

RESISTENCIA DE MATERIALES II

PRACTICAS Y EXAMENES USMP

Ph.D. Genner Villarreal Castro

PREMIO NACIONAL ANR 2006, 2007, 2008

Lima – Perú

2013

La Resistencia de Materiales, es una ciencia sobre los métodos de cálculo a la resistencia, la rigidez y la estabilidad de los elementos estructurales. Se entiende por *resistencia* a la capacidad de oponerse a la rotura, *rigidez* a la capacidad de oponerse a la deformación y *estabilidad* a la capacidad de mantener su condición original de equilibrio.

Por lo general, el dictado de los cursos de Resistencia de Materiales, se centran, en la descripción teórica y en la resolución de un escaso número de problemas, lo cual dificulta el proceso de aprendizaje, más aún tratándose de un curso eminentemente práctico y con una diversidad de problemas.

El presente libro nació, después de comprobar las grandes dificultades mostradas por los alumnos en la resolución de problemas aplicados en prácticas calificadas y exámenes, así como en la realización de sus trabajos domiciliarios.

Es por ello, que tomé el reto de escribir un libro, que haga más didáctico el proceso de estudio individual, resolviendo en forma seria y con el rigor científico todas las prácticas calificadas y exámenes aplicados por el autor en el período 2008-II al 2010-II, correspondiente al curso Resistencia de Materiales II dictado en la Escuela de Ingeniería Civil de la Universidad de San Martín de Porres, propiciando, de esta manera, una forma más amena de convivencia con la Resistencia de Materiales y conducente a un mejor dominio de la materia.

Este libro es un complemento perfecto a los editados anteriormente por el autor, denominados Resistencia de Materiales y Resistencia de Materiales I Prácticas y Exámenes USMP, los cuales se usan como textos base en las Carreras de Ingeniería Civil de muchas Universidades nacionales y extranjeras, así como en Centros de Investigación en Ingeniería Estructural.

Como base se tomó la experiencia adquirida en el dictado de los cursos de Mecánica de Materiales, Resistencia de Materiales y Análisis Estructural en la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas, Universidad de San Martín de Porres y Universidad Privada Antenor Orrego.

En mi modesta opinión, el presente libro es único en su género, tanto en la forma de resolución de problemas; como en su contenido, que no es una repetición de otros textos, editados anteriormente.

El presente libro consta de 4 Prácticas Calificadas, Examen Parcial y Examen Final por cada ciclo, siendo un total de 5 ciclos.

En la Práctica Calificada N° 1 se evalúa el tema trabajo virtual.

En la Práctica Calificada N° 2 se evalúan los temas energía de deformación, teoremas de Castigliano y ecuación de los tres momentos.

En el Examen Parcial se evalúan los temas trabajo virtual, energía de deformación, teoremas de Castigliano y ecuación de los tres momentos.

En la Práctica Calificada N° 3 se evalúa el tema método de las fuerzas.

En la Práctica Calificada N° 4 se evalúa el tema método de desplazamientos.

En el Examen Final se evalúan los temas método de las fuerzas, método de desplazamientos, resistencia compuesta y cargas de impacto.

El presente texto está dirigido a estudiantes de ingeniería civil y docentes que imparten el curso Resistencia de Materiales II; así como, a ingenieros civiles, postgraduandos e investigadores en el área de estructuras.

Este libro se lo dedico a mis alumnos de Mecánica de Materiales, Resistencia de Materiales y Análisis Estructural de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas, Universidad de San Martín de Porres y

Universidad Privada Antenor Orrego; quienes con sus consultas me motivaron a escribir el presente libro y con su energía renovada me permitieron culminar con éxito este trabajo.

De manera muy especial, dedico el presente libro a mi ahijada Chie Giulianna Villarreal Imamura, quien con su inteligencia, amor y dulzura, fue un soporte invaluable en la culminación de este trabajo, rogando a Dios Todopoderoso podamos seguir juntos aportando al desarrollo integral de la sociedad.

Ph.D. Genner Villarreal Castro

genner_vc@rambler.ru

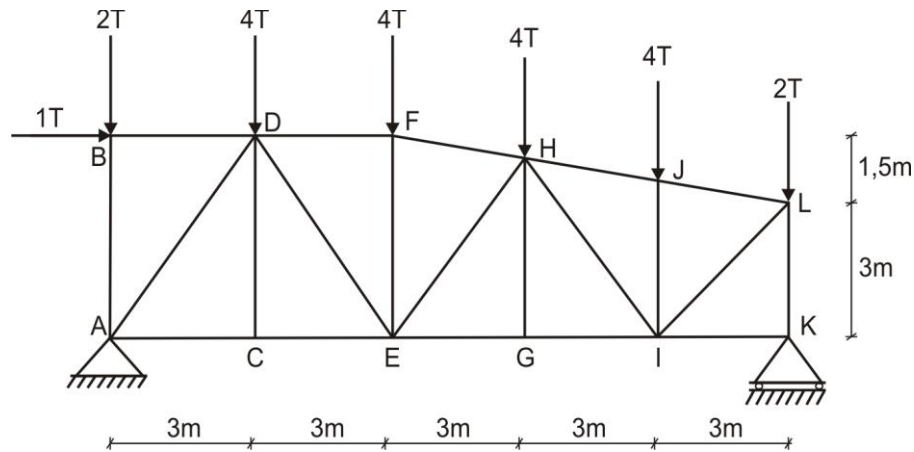
Lima, Marzo del 2013



EVALUACIÓN	PRACTICA CALIFICADA N° 1	SEM. ACADÉMICO	2008 – II
CURSO	RESISTENCIA DE MATERIALES II	SECCIÓN	30F
PROFESOR	Ph.D. GENNER VILLARREAL CASTRO	DURACIÓN	110m
ESCUELA	INGENIERIA CIVIL	CICLO	VI

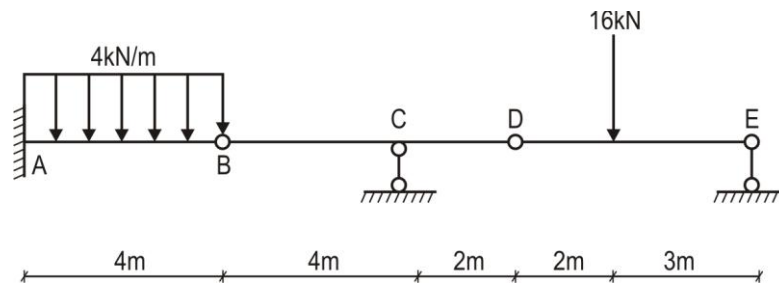
1. METODO DEL TRABAJO VIRTUAL. Determinar el desplazamiento horizontal en B y el desplazamiento vertical en E, si las áreas de sección transversal de las barras del cordón superior es de 4cm^2 , del cordón inferior es 5cm^2 , de las montantes 6cm^2 y de las diagonales 3cm^2 . Considerar que el material de la armadura es acero con un módulo de elasticidad $E = 2,1 \cdot 10^7 \text{T/m}^2$

..... (6 puntos)



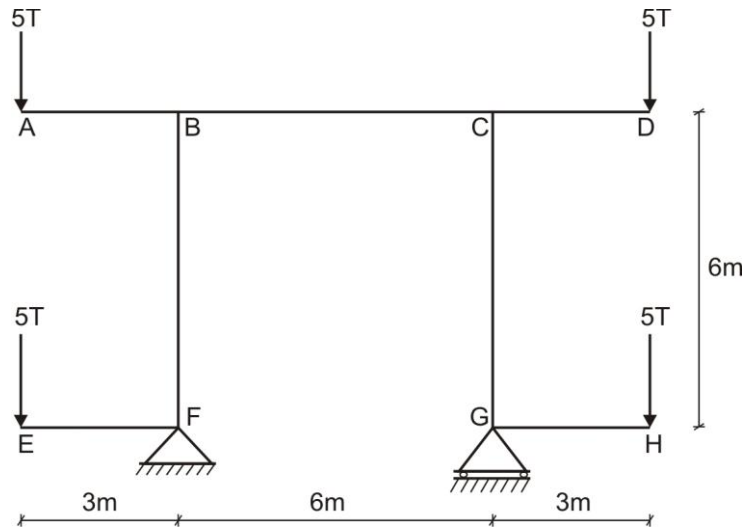
2. METODO DEL TRABAJO VIRTUAL. Determinar la pendiente en el apoyo C de la viga mostrada en la figura, si $EI = \text{const}$ para toda la estructura. Considerar sólo el efecto de flexión por momento flector.

..... (4 puntos)



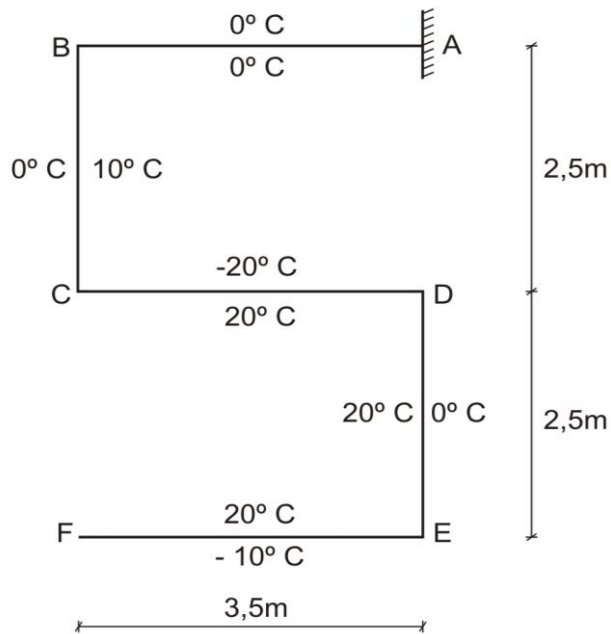
3. METODO DEL TRABAJO VIRTUAL. Para el pórtico mostrado en la figura, determinar el desplazamiento vertical y la pendiente en H, considerando sólo la flexión por momento flector y que la rigidez $EI = 12663\text{T.m}^2$ es la misma para toda la estructura.

..... (6 puntos)



4. METODO DEL TRABAJO VIRTUAL. Determinar el desplazamiento horizontal del punto F del pórtico en voladizo mostrado en la figura. Expresar su respuesta en función del coeficiente de dilatación térmica α y considerar que la sección transversal es rectangular con dimensiones $a = 0,4\text{m}$ y $b = 0,5\text{m}$ para todo el pórtico.

..... (4 puntos)

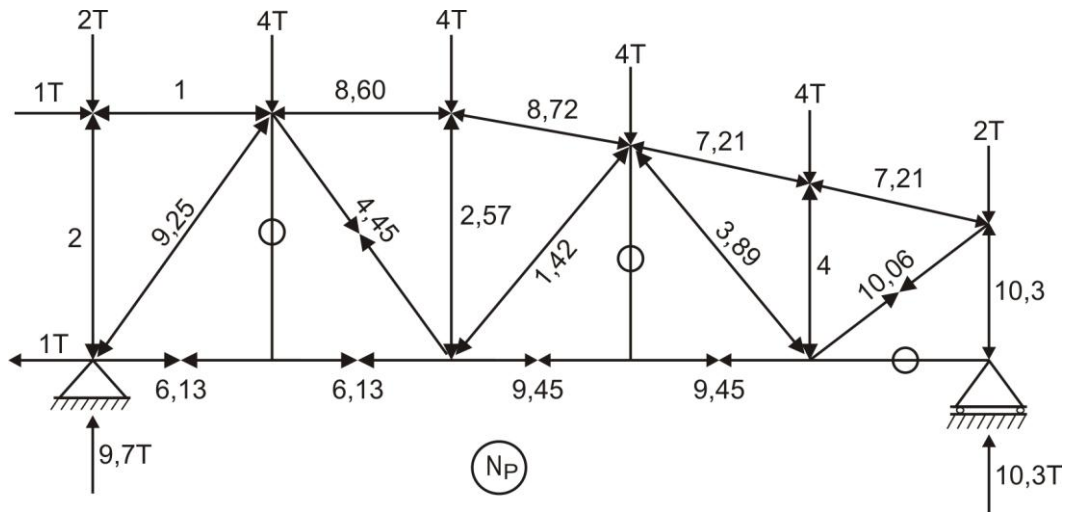


FECHA	La Molina, 25 de Agosto del 2008
-------	----------------------------------

SOLUCIONARIO DE PRÁCTICA CALIFICADA Nº 1

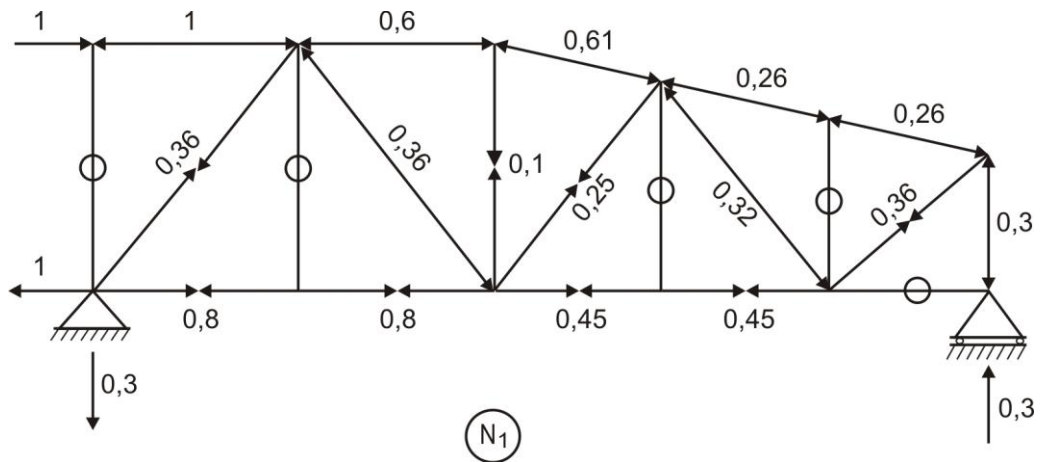
CICLO 2008 – II

- Determinamos las fuerzas internas en cada una de las barras de la armadura, sometida a la acción de las cargas externas, tal como se muestra en la figura, utilizando, para ello, los métodos conocidos de la Estática.



DESPLAZAMIENTO HORIZONTAL EN "B":

Determinamos las fuerzas internas en cada barra de la armadura, pero sometida a la acción de la carga unitaria aplicada en el nudo B en sentido horizontal.



Calculamos las rigideces axiales en las barras, de acuerdo a los valores dados en el presente problema, siendo estos los siguientes:

Diagonales $EA_3 = 6300T$

Cordón superior $EA_4 = 8400T$

Cordón inferior $EA_5 = 10500T$

Montantes $EA_6 = 12600T$

Luego, determinamos el desplazamiento horizontal en el nudo B aplicando la fórmula conocida del trabajo virtual para armaduras, utilizando, para ello, los diagramas N_1 y N_p

$$\delta_H^B = \frac{1}{EA_3} [-9,25 \cdot 0,36 \cdot 5,41 - 4,45 \cdot 0,36 \cdot 5,41 - 1,42 \cdot 0,25 \cdot 5 + 3,89 \cdot 0,32 \cdot 5 + 10,06 \cdot 0,36 \cdot 4,24] +$$

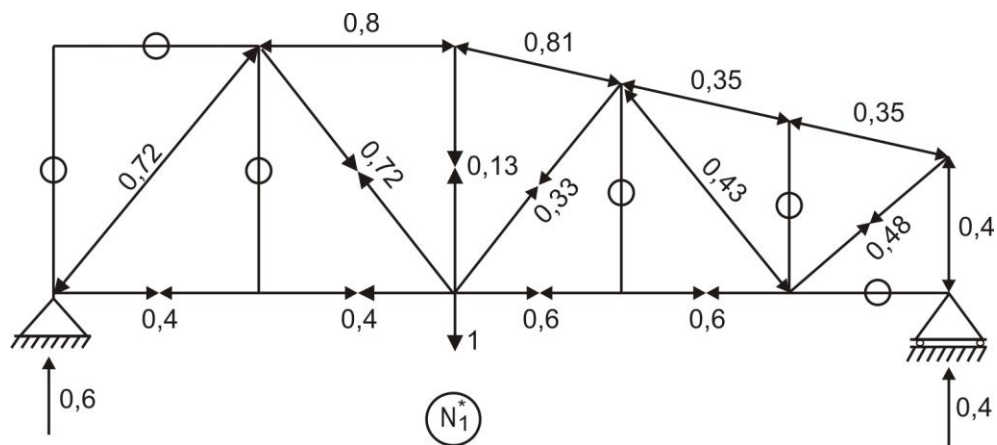
$$+ \frac{1}{EA_4} [1 \cdot 1 \cdot 3 + 8,6 \cdot 0,6 \cdot 3 + 8,72 \cdot 0,61 \cdot 3,04 + 7,21 \cdot 0,26 \cdot 3,04 + 7,21 \cdot 0,26 \cdot 3,04] +$$

$$+ \frac{1}{EA_5} [6,13 \cdot 0,8 \cdot 3 + 6,13 \cdot 0,8 \cdot 3 + 9,45 \cdot 0,45 \cdot 3 + 9,45 \cdot 0,45 \cdot 3] + \frac{1}{EA_6} [-2,57 \cdot 0,1 \cdot 4,5 + 10,3 \cdot 0,3 \cdot 3]$$

$$\delta_H^B = 10,29 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 10,29 \text{ mm} \rightarrow$$

DESPLAZAMIENTO VERTICAL EN "E":

Determinamos las fuerzas internas en cada barra de la armadura, pero sometida a la acción de la carga unitaria aplicada en el nudo E en sentido vertical.



Luego, determinamos el desplazamiento vertical en el nudo E aplicando la fórmula del trabajo virtual para armaduras, utilizando los diagramas N_1^* y N_p

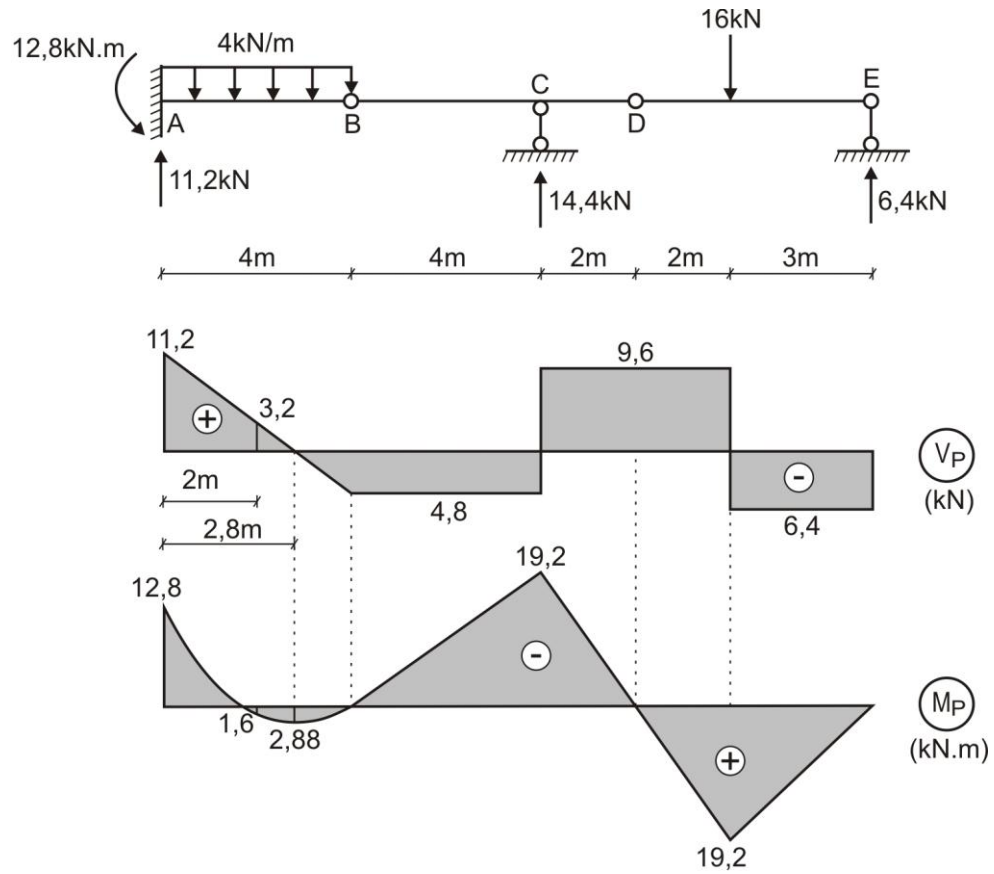
$$\delta_V^E = \frac{1}{EA_3} [9,25 \cdot 0,72 \cdot 5,41 + 4,45 \cdot 0,72 \cdot 5,41 - 1,42 \cdot 0,33 \cdot 5 + 3,89 \cdot 0,43 \cdot 5 + 10,06 \cdot 0,48 \cdot 4,24] +$$

$$+ \frac{1}{EA_4} [8,6 \cdot 0,8 \cdot 3 + 8,72 \cdot 0,81 \cdot 3,04 + 7,21 \cdot 0,35 \cdot 3,04 + 7,21 \cdot 0,35 \cdot 3,04] +$$

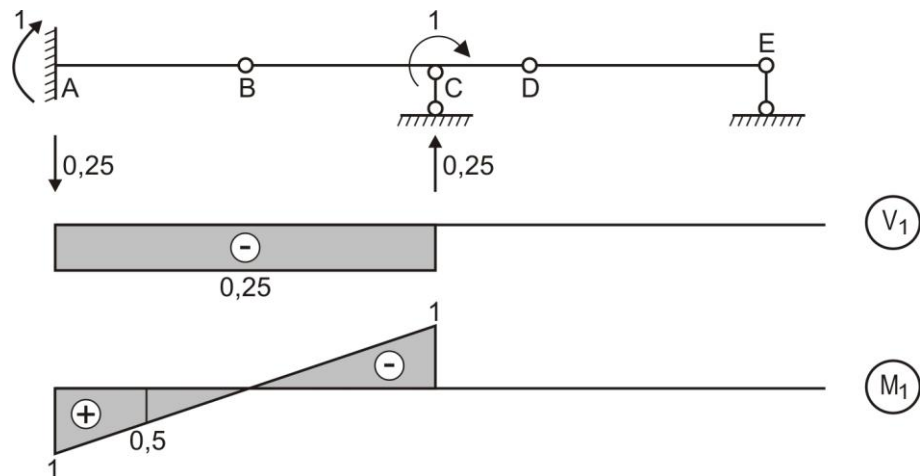
$$+ \frac{1}{EA_5} [6,13 \cdot 0,4 \cdot 3 + 6,13 \cdot 0,4 \cdot 3 + 9,45 \cdot 0,6 \cdot 3 + 9,45 \cdot 0,6 \cdot 3] + \frac{1}{EA_6} [-2,57 \cdot 0,13 \cdot 4,5 + 10,3 \cdot 0,4 \cdot 3]$$

$$\delta_V^E = 25,05 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 25,05 \text{ mm} \downarrow$$

2. Graficamos los diagramas de fuerza cortante y momento flector debido a la carga real, calculando previamente las reacciones en los apoyos, de acuerdo a los conocimientos de Estática. Las reacciones y diagramas de fuerzas internas se muestran en la siguiente figura.



Ahora, graficamos los diagramas de fuerza cortante y momento flector para el caso del momento unitario aplicado en C

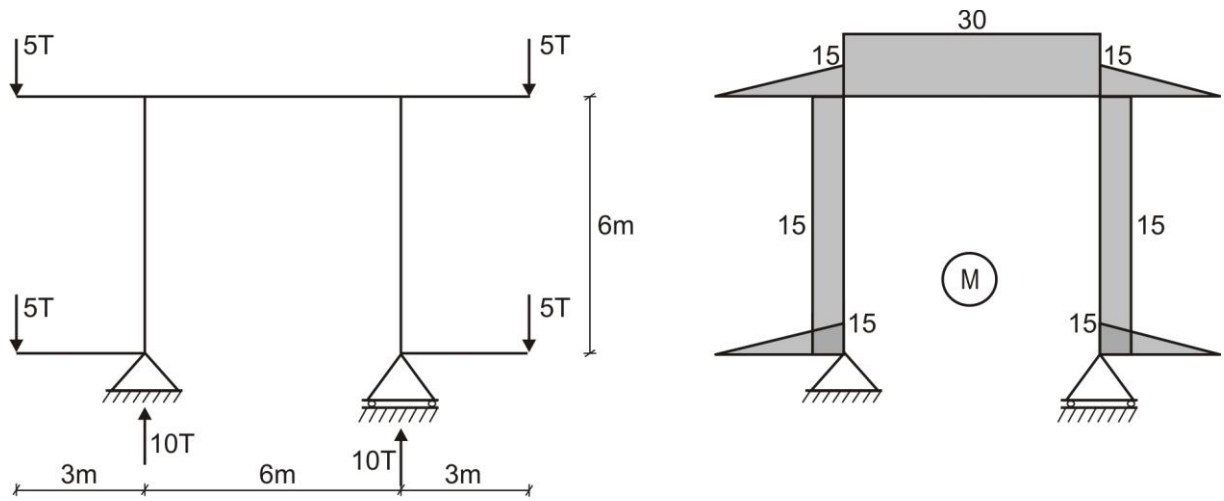


En el tramo AB aplicamos Simpson-Kornoujov y en el tramo BC Vereschaguin, utilizando los diagramas M_1 y M_p

$$\theta_c = \frac{4}{6EI} [-12,8 \cdot 1 + 4 \cdot 1,6 \cdot 0,5] + \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 19,2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{19,2}{EI}$$

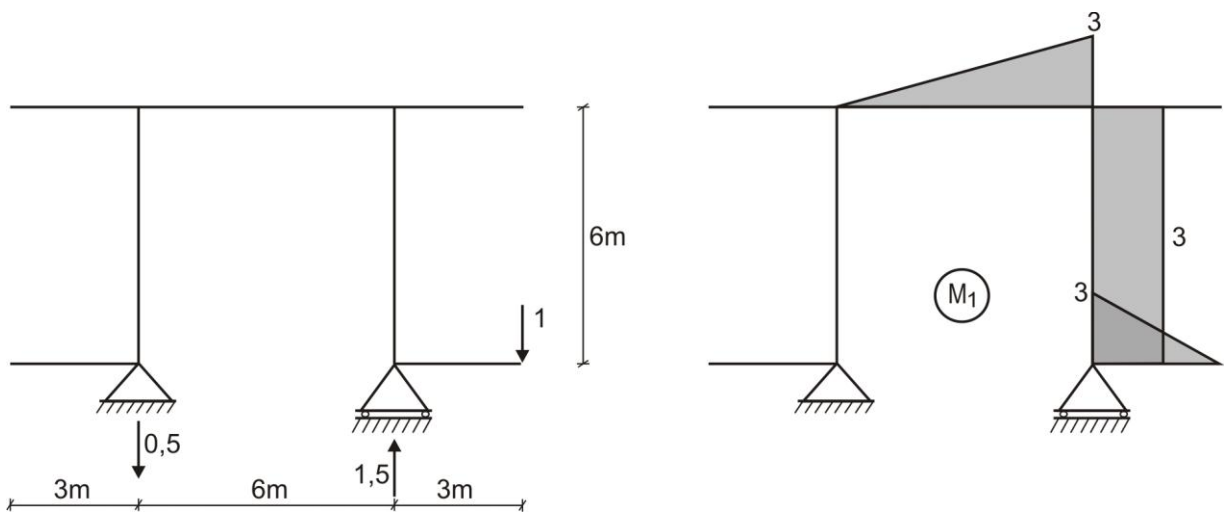
Como el signo es positivo, indica que la pendiente en C va orientada en sentido horario.

3. Graficamos el diagrama de momento flector, debido a la acción de las cargas reales aplicadas al pórtico, tal como se muestra en la siguiente figura:



DESPLAZAMIENTO VERTICAL EN "H":

Ahora, graficamos el diagrama de momento flector debido a la acción de la carga unitaria en H

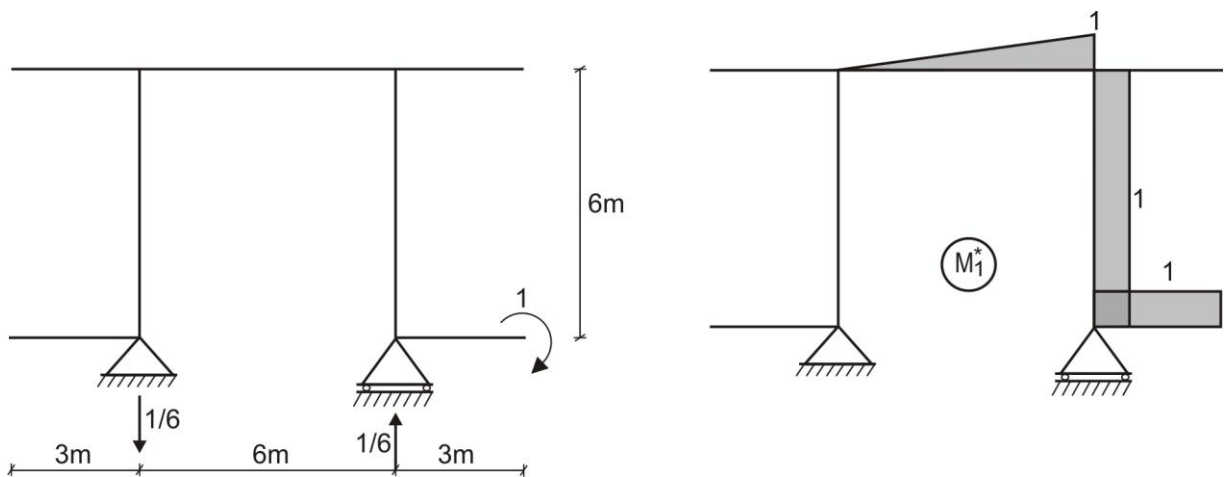


Determinamos el desplazamiento vertical en H, aplicando trabajo virtual.

$$\delta_V^H = \frac{1}{EI} \left[30 \cdot 6 \cdot 1,5 + 15 \cdot 6 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 15 \cdot 2 \right] = \frac{585}{EI} = \frac{585}{12663} = 0,0462\text{m} = 46,2\text{mm} \downarrow$$

PENDIENTE EN "H":

Graficamos el diagrama de momento flector, debido a la acción del momento unitario aplicado en H

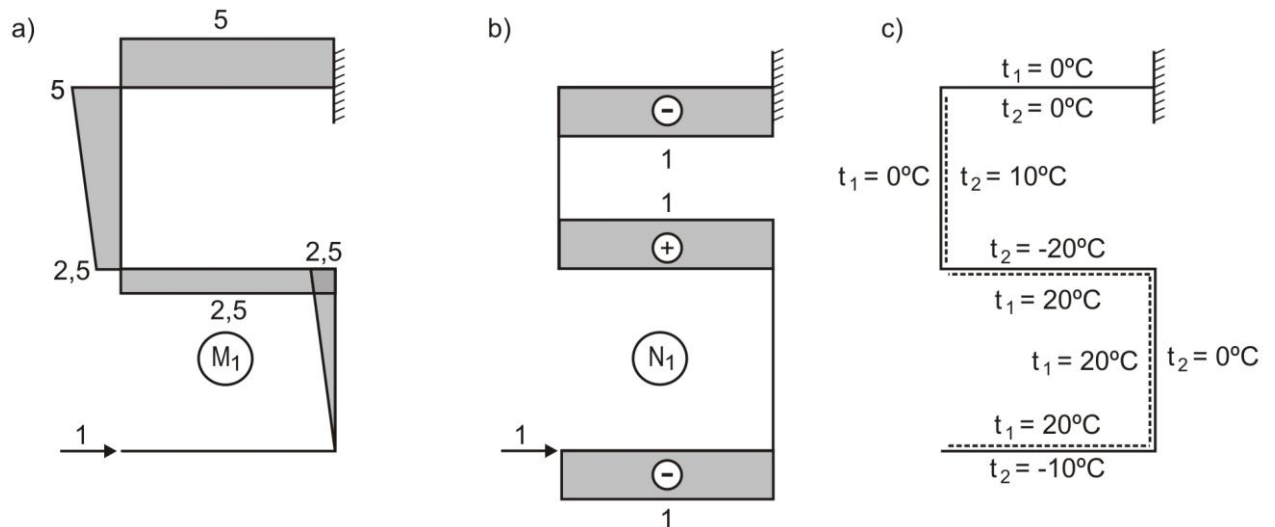


Luego, determinamos la pendiente en H, aplicando trabajo virtual.

$$\theta_H = \frac{1}{EI} \left[30 \cdot 6 \cdot 0,5 + 15 \cdot 6 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 3 \cdot 1 \right] = \frac{202,5}{EI} = \frac{202,5}{12663} = 0,016 \text{ rad} = 0,917^\circ$$

Como el resultado de la pendiente es positivo, indica, que dicha pendiente va en sentido horario.

4. Graficamos los diagramas de momento flector (figura a) y fuerza axial (figura b) debido a la acción de la carga unitaria horizontal aplicado en el punto F



Para determinar el desplazamiento o pendiente, debido a la variación de temperatura, se debe de tener en cuenta las siguientes consideraciones:

- El diagrama de momento flector indica que t_1 va hacia el lado del diagrama y t_2 hacia afuera (figura c)
- Por variación de temperatura, donde existe mayor calor, la fibra ubicada a dicho lado se tracciona y hacia el otro lado se comprime, mostrándose en la figura c) con línea punteada las zonas traccionadas.
- Si coinciden las zonas traccionadas de temperatura con el diagrama de momento flector, será positivo Δ_{iT} debido al momento y si es opuesto, será negativo.
- En caso que no exista diagrama de momento flector, pero si exista fuerza axial, se recomienda colocar t_1 a la temperatura mayor y t_2 a la menor.

Aplicamos trabajo virtual por variación de temperatura, a través de la siguiente fórmula:

$$\Delta_{iT} = \sum \alpha \frac{|t_1 - t_2|}{b} A_{M_i} + \sum \alpha \frac{|t_1 + t_2|}{2} A_{N_i}$$

Donde:

α - coeficiente de dilatación térmica del material

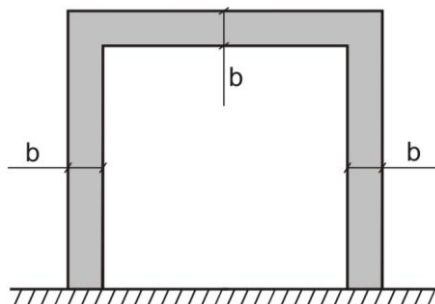
b - ancho de la estructura donde hay variación de temperatura

t_1, t_2 - temperaturas

A_{M_i} - área del diagrama de momento flector debido a la carga o momento unitario

A_{N_i} - área del diagrama de fuerza axial debido a la carga o momento unitario

Para entender el valor de “b”, lo esquematizamos en el siguiente gráfico para un pórtico simple que nos servirá de guía.



En la fórmula, para determinar el área del diagrama de fuerza axial, se considera el signo positivo o negativo, dependiendo de su valor.

Ahora, determinamos el desplazamiento horizontal en F, debido a la variación de temperatura.

$$\Delta_{F(T)}^H = \alpha \frac{|20-0|}{0,5} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2,5 \cdot 2,5 + \alpha \frac{|20-(-20)|}{0,5} \cdot 2,5 \cdot 3,5 - \alpha \frac{|0-10|}{0,5} \cdot \frac{(2,5+5) \cdot 2,5}{2} - \alpha \frac{|20-10|}{2} \cdot 1 \cdot 3,5$$

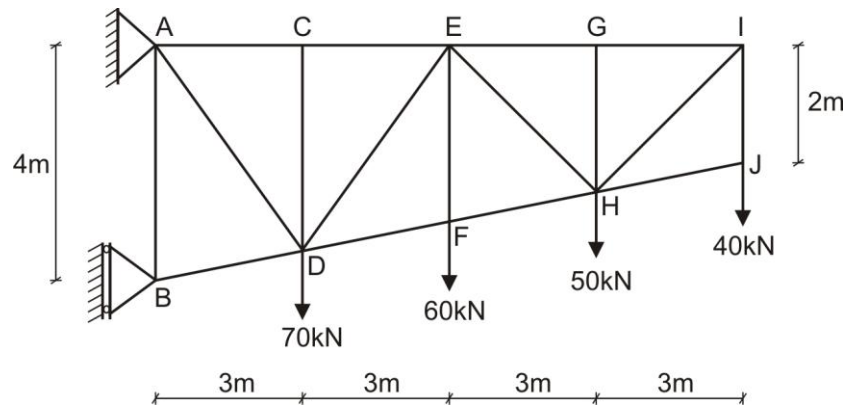
$$\Delta_{F(T)}^H = 620\alpha \rightarrow$$



EVALUACIÓN	PRACTICA CALIFICADA N° 1	SEM. ACADÉMICO	2009 – I
CURSO	RESISTENCIA DE MATERIALES II	SECCIÓN	30F
PROFESOR	Ph.D. GENNER VILLARREAL CASTRO	DURACIÓN	110m
ESCUELA	INGENIERIA CIVIL	CICLO	VI

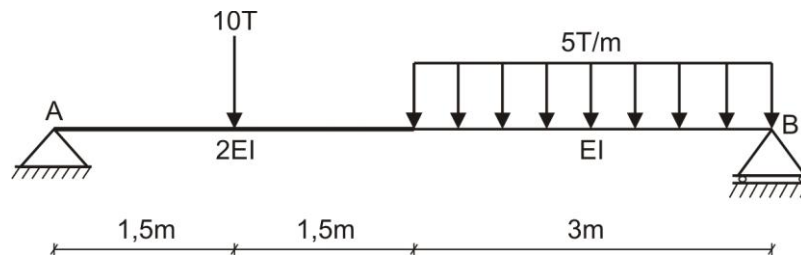
1. METODO DEL TRABAJO VIRTUAL. Determinar el desplazamiento horizontal del nudo J y el desplazamiento vertical del apoyo B, si $E = 2.10^5 \text{ MPa}$ para todas las barras de la armadura y las áreas de las barras del cordón superior es 64cm^2 , las del cordón inferior 60cm^2 , las montantes de 70cm^2 y las diagonales de 66cm^2

..... (6 puntos)



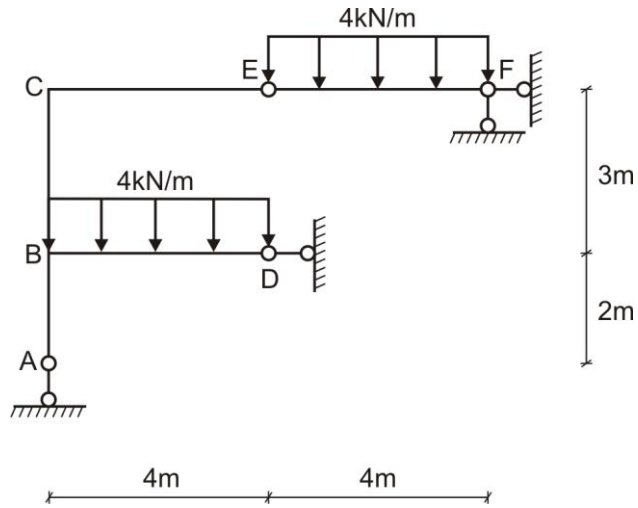
2. METODO DEL TRABAJO VIRTUAL. Determinar la deflexión vertical a 2m a la derecha del apoyo A y la pendiente en el apoyo B. Considerar $E = 15000\sqrt{f'_c}$ e $I = bh^3/12$, siendo $f'_c = 210\text{kg/cm}^2$, $b = 30\text{cm}$, $h = 60\text{cm}$

..... (6 puntos)



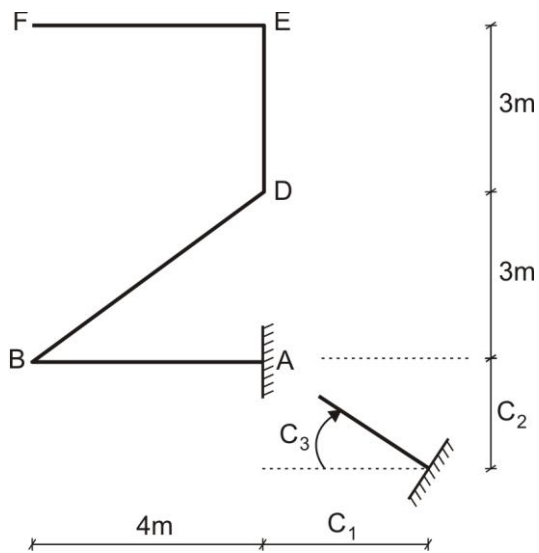
3. METODO DEL TRABAJO VIRTUAL. Determinar el acercamiento vertical de los puntos D y E del pórtico mostrado en la figura, si la rigidez EI es constante para toda la estructura.

..... (5 puntos)



4. METODO DEL TRABAJO VIRTUAL. Determinar el desplazamiento horizontal del nudo F del pórtico en voladizo mostrado en la figura, si $C_1 = 0,03\text{m}$; $C_2 = 0,02\text{m}$ y $C_3 = 0,02\text{rad}$

..... (3 puntos)



FECHA	La Molina, 23 de Marzo del 2009
-------	---------------------------------

SOLUCIONARIO DE PRÁCTICA CALIFICADA Nº 1

CICLO 2009 – I

1. Determinamos las rigideces de las barras de la armadura:

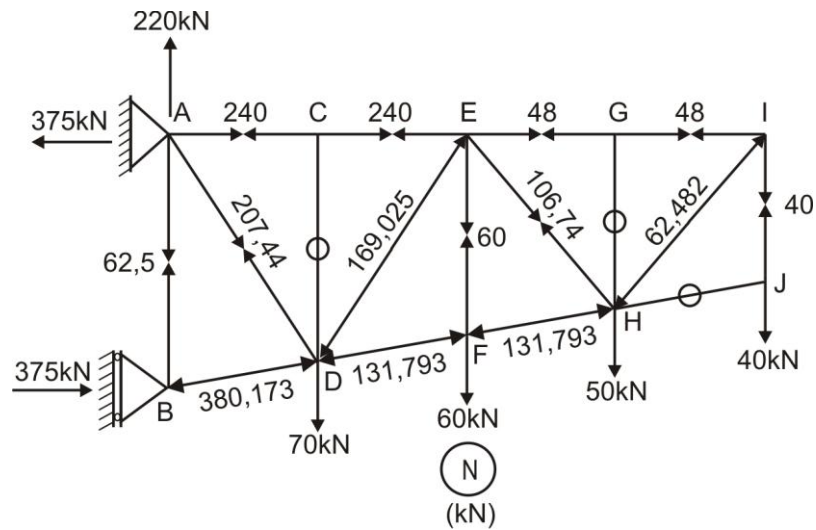
$$EA_{64} = 2.10^5 \cdot 10^6 \cdot 64 \cdot 10^{-4} = 128 \cdot 10^7 \text{ N} = 128 \cdot 10^4 \text{ kN}$$

$$EA_{60} = 2.10^5 \cdot 10^6 \cdot 60 \cdot 10^{-4} = 120 \cdot 10^7 \text{ N} = 120 \cdot 10^4 \text{ kN}$$

$$EA_{70} = 2.10^5 \cdot 10^6 \cdot 70 \cdot 10^{-4} = 140 \cdot 10^7 \text{ N} = 140 \cdot 10^4 \text{ kN}$$

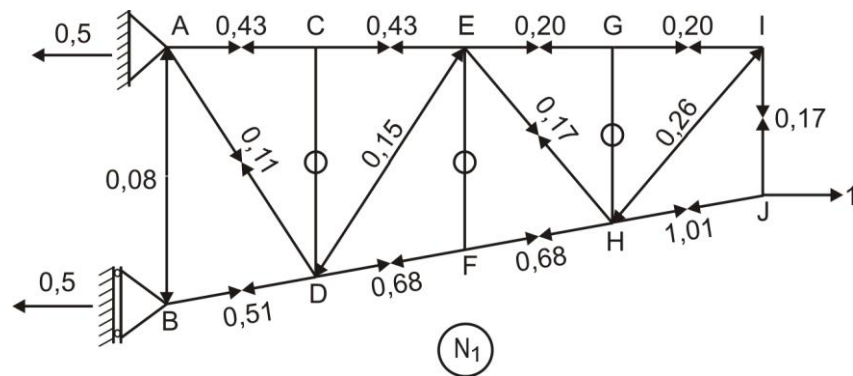
$$EA_{66} = 2.10^5 \cdot 10^6 \cdot 66 \cdot 10^{-4} = 132 \cdot 10^7 \text{ N} = 132 \cdot 10^4 \text{ kN}$$

Calculamos las fuerzas internas en todas las barras de la armadura, debido a la acción de las cargas externas, tal como se muestra en la figura.



DESPLAZAMIENTO HORIZONTAL EN "J":

Determinamos las fuerzas internas en todas las barras de la armadura, producto de la acción de la carga unitaria horizontal aplicada en el nudo J, tal como se muestra en la figura.

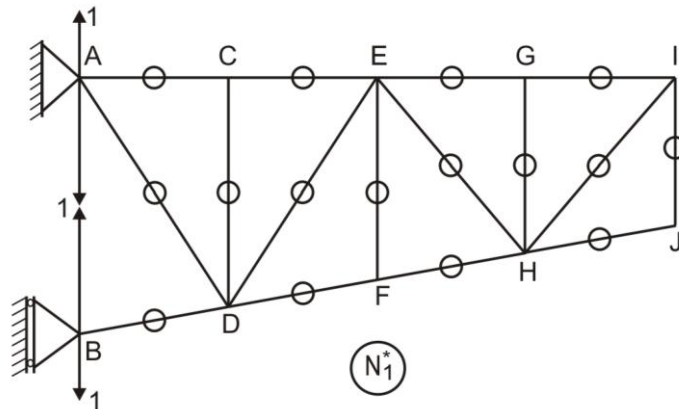


$$\delta_H^J = \frac{1}{128 \cdot 10^4} [240 \cdot 0,43 \cdot 3,2 + 48 \cdot 0,20 \cdot 3,2] + \frac{1}{120 \cdot 10^4} [-380,173 \cdot 0,51 \cdot 3,041 - 131,793 \cdot 0,68 \cdot 3,041 \cdot 2] + \frac{1}{140 \cdot 10^4} [-62,5 \cdot 0,08 \cdot 4 + 40 \cdot 0,17 \cdot 2] + \frac{1}{132 \cdot 10^4} [207,44 \cdot 0,11 \cdot 4,610 + (-169,025)(-0,15) \cdot 4,610 + 106,74 \cdot 0,17 \cdot 3,905 + (-62,482)(-0,26) \cdot 3,905] = -1,514 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

$$\delta_H^J = -0,151\text{mm} \leftarrow$$

DESPLAZAMIENTO VERTICAL EN "B":

Determinamos las fuerzas internas en las barras de la armadura, debido a la acción de la carga unitaria vertical aplicada en el nudo B, tal como se muestra en la figura.



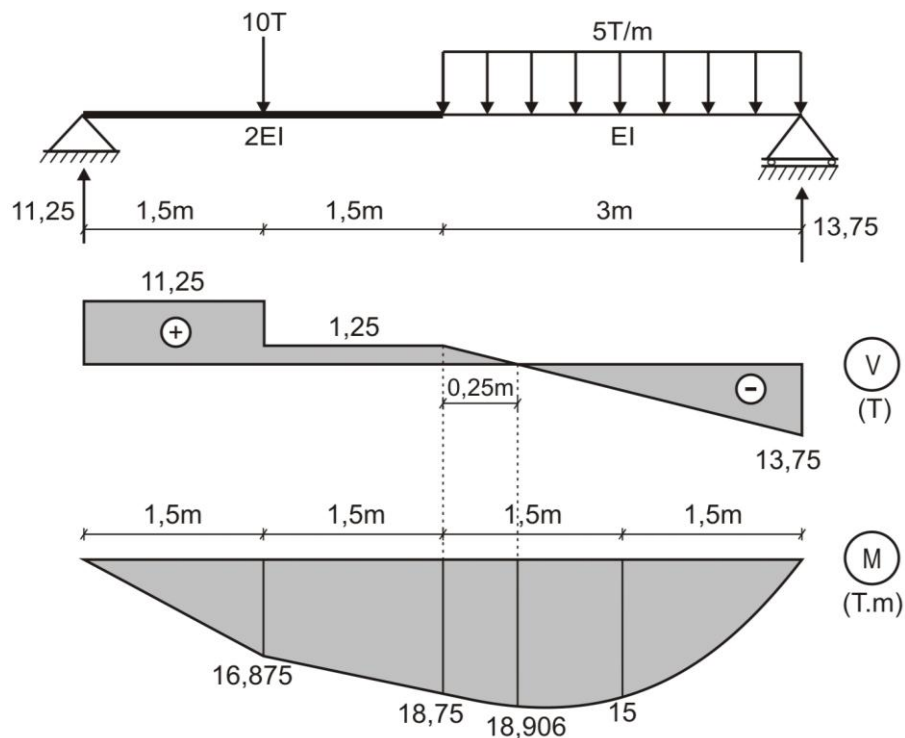
$$\delta_V^B = \frac{1}{140 \cdot 10^4} [62,5 \cdot 1,4] = 1,786 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 0,178 \text{ mm} \downarrow$$

2. Determinamos la rigidez EI, necesaria para el cálculo estructural.

$$E = 15000\sqrt{210} = 217370,65 \text{ kg/cm}^2 = 2173706,5 \text{ T/m}^2$$

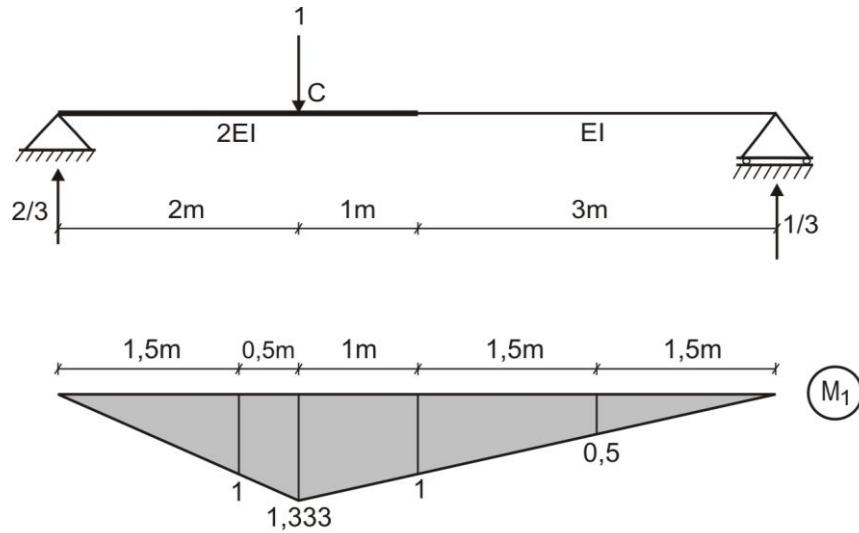
$$EI = 2173706,5 \cdot \frac{0,3 \cdot 0,6^3}{12} = 11738,015 \text{ T.m}^2$$

Graficamos los diagramas de fuerza cortante y momento flector, debido a la acción de las cargas reales, tal como se muestra en la figura.



DESPLAZAMIENTO VERTICAL EN "C":

Ahora, graficamos el diagrama de momento flector, debido a la acción de la carga unitaria vertical en C

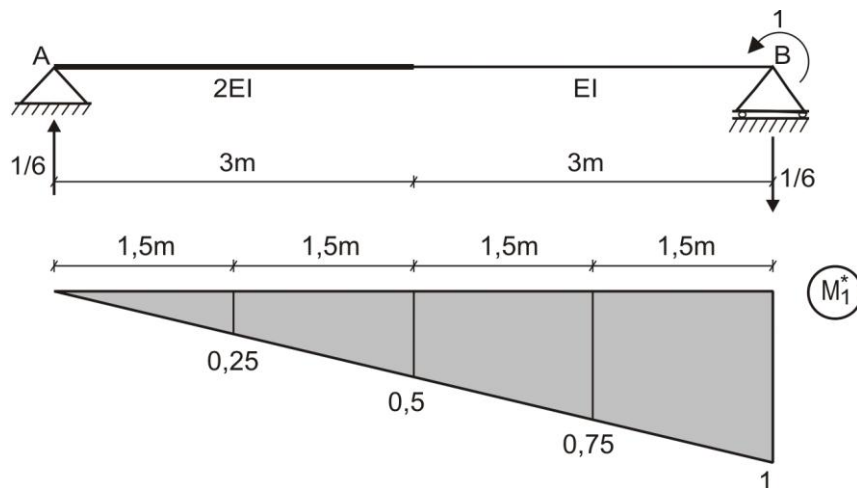


$$\delta_v^C = \frac{3}{6(2EI)} [4.16,875.1 + 18,75.1] + \frac{3}{6EI} [18,75.1 + 4.15.0,5] = \frac{45,9375}{EI} = \frac{45,9375}{11738,015} = 3,91 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$\delta_v^C = 3,91 \text{ mm} \downarrow$$

PENDIENTE EN "B":

Graficamos el diagrama de momento flector debido a la acción del momento unitario aplicado en el apoyo B



$$\theta_B = \frac{3}{6(2EI)} [4.16,875.0,25 + 18,75.0,5] + \frac{3}{6EI} [18,75.0,5 + 4.15.0,75] = \frac{33,75}{EI} = 2,875 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

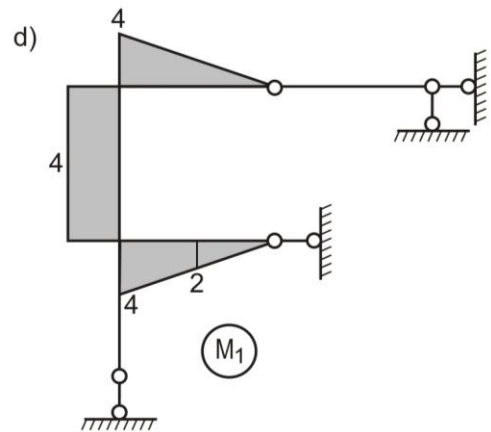
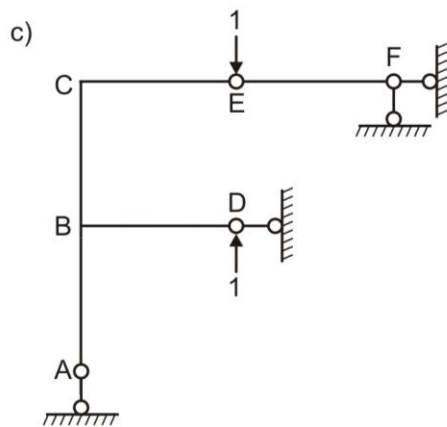
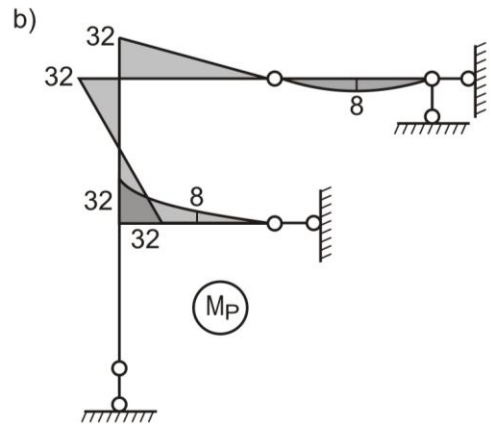
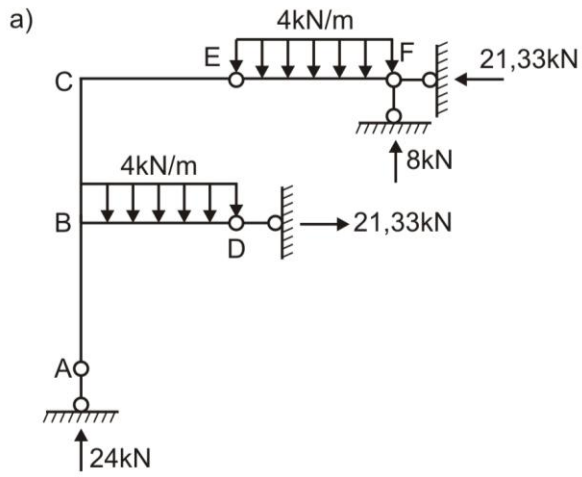
$$\theta_B = 0,165^\circ$$

Como el signo es positivo, indica que la orientación es correcta; es decir va en sentido antihorario.

