$D = -R = \int_{A_{AB}} u\,\rho\,\bar{v}\cdot d\bar{A} + \int_{A_{BC}} u\,\rho\,\bar{v}\cdot d\bar{A} + \int_{A_{CD}} u\,\rho\,\bar{v}\cdot d\bar{A} + \cancel{\int_{A_{DA}} u\,\rho\,\bar{v}\cdot d\bar{A}} \quad \text{..........}(\alpha)$$

$(no\ existe\ flujo)$

Calculando cada una de las integrales:

$$\int_{A_{AB}} u\,\rho\,\bar{v}\cdot d\bar{A} = -\int_{A_{AB}} u\,|\rho\,v\,dA| = -\int_0^{\delta} \rho\,u\,U_0\,w\,dy$$

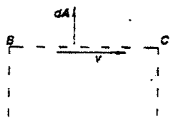


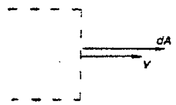
$$\int_{A_{BC}} u\,\rho\,\bar{v}\cdot d\bar{A} = 0$$

$$\int_{A_{DA}} u\,\rho\,\bar{v}\cdot d\bar{A} = \int_{A_{DA}} u\,|\rho\,v\,dA| = \int_0^{\delta} \rho\,u^2\,w\,dy$$

Reemplazando en (α):

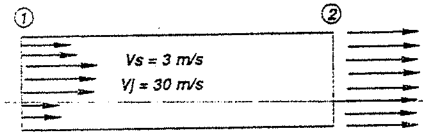
$$\boxed{D = \int_0^{\delta} \rho\,u\,(U_0 - u)\,w\,dy}$$





4. La bomba de chorro mostrada esquemáticamente en **la figura dispone de un** chorro con el área transversal de $0.01\ m^2$ y velocidad de $30\ m/s$. **El chorro está confinado** en una corriente secundaria de agua con velocidad de $3\ m/s$. **El área total** del ducto (es decir, la suma de las áreas de chorro y de la corriente secundaria) es $0.075\ m^2$. El agua del chorro se mezcla completamente con el agua **de la corriente secundaria** de tal modo que en la sección transversal 2 se obtiene una corriente **uniforme**. Las presiones del chorro y de la corriente secundaria son iguales a la entrada de la bomba. Determine la velocidad a la salida de la bomba y el incremento de presiones; $(P_2 - P_1)$.

Resolución:



Ecuaciones Fundamentales:

$$\sum F_x = \int_{s.c.} u\,\rho\,\bar{v}\cdot d\bar{A}$$

$$0 = \int_{s.c.} \rho\,\bar{v}\cdot dA$$

$A_1 = 0.075\,m^2 \qquad A_2 = 0.075\,m^2$

$A_j = 0.01\,m^2 \qquad A_j = 0.01\,m^2$

Ecuación de Cantidad de Movimiento:

$$P_1 A_1 - P_2 A_2 = u_j\left(-|\rho\,v_j\,A_j|\right) + u_s\left(-|\rho\,v_s\,A_s|\right) + u_2\left(|\rho\,v_2\,A_2|\right)$$

Ecuación de Continuidad:

$$0 = \left(-|\rho\,v_j\,A_j|\right) + \left(-|\rho\,v_s\,A_s|\right) + \left(\rho\,v_2\,A_2\right)$$

$$0 = -\rho\,v_j\,A_j - \rho\,v_s\,A_s + \rho\,v_2\,A_2$$

$$v_2 = \frac{1}{A_2}\left(v_j\,A_j + v_s\,A_s\right) = \frac{1}{0.075\,m^2}\left(30\,{}^{m}\!/\!_{s} * 0.01\,m^2 + 3\,{}^{m}\!/\!_{s} * 0.065\,m^2\right)$$

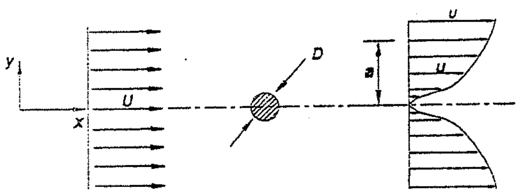
$$\boxed{v_2 = 6.6\,{}^{m}\!/\!_{s}}$$

$$(P_1 - P_2)A_1 = -30\,{}^{m}\!/\!_{s} * 1000\,{}^{Kg}\!/\!_{m^3} * 30\,{}^{m}\!/\!_{s} * 0.01\,m^2 - 3\,{}^{m}\!/\!_{s} * 1000\,{}^{Kg}\!/\!_{m^3} * 3\,{}^{m}\!/\!_{s} * 0.065\,m^2 +$$
$$+ 6.6\,{}^{m}\!/\!_{s} * 1000\,{}^{Kg}\!/\!_{m^3} * 6.6\,{}^{m}\!/\!_{s} * 0.075\,m^2$$

$$\boxed{P_1 - P_2 = 84.27\ KPa}$$

5. Para determinar la fuerza de arrastre sobre un cilindro circular se efectúan mediciones experimentales en un túnel de viento de baja velocidad. En la figura se muestran los perfiles de velocidad en dos secciones transversales donde la presión es uniforme e igual. Calcule la fuerza de arrastre sobre el cilindro, por unidad de ancho.

Resolución:



$U = 50\,{}^{m}\!/\!_{s}\ , \quad \rho = 1.2\,{}^{Kg}\!/\!_{m^3}$

$D = 30\,mm\ , \quad a = 2.2\,D$

$$\begin{cases} u = U\,sen\left(\dfrac{\pi\,y}{2a}\right); \\ \quad 0 \le y \le a \\ u = U\ ;\ \ y > a \end{cases}$$

$$D=2\int_0^a \rho u(U-u)w\,dy=2\int_0^a \rho U\,sen\left(\frac{\pi y}{2a}\right)\left(U-U\,sen\left(\frac{\pi y}{2a}\right)\right)w\,dy$$

$$D=2\int_0^a \rho U^2\left(sen\left(\frac{\pi y}{2a}\right)-sen^2\left(\frac{\pi y}{2a}\right)\right)w\,dy$$

$$D=2\rho U^2 w\left(\int_0^a sen\left(\frac{\pi y}{2a}\right)dy-\int_0^a sen^2\left(\frac{\pi y}{2a}\right)dy\right)$$

$$D=2\rho U^2 w\left(-\frac{2a}{\pi}\cos\left(\frac{\pi y}{2a}\right)\Big|_0^a-\left(\frac{1}{2}y-\frac{2a}{4\pi}sen\frac{\pi}{a}y\right)\Big|_0^a\right)$$

$$D=2\rho U^2 w\left(\left(0+\frac{2a}{\pi}\right)-\left(\left(\frac{a}{2}-0\right)-0\right)\right)$$

$$D=2\rho U^2 w\left(\frac{2a}{\pi}-a\right)=2\rho U^2 wa\left(\frac{2}{\pi}-1\right)$$

$$D=-0.727\,\rho U^2 wa$$

$$D=-0.727*1.2\,{}^{Kg}/_{m^3}*(50\,{}^{m}/_{s})^2*(2.2*30*10^{-3}\,m)\frac{N-s^2}{Kg-m}$$

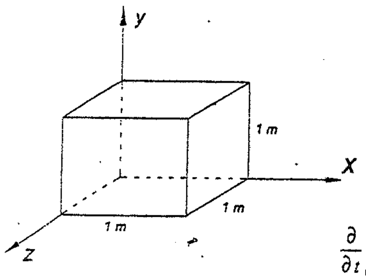
$$\boxed{D=144\,{}^{N}/_{m}}$$

6. Considérese el flujo de un fluido incompresible con campos de velocidades vectorial.

$$\overline{V}=(ax+bt)\hat{\imath}-cy\,\hat{\jmath}$$

Donde: $a = 1\ s^{-1}$; $b = 2\ m/s^2$ y $c = 1\ s^{-1}$. Para el volumen de control mostrado (se trata de un cubo de $1\ m$ de lado), calcule la rapidez con que cambia la cantidad de movimiento dentro del volumen de control.

Resolución:



$$\overline{V}=(ax+bt)\hat{\imath}-cy\,\hat{\jmath}$$

Rapidez con que cambia la Cantidad de Movimiento. $=\dfrac{\partial}{\partial t}\int \overline{V}\rho\, d\forall$

Flujo incompresible: $\rho = Cte$

$d\forall = 1*1*dx$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{v.c.}\overline{V}\rho\,d\forall=\frac{\partial}{\partial t}\int_0^1 \rho\left((ax+bt)\hat{\imath}-cy\,\hat{\jmath}\right)dx$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{v.c.}\overline{V}\rho\,d\forall=\frac{\partial}{\partial t}\rho\left(\left(\frac{ax^2}{2}+btx\right)\hat{\imath}-cyx\,\hat{\jmath}\right)\Big|_0^1$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{v.c.}\overline{V}\rho\,d\forall=\frac{\partial}{\partial t}\rho\left(\left(\frac{a}{2}+bt\right)\hat{\imath}-c\,\hat{\jmath}\right)$$

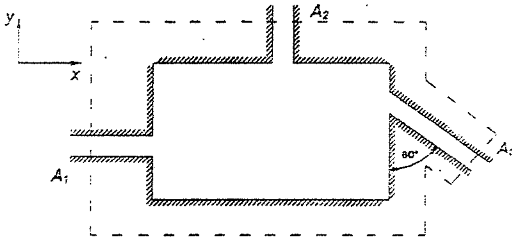
$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\int_{v.c.}\overline{V}\rho\,d\forall=b\hat{\imath}}$$

7. Un fluido de densidad $1050\ Kg/m^3$ fluye en estado estacionario a través de la caja rectangular mostrada en la figura. Si:

$A_1 = 0.05\,m^2$ $\quad A_2 = 0.01\,m^2$ $\quad A_3 = 0.06\,m^2$

$\overline{V}_1 = 4\hat{\imath}\ {}^{m}/_{s}$ $\quad \overline{V}_2 = -8\hat{\jmath}\ {}^{m}/_{s}$

Determine la velocidad $\overline{V}_3$



Resolución:

Seleccionando un volumen de control (ver línea segmentada)

Ecuación Fundamental:

$$0=\underbrace{\cancel{\frac{\partial}{\partial t}\int_{v.c.}\rho\,d\forall}}_{\text{FLUJO ESTACIONARIO}}+\int_{s.c.}\rho\overline{V}\cdot d\overline{A}$$

Por lo tanto: $0=\int_{s.c.}\rho\overline{V}\cdot d\overline{A}$

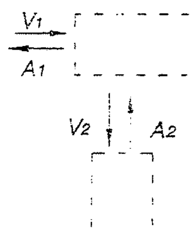
Existen tres secciones a través de las cuales un flujo cruza la superficie de control:

$$\int_{s.c.}\rho\overline{V}\cdot d\overline{A}=\int_{A_1}\rho\overline{V}\cdot dA+\int_{A_2}\rho\overline{V}\cdot dA+\int_{A_3}\rho\overline{V}\cdot dA=0 \quad\text{..............................(1)}$$

Evaluando las integrales una a una:

$$\int_{A_1}\rho\overline{V}\cdot dA=-\int_{A_1}|\rho V\,dA|=-|\rho V_1 A_1|$$

$$\int_{A_2}\rho\overline{V}\cdot dA=-\int_{A_2}|\rho V\,dA|=-|\rho V_2 A_2|$$



De la Ec. *(1)*:

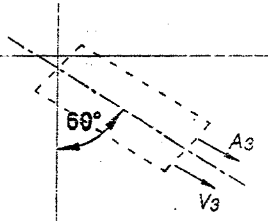
$$\int_{A_3}\rho\overline{V}\cdot dA=-\int_{A_1}\rho\overline{V}\cdot dA-\int_{A_2}\rho\overline{V}\cdot dA$$

$$\int_{A_3}\rho\overline{V}\cdot dA=+|\rho V_1 A_1|+|\rho V_2 A_2|$$

$$\int_{A_3} \rho \overline{V} \cdot dA = 1050 \,{}^{Kg}\!/_{m^3} * 4\,{}^{m}\!/_{s} * 0.05\,m^2 + 1050\,{}^{Kg}\!/_{m^3} * 8\,{}^{m}\!/_{s} * 0.01\,m^2$$

$$\rho V_3 A_3 = 210 - 84 = 294$$

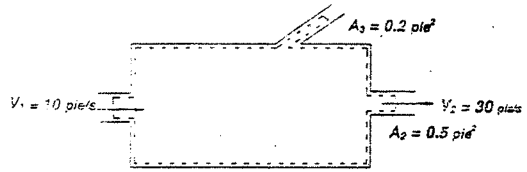
Como el último resultado es positivo, el flujo es hacia fuera.



$$V_3 = 4.67\,{}^{m}\!/_{s}$$
$$\overline{V}_3 = 4.04\,\hat{i} - 2.34\,\hat{j}$$

8. Considérese el flujo incompresible y estacionario a través del dispositivo mostrado en la figura. Determine el gasto volumétrico a través del área A_3.

Resolución:



Nos piden determinar: el gasto volumétrico a través del área A_3.