- Calculamos las reacciones en los apoyos y graficamos el diagrama de momento flector debido a la acción de las cargas reales, tal como se muestra en las figuras a) y b). Luego, efectuamos lo mismo, pero para las cargas unitarias aplicadas en D y E hacia el encuentro, tal como se muestran en las figuras c) y d)

Ahora, determinamos el acercamiento vertical de los nudos D y E

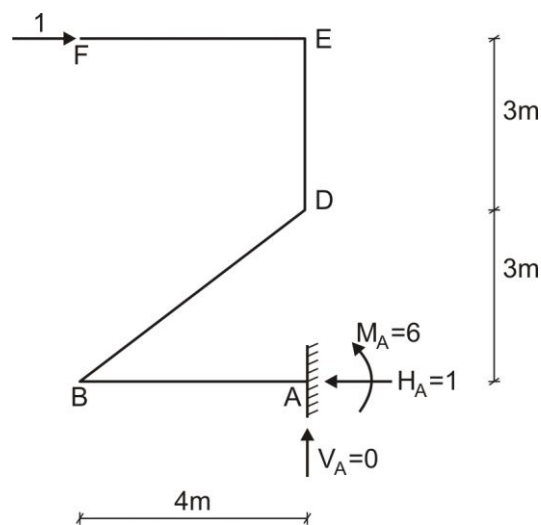
$$\delta_{D-E} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4.32 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{3}{6EI} [32.4 + 4.0.4 - 32.4] - \frac{4}{6EI} [32.4 + 4.8.2 + 0] = \frac{42,667}{EI}$$



4. Se sabe que:

$$\Delta_{iC} = -\sum_{j=1}^n R_{ij} \cdot C_j$$

Calculamos las reacciones en el apoyo A, debido a la acción de la carga unitaria horizontal aplicada en el nudo F



Ahora, determinamos el desplazamiento horizontal en F debido a los desplazamientos y giros en el apoyo A

$$\Delta_H^F = -(-H_A \cdot C_1 - M_A \cdot C_3) = -(-1.0,03 - 6.0,02) = 0,15\text{m} \rightarrow$$



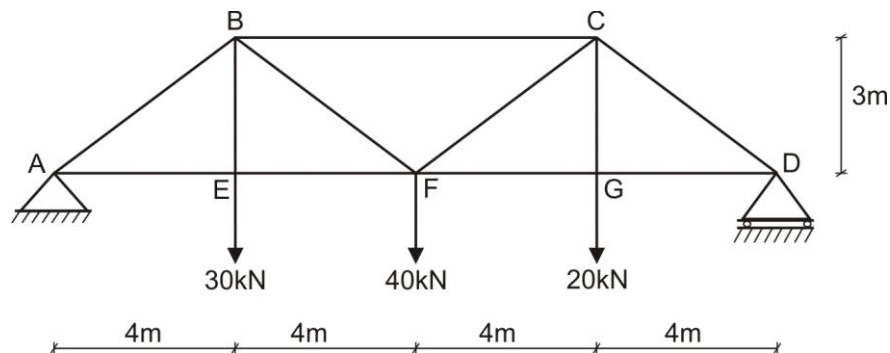
EVALUACIÓN	PRACTICA CALIFICADA N° 1	SEM. ACADÉMICO	2009 – II
CURSO	RESISTENCIA DE MATERIALES II	SECCIÓN	30F
PROFESOR	Ph.D. GENNER VILLARREAL CASTRO	DURACIÓN	110m
ESCUELA	INGENIERIA CIVIL	CICLO	VI

1. METODO DEL TRABAJO VIRTUAL. Una armadura de acero soporta tres cargas de 30kN, 40kN y 20kN, tal como se muestra en la figura. Las áreas de sección transversal de las barras de la armadura son las siguientes:

BARRA	AREA (mm ²)
AB y CD	4000
AE, EF, FG y GD	2000
BC	3000
BE, BF, CF y CG	1200

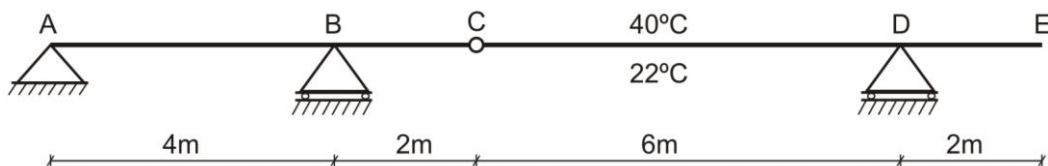
Determinar los desplazamientos horizontal y vertical del nudo F, considerando que el módulo de elasticidad del acero es $E = 200\text{GPa}$

..... (6 puntos)



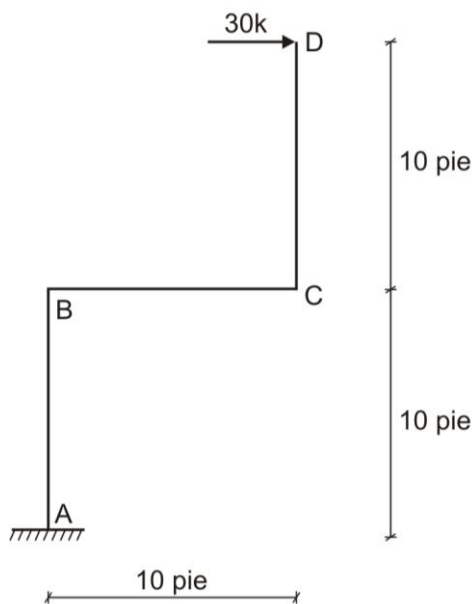
2. METODO DEL TRABAJO VIRTUAL. Determinar la pendiente en E para la viga mostrada en la figura, si su sección transversal es 30cm x 60cm. Considerar que las temperaturas 40°C y 22°C son para toda la viga.

..... (3 puntos)



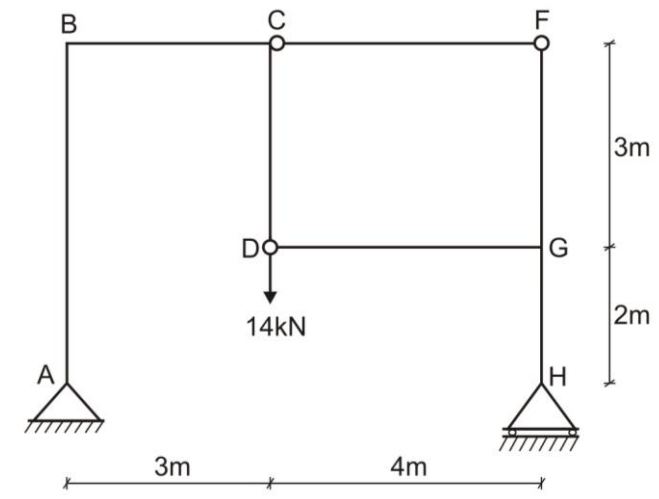
3. METODO DEL TRABAJO VIRTUAL. Determinar los desplazamientos horizontal y vertical del nudo D, si $E = 29 \cdot 10^6 \text{ lb/plg}^2$ e $I = 1500 \text{ plg}^4$ para todo el pórtico.

..... (5 puntos)



4. METODO DEL TRABAJO VIRTUAL. Determinar la distancia que se alejarán los nudos D y F en la dirección de la línea recta que los une, si las rigideces en flexión para los elementos horizontales es $2EI$ y para los verticales es EI

..... (6 puntos)



FECHA	La Molina, 24 de Agosto del 2009
-------	----------------------------------

SOLUCIONARIO DE PRÁCTICA CALIFICADA Nº 1

CICLO 2009 – II

1. Calculamos las rigideces de las barras de la armadura.

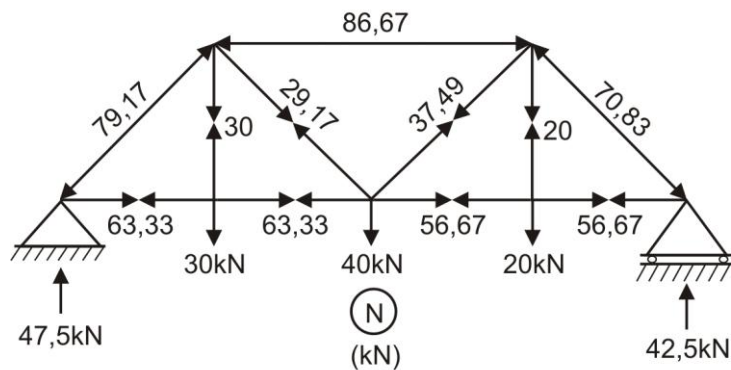
$$EA_{1200} = 200 \cdot 10^9 \cdot 1200 \cdot 10^{-6} = 240 \cdot 10^6 \text{ N}$$

$$EA_{2000} = 200 \cdot 10^9 \cdot 2000 \cdot 10^{-6} = 400 \cdot 10^6 \text{ N}$$

$$EA_{3000} = 200 \cdot 10^9 \cdot 3000 \cdot 10^{-6} = 600 \cdot 10^6 \text{ N}$$

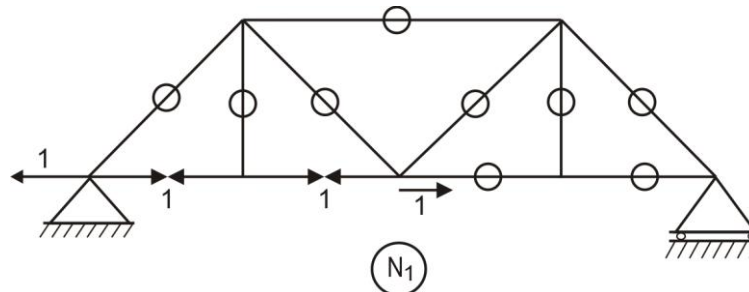
$$EA_{4000} = 200 \cdot 10^9 \cdot 4000 \cdot 10^{-6} = 800 \cdot 10^6 \text{ N}$$

Determinamos las fuerzas internas en las barras de la armadura, debido a la acción de las cargas reales.



DESPLAZAMIENTO HORIZONTAL EN "F":

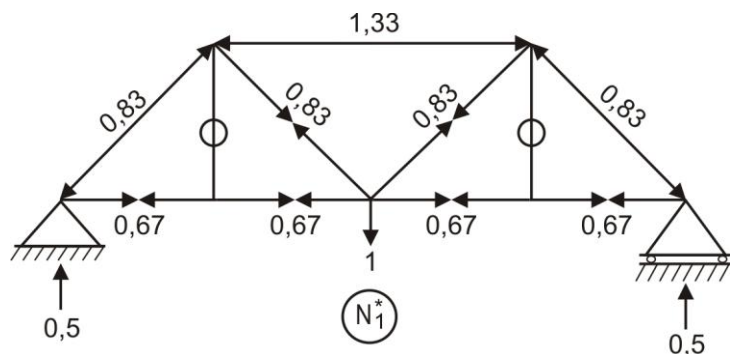
Calculamos las fuerzas internas en las barras de la armadura, debido a la acción de la carga unitaria horizontal aplicada en el nudo F



$$\delta_H^F = \frac{1}{400 \cdot 10^6} [63,33 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 2] = 1,27 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 1,27 \text{ mm} \rightarrow$$

DESPLAZAMIENTO VERTICAL EN "F":

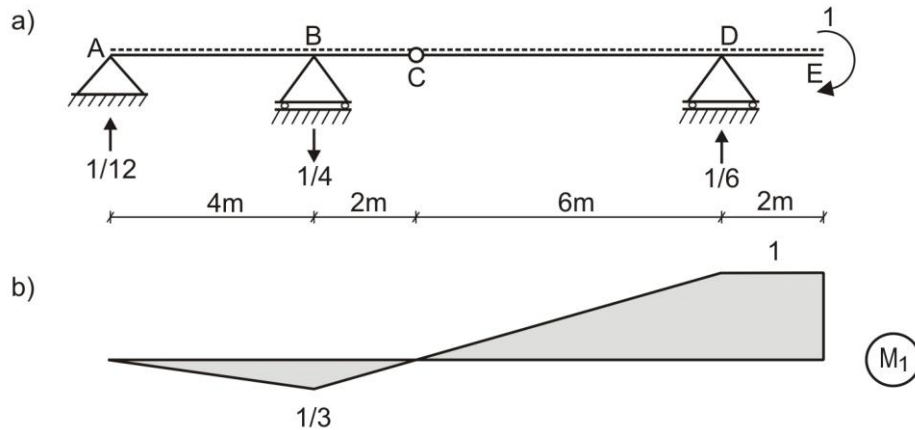
Determinamos las fuerzas internas en las barras de la armadura, debido a la acción de la carga unitaria vertical aplicada en el nudo F



$$\delta_V^F = \frac{1}{240 \cdot 10^6} [29,17 \cdot 10^3 \cdot 0,83,5 + 37,49 \cdot 10^3 \cdot 0,83,5] + \frac{1}{400 \cdot 10^6} [63,33 \cdot 10^3 \cdot 0,67,4,2 + 56,67 \cdot 10^3 \cdot 0,67,4,2] + \frac{1}{600 \cdot 10^6} [86,67 \cdot 10^3 \cdot 1,33,8] + \frac{1}{800 \cdot 10^6} [79,17 \cdot 10^3 \cdot 0,83,5 + 70,83 \cdot 10^3 \cdot 0,83,5] = 5,08 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$\delta_V^F = 5,08 \text{ mm} \downarrow$$

2. En la figura a) se muestran los lados traccionados por temperatura en la viga y las reacciones en los apoyos. En la figura b) se muestra el diagrama M_1



Luego:

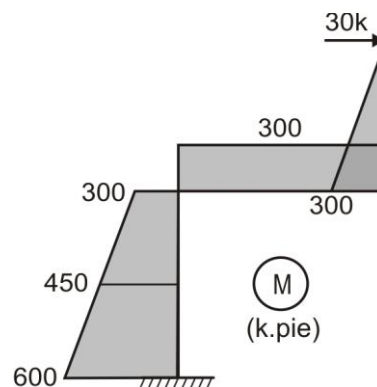
$$\theta_E = \alpha \frac{|40 - 22|}{0,6} \cdot \frac{(2 + 8) \cdot 1}{2} - \alpha \frac{|22 - 40|}{0,6} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \frac{1}{3} = 120\alpha \text{ (rad)}$$

Como el signo es positivo, indica que la orientación de la pendiente es en sentido horario.

3. Determinamos la rigidez del pórtico:

$$EI = 29 \cdot 10^6 \cdot 1500 = 43500 \cdot 10^6 \text{ lb.plg}^2 = 302083,33 \text{ k.pie}^2$$

Graficamos el diagrama de momento flector, debido a la acción de la carga real.

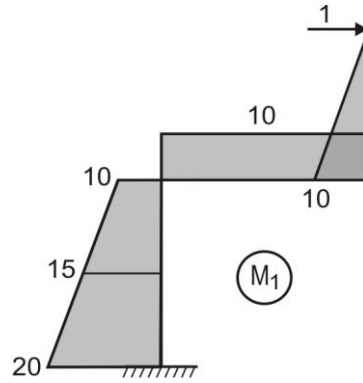


DESPLAZAMIENTO HORIZONTAL EN "D":

Ahora, graficamos el diagrama de momento flector, debido a la acción de la carga unitaria horizontal aplicado en el nudo D

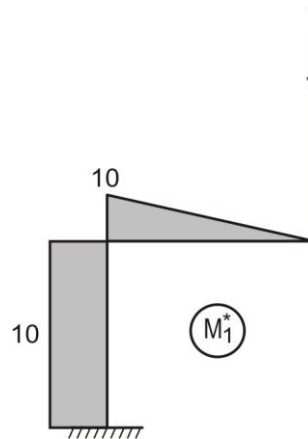
$$\delta_H^D = \frac{1}{302083,33} \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 300 \cdot \frac{2}{3} \cdot 10 + \frac{1}{302083,33} \cdot 10 \cdot 300 \cdot 10 + \frac{10}{6 \cdot 302083,33} [300 \cdot 10 + 4 \cdot 450 \cdot 15 + 600 \cdot 20]$$

$$\delta_H^D = 0,36413 \text{ pie} = 4,37 \text{ plg} \rightarrow$$



DESPLAZAMIENTO VERTICAL EN "D":

Graficamos el diagrama de momento flector, debido a la acción de la carga unitaria vertical en D



$$\delta_V^D = \frac{1}{302083,33} \cdot 10 \cdot 300 \cdot 5 + \frac{10}{6 \cdot 302083,33} [300 \cdot 10 + 4 \cdot 450 \cdot 10 + 600 \cdot 10] = 0,19861 \text{ pie} = 2,38 \text{ plg} \downarrow$$

4. Determinamos el grado de indeterminación del sistema:

$$\text{G.I.} = 3C - A = 3 \cdot 2 - 6 = 0$$

Calculamos las reacciones en los apoyos, debido a la acción de la carga real.

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_H(7) - 14(3) = 0 \quad \therefore V_H = 6 \text{ kN} \uparrow$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow V_A + 6 - 14 = 0 \quad \therefore V_A = 8 \text{ kN} \uparrow$$

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

Luego, analizamos el equilibrio de la parte izquierda de la estructura, efectuando un corte por las rótulas.

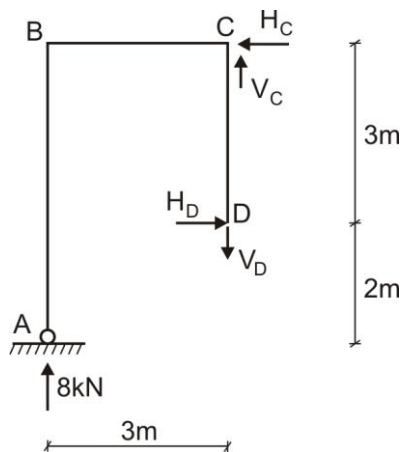
$$\sum M_D = 0 \Rightarrow 8(3) - H_C(3) = 0 \quad \therefore H_C = 8 \text{ kN} \leftarrow$$

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow H_D - 8 = 0 \quad \therefore H_D = 8 \text{ kN} \rightarrow$$

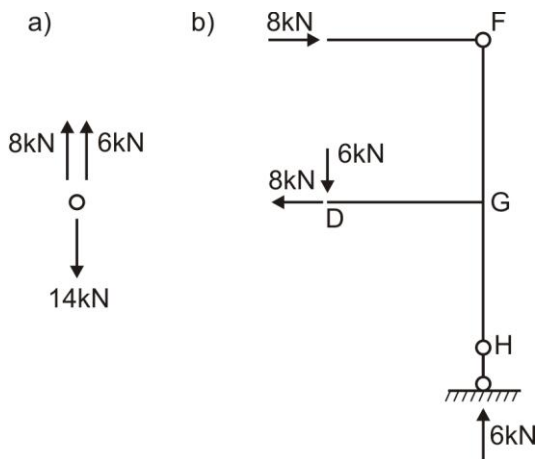
Como en la barra CF no hay momento flector, se cumplirá que $V_C = 0$

Luego:

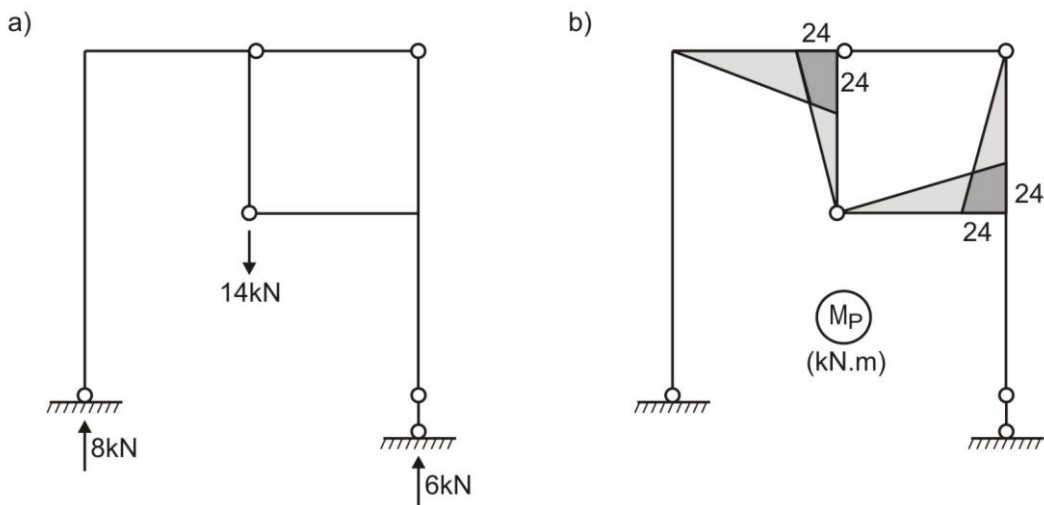
$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad 8 - V_D = 0 \quad \therefore \quad V_D = 8\text{kN} \downarrow$$



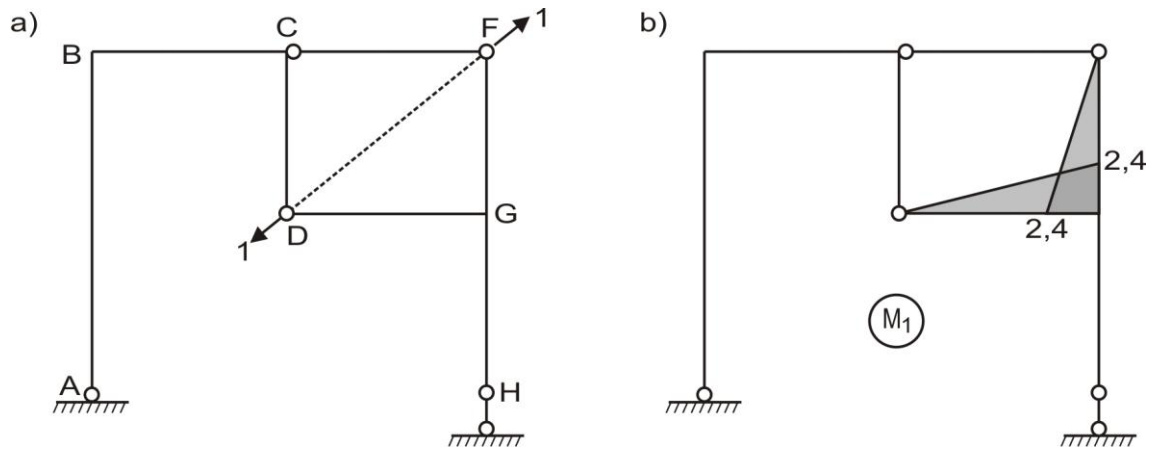
De esta manera, el equilibrio en la rótula D es la mostrada en la figura a) y las cargas aplicadas en el lado derecho de la estructura las mostradas en la figura b) las cuales como se podrá apreciar se encuentran en equilibrio.



Ahora, graficamos el diagrama de momento flector de la estructura, debido a la acción de la carga real.



Análogamente, graficamos el diagrama M_1 debido a la acción de las cargas unitarias aplicadas en D y F, tal como se muestra en la siguiente figura.



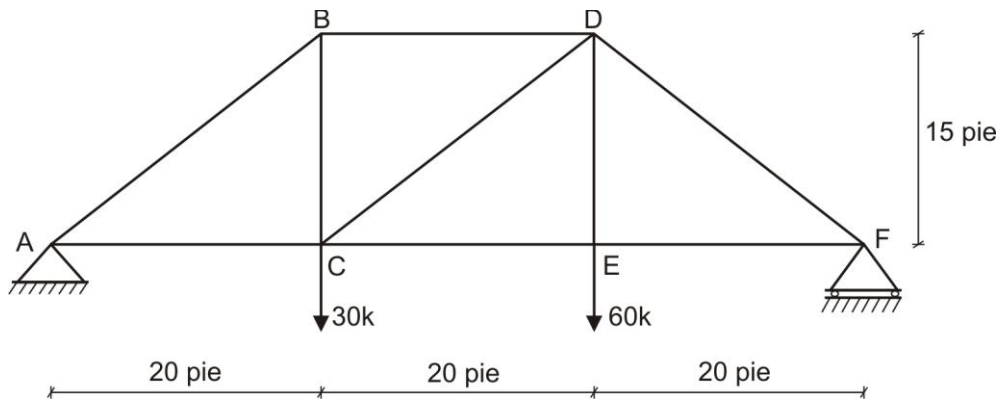
$$\Delta_{D-F} = \int \frac{M_p M_1}{EI} dx = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2.4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2.4 + \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2.4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2.4 = \frac{96}{EI} \text{ (m)}$$



EVALUACIÓN	PRACTICA CALIFICADA N° 1	SEM. ACADÉMICO	2010 – I
CURSO	RESISTENCIA DE MATERIALES II	SECCIÓN	30F
PROFESOR	Ph.D. GENNER VILLARREAL CASTRO	DURACIÓN	110m
ESCUELA	INGENIERIA CIVIL	CICLO	VI

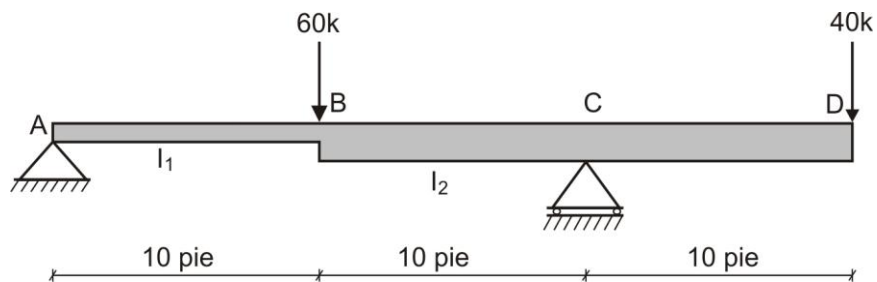
1. METODO DEL TRABAJO VIRTUAL. Determinar la deflexión vertical en el nudo C, si las áreas de las barras del cordón superior e inferior es $4plg^2$ y las áreas de las montantes y diagonal es $3plg^2$. Considerar $E = 29.10^6 \text{ lb/p}lg^2$

..... (5 puntos)



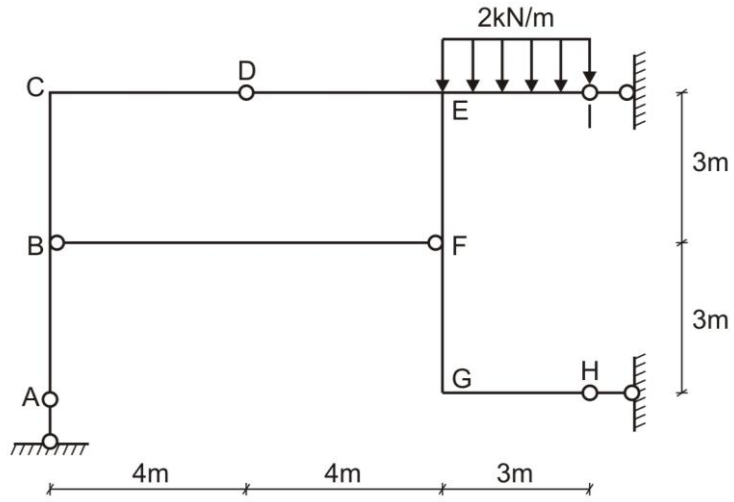
2. METODO DEL TRABAJO VIRTUAL. Determinar la pendiente y deflexión en el punto B de la viga mostrada, si $E = 29.10^6 \text{ lb/p}lg^2$, $I_1 = 1800plg^4$ e $I_2 = 3600plg^4$

..... (5 puntos)

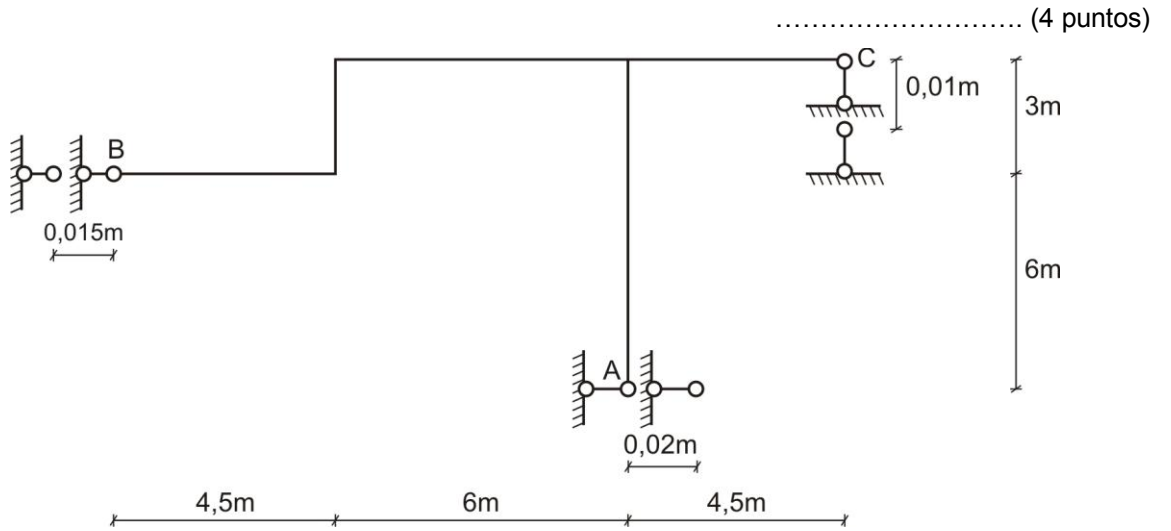


3. METODO DEL TRABAJO VIRTUAL. Determinar el ángulo mutuo (hacia el encuentro) entre los apoyos A e I del pórtico mostrado en la figura. Considerar que la rigidez EI del pórtico es constante en todos sus elementos y que la barra BF trabaja únicamente en tracción.

..... (6 puntos)



4. METODO DEL TRABAJO VIRTUAL. Determinar el desplazamiento vertical del apoyo A del pórtico mostrado en la figura.

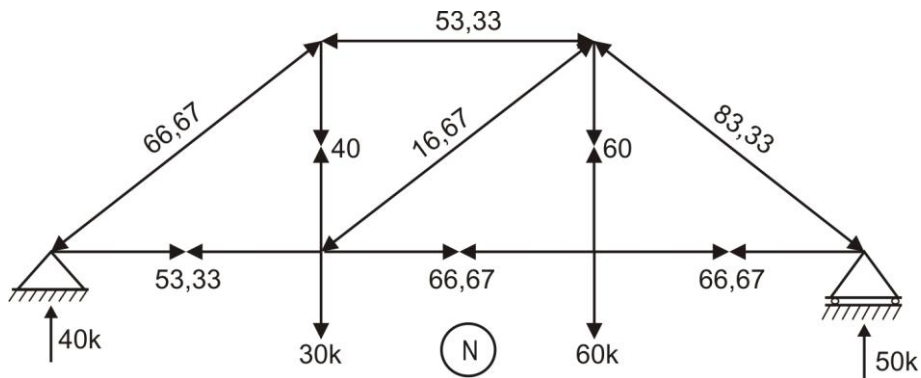


FECHA	La Molina, 22 de Marzo del 2010
-------	---------------------------------

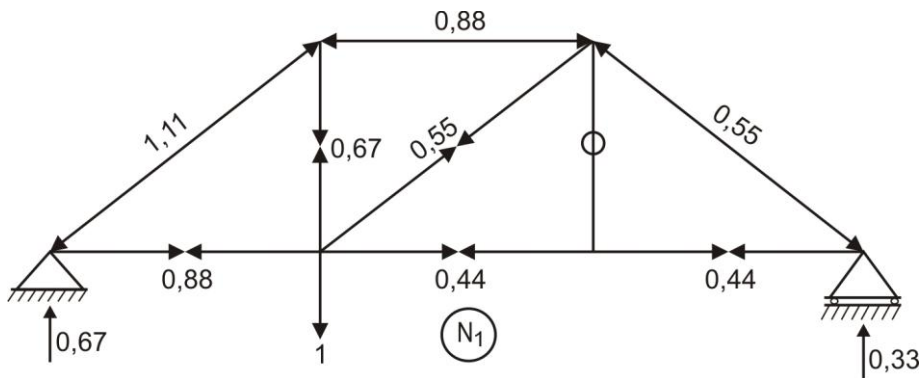
SOLUCIONARIO DE PRÁCTICA CALIFICADA Nº 1

CICLO 2010 – I

- Determinamos las fuerzas axiales en las barras de la armadura, debido a la acción de las cargas reales, tal como se muestra en la figura.



Luego, calculamos las fuerzas axiales en las barras de la armadura, debido a la acción de la carga unitaria vertical aplicada en el nudo C



Determinamos la deflexión vertical en el nudo C

$$\delta_v^C = \frac{1}{29 \cdot 10^6 \cdot 4} [(-66,67 \cdot 10^3)(-1,11)(25,12) + (-53,33 \cdot 10^3)(-0,88)(20,12) + (-83,33 \cdot 10^3)(-0,55)(25,12) + (53,33 \cdot 10^3)(0,88)(20,12) + (66,67 \cdot 10^3)(0,44)(20,12) + (66,67 \cdot 10^3)(0,44)(20,12)] + \frac{1}{29 \cdot 10^6 \cdot 3} [(40 \cdot 10^3)(0,67)(15,12) + (-16,67 \cdot 10^3)(0,55)(25,12)]$$

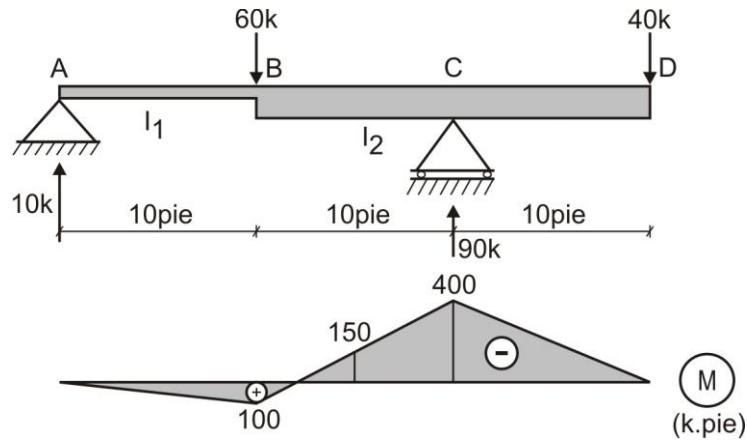
$$\delta_v^C = 0,6493 p l g \downarrow$$

- Calculamos las rigideces en $k \cdot pie^2$

$$EI_1 = 29 \cdot 10^6 \cdot 1800 = 52200 \cdot 10^6 \text{ lb} \cdot p l g^2 = 362500 k \cdot pie^2$$

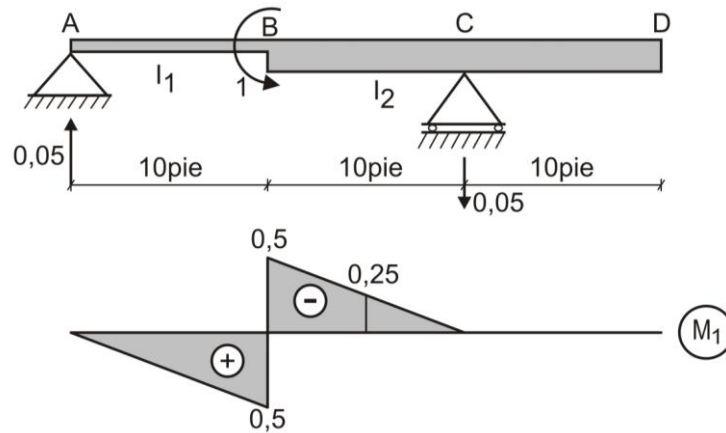
$$EI_2 = 29 \cdot 10^6 \cdot 3600 = 104400 \cdot 10^6 \text{ lb} \cdot p l g^2 = 725000 k \cdot pie^2$$

Graficamos el diagrama de momento flector de la viga, debido a la acción de las cargas reales, tal como se muestra en la figura.



PENDIENTE EN "B":

Graficamos el diagrama de momento flector, debido a la acción del momento unitario en B

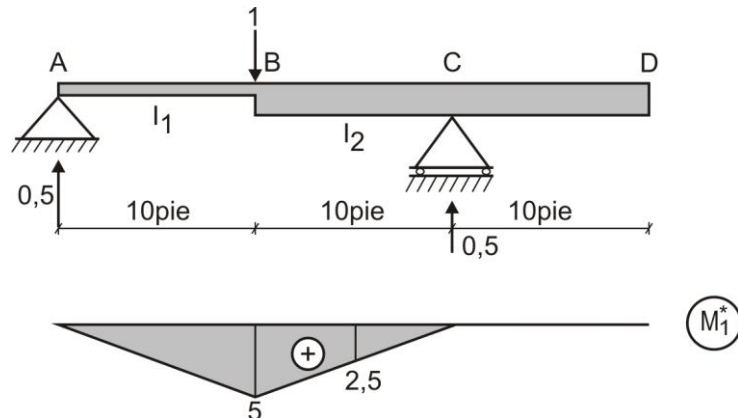


$$\theta_B = \frac{1}{362500} \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 100 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,5 + \frac{10}{6.725000} [-100 \cdot 0,5 + 4 \cdot 150 \cdot 0,25] = 0,00069 \text{ rad} = 0,04^\circ$$

Como el signo es positivo, indica que la orientación de la pendiente es en sentido antihorario.

DEFLEXION EN "B":

Graficamos el diagrama de momento flector, debido a la acción de la carga unitaria vertical en B



$$y_B = \frac{1}{362500} \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 100 \cdot \frac{2}{3} \cdot 5 + \frac{10}{6.725000} [100 \cdot 5 - 4 \cdot 150 \cdot 2,5] = 2,2989 \cdot 10^{-3} \text{ pie} = 0,0276 \text{ plg} \downarrow$$

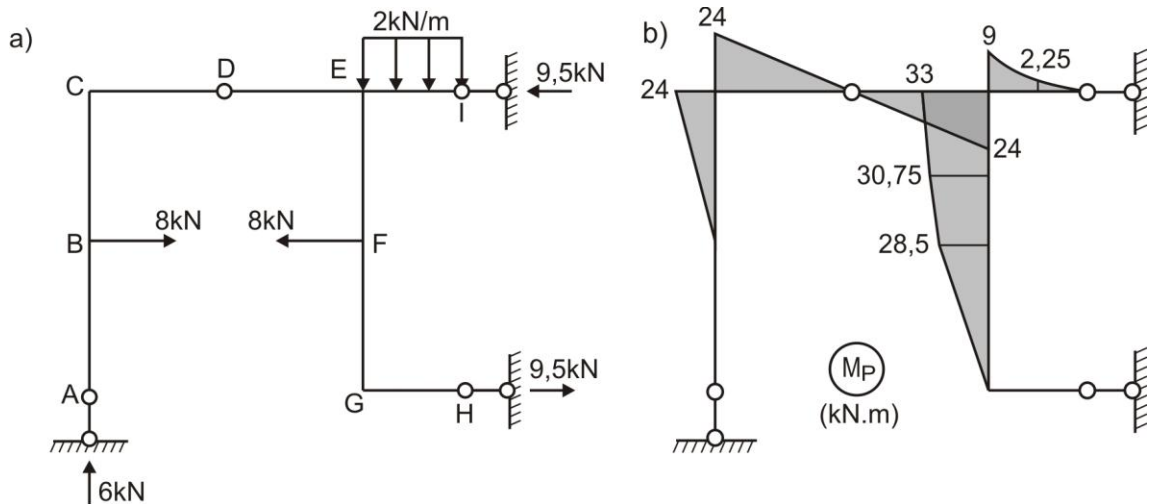
3. Determinamos las reacciones en los apoyos y la fuerza interna en la barra BF, tal como se muestra en la figura a); luego, graficamos su diagrama de momento flector, mostrado en la figura b)

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 6H_I - 2.3.9,5 = 0 \quad \therefore H_I = 9,5\text{kN} \leftarrow$$

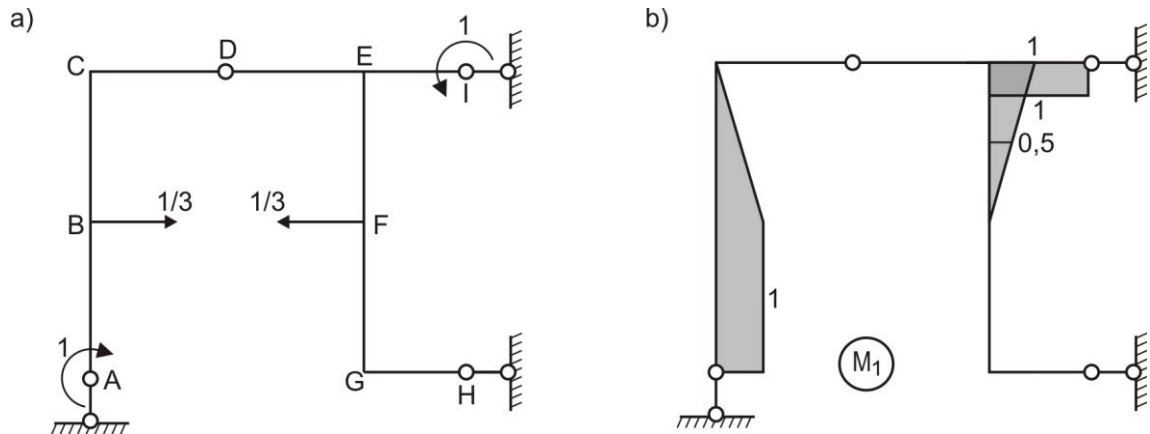
$$\sum F_X = 0 \Rightarrow H_H - 9,5 = 0 \quad \therefore H_H = 9,5\text{kN} \rightarrow$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow V_A - 2.3 = 0 \quad \therefore V_A = 6\text{kN} \uparrow$$

$$\sum M_D^{izq} = 0 \Rightarrow 6.4 - 3T_{BF} = 0 \quad \therefore T_{BF} = 8\text{kN (TRACCION)}$$



Ahora, analizamos la carga unitaria, aplicando momentos unitarios en los apoyos A e I, tal como se muestra en la figura a) y graficamos su diagrama de momento flector, el cual se muestra en la figura b)

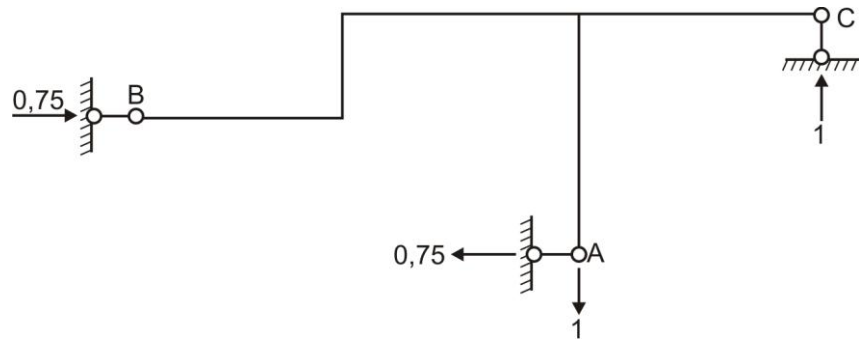


Determinamos el ángulo mutuo (hacia el encuentro) entre los nudos A e I

$$\varphi_{A-I} = -\frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3.24 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 - \frac{3}{6EI} [4.30,75.0,5 + 33.1] - \frac{3}{6EI} [9.1 + 4.2,25.1] = -\frac{68,25}{EI} \text{ (rad)}$$

El signo menos (-) indica que los apoyos A e I giran en dirección opuesta a la indicada por los momentos unitarios.

4. Aplicamos la carga unitaria hacia abajo en el apoyo A y calculamos las reacciones en los apoyos, cuyos resultados se muestran en la figura.



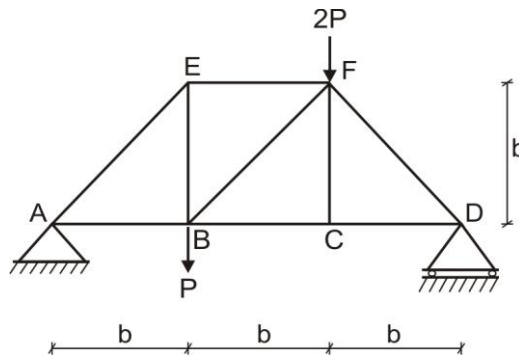
Determinamos el desplazamiento vertical del apoyo A

$$\Delta_V^A = -\sum_{j=1}^n R_{ij} C_j = -(-0,75 \cdot 0,02 - 1 \cdot 0,01 - 0,75 \cdot 0,015) = 0,03625\text{m} = 36,25\text{mm} \downarrow$$

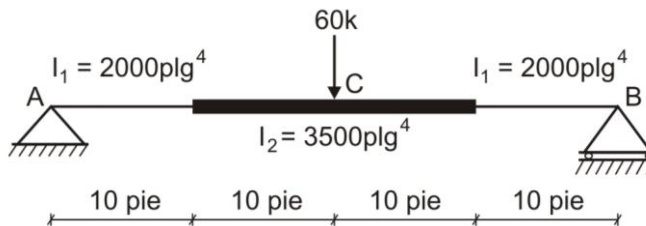


EVALUACIÓN	PRACTICA CALIFICADA N° 1	SEM. ACADÉMICO	2010 – II
CURSO	RESISTENCIA DE MATERIALES II	SECCIÓN	30F
PROFESOR	Ph.D. GENNER VILLARREAL CASTRO	DURACIÓN	110m
ESCUELA	INGENIERIA CIVIL	CICLO	VI

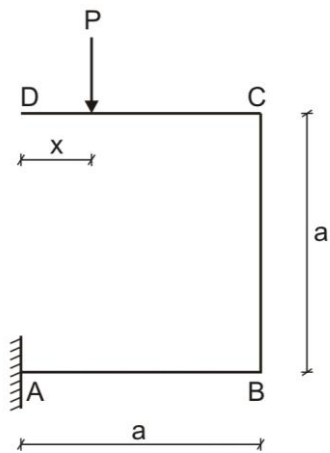
1. METODO DEL TRABAJO VIRTUAL. La armadura mostrada en la figura se construye con nueve barras, cada una tiene rigidez axial EA. En los nudos B y F actúan cargas P y 2P, respectivamente. Determinar la deflexión vertical del nudo E y el incremento en la distancia entre los nudos E y C
..... (5 puntos)



2. METODO DEL TRABAJO VIRTUAL. Determinar la deflexión máxima y la pendiente en los apoyos, si $E = 29 \cdot 10^6 \text{ lb} / \text{plg}^2$
..... (5 puntos)

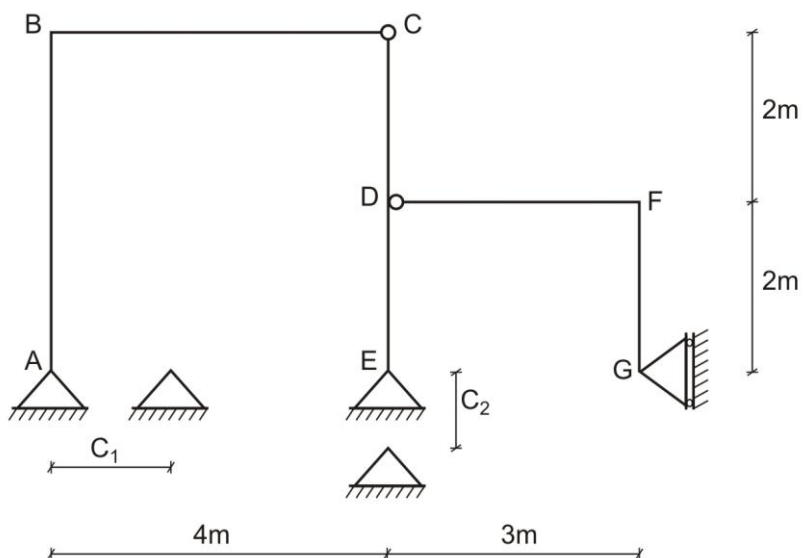


3. METODO DEL TRABAJO VIRTUAL. Determinar la distancia "x" a la cual corresponde un desplazamiento vertical nulo del nudo B. Considerar que la rigidez EI es constante en todo el pórtico.
..... (5 puntos)



4. METODO DEL TRABAJO VIRTUAL. Determinar el ángulo de giro en el nudo F del pórtico mostrado en la figura, considerando que el apoyo A sufre un desplazamiento horizontal $C_1 = 0,04\text{m}$ y el apoyo E se asienta $C_2 = 0,03\text{m}$

..... (5 puntos)

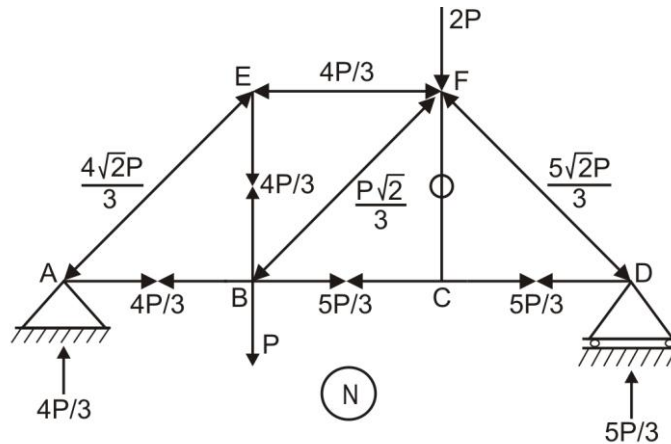


FECHA	La Molina, 23 de Agosto del 2010
-------	----------------------------------

SOLUCIONARIO DE PRÁCTICA CALIFICADA Nº 1

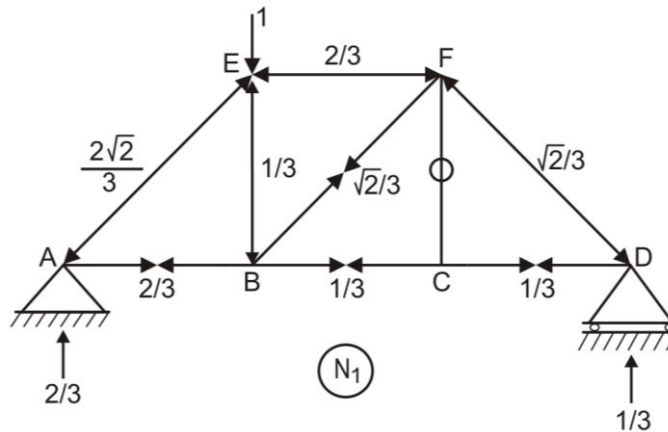
CICLO 2010 – II

- Determinamos las fuerzas internas para la armadura sometida a la acción de las cargas reales, tal como se muestra en la figura.



DEFLEXION EN "E":

Luego, calculamos las fuerzas internas debido a la acción de la carga unitaria vertical aplicada en el nudo E



$$\delta_v^E = \frac{1}{EA} \left[\left(-\frac{4\sqrt{2}P}{3} \right) \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3} \right) (b\sqrt{2}) + \left(\frac{4P}{3} \right) \left(\frac{2}{3} \right) (b) + \left(\frac{4P}{3} \right) \left(-\frac{1}{3} \right) (b) + \left(-\frac{4P}{3} \right) \left(-\frac{2}{3} \right) (b) + \left(-\frac{P\sqrt{2}}{3} \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{3} \right) (b\sqrt{2}) + \left(\frac{5P}{3} \right) \left(\frac{1}{3} \right) (b) + \left(\frac{5P}{3} \right) \left(\frac{1}{3} \right) (b) + \left(-\frac{5\sqrt{2}P}{3} \right) \left(-\frac{\sqrt{2}}{3} \right) (b\sqrt{2}) \right]$$

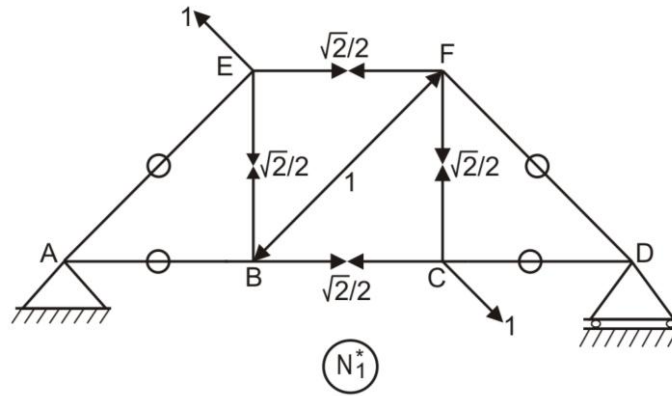
$$\delta_v^E = 6,215 \frac{Pb}{EA} \downarrow$$

INCREMENTO DE DISTANCIA ENTRE "E" Y "C":

Analizamos el incremento de distancia entre los nudos E y C, aplicando cargas unitarias en ambos nudos, tal como se muestra en la figura.

$$\delta_{E-C} = \frac{1}{EA} \left[\left(-\frac{4P}{3} \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) (b) + \left(\frac{5P}{3} \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) (b) + \left(\frac{4P}{3} \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) (b) + \left(-\frac{P\sqrt{2}}{3} \right) (-1) (b\sqrt{2}) \right]$$

$$\delta_{E-C} = 1,845 \frac{Pb}{EA}$$

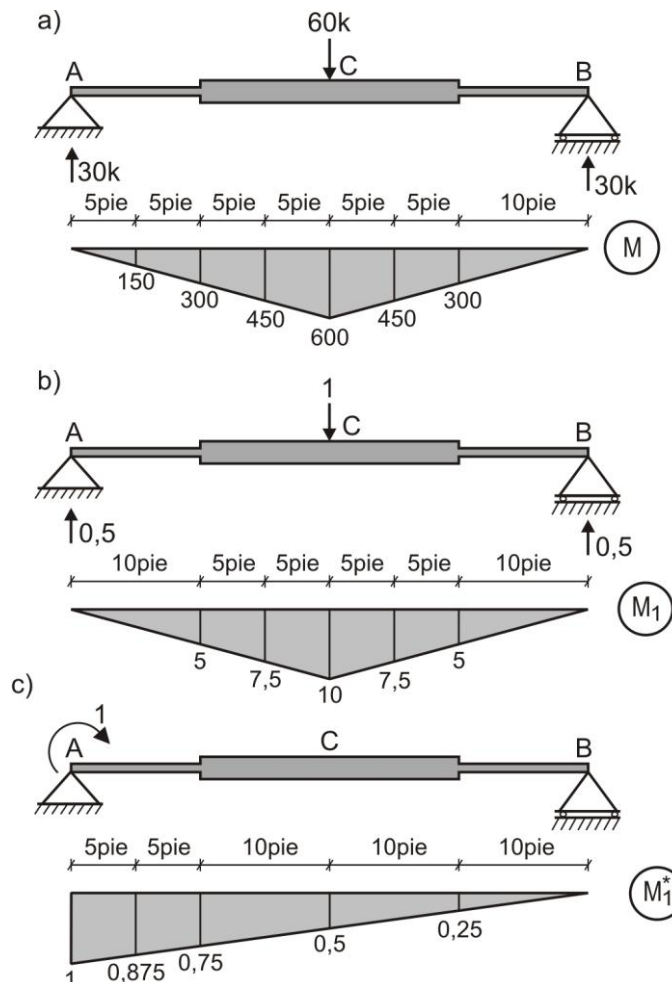


2. Determinamos las rigideces de cada tramo:

$$EI_1 = 29 \cdot 10^6 \cdot 2000 = 58 \cdot 10^9 \text{ lb}\cdot\text{plg}^2 = 58 \cdot 10^6 \text{ k}\cdot\text{plg}^2 = 402778 \text{ k}\cdot\text{pie}^2$$

$$EI_2 = 29 \cdot 10^6 \cdot 3500 = 101,5 \cdot 10^9 \text{ lb}\cdot\text{plg}^2 = 101,5 \cdot 10^6 \text{ k}\cdot\text{plg}^2 = 704861 \text{ k}\cdot\text{pie}^2$$

Graficamos los diagramas de momento para la carga real (figura a), carga unitaria (figura b) y momento unitario (figura c), sabiendo que la deflexión máxima será en el centro de la viga.



DEFLEXION MAXIMA:

$$y_{\text{máx}} = y_C = \delta_v^C = \frac{1}{402778} \left[\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 300 \cdot \frac{2}{3} \cdot 5 \right] \cdot 2 + \frac{10}{6 \cdot 704861} [300 \cdot 5 + 4 \cdot 450 \cdot 7,5 + 600 \cdot 10] \cdot 2$$

$$y_{\text{máx}} = 0,124 \text{ pie} = 1,488 \text{ plg} \downarrow$$

PENDIENTE EN LOS APOYOS:

$$\theta_A = \frac{10}{6.402778} [4.150.0,875 + 300.0,75] + \frac{20}{6.704861} [300.0,75 + 4.600.0,5 + 300.0,25] + \frac{1}{402778} \cdot \frac{1}{2} \cdot 10.300 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,25 = 0,01 \text{ rad} = 0,63^\circ$$

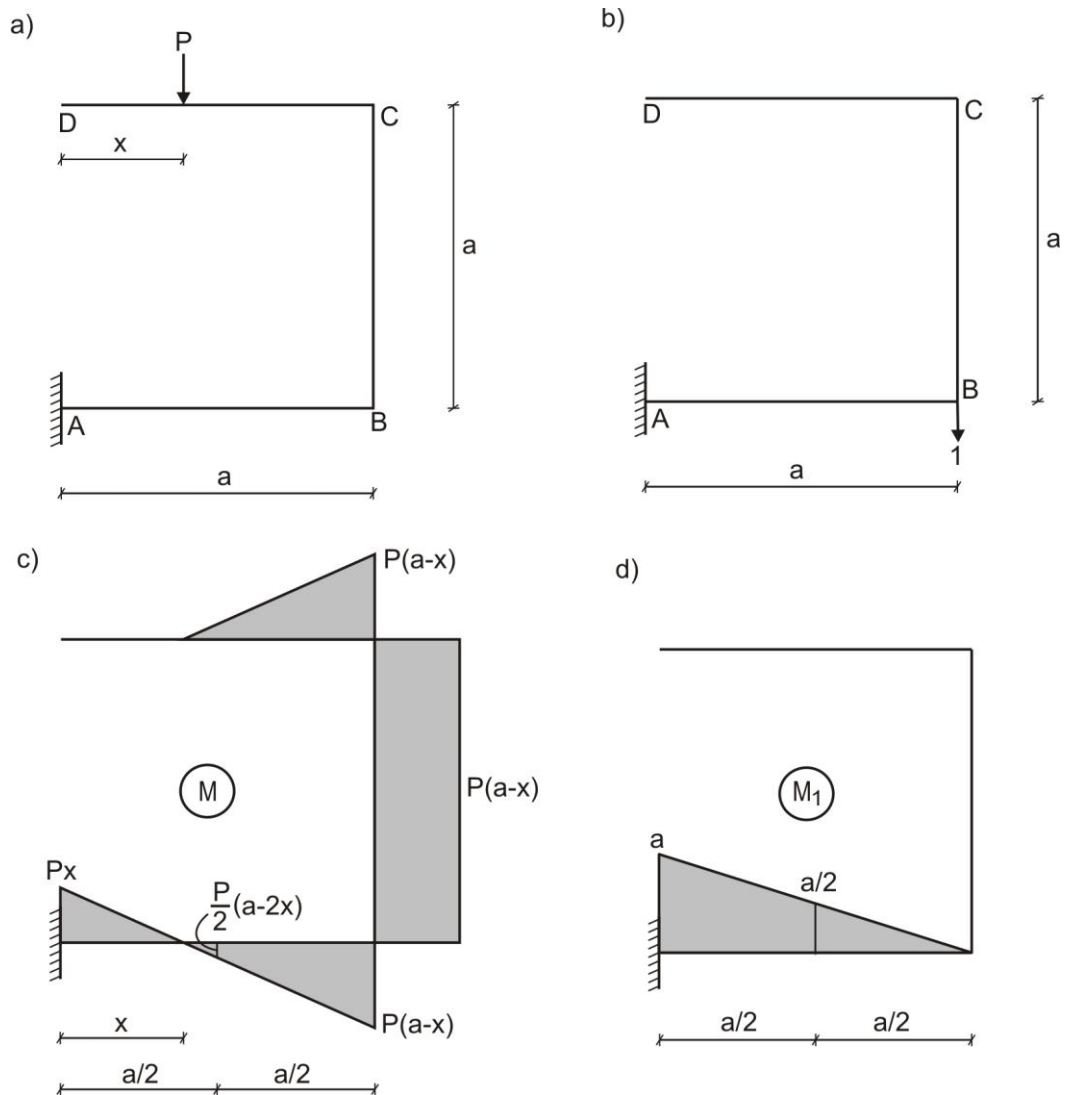
La pendiente en A va en sentido horario, es decir el mismo que se mostró en la figura c)

Por simetría:

$$\theta_B = 0,63^\circ$$

La pendiente en B va en sentido antihorario.

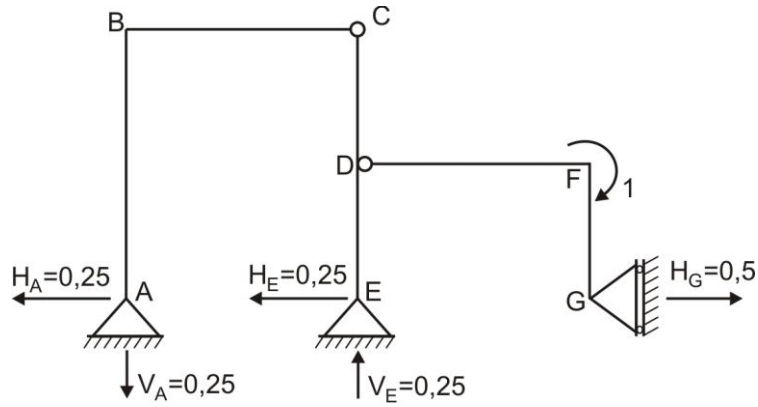
3. Esquematisamos los pórticos con la carga real (figura a) y carga vertical unitaria (figura b); para luego, graficar los diagramas correspondientes debido a la carga real (figura c) y carga unitaria (figura d)



Por condición del problema:

$$y_B = 0 \Rightarrow \frac{a}{6EI} \left[Pxa - 4 \cdot \frac{P}{2} \left(a - 2x \right) \left(\frac{a}{2} \right) \right] = 0 \quad \therefore \quad x = \frac{a}{3}$$

4. Aplicamos un momento unitario en F y calculamos las reacciones en los apoyos, tal como se muestra en la figura.



Calculamos la pendiente en F

$$\varphi_{iC} = -\sum_{j=1}^n R_{ij} C_j \quad \Rightarrow \quad \varphi_F = -(-H_A \cdot C_1 - V_E \cdot C_2) = -(-0,25 \cdot 0,04 - 0,25 \cdot 0,03)$$

$$\varphi_F = 0,0175 \text{ rad} = 1^\circ$$

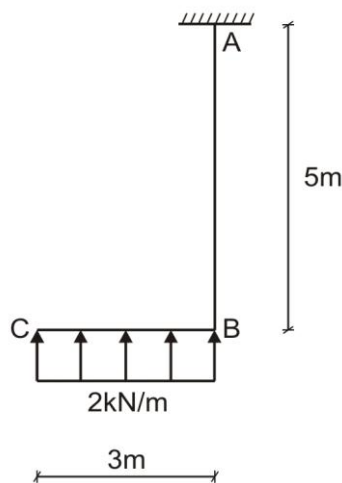
Como el signo es positivo, indica que la pendiente en F va en sentido horario.



EVALUACIÓN	PRACTICA CALIFICADA Nº 2	SEM. ACADÉMICO	2008 – II
CURSO	RESISTENCIA DE MATERIALES II	SECCIÓN	30F
PROFESOR	Ph.D. GENNER VILLARREAL CASTRO	DURACIÓN	110m
ESCUELA	INGENIERIA CIVIL	CICLO	VI

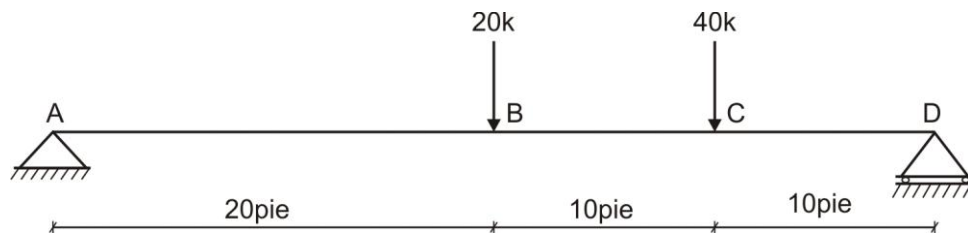
1. ENERGIA POTENCIAL DE DEFORMACION. Determinar la energía potencial de deformación para la estructura mostrada en la figura, si es de sección constante. Considerar únicamente el efecto de momento flector.

..... (4 puntos)



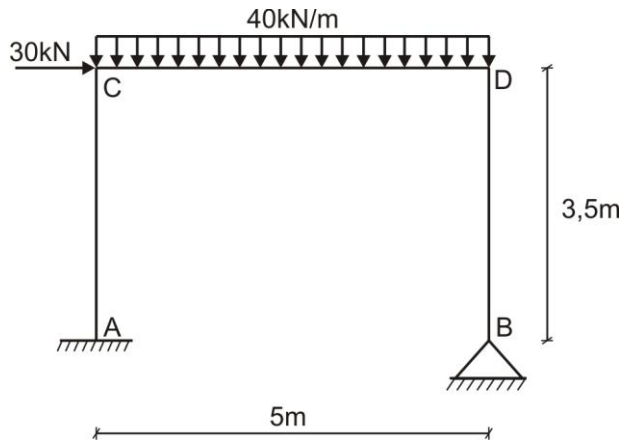
2. TEOREMA DE CASTIGLIANO. Determinar la deflexión en los puntos B y C de la viga mostrada en la figura, si $E = 29 \cdot 10^6 \text{ lb/pulg}^2$ e $I = 1750 \text{ pulg}^4$ para toda la viga.

..... (5 puntos)



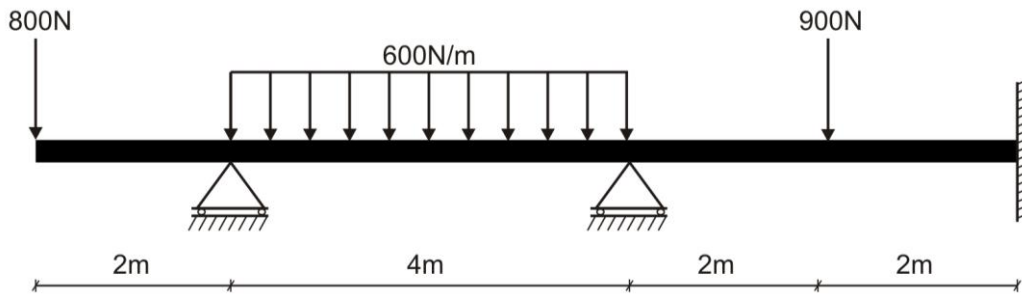
3. TEOREMA DE CASTIGLIANO. Resolver el siguiente pórtico y graficar los diagramas de fuerza axial, fuerza cortante y momento flector, si $E = 23000 \text{ MPa}$, las columnas son de $30 \text{ cm} \times 30 \text{ cm}$ y la viga de $30 \text{ cm} \times 50 \text{ cm}$

..... (6 puntos)



4. ECUACION DE LOS TRES MOMENTOS. Resolver la siguiente viga y graficar los diagramas de fuerza cortante, momento flector y refuerzo, considerando que es de sección constante.

..... (5 puntos)

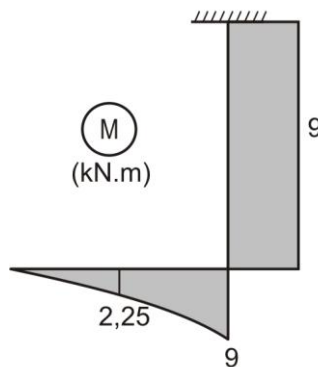


FECHA	La Molina, 22 de Setiembre del 2008
-------	-------------------------------------

SOLUCIONARIO DE PRÁCTICA CALIFICADA Nº 2

CICLO 2008 – II

1. Graficamos su diagrama de momento flector, tal como se muestra en la figura.



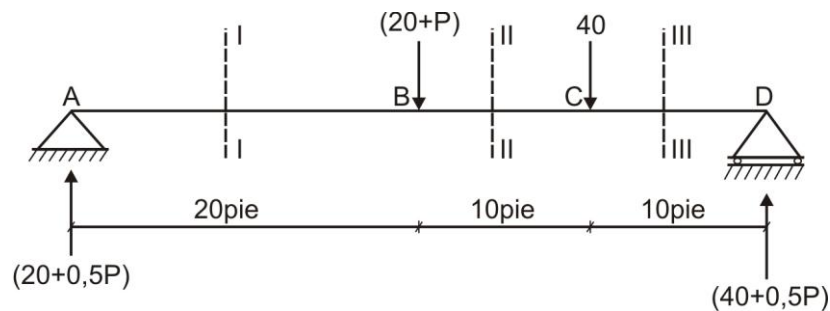
Determinamos la energía potencial de deformación:

$$U = \sum \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EI} = \sum \int_0^l \frac{M \cdot M dx}{2EI} = \frac{1}{2EI} \left[\frac{3}{6} (4 \cdot 2,25 \cdot 2,25 + 9 \cdot 9) + 9 \cdot 5 \cdot 9 \right] = \frac{227,81}{EI} \text{ (kJ)}$$

2. Determinamos la rigidez de la viga:

$$EI = 29 \cdot 10^6 \cdot 1750 = 50750 \cdot 10^6 \text{ lb.pie}^2 = 352,43 \cdot 10^3 \text{ k.pie}^2$$

DEFLEXION EN "B":



TRAMO I-I ($0 \leq x \leq 20$)

$$M_I = (20 + 0,5P)x$$

$$\frac{\partial M_I}{\partial P} = 0,5x$$

TRAMO II-II ($20 \leq x \leq 30$)

$$M_{II} = (20 + 0,5P)x - (20 + P)(x - 20)$$

$$\frac{\partial M_{II}}{\partial P} = 0,5x - (x - 20) = 20 - 0,5x$$

TRAMO III-III ($30 \leq x \leq 40$)

$$M_{III} = (20 + 0,5P)x - (20 + P)(x - 20) - 40(x - 30)$$

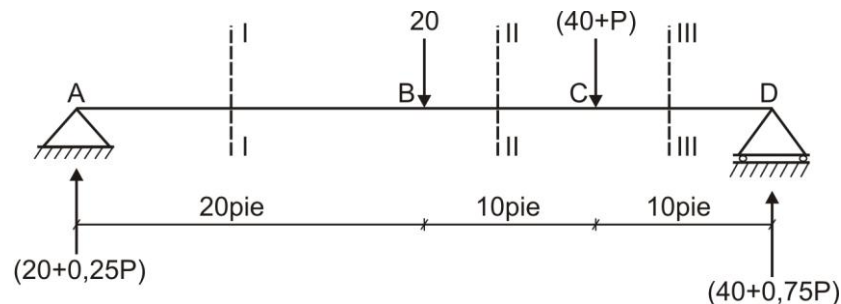
$$\frac{\partial M_{III}}{\partial P} = 0,5x - x + 20 = 20 - 0,5x$$

Luego:

$$y_B = \frac{1}{EI} \left[\int_0^{20} 20x(0,5x)dx + \int_{20}^{30} 400(20 - 0,5x)dx + \int_{30}^{40} (1600 - 40x)(20 - 0,5x)dx \right] = \frac{63333,33}{EI}$$

$$y_B = \frac{63333,33}{352,43 \cdot 10^3} = 0,1797 \text{pie} = 2,156 \text{plg} \downarrow$$

DEFLEXION EN "C":



TRAMO I-I ($0 \leq x \leq 20$)

$$M_I = (20 + 0,25P)x$$

$$\frac{\partial M_I}{\partial P} = 0,25x$$

TRAMO II-II ($20 \leq x \leq 30$)

$$M_{II} = (20 + 0,25P)x - 20(x - 20)$$

$$\frac{\partial M_{II}}{\partial P} = 0,25x$$

TRAMO III-III ($30 \leq x \leq 40$)

$$M_{III} = (20 + 0,25P)x - 20(x - 20) - (40 + P)(x - 30)$$

$$\frac{\partial M_{III}}{\partial P} = 0,25x - x + 30 = 30 - 0,75x$$

De esta manera:

$$y_C = \frac{1}{EI} \left[\int_0^{20} 20x(0,25x)dx + \int_{20}^{30} 400(0,25x)dx + \int_{30}^{40} (1600 - 40x)(30 - 0,75x)dx \right] = \frac{48333,33}{EI}$$

$$y_C = \frac{48333,33}{352,43 \cdot 10^3} = 0,1371 \text{pie} = 1,6457 \text{plg} \downarrow$$

3. Calculamos las rigideces de las columnas y viga.

$$EI_{\text{col}} = 23000 \cdot 10^6 \cdot \frac{0,3 \cdot 0,3^3}{12} = 15,525 \cdot 10^6 \text{ N.m}^2$$

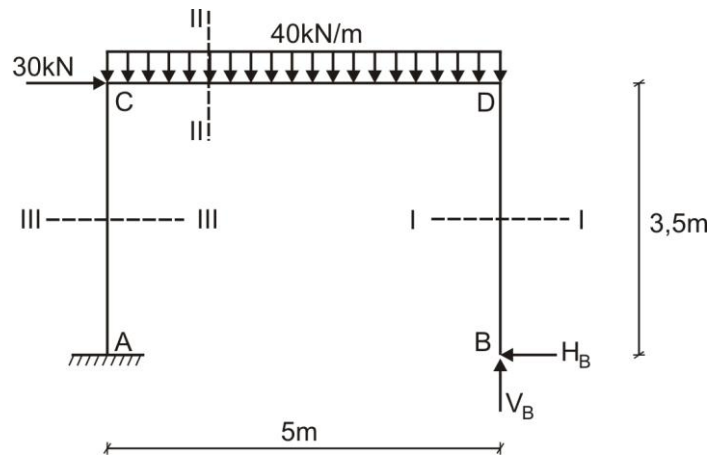
$$EI_{\text{viga}} = 23000 \cdot 10^6 \cdot \frac{0,3 \cdot 0,5^3}{12} = 71,875 \cdot 10^6 \text{ N.m}^2$$

Para efectos de cálculo y como sabemos que se va a simplificar el denominador, asumimos:

$$EI_{\text{col}} = EI$$

$$EI_{\text{viga}} = 4,6296EI$$

Eliminamos el apoyo B y lo reemplazamos por V_B y H_B , planteando las ecuaciones en cada tramo.



TRAMO I-I (BD) ($0 \leq z \leq 3,5$)

$$M_I = -H_B z$$

$$\frac{\partial M_I}{\partial V_B} = 0$$

$$\frac{\partial M_I}{\partial H_B} = -z$$

TRAMO II-II (DC) ($0 \leq x \leq 5$)

$$M_{II} = V_B x - 3,5 H_B - 20x^2$$

$$\frac{\partial M_{II}}{\partial V_B} = x$$

$$\frac{\partial M_{II}}{\partial H_B} = -3,5$$

TRAMO III-III (CA) ($0 \leq y \leq 3,5$)

$$M_{III} = 5V_B - H_B(3,5 - y) - 40(5)(2,5) - 30y$$

$$\frac{\partial M_{III}}{\partial V_B} = 5$$

$$\frac{\partial M_{III}}{\partial H_B} = y - 3,5$$

1ra ecuación:

$$y_B = \frac{\partial W}{\partial V_B} = 0$$

$$\frac{1}{4,6296EI} \int_0^5 (V_B x - 3,5H_B - 20x^2) x dx + \frac{1}{EI} \int_0^{3,5} (5V_B - 3,5H_B + H_B y - 500 - 30y)(5) dy = 0$$

De donde:

$$96,5V_B - 40,075H_B = 10343,75 \dots\dots\dots (a)$$

2da ecuación:

$$x_B = \frac{\partial W}{\partial H_B} = 0$$

$$\frac{1}{EI} \int_0^{3,5} (-H_B z)(-z) dz + \frac{1}{4,6296EI} \int_0^5 (V_B x - 3,5H_B - 20x^2)(-3,5) dx + \frac{1}{EI} \int_0^{3,5} (5V_B - 3,5H_B + H_B y - 500 - 30y)(y - 3,5) dy = 0$$

De donde:

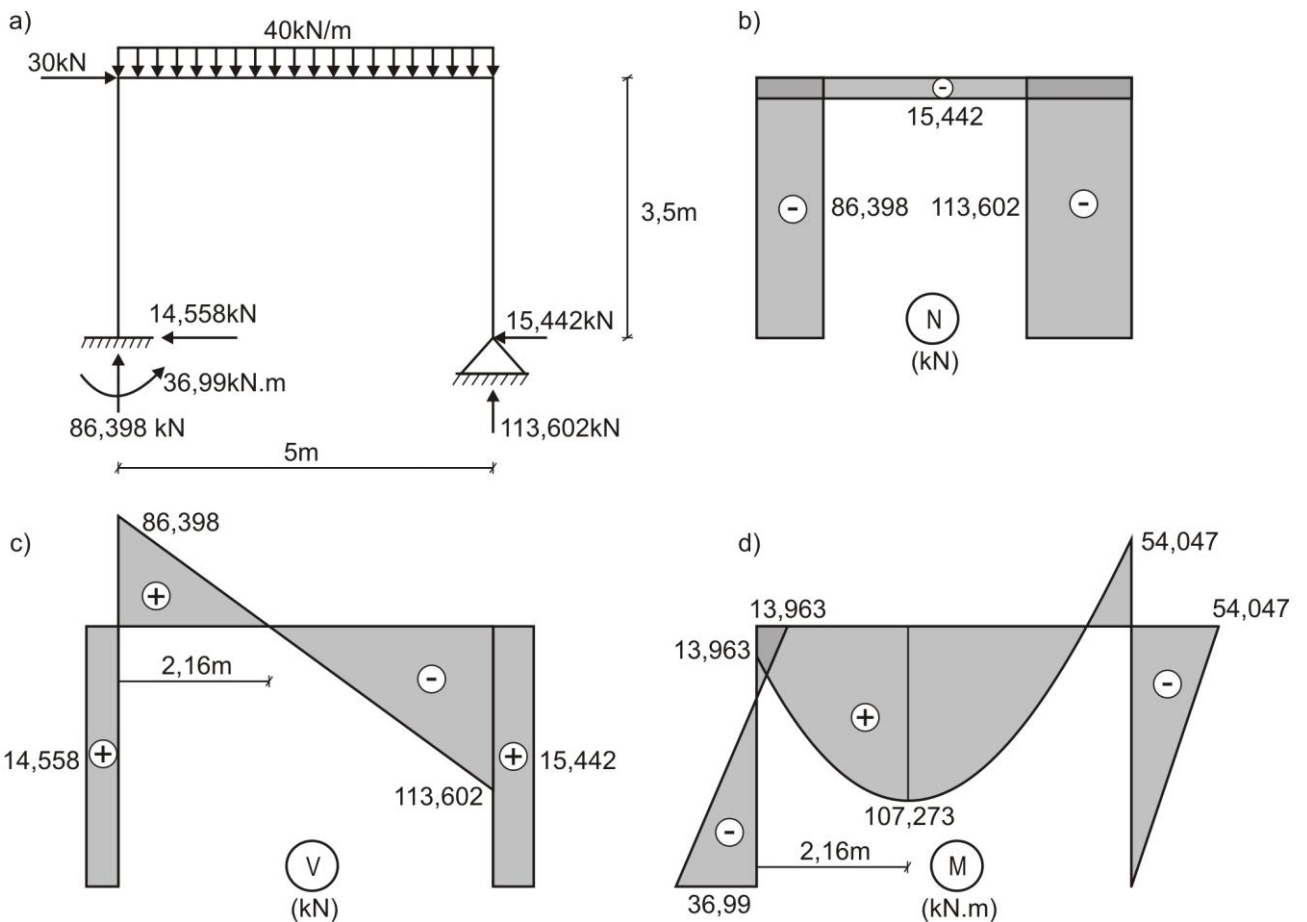
$$40,075V_B - 41,814H_B = 3906,875 \dots\dots\dots (b)$$

Resolvemos (a) y (b), obteniendo:

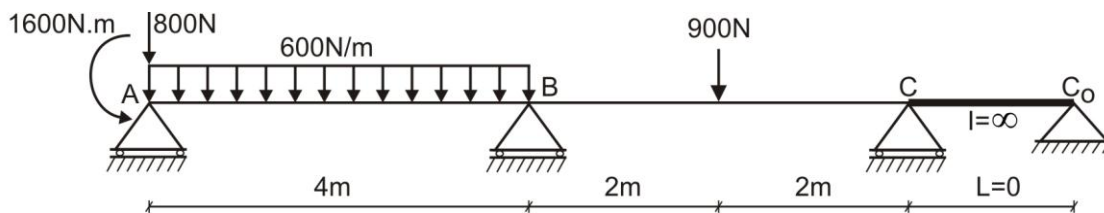
$$V_B = 113,602 \text{ kN } \uparrow$$

$$H_B = 15,442 \text{ kN } \leftarrow$$

Con estos resultados, calculamos las otras reacciones y graficamos los diagramas de fuerzas internas.



4. Convertimos el voladizo en sus cargas equivalentes y el empotramiento lo reemplazamos por un tramo de longitud cero y de inercia infinita.



TRAMO ABC

$$M_A(4) + 2M_B(4+4) + M_C(4) = -6 \left[\frac{600 \cdot 4^3}{24} \right] - 6 \left[\frac{900 \cdot 4^2}{16} \right]$$

Reemplazamos $M_A = -1600\text{N.m}$ y obtenemos:

$$16M_B + 4M_C = -8600$$

$$4M_B + M_C = -2150 \quad \dots\dots\dots (a)$$

TRAMO BCC₀

$$M_B(4) + 2M_C(4+0) + M_{C_0}(0) = -6 \left[\frac{900 \cdot 4^2}{16} \right] - 6[0]$$

$$M_B + 2M_C = -1350 \quad \dots\dots\dots (b)$$

Resolvemos (a) y (b), obteniendo:

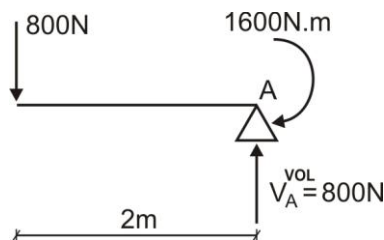
$$M_B = -421,428\text{N.m}$$

$$M_C = -464,286\text{N.m}$$

Calculamos las reacciones en cada tramo de la viga:

VOLADIZO:

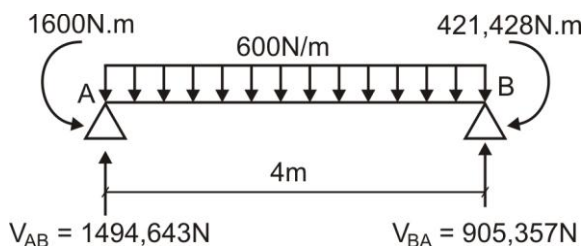
$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow V_A^{\text{vol}} - 800 = 0 \quad \therefore V_A^{\text{vol}} = 800\text{N} \uparrow$$



TRAMO AB:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_{BA}(4) + 1600 - 421,428 - 600(4)(2) = 0 \quad \therefore V_{BA} = 905,357\text{N} \uparrow$$

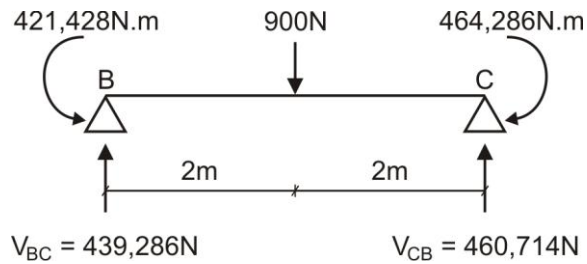
$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow V_{AB} + 905,357 - 600(4) = 0 \quad \therefore V_{AB} = 1494,643\text{N} \uparrow$$



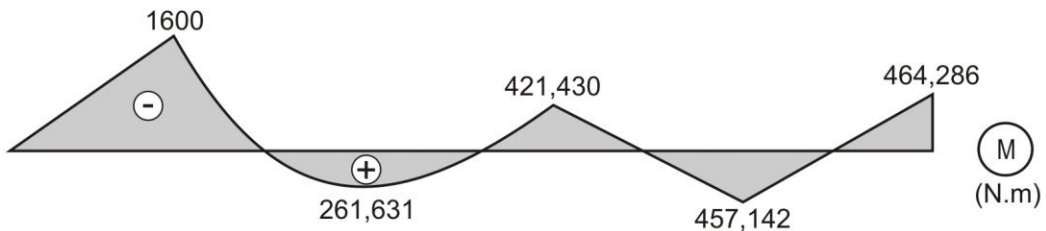
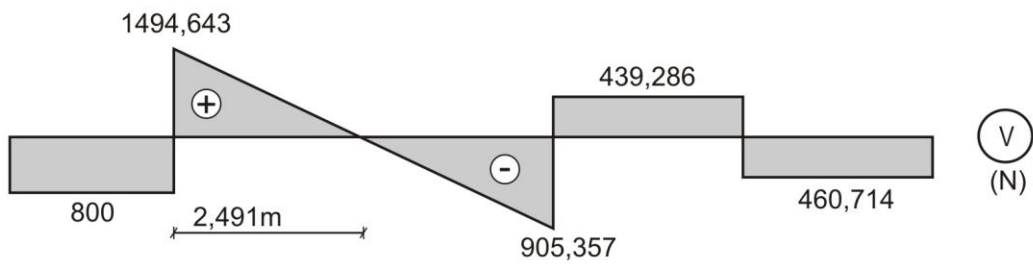
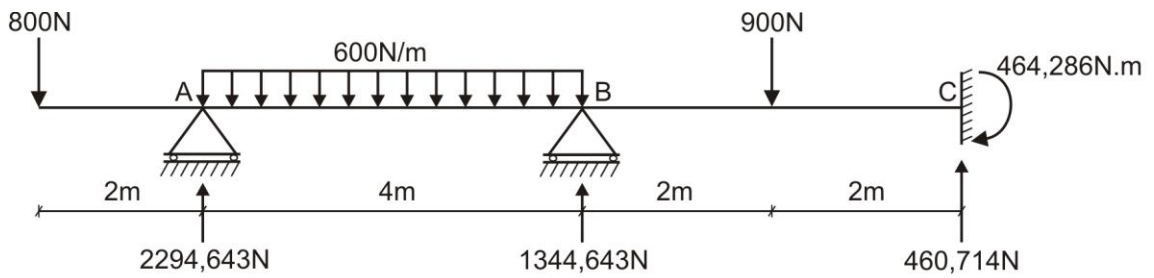
TRAMO BC:

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow V_{CB}(4) + 421,428 - 464,286 - 900(2) = 0 \quad \therefore V_{CB} = 460,714\text{N} \uparrow$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow V_{BC} + 460,714 - 900 = 0 \quad \therefore V_{BC} = 439,286\text{N} \uparrow$$



Ahora, esquematizamos las reacciones en la viga original y graficamos los diagramas correspondientes.

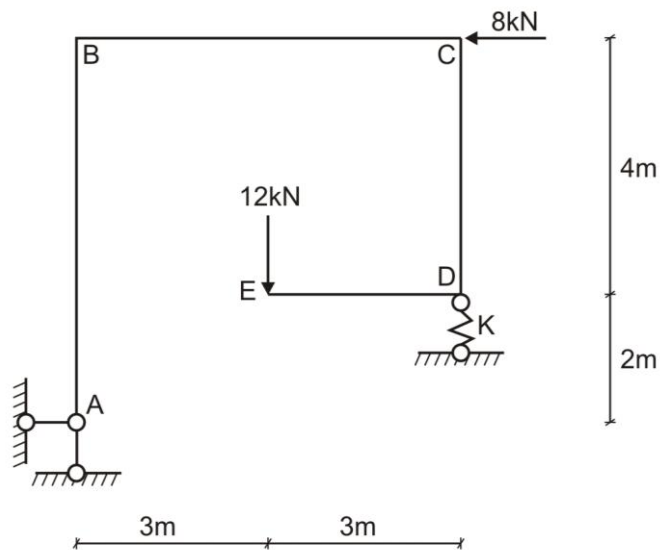




EVALUACIÓN	PRACTICA CALIFICADA Nº 2	SEM. ACADÉMICO	2009 – I
CURSO	RESISTENCIA DE MATERIALES II	SECCIÓN	30F
PROFESOR	Ph.D. GENNER VILLARREAL CASTRO	DURACIÓN	110m
ESCUELA	INGENIERIA CIVIL	CICLO	VI

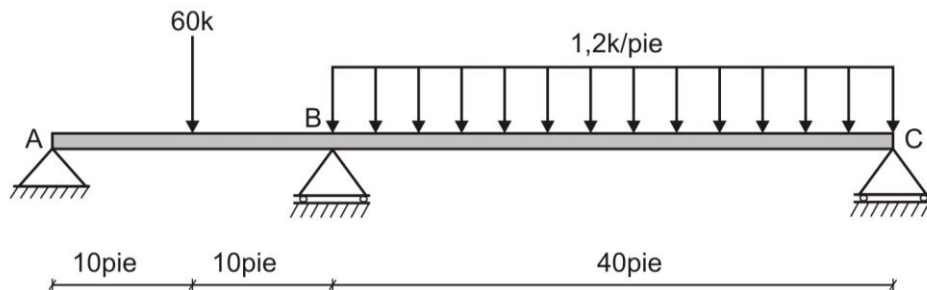
1. ENERGIA POTENCIAL DE DEFORMACION. Determinar la energía potencial de deformación para el pórtico mostrado en la figura con apoyo elástico en D. Expresar su respuesta en función de la rigidez del pórtico EI y la rigidez del resorte K

..... (4 puntos)



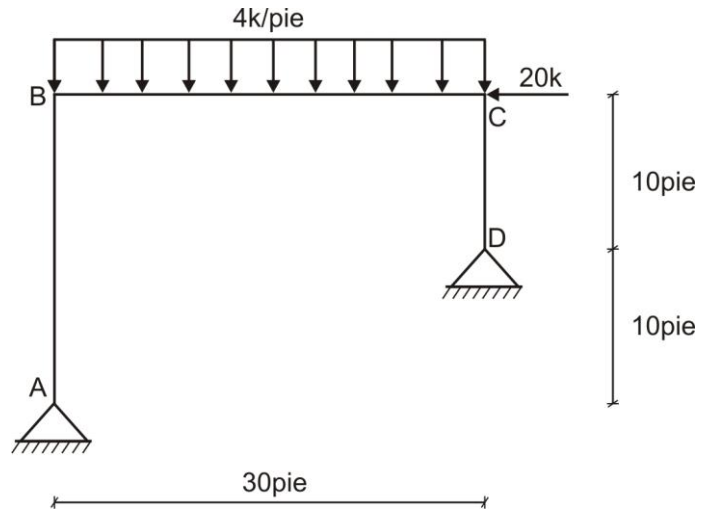
2. TEOREMA DE CASTIGLIANO. Resolver la siguiente viga y graficar sus diagramas de fuerza cortante, momento flector y refuerzo, considerando EI constante para toda la viga.

..... (5 puntos)



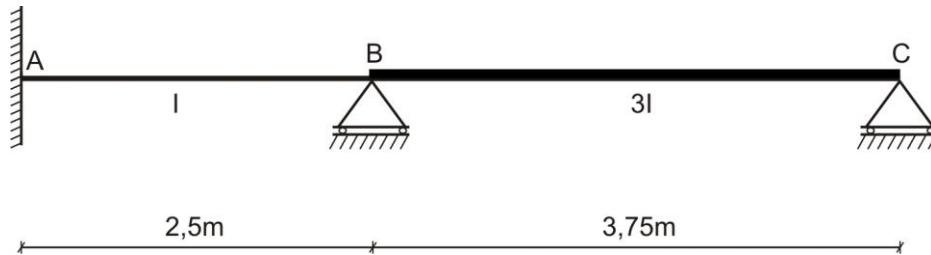
3. TEOREMA DE CASTIGLIANO. Resolver el siguiente pórtico y graficar los diagramas de fuerza axial, fuerza cortante y momento flector, si EI es constante para todo el pórtico.

..... (6 puntos)



4. ECUACION DE LOS TRES MOMENTOS. Para la viga continua mostrada en la figura, determinar las reacciones en los apoyos y graficar los diagramas de fuerza cortante y momento flector, si el apoyo B se asienta 10mm y el apoyo C se asienta 5mm. Considerar $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$ e $I = 40000 \text{ cm}^4$

..... (5 puntos)



FECHA	La Molina, 20 de Abril del 2009
-------	---------------------------------

SOLUCIONARIO DE PRÁCTICA CALIFICADA Nº 2

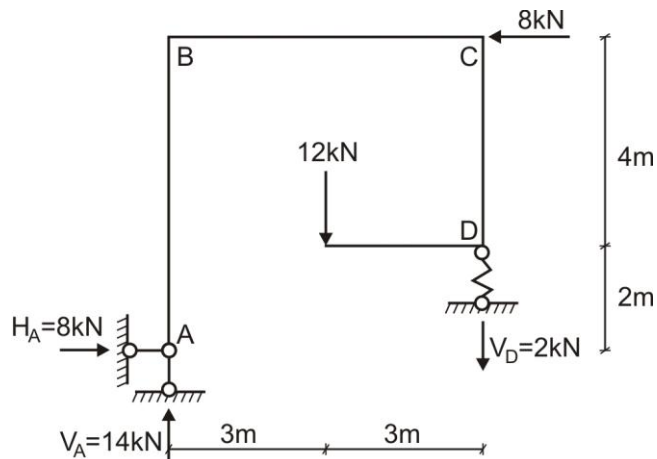
CICLO 2009 – I

1. Calculamos las reacciones en los apoyos:

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad -V_D(6) - 12(3) + 8(6) = 0 \quad \therefore \quad V_D = 2\text{kN} \downarrow$$

$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad V_A - 12 - 2 = 0 \quad \therefore \quad V_A = 14\text{kN} \uparrow$$

$$\sum F_X = 0 \quad \Rightarrow \quad H_A - 8 = 0 \quad \therefore \quad H_A = 8\text{kN} \rightarrow$$

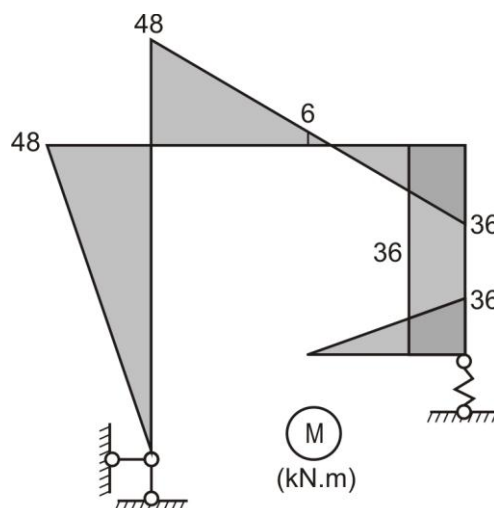


Graficamos el diagrama de momento flector y determinamos la energía potencial de deformación del sistema.

$$U = \sum \int_0^L \frac{M^2 dx}{2EI} + \sum \frac{R_i^2}{2K_i}$$

$$U = \frac{1}{2EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 48 \cdot \frac{2}{3} \cdot 48 + \frac{6}{6} (48 \cdot 48 + 4 \cdot 6 \cdot 6 + 36 \cdot 36) + 4 \cdot 36 \cdot 36 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 36 \cdot \frac{2}{3} \cdot 36 \right] + \frac{(-2)^2}{2K}$$

$$U = \frac{7416}{EI} + \frac{2}{K} \quad (\text{kJ})$$



2. Eliminamos el apoyo en B y lo reemplazamos por V_B

TRAMO I-I ($0 \leq x \leq 10$)

$$M_I = \left(66 - \frac{2V_B}{3} \right) x$$

$$\frac{\partial M_I}{\partial V_B} = -\frac{2x}{3}$$

TRAMO II-II ($10 \leq x \leq 20$)

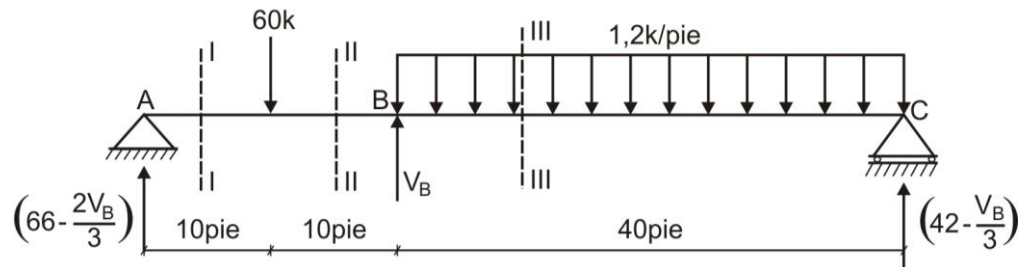
$$M_{II} = \left(66 - \frac{2V_B}{3}\right)x - 60(x - 10)$$

$$\frac{\partial M_{II}}{\partial V_B} = -\frac{2x}{3}$$

TRAMO III-III ($20 \leq x \leq 60$)

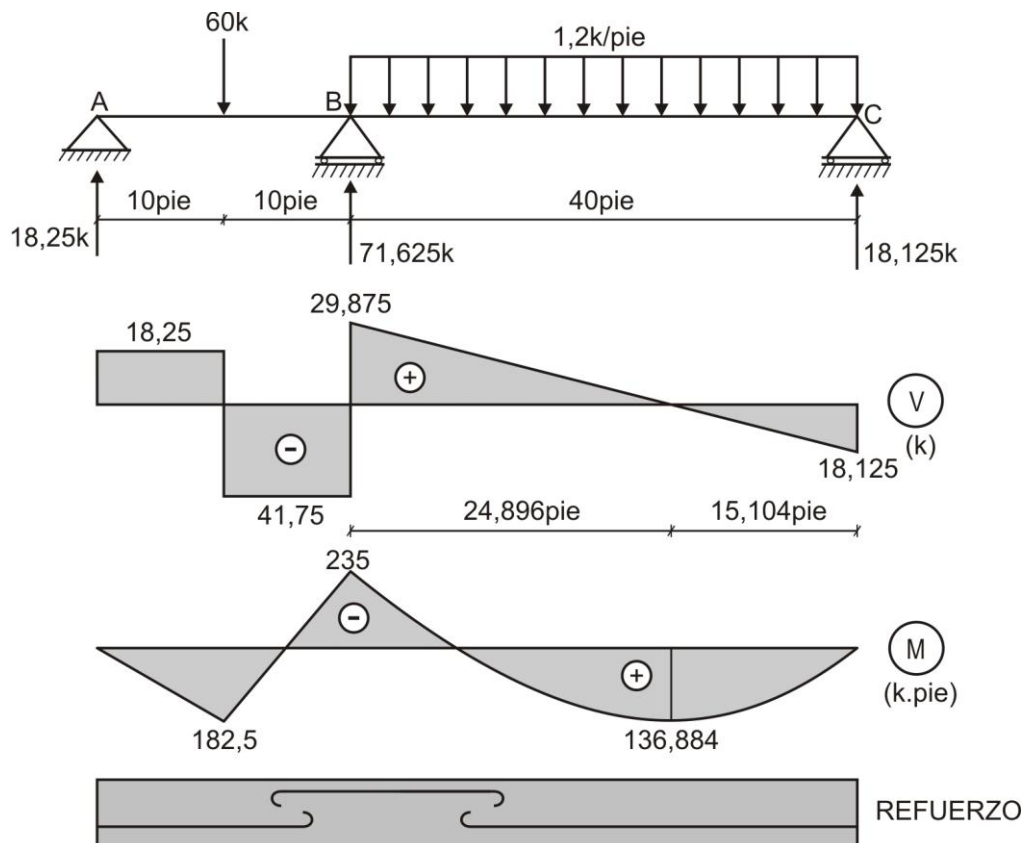
$$M_{III} = \left(66 - \frac{2V_B}{3}\right)x - 60(x - 10) + V_B(x - 20) - 0,6(x - 20)^2$$

$$\frac{\partial M_{III}}{\partial V_B} = -\frac{2x}{3} + x - 20 = \frac{x}{3} - 20$$



Luego, aplicamos la condición:

$$y_B = \frac{\partial W}{\partial V_B} = 0$$



Reemplazamos las ecuaciones obtenidas anteriormente.

$$\frac{1}{EI} \left\{ \int_0^{10} \left(66 - \frac{2V_B}{3} \right) x \left(-\frac{2x}{3} \right) dx + \int_{10}^{20} \left[\left(66 - \frac{2V_B}{3} \right) x - 60(x-10) \right] \left(-\frac{2x}{3} \right) dx + \int_{20}^{60} \left[\left(66 - \frac{2V_B}{3} \right) x - 60(x-10) + V_B(x-20) - 0,6(x-20)^2 \right] \left(\frac{x}{3} - 20 \right) dx \right\} = 0$$

De donde:

$$V_B = 71,625k \uparrow$$

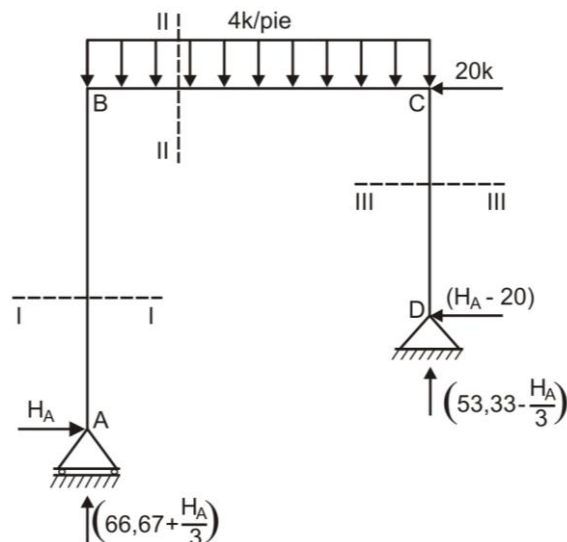
Por equilibrio calculamos las otras reacciones y graficamos los diagramas de fuerza cortante, momento flector y refuerzo, los cuales se muestran en la página anterior.

3. Determinamos el grado de indeterminación del sistema:

$$G.I. = 3C - A = 3(1) - 2 = 1$$

El pórtico es una vez hiperestático.

Eliminamos la componente horizontal del apoyo fijo A y lo reemplazamos por su reacción H_A , obteniendo las otras reacciones en función de H_A



TRAMO I-I (AB) ($0 \leq z \leq 20$)

$$M_I = -H_A z$$

$$\frac{\partial M_I}{\partial H_A} = -z$$

TRAMO II-II (BC) ($0 \leq x \leq 30$)

$$M_{II} = \left(66,67 + \frac{H_A}{3} \right) x - 20H_A - 2x^2$$

$$\frac{\partial M_{II}}{\partial H_A} = \frac{x}{3} - 20$$

TRAMO III-III (CD) ($0 \leq y \leq 10$)

$$M_{III} = \left(66,67 + \frac{H_A}{3} \right) (30) - 4(30)(15) - 20y - H_A(20 - y)$$

$$\frac{\partial M_{III}}{\partial H_A} = 10 - 20 + y = y - 10$$

Luego, aplicamos la condición:

$$x_A = \frac{\partial W}{\partial H_A} = 0$$

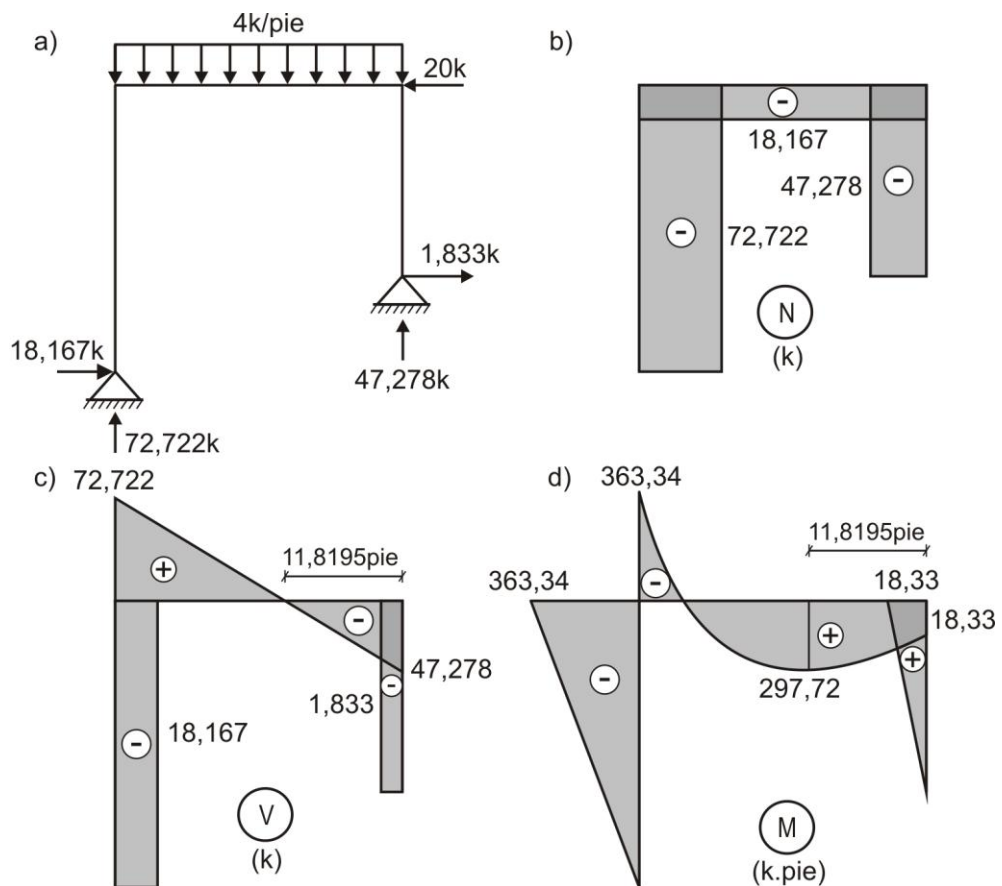
Reemplazamos las ecuaciones obtenidas anteriormente.

$$\frac{1}{EI} \left\{ \int_0^{20} (-H_A z)(-z) dz + \int_0^{30} \left[\left(66,67 + \frac{H_A}{3} \right) x - 20H_A - 2x^2 \right] \left(\frac{x}{3} - 20 \right) dx + \int_0^{10} \left[\left(66,67 + \frac{H_A}{3} \right) (30) - 4(30)(15) - 20y - H_A(20 - y) \right] (y - 10) dy \right\} = 0$$

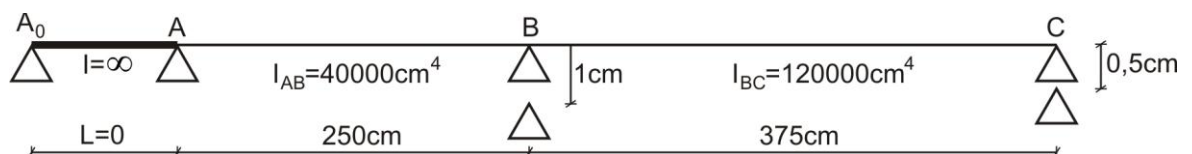
De donde:

$$H_A = 18,167k \rightarrow$$

Con este valor calculamos las otras reacciones y graficamos los diagramas de fuerza axial, fuerza cortante y momento flector.



4. Convertimos el empotramiento en A en un tramo adicional de longitud cero y de inercia infinita. Para facilidad de cálculo, las dimensiones de la viga las expresamos en centímetros.



Ahora, analizamos tramo por tramo desde el extremo izquierdo de la viga hasta el final.

TRAMO A₀AB

$$M_{A_0} \left(\frac{0}{\infty} \right) + 2M_A \left(\frac{0}{\infty} + \frac{250}{40000} \right) + M_B \left(\frac{250}{40000} \right) = \frac{6,2,1 \cdot 10^6 \cdot 0}{0} + \frac{6,2,1 \cdot 10^6 \cdot (-1)}{250}$$

$$0,0125M_A + 0,00625M_B = -50400 \quad \dots\dots\dots (a)$$

TRAMO ABC

$$M_A \left(\frac{250}{40000} \right) + 2M_B \left(\frac{250}{40000} + \frac{375}{120000} \right) + M_C \left(\frac{375}{120000} \right) = \frac{6,2,1 \cdot 10^6 \cdot 1}{250} + \frac{6,2,1 \cdot 10^6 \cdot 0,5}{375}$$

$$0,00625M_A + 0,01875M_B = 67200 \quad \dots\dots\dots (b)$$

Resolvemos (a) y (b), obteniendo:

$$M_A = -6988800 \text{kg.cm}$$

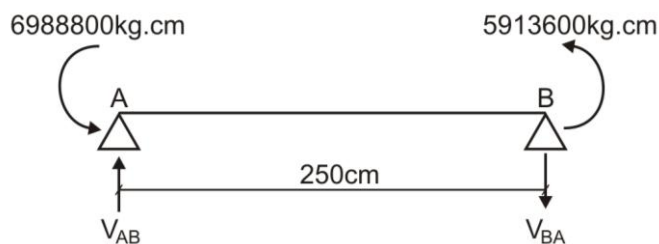
$$M_B = 5913600 \text{kg.cm}$$

Calculamos las reacciones en cada tramo.