Escogemos el $V.C.$ (línea punteada)

Ecuación Fundamental: $$0 = \underbrace{\cancel{\frac{\partial}{\partial t}\int_{V.C.} \rho\, d\forall}}_{\text{FLUJO ESTACIONARIO}} + \int_{S.C.} \rho \overline{V} \cdot d\overline{A}$$

$$\Rightarrow \quad \int_{S.C.} \rho \overline{V} \cdot dA = 0 = \int_{A_1} \rho \overline{V}\, dA + \int_{A_2} \rho \overline{V}\, dA + \int_{A_3} \rho \overline{V}\, dA \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\rho = Constante$$

Evaluando cada integral:

$$\int_{A_1} \rho \overline{V} \cdot dA = \int_{A_1} |\rho V\, dA| = -|\rho V_1 A_1|$$

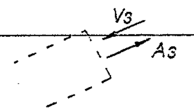
$$\int_{A_2} \rho \overline{V} \cdot dA = \int_{A_2} |\rho V\, dA| = |\rho V_2 A_2|$$

De la Ec. *(1)*: $\int_{A_3} \rho \overline{V} \cdot dA = -\int_{A_1} \rho \overline{V} \cdot dA - \int_{A_2} \rho \overline{V} \cdot dA$

$$\rho = Cte. \; ; \quad \int_{A_3} \overline{V} \cdot d\overline{A} = |V_1 A_1| - |V_2 A_2| = 10\,{}^{pie}\!/_{s} * 1\,pie^2 - 30\,{}^{pie}\!/_{s} * 0.5\,pie^2$$

$$\int_{A_3} \overline{V} \cdot d\overline{A} = -5\,{}^{pie^3}\!/_{s}$$

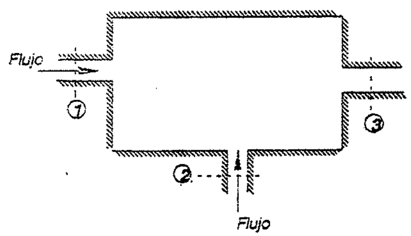
Como el último resultado es negativo, entonces el flujo es hacia adentro.



$$\boxed{q_3 = V_3 A_3 = -5\,{}^{pie^3}\!/_{s}}$$

9. Las velocidades del flujo incompresible que pasa a través del dispositivo mostrado en la figura se pueden considerar uniformes en las secciones de entrada y salida. Si el flujo es agua, obtenga una expresión para el gasto másico en la sección *3*. Se conocen las siguientes condiciones: $A_1 = 0.1\,m^2$ $\quad A_2 = 0.2\,m^2$ $\quad A_3 = 0.15\,m^2$ $\quad V_1 = 5\,{}^{m}\!/_{s}$ $\quad V_2 = 10 + 5\cos(4t)\,{}^{m}\!/_{s}$

Resolución:



El flujo es no estacionario.

Ecuación Fundamental:

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}\int_{V.C.} \rho\, d\forall + \int_{S.C.} \rho \overline{V} \cdot d\overline{A}$$

Siendo ρ y $\forall$ constantes pueden salir de la integral.

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}(\rho V_1 A_1 + \rho V_2 A_2 - \rho V_3 A_3) - |\rho V_1 A_1| - |\rho V_2 A_2| + |\rho V_3 A_3|$$

$$0 = \rho A_1 \frac{\partial}{\partial t} V_1 + \rho A_2 \frac{\partial}{\partial t} V_2 - \rho A_3 \frac{\partial}{\partial t} V_3 - \rho V_1 A_1 - \rho V_2 A_2 + \rho V_3 A_3$$

$$0 = \rho A_2 \frac{\partial}{\partial t}(10 + 5\cos(4\pi t)) - \rho V_1 A_1 - \rho V_2 A_2 + \rho V_3 A_3$$

$$m_3 = \rho V_3 A_3 = \rho V_1 A_1 + \rho V_2 A_2 - \rho A_2 \frac{\partial}{\partial t}(10 + 5\cos(4\pi t))$$

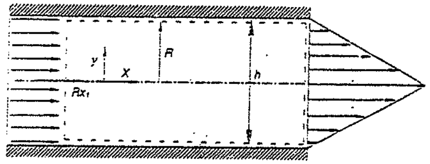
$$m_3 = \rho V_3 A_3 = 999\,{}^{Kg}\!/_{m^3} * 5\,{}^{m}\!/_{s} * 0.1\,m^2 + 999 * 0.2 * (10 + 5\cos 4\pi t) + \frac{999 * 0.2 * 5}{4\pi} sen\, 4\pi t$$

$$\boxed{Gasto\ Másico = \rho V_3 A_3 = 499.5 + 199.8(10 + 5\cos 4\pi t) + 79.5\, sen\, 4\pi t}$$

10. Considérese un flujo estacionario de agua entre dos placas paralelas separadas de una distancia h en pies (ver figura). En la sección *1* la velocidad es uniforme a todo lo

ancho: la distribución de velocidades en la sección *2* se supone lineal. El flujo es idéntico en todos los planos paralelos al plano del papel. Calcule el cociente del flujo de cantidad de movimiento en dirección x en la sección *2* entre el correspondiente flujo en la sección *1* para las distribuciones de velocidad supuestas.

Resolución:



① ②

Datos conocidos:

* *Flujo Estacionario*

Sección 1: Flujo uniforme

Sección 2: Flujo distribución lineal

Nos piden: $R = \dfrac{F.Cant.Mov._2}{F.Cant.Mov._1}$

Ecuaciones Fundamentales:

$$\overline{F} = F_S + F_B = \frac{\partial}{\partial t}\int_{V.C.} \overline{V}\rho\, d\forall + \int \overline{V}\rho\overline{V}\cdot d\overline{A}$$

Y: $$\frac{\partial}{\partial t}\int_{V.C.}\rho\, d\forall + \int \rho\overline{V}\cdot d\overline{A} = 0$$

Dado que el flujo es estacionario las ecuaciones anteriores quedan así:

$$\overline{F}_S + \overline{F}_B = \int_{S.C.} \overline{V}\rho\overline{V} d\overline{A} \quad y \quad \int \rho\overline{V}\cdot d\forall = 0$$

Como estamos interesados en la fuerza horizontal:

$$F_{S_x} + F_{B_x} = \int_{S.C.} u\rho\overline{V}\cdot d\overline{A}$$

Considerando que las fuerzas volumétricas son despreciables:

$$F_{S_x} = \int_{S.C.} u\rho\overline{V}\cdot d\overline{A} = R_x$$

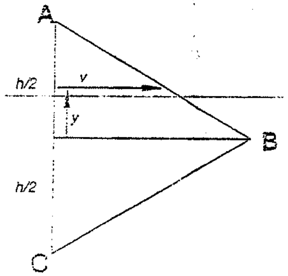
Sección (1)

$$R_{x_1} = \int_{A_1} u\rho\overline{V} d\overline{A} = -\int_{A_1} u|\rho V_1 dA| = -u_1|\rho V_1 A_1|$$

$$u_1 = u \qquad V_1 = u \qquad A_1 = 1 * h$$

$$R_{x_1} = -\rho u^2 h$$

Sección (2)



$$\frac{V}{U_{max}} = \frac{\frac{h}{2} - y}{\frac{h}{2}}$$

$$V = \left(1 - \frac{2y}{h}\right)U_{max}$$

$$R_{x_2} = \int_{A_2} u\rho\overline{V}\cdot d\overline{A} = -\rho\int uV_2\, dA$$

$$u = V_2 = \left(1 - \frac{2y}{h}\right)U_{max}$$

$$R_{x_2} = -\rho\int\left(1 - \frac{2y}{h}\right)^2 U_{max}^2\, dy = -\rho\int\left(1 + 4\frac{y^2}{h^2} - 4\frac{y}{h}\right)dy$$

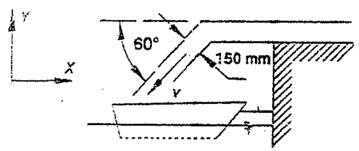
$$R_{x_2} = -2\rho U_{max}^2\left(y + \frac{4}{3}\frac{y^3}{h^2} - \frac{4y^2}{2h}\right)\Bigg|_0^{\frac{h}{2}} = -2\rho U_{max}^2\left(\frac{h}{6}\right)$$

$$R_{x_2} = -\frac{1}{3}\rho U_{max}^2 h$$

$$\boxed{R = \frac{-\frac{1}{3}\rho U_{max}^2 h}{\rho u^2 h}}$$

11. Una barcaza se carga de aceite mediante una tubería de *150 mm* de diámetro. El aceite, ρ = *900 Kg/m³*, sale de la tubería con velocidad uniforme de *5 m/s*. Determine la fuerza que actúa sobre la cuerda de la barcaza.

Resolución:



$V = 5\,m/s$

Ecuaciones Fundamentales:

$$\overline{F} = \overline{F}_S + \overline{F}_B = \frac{\partial}{\partial t}\int_{V.C.}\overline{V}\rho\, d\forall + \int_{S.C.}\overline{V}\rho\overline{V}\cdot d\overline{A}$$

Y; $$0 = \frac{\partial}{\partial t}\int_{V.C.}\rho\, d\forall + \int_{S.C.}\rho\overline{V}\cdot d\overline{A}$$

Dado que la velocidad es uniforme, el flujo es estacionario y las ecuaciones fundamentales se reducen a:

$$\overline{F} = \overline{F}_S + \overline{F}_B = \int_{S.C.}\overline{V}\rho\overline{V}\cdot d\overline{A} \quad y \quad 0 = \int_{S.C.}\rho\overline{V}\cdot d\overline{A}$$

El volumen de control se interseca con el tirante (la fuerza horizontal del *V.C.* sobre el tirante es igual y opuesta a R_x)

Como estamos interesados en la fuerza horizontal, escribimos la componente x de la Ecuación de Cantidad de Movimiento para un flujo permanente.

$$F_{Sx} - \cancel{F_{Bx}} = \int_{S.C.} u\,\rho\,\overline{V}\cdot d\overline{A} \quad \Rightarrow \quad F_{Sx} = \int_{S.C.} u\,\rho\,\overline{V}\cdot d\overline{A}$$

$$F_{Sx} = R_x$$

$$R_x = \int_{S.C.} u\,\rho\,\overline{V}\cdot d\overline{A} = \int_{A_1} u\left|\rho V_1\, dA\right| = u_1\left|\rho V_1 A\right|$$

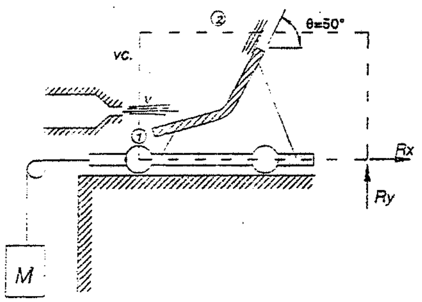
$$u_1 = V\cos\alpha \quad ; \quad V_1 = V\cos\alpha$$

$$R_x = 5\,{}^{m}\!/\!_{s}\left(900\,{}^{Kg}\!/\!_{m^3} * 5\,{}^{m}\!/\!_{s} * \frac{\pi\,(0.15)^2}{4}\,m^2\right)\cos^2 60^\circ\,\tfrac{N-s^2}{Kg-m}$$

$$\boxed{R_x = 199\,N}$$

12. Un chorro de agua que sale de una tobera estacionaria con velocidad *15 m/s* (*área del chorro = 0.05 m²*) incide contra un álabe curvo montado en un carrito, como se muestra en la figura. El álabe modifica la dirección del chorro en un ángulo $\theta = 50°$. Determinar el valor de M necesario para mantener el carrito en reposo.

Resolución:



V.C. = Volumen de Control (línea segmentada)

R_x, R_y componentes de la fuerza necesaria para mantener en reposo el volumen de control.

Suposiciones:

(1) El flujo es estacionario.

(2) La magnitud de la velocidad a lo largo del álabe es Cte.

(3) Las propiedades del fluido son uniformes en las secciones *1* y *2*.

(4) $Fa_x = Fb_y = 0$ (fuerzas volumétricas despreciables)

(5) Flujo incompresible.

$$R_x = \int_{A_1} u\,(\rho V\,dA) + \int_{A_2} u\,(\rho V\,dA) = -u_1\left|\rho V_1 A_1\right| + u_2\left|\rho V_2 A_2\right|$$

De la ecuación de Continuidad: $R_x = (u_2 - u_1)\left|\rho V_1 A_1\right|$

Las velocidades respecto al Volumen de Control son:

$$u_1 = V \qquad u_2 = V\cos\theta$$
$$V_1 = V \qquad V_2 = V$$

Sustituyendo:

$$R_x = V(\cos\theta - 1)(\rho V A) = \rho V^2(\cos\theta - 1)A = -M$$

$$\boxed{M = \rho V^2(1 - \cos\theta)A}$$

13. Un cilindro de *4cm* de diámetro rota a *3600 R.P.M.* en una corriente de aire de *30 m/s* y que fluye perpendicular a la generatriz del cilindro. Calcular la sustentación por unidad de longitud si $\gamma_{aire} = 1.225\ Kg/m^3$ y el peso del cilindro es *1 Kg/m* (por unidad de longitud).

Resolución:

$$cilindro\begin{cases} d = 4\,cm = 0.04\,m \ \text{ó}\ r = 0.02\,m \\ f = 3600\,R.P.M. \ \Rightarrow \ \omega = 120\pi\,{}^{rad}\!/\!_{s} \\ Peso = 1\,{}^{Kg}\!/\!_{m} \end{cases}$$

$$aire\begin{cases} \gamma = 1.225\,{}^{Kg}\!/\!_{m^3} \\ U = 30\,{}^{m}\!/\!_{s} \end{cases}$$

La fuerza de sustentación por unidad de longitud es:

$$F_L = \rho U \Gamma = \left(\frac{\gamma}{g}\right)U\left(2\omega\pi r^2\right)$$

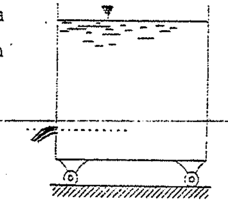
$$F_L = \left(\frac{\gamma}{g}\right)U\left(2*120\pi^2 r^2\right)$$

$$F_L = \frac{1.225}{9.8}(30)\left(2*120\pi^2(0.02)^2\right)$$

$$\boxed{F_L = 3.553\,{}^{Kg}\!/\!_{m}}$$

Como: $F_L > 1\ Kg/m$ (peso del cilindro por unidad de longitud) el cilindro se eleva.

14. Supongamos que en el depósito de la figura sean u la velocidad del depósito y v la salida del agua. Hallar la energía que cede al depósito cada kilogramo de agua salida.