TRAMO AB:

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad 5913600 + 6988800 - V_{BA}(250) = 0 \quad \therefore \quad V_{BA} = 51609,6 \text{kg} \downarrow$$

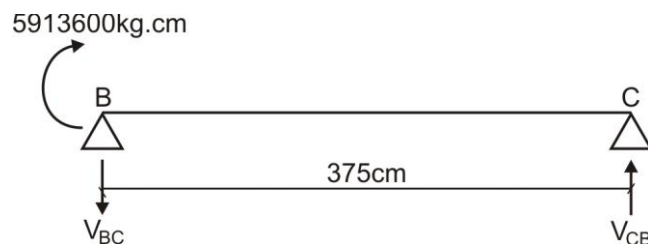
$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{AB} - 51609,6 = 0 \quad \therefore \quad V_{AB} = 51609,6 \text{kg} \uparrow$$



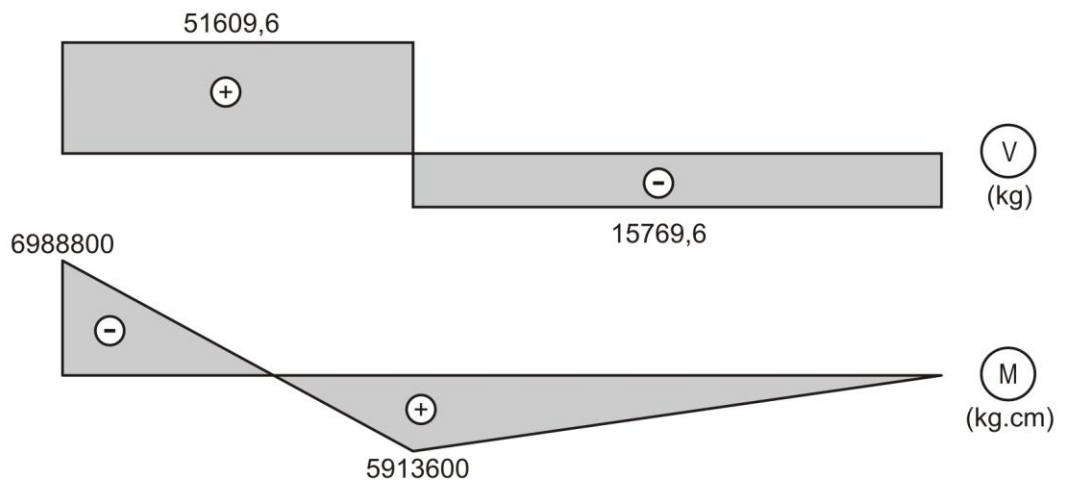
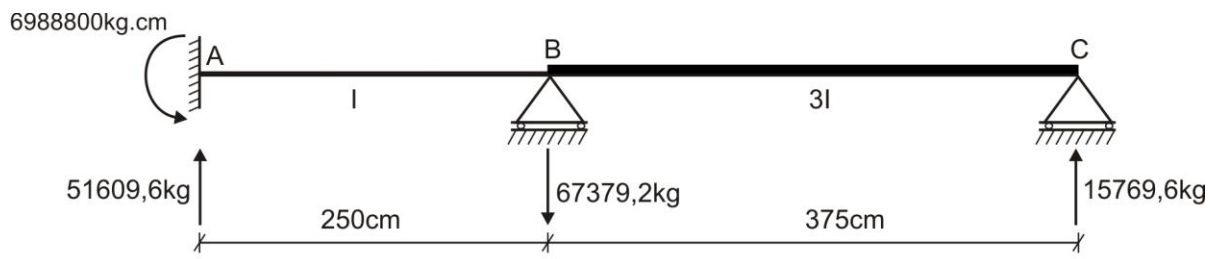
TRAMO BC:

$$\sum M_B = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{CB}(375) - 5913600 = 0 \quad \therefore \quad V_{CB} = 15769,6 \text{kg} \uparrow$$

$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad -V_{BC} + 15769,6 = 0 \quad \therefore \quad V_{BC} = 15769,6 \text{kg} \downarrow$$



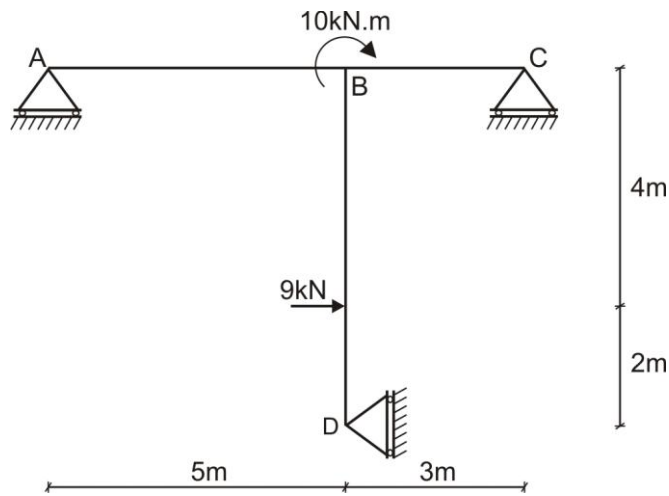
Esquematisamos las reacciones en la viga y graficamos sus diagramas de fuerza cortante y momento flector.



EVALUACIÓN	PRACTICA CALIFICADA Nº 2	SEM. ACADÉMICO	2009 – II
CURSO	RESISTENCIA DE MATERIALES II	SECCIÓN	30F
PROFESOR	Ph.D. GENNER VILLARREAL CASTRO	DURACIÓN	110m
ESCUELA	INGENIERIA CIVIL	CICLO	VI

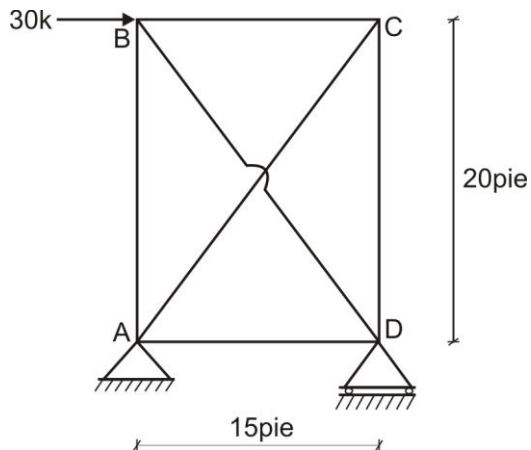
1. ENERGIA POTENCIAL DE DEFORMACION. Determinar la energía potencial de deformación para el pórtico mostrado en la figura, si es de rigidez constante.

..... (4 puntos)



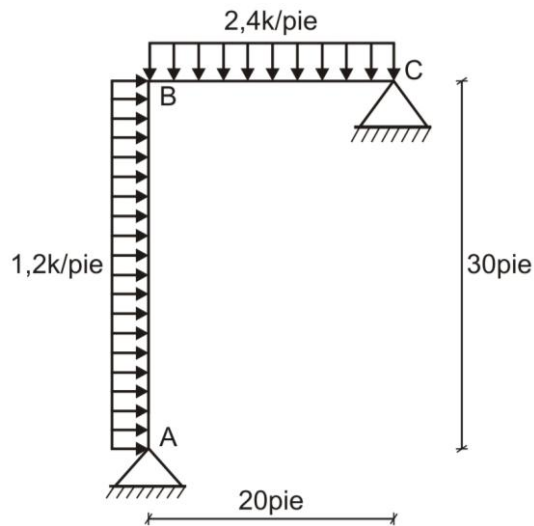
2. TEOREMA DE CASTIGLIANO. Resolver la armadura mostrada en la figura, considerando que la rigidez EA es constante en toda la estructura.

..... (5 puntos)



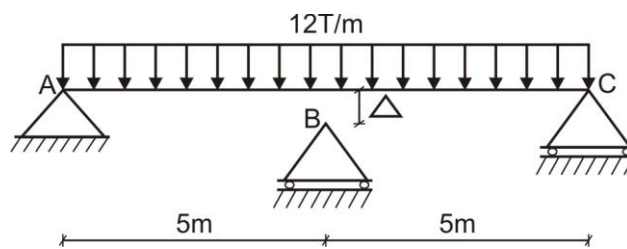
3. TEOREMA DE CASTIGLIANO. Resolver el pórtico mostrado en la figura, considerando EI constante en toda la estructura.

..... (6 puntos)



4. ECUACION DE LOS TRES MOMENTOS. La viga ABC antes que se aplique la carga, descansa sobre los apoyos A y C, existiendo una pequeña holgura entre la viga y el apoyo B. Cuando se aplica la carga uniformemente distribuida en la viga, la holgura desaparece y se desarrollan reacciones en los tres apoyos. ¿Cuál debe ser la magnitud de la holgura Δ a fin de que las tres reacciones sean iguales? Considerar $E = 2345000T/m^2$ e $I = 312500cm^4$ para toda la viga.

..... (5 puntos)

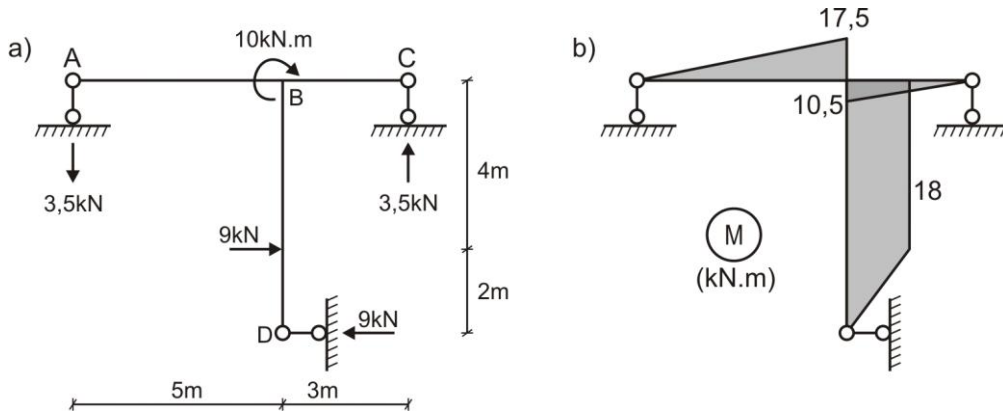


FECHA	La Molina, 21 de Setiembre del 2009
-------	-------------------------------------

SOLUCIONARIO DE PRÁCTICA CALIFICADA Nº 2

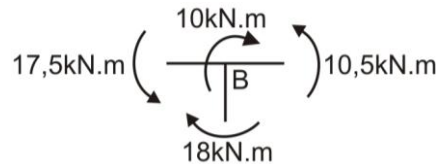
CICLO 2009 – II

1. Calculamos las reacciones en los apoyos y graficamos el diagrama de momento flector.



Comprobamos el equilibrio en el nudo B

$$\sum M_B = 0 \quad \Rightarrow \quad 10 + 18 - 17,5 - 10,5 = 0$$



Determinamos la energía potencial de deformación:

$$U = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 17,5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 17,5 + \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 10,5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 10,5 + \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 18 \cdot \frac{2}{3} \cdot 18 + \frac{1}{2EI} \cdot 4 \cdot 18 \cdot 18$$

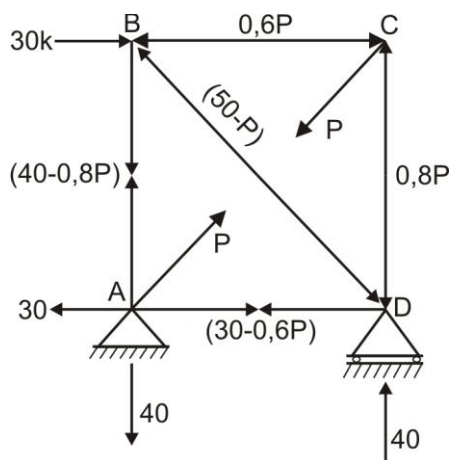
$$U = \frac{1066,33}{EI} \quad (\text{kJ})$$

2. Determinamos el grado de indeterminación de la armadura.

$$G.I. = 9 - 2(4) = 1$$

La armadura es una vez hiperestática.

Reemplazamos la fuerza interna AC por P y determinamos las otras fuerzas internas en función de P, así como las reacciones en los apoyos.



Para mayor facilidad de cálculo, elaboramos una tabla, en la cual se incluyan todas las características del análisis de la armadura.

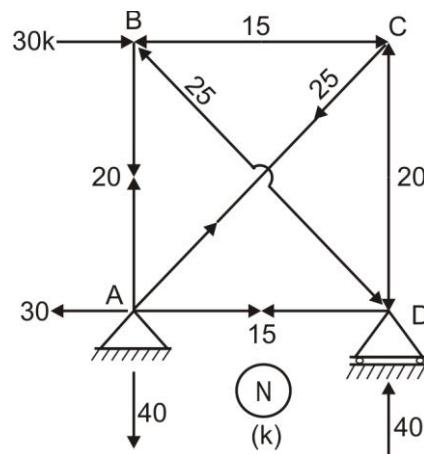
BARRA	L	EA	$F_{(P)}$	$\frac{\partial F_{(P)}}{\partial P}$	$F \frac{\partial F}{\partial P} \frac{L}{EA}$
AB	20	EA	$40 - 0,8P$	-0,8	$\frac{-640 + 12,8P}{EA}$
AC	25	EA	P	1	$\frac{25P}{EA}$
AD	15	EA	$30 - 0,6P$	-0,6	$\frac{-270 + 5,4P}{EA}$
BC	15	EA	$-0,6P$	-0,6	$\frac{5,4P}{EA}$
BD	25	EA	$-(50 - P)$	1	$\frac{-1250 + 25P}{EA}$
CD	20	EA	$-0,8P$	-0,8	$\frac{12,8P}{EA}$

$$\sum = \frac{-2160 + 86,4P}{EA}$$

Luego:

$$\frac{-2160 + 86,4P}{EA} = 0 \quad \Rightarrow \quad P = 25k$$

En consecuencia, las reacciones y fuerzas internas finales son las mostradas en la figura.



3. Reemplazamos la componente horizontal en C por H_C , calculamos las reacciones en los apoyos y planteamos las ecuaciones de momento para cada tramo.

TRAMO I-I (CB) ($0 \leq x \leq 20$)

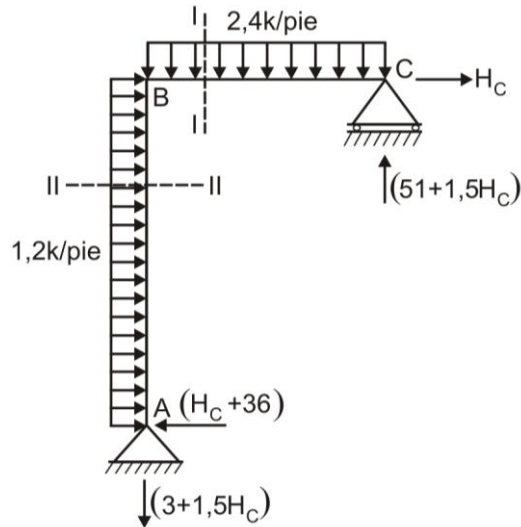
$$M_{CB} = (51 + 1,5H_C)x - 1,2x^2$$

$$\frac{\partial M_{CB}}{\partial H_C} = 1,5x$$

TRAMO II-II (BA) ($0 \leq y \leq 30$)

$$M_{BA} = (51 + 1,5H_C)(20) - 480 - H_C y - 0,6y^2$$

$$\frac{\partial M_{BA}}{\partial H_C} = 30 - y$$



Como:

$$\delta_H^C = 0$$

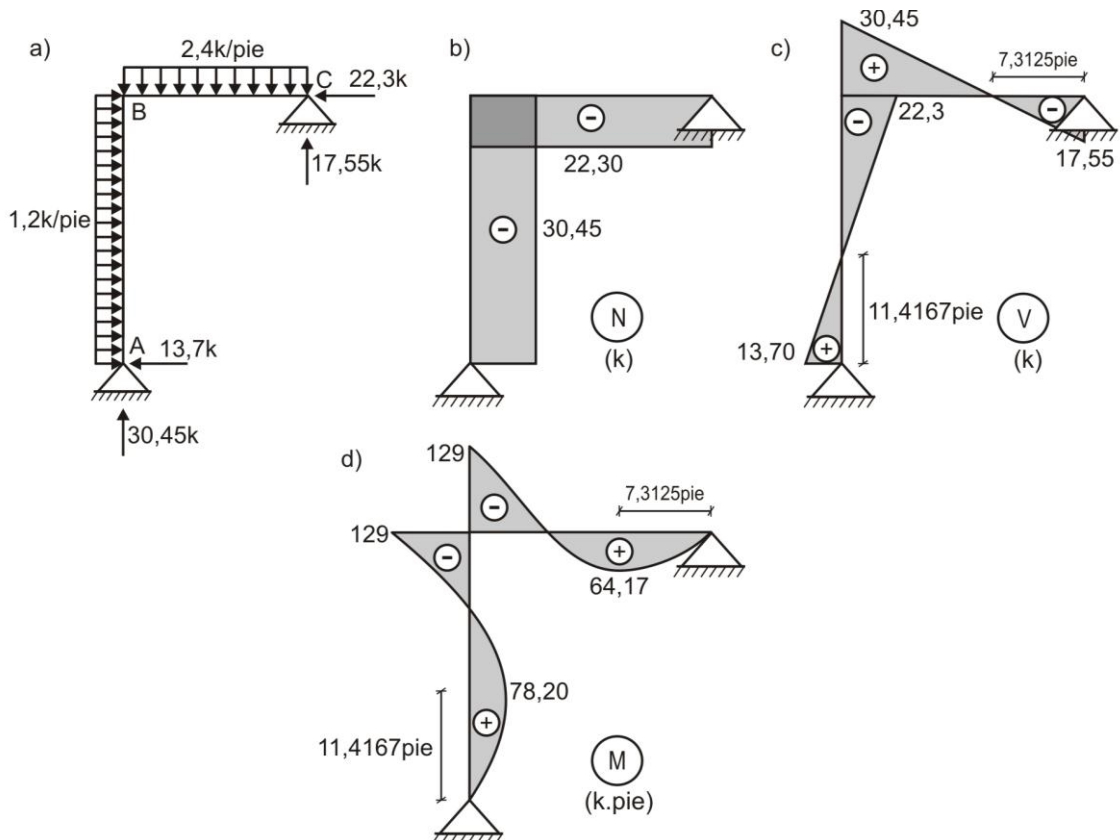
Se tendrá:

$$\frac{1}{EI} \left[\int_0^{20} (51x + 1.5H_C x - 1.2x^2)(1.5x) dx + \int_0^{30} (540 + 30H_C - H_C y - 0.6y^2)(30 - y) dy \right] = 0$$

De donde:

$$H_C = -22.3k \leftarrow$$

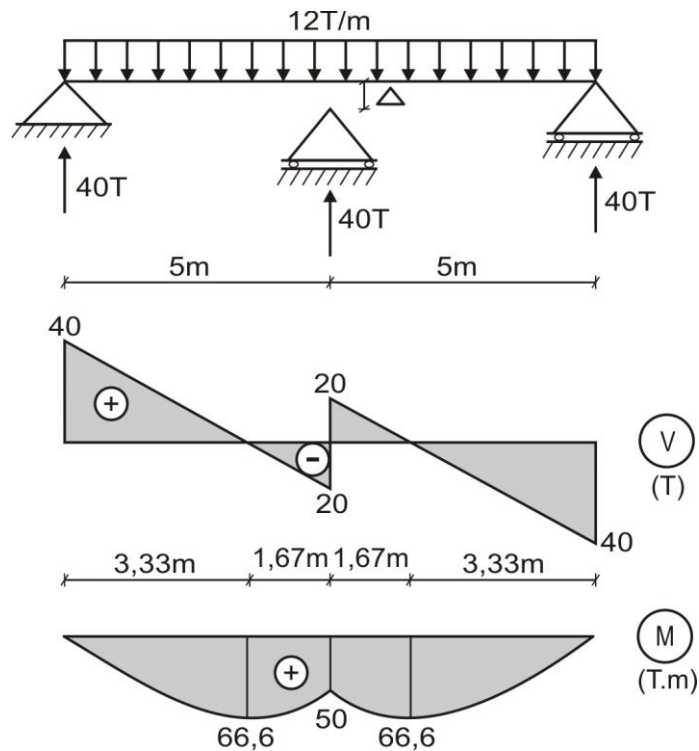
Con los valores obtenidos, calculamos las reacciones en los apoyos y graficamos los diagramas de fuerzas internas.



4. Calculamos las reacciones en los apoyos:

$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad 3R - 12(10) = 0 \quad \therefore \quad R = 40T \uparrow$$

Graficamos los diagramas de fuerza cortante y momento flector.



Aplicamos la fórmula, cuando existe asentamiento, conociendo que el valor del momento en B es 50T.m

$$2.50 \left(\frac{5}{312500 \cdot 10^{-8}} + \frac{5}{312500 \cdot 10^{-8}} \right) = -\frac{6(12.5^3 / 24)}{312500 \cdot 10^{-8}} - \frac{6(12.5^3 / 24)}{312500 \cdot 10^{-8}} + \frac{6.2345000 \cdot \Delta}{5} + \frac{6.2345000 \cdot \Delta}{5}$$

De donde:

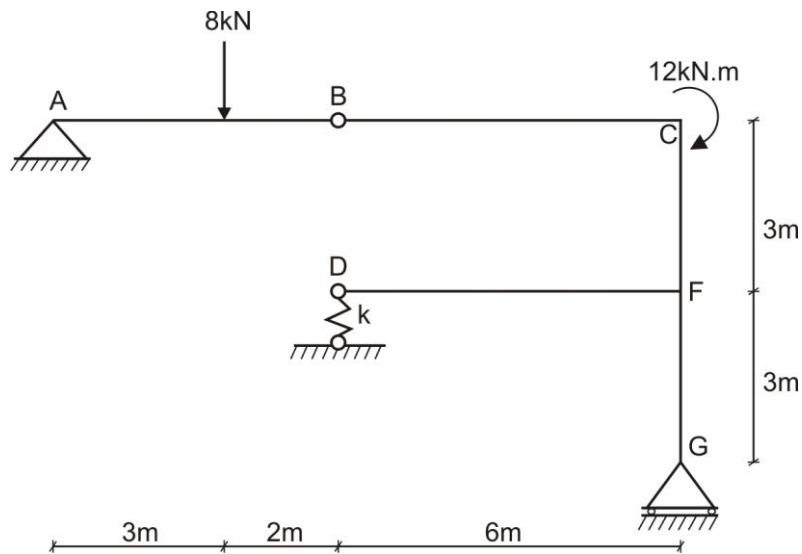
$$\Delta = 0,10m = 10cm$$



EVALUACIÓN	PRACTICA CALIFICADA Nº 2	SEM. ACADÉMICO	2010 – I
CURSO	RESISTENCIA DE MATERIALES II	SECCIÓN	30F
PROFESOR	Ph.D. GENNER VILLARREAL CASTRO	DURACIÓN	110m
ESCUELA	INGENIERIA CIVIL	CICLO	VI

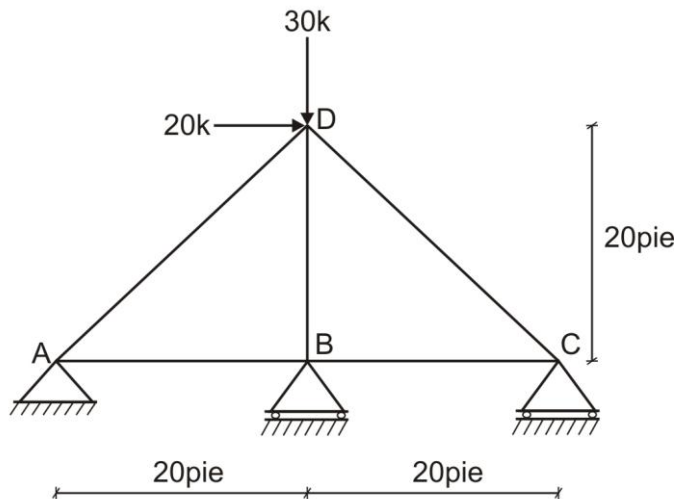
1. ENERGIA POTENCIAL DE DEFORMACION. Determinar la energía potencial de deformación para el pórtico mostrado en la figura, si es de rigidez constante en toda la estructura y la rigidez del resorte en D es $k = EI/98$

..... (5 puntos)



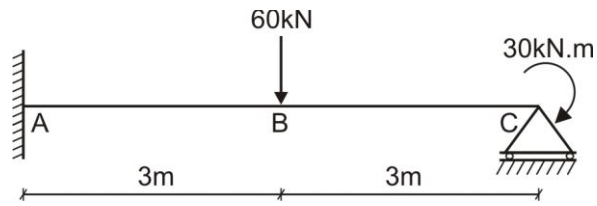
2. TEOREMA DE CASTIGLIANO. Resolver la armadura mostrada en la figura, si las áreas de las barras AB, AD, BC y CD son 1,5 veces mayor al área de la barra BD. Considerar que el módulo de elasticidad E es igual para toda la estructura.

..... (5 puntos)



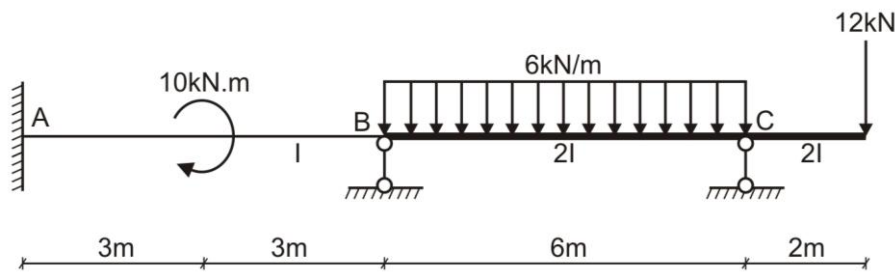
3. TEOREMA DE CASTIGLIANO. Resolver la viga mostrada en la figura, graficando sus diagramas de fuerza cortante, momento flector y refuerzo.

..... (5 puntos)



4. ECUACION DE LOS TRES MOMENTOS. Resolver la viga mostrada en la figura, graficando sus diagramas de fuerza cortante, momento flector y refuerzo.

..... (5 puntos)



FECHA	La Molina, 19 de Abril del 2010
-------	---------------------------------

SOLUCIONARIO DE PRÁCTICA CALIFICADA Nº 2

CICLO 2010 – I

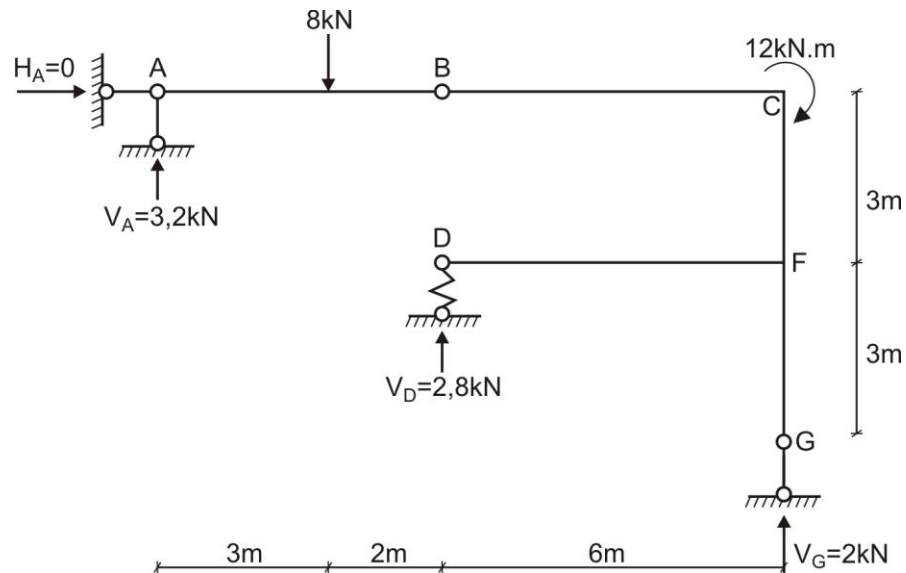
1. Calculamos las reacciones en los apoyos:

$$\sum M_B^{izq} = 0 \Rightarrow V_A(5) - 8(2) = 0 \quad \therefore V_A = 3,2\text{kN} \uparrow$$

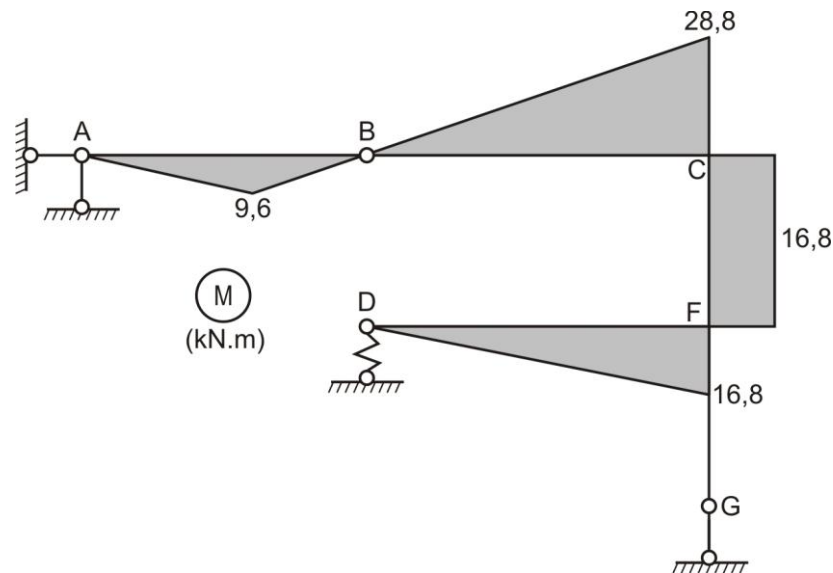
$$\sum F_X = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

$$\sum M_D = 0 \Rightarrow -V_G(6) + 12 + 3,2(5) - 8(2) = 0 \quad \therefore V_G = 2\text{kN} \uparrow$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow 3,2 - 8 + V_D + 2 = 0 \quad \therefore V_D = 2,8\text{kN} \uparrow$$



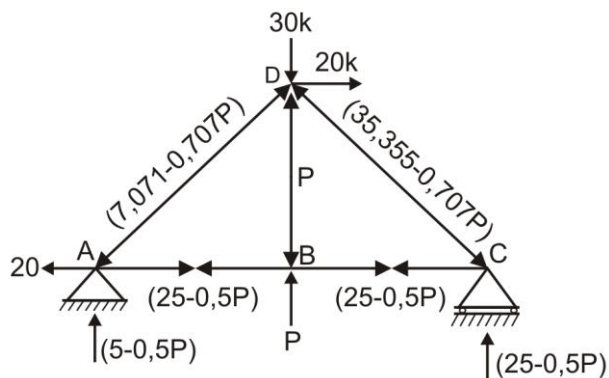
Ahora, graficamos el diagrama de momento flector.



Determinamos la energía potencial de deformación:

$$U = \sum \int \frac{M^2 dx}{2EI} + \frac{V_D^2}{2k} = \frac{1}{2EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 9,6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 9,6 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 9,6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 9,6 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 28,8 \cdot \frac{2}{3} \cdot 28,8 + 3 \cdot 16,8 \cdot 16,8 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 16,8 \cdot \frac{2}{3} \cdot 16,8 \right] + \frac{2,8^2}{2(EI/98)} = \frac{1611,84}{EI} + \frac{384,16}{EI} = \frac{1996}{EI} \text{ (kJ)}$$

2. Eliminamos la reacción en B y lo reemplazamos por "P", obteniendo las otras reacciones y fuerzas internas en función de P



Para mayor facilidad de cálculo, elaboramos una tabla, en la cual se incluyan todas las características del análisis de la armadura.

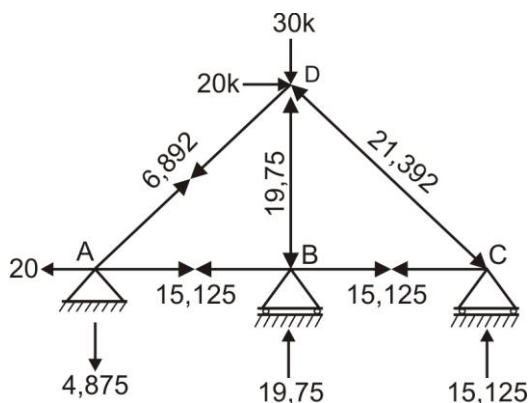
BARRA	$\frac{L}{EA}$	N	$\frac{\partial N}{\partial P}$	$N \left(\frac{\partial N}{\partial P} \right) \frac{L}{EA}$
AB	$\frac{20}{1,5EA}$	$25 - 0,5P$	-0,5	$\frac{-166,667 + 3,333P}{EA}$
AD	$\frac{20\sqrt{2}}{1,5EA}$	$-(7,071 - 0,707P)$	0,707	$\frac{-94,266 + 9,425P}{EA}$
BC	$\frac{20}{1,5EA}$	$25 - 0,5P$	-0,5	$\frac{-166,667 + 3,333P}{EA}$
CD	$\frac{20\sqrt{2}}{1,5EA}$	$-(35,355 - 0,707P)$	0,707	$\frac{-471,329 + 9,425P}{EA}$
BD	$\frac{20}{EA}$	-P	-1	$\frac{20P}{EA}$

$$\Sigma = \frac{-898,929 + 45,516P}{EA}$$

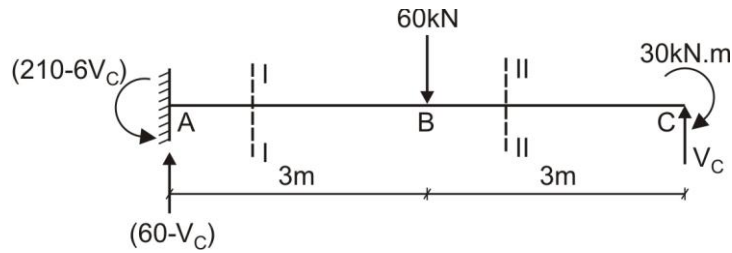
Como:

$$\delta_v^B = \frac{\partial W}{\partial P} = 0 \Rightarrow \frac{-898,929 + 45,516P}{EA} = 0 \quad \therefore \quad P = 19,75k$$

Luego, las fuerzas internas finales y reacciones se obtendrán reemplazando el valor de "P" en la armadura anterior.



3. Eliminamos el apoyo en C y lo reemplazamos por V_C , obteniendo las reacciones en el empotramiento A en función de V_C



TRAMO I-I ($0 \leq x \leq 3$)

$$M_I = (60 - V_C)x - (210 - 6V_C)$$

$$\frac{\partial M_I}{\partial V_C} = -x + 6$$

TRAMO II-II ($3 \leq x \leq 6$)

$$M_{II} = (60 - V_C)x - (210 - 6V_C) - 60(x - 3)$$

$$\frac{\partial M_{II}}{\partial V_C} = -x + 6$$

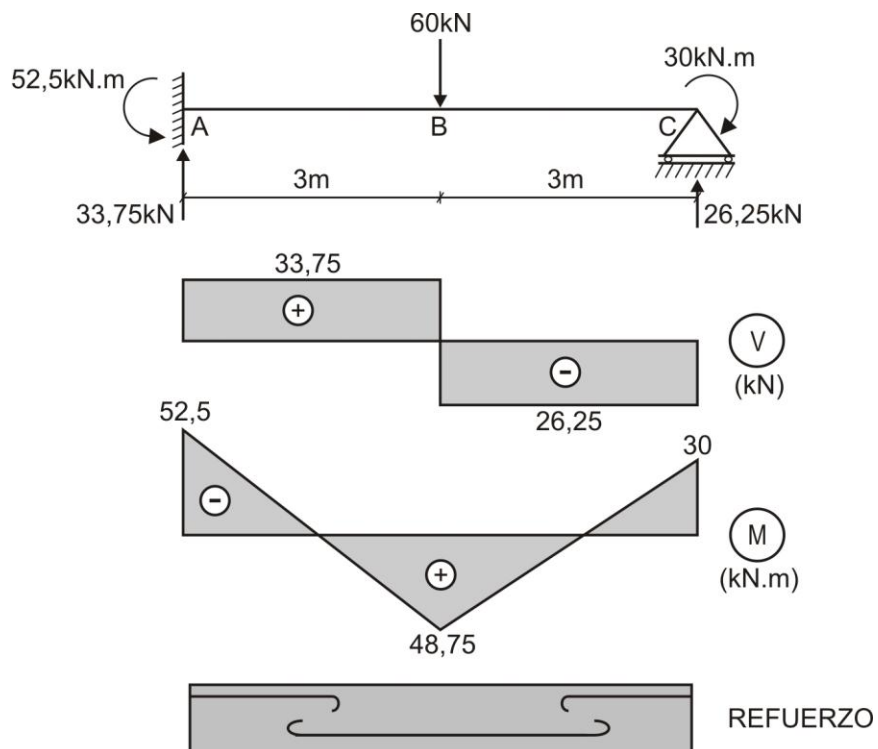
Luego:

$$\frac{1}{EI} \left\{ \int_0^3 [(60 - V_C)x - (210 - 6V_C)](-x + 6)dx + \int_3^6 [(60 - V_C)x - (210 - 6V_C) - 60(x - 3)](-x + 6)dx \right\} = 0$$

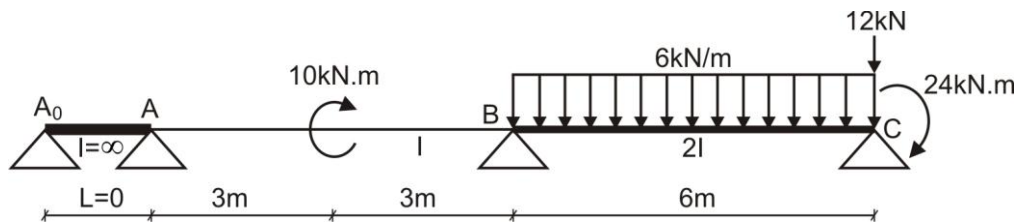
Resolvemos los integrales y obtenemos:

$$V_C = 26,25\text{kN} \uparrow$$

Con el valor obtenido, graficamos los diagramas finales requeridos.



4. Eliminamos el empotramiento y lo reemplazamos por un tramo adicional de longitud cero y de inercia infinita. El voladizo lo reemplazamos por su acción equivalente.



TRAMO A₀AB

$$M_{A_0} \left(\frac{0}{\infty} \right) + 2M_A \left(\frac{0}{\infty} + \frac{6}{I} \right) + M_B \left(\frac{6}{I} \right) = -\frac{6(0)}{\infty} - \frac{6 \left[10 \cdot \frac{6}{6} \left(\frac{3 \cdot 3^2}{6^2} - 1 \right) \right]}{I}$$

$$12M_A + 6M_B = 15 \quad \dots\dots\dots (a)$$

TRAMO ABC

$$M_A \left(\frac{6}{I} \right) + 2M_B \left(\frac{6}{I} + \frac{6}{2I} \right) + M_C \left(\frac{6}{2I} \right) = -\frac{6 \left[10 \cdot \frac{6}{6} \left(1 - \frac{3 \cdot 3^2}{6^2} \right) \right]}{I} - \frac{6 \left[\frac{6 \cdot 6^3}{24} \right]}{2I}$$

$$6M_A + 18M_B = -105 \quad \dots\dots\dots (b)$$

Resolvemos (a) y (b), obteniendo:

$$M_A = 5\text{kN.m}$$

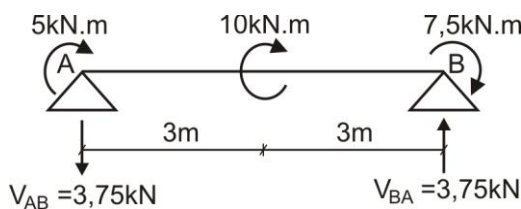
$$M_B = -7,5\text{kN.m}$$

Determinamos las reacciones en los apoyos, efectuando el equilibrio en cada tramo.

TRAMO AB:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_{BA}(6) - 5 - 10 - 7,5 = 0 \quad \therefore V_{BA} = 3,75\text{kN} \uparrow$$

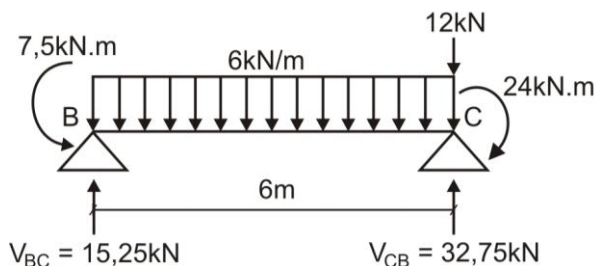
$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow -V_{AB} + 3,75 = 0 \quad \therefore V_{AB} = 3,75\text{kN} \downarrow$$



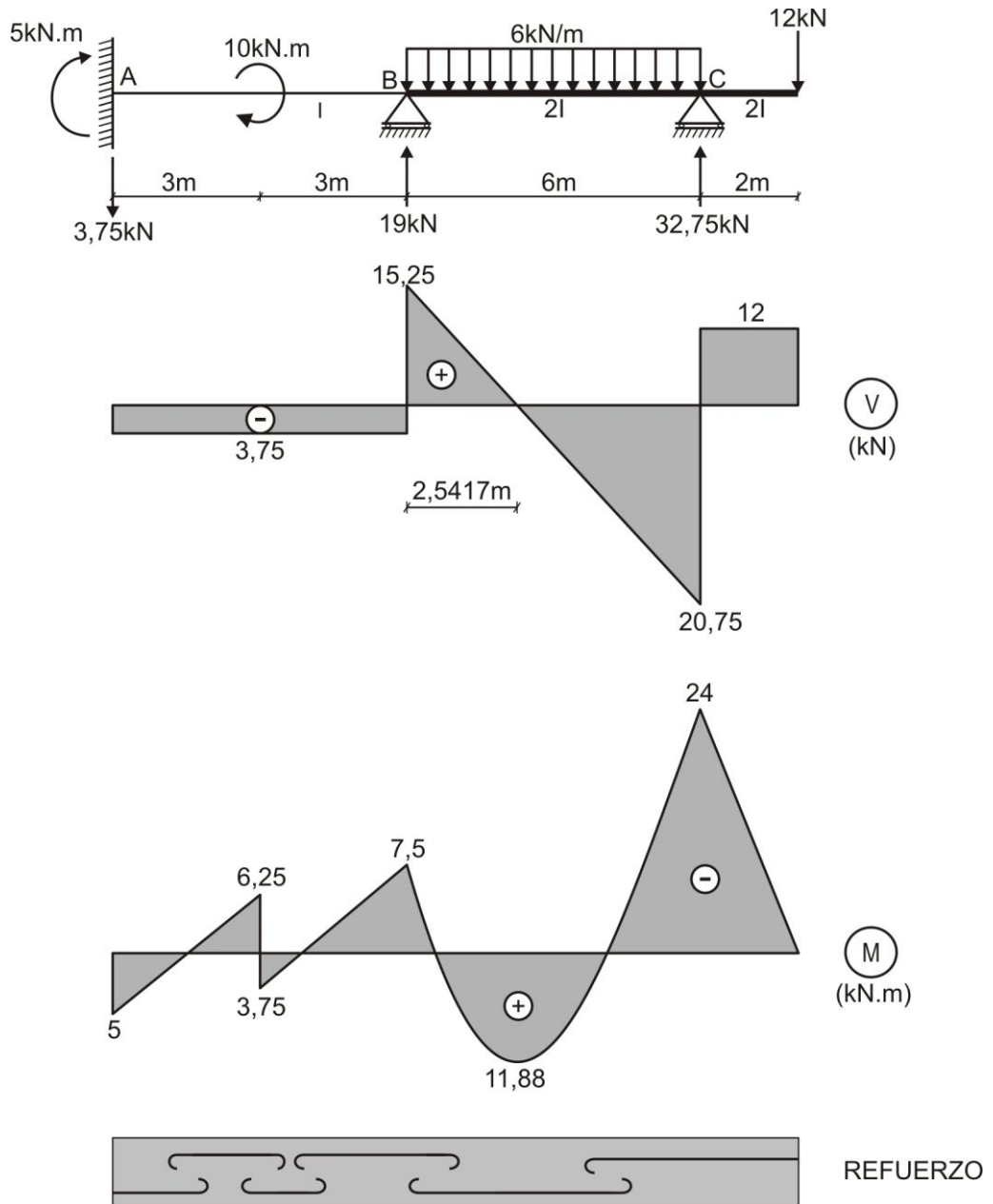
TRAMO BC:

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow V_{CB}(6) - 6(6)(3) - 12(6) - 24 + 7,5 = 0 \quad \therefore V_{CB} = 32,75\text{kN} \uparrow$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow V_{BC} + 32,75 - 6(6) - 12 = 0 \quad \therefore V_{BC} = 15,25\text{kN} \uparrow$$



De esta manera, graficamos los diagramas finales de fuerza cortante, momento flector y refuerzo.

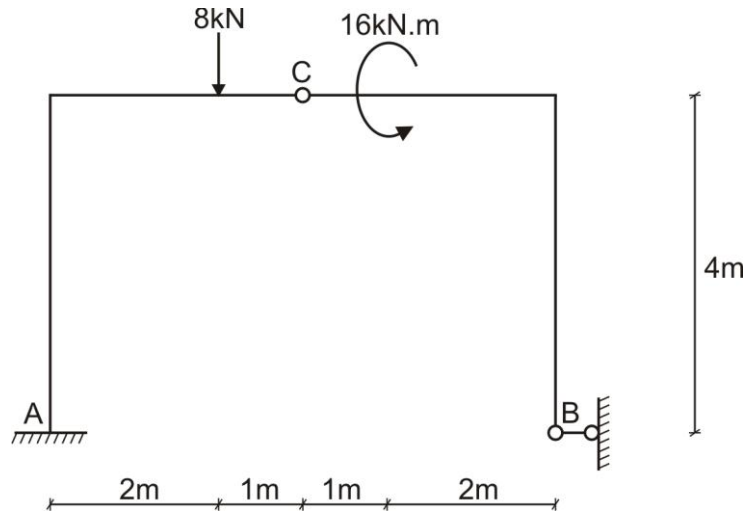




EVALUACIÓN	PRACTICA CALIFICADA Nº 2	SEM. ACADÉMICO	2010 – II
CURSO	RESISTENCIA DE MATERIALES II	SECCIÓN	30F
PROFESOR	Ph.D. GENNER VILLARREAL CASTRO	DURACIÓN	110m
ESCUELA	INGENIERIA CIVIL	CICLO	VI

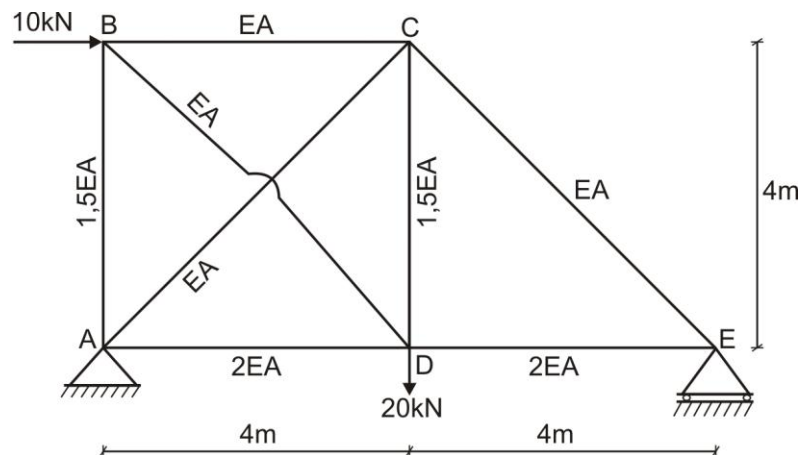
1. ENERGIA POTENCIAL DE DEFORMACION. Para el pórtico de concreto armado de sección constante mostrado en la figura, se pide determinar la energía potencial de deformación considerando todas las fuerzas internas, si $E = 3.10^7 \text{ kPa}$; $G = 0,43E = 1,29.10^7 \text{ kPa}$; $A = 0,24\text{m}^2$; $I = 7,2.10^{-3} \text{ m}^4$ y $k = 1,2$

..... (5 puntos)



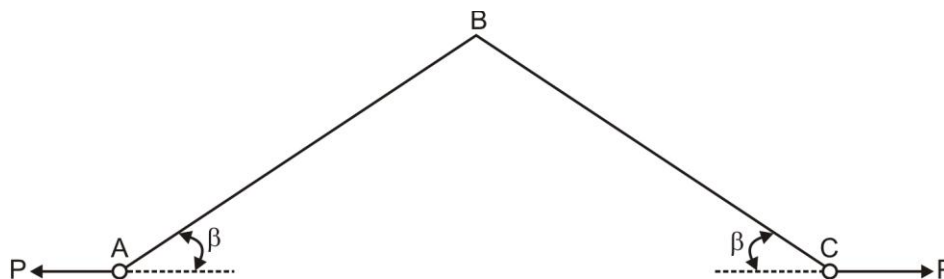
2. TEOREMA DE CASTIGLIANO. Determinar las fuerzas internas en las barras de la armadura mostrada en la figura, cuyas rigideces se dan en el mismo gráfico.

..... (5 puntos)



3. TEOREMA DE CASTIGLIANO. El bastidor ABC mostrado en la figura está cargado por las fuerzas P que actúan en los puntos A y C. Los miembros AB y BC son idénticos y tienen una longitud L, rigidez flexionante EI y rigidez axial EA. Determinar el incremento en longitud Δ entre los puntos A y C, debido a las fuerzas P, considerando los efectos de flexión y axial en las deformaciones.

..... (5 puntos)



4. ECUACION DE LOS TRES MOMENTOS. Determinar los momentos flexionantes $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6, M_7, M_8$ en los apoyos de una viga continua con siete claros de igual longitud L, cuando sólo está cargado el claro central con una carga uniformemente distribuida de intensidad w

..... (5 puntos)

FECHA	La Molina, 20 de Setiembre del 2010
-------	-------------------------------------

SOLUCIONARIO DE PRÁCTICA CALIFICADA Nº 2

CICLO 2010 – II

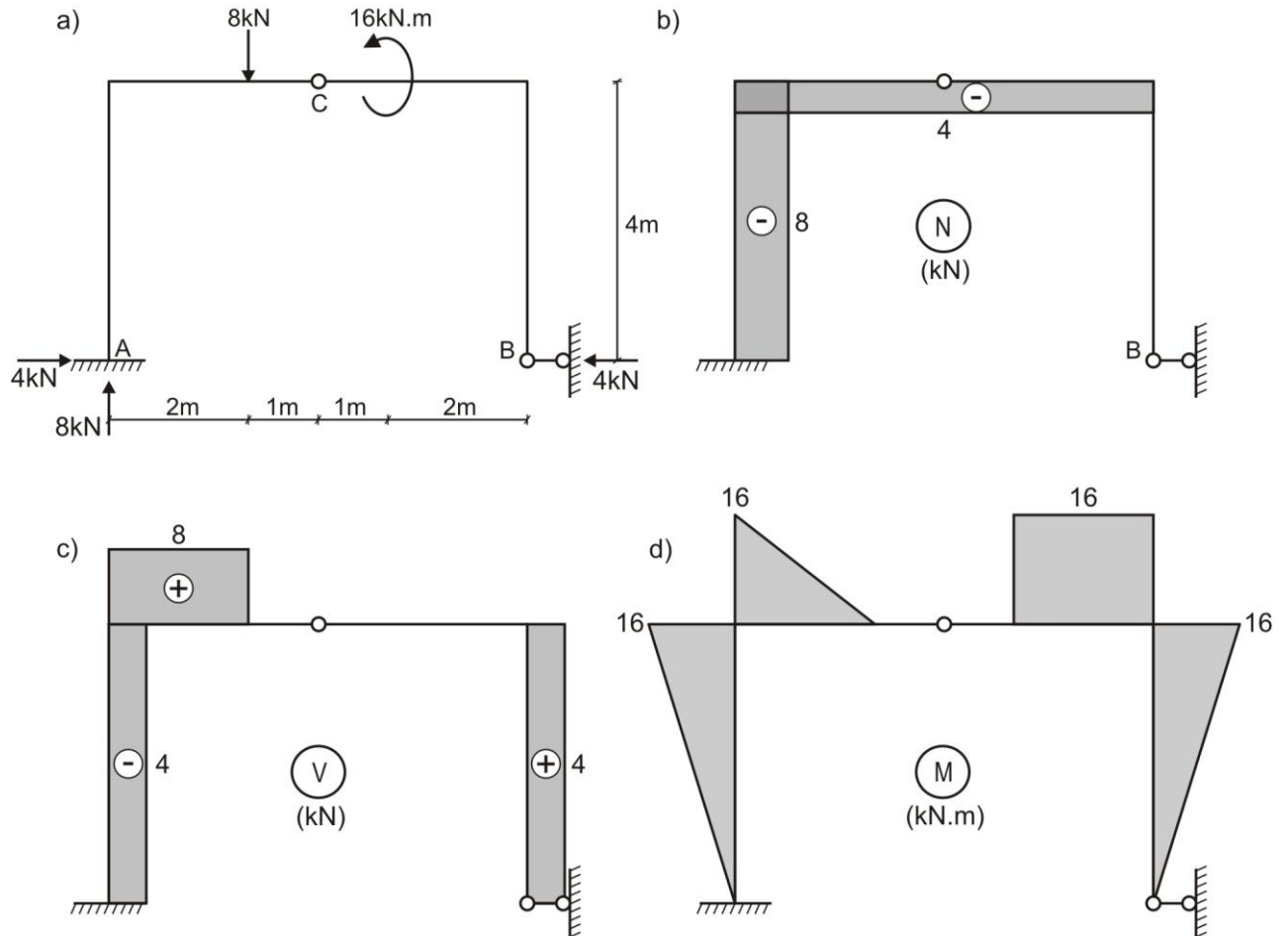
1. Determinamos las rigideces por todo concepto.

$$EI = 3 \cdot 10^7 \cdot 7,2 \cdot 10^{-3} = 2,16 \cdot 10^5 \text{ kN.m}^2$$

$$GA = 1,29 \cdot 10^7 \cdot 0,24 = 30,96 \cdot 10^5 \text{ kN}$$

$$EA = 3 \cdot 10^7 \cdot 0,24 = 72 \cdot 10^5 \text{ kN}$$

Graficamos los diagramas de fuerzas internas.



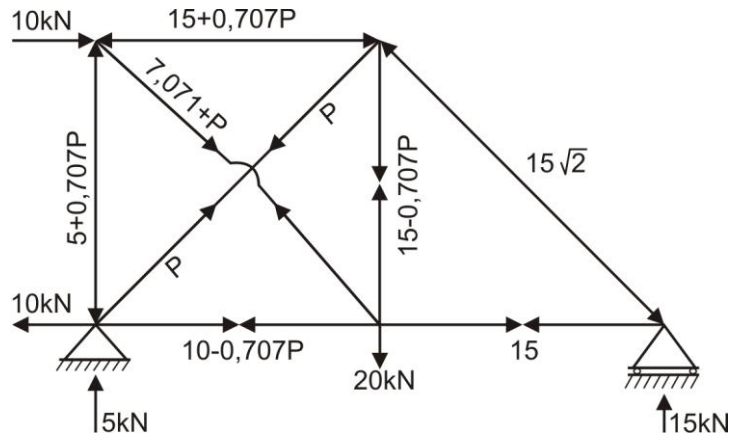
Determinamos la energía potencial de deformación.

$$U = \sum \int \frac{N^2 dx}{2EA} + \sum k \int \frac{V^2 dx}{2GA} + \sum \int \frac{M^2 dx}{2EI}$$

$$U = \frac{1}{2,72 \cdot 10^5} [(-8)(4)(-8) + (-4)(6)(-4)] + 1,2 \cdot \frac{1}{2,30,96 \cdot 10^5} [(-4)(4)(-4) + 8 \cdot 2 \cdot 8 + 4 \cdot 4 \cdot 4] +$$

$$+ \frac{1}{2,2,16 \cdot 10^5} \left[\frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 16 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 16 + 16 \cdot 2 \cdot 16 \right] = 323,45 \cdot 10^{-5} \text{ kJ} = 3,2345 \text{ J}$$

2. Reemplazamos la fuerza interna de la barra AC por "P" y calculamos las otras fuerzas internas en función de "P", tal como se muestra en la figura. Previamente, se calcularán las reacciones en los apoyos.



Para mayor facilidad de cálculo, elaboramos una tabla, en la cual se incluyan todas las características del análisis de la armadura.