Resolución:

La acción sobre la pared opuesta a la salida del chorro es:

$$F = \frac{\gamma}{g} Q (v - u)$$

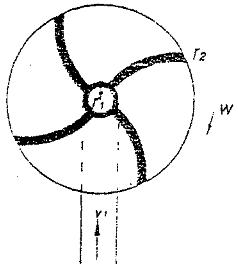
Y su trabajo por segundo es:

$$F\, u = \frac{\gamma}{g} Q\, u\, (v - u)$$

En cada segundo salen $\gamma . Q$ kilogramos de líquido y la energía cedida por cada kilogramo es:

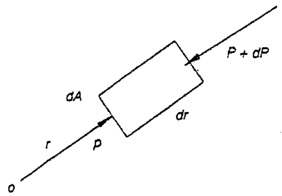
$$\boxed{F\,\frac{u}{Q} = W = \frac{u\,(v-u)}{g}}$$

15. Por el perímetro interior r_1 de una rueda horizontal entra agua a presión P y sale por el perímetro exterior r_2. Hallar el incremento de energía que absorberá un kilogramo de agua que circule por la rueda. Ver figura.



Resolución:

$$dm = \frac{\gamma}{g}\, dA \cdot dr$$



La fuerza centrífuga es:

$$F = dm \cdot r \cdot \omega^2$$

La ecuación de las fuerzas es:

$$P\, dA - (P + dP) dA + r\,\omega^2\, dm = 0$$

De donde:

$$dP = \frac{\gamma}{g}\, r\, \omega^2\, dr$$

Entonces:

$$P_2 - P_1 = \frac{\gamma}{2g}\,\omega^2 \left(r_2^2 - r_1^2\right) \quad \ldots\ldots\ldots(I)$$

Bernoulli entre I y 2:

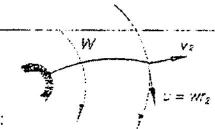
$$\Delta E = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{v_2^2 + u^2}{2g} - \frac{P_1}{\gamma} - \frac{v_1^2}{2g}$$

Ya que hay que añadirle la velocidad tangencial $u = \omega \cdot r_2$ de la rueda.

Por continuidad: $2\pi\, r_1\, v_1 = 2\pi\, r_2\, v_2$, siempre que el agua llene por completo la rueda.

Entonces:

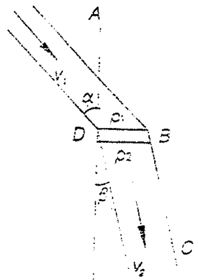
$$v_2 = \frac{r_1}{r_2}\, v_1$$



Con esta ecuación y la (I) se obtiene el incremento de energía:

$$\boxed{\Delta E = \frac{\omega^2}{2g}\left(2\, r_2^2 - r_1^2\right) - \frac{v_1^2}{2g}\left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2}\right)}$$

16. Por un canal AB fluye el líquido con una velocidad v_1 y entra en B con la velocidad v_2 al canal BC, adosado al primero, y quedando entre ambos solamente una junta muy estrecha. Calcular la presión P_1 - P_2 que se producirá por el cambio brusco de velocidad en BD.



Resolución:

Sean A_1 y A_2 las secciones de los canales; por la ley de continuidad:

$$A_1\, v_1 = A_2\, v_2$$

Además:

$$\frac{A_1}{\cos\alpha} = \frac{A_2}{\cos\beta} \quad \Rightarrow \quad v_1 \cos\alpha = v_2 \cos\beta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Utilizando la ecuación de Bernoulli: $E = \dfrac{P}{\gamma} + \dfrac{v^2}{2g} + z$

Y observando que la diferencia de altura antes y después de la junta puede despreciarse, tenemos:

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + \textit{Pérdidas de carga} \quad \ldots\ldots\ldots(2)$$

La pérdida de energía se produce por el choque de la masa de líquido con velocidad v_1 sobre la masa de líquido con velocidad menor v_2, y vale:

$$\frac{\Delta \bar{v}}{2g} = \frac{1}{2g}\left(\bar{v}_1 - \bar{v}_2\right)^2 = \frac{1}{2g}\left(v_1^2 + v_2^2 - 2\, v_1 v_2 \cos(\alpha - \beta)\right)$$

$$\frac{P_1 - P_2}{\gamma} = \frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g} + \frac{1}{2g}\left(v_1^2 + v_2^2 - 2\, v_1 v_2 \cos(\alpha - \beta)\right)$$

En (2):

$$P_1 - P_2 = \frac{\gamma}{g} v_2 \left(v_2 - v_1 \cos(\alpha - \beta)\right)$$

Y utilizando la relación (1):

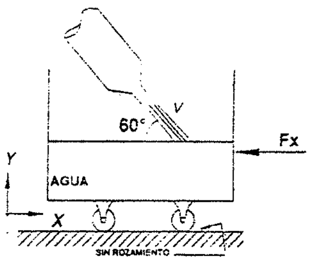
$$\boxed{P_1 - P_2 = \frac{\gamma}{g} v_2 \left(1 - \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\cos(\alpha - \beta)\right)}$$

17. Un chorro de agua inclinado *60°* con respecto a la horizontal de *60 mm* de diámetro y velocidad de *45 m/s* golpea al carro mostrado en la figura. Se pide calcular:

a) La fuerza horizontal necesaria para inmovilizar el carro.

b) Si el carro se desplaza horizontalmente en sentido del chorro, calcular el rendimiento y el empuje horizontal ejercido por el chorro si la velocidad neta es de *10 m/s*. (Velocidad neta es la velocidad con que se mueve el carro).

Resolución:



a) Por la ecuación de Cantidad de Movimiento se tiene en la figura:

$$F_x = \rho\, Q\, v \cos 60°$$

$$\Rightarrow \quad F_x = \frac{\gamma}{g} Q\, v \cos 60°$$

$$F_x = \frac{1000\ Kgf/m^3}{9.8\ m/s^2}\left(45\ m/s \cdot \frac{\pi (0.060)^2}{4}\right)\frac{45}{2}\ m/s$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{F_x = 292.12\ Kgf}$$

b) La potencia entregada por unidad de tiempo está dada por la energía cinética del chorro:

$$Pot.entregada = \gamma\, Q \frac{v^2}{2g} = 1000\left(45 \frac{\pi (0.060)^2}{4}\right)\frac{45^2}{19.6} = 1000(0.12723)(103.32)$$

$$Pot.entregada = 13145.4\ Kgf\text{-}m/s$$

La potencia útil es la que se emplea en el movimiento del carro:

$$Pot.útil = \frac{\gamma}{g} Q \left(v \cos 60° - v_{carro}\right) = \frac{1000}{9.8}(0.12723)\left(\frac{45}{2} - 10\right)10$$

$$Pot.útil = 1622.9\ Kg\text{-}m/s$$

$$\eta = \frac{1622.9}{13145.4} \times 100\% \quad \Rightarrow \quad \boxed{\eta = 12.3\%}$$

Rendimiento:

Y el empuje horizontal es:

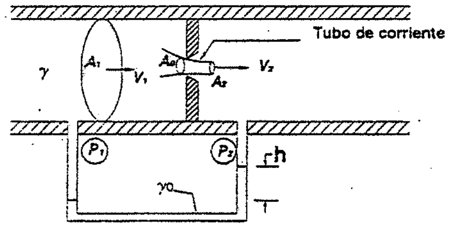
$$E_H = \frac{\gamma}{g} Q \left(v \cos 60° - v_{carro}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{E_H = 162.3\ Kgf}$$

18. En la figura se presenta un medidor de alta sensibilidad, el cual sirve para la medición de velocidades pequeñas. Hallar el caudal que pasa por dicha tubería, en función de los parámetros conocidos:

a) A_0, A_1, y presiones manométricas P_1 y P_2.

b) A_0, A_1, y desnivel h del mercurio de peso específico γ_0.



Resolución:

a) Aplicando el teorema de Bernoulli entre las secciones *1* y *2*:

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\gamma} = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\gamma}$$

$$\frac{v_2^2}{2g} = \frac{v_1^2}{2g} - \frac{P_2 - P_1}{\gamma}$$

Por continuidad: $v_1 A_1 = v_2 A_2 = v_2 (C_C A_0)$, *ya que* $A_2 = C_C A_0$

Entonces: $$\frac{v_2^2}{2g} = \frac{v_2^2}{2g}\left(C_C \frac{A_0}{A_1}\right)^2 - \frac{P_2 - P_1}{\gamma}$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2g\left(\frac{P_1 - P_2}{\gamma}\right)}{1 - C_C^2\left(\frac{A_0}{A_1}\right)^2}} \quad , \quad v_{2\ real} = C_v\, v_2$$

El caudal real será: $$Q = v_{2\ real} A_2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q = \frac{C_v\, C_C\, A_0}{\sqrt{1 - C_C^2\left(\frac{A_0}{A_1}\right)^2}}\sqrt{2g\left(\frac{P_1 - P_2}{\gamma}\right)}}$$

b) En el piezómetro se cumple:

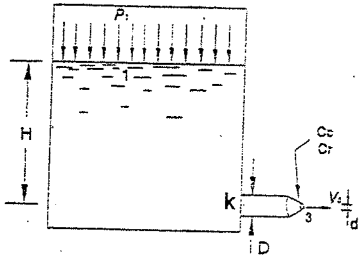
$$P_1 + \gamma h - \gamma_0 h = P_2$$

$$\frac{P_1 - P_2}{\gamma} = \left(\frac{\gamma_0}{\gamma} - 1\right) h$$

Entonces:

$$\boxed{Q = \frac{C_v\, C_C\, A_0}{\sqrt{1 - C_C^2\left(\dfrac{A_0}{A_1}\right)^2}}\sqrt{2g\left(\frac{\gamma_0}{\gamma} - 1\right)h}}$$

19. El líquido del depósito sale por una boquilla de diámetro d. Determinar la velocidad de salida, y el valor de d para el cual la potencia del chorro sea máxima.



Resolución:

Bernoulli entre 1 y 3:

$$\frac{P_1}{\gamma} + H - K\frac{v_2^2}{2g} - \left(\frac{1}{C_v^2} - 1\right)\frac{v_3^2}{2g} = \frac{v_3^2}{2g} \qquad \text{.......... } (I)$$

Por continuidad:

$$v_2 A_2 = v_3 A_3 \quad \Rightarrow \quad v_2 = \frac{d^2}{D^2} v_3 \qquad \text{.......... } (II)$$

Ecuación *(II)* en *(I)*: $\dfrac{P_1}{\gamma} + H = \dfrac{v_3^2}{2g}\left(1 + K\dfrac{d^4}{D^4} + \dfrac{1}{C_v^2} - 1\right)$

Y se obtiene:

$$\boxed{v_3 = \left(2g\,\frac{\dfrac{P_1}{\gamma} + H}{K\dfrac{d^4}{D^4} + \dfrac{1}{C_v^2}}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

La potencia real del chorro es:

$$P = \gamma Q\frac{v_3^2}{2g} = \frac{1}{2}\rho\left(v_3\frac{\pi d^2}{4}C_C\right)v_3^2 = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\pi}{4}d^2\right)C_C v_3^3$$

$$\Rightarrow \quad P = \frac{1}{8}\rho\pi d^2 C_C\left(2g\,\frac{\dfrac{P_1}{\gamma} + H}{K\dfrac{d^4}{D^4} + \dfrac{1}{C_v^2}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

Para encontrar el valor de d para que la potencia del chorro sea máxima se hace:

$$\frac{dP}{dd} = 0 \qquad \text{.......... } (III)$$

$$P = \frac{1}{8}\rho\pi C_C\left(2g\left(\frac{P_1}{\gamma} + H\right)\right)^{\frac{3}{2}} d^2\left(K\frac{d^4}{D^4} + \frac{1}{C_v^2}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\frac{dP}{dd} = \frac{1}{8}\rho\pi C_C\left(2g\left(\frac{P_1}{\gamma} + H\right)\right)^{\frac{3}{2}}\left(d^2\left(-\frac{3}{2}\right)\left(K\frac{d^4}{D^4} + \frac{1}{C_v^2}\right)^{-\frac{5}{2}}\left(4K\frac{d^3}{D^4}\right) - \left(K\frac{d^4}{D^4} + \frac{1}{C_v^2}\right)^{-\frac{3}{2}}(2d)\right)$$

Empleando la condición *(III)* y simplificando, se tiene:

$$\frac{12}{2}K\frac{d^5}{D^4} = 2d\left(K\frac{d^4}{D^4} + \frac{1}{C_v^2}\right)$$

$$3K\frac{d^4}{D^4} = K\frac{d^4}{D^4} + \frac{1}{C_v^2}$$

$$2K\frac{d^4}{D^4} = \frac{1}{C_v^2}$$

Finalmente: $\boxed{d = \dfrac{D}{\sqrt[4]{2KC_v^2}}}$

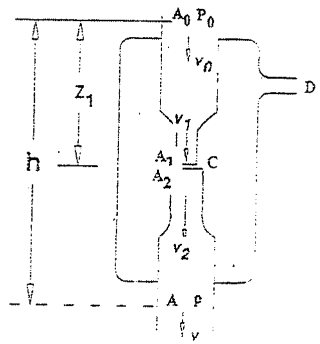
20. En la trompa hidráulica, el agua circula por un tubo que va estrechándose y salta a otro que, por el contrario, se va ensanchando. A consecuencia de la depresión que se produce en A_1, se hace vacío en la cámara C, que puede utilizarse para sacar aire de D. Se conocen las relaciones de las secciones $A/A_1 = r$, $A/A_2 = s$, y se supone grande A_0. Hallar el valor mínimo de P_0 (presión del agua en A_0) para que tenga lugar el arrastre de aire. Se hará caso omiso de las resistencias por rozamiento. Además h y z_1 son alturas pequeñas. Ver figura. $P_0 = P_{0(r,s,P)} = ??$

Resolución:

Se determinará primero la presión P_1 en A_1, entonces se aplica Bernoulli entre las secciones 0 y 1:

$$\frac{P_0}{\gamma} + \frac{v_0^2}{2g} + z_1 = \frac{P_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g}$$

$$\Rightarrow \quad P_1 = P_0 + \left(z_1 - \frac{v_1^2 - v_0^2}{2g}\right)\gamma$$



Como se supone A_0 grande, puede despreciarse v_0; además:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 = A\,v \quad , \quad \frac{A}{A_1} = r \;\wedge\; \frac{A}{A_2} = s$$

$$\Rightarrow \quad v_1 = r\,v \;\wedge\; v_2 = s\,v$$

Por lo tanto:

$$P_1 = P_0 + \left(z_1 - r^2 \frac{v^2}{2\,g} \right)\gamma$$

Si ha de producirse vacío en C, tiene que cumplirse que $P_1 = 0$, entonces:

$$\frac{v^2 r^2}{2\,g} = z_1 + \frac{P_0}{\gamma} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (i)$$

También: $$\frac{P_0}{\gamma} + \frac{v_0^2}{2\,g} + h = \frac{P}{\gamma} + \frac{v^2}{2\,g} + \frac{(v_1 - v_2)^2}{2\,g}$$

Siendo el último término correspondiente a la pérdida de energía por ensanchamiento brusco de A_1 a A_2 (Borda). Despreciando v_0 se deduce:

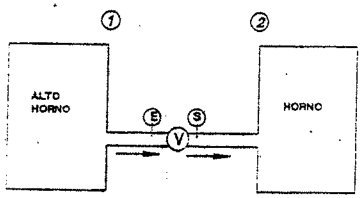
$$\frac{v^2}{2\,g}\left(1 + (r-s)^2\right) = h + \frac{P_0 - P}{\gamma} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (ii)$$

Asociando *(i)* y *(ii)*, y despreciando además h y z_1 por ser alturas pequeñas, se tiene:

$$\frac{P_0}{\gamma\, r^2}\left(1 + (r-s)^2\right) = \frac{P_0 - P}{\gamma}$$

Finalmente: $$\boxed{P_0 = \frac{r^2}{2\,r\,s - s^2 - 1} P}$$

21. Un ventilador cuyo rendimiento es de *70%* es utilizado para impulsar los gases de un alto horno a razón de *100 m^3/s*. Estos gases de γ = *1.2 Kg/m^3* son aspirados a una presión de *103 Kg/m^2* y deben ser impulsados para alimentar un horno a una presión total de *200 Kg/m^2*. La tubería de aspiración produce una pérdida de carga equivalente a *90 mm* de agua y dispone de un filtro que a su vez produce una pérdida de carga equivalente a *50 mm* de columna de agua. La tubería de impulsión origina una pérdida de carga equivalente a *120 mm* de columna de agua. El diámetro de la tubería de aspiración es de *2.5 m* y la



de impulsión es de *2.25 m*.

Determinar:

a) La presión a la entrada y salida del ventilador. Suponer despreciables las velocidades en el alto horno y en el horno.

b) La altura neta de elevación del ventilador (es decir la altura de carga a la salida, disminuida de la altura de carga a la entrada del ventilador), así como la potencia aerodinámica que éste produce.

c) La potencia efectiva del motor.

Resolución:

$n = 70\%$ *(rendimiento del ventilador)*

$Q = 100\,m^3/s$

$\gamma = 1.2\,Kg/m^3$

Bernoulli entre *(1)* y *(2)*: $$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2\,g} + z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2\,g} + z_2 + \sum p.c. - H_v \quad \ldots\ldots (1)$$

Determinación de las pérdidas de carga ($\Sigma\, p.c.$);

Tubo de aspiración: $$0.09\,m \text{ de agua} = 90\,Kg/m^2 = \frac{90\,Kg/m^2}{1.2\,Kg/m^3} = 75\,m \text{ de aire}$$

Por filtro: $$\frac{0.050(1000)}{1.2} = 41.67\,m \text{ de aire}$$

Por tubería de impulsión: $$\frac{0.120(1000)}{1.2} = 100\,m \text{ de aire}$$

En consecuencia: $\sum p.c. = 216.67\,m$ *de aire.*

Además: $$\frac{P_1}{\gamma} = \frac{103\,Kg/m^2}{1.2\,Kg/m^3} = 85.83\,m \qquad \frac{v_1^2}{2\,g} = 0 \qquad z_1 = 0$$

$$\frac{P_2}{\gamma} = \frac{200\,Kg/m^2}{1.2\,Kg/m^3} = 166.67\,m \qquad \frac{v_2^2}{2\,g} = 0 \qquad z_2 = 0$$

En *(1)*: $85.83 + 0 + 0 = 166.67 + 216.67 - H_v$

De donde: $\boxed{H_v = 297.51\,m \text{ de aire}}$ $(b.1)$

Determinación de la presión a la entrada y salida del ventilador.

Bernoulli entre *(1)* y *(E)*:

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2\,g} + z_1 - p.c. = \frac{P_E}{\gamma} + \frac{v_E^2}{2\,g} + z_E$$

$$85.83+0+0-(75+41.67)=\left(\frac{100}{\frac{\pi*2.5^2}{4}}\right)^2\frac{1}{2(9.8)}+\frac{P_E}{1.2}+0$$

Y: $\boxed{P_E=-62.42\ ^{Kg}/_{m^2}}$ $(a.1)$

Bernoulli entre *(E)* y *(S)*:

$$\frac{P_E}{\gamma}+\frac{v_E^2}{2g}+z_E+H_v=\frac{P_S}{\gamma}+\frac{v_S^2}{2g}+z_S$$

$$-52.014+\left(\frac{100}{\frac{\pi(2.5)^2}{4}}\right)^2\frac{1}{19.6}+297.51=\frac{P_S}{1.2}+\left(\frac{100}{\frac{\pi(2.25)^2}{4}}\right)^2\frac{1}{19.6}+0$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{P_S=281.28\ ^{Kg}/_{m^2}}\qquad (a.2)$$

La potencia útil del ventilador es:

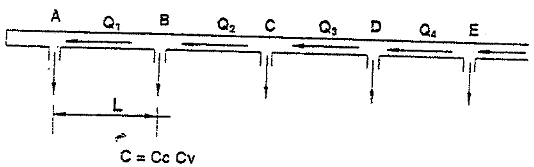
$$P_u=\gamma\,Q\,H_V=1.2(100)297.51$$

$$\boxed{P_u=35701\ \tfrac{Kg-m}{s}=470\,HP}\qquad (b.2)$$

La potencia efectiva del motor del ventilador es:

$$\boxed{P_e=\frac{P_u}{0.7}=51000\ \tfrac{Kg-m}{s}=671\,HP}\qquad (c)$$

22. Una tubería de diámetro d constante tiene a distancias iguales, orificios de área A de salida. Hallar la relación existente entre los gastos Q_n, Q_{n-1}, Q_{n-2}, de tres tramos consecutivos, si el f de Darcy es constante para toda la tubería.



Resolución:

Por Torricelli la velocidad en la boquilla A, es: $v=\sqrt{2gh}$, donde h es la altura de energía disponible.

Entonces: $Q_1=C\,A\sqrt{2gh}=K\sqrt{h}$, $K=C\,A\sqrt{2g}$

La pérdida por rozamiento en el tramo A-B es:

$$H_{AB}=\frac{8}{\pi^2 g}f\frac{l}{d^5}Q_1^2=h_l\qquad (Darcy)$$

Ahora en B la carga disponible es $h+h_l$

$$\Rightarrow\quad Q_2-Q_1=K\sqrt{h+h_l}=K\sqrt{h+a\,Q_1^2}\quad ,\ siendo\ \ a=\frac{8}{\pi^2 g}f\frac{l}{d^5}$$

Del mismo modo se obtiene para los gastos en C y D:

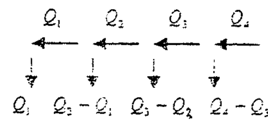
$$Q_3-Q_2=K\sqrt{h+a\left(Q_1^2+Q_2^2\right)}$$

$$Q_4-Q_3=K\sqrt{h+a\left(Q_1^2+Q_2^2+Q_3^2\right)}$$

$$\Rightarrow\quad (Q_4-Q_3)^2=K^2\left(h+a\left(Q_1^2+Q_2^2+Q_3^2\right)\right)$$

$$(Q_3-Q_2)^2=K^2\left(h+a\left(Q_1^2+Q_2^2\right)\right)$$

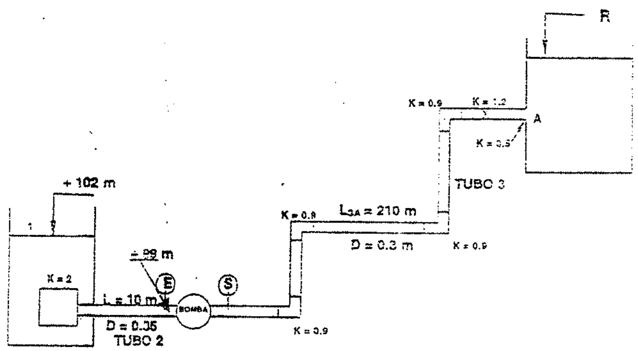
$$\Rightarrow\quad (Q_4-Q_3)^2-(Q_3-Q_2)^2=K^2\,a\,Q_3$$



Generalizando y reemplazando K y a, se tiene:

$$\boxed{(Q_n-Q_{n-1})^2-(Q_{n-1}-Q_{n-2})^2=\frac{16\,f\,C^2A^2\,l}{\pi^2 g\,d^5}Q_{n-1}}$$

23. En el sistema mostrado, hallar la cota de la superficie del agua en el reservorio R, trazar la línea piezométrica y de energía si la bomba que tiene *0.8* de eficiencia desarrolla *85 HP* cuando el caudal es de *92 l/s*. Considerar f = *0.032* para toda la tubería. Calcular además P_e y P_s.



Resolución:

$f = 0.032$

$Q = 92\ l/s = 0.092\ m^3/s$

Eficiencia de la bomba: $n = 0.8$

Potencia de la bomba: $P = 85\ HP$

$$\Rightarrow \quad H_{BOMBA} = \frac{Pn}{\gamma Q} = \frac{85(76)0.8}{1000 * 0.092}$$

$$H_{BOMBA} = 56.17\ m$$

Bernoulli entre I y R:

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 - H_2 - 2\frac{v_2^2}{2g} + H_{BOMBA} - H_3 - 4(0.9)\frac{v_3^2}{2g} - 1.2\frac{v_3^2}{2g} - 0.5\frac{v_3^2}{2g} = z_R$$

$$v_2 = \frac{Q}{A} = \frac{0.092}{\frac{\pi(0.35)^2}{4}} = 0.956\ m/s \qquad \wedge \qquad v_3 = \frac{0.092}{\frac{\pi(0.30)^2}{4}} = 1.302\ m/s$$

$$\Rightarrow \quad 0 + 0 + 102 - \frac{2(0.9139)}{2(9.8)} - 0.032 * \frac{10}{0.35} * \frac{0.9139}{19.6} + 56.17 - 0.032 * \frac{210}{0.30} * \frac{1.6952}{19.6}$$

$$- 4(0.9) * \frac{1.6952}{19.6} - 1.2 * \frac{1.6952}{19.6} - 0.5 * \frac{1.6952}{2(9.8)} - \frac{1.6952}{19.6} = z_R$$

$$z_R = 102 - 0.0933 - 0.0426 + 56.17 - 1.9374 - 0.3114 - 0.1038 - 0.0432 - 0.0865$$

$$\boxed{z_R = 155.55\ m}$$

Bernoulli entre (I) y (e)

$$102 - \frac{2(0.9139)^2}{19.6} - 0.032 * \frac{10}{0.35} * \frac{0.9139}{19.6} = \frac{P_e}{1000} + \frac{0.9139}{19.6} + 99$$

$$102 - 0.0933 - 0.0426 = \frac{P_e}{1000} + 0.0466 + 99$$

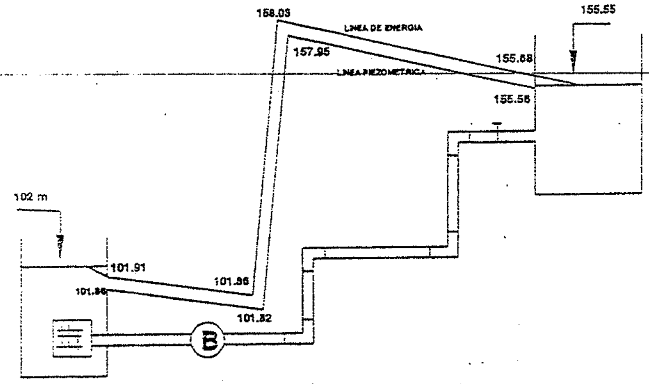
$$\frac{P_e}{1000} = 2.817\ m \qquad \boxed{P_e = 2.817\ Kg/m^2 = 0.2817\ Kg/cm^2}$$

$$\frac{P_e}{\gamma} + \frac{v_e^2}{2g} + z_e + H_{BOMBA} = \frac{P_S}{\gamma} + \frac{v_S^2}{2g} + z_S$$

$$2.817 + 0.0466 + 56.17 = \frac{P_S}{1000} + 0.0865$$

$$\frac{P_S}{1000} = 58.948\ m \quad \Rightarrow \quad \boxed{P_S = 5.89\ Kg/cm^2}$$

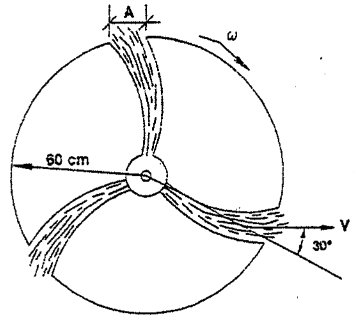
A continuación se verá el trazo de la línea piezométrica y de energía.