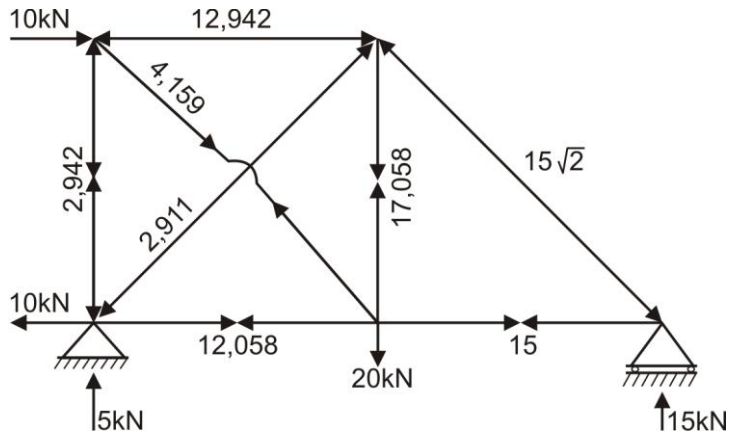
BARRA	L	EA	$F_{(P)}$	$\frac{\partial F_{(P)}}{\partial P}$	$F \frac{\partial F}{\partial P} \frac{L}{EA}$
AB	4	1,5EA	$-(5 + 0,707P)$	-0,707	$\frac{1,8853(5 + 0,707P)}{EA}$
AD	4	2EA	$10 - 0,707P$	-0,707	$-\frac{1,414(10 - 0,707P)}{EA}$
AC	$4\sqrt{2}$	EA	P	1	$\frac{4\sqrt{2}P}{EA}$
BD	$4\sqrt{2}$	EA	$7,071 + P$	1	$\frac{4\sqrt{2}(P + 7,071)}{EA}$
BC	4	EA	$-(15 + 0,707P)$	-0,707	$\frac{2,828(15 + 0,707P)}{EA}$
CD	4	1,5EA	$15 - 0,707P$	-0,707	$-\frac{1,8853(15 - 0,707P)}{EA}$
CE	$4\sqrt{2}$	EA	$-15\sqrt{2}$	0	0
DE	4	2EA	15	0	0

$$\sum = \frac{49,421 + 16,9786P}{EA}$$

Luego:

$$\frac{\partial W}{\partial P} = 0 \Rightarrow \frac{49,421 + 16,9786P}{EA} = 0 \quad \therefore \quad P = -2,911 \text{ kN}$$

Con el resultado obtenido, calculamos las otras fuerzas internas, reemplazando el valor de P en cada una de ellas, siendo las reacciones y fuerzas internas finales las mostradas en la siguiente figura.



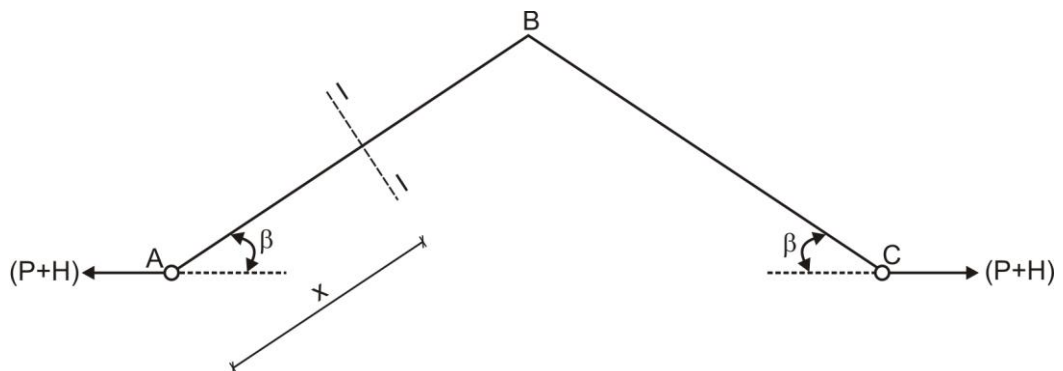
3. Aplicamos una carga horizontal "H" en los puntos A y C, analizando el tramo AB, denotado como I-I
TRAMO I-I (AB) (0 ≤ x ≤ L)

$$N_I = (P + H) \cos \beta$$

$$\frac{\partial N_I}{\partial H} = \cos \beta$$

$$M_I = (P + H)(\text{sen} \beta)(x)$$

$$\frac{\partial M_I}{\partial H} = x \text{sen} \beta$$

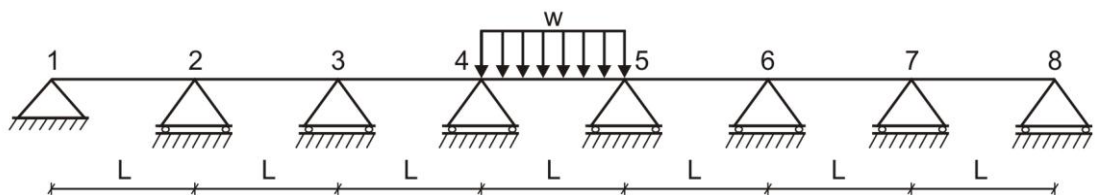


Como el tramo AB es igual a BC, simplemente en el proceso multiplicamos por dos, obteniendo:

$$\Delta = \Delta_{P(N)} + \Delta_{P(M)} = 2 \cdot \frac{1}{EA} (P \cos \beta)(\cos \beta)L + 2 \cdot \frac{1}{EI} \int_0^L (P x \text{sen} \beta)(x \text{sen} \beta) dx$$

$$\Delta = \frac{2PL \cos^2 \beta}{EA} + \frac{2PL^3 \text{sen}^2 \beta}{3EI}$$

4. Esquematizamos la viga y su carga, tal como se muestra en la figura.



TRAMO 123

$$M_1(L) + 2M_2(L + L) + M_3(L) = -6(0) - 6(0)$$

$$4M_2 + M_3 = 0 \quad \dots\dots\dots(a)$$

TRAMO 234

$$M_2(L) + 2M_3(L + L) + M_4(L) = -6(0) - 6(0)$$

$$M_2 + 4M_3 + M_4 = 0 \quad \dots\dots\dots(b)$$

TRAMO 345

$$M_3(L) + 2M_4(L + L) + M_5(L) = -6(0) - 6\left[\frac{wL^3}{24}\right]$$

$$M_3 + 4M_4 + M_5 = -\frac{wL^2}{4} \quad \dots\dots\dots(c)$$

TRAMO 456

$$M_4(L) + 2M_5(L + L) + M_6(L) = -6\left[\frac{wL^3}{24}\right] - 6(0)$$

$$M_4 + 4M_5 + M_6 = -\frac{wL^2}{4}$$

Por simetría $M_6 = M_3$, quedando:

$$M_4 + 4M_5 + M_3 = -\frac{wL^2}{4} \quad \dots\dots\dots(d)$$

De la ecuación (a):

$$M_3 = -4M_2$$

Reemplazamos en (b):

$$M_4 = 15M_2$$

Los valores obtenidos lo reemplazamos en (c):

$$56M_2 + M_5 = -\frac{wL^2}{4} \quad \dots\dots\dots(e)$$

Efectuamos lo mismo con la ecuación (d):

$$11M_2 + 4M_5 = -\frac{wL^2}{4} \quad \dots\dots\dots(f)$$

Resolvemos (e) y (f), obteniendo:

$$M_2 = M_7 = -\frac{wL^2}{284}$$

$$M_3 = M_6 = \frac{wL^2}{71}$$

$$M_4 = M_5 = -\frac{15wL^2}{284}$$

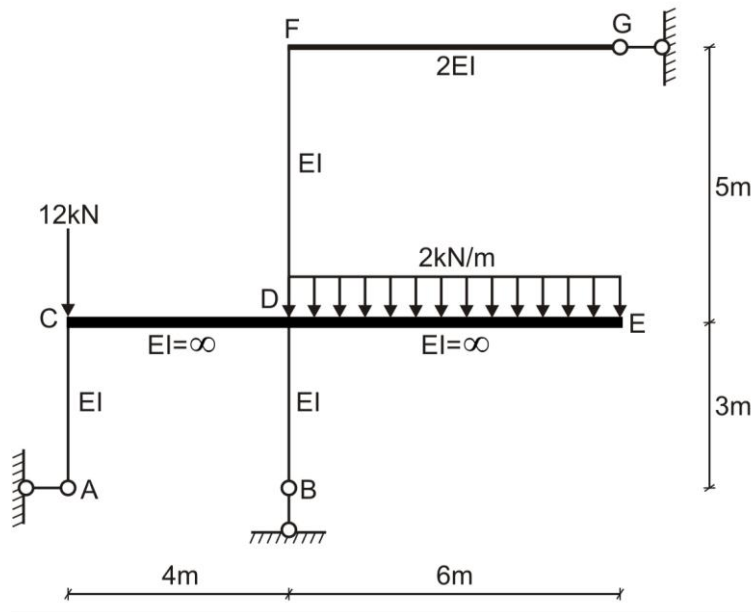
$$M_1 = M_8 = 0$$



EVALUACIÓN	EXAMEN PARCIAL	SEM. ACADÉMICO	2008 – II
CURSO	RESISTENCIA DE MATERIALES II	SECCIÓN	30F
PROFESOR	Ph.D. GENNER VILLARREAL CASTRO	DURACIÓN	110m
ESCUELA	INGENIERIA CIVIL	CICLO	VI

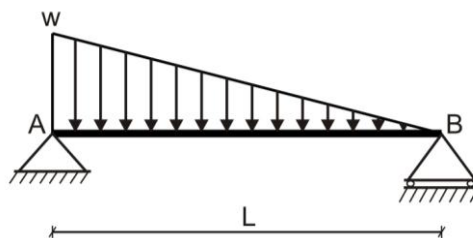
1. ENERGIA POTENCIAL DE DEFORMACION. Determinar la energía potencial de deformación para el pórtico mostrado en la figura.

..... (5 puntos)



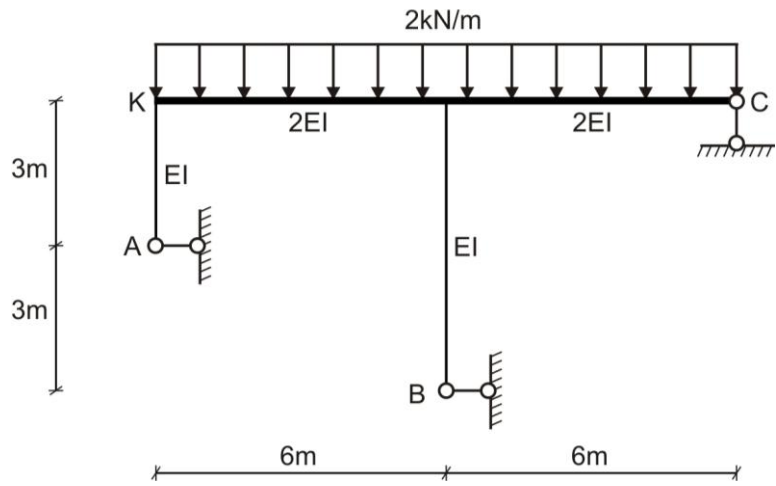
2. METODO DEL TRABAJO VIRTUAL. Una viga simplemente apoyada AB de longitud L y rigidez a flexión EI, soporta una carga distribuida triangularmente de intensidad máxima w , tal como se muestra en la figura. Determinar las pendientes en los apoyos A y B

..... (5 puntos)



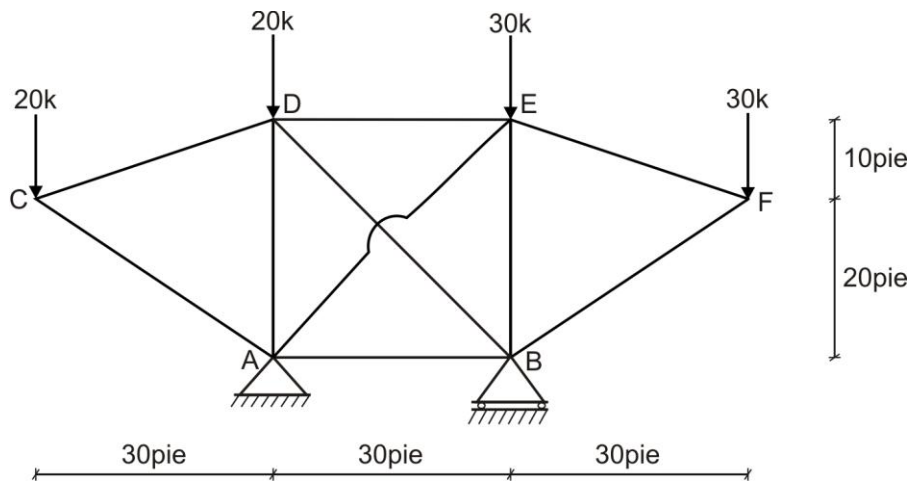
3. METODO DEL TRABAJO VIRTUAL. Determinar el desplazamiento vertical del punto K del pórtico mostrado en la figura.

..... (5 puntos)



4. TEOREMA DE CASTIGLIANO. Determinar las fuerzas internas en las barras de la armadura mostrada en la figura, cuyas rigideces son iguales para todas las barras.

..... (5 puntos)

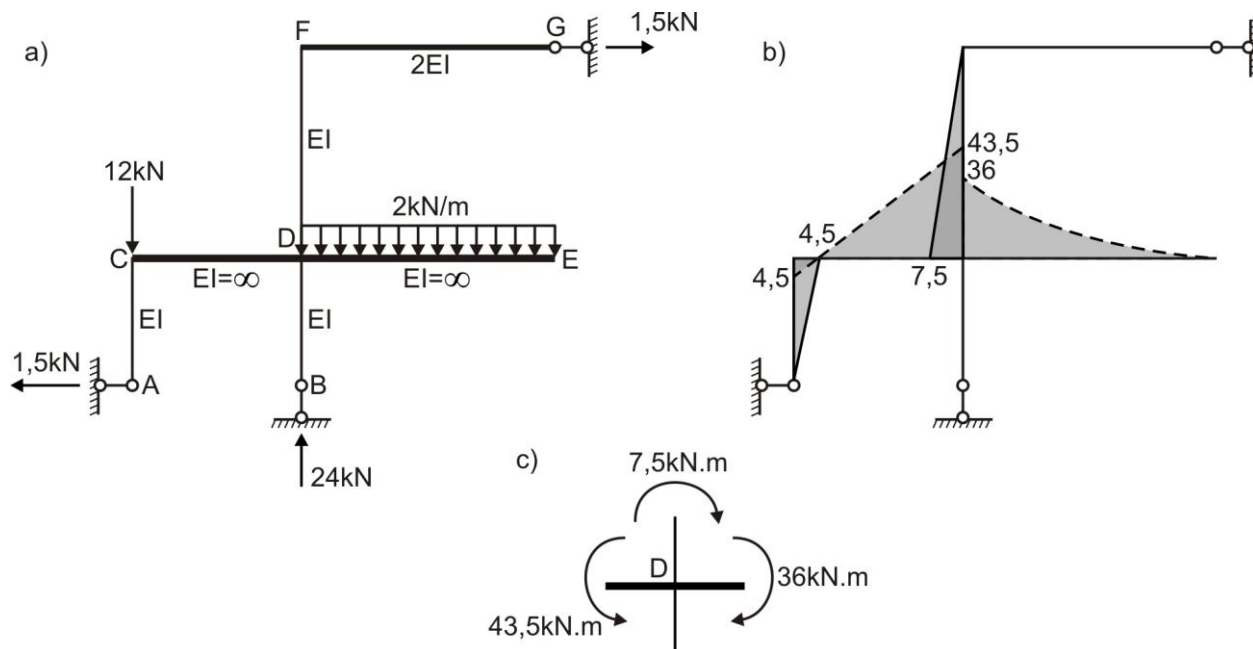


FECHA	La Molina, 29 de Setiembre del 2008
-------	-------------------------------------

SOLUCIONARIO DE EXAMEN PARCIAL

CICLO 2008 – II

1. Determinamos las reacciones en los apoyos (figura a) y graficamos su diagrama de momento flector (figura b). Nótese que en la viga CDE dicho diagrama se muestra en forma punteada, sólo con fines académicos, ya que en un elemento rígido no existen diagramas de fuerzas internas. En la figura c) se muestra el equilibrio en el nudo D, también con fines académicos de comprobación.



Si analizamos la fórmula de energía potencial de deformación, podemos concluir que la energía potencial de deformación en la viga rígida CDE es cero.

Luego:

$$U = \sum \int \frac{M^2 dx}{2EI} = \frac{1}{2EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 4,5 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4,5 + \frac{1}{2} \cdot 7,5 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 7,5 \right] = \frac{57}{EI} \text{ (kJ)}$$

2. Para mayor exactitud, graficamos los diagramas, dividiendo la viga en cuatro partes iguales. En la figura a) se muestra el diagrama de fuerza cortante y momento flector para la carga real, en la figura b) el diagrama de momento flector debido al momento unitario aplicado en el apoyo A y en la figura c) el diagrama de momento flector debido al momento unitario aplicado en el apoyo B. Luego, determinamos la pendiente en los apoyos.

PENDIENTE EN "A":

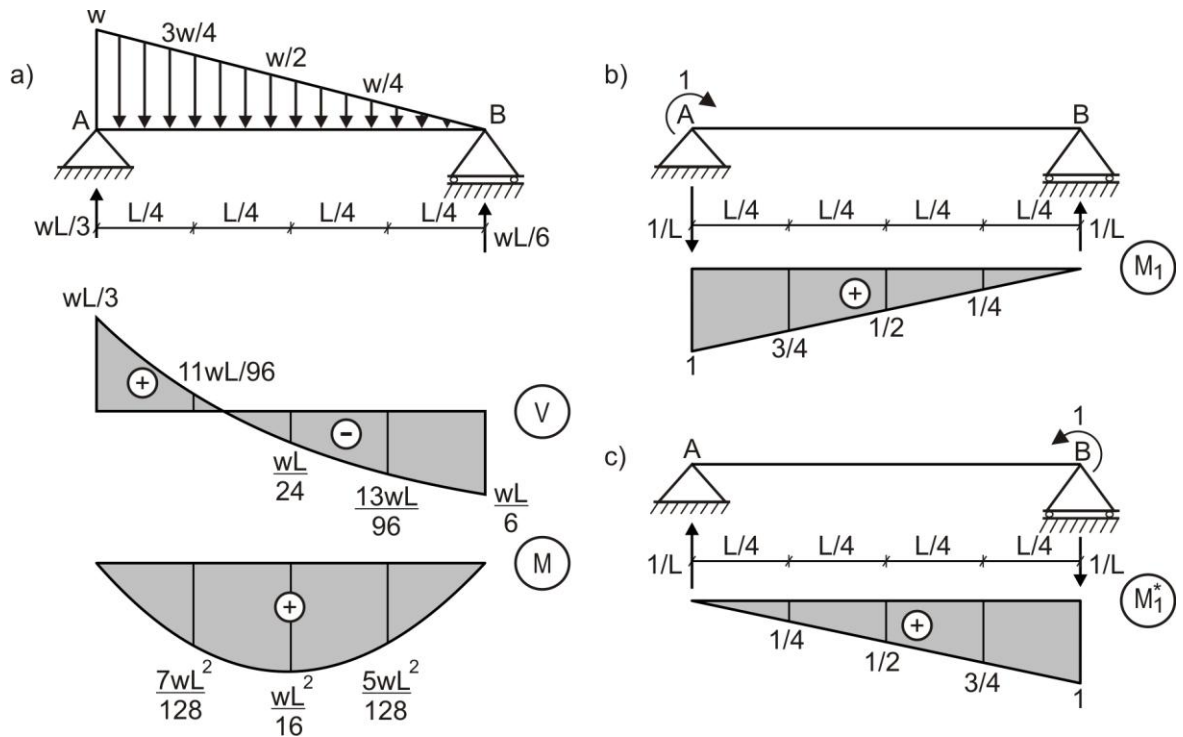
$$\theta_A = \frac{L/2}{6EI} \left[4 \left(\frac{7wL^2}{128} \right) \left(\frac{3}{4} \right) + \left(\frac{wL^2}{16} \right) \left(\frac{1}{2} \right) \right] + \frac{L/2}{6EI} \left[\left(\frac{wL^2}{16} \right) \left(\frac{1}{2} \right) + 4 \left(\frac{5wL^2}{128} \right) \left(\frac{1}{4} \right) \right] = \frac{17wL^3}{768EI}$$

Como el signo es positivo, implica que la pendiente en A va en el mismo sentido que el momento unitario, es decir, en sentido horario.

PENDIENTE EN "B":

$$\theta_B = \frac{L/2}{6EI} \left[4 \left(\frac{7wL^2}{128} \right) \left(\frac{1}{4} \right) + \left(\frac{wL^2}{16} \right) \left(\frac{1}{2} \right) \right] + \frac{L/2}{6EI} \left[\left(\frac{wL^2}{16} \right) \left(\frac{1}{2} \right) + 4 \left(\frac{5wL^2}{128} \right) \left(\frac{3}{4} \right) \right] = \frac{5wL^3}{256EI}$$

Como el signo es positivo, en este caso, la pendiente en B va en sentido antihorario, es decir, igual a la orientación del momento unitario aplicado en dicho apoyo.



3. Calculamos las reacciones en los apoyos debido a la carga real.

$$\sum M_O = 0 \Rightarrow H_A(3) - 2(12)(6) = 0 \quad \therefore H_A = 48\text{kN} \rightarrow$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow 48 - H_B = 0 \quad \therefore H_B = 48\text{kN} \leftarrow$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_C - 2(12) = 0 \quad \therefore V_C = 24\text{kN} \uparrow$$

Graficamos el diagrama de momento flector debido a la carga real, mostrado en la figura a)

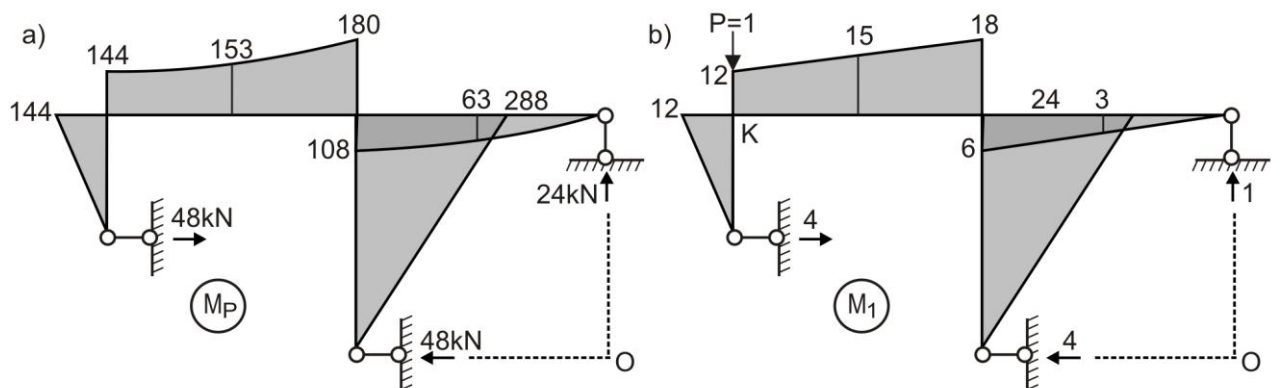
Luego, calculamos las reacciones en los apoyos debido a la carga unitaria.

$$\sum M_O = 0 \Rightarrow H_A(3) - 1(12) = 0 \quad \therefore H_A = 4 \rightarrow$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow 4 - H_B = 0 \quad \therefore H_B = 4 \leftarrow$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_C - 1 = 0 \quad \therefore V_C = 1 \uparrow$$

Graficamos el diagrama de momento flector debido a la carga unitaria, mostrado en la figura b)



Determinamos el desplazamiento vertical del nudo K

$$\delta_V^K = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 144 \cdot \frac{2}{3} \cdot 12 + \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 288 \cdot \frac{2}{3} \cdot 24 + \frac{6}{6(2EI)} [144 \cdot 12 + 4 \cdot 153 \cdot 15 + 180 \cdot 18] +$$

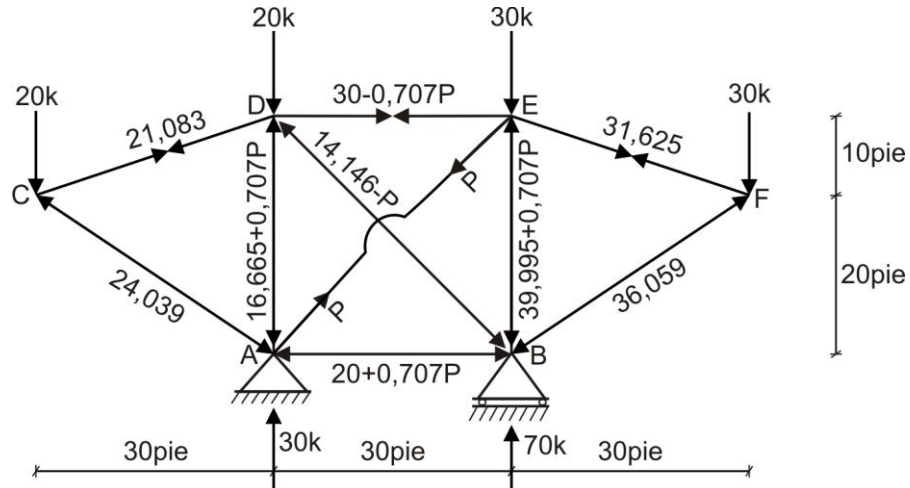
$$+ \frac{6}{6(2EI)} [108.6 + 4.63.3] = \frac{23328}{EI} \downarrow$$

4. Determinamos el grado de indeterminación de la armadura.

$$G.I. = 13 - 2(6) = 1$$

La armadura es una vez hiperestática.

Eliminamos la barra AE y lo reemplazamos por una fuerza interna P, calculando las fuerzas internas en el resto de barras de la armadura, todas ellas en función de P, tal como se muestra en la figura.



Para mayor facilidad, elaboramos una tabla en la cual se incluyan todas las características de la armadura.

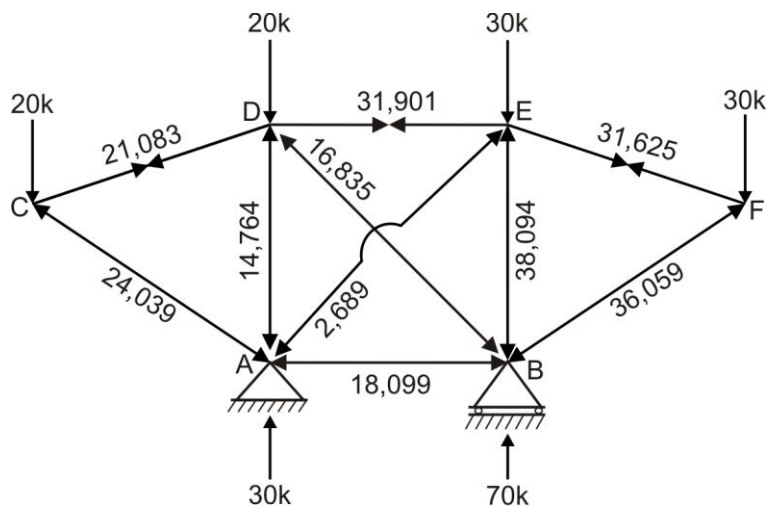
BARRA	L (pie)	EA	$F_{(P)}$	$\frac{\partial F_{(P)}}{\partial P}$	$F \frac{\partial F}{\partial P} \frac{L}{EA}$
AB	30	EA	$-(20 + 0,707P)$	$-0,707$	$\frac{424,2 + 15P}{EA}$
AC	36,055	EA	$-24,039$	0	0
AD	30	EA	$-(16,665 + 0,707P)$	$-0,707$	$\frac{353,464 + 15P}{EA}$
AE	42,426	EA	P	1	$\frac{42,426P}{EA}$
BF	36,055	EA	$-36,059$	0	0
BD	42,426	EA	$-(14,146 - P)$	1	$\frac{-600,158 + 42,426P}{EA}$
BE	30	EA	$-(39,995 + 0,707P)$	$-0,707$	$\frac{848,294 + 15P}{EA}$
CD	31,623	EA	21,083	0	0
DE	30	EA	$30 - 0,707P$	$-0,707$	$\frac{-636,3 + 15P}{EA}$
EF	31,623	EA	31,625	0	0

$$\sum = \frac{389,5 + 144,852P}{EA}$$

Luego:

$$\frac{389,5 + 144,852P}{EA} = 0 \Rightarrow P = -2,689k$$

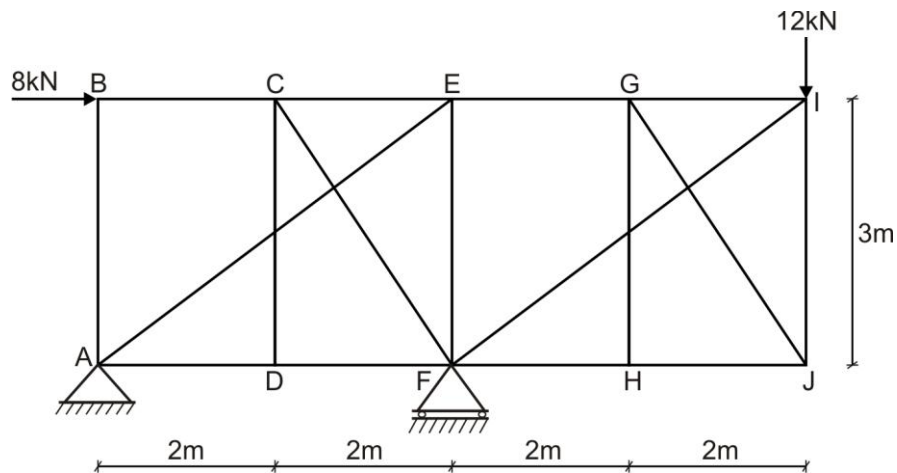
Con el valor obtenido, determinamos las otras fuerzas internas, reemplazando P en cada una de ellas, obteniéndose los valores mostrados en la siguiente figura.



EVALUACIÓN	EXAMEN PARCIAL	SEM. ACADÉMICO	2009 – I
CURSO	RESISTENCIA DE MATERIALES II	SECCIÓN	30F
PROFESOR	Ph.D. GENNER VILLARREAL CASTRO	DURACIÓN	110m
ESCUELA	INGENIERIA CIVIL	CICLO	VI

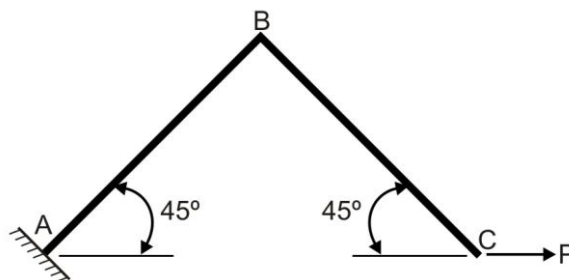
1. ENERGIA POTENCIAL DE DEFORMACION. Determinar la energía potencial de deformación para la armadura mostrada en la figura, si es de rigidez constante EA

..... (5 puntos)



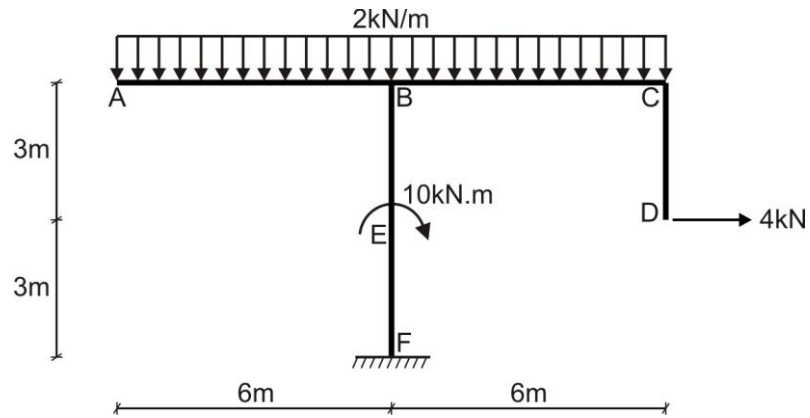
2. METODO DEL TRABAJO VIRTUAL. La estructura ABC mostrada en la figura está empotrada en el apoyo A y libre en el extremo C. Los miembros AB y BC son perpendiculares entre si, tiene una longitud L y una rigidez en flexión EI. La carga P es horizontal y actúa en C. Determinar las deflexiones vertical y horizontal en el punto C

..... (5 puntos)



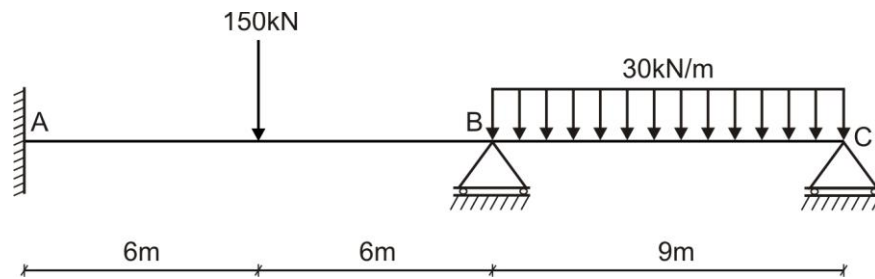
3. METODO DEL TRABAJO VIRTUAL. Determinar el desplazamiento horizontal del nudo D para el pórtico en voladizo mostrado en la figura, si es de rigidez constante EI en toda la estructura.

..... (5 puntos)



4. ECUACION DE LOS TRES MOMENTOS. Resolver la viga mostrada en la figura, graficando sus diagramas de fuerza cortante, momento flector y refuerzo. Considerar que la rigidez EI es constante para toda la viga.

..... (5 puntos)

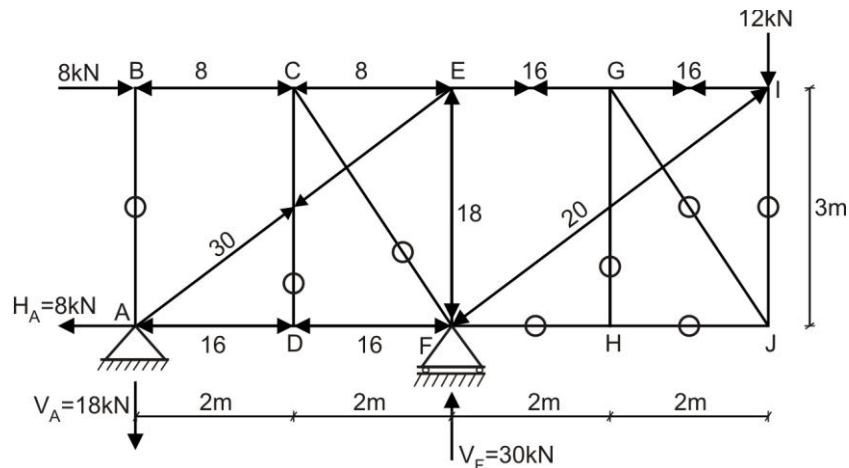


FECHA	La Molina, 27 de Abril del 2009
-------	---------------------------------

SOLUCIONARIO DE EXAMEN PARCIAL

CICLO 2009 – I

1. Calculamos las reacciones en los apoyos y las fuerzas internas en cada barra de la armadura.

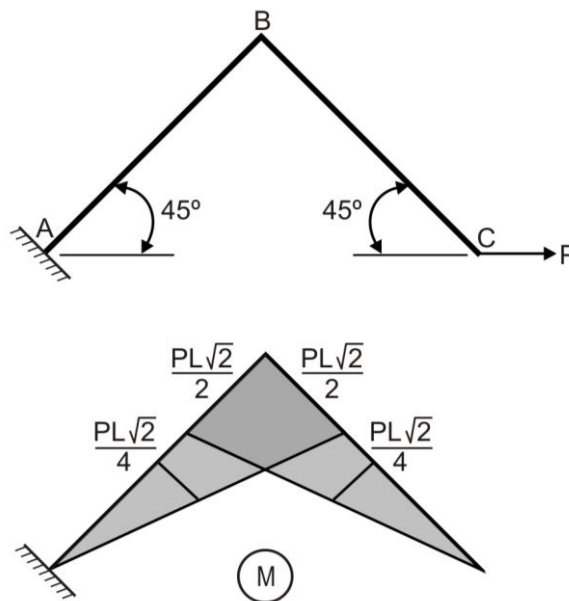


Determinamos la energía potencial de deformación.

$$U = \sum_{i=1}^n \frac{N_i^2 L_i}{2EA} = \frac{1}{2EA} [(-8)^2 \cdot 2.2 + 16^2 \cdot 2.2 + (-16)^2 \cdot 2.2 + (-18)^2 \cdot 3 + 30^2 \cdot 5 + (-20)^2 \cdot 5]$$

$$U = \frac{4888}{EA} \text{ (kJ)}$$

2. Graficamos el diagrama de momento flector debido a la acción de la carga real, tal como se muestra en la figura.

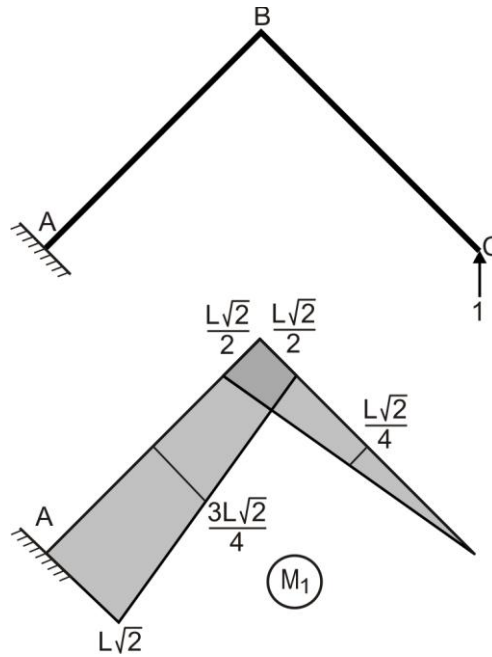


DESPLAZAMIENTO VERTICAL EN "C":

Graficamos el diagrama de momento flector debido a la acción de la carga vertical unitaria y determinamos la deflexión vertical en el nudo C

$$\delta_v^C = \sum \int \frac{MM_1 ds}{EI} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot L \cdot \frac{PL\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{L\sqrt{2}}{2} + \frac{L}{6EI} \left[\frac{PL\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{L\sqrt{2}}{2} + 4 \cdot \frac{PL\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{3L\sqrt{2}}{4} \right]$$

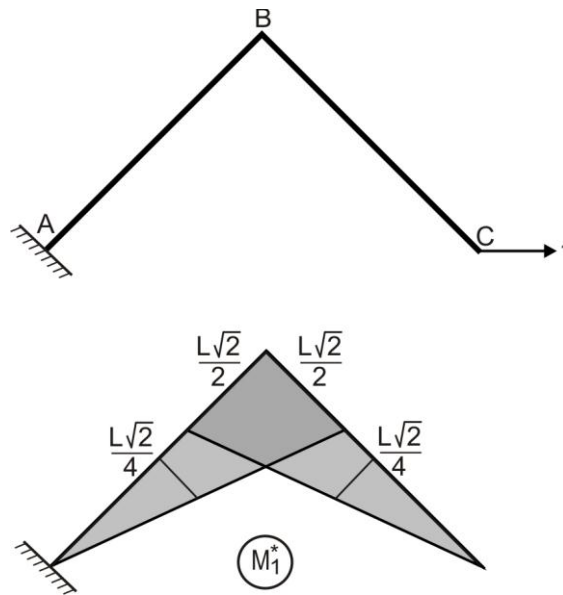
$$\delta_v^C = \frac{PL^3}{2EI} \uparrow$$



DESPLAZAMIENTO HORIZONTAL EN "C":

Graficamos el diagrama de momento flector debido a la acción de la carga horizontal unitaria y determinamos el desplazamiento horizontal en C

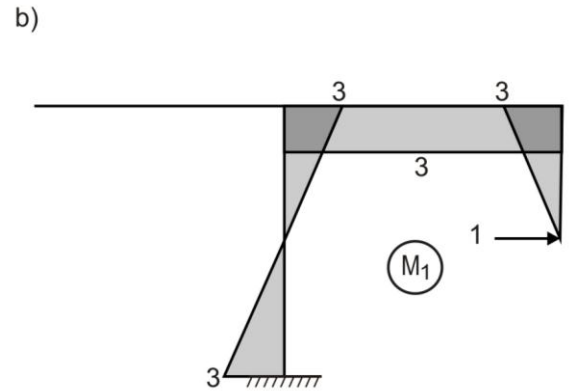
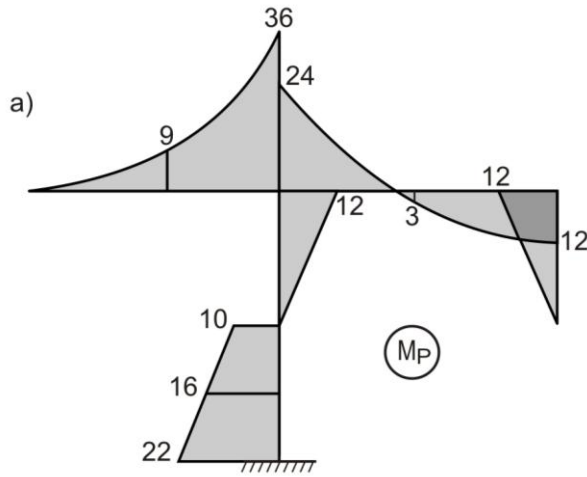
$$\delta_H^C = \sum \int \frac{MM_1^* ds}{EI} = 2 \cdot \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot L \cdot \frac{PL\sqrt{2}}{2} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{L\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{PL^3}{3EI} \rightarrow$$



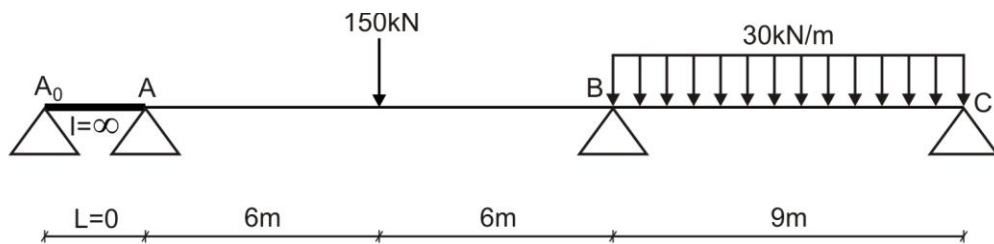
3. Graficamos los diagramas de momento flector debido a la acción de las cargas reales (figura a) y carga horizontal unitaria (figura b), determinando el desplazamiento horizontal en D

$$\delta_H^D = \sum \int \frac{M_P M_1 ds}{EI} = \frac{3}{6EI} [22.3 + 4.16.1.5] + \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 12.3 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 3 \right) + \frac{6}{6EI} [-24.3 + 4.3.3 + 12.3] +$$

$$+ \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 12.3 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 3 \right) = \frac{153}{EI} \rightarrow$$



4. Convertimos el empotramiento en A en un tramo adicional de longitud cero y de inercia infinita, tal como se muestra en la figura.



Ahora, analizamos tramo por tramo desde el extremo izquierdo de la viga hasta el final.

TRAMO A₀AB

$$M_{A_0}(0) + 2M_A(0 + 12) + M_B(12) = -6(0) - 6 \left[\frac{150 \cdot 12^2}{16} \right]$$

$$2M_A + M_B = -675 \quad \dots\dots\dots (a)$$

TRAMO ABC

$$M_A(12) + 2M_B(12 + 9) + M_C(9) = -6 \left[\frac{150 \cdot 12^2}{16} \right] - 6 \left[\frac{30 \cdot 9^3}{24} \right]$$

$$2M_A + 7M_B = -2261,25 \quad \dots\dots\dots (b)$$

Resolvemos (a) y (b), obteniendo:

$$M_A = -205,312 \text{ kN.m}$$

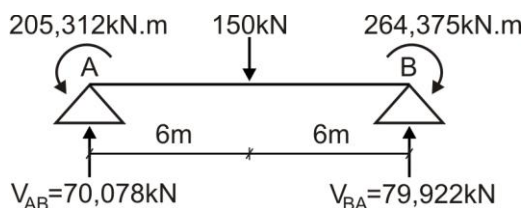
$$M_B = -264,375 \text{ kN.m}$$

Calculamos las reacciones en cada tramo.

TRAMO AB:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_{BA}(12) + 205,312 - 150(6) - 264,375 = 0 \quad \therefore V_{BA} = 79,922 \text{ kN} \uparrow$$

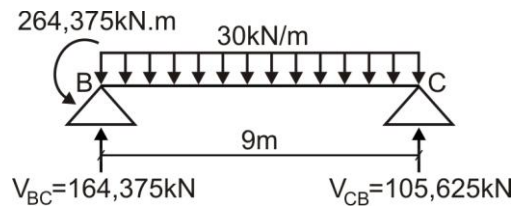
$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow V_{AB} + 79,922 - 150 = 0 \quad \therefore V_{AB} = 70,078 \text{ kN} \uparrow$$



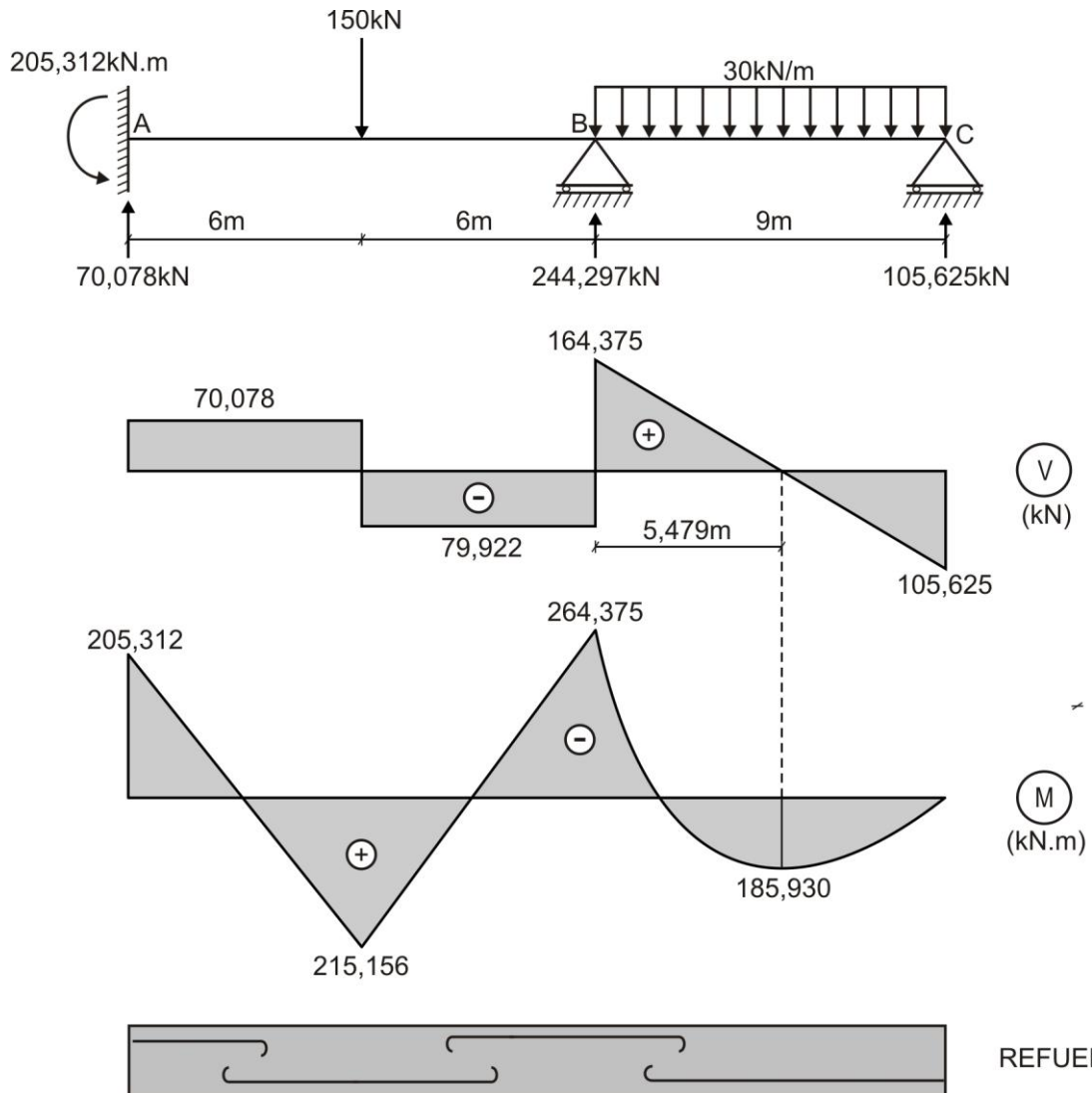
TRAMO BC:

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow V_{CB}(9) + 264,375 - 30(9)(4,5) = 0 \quad \therefore V_{CB} = 105,625 \text{ kN} \uparrow$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow V_{BC} + 105,625 - 30(9) = 0 \quad \therefore V_{BC} = 164,375 \text{ kN} \uparrow$$



Esquematisamos las reacciones en la viga y graficamos sus diagramas de fuerza cortante, momento flector y refuerzo.

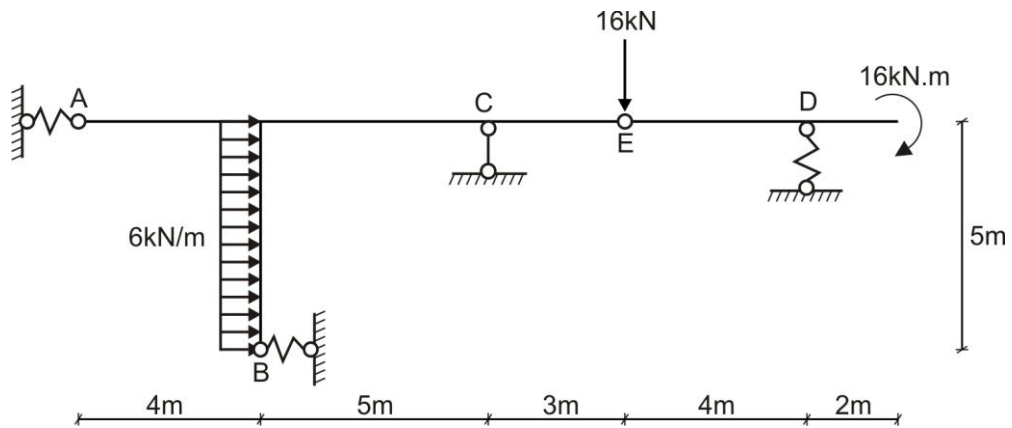




EVALUACIÓN	EXAMEN PARCIAL	SEM. ACADÉMICO	2009 – II
CURSO	RESISTENCIA DE MATERIALES II	SECCIÓN	30F
PROFESOR	Ph.D. GENNER VILLARREAL CASTRO	DURACIÓN	110m
ESCUELA	INGENIERIA CIVIL	CICLO	VI

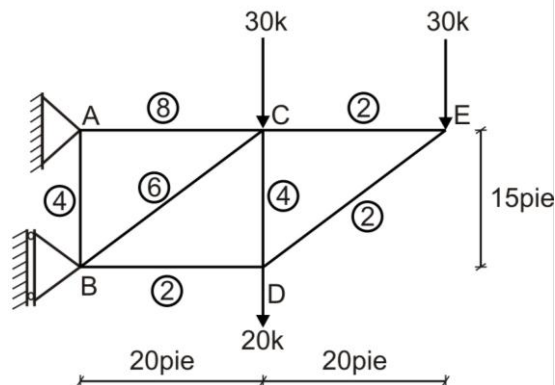
1. ENERGIA POTENCIAL DE DEFORMACION. Determinar la energía potencial de deformación para el pórtico mostrado en la figura, si $EI = \infty$ para toda la estructura y las rigideces en los apoyos elásticos son $k_A = 2k$, $k_B = k$ y $k_D = k/2$

..... (5 puntos)



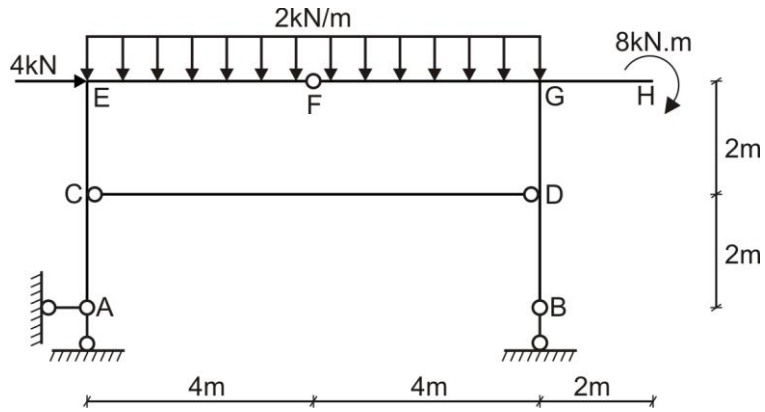
2. METODO DEL TRABAJO VIRTUAL. Determinar los desplazamientos horizontal y vertical en E, considerando $E = 29 \cdot 10^6 \text{ lb/plg}^2$ y las áreas son las indicadas en la figura en círculos, expresadas en plg^2

..... (5 puntos)



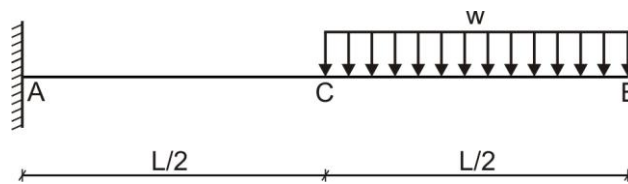
3. METODO DEL TRABAJO VIRTUAL. Determinar la pendiente en D para el pórtico mostrado en la figura. Considerar que la rigidez a flexión para las columnas es EI y para las vigas es $3EI$

..... (5 puntos)



4. TEOREMA DE CASTIGLIANO. Una viga en voladizo AB de longitud L y rigidez a flexión EI soporta una carga uniforme de intensidad "w" sobre su mitad derecha, tal como se muestra en la figura. Determinar las deflexiones en los puntos C y B de la viga.

..... (5 puntos)



FECHA	La Molina, 28 de Setiembre del 2009
-------	-------------------------------------

SOLUCIONARIO DE EXAMEN PARCIAL

CICLO 2009 – II

1. Calculamos las reacciones en los apoyos.

$$\sum M_E^{\text{der}} = 0 \quad \Rightarrow \quad V_D(4) - 16 = 0 \quad \therefore \quad V_D = 4 \text{ kN } \uparrow$$

$$\sum M_C = 0 \quad \Rightarrow \quad H_B(5) + 16 + 16(3) - 6(5)(2,5) - 4(7) = 0 \quad \therefore \quad H_B = 7,8 \text{ kN } \leftarrow$$

$$\sum F_X = 0 \quad \Rightarrow \quad 6(5) - 7,8 - H_A = 0 \quad \therefore \quad H_A = 22,2 \text{ kN } \leftarrow$$

$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad V_C + 4 - 16 = 0 \quad \therefore \quad V_C = 12 \text{ kN } \uparrow$$

Luego, como el pórtico tiene rigidez $EI = \infty$, se trata de una estructura sólida o indeformable, es decir, no existe diagrama de momento flector.