ALTURA DE ENERGÍA: $H = \frac{P}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} + z$

ALTURA PIEZOMÉTRICA: $\frac{P}{\gamma} + z$

24. En el dispositivo mostrado el agua ingresa axialmente a razón de *280 l/s* y se dirige radialmente por conductos cuya sección de salida son iguales y de *460 cm²* cada uno en dirección perpendicular al flujo, el agua sale con *30°* de inclinación con respecto al radio y el sistema gira a razón de *10 rad/s*; se pide calcular el módulo de la velocidad media con que sale el agua por los conductos medido con respecto al terreno.



Resolución:

Por continuidad: $Q = 3v(\cos 30°)A$

$$0.280 = 3v\frac{\sqrt{3}}{2}(0.0460)$$

$$v = 2.34\,^{m}/_{s}$$

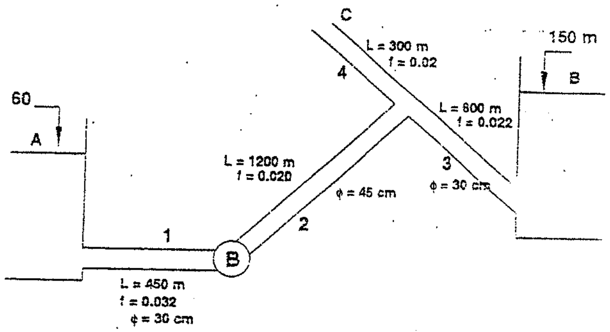
La velocidad media con respecto al terreno es:

$$v_m = \sqrt{(\omega r - v\,sen\,30°)^2 + (v\cos 30°)^2}$$

$$v_m = \sqrt{(10*0.60 - 2.34*0.5)^2 + (2.34*0.5\sqrt{3})^2}$$

$$\boxed{v_m = 5.24\,^{m}/_{s}}$$

25. La bomba de la figura debe impulsar *100 l/s* hasta la salida a una elevación de *168 m*, y *200 l/s* hasta el recipiente superior de *150m*. Calcular la potencia de la bomba y el diámetro de la tubería de *300m* de longitud.



Resolución:

$Q_3 = 0.2\,^{m^3}/_{s} \quad \Rightarrow \quad v_3 = 2.829\,^{m}/_{s}$

$Q_4 = 0.1\,^{m^3}/_{s} \quad \Rightarrow \quad v_4 = \dfrac{0.127}{D^2}$

$Q_1 = Q_2 = Q_3 + Q_4 = 0.3\,^{m^3}/_{s} \quad \Rightarrow \quad v_1 = 1.061\,^{m}/_{s}$

$\Rightarrow \quad v_2 = 1.886\,^{m}/_{s}$

Bernoulli entre *A* y *B*:

$$\frac{P_A}{\gamma} + \frac{v_A^2}{2g} + z_A - f_1\frac{L_1}{D_1}\frac{v_1^2}{2g} + H_{BOMBA} - f_2\frac{L_2}{D_2}\frac{v_2^2}{2g} - f_3\frac{L_3}{D_3}\frac{v_3^2}{2g} - \frac{v_3^2}{2g} = \frac{P_B}{\gamma} + \frac{v_B^2}{2g} + z_B$$

$$\Rightarrow \quad 60 - 0.032*\frac{450}{0.60}*\frac{(1.061)^2}{19.6} + H_{BOMBA} - 0.020*\frac{1200}{0.45}*\frac{(1.886)^2}{19.6} - 0.022*\frac{600}{0.30}*\frac{(2.829)^2}{19.6} - \frac{(2.829)^2}{19.6} = 150m$$

$$60 - 1.378 + H_{BOMBA} - 9.6789 - 17.966 - 0.408 = 150$$

$$\Rightarrow \quad H_{BOMBA} = 119.43\,m$$

$$Pot_{BOMBA} = \gamma\,Q\,H_{BOMBA} = 1000*0.3*119.43$$

$$\boxed{Pot_{BOMBA} = 35829\,\tfrac{Kg-m}{s} = 471\,HP}$$

Bernoulli entre *A* y *C*:

$$60 - 1.378 + 119.43 - 9.6789 - 0.02*\frac{300}{D}*\left(\frac{0.127}{D^2}\right)^2\frac{1}{19.6} = 168 - \frac{(0.127)^2}{D^4*19.6}$$

$$168.37 - \frac{4.94*10^{-3}}{D^5} = 168 + \frac{8.22*10^{-4}}{D^4}$$

ó : $$\frac{4.94*10^{-3}}{D^5} + \frac{8.22*10^{-4}}{D^4} = 0.37\,m$$

D (m)	$\frac{4.49*10^{-3}}{D^5}+\frac{8.22*10^{-4}}{D^4}$	OBSERVACIONES
0.50	0.1712	Muy bajo => achicar D
0.40	0.5145	Alto => aumentar D
0.45	0.2633	Ligeramente bajo => achicar D
0.42	0.3700	Es el diámetro aceptado

$$\therefore \quad \boxed{D = 0.42\,m}$$

CAPITULO V

ANÁLISIS DIMENSIONAL Y SEMEJANZA HIDRÁULICA

ANÁLISIS DIMENSIONAL:

"Es la matemática de las dimensiones de cantidades y además una herramienta muy útil en la Moderna Mecánica de los Fluidos"

Se debe tener en cuenta que toda cantidad física puede reducirse a las magnitudes fundamentales de Longitud (L), Masa (M) y Tiempo (T) ó también Longitud (L), Fuerza (F) y Tiempo (T).

APLICACIONES DEL ANÁLISIS DIMENSIONAL:

1) Convertir un sistema de unidades en otro.
2) Desarrollar ecuaciones.
3) Reducir el número de variables que intervienen en un fenómeno físico.

Para la aplicación Nº 3 se usara el MÉTODO DE RAYLEIGH, para lo cual es necesario conocer previamente cuales son las variables que intervienen en el fenómeno físico.

5.1. Desarrollar por el método del análisis dimensional la ecuación de la distancia recorrida por un cuerpo que cae libremente durante el tiempo **T**, asumiendo que la distancia depende del peso del cuerpo, de la aceleración de la gravedad y del tiempo.

Resolución:

Como la distancia (s) depende del peso (P), aceleración (g) y tiempo (T) se puede escribir:

$$s = f(P, g, T)$$

ó $\quad s = K\,P^x g^y T^z$ .... (1)

donde K es una constante de proporcionalidad.

Pero dimensionalmente:

$s = L$

$p = F$

$g = LT\text{-}2$

Luego:

$$L = F^x (LT^2)^y T^z$$
$$L\,F^0 T^0 = F^x L^y T^{-2+z}$$

Identificando exponentes:

$y = 1$

$x = 0$

$z-2 = 0, \quad$ o sea que: $\quad z = 2$

en consecuencia la expresión (1) queda $s = K\,P^0\,g\,T \qquad \boxed{s = KgT^2}$

5.2. Establecer el Número de Reynolds por análisis dimensional, sabiendo que es función de la densidad, viscosidad absoluta, velocidad y una longitud.

Resolución:

Según el enunciado: $\quad N_R = f(\rho, \mu, v, L)$

ó $\quad N_R = K\ \rho^x \mu^y v^z L^W$ .... (1)

donde K es una constante de proporcionalidad.

Pero dimensionalmente:

$\rho = ML^{-3}$

$\mu = ML^{-1}T^{-1}$

$v = LT^{-1}$

$L = L$

Luego:

$$M^0 L^0 T^0 = (ML^{-3})^x (ML^{-1}T^{-1})^y (LT^{-1})^z L^W$$
$$M^0 L^0 T^0 = M^{x+y}.L^{-3x-y+z+w}.T^{-y-z}$$

identificando exponentes:

$0 = x + y; \quad 0 = -3x - y + k + w; \quad 0 = -y - z$

de dónde : $\quad x = -y$

$z = -y$

$w = -y$

En consecuencia la expresión (1) queda:

$$N_R = K\rho^{-y}\mu^y v^{-y} L^{-y}$$

$$\boxed{N_R = K\left(\frac{v\,L\,\rho}{\mu}\right)^{-y}}$$

Los valores de "K" e "y" se obtienen experimentalmente o por análisis físico

$(K = 1; y = -1)$.

5.3. La fuerza que ejerce un fluido en movimiento, sobre un cuerpo, en dirección paralelo al movimiento relativo del fluido, es una función de la masa específica, de la viscosidad y velocidad del fluido y de una longitud característica del cuerpo. Desarrollar por el método del análisis Dimensional, la expresión de la fuerza señalada dándole la estructura.

$F = C\rho A\dfrac{V^2}{2g}$ Indicar el valor del coeficiente C.

Resolución:

Según los datos del problema, la fuerza es función de:

$$F = f(\rho, \mu, L, v)$$

ó $$F = K\rho^x \mu^y L^z v^n \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

donde K es una constante de proporcionalidad.

Reemplazando dimensiones M, L, T a cada función física.

$$MLT^{-2} = (ML^{-3})^x.(MLT)^y.L^z(LT^{-1})^n$$

$$MLT^{-2} = M^{x+y}.L^{-3x-y+z+n}T^{-y-n}$$

Identificando exponentes: $1 = x + y$

$1 = -3k - y + z + n$

$-2 = -y - n$

Resolviendo el sistema de ecuaciones en función de "y"

$$x = 1 - y \ ; \quad n = 2 - y \ ; z = 2 - y$$

Reemplazando estos valores en (1)

$$F = K\rho^{1-y}.\mu^y.L^{2-y}.v^{2-y}$$

$$F = K\left(\frac{\rho v L}{\mu}\right)^{-y}\rho L^2 v^2$$

multiplicando y dividiendo entre $2g$:

$$F = 2Kg\left(\frac{\rho v L}{\mu}\right)^{-y}\rho L^2\frac{v^2}{2g}$$

Donde $\left(\dfrac{\rho v L}{\mu}\right)^{-y}$ = Número de Reynolds y L^2 un área, entonces:

$$\boxed{F = 2Kg\,(\mathrm{Re})^{-y}\rho A\frac{v^2}{2g}}$$

Para darle la estructura indicada, el coeficiente C debe ser:

$$\boxed{C = 2Kg\,(\mathrm{Re})^{-y}}$$

5.4. Establecer la expresión de potencia absorbida por un propulsor de hélice, asumiendo que puede expresarse en términos de la densidad de masa del aire (ρ), del diámetro (D), de la velocidad de la corriente de aire (v), de la velocidad de rotación de la hélice (W) y del coeficiente de viscosidad (μ).

Los términos adimensionales. Número de Reynolds $\left(\dfrac{\rho v L}{\mu}\right)^{-y}$ y la relación de propulsión $\left(\dfrac{DW}{v}\right)$ se agruparán en "C".

Resolución:

Según el problema. Pot. = f(ρ , D, v , W ,μ)

$$\text{Pot.} = K.\rho^x.D^y.v^z.W^m.\mu^n \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Reemplazando dimensiones M, L, T a cada función física.

$$ML^2T^{-3} = (M.L^{-3})^x L^y (LT)^z (T^{-1})^m (M.L^{-1}T^{-1})^n$$

$$ML^2T^{-3} = M^{x+n}.L^{-3x+y+z-n}T^{-z-m-n}$$

Identificando exponentes: $1 = x + n$

$2 = -3x - y + z - n$

$-3 = -z - m - n$

Resolviendo el sistema: $x = 1 - n$

$y = 5 - 2n - z$

$m = 3 - z - n$

Reemplazando estos valores en (1) :

$$Pot. = K.\rho^{1-n}.D^{5-2n-z}.v^z.W^{3-z-n}\mu^n$$

Podemos agruparle así:

$$Pot. = K\left[\left(\frac{\rho D^2 W}{\mu}\right)^{-n}\left(\frac{DW}{v}\right)^{-z}\right]W^3D^5\rho$$

$$Pot. = K\left[\left(\frac{\rho D(2R)W}{\mu}\right)^{-n}\left(\frac{2RW}{v}\right)^{-z}\right]W^3D^5\rho$$

Pero $W.R$ = Velocidad radial = v

Luego: $$Pot. = K\left[\left(2\frac{\rho v D}{\mu}\right)^{-n}\left(\frac{2v}{v}\right)^{-z}\right]W^3D^5\rho$$

agrupando las constantes adimensionales en un coeficiente "C"

$$\boxed{Pot. = C.\rho.W^3.D^5}$$

5.5. Usando el método del análisis dimensional, desarrollar la ecuación del gasto que pasa por un orificio circular, sabiendo que es función de la densidad del líquido, el diámetro y la diferencia de presiones. Asumir un coeficiente de proporcionalidad igual a: $K = \sqrt{2}\,(\pi/4)$

Resolución:

Según el problema: $Q = f(\rho, D, p)$

ó $Q = K\,\rho^x . D^y . p^z$ .... (1)

Reemplazando dimensiones M, L, T a cada función física:

$F^0 . L^3 . T^{-1} = (F.T^2.L^{-4})^x . (L)^y . (F.L^{-2})^z$

$F^0 . L^3 . T^{-1} = F^{x+z} . L^{-4x+y-2z} T^{2x}$

Identificando exponentes:

$0 = x + z$

$3 = -4x + y - 2z$

$-1 = 2x$

Resolviendo el sistema:

$$x = -\frac{1}{2} \quad ; \quad z = \frac{1}{2} \quad ; \quad y = 2$$

Sustituyendo estos valores en (1) :

$$Q = K\rho^{-1/2} D^2 p^{1/2} = K.D^2 \sqrt{\frac{p}{\rho}}$$

y, como K es dato del problema, y $p = \gamma . h$, se tiene:

$$Q = \sqrt{2}\,\frac{\pi}{4} . D^2 \sqrt{\frac{\gamma . h}{\rho}}$$

$$Q = \frac{\pi}{4} . D^2 \sqrt{\frac{2.\gamma . h}{\rho}}$$

Pero: $\dfrac{\gamma}{\rho} = g$

Entonces: $\boxed{Q = \frac{\pi}{4} . D^2 \sqrt{2gh}}$

5.6. Desarrollar una expresión para el esfuerzo cortante de un fluido que pasa por una tubería, asumiendo que éste esfuerzo es función de la densidad, viscosidad y velocidad del fluido, como también del diámetro y rugosidad de la tubería.