Calculamos la energía potencial de deformación:

$$U = \sum_{i=1}^3 \frac{R_i^2}{2k_i} = \frac{H_A^2}{2k_A} + \frac{H_B^2}{2k_B} + \frac{V_D^2}{2k_D} = \frac{(-22,2)^2}{2(2k)} + \frac{7,8^2}{2k} + \frac{4^2}{2(k/2)} = \frac{169,63}{k} \text{ (kJ)}$$

2. Calculamos las rigideces de las barras de la armadura.

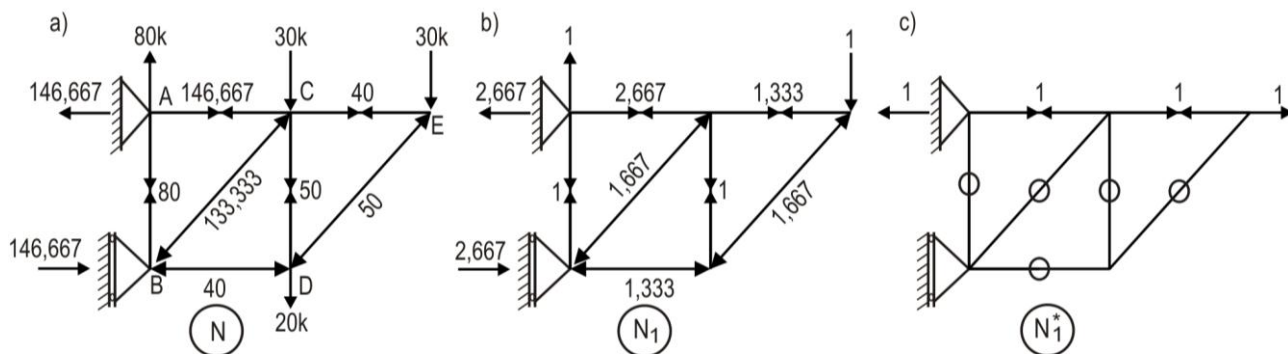
$$EA_2 = 29 \cdot 10^6 \cdot 2 = 58 \cdot 10^6 \text{ lb} = 58000k$$

$$EA_4 = 29 \cdot 10^6 \cdot 4 = 116 \cdot 10^6 \text{ lb} = 116000k$$

$$EA_6 = 29 \cdot 10^6 \cdot 6 = 174 \cdot 10^6 \text{ lb} = 174000k$$

$$EA_8 = 29 \cdot 10^6 \cdot 8 = 232 \cdot 10^6 \text{ lb} = 232000k$$

Determinamos las fuerzas internas para la armadura ante las cargas reales (figura a), la armadura ante la carga vertical unitaria (figura b) y la armadura ante la carga horizontal unitaria (figura c).



DESPLAZAMIENTO VERTICAL EN "E":

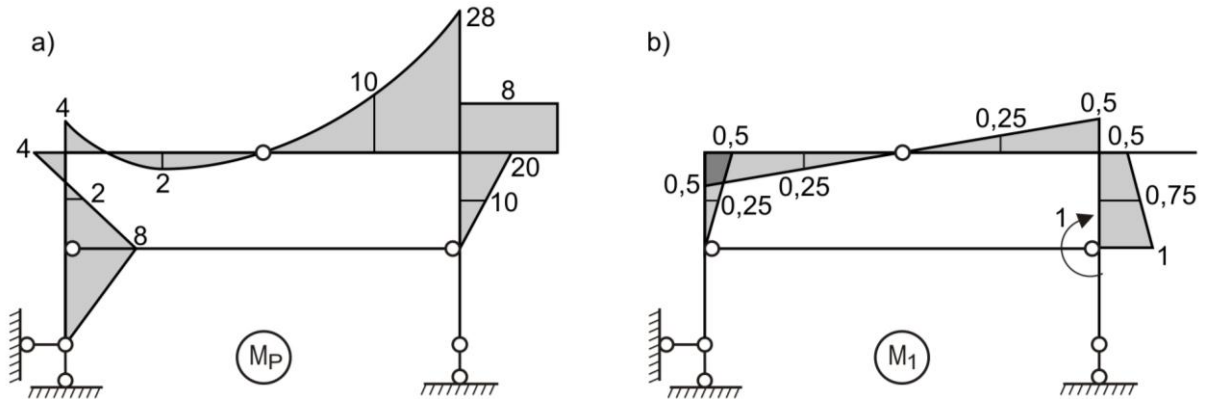
$$\begin{aligned} \delta_V^E &= \sum \frac{NN_1L}{EA} = \frac{1}{58000} [40 \cdot 1,333 \cdot 20 \cdot 12 + (-40)(-1,333) \cdot 20 \cdot 12 + (-50)(-1,667) \cdot 25 \cdot 12] + \\ &+ \frac{1}{116000} [80 \cdot 1 \cdot 15 \cdot 12 + 50 \cdot 1 \cdot 15 \cdot 12] + \frac{1}{174000} [(-133,333)(-1,667) \cdot 25 \cdot 12] + \\ &+ \frac{1}{232000} [146,667 \cdot 2,667 \cdot 20 \cdot 12] \end{aligned}$$

$$\delta_V^E = 1,862 \text{ plg } \downarrow$$

DESPLAZAMIENTO HORIZONTAL EN "E":

$$\delta_H^E = \sum \frac{NN_1^*L}{EA} = \frac{1}{232000} [146,667 \cdot 1 \cdot 20 \cdot 12] + \frac{1}{58000} [40 \cdot 1 \cdot 20 \cdot 12] = 0,317 \text{ plg} \rightarrow$$

3. Por Estática, graficamos los diagramas de momento flector debido a la acción de las cargas reales (figura a) y debido a la acción del momento unitario en D (figura b). Para ambos casos la barra CD trabaja únicamente en tracción o compresión.



Determinamos la pendiente en D, dividiendo, para ello, la multiplicación de diagramas en el mayor número de tramos, con la finalidad de tener una mayor exactitud.

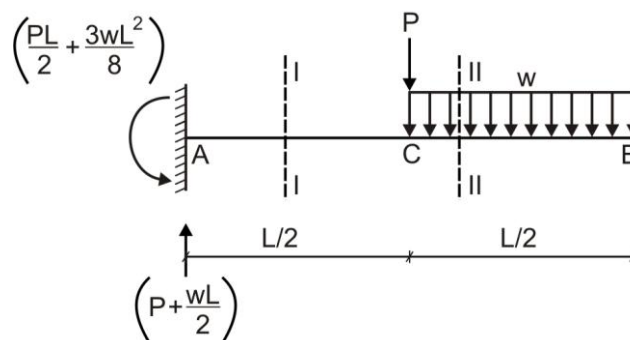
$$\theta_D = \frac{2}{6EI} [4 \cdot 2 \cdot 0,25 - 4 \cdot 0,5] + \frac{4}{6(3EI)} [-4 \cdot 0,5 + 4 \cdot 2 \cdot 0,25] + \frac{4}{6(3EI)} [4 \cdot 10 \cdot 0,25 + 28 \cdot 0,5] + \frac{2}{6EI} [20 \cdot 0,5 + 4 \cdot 10 \cdot 0,75]$$

$$\theta_D = \frac{56}{3EI}$$

Como el signo es positivo, indica que la pendiente en D va en sentido horario.

4. Planteamos las ecuaciones para cada caso.

DEFLEXION EN "C":



TRAMO I-I ($0 \leq x \leq L/2$)

$$M_I = \left(P + \frac{wL}{2} \right) x - \left(\frac{PL}{2} + \frac{3wL^2}{8} \right)$$

$$\frac{\partial M_I}{\partial P} = x - \frac{L}{2}$$

TRAMO II-II ($L/2 \leq x \leq L$)

$$M_{II} = \left(P + \frac{wL}{2} \right) x - \left(\frac{PL}{2} + \frac{3wL^2}{8} \right) - P \left(x - \frac{L}{2} \right) - \frac{w}{2} \left(x - \frac{L}{2} \right)^2$$

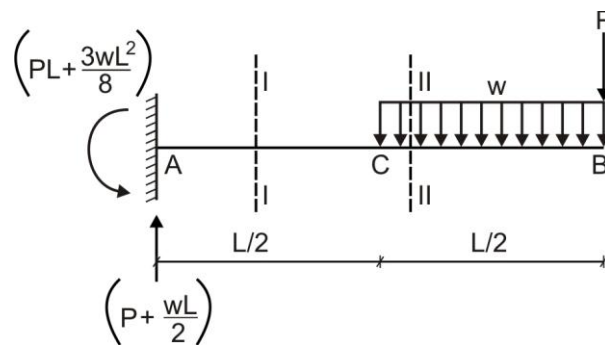
$$\frac{\partial M_{II}}{\partial P} = 0$$

Determinamos la deflexión vertical en C

$$\delta_v^C = \frac{1}{EI} \left\{ \int_0^{L/2} \left(\frac{wLx}{2} - \frac{3wL^2}{8} \right) \left(x - \frac{L}{2} \right) dx \right\}$$

$$\delta_v^C = \frac{7wL^4}{192EI} \downarrow$$

DEFLEXION EN "B":



TRAMO I-I ($0 \leq x \leq L/2$)

$$M_I = \left(P + \frac{wL}{2} \right) x - \left(PL + \frac{3wL^2}{8} \right)$$

$$\frac{\partial M_I}{\partial P} = x - L$$

TRAMO II-II ($L/2 \leq x \leq L$)

$$M_{II} = \left(P + \frac{wL}{2} \right) x - \left(PL + \frac{3wL^2}{8} \right) - \frac{w}{2} \left(x - \frac{L}{2} \right)^2$$

$$\frac{\partial M_{II}}{\partial P} = x - L$$

Determinamos la deflexión vertical en B

$$\delta_v^B = \frac{1}{EI} \left\{ \int_0^{L/2} \left(\frac{wLx}{2} - \frac{3wL^2}{8} \right) (x - L) dx + \int_{L/2}^L \left(\frac{wLx}{2} - \frac{3wL^2}{8} - \frac{w}{2} \left[x - \frac{L}{2} \right]^2 \right) (x - L) dx \right\}$$

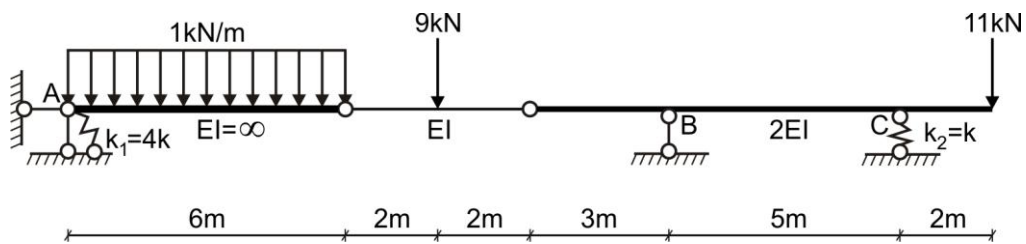
$$\delta_v^B = \frac{41wL^4}{384EI} \downarrow$$



EVALUACIÓN	EXAMEN PARCIAL	SEM. ACADÉMICO	2010 – I
CURSO	RESISTENCIA DE MATERIALES II	SECCIÓN	30F
PROFESOR	Ph.D. GENNER VILLARREAL CASTRO	DURACIÓN	110m
ESCUELA	INGENIERIA CIVIL	CICLO	VI

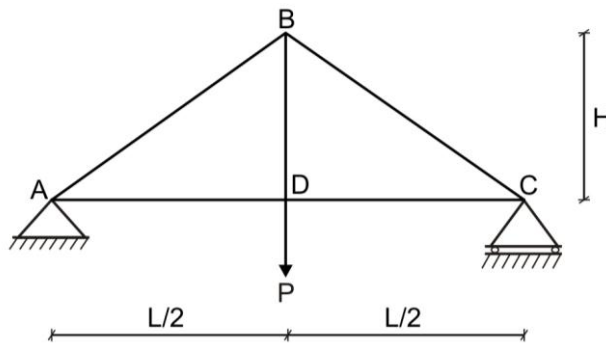
1. ENERGIA POTENCIAL DE DEFORMACION. Determinar la energía potencial de deformación para la viga mostrada en la figura. Considerar que el resorte en A es de giro, el resorte en C es vertical y como rigidez del resorte $k = EI / 2$

..... (5 puntos)



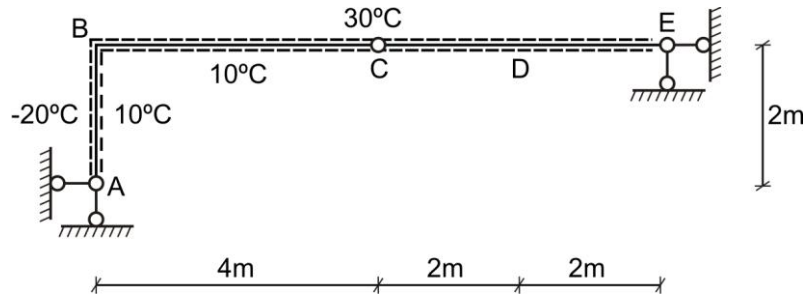
2. METODO DEL TRABAJO VIRTUAL. La armadura simétrica ABCD tiene una altura $H = 6\text{pie}$ y una longitud de claro $L = 16\text{pie}$, tal como se muestra en la figura. En el nudo D actúa verticalmente una carga $P = 24\text{k}$. El área de la sección transversal de cada barra a tracción es $A_{tr} = 2\text{plg}^2$ y la de cada barra a compresión es $A_{comp} = 5\text{plg}^2$. La armadura está hecha de acero con módulo de elasticidad $E = 30 \cdot 10^3 \text{ksi}$. Determinar el desplazamiento horizontal en el apoyo C y la deflexión vertical en el nudo D

..... (5 puntos)



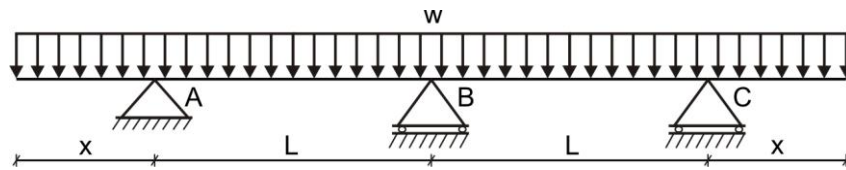
3. METODO DEL TRABAJO VIRTUAL. Determinar el desplazamiento vertical del punto D del pórtico mostrado en la figura. Considerar $b = 0,2\text{m}$ y $\alpha = \text{const}$ para toda la estructura.

..... (5 puntos)



4. ECUACION DE LOS TRES MOMENTOS. Determinar las longitudes de los voladizos en la viga continua mostrada en la figura, de tal manera que los momentos en los tres apoyos sean iguales. Considerar que la viga es de sección constante.

..... (5 puntos)

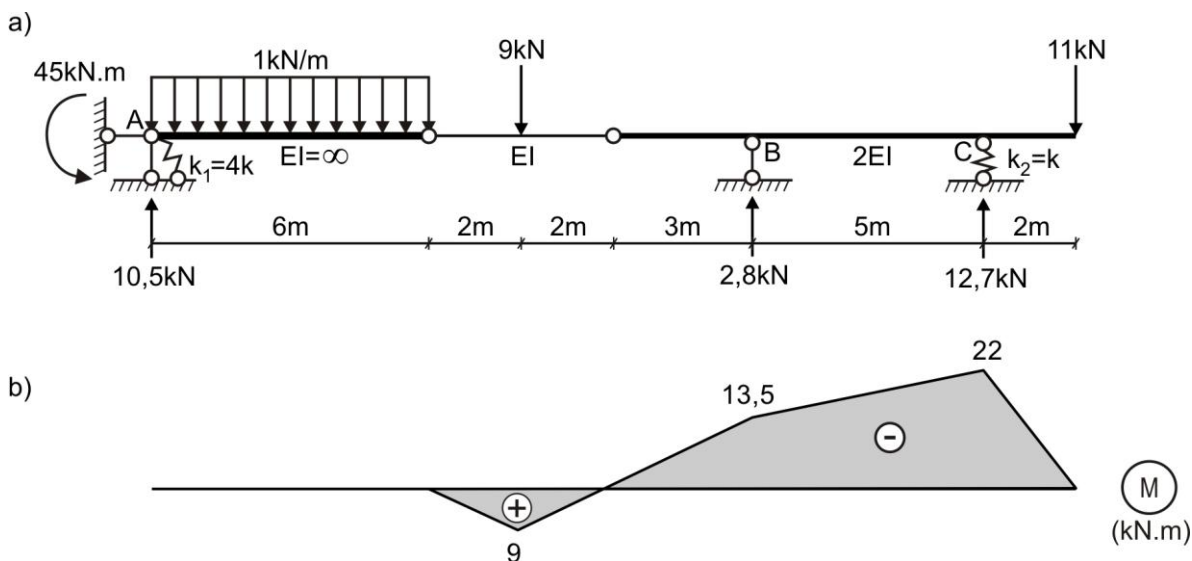


FECHA	La Molina, 26 de Abril del 2010
-------	---------------------------------

SOLUCIONARIO DE EXAMEN PARCIAL

CICLO 2010 – I

1. Por la Estática, calculamos las reacciones en los apoyos (figura a) y graficamos el diagrama de momento flector (figura b), considerando que en el tramo de rigidez infinita no existe diagrama.



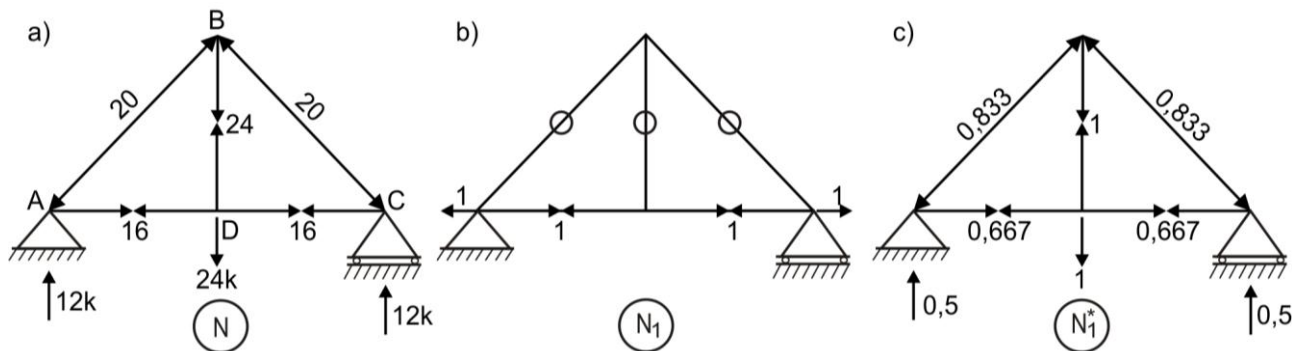
Determinamos la energía potencial de deformación a través de la fórmula:

$$U = \sum \int \frac{M^2 dx}{2EI} + \sum_{i=1}^2 \frac{R_i^2}{2k_i}$$

$$U = \frac{1}{2EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 9 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 13,5 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 13,5 \cdot \frac{1}{2} + \frac{5}{6,2} (13,5 \cdot 13,5 + 4 \cdot 17,75 \cdot 17,75 + 22 \cdot 22) \right] + \frac{1}{2} \cdot 22 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 22 \cdot \frac{1}{2} + \frac{M_A^2}{2k_1} + \frac{V_C^2}{2k_2} = \frac{581,58}{EI} + \frac{45^2}{2(4k)} + \frac{12,7^2}{2k} = \frac{581,58}{EI} + \frac{333,77}{k}$$

$$U = \frac{581,58}{EI} + \frac{333,77 \cdot 2}{EI} = \frac{1249,12}{EI} \text{ (kJ)}$$

2. Calculamos las reacciones en los apoyos y las fuerzas internas en las barras de la armadura debido a la acción de la carga real (figura a), a la acción de la carga horizontal unitaria (figura b) y a la acción de la carga vertical unitaria (figura c)



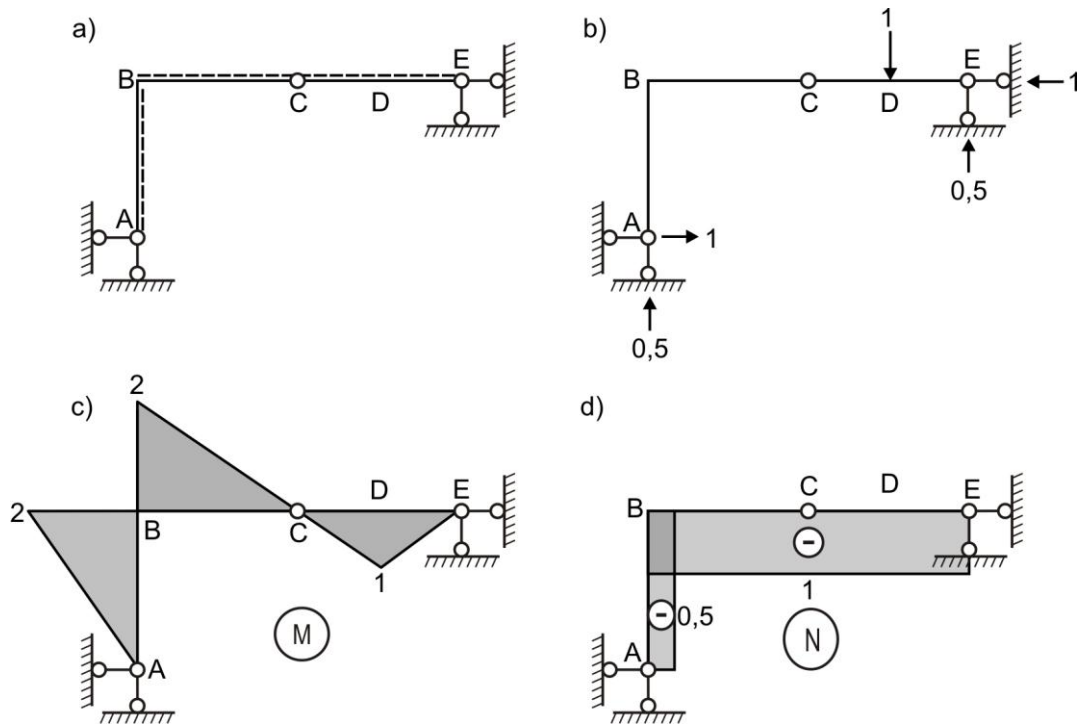
DESPLAZAMIENTO HORIZONTAL EN "C":

$$\delta_H^C = \frac{1}{30 \cdot 10^3 \cdot 2} [16 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 2] = 0,0512 \text{ plg} \rightarrow$$

DESPLAZAMIENTO VERTICAL EN "D":

$$\delta_V^D = \frac{1}{30 \cdot 10^3 \cdot 2} [16,0,667 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 2 + 24 \cdot 1,6 \cdot 12] + \frac{1}{30 \cdot 10^3 \cdot 5} [20,0,833 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 2] = 0,0896 p l g \downarrow$$

3. Esquemizamos con línea punteada las zonas traccionadas por temperatura (figura a). Por Estática calculamos las reacciones en los apoyos (figura b) y graficamos los diagramas de momento flector (figura c) y fuerza axial (figura d), debido a la acción de la carga vertical unitaria aplicado en D



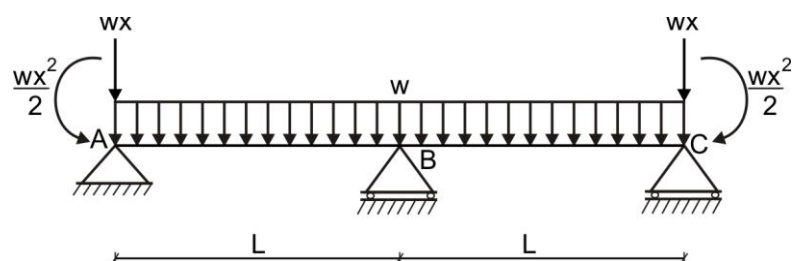
Aplicamos trabajo virtual por variación de temperatura, a través de la siguiente fórmula:

$$\Delta_{iT} = \sum \alpha \frac{|t_1 - t_2|}{b} A_{M_i} + \sum \alpha \frac{|t_1 + t_2|}{2} A_{N_i}$$

$$\Delta_{D(T)}^V = -\alpha \frac{|-20 - 10|}{0,2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 + \alpha \frac{|30 - 10|}{0,2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 - \alpha \frac{|10 - 30|}{0,2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1 - \alpha \frac{|-20 + 10|}{2} \cdot 0,5 \cdot 2 - \alpha \frac{|30 + 10|}{2} \cdot 1 \cdot 4 - \alpha \frac{|10 + 30|}{2} \cdot 1 \cdot 4$$

$$\Delta_{D(T)}^V = -265\alpha \uparrow$$

4. Reemplazamos los voladizos por sus acciones equivalentes, tal como se muestra en la figura.



Aplicamos la ecuación de los tres momentos para el tramo ABC

$$M_A(L) + 2M_B(L+L) + M_C(L) = -6\left[\frac{wL^3}{24}\right] - 6\left[\frac{wL^3}{24}\right]$$

Por condición del problema $M_A = M_B = M_C = -\frac{wx^2}{2}$

Reemplazamos en la ecuación:

$$\left(-\frac{wx^2}{2}\right)(L) + 2\left(-\frac{wx^2}{2}\right)(2L) + \left(-\frac{wx^2}{2}\right)(L) = -12\left[\frac{wL^3}{24}\right]$$

De donde:

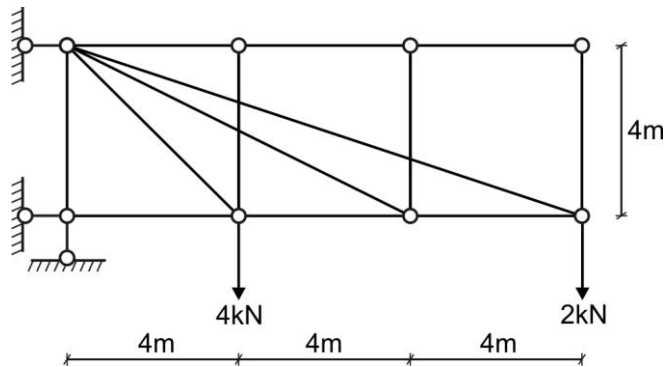
$$x = \frac{L}{\sqrt{6}} = 0,408L$$



EVALUACIÓN	EXAMEN PARCIAL	SEM. ACADÉMICO	2010 – II
CURSO	RESISTENCIA DE MATERIALES II	SECCIÓN	30F
PROFESOR	Ph.D. GENNER VILLARREAL CASTRO	DURACIÓN	110m
ESCUELA	INGENIERIA CIVIL	CICLO	VI

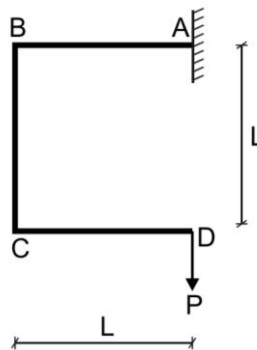
1. ENERGIA POTENCIAL DE DEFORMACION. Determinar la energía potencial de deformación para la armadura mostrada en la figura. Considerar que la rigidez EA es constante para toda la estructura.

..... (5 puntos)



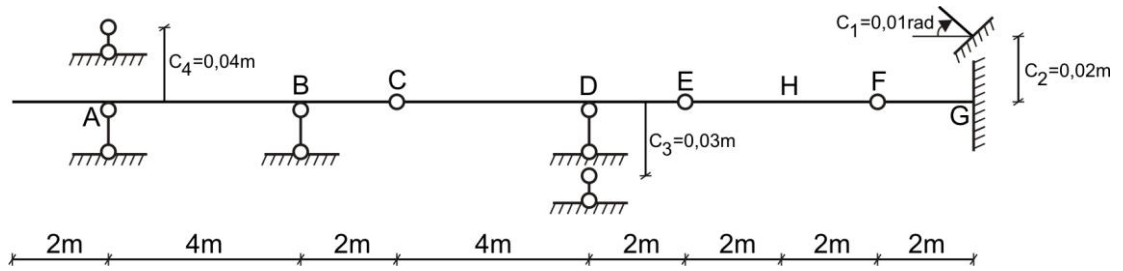
2. METODO DEL TRABAJO VIRTUAL. Un pórtico rectangular ABCD está empotrado en el apoyo A y libre en el extremo D, tal como se muestra en la figura. Los tres miembros tienen longitud L y rigidez a flexión EI. La carga vertical P actúa en D. Determinar los desplazamientos horizontal, vertical y la pendiente en el extremo libre.

..... (5 puntos)



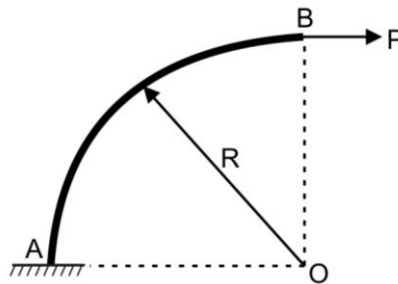
3. METODO DEL TRABAJO VIRTUAL. Determinar la pendiente en H para la viga mostrada en la figura, considerando los desplazamientos lineales y angular en los apoyos.

..... (5 puntos)



4. TEOREMA DE CASTIGLIANO. Una barra curva delgada AB tiene una línea de centros en forma de un cuadrante de círculo con radio R , tal como se muestra en la figura. La barra está empotrada en el apoyo A y libre en B, donde actúa una carga horizontal P . Determinar el desplazamiento horizontal, el desplazamiento vertical y la pendiente en el extremo libre.

..... (5 puntos)

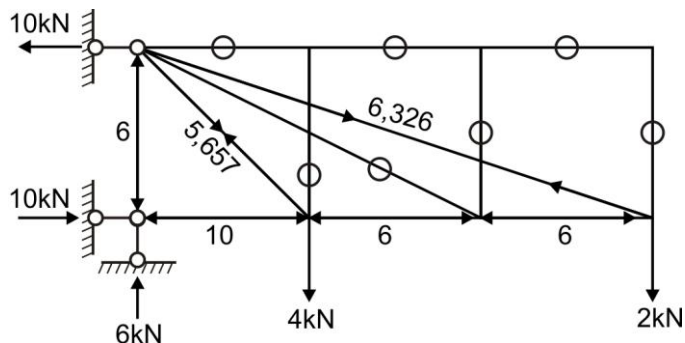


FECHA	La Molina, 27 de Setiembre del 2010
-------	-------------------------------------

SOLUCIONARIO DE EXAMEN PARCIAL

CICLO 2010 – II

1. Calculamos las reacciones en los apoyos y determinamos las fuerzas internas en las barras de la armadura, cuyos resultados se muestran en la siguiente figura.



Determinamos la energía potencial de deformación.

$$U = \sum_{i=1}^n \frac{N_i^2 L_i}{2EA} = \frac{1}{2EA} \left[(-6)^2 \cdot 4,3 + (-10)^2 \cdot 4 + (5,657)^2 \cdot 4\sqrt{2} + (6,326)^2 \cdot 12,649 \right]$$

$$U = \frac{759,61}{EA} \text{ (kJ)}$$

2. Graficamos los diagramas de momento flector debido a la acción de la carga real (figura a); a la acción de la carga vertical unitaria (figura b); a la acción de la carga horizontal unitaria (figura c) y a la acción del momento unitario (figura d), tal como se muestra en la figura de la siguiente página.

Calculamos los desplazamientos y pendiente en el extremo libre.

DESPLAZAMIENTO VERTICAL EN "D":

$$\delta_v^D = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} (L)(PL) \left(\frac{2}{3} L \right) \cdot 2 + (PL)(L)(L) \right]$$

$$\delta_v^D = \frac{5PL^3}{3EI} \downarrow$$

DESPLAZAMIENTO HORIZONTAL EN "D":

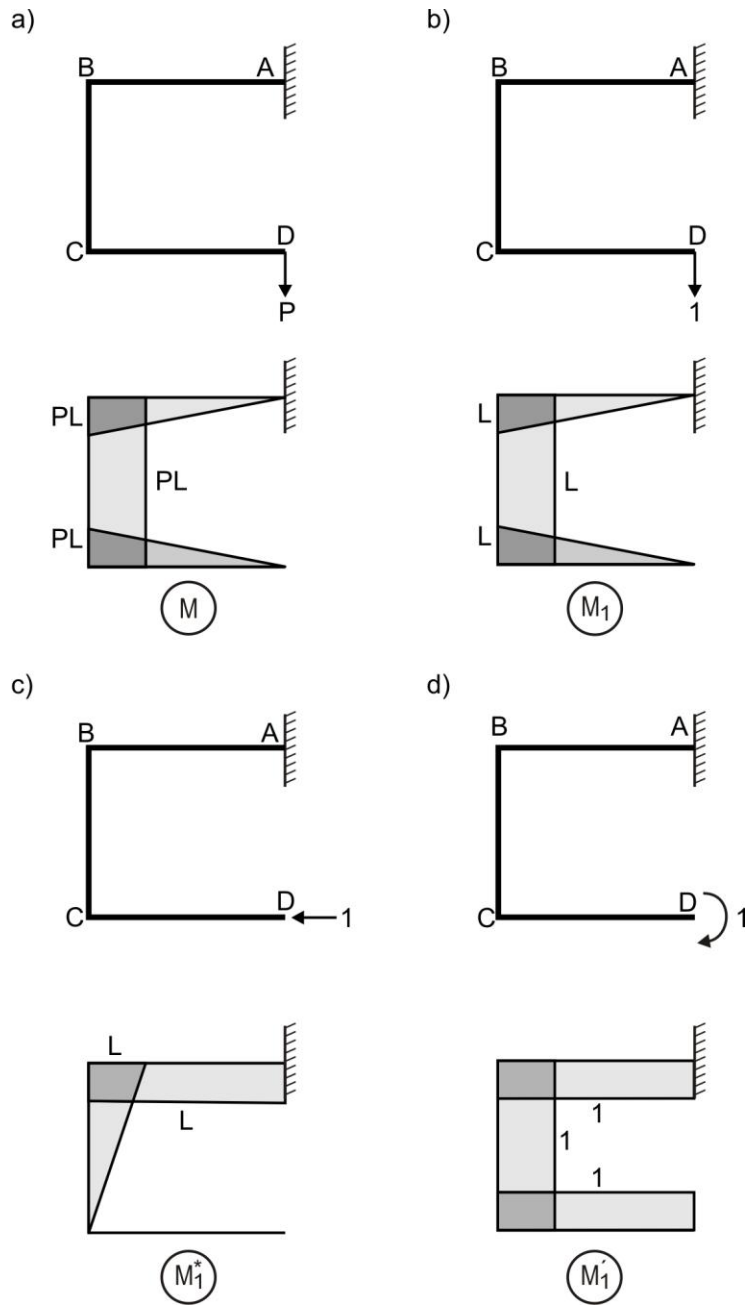
$$\delta_H^D = \frac{1}{EI} \left[(PL)(L) \left(\frac{L}{2} \right) + \frac{1}{2} (PL)(L)(L) \right]$$

$$\delta_H^D = \frac{PL^3}{EI} \leftarrow$$

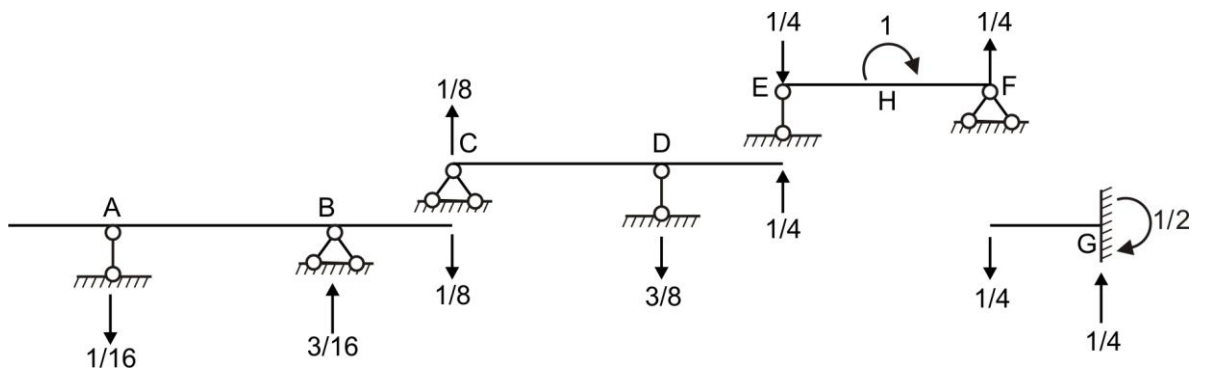
PENDIENTE EN "D":

$$\theta_D = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} (PL)(L)(1) \cdot 2 + (PL)(L)(1) \right] = \frac{2PL^2}{EI}$$

Como el signo es positivo, la pendiente va en el mismo sentido que el momento unitario, es decir, en sentido horario.



3. Por Estática determinamos las reacciones en los apoyos, iniciando en el tramo EF y continuando con la parte derecha e izquierda de la viga, tal como se muestra en la figura.



Determinamos la pendiente en H por la fórmula:

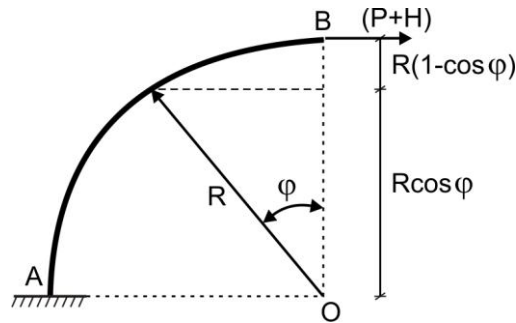
$$\Delta_{ic} = -\sum_{j=1}^n R_{ij} \cdot C_j$$

$$\theta_H = -\left(-\frac{1}{16} \cdot 0,04 + \frac{3}{8} \cdot 0,03 + \frac{1}{4} \cdot 0,02 + \frac{1}{2} \cdot 0,01\right) = -0,01875 \text{ rad}$$

El signo (-) indica que la pendiente en H va en sentido opuesto al momento unitario, es decir, en sentido antihorario.

4. Analizamos cada uno de los casos en forma independiente, existiendo un solo tramo en todos ellos.

DESPLAZAMIENTO HORIZONTAL EN "B":



TRAMO I-I ($0 \leq \varphi \leq \pi/2$)

$$M_I = -(P+H)R(1 - \cos \varphi)$$

$$\frac{\partial M_I}{\partial H} = -R(1 - \cos \varphi)$$

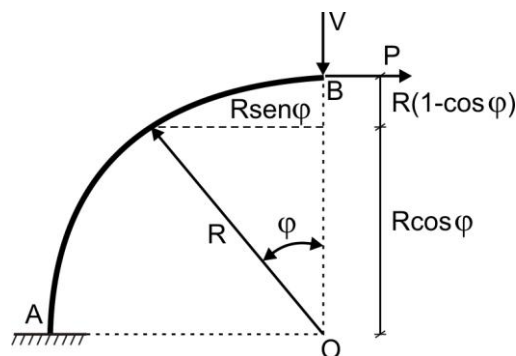
$$ds = R d\varphi$$

Luego:

$$\delta_H^B = \int_s M_I \left(\frac{\partial M_I}{\partial H} \right) \frac{ds}{EI} = \frac{1}{EI} \int_0^{\pi/2} [-PR(1 - \cos \varphi)] [-R(1 - \cos \varphi)] R d\varphi = \frac{PR^3}{EI} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos \varphi)^2 d\varphi$$

$$\delta_H^B = \frac{PR^3}{4EI} (3\pi - 8) \rightarrow$$

DESPLAZAMIENTO VERTICAL EN "B":



TRAMO I-I ($0 \leq \varphi \leq \pi/2$)

$$M_I = -PR(1 - \cos \varphi) - VR \text{sen} \varphi$$

$$\frac{\partial M_I}{\partial V} = -R \text{sen} \varphi$$

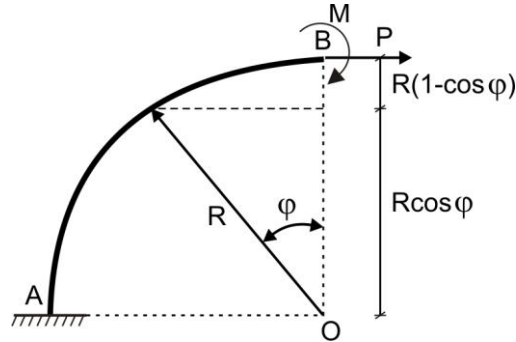
$$ds = R d\varphi$$

Luego:

$$\delta_v^B = \int_s M_I \left(\frac{\partial M_I}{\partial V} \right) \frac{ds}{EI} = \frac{1}{EI} \int_0^{\pi/2} [-PR(1 - \cos \varphi)] [-R \sin \varphi] R d\varphi = \frac{PR^3}{EI} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos \varphi) (\sin \varphi) d\varphi$$

$$\delta_v^B = \frac{PR^3}{2EI} \downarrow$$

PENDIENTE EN "B":



TRAMO I-I ($0 \leq \varphi \leq \pi/2$)

$$M_I = -PR(1 - \cos \varphi) - M$$

$$\frac{\partial M_I}{\partial M} = -1$$

$$ds = R d\varphi$$

Luego:

$$\theta_B = \int_s M_I \left(\frac{\partial M_I}{\partial M} \right) \frac{ds}{EI} = \frac{1}{EI} \int_0^{\pi/2} [-PR(1 - \cos \varphi)] (-1) R d\varphi = \frac{PR^2}{EI} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos \varphi) d\varphi$$

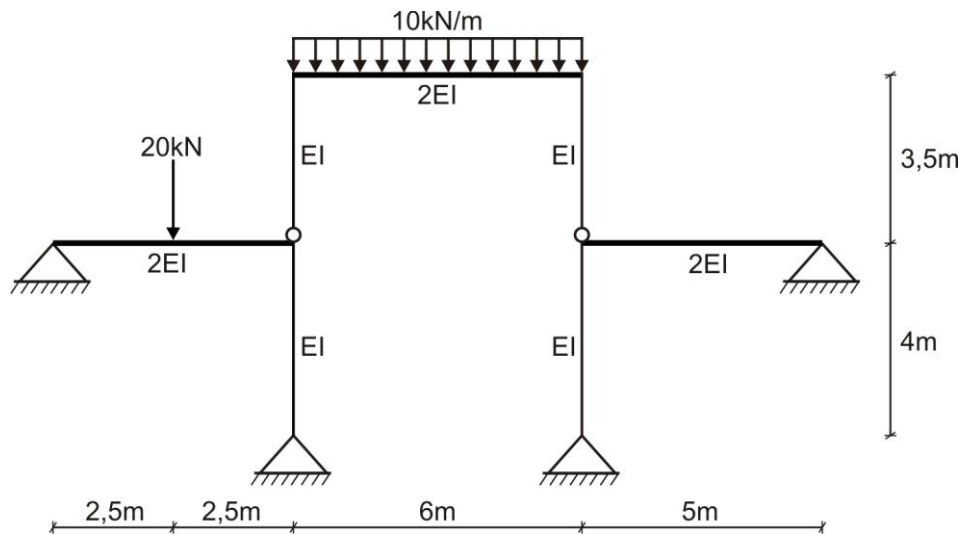
$$\theta_B = \frac{PR^2}{2EI} (\pi - 2)$$

Como el signo es (+) indica que la pendiente va en el mismo sentido que el momento ficticio M, es decir, en sentido horario.

EVALUACIÓN	PRACTICA CALIFICADA N° 3	SEM. ACADÉMICO	2008 – II
CURSO	RESISTENCIA DE MATERIALES II	SECCIÓN	30F
PROFESOR	Ph.D. GENNER VILLARREAL CASTRO	DURACIÓN	90m
ESCUELA	INGENIERIA CIVIL	CICLO	VI

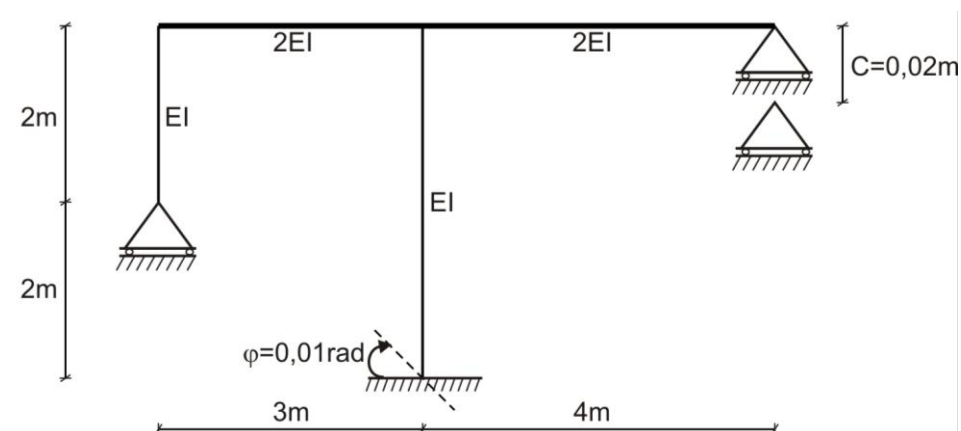
1. METODO DE LAS FUERZAS. Resolver el pórtico mostrado en la figura y graficar sus diagramas de fuerza axial, fuerza cortante y momento flector.

..... (10 puntos)



2. METODO DE LAS FUERZAS. Resolver el pórtico mostrado en la figura, considerando $E = 15000\sqrt{f_c}$; $f_c = 210\text{kg/cm}^2$; $I = 0,000675\text{m}^4$ y graficar sus diagramas de fuerza axial, fuerza cortante y momento flector.

..... (10 puntos)



FECHA	La Molina, 27 de Octubre del 2008
--------------	-----------------------------------

SOLUCIONARIO DE PRÁCTICA CALIFICADA Nº 3

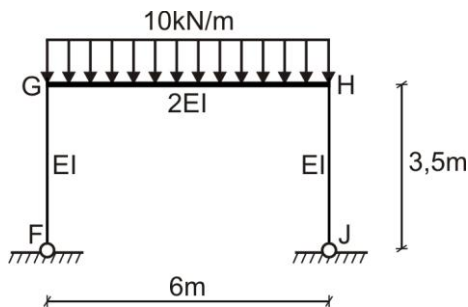
CICLO 2008 – II

1. Determinamos el grado de indeterminación del sistema.

$$G.I. = 3C - A = 3(3) - 6 = 3$$

El pórtico es tres veces hiperestático y como tiene un sistema de estructura compuesta (montaje una sobre otra), podemos analizarlo en forma separada cada sistema, iniciando con la estructura superior.

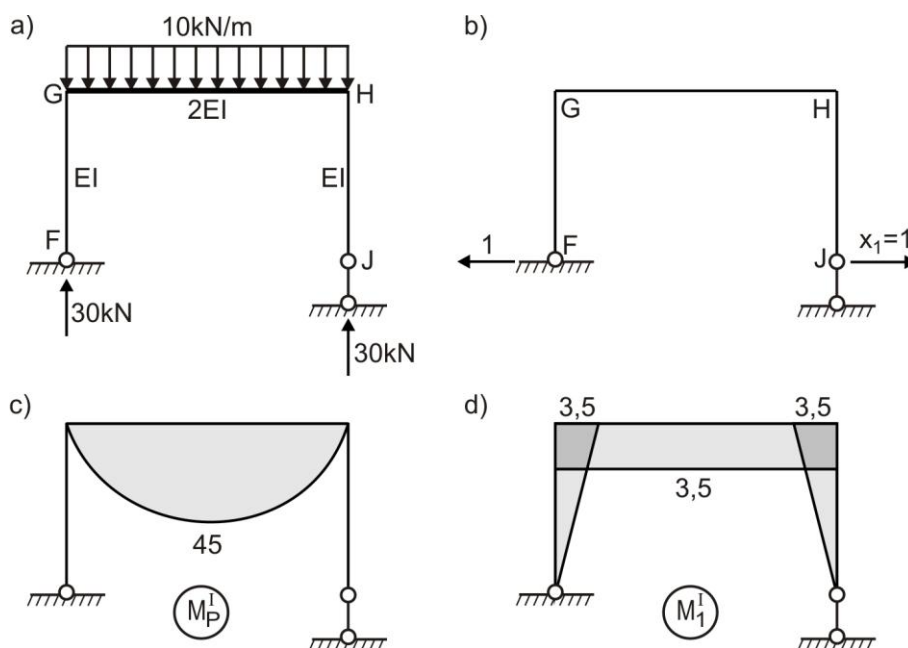
SISTEMA I:



Determinamos su grado de indeterminación de este sistema:

$$G.I. = 3(1) - 2 = 1$$

Eliminamos la componente horizontal en el apoyo J, calculando sus reacciones en los apoyos para la carga real (figura a) y carga unitaria (figura b). Luego, graficamos los diagramas de momento flector debido a la acción de la carga real (figura c) y carga unitaria (figura d)



La ecuación canónica para el sistema será:

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0$$

$$\delta_{11} = 2 \cdot \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3,5 \cdot 3,5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3,5 + \frac{1}{2EI} \cdot 3,5 \cdot 6 \cdot 3,5 = \frac{65,333}{EI}$$

$$\Delta_{1P} = \frac{6}{6(2EI)} [4.45.3,5] = \frac{315}{EI}$$

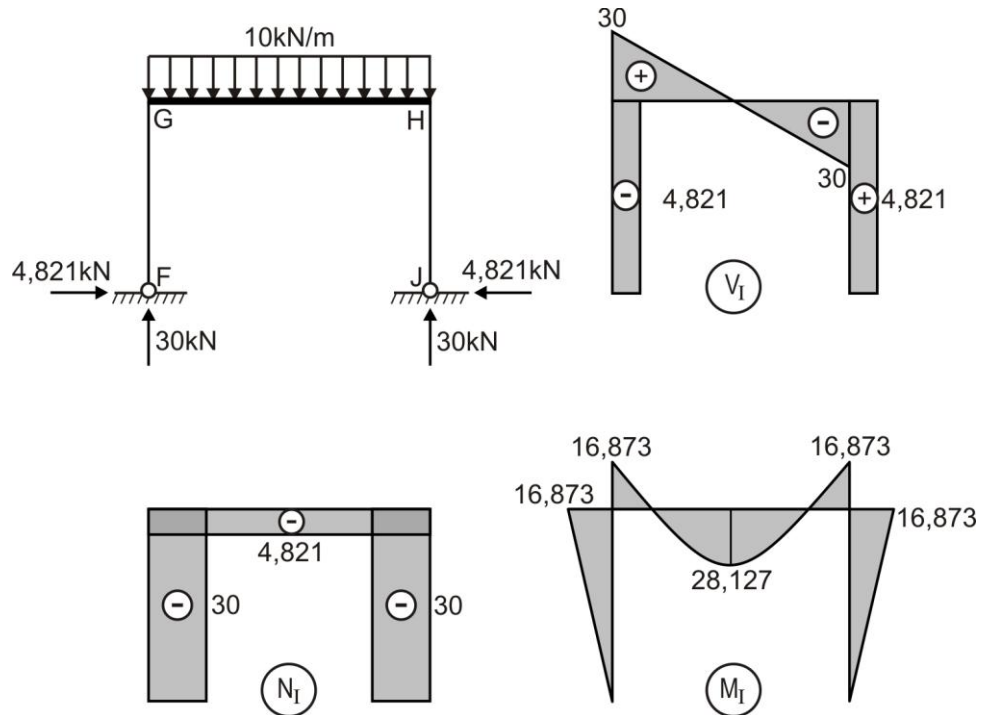
Luego:

$$\frac{65,333}{EI} X_1 + \frac{315}{EI} = 0$$

De donde:

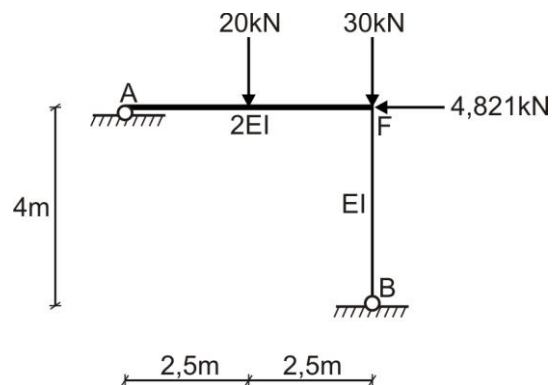
$$X_1 = H_J = -4,821\text{kN} \leftarrow$$

De esta manera, las reacciones en los apoyos y los diagramas de fuerzas internas, para esta parte de la estructura, serán las mostradas en la siguiente figura.



Ahora, analizamos el sistema II, aplicando las reacciones obtenidas en el cálculo previo.

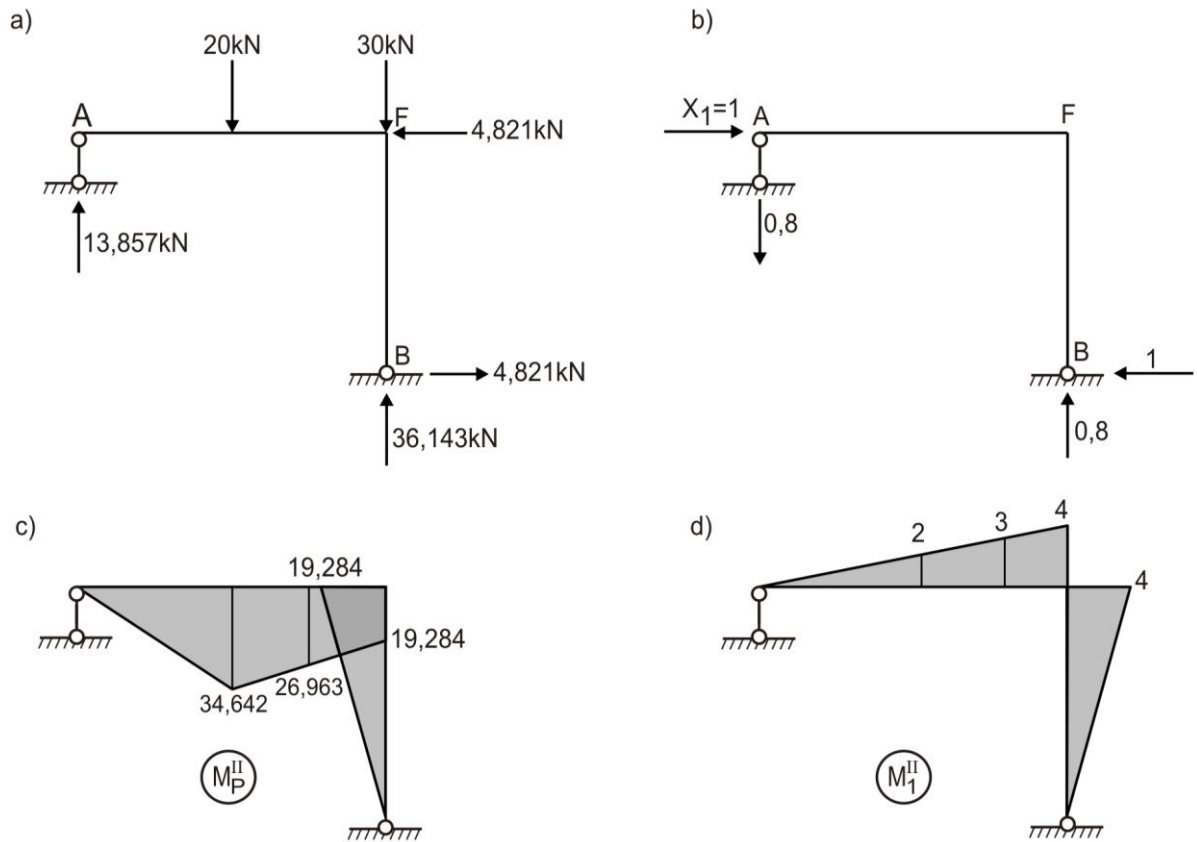
SISTEMA II:



Determinamos su grado de indeterminación de este sistema:

$$G.I. = 3(1) - 2 = 1$$

Eliminamos la componente horizontal en el apoyo A y analizamos el pórtico AFB, en forma análoga a lo realizado con el sistema I, es decir, debido a la acción de la carga real y sus transmisiones de las reacciones de los apoyos de la parte superior, así como a la acción de la carga unitaria, graficando sus respectivos diagramas de momento flector.