Resolución:

Según el enunciado:

$\tau = f(\rho, \mu, D, J)$

ó $\tau = K . \rho^x . \mu^y . v^z . D^w . J^t$ .... (1)

Siendo la rugosidad una relación: $\dfrac{e}{D}$

Luego dimensionalmente se tiene:

$$F^1 L^{-2} T^0 = (FT^2L^{-4})^x . (FTL^{-2})^y . (LT^{-1})^z L^w \left(\frac{L}{L}\right)^t$$

$$F^1 L^{-2} T^0 = F^{x+y} . L^{-4x-2y+z+w} T^{2x+y-z}$$

Identificando exponentes:

$1 = x + y$

$-2 = -4x - 2y + z + w$

$0 = 2x + y - z$

resolviendo el sistema de ecuaciones en función de "y"

$x = 1 - y$

$z = 2 - y$

$w = -y$

Sustituyendo estos valores en (1):

$$\tau = K . \rho^{1-y} . \mu^y . v^{2-y} . D^{-y} J^t$$

Agrupando constantes adimensionales:

$$\tau = K \left(\frac{vD\rho}{\mu}\right)^{-y} J^t v^2 \rho$$

$$\tau = \left(K' . \mathrm{Re}^{-y}\right) v^2 . \rho \quad \rightarrow \quad \boxed{\tau = K'' . v^2 . \rho}$$

5.7. Si se tiene la ecuación diferencial: $\nabla^2 \phi = \dfrac{\partial H}{\partial t} S$; calcular las dimensiones de ϕ si $H = L$, $t = tiempo$, $S = adimensional$.

Resolución:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial H}{\partial t} S$$

por definición: $\nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} = \left[\dfrac{1}{L^2}\right]$

por dato : $\partial H = [L]$

$\partial t = [T]$

$S = 1$

Luego: $\left[\dfrac{1}{L^2}\right]^{\phi} = \dfrac{[L]}{[T]}.1$

$$\phi = \frac{L.L^2}{T}$$

$$\therefore \quad \boxed{\phi = [L^3T^{-1}]}$$

5.8. Con las ecuaciones de Navier Stokes, aplicando las simplificaciones del flujo paralelo (flujo laminar) y las condiciones de borde de una tubería, se ha podido encontrar una expresión para la distribución de velocidades así como también una para la perdida de carga debido al rozamiento, siendo esta última:

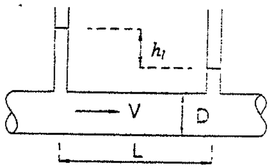
$$H_l = \frac{128.Q.\mu.L}{\pi D^4 \rho g}$$

por otra parte, se sabe que los cambios de presión a lo largo de una tubería dependen de las magnitudes siguientes: D (diámetro de la tubería), L (longitud del tramo en el que se consideran los cambios de presión, μ (viscosidad), ρ (densidad), V (velocidad media) y e (variación media del radio de la tubería o rugosidad de la tubería). Se pide mediante el análisis dimensional, establecer una relación que permite expresar la perdida de carga H_l ($\Delta p/\gamma$) en función de las variaciones antes enumeradas.

Asimismo, valiéndose de la ecuación (1), encontrar una expresión para el coeficiente de fricción en el caso de flujo laminar en tuberías.

Resolución:

Se ha encontrado que la pérdida de carga en flujo laminar está dado por:



$$H_l = \frac{\Delta p}{\gamma} = \frac{128.Q.L\mu}{\pi D^4 \rho.g} \quad .... (1)$$

Por otro lado, a lo largo de una tubería: $\Delta p = F(\rho, \mu, v, D, L, e)$

Dimensionalmente: $\dfrac{M}{LT^2} \equiv \left[\dfrac{M}{L^3}\right]^a \left[\dfrac{M}{LT}\right]^b \left[\dfrac{L}{T}\right]^c [L]^d [L]^f [L]^g$

para m: $1 = a + b$

para L: $-1 = -3a - b + c + d + f + g$

para T: $-2 = -b - c$

entonces: a, c, f en función de: b, d, g son:

$a = 1 - b$

$c = 2 - b$

$f = -b - d - g$

luego: $\Delta p = K(\rho^{1-b})\mu^b V^{2-b} L^d . D^{-b-d-g} e^g$, K es una constante

$$\frac{\Delta p}{\rho V^2} = K\left(\frac{\mu}{\rho VD}\right)^b \left(\frac{L}{D}\right)^d \left(\frac{e}{D}\right)^g$$

Introduciendo una función $G = G\left(\dfrac{\mu}{\rho VD}.\dfrac{e}{D}\right)$

$\Rightarrow \dfrac{\Delta p}{\rho V^2} = \left(\dfrac{L}{D}\right)^d G\left(\dfrac{\mu}{\rho VD}, \dfrac{e}{D}\right)$, pero el f de Darcy es una función de las mismas variables de G

$$\Rightarrow \frac{\Delta p}{\gamma} = \frac{V^2}{2g}.\frac{L}{D}.f$$

Se ha hecho $d = 1$ porque la presión en un flujo laminar o turbulento uniforme varia linealmente con respecto a la longitud L. La ultima ecuación es la expresión de Darcy para la pérdida de carga en tuberías, es decir:

$$H_L = f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g} \quad .... (2) \quad Resp.$$

Para encontrar una expresión para el coeficiente de fricción "f", para el caso de flujo laminar en tuberías, igualamos (2) ∧ (1):

$$f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g} = \frac{128.Q.\mu.L}{\pi D^4 \rho g} \quad \Rightarrow \quad f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g} = \frac{128.(V\pi D^2/4)\mu L}{\pi D^4 \rho g}$$

Simplificando: $f = \dfrac{64\mu}{\rho VD}$ pero el número de Reynolds es: $\text{Re} = \dfrac{\rho VD}{\mu}$

$$Resp. \quad \Rightarrow \quad \boxed{f = \frac{64}{\text{Re}}}$$

SIMILITUD HIDRÁULICA

La semejanza hidráulica requiere 2 condiciones:

1° Semejanza geométrica entre modelo y protocolo.

2° Las trayectorias seguidas por moléculas homólogamente ubicadas siguen trayectorias geométricas semejantes.

Es decir:

$$\frac{Longitud\ del\ modelo}{Longitud\ del\ prototipo} = escala\ de\ longitudes\ ó\ \frac{Lm}{Lp} = Lr$$

$$\frac{Masa\ del\ modelo}{Masa\ del\ prototipo} = escala\ de\ masas\quad ó\ \frac{Mm}{Mp} = Mr$$

$$\frac{Tiempo\ del\ modelo}{Tiempo\ del\ prototipo} = escala\ de\ tiempos\quad ó\ \frac{tm}{tp} = Tr$$

Cualquier otra magnitud derivada depende de las anteriores, ejemplos:

Escala de áreas:

$$A_r = \frac{A_m}{A_p} = \frac{L_m^2}{L_p^2} = L_r^2$$

Escala de gastos:

$$Q_r = \frac{Q_m}{Q_p} = \frac{L_m^3/t_m}{L_p^3/t_p} = \frac{L_m^3}{L_p^3} : \frac{t_m}{t_p} = L_r^3 : T_r = \frac{L_r^3}{T_r}$$

Cuando una magnitud interviene en modelo prototipo, la escala será lógicamente la UNIDAD, ejemplos:

La aceleración de la gravedad: $a_r = 1$

$$a_r = \frac{L_r}{T_r^2} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad L_r = T_r^2$$

$$\boxed{T_r = \sqrt{L_r}}$$

Si se usara igual liquido en modelo y prototipo, como sucede muchas veces, se tendrá que la escala de densidades absolutas: $\rho_r = 1$

$$a_r = \frac{M_r}{L_r^3} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{M_r = L_r^3}$$

SIMILITUD DINAMICA:

La inercia está siempre presente.

1°.- Inercia y gravedad: $\frac{v^2}{gL} = Número\ de\ FROUDE$

2°.- Inercia y viscosidad: $\frac{vL}{\upsilon} = \frac{\rho vL}{\mu} = Número\ de\ Reynolds$

3°.- Inercia y tensión superficial: $\frac{\rho v^2 L}{\sigma} = Número\ de\ Weber$

4°.- Inercia y Presión: $\frac{\rho.v^2}{p} = Número\ de\ Euler$

5°.- Inercia y Elasticidad: $\frac{\rho.v^2}{E} = Número\ de\ Cauchy$

5.9. Hallar una relación entre la inercia y la gravedad, ¿Qué número es?

Resolución:

Velocidad es la relación de espacio con tiempo, o sea: $Vr = \frac{L_r}{T_r}$

Pero se sabe que: $T_r = \sqrt{L_r}$ (ver página anterior)

Reemplazando en la escala de velocidades:

$$Vr = L_r/\sqrt{L_r} = \sqrt{L_r}$$

Elevando al cuadrado: $V_r^2 = L_r$

Relacionando esta igualdad en cada modelo y prototipo:

$$\frac{V_m^2}{V_p^2} = \frac{L_m}{L_p} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{V_m^2}{L_m} = \frac{V_p^2}{L_p}$$

Dividiendo entre la gravedad a ambos miembros:

$$\boxed{\frac{V_m^2}{g.L_m} = \frac{V_p^2}{g.L_n} = \ Númerode\ FROUDE}$$

5.10. ¿Qué relaciona el número de Reynolds? Su deducción.

Resolución:

El número de Reynolds relaciona la inercia con la viscosidad. Se deduce así: Las dimensiones de la viscosidad cinemática son: $\upsilon = \left[\frac{L^2}{T}\right]$

Con sus escalas: $\upsilon_r = \frac{L_r^2}{T_r} = \frac{L_r}{T_r} L_r = V_r . L_r$

Relacionando esta igualdad en modelo y prototipo:

$$\frac{\upsilon_m}{\upsilon_p} = \frac{V_m}{V_p} \cdot \frac{L_m}{L_p} \quad \Rightarrow \quad \frac{V_m . L_m}{\upsilon_m} = \frac{V_p . L_p}{\upsilon_p}$$

Como la viscosidad cinemática es: $\upsilon = \mu / \rho$

$$\boxed{\textit{Número de Reynolds} = \frac{VL}{\upsilon} = \frac{\rho . V . L}{\mu}}$$

5.11. ¿Qué relaciona el Número de WEBER?. Su deducción.

<u>Resolución</u>:

El número de Weber relaciona la <u>inercia</u> con la <u>tensión superficial</u>. Se deduce así: Las dimensiones de la tensión superficial son: $\sigma = \frac{F}{L} = \frac{M}{T^2}$

Con sus escalas: $\sigma = \frac{M_r}{T_r^2}$

Multiplicando y dividiendo por: $(L_r)^3$

$$\sigma_r = \frac{M_r}{L_r^3} \cdot \frac{L_r^2}{T_r^2} . L_r \quad \Rightarrow \quad \sigma_r = \rho_r . V_r^2 . L_r$$

Relacionando esta igualdad en modelo y prototipo:

$$\frac{\sigma_m}{\sigma_p} = \frac{\rho_m . V_m^2 . L_m}{\rho_p . V_p^2 . L_p} \quad \Rightarrow \quad \frac{\rho_m . V_m^2 L_m}{\sigma_m} = \frac{\rho_p . V_p^2 . L_p}{\sigma_p}$$

$$\boxed{\textit{Número de Weber} = \frac{\rho . V^2 . L}{\sigma}}$$

5.12. La escala de longitudes para construir el modelo de una represa es 1/100. Si el modelo ha de ser operado en agua, del mismo modo que el prototipo. Y teniendo presente que la gravedad actúa al igual sobre ambos. ¿Cuáles serán las escalas para: tiempos, masas, velocidades, gastos, trabajo, potencia, fuerza y presiones?

<u>Resolución</u>:

a) Como la gravedad interviene en modelo y prototipo, tendremos que: $g_r = 1$

Es decir: $\frac{L_r}{T_r^2} = 1$ además $L_r = \frac{1}{100}$

Despejando: $T_r = \sqrt{L_r}$ .... (1) $\boxed{T_r = 1/100}$

b) Como se usa el mismo líquido en modelo y prototipo, tendremos que: $\rho_r = 1$

Es decir: $\frac{M_r}{L_r^3} = 1$

Despejando: $M_r = L_r^3$ .... (2) $\boxed{M_r = 1/1'000,000}$

c) Se sabe que : $V_r = L_r / T_r$; reemplazando (1) a esta última:

$$V_r = \frac{L_r}{\sqrt{L_r}} = \sqrt{L_r} \quad \text{..............................} \ (3) \quad \boxed{V_r = 1/10}$$

d) Se sabe que : $Q_r = \frac{L_r^3}{T_r}$; reemplazando (1) a esta última:

$$Q_r = \frac{L_r^3}{\sqrt{L_r}} = L_r^{5/2} \quad \text{..............................} \ (4) \quad \boxed{Q_r = 1/100,000}$$

e) Se sabe que : $F_r = M_r a_r = M_r \frac{L_r}{T_r^2}$; reemplazando (1) y (2) a esta última:

$$F_r = L_r^3 \frac{L_r}{L_r} = L_r^3 \quad \text{..............................} \ (5) \quad \boxed{F_r = 1/1'000,000}$$

f) Se sabe que : $W_r = F_r . L_r$; reemplazando (5) a esta última:

$$W_r = L_r^3 . L_r = L_r^4 \quad \text{..............................} \ (6) \quad \boxed{W_r = 1/100'000,000}$$

g) Se sabe que : $Pot_r = \frac{W_r}{T_r}$; reemplazando (1) y (6) a esta última:

$$Pot_r = \frac{L_r^4}{\sqrt{L_r}} = L_r^{7/2} \quad \text{..............................} \ (7) \quad \boxed{Pot_r = 1/10'000,000}$$

h) Se sabe que : $P_r = \frac{F_r}{A_r} = \frac{F_r}{L_r^2}$; reemplazando (5) a esta última:

$$P_r = \frac{L_r^3}{L_r^2} = L_r \quad \text{..............................} \ (8) \quad \boxed{P_r = 1/100}$$

5.13. Se ha construido un modelo de barco en la escala 1/10; a) se desea saber la velocidad con la que habrá que desplazar un modelo en la poza de pruebas para obtener las olas dinámicamente semejantes a las que produciría el prototipo moviéndose a razón de 20 *nudos*. b) Si simultáneamente se quisiera estudiar los problemas de fricción del agua con el casco del buque; ¿Qué viscosidad cinemática debería tener el líquido de la poza de pruebas?. Viscosidad absoluta del agua de mar es 1.2 *centipoises* y la densidad relativa es 1.025.