La ecuación canónica será:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 = \frac{34,667}{EI}$$

$$\Delta_{1P} = -\frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2,5 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 34,642 - \frac{2,5}{6(2EI)} [2 \cdot 34,642 + 4 \cdot 3 \cdot 26,963 + 4 \cdot 19,284] - \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 19,284$$

$$\Delta_{1P} = -\frac{229,628}{EI}$$

Luego:

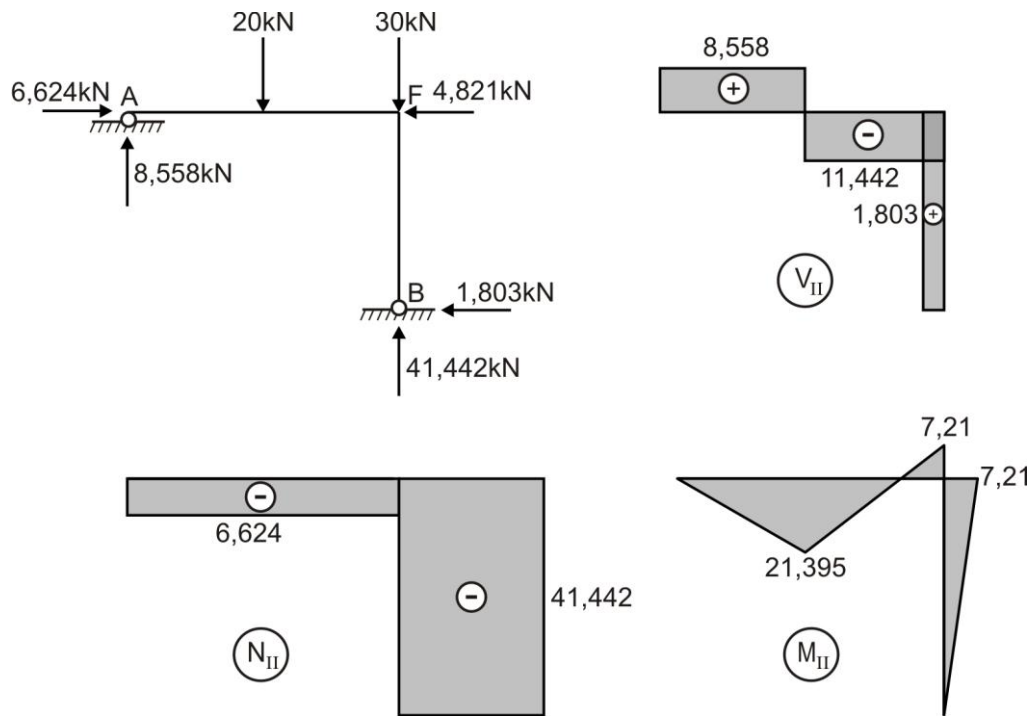
$$\frac{34,667}{EI} X_1 - \frac{229,628}{EI} = 0$$

De donde:

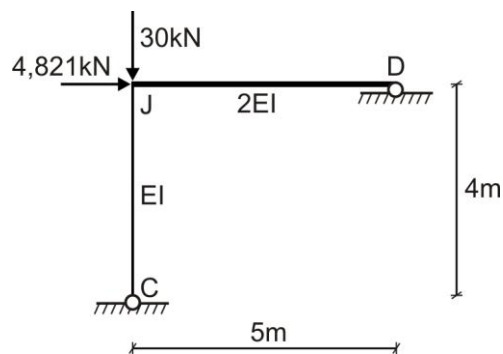
$$X_1 = H_A = 6,624 \text{ kN} \rightarrow$$

De esta manera, las reacciones en los apoyos y los diagramas de fuerzas internas, para esta parte del sistema, será la mostrada en la figura de la siguiente página.

Ahora, analizamos el sistema III, aplicando las reacciones obtenidas en el cálculo del sistema I



SISTEMA III:



Determinamos su grado de indeterminación de este sistema:

$$G.I. = 3(1) - 2 = 1$$

Eliminamos la componente horizontal en el apoyo D y analizamos el pórtico CJD, calculando las reacciones en los apoyos debido a la transmisión de acciones del sistema I (figura a) y carga unitaria (figura b). Luego, graficamos los diagramas de momento flector debido a las cargas reales (figura c) y carga unitaria (figura d)

La ecuación canónica será:

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 = \frac{34,667}{EI}$$

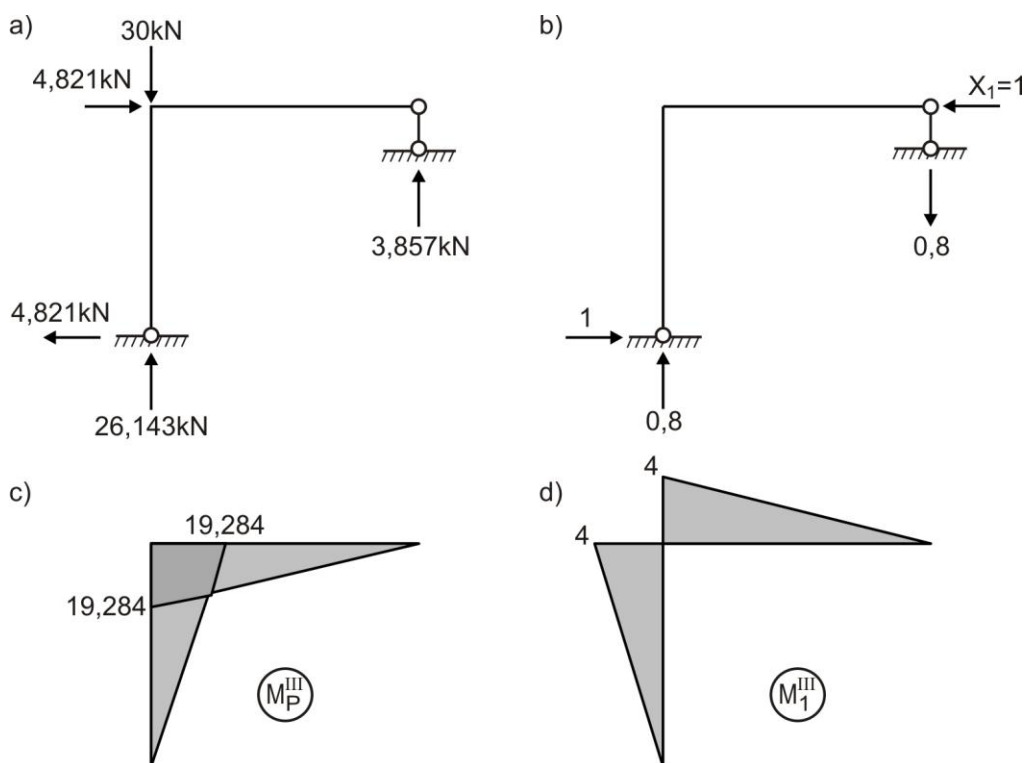
$$\Delta_{1P} = -\frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 19,284 - \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 19,284 = -\frac{167,128}{EI}$$

Luego:

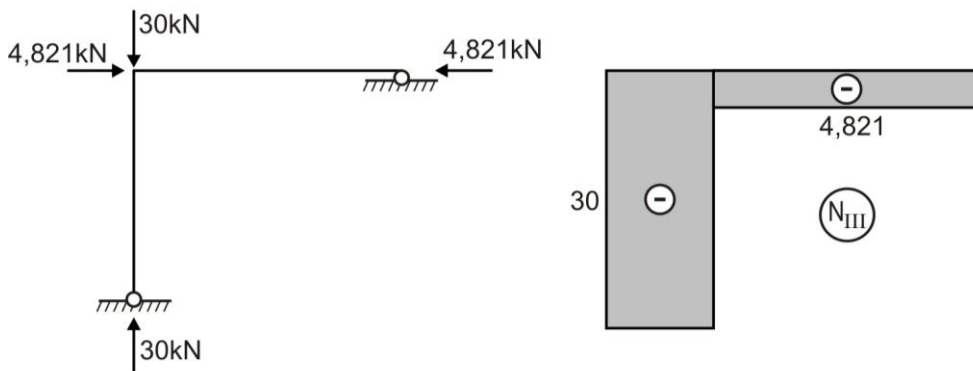
$$\frac{34,667}{EI} X_1 - \frac{167,128}{EI} = 0$$

De donde:

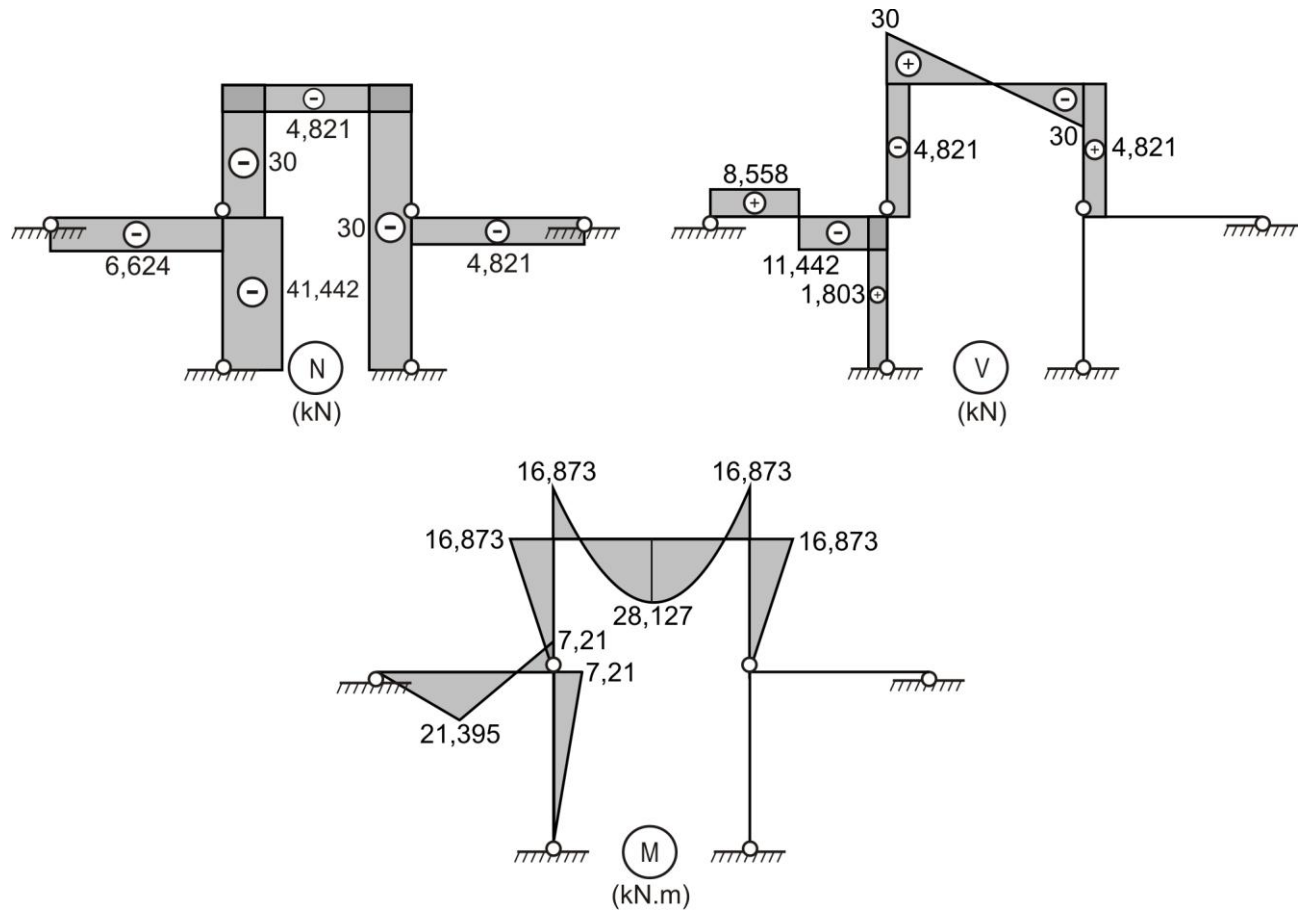
$$X_1 = H_D = 4,821\text{kN} \leftarrow$$



De esta manera, las reacciones en los apoyos y diagrama de fuerza axial para esta parte de la estructura es la mostrada en la figura. Se debe indicar, que no existen diagramas de fuerza cortante y momento flector en esta parte de la estructura.



De esta forma, el diagrama final de fuerzas internas será la suma de los tres diagramas de los tres sistemas analizados en forma separada, siendo los diagramas finales de fuerza axial, fuerza cortante y momento flector los mostrados en la figura de la siguiente página.



2. Calculamos la rigidez a flexión EI

$$E = 15000\sqrt{210} = 217370,65 \text{ kg/cm}^2 = 2173706,5 \text{ T/m}^2$$

$$EI = 2173706,5 \cdot 0,000675 = 1467,252 \text{ T.m}^2$$

Determinamos el grado de indeterminación del sistema.

$$G.I. = 3(2) - 4 = 2$$

Planteamos el sistema principal, eliminando dos conexiones adicionales, de tal forma que se convierte en isostático, determinando sus reacciones en los apoyos y graficando sus diagramas de momento flector correspondientes, tal como se muestra en la figura de la siguiente página.

El sistema de ecuaciones canónicas es:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1C} = 0$$

$$\delta_{12}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2C} = 0$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{EI} \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{40,5}{EI}$$

$$\delta_{12} = -\frac{1}{EI} \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 = -\frac{48}{EI}$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{EI} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = \frac{74,667}{EI}$$

$$\Delta_{1C} = -(-3 \cdot 0,01) = 0,03$$

$$\Delta_{2C} = -(-1 \cdot 0,02 + 4 \cdot 0,01) = -0,02$$

Reemplazamos valores:

$$\frac{40,5}{EI} X_1 - \frac{48}{EI} X_2 + 0,03 = 0$$

$$-\frac{48}{EI} X_1 + \frac{74,667}{EI} X_2 - 0,02 = 0$$

Luego, multiplicamos el término independiente por EI obtenido anteriormente, siendo los resultados los siguientes:

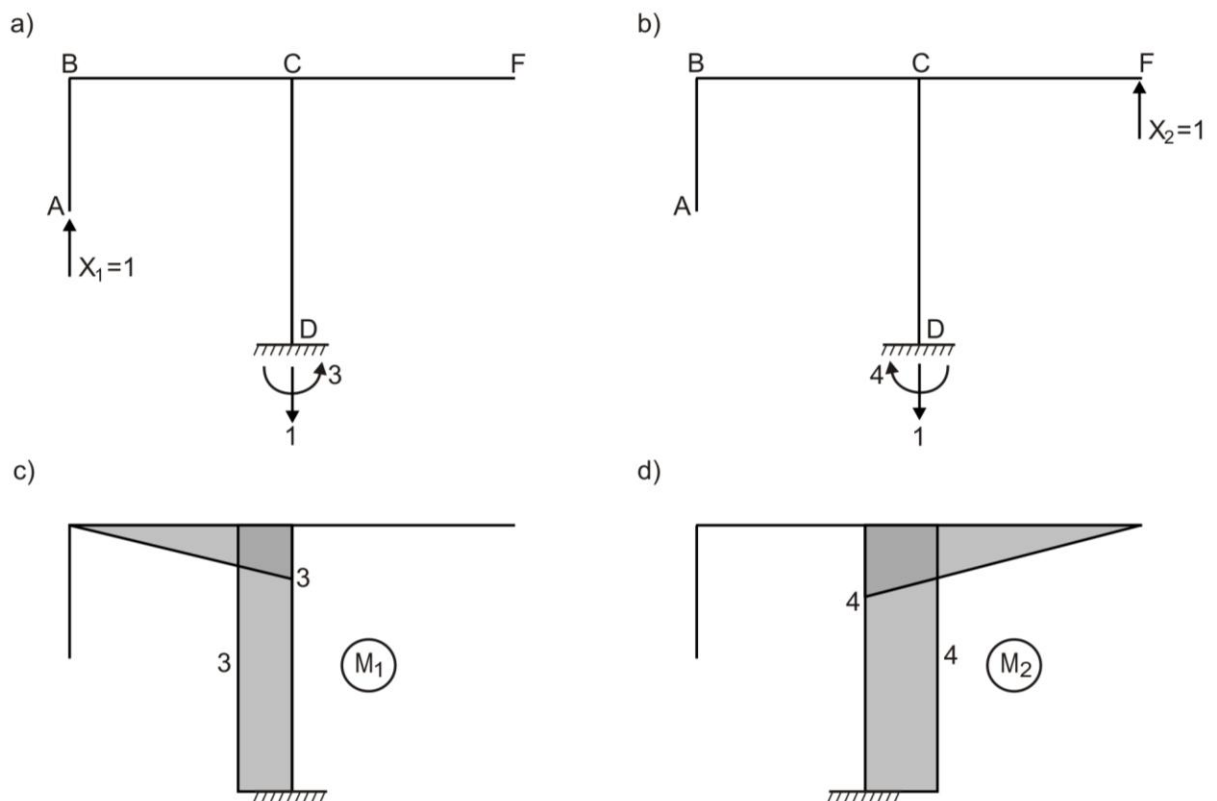
$$40,5X_1 - 48X_2 = -44,017$$

$$-48X_1 + 74,667X_2 = 29,345$$

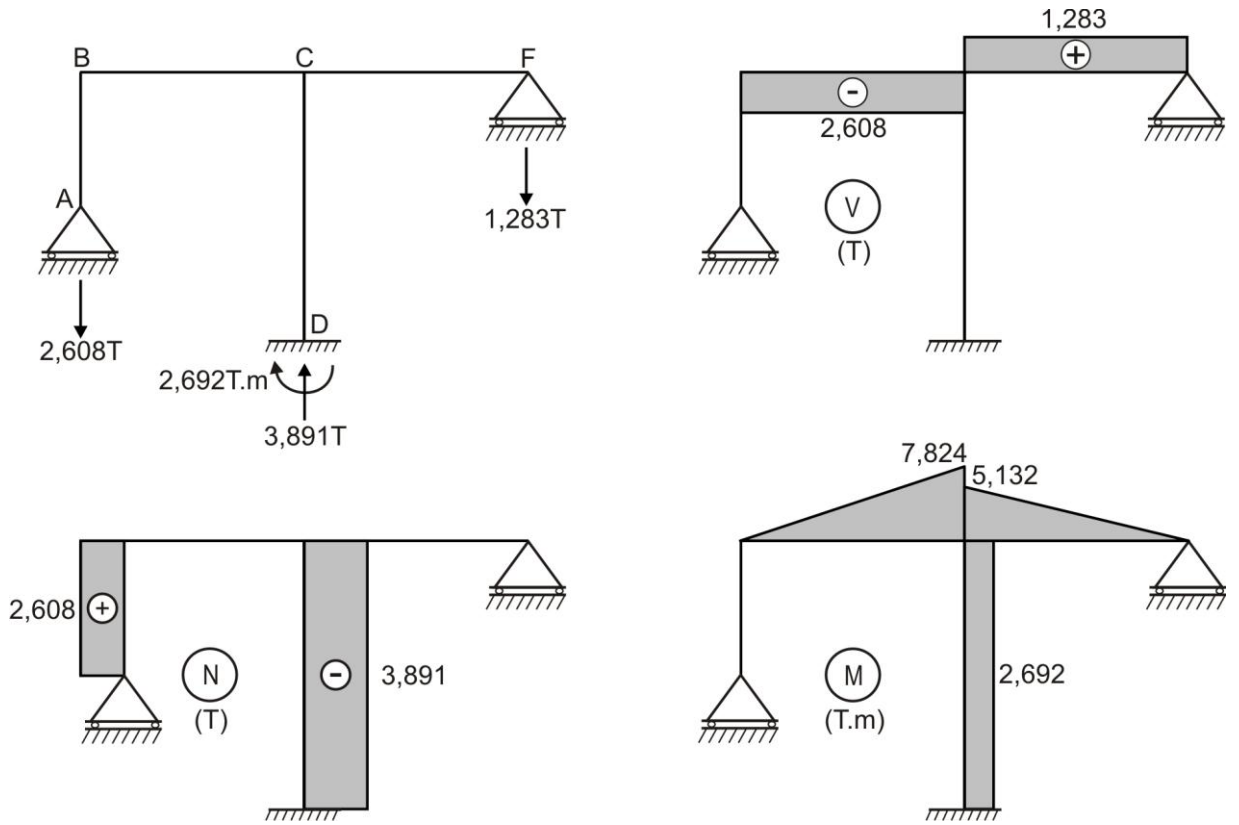
De donde:

$$X_1 = V_A = -2,608T \downarrow$$

$$X_2 = V_F = -1,283T \downarrow$$



De esta manera, las reacciones en los apoyos y diagramas finales de la estructura son las mostradas en la figura de la siguiente página.

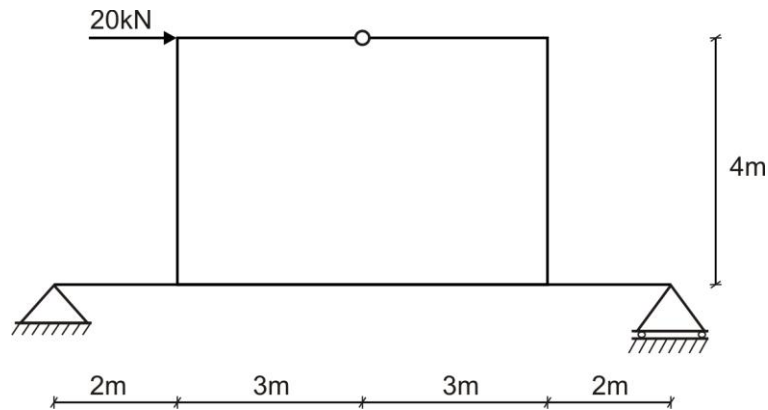




EVALUACIÓN	PRACTICA CALIFICADA N° 3	SEM. ACADÉMICO	2009 – I
CURSO	RESISTENCIA DE MATERIALES II	SECCIÓN	30F
PROFESOR	Ph.D. GENNER VILLARREAL CASTRO	DURACIÓN	90m
ESCUELA	INGENIERIA CIVIL	CICLO	VI

1. METODO DE LAS FUERZAS. Resolver el siguiente pórtico y graficar sus diagramas de fuerza axial, fuerza cortante y momento flector. Considerar que la rigidez EI es constante para todo el pórtico.

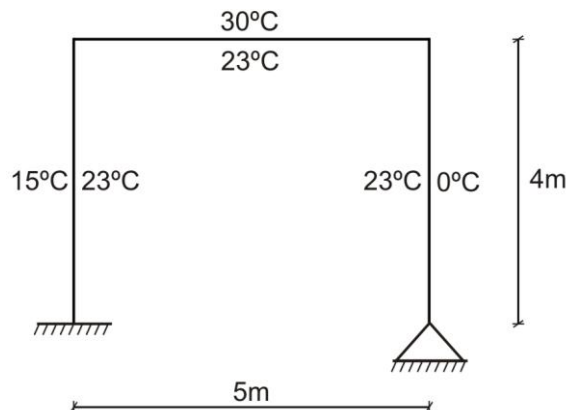
..... (10 puntos)



2. METODO DE LAS FUERZAS. Resolver el siguiente pórtico, considerando que es de concreto armado con coeficiente de dilatación térmica $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} \left(\frac{1}{^\circ\text{C}} \right)$, el módulo de elasticidad es $E = 2 \cdot 10^7 \text{ kPa}$

y las dimensiones de la sección transversal para las columnas son 30cm x 30cm y para la viga de 30cm x 50cm

..... (10 puntos)



FECHA	La Molina, 25 de Mayo del 2009
--------------	--------------------------------

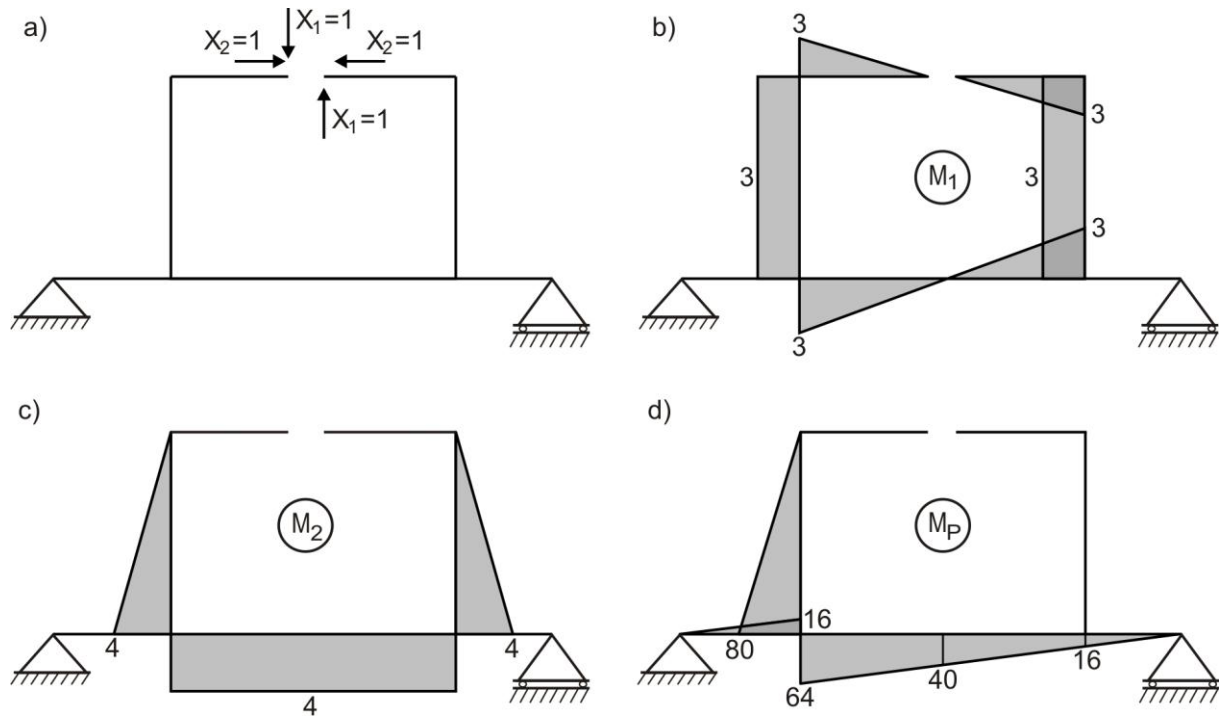
SOLUCIONARIO DE PRÁCTICA CALIFICADA Nº 3

CICLO 2009 – I

1. Determinamos el grado de indeterminación del sistema.

$$G.I. = 3(2) - 4 = 2$$

Elegimos el sistema principal (figura a) y graficamos los diagramas M_1 , M_2 y M_P , mostrados en las figuras b, c y d



El sistema de ecuaciones canónicas es:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} = 0$$

$$\delta_{12}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot 4 + \frac{1}{EI} \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = \frac{108}{EI}$$

$$\delta_{12} = \frac{1}{EI} \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 - \frac{1}{EI} \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 + \frac{6}{6EI} (3 \cdot 4 + 4 \cdot 0 \cdot 4 - 3 \cdot 4) = 0$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \cdot 2 + \frac{1}{EI} \cdot 4 \cdot 6 \cdot 4 = \frac{138,667}{EI}$$

$$\Delta_{1P} = \frac{1}{EI} \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 80 + \frac{6}{6EI} (3 \cdot 64 + 4 \cdot 0 \cdot 40 - 3 \cdot 16) = \frac{624}{EI}$$

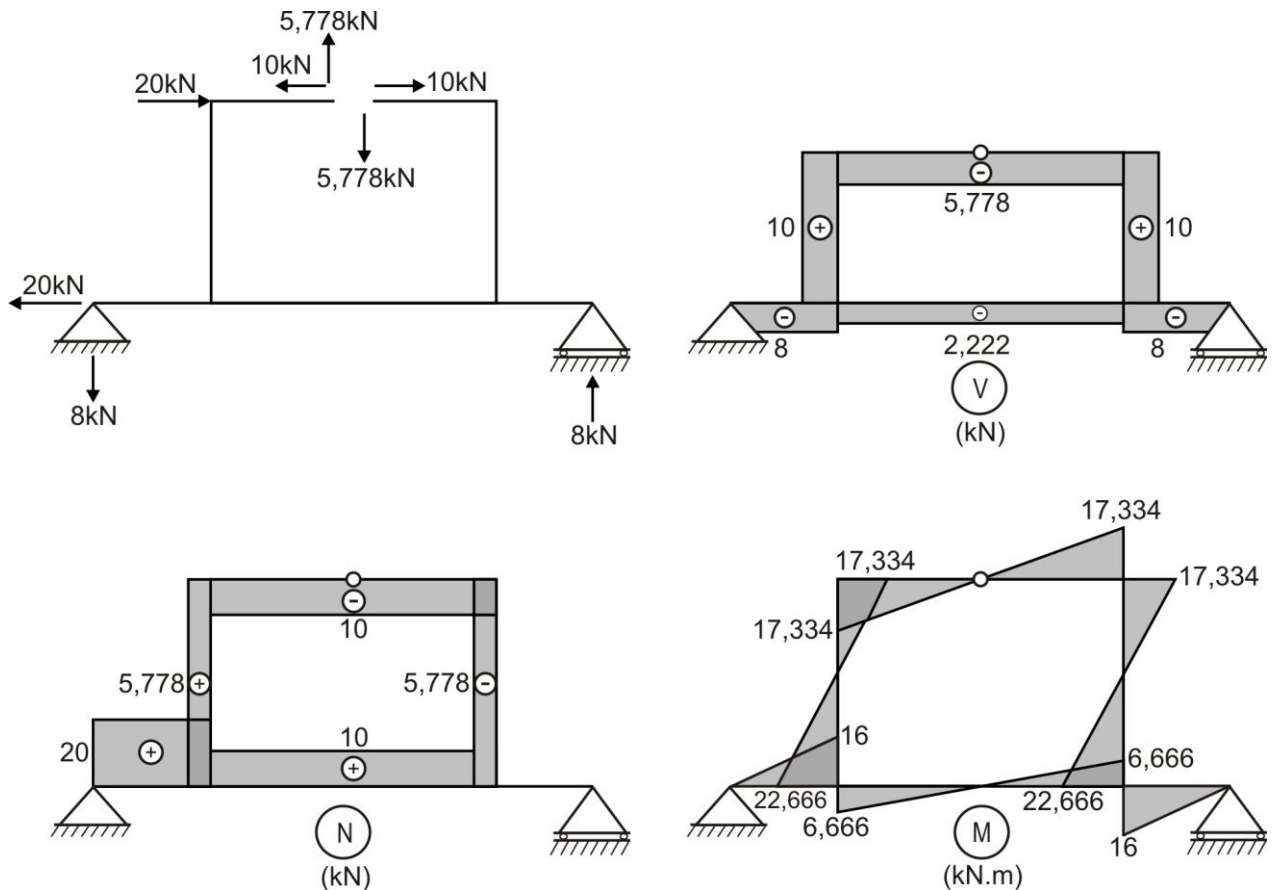
$$\Delta_{2P} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 80 + \frac{6}{6EI} (4 \cdot 64 + 4 \cdot 4 \cdot 40 + 4 \cdot 16) = \frac{1386,667}{EI}$$

Reemplazamos valores y obtenemos:

$$\frac{108}{EI} X_1 + \frac{624}{EI} = 0 \quad \Rightarrow \quad X_1 = -5,778 \text{ kN}$$

$$\frac{138,667}{EI} X_2 + \frac{1386,667}{EI} = 0 \quad \Rightarrow \quad X_2 = -10 \text{ kN}$$

Para graficar los diagramas finales, reemplazamos los valores obtenidos en la figura a) de la página anterior, siendo dichos diagramas finales los mostrados en la siguiente figura.



2. Calculamos las rigideces a flexión de columnas y viga.

$$EI_{\text{col}} = 2 \cdot 10^7 \cdot 10^3 \cdot \frac{0,3 \cdot 0,3^3}{12} = 1,35 \cdot 10^7 \text{ N.m}^2 = EI$$

$$EI_{\text{viga}} = 2 \cdot 10^7 \cdot 10^3 \cdot \frac{0,3 \cdot 0,5^3}{12} = 6,25 \cdot 10^7 \text{ N.m}^2 = 4,63EI$$

Determinamos el grado de indeterminación del sistema.

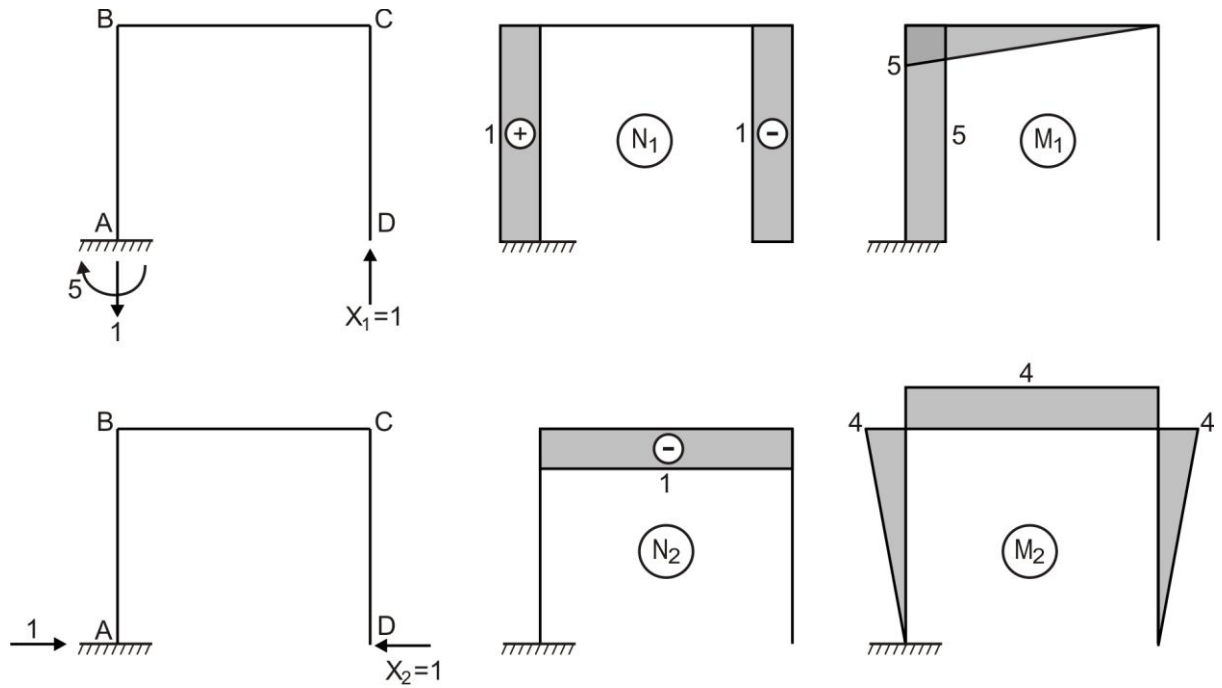
$$G.I. = 3(1) - 1 = 2$$

Elegimos el sistema principal, eliminando dos conexiones adicionales, convirtiendo la estructura en isostática y graficando sus diagramas de fuerza axial y momento flector, tal como se muestra en la figura de la siguiente página.

El sistema de ecuaciones canónicas es:

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \Delta_{1T} = 0$$

$$\delta_{12} X_1 + \delta_{22} X_2 + \Delta_{2T} = 0$$



Determinamos los coeficientes del sistema de ecuaciones canónicas.

$$\delta_{11} = \frac{1}{4,63EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 5 + \frac{1}{EI} \cdot 5 \cdot 4 \cdot 5 = \frac{109}{EI}$$

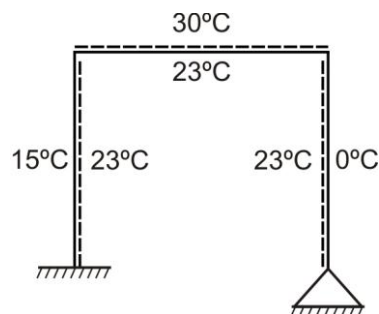
$$\delta_{12} = -\frac{1}{4,63EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot 4 - \frac{1}{EI} \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2 = -\frac{50,8}{EI}$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \cdot 2 + \frac{1}{4,63EI} \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 = \frac{59,94}{EI}$$

$$\Delta_{1T} = \alpha \frac{|23-15|}{0,3} \cdot 5 \cdot 4 - \alpha \frac{|23-30|}{0,5} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 + \alpha \frac{|23+15|}{2} \cdot 1 \cdot 4 - \alpha \frac{|23+0|}{2} \cdot 1 \cdot 4 = 388,33\alpha$$

$$\Delta_{2T} = -\alpha \frac{|15-23|}{0,3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 + \alpha \frac{|30-23|}{0,5} \cdot 4 \cdot 5 - \alpha \frac{|0-23|}{0,3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 - \alpha \frac{|30+23|}{2} \cdot 1 \cdot 5 = -679,17\alpha$$

En la siguiente figura, se muestran las zonas traccionadas por acción de la temperatura.



De esta manera, las ecuaciones serán:

$$\frac{109}{EI} X_1 - \frac{50,8}{EI} X_2 + 388,33\alpha = 0$$

$$-\frac{50,8}{EI} X_1 + \frac{59,94}{EI} X_2 - 679,17\alpha = 0$$

Efectuando simplificaciones, se tendrá:

$$109X_1 - 50,8X_2 = -62909,46$$

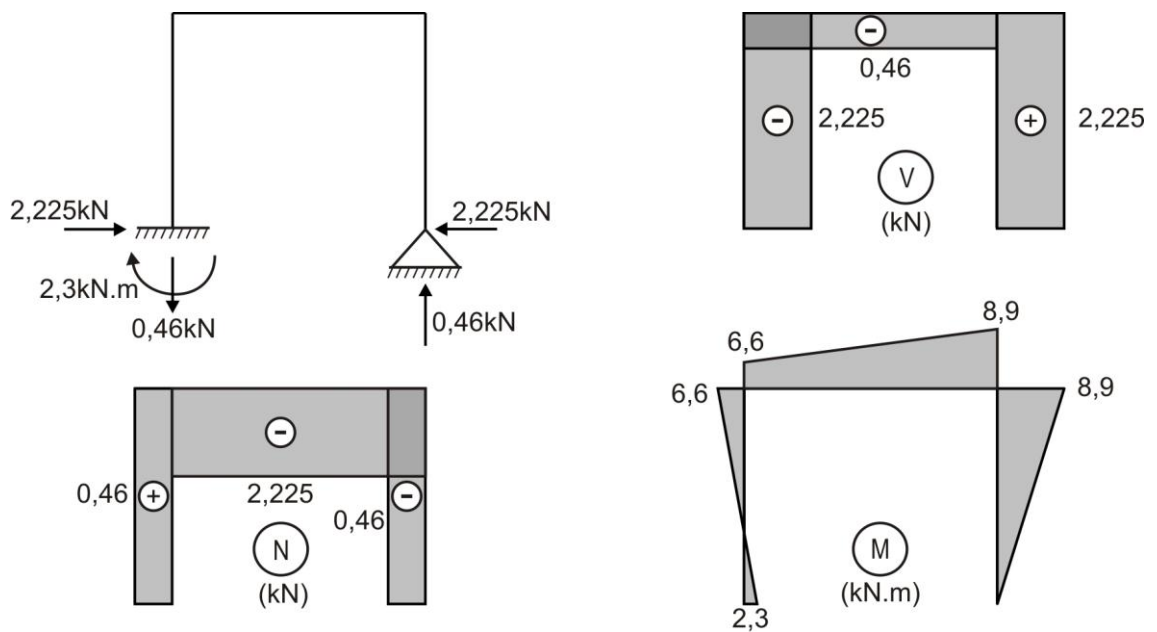
$$-50,8X_1 + 59,94X_2 = 110025,54$$

De donde:

$$X_1 = V_D = 460,05\text{N} = 0,460\text{kN} \uparrow$$

$$X_2 = H_D = 2225,49\text{N} = 2,225\text{kN} \leftarrow$$

Con estos valores graficamos los diagramas finales:

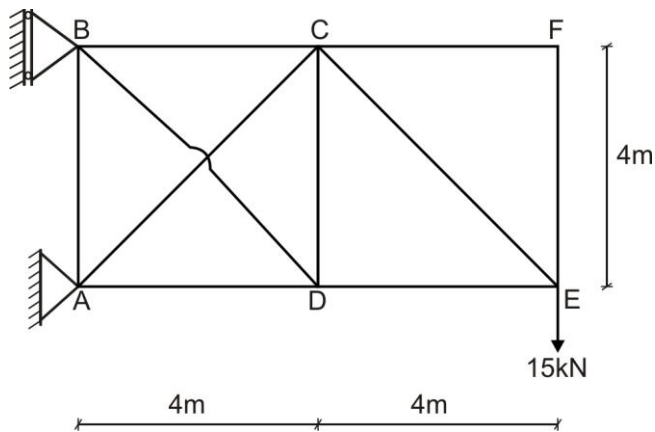




EVALUACIÓN	PRACTICA CALIFICADA Nº 3	SEM. ACADÉMICO	2009 – II
CURSO	RESISTENCIA DE MATERIALES II	SECCIÓN	30F
PROFESOR	Ph.D. GENNER VILLARREAL CASTRO	DURACIÓN	90m
ESCUELA	INGENIERIA CIVIL	CICLO	VI

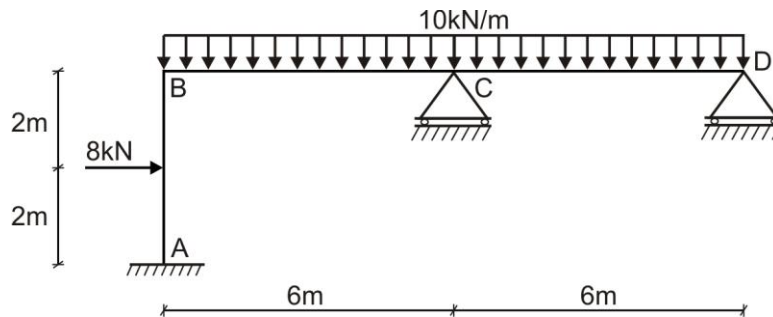
1. METODO DE LAS FUERZAS. Resolver la armadura mostrada en la figura esquematizando sus fuerzas internas. Considerar que la rigidez EA de la armadura es constante.

..... (10 puntos)



2. METODO DE LAS FUERZAS. Resolver el pórtico mostrado en la figura y graficar sus diagramas de fuerza axial, fuerza cortante y momento flector. Considerar EI constante en toda la estructura.

..... (10 puntos)



FECHA	La Molina, 26 de Octubre del 2009
--------------	-----------------------------------

SOLUCIONARIO DE PRÁCTICA CALIFICADA Nº 3

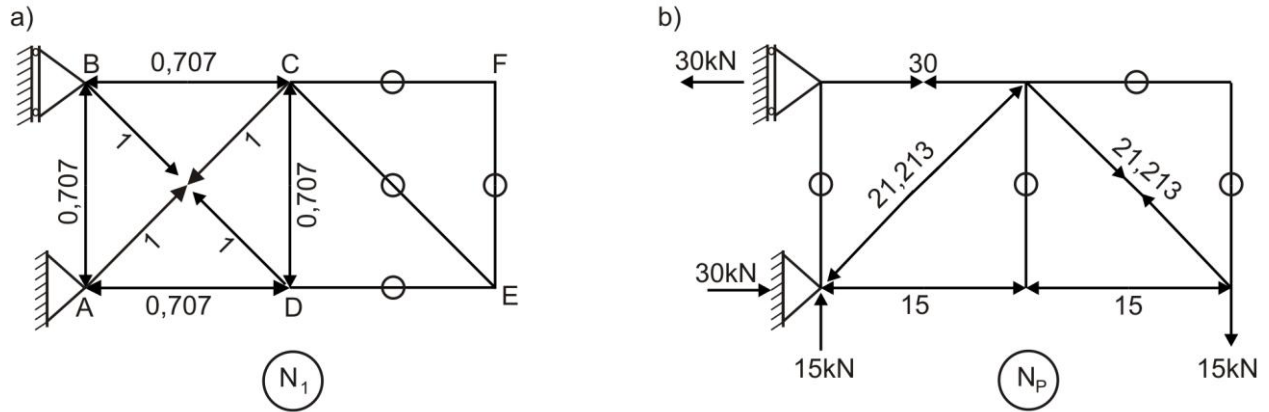
CICLO 2009 – II

1. Determinamos el grado de indeterminación.

$$G.I. = B - 2N = 13 - 2(6) = 1$$

La armadura es una vez hiperestática.

Eliminamos la barra BD y lo reemplazamos por su carga unitaria (figura a), analizando también bajo la carga real (figura b), calculando sus reacciones y fuerzas internas.



La ecuación canónica será:

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0$$

$$\delta_{11} = \sum \frac{N_1 N_1 L}{EA} = \frac{(-0,707)(-0,707) \cdot 4}{EA} + \frac{(1)(1) \cdot 4\sqrt{2}}{EA} = \frac{19,312}{EA}$$

$$\Delta_{1P} = \sum \frac{N_1 N_P L}{EA} = \frac{(-0,707)(30) \cdot 4}{EA} + \frac{(1)(-21,213) \cdot 4\sqrt{2}}{EA} + \frac{(-0,707)(-15) \cdot 4}{EA} = -\frac{162,418}{EA}$$

Luego:

$$\frac{19,312}{EA} X_1 - \frac{162,418}{EA} = 0$$

De donde:

$$X_1 = N_{BD} = 8,410 \text{ kN (TRACCION)}$$

En consecuencia, las fuerzas internas serán calculadas por la relación:

$$N = N_1 X_1 + N_P$$

Siendo sus valores los siguientes:

$$N_{AB} = (-0,707)(8,410) + 0 = -5,946 \text{ kN (COMPRESION)}$$

$$N_{AD} = (-0,707)(8,410) - 15 = -20,946 \text{ kN (COMPRESION)}$$

$$N_{AC} = (1)(8,410) - 21,213 = -12,803 \text{ kN (COMPRESION)}$$

$$N_{BC} = (-0,707)(8,410) + 30 = 24,054 \text{ kN (TRACCION)}$$

$$N_{CD} = (-0,707)(8,410) + 0 = -5,946 \text{ kN (COMPRESION)}$$

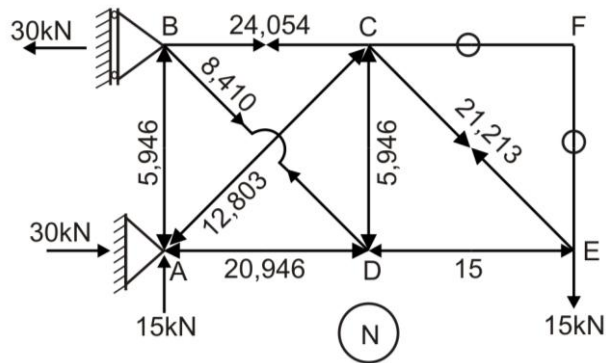
$$N_{CF} = 0$$

$$N_{CE} = 21,213 \text{ kN (TRACCION)}$$

$$N_{DE} = -15\text{kN (COMPRESION)}$$

$$N_{EF} = 0$$

De esta manera, la distribución de fuerzas axiales será:

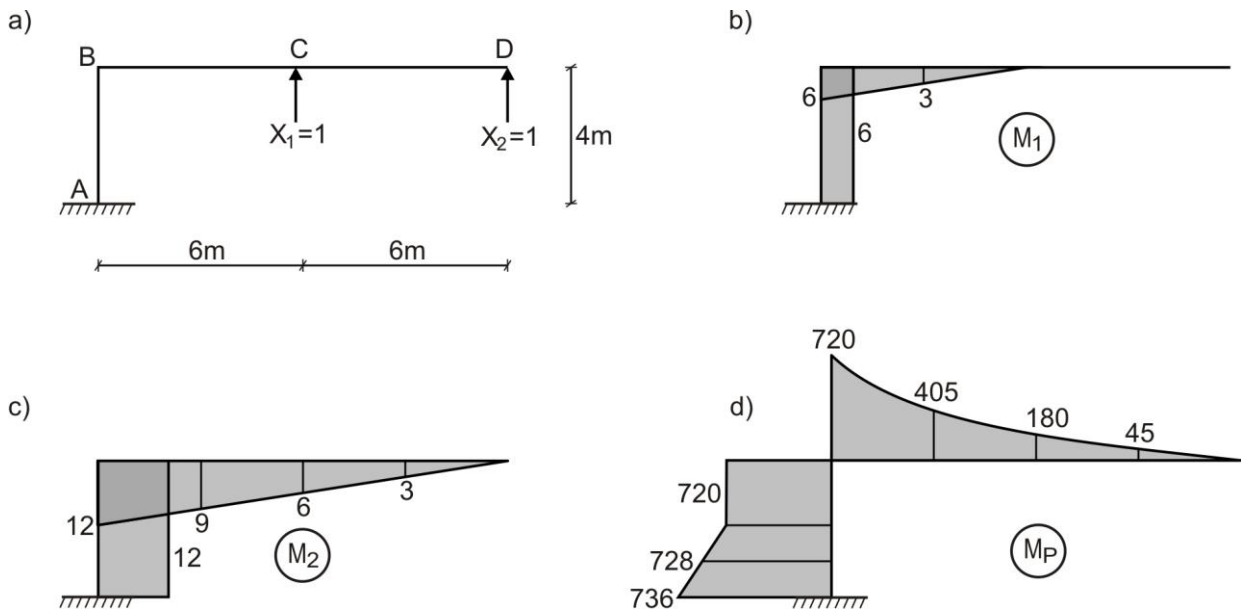


2. Determinamos el grado de indeterminación de la estructura.

$$G.I. = 3(2) - 4 = 2$$

El pórtico es dos veces hiperestático.

Elegimos el sistema principal y graficamos sus diagramas M_1 , M_2 y M_P



El sistema de ecuaciones canónicas será:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} = 0$$

$$\delta_{12}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 + 6 \cdot 4 \cdot 6 \right] = \frac{216}{EI}$$

$$\delta_{12} = \frac{6}{6EI} [12 \cdot 6 + 4 \cdot 9 \cdot 3] + \frac{1}{EI} \cdot 6 \cdot 4 \cdot 12 = \frac{468}{EI}$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 12 \cdot \frac{2}{3} \cdot 12 + 12 \cdot 4 \cdot 12 \right] = \frac{1152}{EI}$$

$$\Delta_{1P} = -\frac{6}{6EI} [6.720 + 4.3.405] - \frac{1}{EI} .6.2.720 - \frac{2}{6EI} [6.720 + 4.6.728 + 6.736] = -\frac{26556}{EI}$$

$$\Delta_{2P} = -\frac{12}{6EI} [12.720 + 4.6.180] - \frac{1}{EI} .12.2.720 - \frac{2}{6EI} [12.720 + 4.12.728 + 12.736] = -\frac{60672}{EI}$$

Luego:

$$\frac{216}{EI} X_1 + \frac{468}{EI} X_2 - \frac{26556}{EI} = 0$$

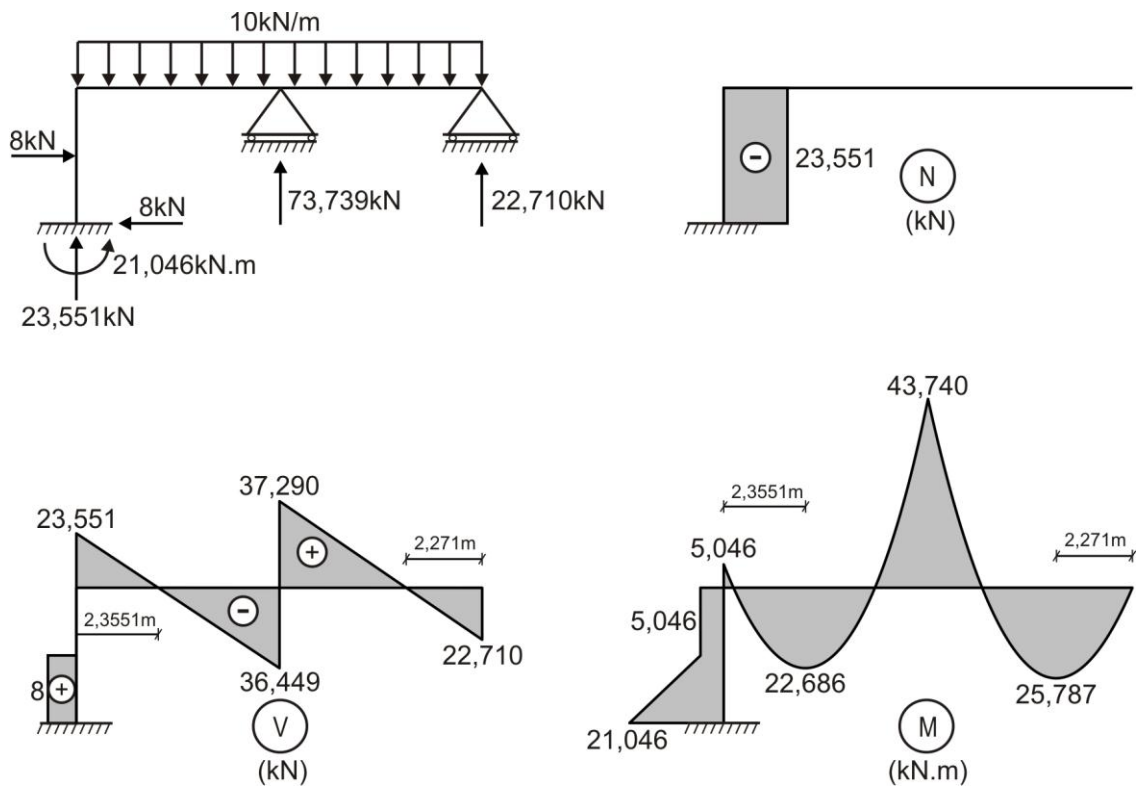
$$\frac{468}{EI} X_1 + \frac{1152}{EI} X_2 - \frac{60672}{EI} = 0$$

De donde:

$$X_1 = V_C = 73,739\text{kN} \uparrow$$

$$X_2 = V_D = 22,710\text{kN} \uparrow$$

Con los valores obtenidos calculamos las reacciones en el empotramiento y graficamos los diagramas finales, tal como se muestra en la figura.

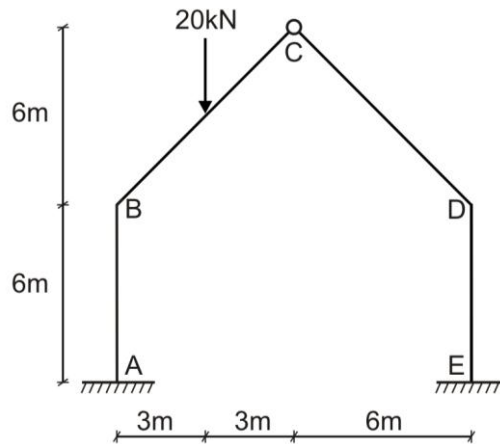




EVALUACIÓN	PRACTICA CALIFICADA N° 3	SEM. ACADÉMICO	2010 – I
CURSO	RESISTENCIA DE MATERIALES II	SECCIÓN	30F
PROFESOR	Ph.D. GENNER VILLARREAL CASTRO	DURACIÓN	90m
ESCUELA	INGENIERIA CIVIL	CICLO	VI

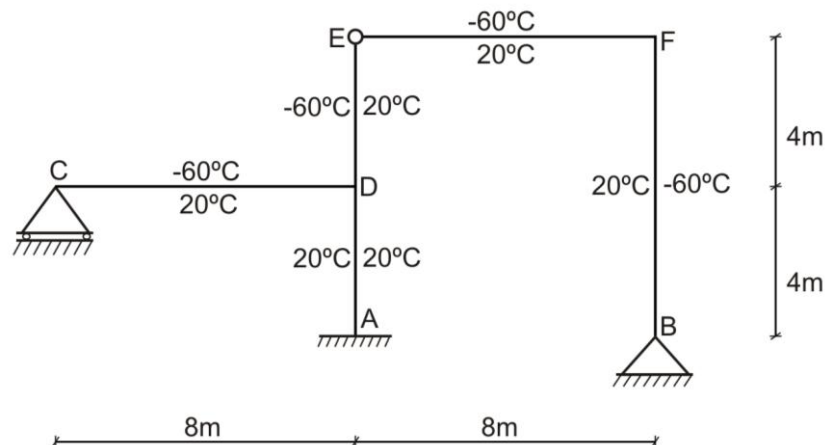
1. METODO DE LAS FUERZAS. Resolver el siguiente pórtico y graficar sus diagramas de fuerza axial, fuerza cortante y momento flector. Considerar EI constante para toda la estructura.