Resolución:

a) En este caso interviene fundamentalmente la inercia y la gravedad; por lo tanto debe haber igualdad de número de Froude en modelo y prototipo:

$$\frac{V_m^2}{g.L_m} = \frac{V_p}{g.L_p}$$

Simplificando y despejando la incógnita: $V_m^2 = V_p^2\left(\frac{L_m}{L_p}\right)$

Donde V_p = 20 nudos ; $\frac{L_m}{L_p} = \frac{1}{10}$

$$\therefore V_m = 20\sqrt{\frac{1}{10}} = 2\sqrt{10}$$

$$\boxed{V_m = 6.32 \ nudos}$$

b) Ahora predomina la inercia con la viscosidad, por lo que debe haber igualdad en modelo y prototipo del número de Reynolds:

DATOS:

$V_m = 2\sqrt{10}$ *nudos* = 6.32 *nud.*

$$\frac{V_m.L_m}{\upsilon_m} = \frac{v_p.L_p}{\upsilon_p}$$

V_p = 20 nudos

$\frac{L_m}{L_p} = \frac{1}{10}$

Despejando la incógnita:

$$\upsilon_m = \frac{V_m.L_m.\upsilon_p}{V_p.L_p}$$

μ_p = 1.2 *centipoise*

ρ_p = 1.025

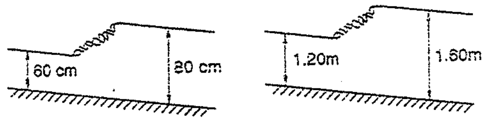
En el cual: $\upsilon_p = \frac{\mu_p}{\rho_p}$

Es decir: $\upsilon_m = \frac{V_m.L_m^2.\mu_p}{V_p.L_p.\rho_p} = \frac{6.32*1*1.2}{20*10*1.025}$

$$\boxed{\upsilon_m = 0.037 \ centistokes}$$

5.14. En un canal rectangular el agua fluye con una velocidad de 3 m/s y con una altura de 60 cm. En cierto punto se produce un resalto cambiando bruscamente la altura a 80 cm. ¿Cuál debería ser la velocidad de flujo en otro canal, geométricamente similar, donde la altura de agua es de 1.20 m antes del resalto para obtener que la altura de agua después del resalto sea de 1.60 m?

Resolución:



La inercia y la gravedad son las fuerzas predominantes, por lo que debe haber igualdad del número de Froude en ambos resaltos:

$$\frac{v^2}{g.L} = \frac{v_1^2}{g.L_1}$$

Simplificando y despejando la incógnita: $v_1 = v\sqrt{\frac{L_1}{L}}$

Donde: $v = 3 \ m/s$; $\frac{L_1}{L} = \frac{1.20}{0.60} = \frac{1.60}{0.80} = 2$

Luego: $v_1 = 3\sqrt{2}$ → $\boxed{v_1 = 4.23 \ m/s}$

5.15. El flujo de una turbina se estudia en un modelo a escala 1/10 empleando aire en vez de agua. a) ¿Cuál será la relación entre velocidades y cuál la relación entre presiones? b) ¿Qué relación de gastos debe adoptarse para obtener condiciones dinámicamente similares?

υ_{aire} = 1.21 x 10^{-5} ft^2/s ; ρ = 0.00237 $slugs/ft^3$

υ_{agua} = 1.58 x 10^{-4} ft^2/s ; ρ = 1.94 $slugs/ft^3$

Resolución:

a) Como depende de la inercia y viscosidad, igualamos número de Reynolds en modelo y prototipo $\frac{v_m.L_m}{\upsilon_m} = \frac{v_p.L_p}{\upsilon_p}$

De donde la escala de velocidades será:

$$v_r = \frac{v_m}{v_p} = \frac{L_p.\upsilon_m}{L_m.\upsilon_p} = \frac{10*1.21*10^{-5}}{1*1.58*10^{-4}}$$

$$\therefore v_r = \frac{v_m}{v_p} = \frac{1.21}{1.58} \ \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(1)}$$

ó $\boxed{\dfrac{v_m}{v_p} = \dfrac{1}{1.3}}$

Para hallar la relación de presiones; igualamos el número de Euler en modelo y prototipo: $\dfrac{v_m^2.\rho_m}{p_m} = \dfrac{v_p^2.\rho_p}{p_p}$

de donde la escala de presiones es: $\dfrac{p_m}{p_p} = \dfrac{v_m^2.\rho_m}{v_p^2.\rho_p} = \dfrac{(1.21)^2 * 0.00237}{(1.58)^2 * 1.94}$

$$\Rightarrow \boxed{\dfrac{p_m}{p_p} = \dfrac{1}{1.395}}$$

b) La escala de gastos está dada por:

$$Q_r = \frac{L_r^3}{T_r} = L_r^2\frac{L_r}{T_r} = L_r^2.v_r$$

Reemplazando (1) a esta última, como también $L_r = 1/10$

$$Q_r = \left(\frac{1}{10}\right)^2 * \frac{1.21}{1.58}$$

$$\boxed{Q_r = \frac{1}{130.5}}$$

5.16. Los efectos del viento sobre un globo se determinan por medio de un modelo a escala 1/15 en un túnel de viento. a) ¿Qué velocidad del aire en el túnel representaría exactamente una velocidad de 30 Km/h en el prototipo?. b) ¿A qué fuerza de arrastre en el prototipo correspondería una fuerza de 100 Kg en el modelo?

Resolución:

a) Depende de la inercia y la gravedad, por lo tanto igualamos número de Froude de modelo y prototipo:

$$\frac{v_m^2}{g.L_m} = \frac{v_p^2}{g.L_p} \quad \Rightarrow \quad v_m = v_p^2\left(\frac{L_m}{L_p}\right)$$

Donde: $v_p = 30\ Km/h$; $\dfrac{L_m}{L_p} = \dfrac{1}{15}$

$$\therefore \quad v_m = 30\sqrt{\frac{1}{15}} = 2\sqrt{15} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_m = 7.74\ Km/h}$$

b) Para calcular la fuerza de arrastre en el prototipo, aplicamos el método de Euler:

$$\frac{\rho_m.v_m^2}{p_m} = \frac{\rho_p.v_p^2}{p_p} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

donde: $\rho_m = \rho_p$ (pues en ambos casos se usa aire)

p = presión = Fuerza : Área = $\dfrac{F}{L^2}$

luego en (1) y despejando la incógnita:

$$F_p = F_m\frac{v_p^2.L_p^2}{v_m^2.L_m^2} = F_m\left(\frac{v_p}{v_m}\right)^2\left(\frac{L_p}{L_m}\right)^2$$

en el cual: $F_m = 100\ Kg$.

$v_p = 30\ Km/h$.

$v_m = 2.\sqrt{15}$

$\dfrac{L_p}{L_m} = 15$

$$\therefore \quad F_p = 100\left(\frac{30}{2\sqrt{15}}\right)^2(15)^2 = 100\left(\frac{30}{2}\right)(15*15)$$

$$\boxed{F = 337{,}500\ Kg = 337.5\ t}$$

5.17. En que escala habrá que reproducir el aliviadero de una represa que tiene una descarga máxima de 20 m^3/s a fin de que el gasto en el aliviadero no exceda de 1.12 l/s.?

Resolución:

En este problema se aprecia que depende de la inercia y de la gravedad, por lo tanto igualamos número de Froude en modelo y prototipo:

$$\frac{v_m^2}{g.L_m} = \frac{v_p^2}{g.L_p} \quad \Leftarrow \quad \frac{v_m^2}{L_m} = \frac{v_p^2}{L_p}$$

Multiplicando y dividiendo en ambos lados por el área del cuadrado:

$$\frac{v_m^2.A_m^2}{A_m^2.L_m} = \frac{v_p^2.A_p^2}{A_p^2.L_p} \qquad v.A = Q \qquad A = L^2$$

Resulta: $\dfrac{Q_m^2}{L_m^4.L_m} = \dfrac{Q_p^2}{L_p^4.L_p} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{Q_m^2}{Q_p^2} = \dfrac{L_m^5}{L_p^5}$

$$\therefore \quad \frac{L_m}{L_p} = \left(\frac{Q_m}{Q_p}\right)^{2/5}$$

en el cual: $Q_m = 0.00112\ m^3/s$

$Q_p = 20\ m^3/s$

Luego: $L_r = \dfrac{L_m}{L_r} = \left(\dfrac{0.00112}{20}\right)^{2/5} = (0.000056)^{2/5}$

$L_r = 0.0199 \qquad L_r \approx 0.02$

$\therefore \boxed{L_r = 1/50}$

5.18. Para determinar la resistencia que opondrán las olas de un barco que se quiere construir, es necesario hacer ensayos previos en el laboratorio sobre un modelo reducido a escala 1/36

A) Si la velocidad máxima que el prototipo ha de alcanzar es de 25 *nudos*: ¿A qué velocidad habrá de someterse el modelo reducido a escala, para obtener olas dinámicamente semejantes a las de la realidad?

B) Si se encuentra que la resistencia de las olas en el modelo es de 0.3 *Kg*. ¿Cuál será la correspondiente resistencia en el prototipo?

Resolución:

A) En este caso interviene fundamentalmente la fuerza de inercia y la gravedad; igualando el número de Froude en modelo y prototipo.

$$\frac{V_m^2}{g.L_m} = \frac{V_p^2}{g.L_p} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{V_m^2}{L_m} = \frac{V_p^2}{L_p}$$

despejando la incógnita y teniendo en cuenta que:

$$\frac{L_m}{L_p} = \frac{1}{36} \quad ; \quad V_p = 25\ nudos$$

$$V_m = V_p\sqrt{\frac{L_m}{L_p}} = 25\sqrt{\frac{1}{36}}$$

$$\therefore \boxed{V_m = 4.16\ nudos}$$

B) Como en este caso depende de la inercia y fuerza, podemos partir del número de Euler que relaciona inercia y presión: $N^\circ\ Euler = \dfrac{\rho V^2}{p}$

Como la presión es la relación de Fuerza : Área $= \dfrac{F}{L^2}$

Reemplazando los números en modelo y prototipo como en el caso del problema 5.15. obtenemos:

$$F_p = F_m\left(\frac{V_p}{V_m}\right)^2\left(\frac{L_p}{L_m}\right)^2$$

Donde $V_p = 25\ nudos \quad ; \quad F_m = 0.3\ Kg. \quad ; \quad \dfrac{L_p}{L_m} = 36$

$$V_m = \frac{25}{6}\ nudos \qquad F_p = 0.3\left(\frac{25}{25/6}\right)^2(36)^2 = 0.3(36)(36)^2$$

$$\boxed{F_p = 13.996\ Kg}$$

5.19. Para el estudio del empuje de las corrientes de un puerto sobre una mina sumergida, se ha empleado un túnel aerodinámico y una escala 1/3. ¿Qué velocidad de viento habrá de utilizarse para representar una corriente de marca 8 *Km/h*? ¿A qué resistencia real corresponderá una resistencia en el modelo de 1.4 *Kg* ?

La viscosidad cinemática para el agua de mar es $0.13\text{x}10^{-5}\ m^2/s = \upsilon_p$

La viscosidad cinemática para el aire es $0.14\text{x}10^{-4}\ m^2/s \quad = \upsilon_m$.

Peso específico para el agua de mar es 1.030 $Kg/m^3 = \gamma_p$

Peso específico para el aire es 1.275 $Kg/m^3 = \gamma_m$

Resolución:

En este caso interviene la inercia y la viscosidad, por lo que debe haber igualdad en los números de Reynolds de modelo y prototipo:

$$\frac{V_m L_m}{\upsilon_m} = \frac{V_p L_p}{\upsilon_p} \qquad \Rightarrow \qquad V_m = V_p\left(\frac{L_p}{L_m}\right)\left(\frac{V_m}{V_p}\right)$$

Reemplazando valores:

$$V_m = 8\left(\frac{3}{1}\right)\left(\frac{0.14*10^{-4}}{0.13*10^{-5}}\right)$$

$$\boxed{V_m = 258\ Km/hora}$$

Para calcular la resistencia del aire en el prototipo usamos el número de Euler:

$$\frac{\rho_m V_m^2}{p_m} = \frac{\rho_p V_p^2}{p_p}$$

Donde: $Presión = Fuerza : Área = \dfrac{F}{L^2}$

Luego: $\frac{L_m^2 \rho_m V_m^2}{F_m} = \frac{L_p^2 \rho_p V_p^2}{F_p} \quad \Rightarrow \quad F_p = F_m\left(\frac{L_p}{L_m}\right)^2\left(\frac{\rho_p}{\rho_m}\right)\left(\frac{V_p}{V_m}\right)^2$ .... (1)

En el cual: $F_m = 1.4\ Kg$; $V_p = 8\ Km/h$; $V_m = 258\ Km/h$:

$$\frac{L_p}{L_m} = 3$$

Reemplazando estos y demás datos en (1):

$$F_p = 1.4(3)^2\left(\frac{1.030}{1.275}\right)\left(\frac{8}{258}\right)^2 = 9.77$$

$$\boxed{F_p = 9.77\ Kg.}$$

5.20. Un barco de 100 m de longitud debe navegar a la velocidad de 10 *m/s*.

a) ¿Cuál deberá ser la velocidad correspondiente para un modelo de 4 m. de longitud, si dicho barco navegará en agua de mar de viscosidad igual a 1.2 *centipoises* y de peso específico igual a 64 lb/pie^3 .?

b) ¿Cuál deberá ser la viscosidad cinemática del fluido empleado para el modelo a fin de que su número de Reynolds, así como su número de Froude sean iguales a los del prototipo?

Resolución:

a) En este caso las fuerzas predominantes son la inercia y la gravedad por lo tanto igualaremos N° de Froude en modelo y prototipo

$$\frac{V_m^2}{g.L_m} = \frac{V_p}{g.L_p} \quad \Rightarrow \quad V_m = V_p\sqrt{\frac{L_m}{L_p}}$$

En el cual:

$V_p = 10\ m/s$
$L_m = 1\ m.$
$L_p = 100\ m.$

$$V_m = 10\sqrt{\frac{4}{100}} = \frac{10}{5}$$

$$\boxed{V_m = 2.00\ m/s}$$

b) Parar este caso predominan la inercia y la viscosidad, por lo que el número de Reynolds en modelo y prototipo serán iguales:

Teniendo presente que: $\upsilon = \frac{\mu}{\rho}$ = *viscosidad cinemática*

$$\frac{V_m.L_m}{\upsilon_m} = \frac{V_p.L_p}{\mu_p}.\rho_p$$

Despejando la incógnita: $\upsilon = \frac{V_m L_m \mu_p}{V_p L_p \rho_p}$

Donde : $V_m = 2\ m/s$
$V_p = 10\ m/s$; $\mu_p = 1.2$ *centipoises*
$L_m = 4\ m$
$L_p = 100\ m$; $\rho_p = 64\ lbs/pie^3 = 1.025\ g/cm^3$

$$\upsilon_m = \frac{2*4*1.2}{10*100*1.025} = 9.38*10^{-3}$$

$$\boxed{\upsilon_m = 9.38*10^{-3}\ centistokes}$$

5.21. Ciertas operaciones en la elaboración de productos químicos requieren el flujo de líquidos en una lámina delgada y uniforme sobre una plancha inclinada de vidrio. Si el numero de Reynolds excede el valor límite de 500, pueden presentarse turbulencias, y si el número de Froude excede de 2, se pueden formar ondas superficiales.

Determine el máximo gasto por unidad de ancho de la plancha para un líquido que tiene viscosidad de $2.83x10^{-4}$ ***Kg-s/m²*** y una gravedad específica de 1.2 ¿Con que velocidad fluye?

Resolución:

Para que el gasto sea máximo, se debe tener: *N° Reynolds* = 500
N° Froude = 2

Es decir: $\frac{\rho.v.L}{\mu} = 500$ donde: $\rho = 1.2*1000 = 1200\ Kg/m^3$
$\mu = 2.83x10^{-4}\ Kg-s/m^2$

Luego: $V.L = 500.\frac{\mu}{\rho} = 500.\frac{2.83*10^{-4}}{1200}g = 500.\frac{2.83*10^{-4}*9.8}{1200}$

$V.L = 11.6*10^{-4}\ m^2/s$ ....(1)

$\frac{V^2}{g.L} = 2 \qquad \frac{V^2}{L} = 2.g = 19.6$ .... (2)

Multiplicando (1) con (2): $V^3 = 11.6x10^{-4}$ x $19.6 = 0.0227$

$\therefore \boxed{V = 0.283\ m/s}$

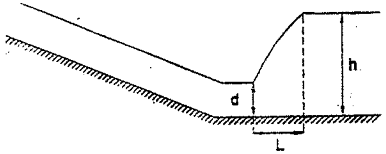
El gasto por unidad de ancho, será: $Q = V.L$ .... (3)

Apreciando (1) con (3), se ve que no hay necesidad de hallar L, pues el gasto sería la expresión (1):

$$Q = 11.6 X 10^{-4}\ \frac{m^3/s}{m} \quad \rightarrow \quad \boxed{Q = 11.6\ \frac{cm^3/s}{cm}}$$

5.22. Determinar la relación entre "h" y "L" para el salto hidráulico que se producirá al pie de una represa si el tirante de agua "d" anterior al salto ha de ser 0.35 m y la velocidad 2.5 m/s. Para hacer esta determinación se indica a continuación las características de diferentes saltos hidráulicos observados:

	Tirante "d_m"	m/s	Tirante "h_m"	L_m
SALTO N° 1	0.80	2.80	2.60	11.20
SALTO N° 2	0.25	1.89	1.96	7.65
SALTO N° 3	0.83	3.15	3.20	12.70
SALTO N° 4	0.38	2.61	2.17	9.86



Resolución:

En cambios bruscos y resaltos hidráulicos se cumple el Número de Froude porque las fuerzas predominantes son la inercia y gravedad:

$$N°\ Froude = \frac{V^2}{g.L}$$

Ahora se calculará el Número de Froude para los saltos 1, 2, 3, 4, como también para el salto dado. En los saltos donde su Número de Froude coincida, habrá similitud hidráulica:

Para el salto dado:

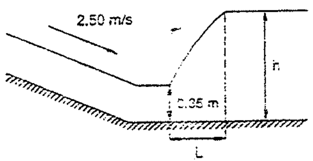
$$N°\ F = \frac{(2.5)^2}{9.8x0.35} = 1.82$$

$$N°\ F_1 = \frac{(2.80)^2}{9.8x0.80} = 1.00$$

$$N°\ F_2 = \frac{(1.89)^2}{9.8x0.25} = 1.47$$

$$N°\ F_3 = \frac{(3.15)^2}{9.8x0.83} = 1.22$$

$$N°\ F_4 = \frac{(2.61)^2}{9.8x0.38} = 1.82$$



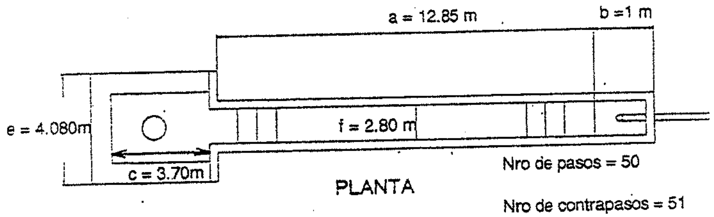
De lo que se deduce que hay similitud hidráulica entre el salto dado con el salto N° 4.

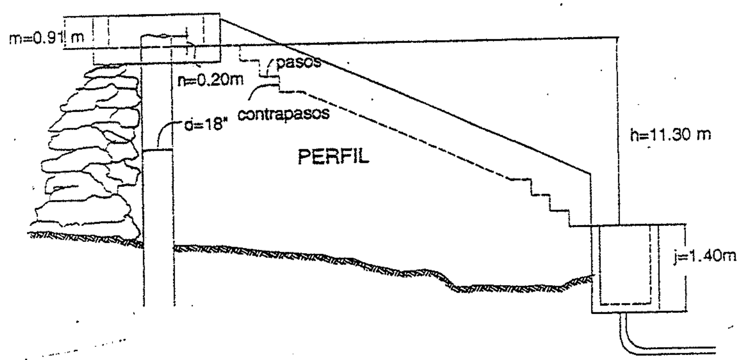
Luego, la relación pedida será la misma que la del salto N° 4, por ser figuras semejantes:

$$\frac{h}{L} = \frac{2.17}{9.86} \qquad \boxed{\frac{h}{L} = \frac{0.22}{1}}$$

5.23. En la planta de tratamiento de la ciudad de Arequipa existe un aereador del tipo de gradas, de las dimensiones mostradas en la figura. Se quiere construir un modelo hidráulico para estudiar su eficiencia en el laboratorio.

El gasto que fluye en el prototipo es 300 l/s. Escoger una escala, diseñar el modelo y determinar todas las escalas necesarias para la investigación. ¿Cuál será el gasto del modelo?





Resolución:

Para el problema propuesto, designaremos un diámetro de 2" para el modelo.

La escala de longitud será: $L_r = \dfrac{L_m}{L_p} = \dfrac{2"}{18"} = \dfrac{1}{9}$

Entonces, las dimensiones del modelo serán 9 veces menores que las de la figura.

O sea:

	a	b	c	d	e	f	h	j	m	n
PROTOTIPO	12.85	1.00	3.70	18"	4.80	2.80	11.30	1.40	0.91	0.20
MODELO	1.43	0.111	0.41	2"	0.53	0.331	1.255	0.155	0.101	0.022

N° de pasos = 50 ; N° de contrapasos = 51

Con estas medidas del modelo, ya se puede diseñar el modelo.

Calculo del gasto que circula:

Como el líquido está sometido a una caída, las fuerzas dominantes son la inercia y la gravedad, por lo que debe haber igualdad de N° de Froude en modelo y prototipo:

$$\frac{V_m^2}{g.L_m} = \frac{V_p^2}{g.L_p} \quad \Rightarrow \quad \frac{V_m^2}{L_m} = \frac{V_p^2}{L_p}$$

Multiplicando y dividiendo ambos miembros por su área al cuadrado:

$$\frac{V_m^2.A_m^2}{L_m.A_m^2} = \frac{V_p^2.A_p^2}{L_p.A_p^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{Q_m^2}{L_m.L_m^4} = \frac{Q_p^2}{L_p.L_p^4}$$

Despejando la incógnita:

$$Q_m = Q_p\left(\frac{L_m}{L_p}\right)^{5/2}$$

donde: $\dfrac{L_m}{L_p} = \dfrac{1}{9}$ $\quad\therefore\quad Q_m = 300\left(\dfrac{1}{9}\right)^{\frac{5}{2}}$

$$\boxed{Q_m = 1.235\, l/s}$$

PROBLEMA SUPLEMENTARIO

1. Suponiendo que el empuje F de una hélice propulsora depende de su diámetro "D", de la velocidad de avance "V", la masa volumétrica del fluido "ρ", el número de revoluciones por segundo "n" y del coeficiente de viscosidad "μ", mostrar que puede expresarse como:

$$F = \rho\, D^2 V^2 \phi\left\{\frac{\mu}{\rho D V}, \frac{D n}{V}\right\}$$

Resolución:

F depende de: D, V, ρ, n, μ

$$\Rightarrow \quad F = F(D, V, \rho, n, \mu)$$

Por lo tanto: $F = \sum_i K_i\, D^a V^b \rho^c n^d \mu^e$ ....(1)

K_i = *constante adimensional*

Dimensionalmente:
$$F = M\,LT^{-2}$$
$$D = L$$
$$V = LT^{-1}$$
$$\rho = M\,L^{-3}$$
$$n = T^{-1}$$
$$\mu = M\,L^{-1}T^{-1}$$

Como cada término de la sumatoria en (1) tiene las mismas dimensiones, puedo utilizar sólo uno:

$$\Rightarrow \quad M\,LT^{-2} = L^a\left(L^b T^{-b}\right)M^c T^{-3c}\,T^{-d}\,M^e L^{-e} T^{-e}$$

para M: $1 = c + e$

para L: $1 = a + b - 3c - e$

para T: $-2 = -b - d - e$

a, b, c en función de d, e:
$$a = 2 - e - d$$
$$b = -e + 2 - d$$
$$c = 1 - e$$

En (1): $$F = \sum_i K_i\, D^{2-e-d} V^{-e+2-d} \rho^{1-e} n^d \mu^e = \sum_i D^2 \rho V^2 K_i\left(\frac{\mu}{\rho D V}\right)^e\left(\frac{D n}{V}\right)^d$$

$$F = D^2 \rho V^2 \sum_i K_i\left(\frac{\mu}{\rho D V}\right)^e\left(\frac{D n}{V}\right)^d$$

Si: $\phi = \sum_i K_i\left(\dfrac{\mu}{\rho D V}\right)^e\left(\dfrac{D n}{V}\right)^d = \phi\left\{\dfrac{\mu}{\rho D V}, \dfrac{D n}{V}\right\} \quad \Rightarrow \quad \boxed{F = \rho\, D^2 V^2 \phi\left\{\dfrac{\mu}{\rho D V}, \dfrac{D n}{V}\right\}}$

BIBLIOGRAFÍA

Mc. Donald. Robert Fox: "**Introducción a la Mecánica de Fluidos**", Ed. Interamericana, 1986.

Nekrasov, Fabricant y Kocherguin: "**Problemas de Hidráulica**", Editorial MIR, 1972.

Witteebauer. F.: "**Problemas de Mecánica General y Aplicada**", Tomo III. Editorial LABOR. Barcelona – Madrid.

Feynman, leighton. Sands: "**The Feynman Lectures on Physics**", Editorial Addison. Wesley. 1964.

Giles, Ronald V.: "**Theory and Problems of Hydraulic and Fluid Mechanics**", Shaum, Mc. Graw Hill, 1956.

Hughes, William: "**Dinámica de Fluidos**", Colección Schaum, Mc. Graw Hill 1970.

Sotelo Avila, Gilberto: "**Hidráulica General**", Vol. 1: Fundamentos, Editorial Limusa, 1981. México.

Streeter, Víctor: "**Fluid Mechanics**", Mc. Graw Hill, 1954.

PRÁCTICAS Y EXÁMENES tomados en la U.N.I.

Apuntes de Clase del curso "**Mecánica de Fluidos I**" dados en la U.N.I. por el Profesor Antonio Salvá. 1980.