..... (10 puntos)



2. METODO DE LAS FUERZAS. Resolver el pórtico mostrado en la figura, si la rigidez EI es constante para toda la estructura. Considerar $b = 0,4m$ para todo el pórtico y que el coeficiente de dilatación térmica es α

..... (10 puntos)



FECHA	La Molina, 24 de Mayo del 2010
--------------	--------------------------------

SOLUCIONARIO DE PRÁCTICA CALIFICADA Nº 3

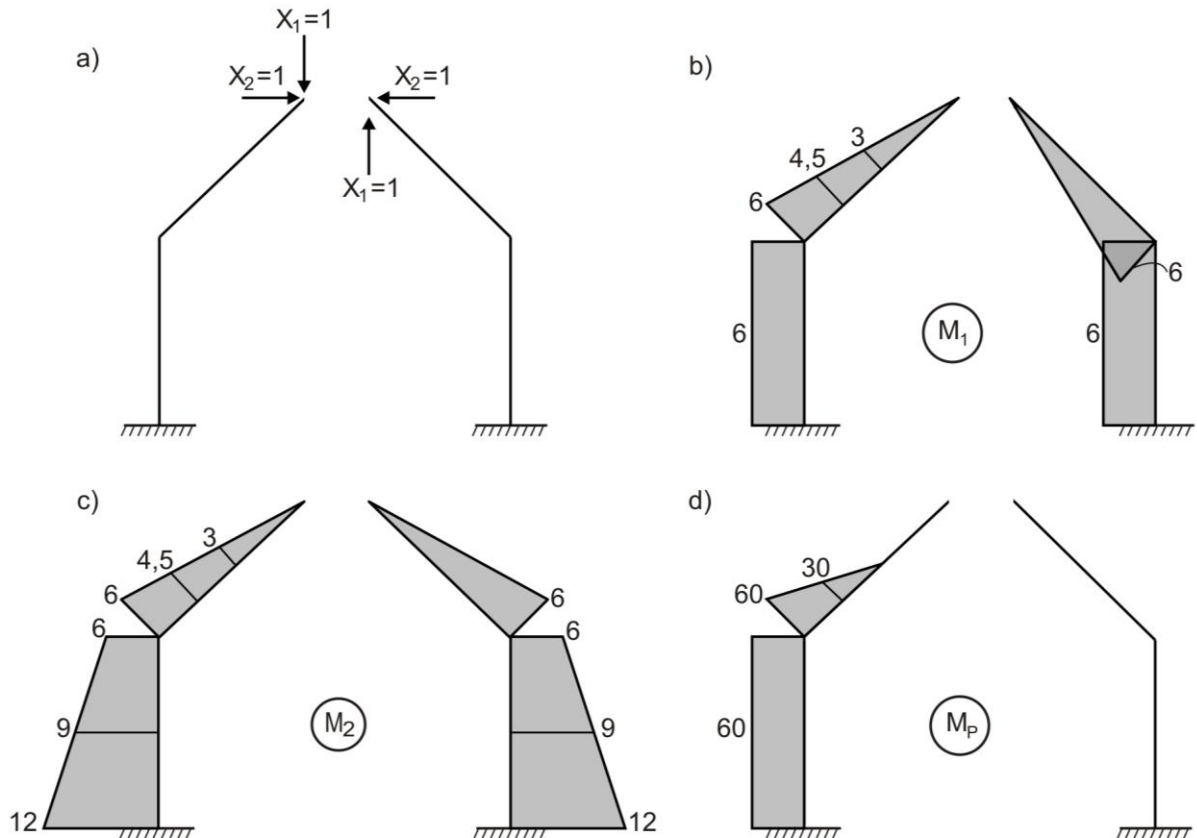
CICLO 2010 – I

1. Determinamos el grado de indeterminación de la estructura.

$$G.I. = 3(1) - 1 = 2$$

El pórtico es dos veces hiperestático.

Elegimos el sistema principal y graficamos los diagramas M_1 , M_2 y M_P



El sistema de ecuaciones canónicas será:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} = 0$$

$$\delta_{12}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \sqrt{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 + 6 \cdot 6 \cdot 6 \right] \cdot 2 = \frac{635,647}{EI}$$

$$\delta_{12} = 0$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \sqrt{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 \right] \cdot 2 + \frac{6}{6EI} [6 \cdot 6 + 4 \cdot 9 \cdot 9 + 12 \cdot 12] \cdot 2 = \frac{1211,647}{EI}$$

$$\Delta_{1P} = \frac{3\sqrt{2}}{6EI} [6 \cdot 60 + 4 \cdot 4,5 \cdot 30] + \frac{1}{EI} \cdot 6 \cdot 6 \cdot 60 = \frac{2796,396}{EI}$$

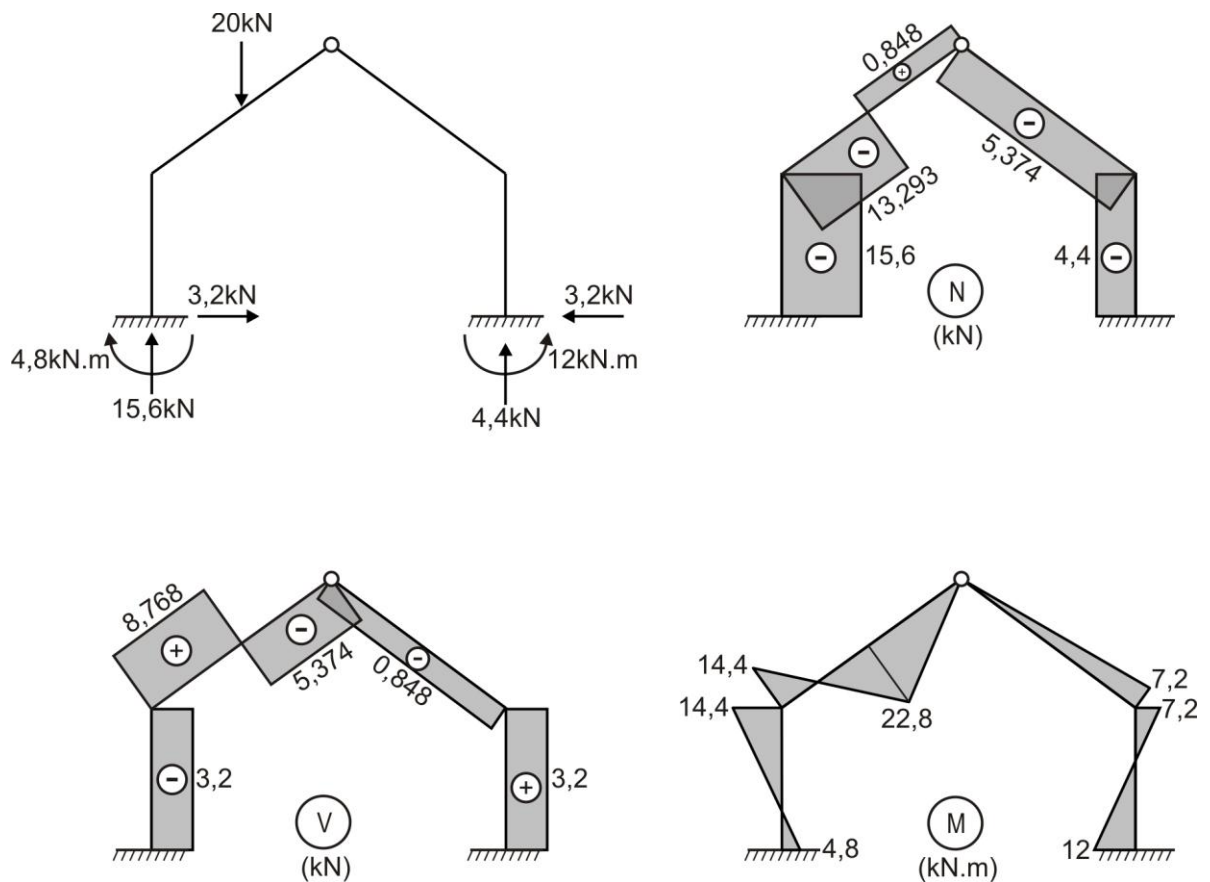
$$\Delta_{2P} = \frac{3\sqrt{2}}{6EI} [6 \cdot 60 + 4 \cdot 4,5 \cdot 30] + \frac{6}{6EI} [6 \cdot 60 + 4 \cdot 9 \cdot 60 + 12 \cdot 60] = \frac{3876,396}{EI}$$

Luego:

$$\frac{635,647}{EI} X_1 + \frac{2796,396}{EI} = 0 \quad \Rightarrow \quad X_1 = -4,4 \text{ kN}$$

$$\frac{1211,647}{EI} X_2 + \frac{3876,396}{EI} = 0 \Rightarrow X_2 = -3,2 \text{ kN}$$

Con los valores obtenidos, graficamos los diagramas finales de fuerza axial, fuerza cortante y momento flector, orientando X_1 y X_2 en sentidos opuestos.

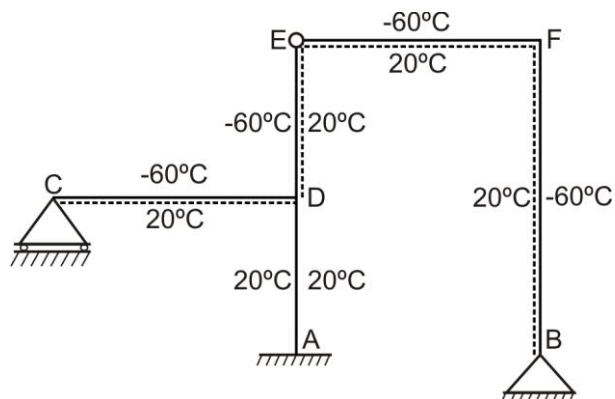


2. Determinamos el grado de indeterminación de la estructura.

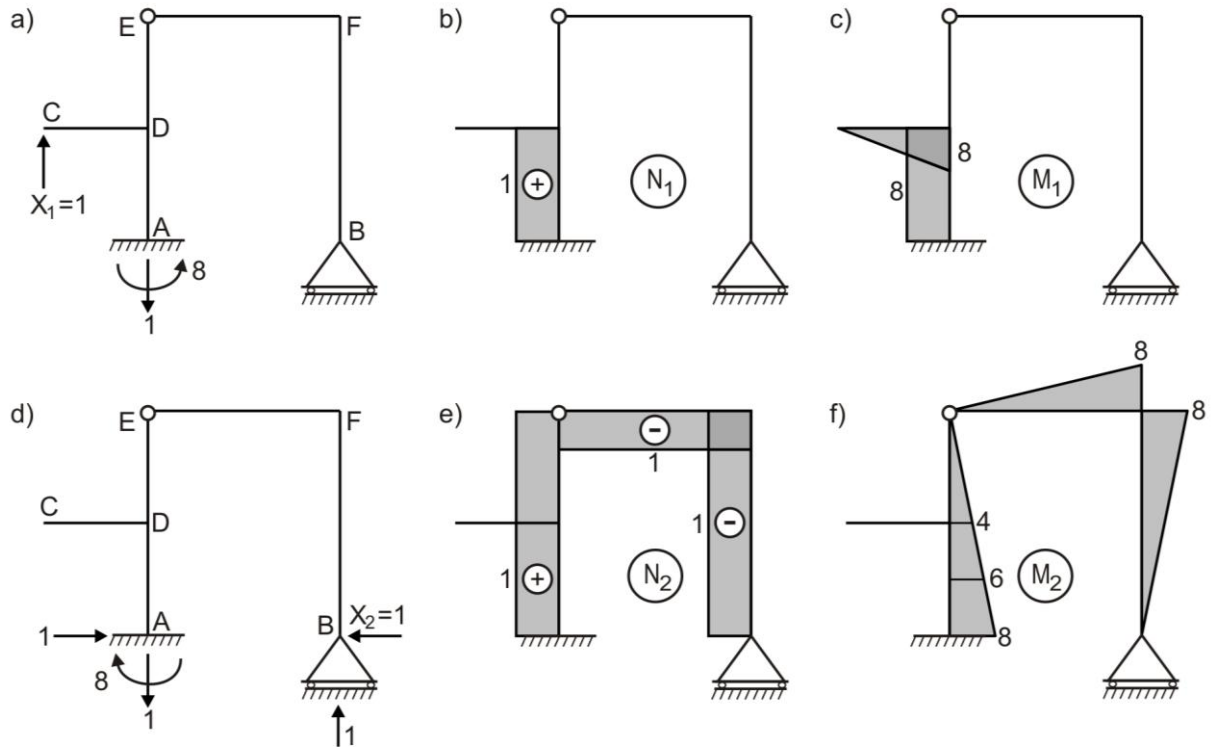
$$G.I. = 3(2) - 4 = 2$$

El pórtico es dos veces hiperestático.

Las zonas traccionadas, por efecto de temperatura, son las mostradas en la figura con líneas punteadas.



Elegimos el sistema principal y graficamos los diagramas de fuerza axial y momento flector para cada uno de ellos, tal como se muestra en la figura.



El sistema de ecuaciones canónicas será:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1T} = 0$$

$$\delta_{12}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2T} = 0$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 \cdot \frac{2}{3} \cdot 8 + 8 \cdot 4 \cdot 8 \right] = \frac{426,667}{EI}$$

$$\delta_{12} = -\frac{4}{6EI} [8 \cdot 4 + 4 \cdot 8 \cdot 6 + 8 \cdot 8] = -\frac{192}{EI}$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 \cdot \frac{2}{3} \cdot 8 \cdot 3 = \frac{512}{EI}$$

$$\Delta_{1T} = \alpha \frac{|20 - (-60)|}{0,4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 + \alpha \frac{|20 + 20|}{2} \cdot 1 \cdot 4 = 6480\alpha$$

$$\Delta_{2T} = \alpha \frac{|20 - (-60)|}{0,4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 - \alpha \frac{|-60 - 20|}{0,4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 - \alpha \frac{|-60 - 20|}{0,4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 + \alpha \frac{|20 + 20|}{2} \cdot 1 \cdot 4 +$$

$$+ \alpha \frac{|20 - 60|}{2} \cdot 1 \cdot 4 - \alpha \frac{|-60 + 20|}{2} \cdot 1 \cdot 8 - \alpha \frac{|-60 + 20|}{2} \cdot 1 \cdot 8 = -11360\alpha$$

Luego:

$$\frac{426,667}{EI} X_1 - \frac{192}{EI} X_2 + 6480\alpha = 0$$

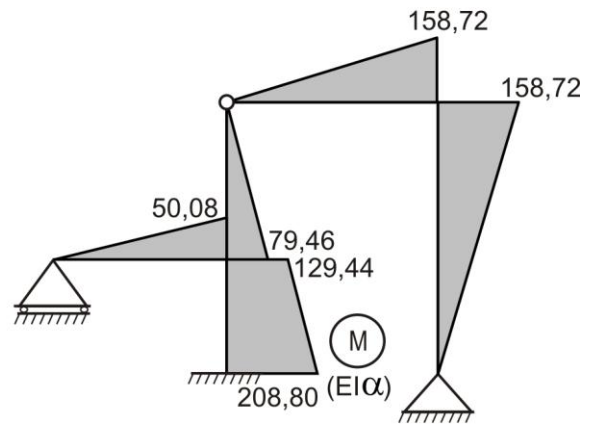
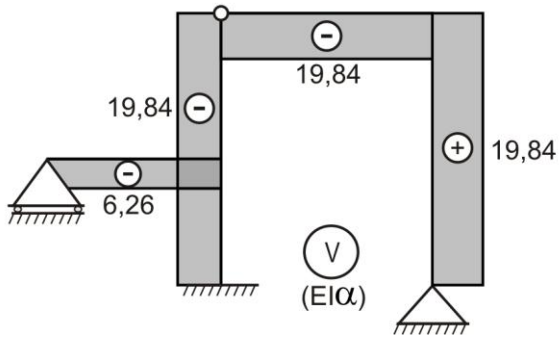
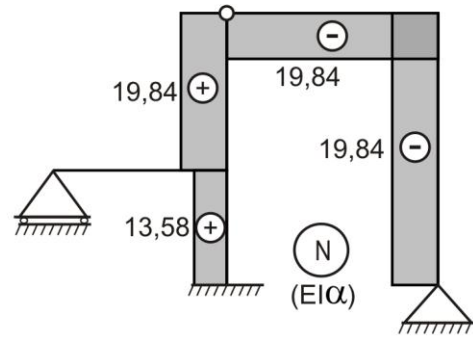
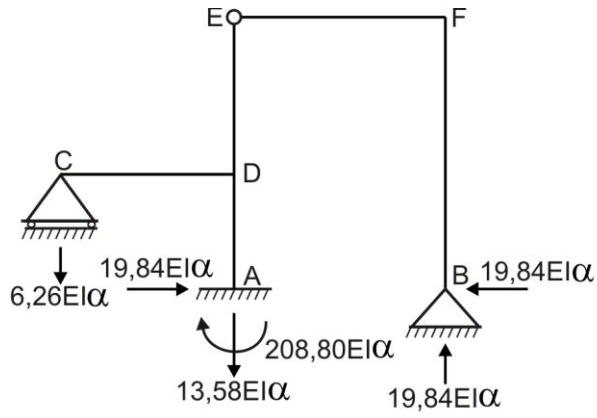
$$-\frac{192}{EI} X_1 + \frac{512}{EI} X_2 - 11360\alpha = 0$$

Resolvemos y obtenemos:

$$X_1 = V_C = -6,26EI\alpha \downarrow$$

$$X_2 = H_B = 19,84EI\alpha \leftarrow$$

Con los valores obtenidos, graficamos los diagramas de fuerzas internas.

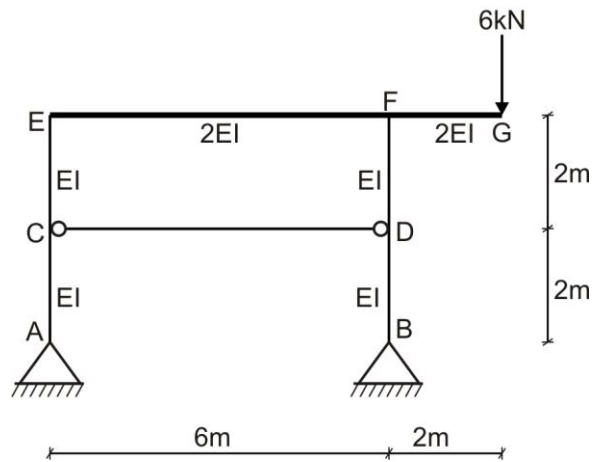




EVALUACIÓN	PRACTICA CALIFICADA N° 3	SEM. ACADÉMICO	2010 – II
CURSO	RESISTENCIA DE MATERIALES II	SECCIÓN	30F
PROFESOR	Ph.D. GENNER VILLARREAL CASTRO	DURACIÓN	90m
ESCUELA	INGENIERIA CIVIL	CICLO	VI

1. METODO DE LAS FUERZAS. Resolver el pórtico mostrado en la figura, graficando sus diagramas de fuerza axial, fuerza cortante y momento flector. No considerar la flexibilidad del arriostre CD

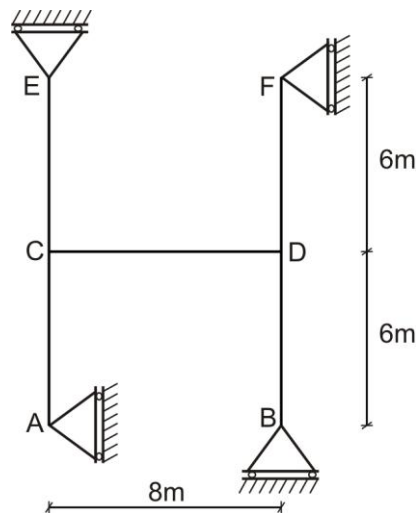
..... (10 puntos)



2. METODO DE LAS FUERZAS. Resolver el siguiente pórtico de concreto armado, graficando sus diagramas de fuerzas internas, si el apoyo A se desplaza horizontalmente 0,05m hacia la derecha, el apoyo B se desplaza verticalmente 0,03m hacia arriba y el apoyo F se desplaza horizontalmente 0,07m hacia la izquierda. Considerar que la rigidez EI es constante para toda la estructura, siendo

$$E = 15000\sqrt{f'_c}; f'_c = 210\text{kg/cm}^2 \text{ e } I = 540000\text{cm}^4$$

..... (10 puntos)



FECHA	La Molina, 25 de Octubre del 2010
--------------	-----------------------------------

SOLUCIONARIO DE PRÁCTICA CALIFICADA Nº 3

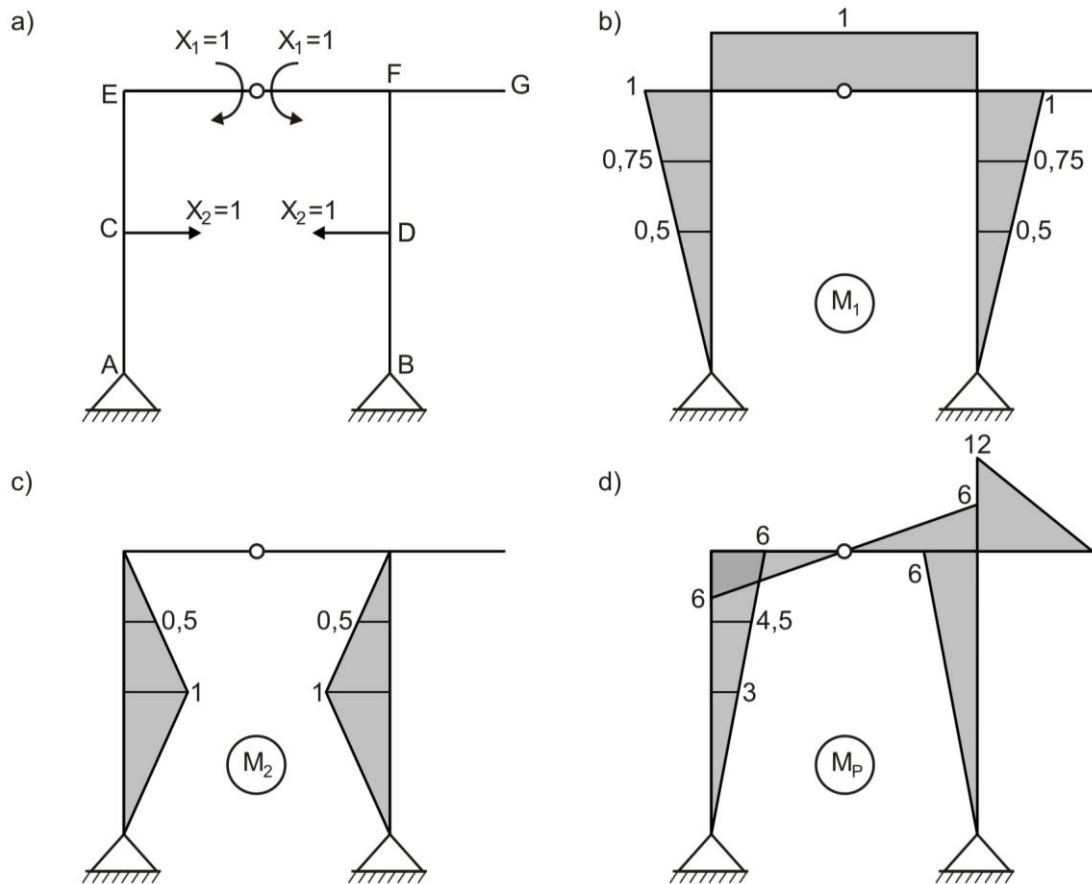
CICLO 2010 – II

1. Determinamos el grado de indeterminación de la estructura.

$$G.I. = 3(2) - 4 = 2$$

El pórtico es dos veces hiperestático.

Elegimos el sistema principal y graficamos los diagramas M_1 , M_2 y M_P , tal como se muestra en la figura.



El sistema de ecuaciones canónicas será:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} = 0$$

$$\delta_{12}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1.4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1.2 + \frac{1}{2EI} \cdot 1.6 \cdot 1 = \frac{5,667}{EI}$$

$$\delta_{12} = \left[-\frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2.0,5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{2}{6EI} (0,5 \cdot 1 + 4.0,75 \cdot 0,5) \right] \cdot 2 = -\frac{2}{EI}$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2.1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1.4 = \frac{2,667}{EI}$$

$$\Delta_{1P} = -\frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4.1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6.2 = -\frac{16}{EI}$$

$$\Delta_{2P} = \left[\frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2.1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{2}{6EI} (1.3 + 4.0,5 \cdot 4,5) \right] \cdot 2 = \frac{12}{EI}$$

Luego:

$$\frac{5,667}{EI} X_1 - \frac{2}{EI} X_2 - \frac{16}{EI} = 0$$

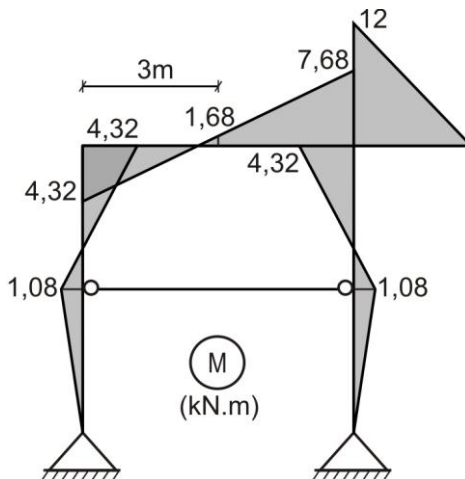
$$-\frac{2}{EI} X_1 + \frac{2,667}{EI} X_2 + \frac{12}{EI} = 0$$

De donde:

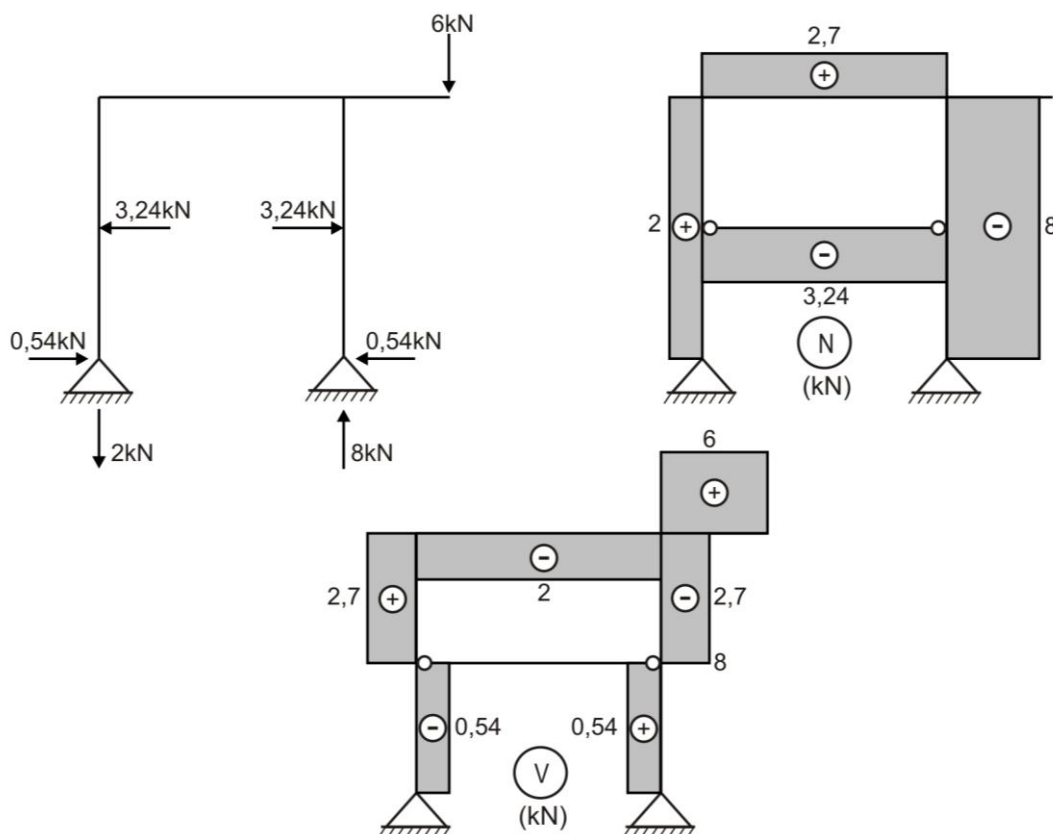
$$X_1 = 1,68 \text{ kN.m}$$

$$X_2 = -3,24 \text{ kN}$$

Graficamos el diagrama de momento flector utilizando la relación $M = M_1 X_1 + M_2 X_2 + M_p$



A partir del diagrama de momento flector y con las condiciones de equilibrio, determinamos las reacciones en los apoyos y graficamos los diagramas de fuerza axial y fuerza cortante, considerando que el arrioste CD trabaja únicamente en compresión.

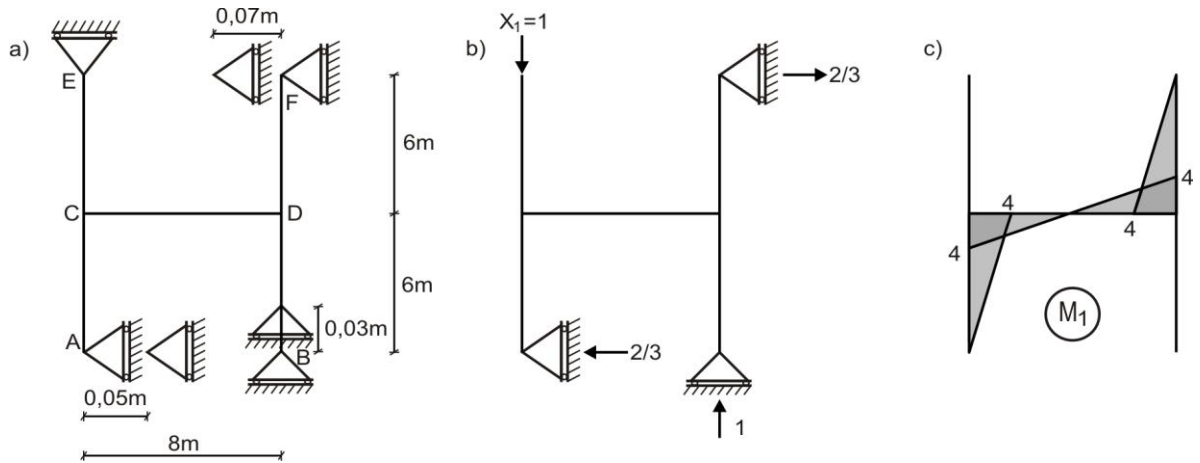


2. Determinamos el grado de indeterminación de la estructura.

$$G.I. = 3(3) - 8 = 1$$

El pórtico es una vez hiperestático.

Esquematisamos el pórtico de acuerdo al problema (figura a), calculamos las reacciones en los apoyos para el pórtico isostático con carga unitaria (figura b) y graficamos el diagrama de momento flector debido a la carga unitaria (figura c)



La ecuación canónica será:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1C} = 0$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \cdot 2 \right] = \frac{106,667}{EI}$$

$$\Delta_{1C} = - \left(-\frac{2}{3} \cdot 0,05 + 1 \cdot 0,03 - \frac{2}{3} \cdot 0,07 \right) = 0,05$$

Luego:

$$\frac{106,667}{EI} X_1 + 0,05 = 0$$

De donde:

$$X_1 = V_C = -\frac{0,05EI}{106,667} = -\frac{0,05 \cdot 11738,015}{106,667} = -5,5T \uparrow$$

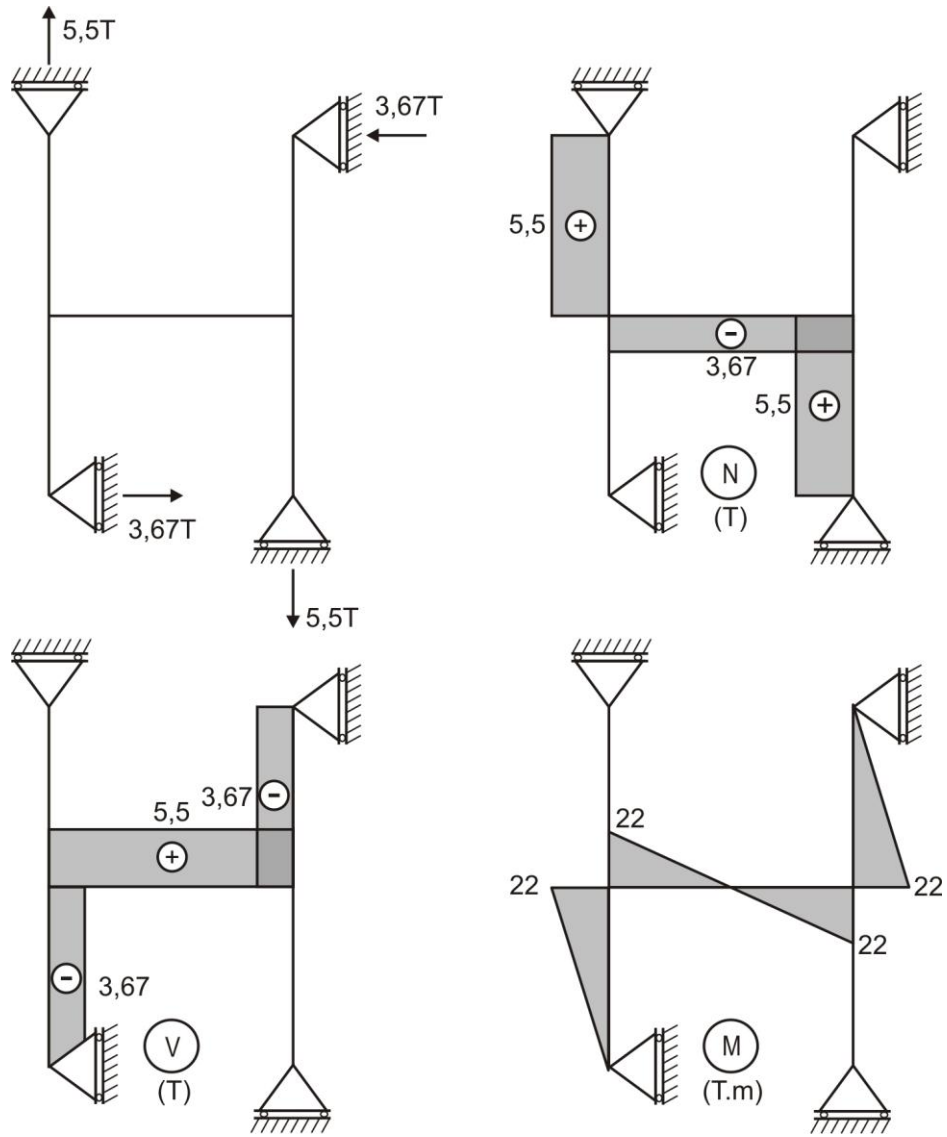
Siendo:

$$E = 15000\sqrt{f'_c} = 15000\sqrt{210} = 217370,65\text{kg/cm}^2 = 2173706,5\text{T/m}^2$$

$$I = 540000\text{cm}^4 = 5,4 \cdot 10^{-3}\text{m}^4$$

$$EI = 2173706,5 \cdot 5,4 \cdot 10^{-3} = 11738,015\text{T}\cdot\text{m}^2$$

Con el resultado obtenido, graficamos los diagramas finales, mostrados en la figura de la siguiente página.

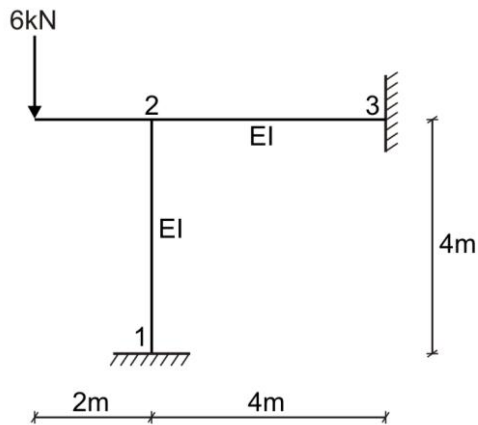




EVALUACIÓN	PRACTICA CALIFICADA Nº 4	SEM. ACADÉMICO	2008 – II
CURSO	RESISTENCIA DE MATERIALES II	SECCIÓN	30F
PROFESOR	Ph.D. GENNER VILLARREAL CASTRO	DURACIÓN	90m
ESCUELA	INGENIERIA CIVIL	CICLO	VI

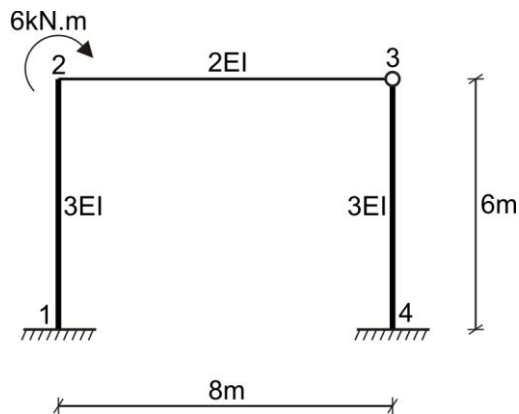
1. METODO DE DESPLAZAMIENTOS. Graficar el diagrama de momento flector para el pórtico mostrado en la figura.

..... (10 puntos)



2. METODO DE DESPLAZAMIENTOS. Graficar el diagrama de momento flector para el pórtico mostrado en la figura.

..... (10 puntos)



FECHA	La Molina, 17 de Noviembre del 2008
--------------	-------------------------------------

SOLUCIONARIO DE PRÁCTICA CALIFICADA Nº 4

CICLO 2008 – II

1. Determinamos el grado de indeterminación cinemática del sistema.

$$n = n_n + n_d = 1 + 0 = 1$$

Donde:

n - grado de indeterminación cinemática

n_n - número de nudos rígidos

n_d - número de desplazamientos lineales

Como se podrá apreciar la única incógnita es φ_2 , por ser el único nudo rígido.

Luego, determinamos la rigidez por unidad de longitud.

$$i_{23} = \frac{EI}{4} = i_o$$

$$i_{21} = \frac{EI}{4} = i_o$$

Posteriormente, analizamos el equilibrio del nudo 2, reemplazando el voladizo por su acción equivalente, es decir, carga puntual y momento.

NUDO 2:

$$\sum M_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad M_2 = M_{21} + M_{23} + 12 = 0$$

Siendo:

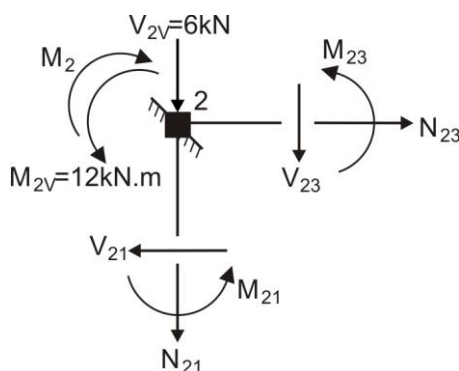
$$M_{21} = 2i_{21}(2\varphi_2 + \varphi_1 - 3\psi_{21}) + M'_{21} = 2i_o(2\varphi_2) = 4i_o\varphi_2$$

$$M_{23} = 2i_{23}(2\varphi_2 + \varphi_3 - 3\psi_{23}) + M'_{23} = 2i_o(2\varphi_2) = 4i_o\varphi_2$$

Reemplazamos valores y obtenemos:

$$4i_o\varphi_2 + 4i_o\varphi_2 + 12 = 0$$

$$i_o\varphi_2 = -1,5$$

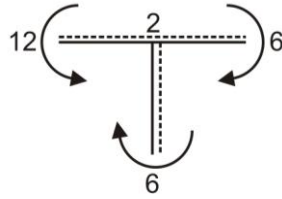


Ahora, determinamos los momentos flectores en los nudos, reemplazando el valor obtenido anteriormente.

NUDO 2:

$$M_{23} = 4i_o\varphi_2 = 4(-1,5) = -6 \text{ kN.m}$$

$$M_{21} = 4i_o\varphi_2 = 4(-1,5) = -6 \text{ kN.m}$$



NUDO 1:

$$M_{12} = 2i_{21}(2\varphi_1 + \varphi_2 - 3\psi_{12}) + M'_{12} = 2i_o\varphi_2 = 2(-1,5) = -3\text{kN.m}$$

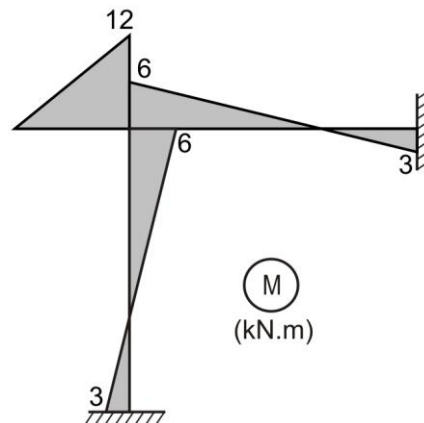


NUDO 3:

$$M_{32} = 2i_{23}(2\varphi_3 + \varphi_2 - 3\psi_{23}) + M'_{32} = 2i_o\varphi_2 = 2(-1,5) = -3\text{kN.m}$$



Con los valores obtenidos, graficamos el diagrama final de momento flector, teniendo en cuenta que la orientación del momento va hacia la parte con línea punteada mostrada anteriormente.

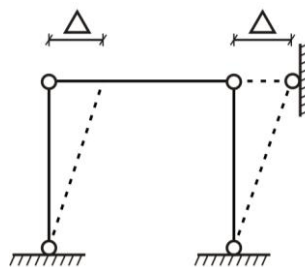


2. Determinamos el grado de indeterminación cinemática de la estructura.

$$n = n_n + n_d = 1 + 1 = 2$$

El único nudo rígido es el nudo 2 y el desplazamiento lineal es horizontal, siendo sus incógnitas φ_2 y

Δ



Para determinar el número de desplazamientos lineales, también se puede aplicar la siguiente relación, siempre y cuando el esquema esté articulado, como el mostrado en la página anterior.

$$n_d = 2N - B - R = 2(4) - 3 - 4 = 1$$

Donde:

N - número de nudos

B - número de barras

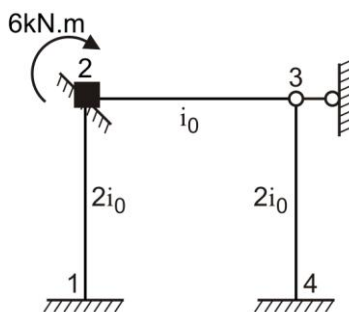
R - número de reacciones

Luego, determinamos la rigidez por unidad de longitud.

$$i_{23} = \frac{2EI}{8} = \frac{EI}{4} = i_o$$

$$i_{21} = i_{34} = \frac{3EI}{6} = \frac{EI}{2} = 2i_o$$

De esta manera, el sistema principal será el mostrado en la figura.



Ahora, analizamos el equilibrio en el nudo rígido 2

NUDO 2:

$$\sum M_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad M_2 = M_{21} + M_{23} - 6 = 0$$

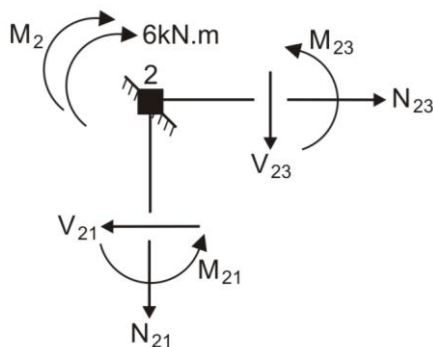
Siendo:

$$M_{21} = 2i_{21}(2\varphi_2 + \varphi_1 - 3\psi_{21}) + M'_{21} = 2(2i_o) \left(2\varphi_2 - 3\frac{\Delta}{6} \right) = 8i_o\varphi_2 - 2i_o\Delta$$

$$M_{23} = 3i_{23}(\varphi_2 - \psi_{23}) + M''_{23} = 3i_o\varphi_2$$

Reemplazamos valores y obtenemos:

$$11i_o\varphi_2 - 2i_o\Delta - 6 = 0 \quad \dots\dots\dots (a)$$



Para obtener la ecuación adicional, efectuamos un corte en el pórtico, tal como se muestra en la figura y analizamos su equilibrio.

CORTE EN EL PORTICO:

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad R - V_{21} - V_{34} = 0$$

$$R = V_{21} + V_{34} = 0$$

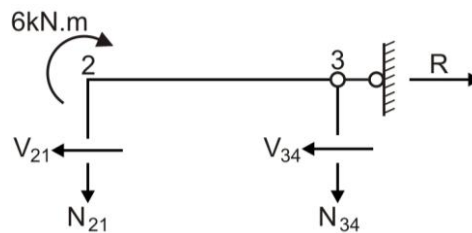
Siendo:

$$V_{21} = -\frac{6i_{21}}{L_{21}}(\varphi_2 + \varphi_1 - 2\psi_{21}) + V'_{21} = -\frac{6(2i_o)}{6}\left(\varphi_2 - 2\frac{\Delta}{6}\right) = -2i_o\varphi_2 + 0,6667i_o\Delta$$

$$V_{34} = -\frac{3i_{43}}{L_{43}}(\varphi_4 - \psi_{43}) + V''_{34} = -\frac{3(2i_o)}{6}\left(-\frac{\Delta}{6}\right) = 0,1667i_o\Delta$$

Reemplazamos valores y obtenemos:

$$-2i_o\varphi_2 + 0,8334i_o\Delta = 0 \quad \dots\dots\dots (b)$$



Resolvemos las ecuaciones (a) y (b), obteniendo:

$$i_o\varphi_2 = 0,9677$$

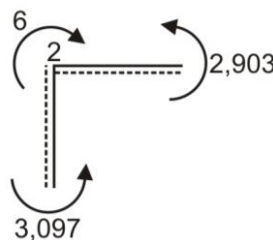
$$i_o\Delta = 2,3223$$

Con los valores obtenidos, determinamos los momentos en los nudos.

NUDO 2:

$$M_{21} = 8i_o\varphi_2 - 2i_o\Delta = 8(0,9677) - 2(2,3223) = 3,097 \text{ kN.m}$$

$$M_{23} = 3i_o\varphi_2 = 3(0,9677) = 2,903 \text{ kN.m}$$



NUDO 1:

$$M_{12} = 2i_{21}(2\varphi_1 + \varphi_2 - 3\psi_{21}) + M'_{12} = 2(2i_o)\left(\varphi_2 - 3\frac{\Delta}{6}\right) = 4i_o\varphi_2 - 2i_o\Delta$$

$$M_{12} = 4(0,9677) - 2(2,3223) = -0,774 \text{ kN.m}$$

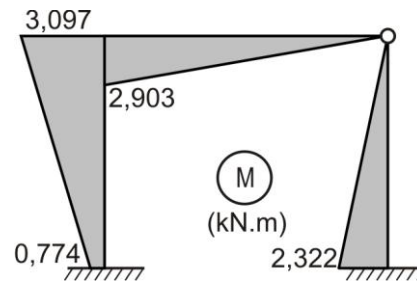


NUDO 4:

$$M_{43} = 3i_{43}(\varphi_4 - \psi_{43}) + M_{43}'' = 3(2i_o)\left(-\frac{\Delta}{6}\right) = -i_o\Delta = -2,322\text{kN.m}$$



Con los valores obtenidos, graficamos el diagrama final de momento flector.

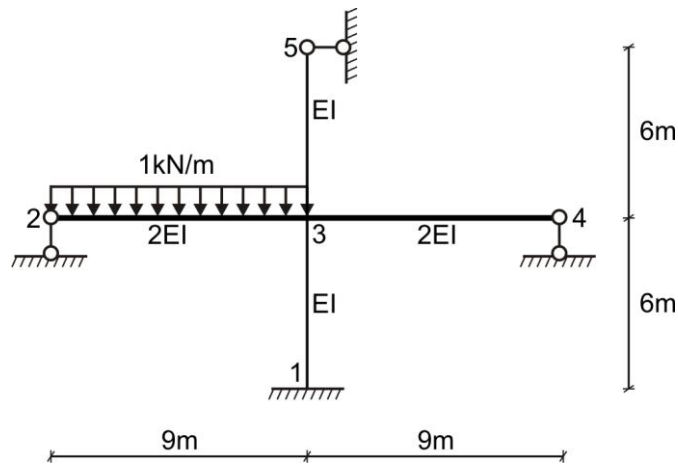




EVALUACIÓN	PRACTICA CALIFICADA N° 4	SEM. ACADÉMICO	2009 – I
CURSO	RESISTENCIA DE MATERIALES II	SECCIÓN	30F
PROFESOR	Ph.D. GENNER VILLARREAL CASTRO	DURACIÓN	90m
ESCUELA	INGENIERIA CIVIL	CICLO	VI

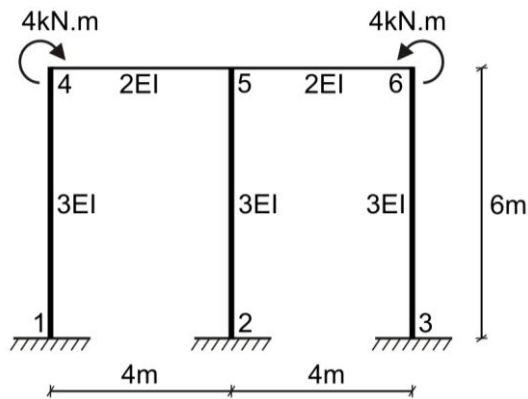
1. METODO DE DESPLAZAMIENTOS. Graficar el diagrama de momento flector para el pórtico mostrado en la figura.

..... (10 puntos)



2. METODO DE DESPLAZAMIENTOS. Graficar los diagramas de fuerza axial, fuerza cortante y momento flector para el pórtico simétrico mostrado en la figura.

..... (10 puntos)



FECHA	La Molina, 15 de Junio del 2009
--------------	---------------------------------

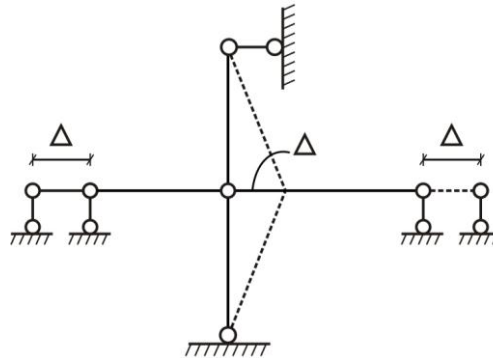
SOLUCIONARIO DE PRÁCTICA CALIFICADA Nº 4

CICLO 2009 – I

1. Determinamos el grado de indeterminación cinemática del sistema.

$$n = n_n + n_d = 1 + 1 = 2$$

El único nudo rígido es el nudo 3 y el desplazamiento lineal es horizontal, siendo sus incógnitas φ_3 y Δ



Comprobamos el número de desplazamientos lineales, aplicando la relación ya conocida, obteniendo:

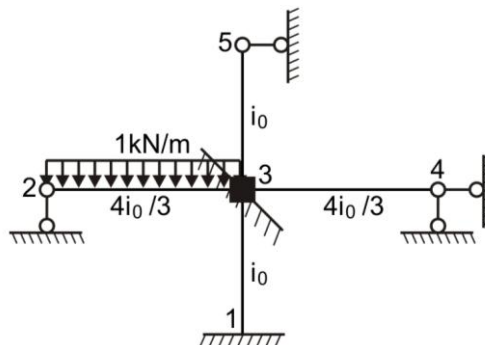
$$n_d = 2N - B - R = 2(5) - 4 - 5 = 1$$

Luego, determinamos la rigidez por unidad de longitud.

$$i_{23} = i_{34} = \frac{2EI}{9} = \frac{4}{3}i_o$$

$$i_{31} = i_{35} = \frac{EI}{6} = i_o$$

De esta manera, el sistema principal es el mostrado en la figura.



Luego, analizamos el equilibrio del nudo 3

NUDO 3:

$$\sum M_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad M_3 = M_{31} + M_{34} + M_{35} + M_{32} = 0$$

Siendo:

$$M_{31} = 2i_{31}(2\varphi_3 + \varphi_1 - 3\psi_{31}) + M'_{31} = 2i_o \left(2\varphi_3 - 3\frac{\Delta}{6} \right) = 4i_o\varphi_3 - i_o\Delta$$

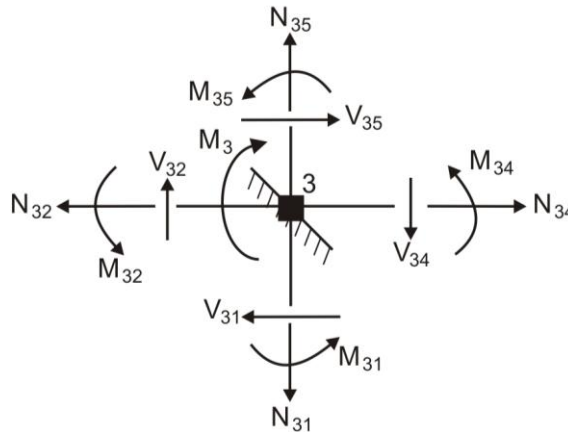
$$M_{34} = 3i_{34}(\varphi_3 - \psi_{34}) + M''_{34} = 3 \left(\frac{4}{3}i_o \right) (\varphi_3) = 4i_o\varphi_3$$

$$M_{35} = 3i_{35}(\varphi_3 - \psi_{35}) + M_{35}'' = 3i_o \left[\varphi_3 - \left(-\frac{\Delta}{6} \right) \right] = 3i_o \varphi_3 + 0,5i_o \Delta$$

$$M_{32} = 3i_{32}(\varphi_3 - \psi_{32}) + M_{32}'' = 3 \left(\frac{4}{3} i_o \right) (\varphi_3) + \frac{1,9^2}{8} = 4i_o \varphi_3 + 10,125$$

Reemplazamos valores y obtenemos:

$$15i_o \varphi_3 - 0,5i_o \Delta + 10,125 = 0 \quad \dots\dots\dots (a)$$



Para la ecuación adicional, efectuamos un corte en el pórtico y analizamos su equilibrio.

CORTE EN EL PORTICO:

$$\sum F_X = 0 \quad \Rightarrow \quad R + V_{35} - V_{31} = 0$$

$$R = V_{31} - V_{35} = 0$$

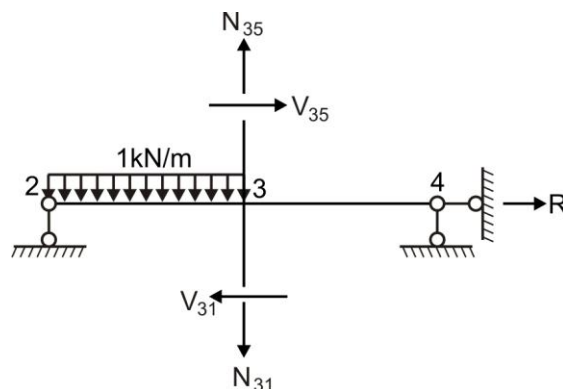
Siendo:

$$V_{31} = -\frac{6i_{31}}{L_{31}}(\varphi_3 + \varphi_1 - 2\psi_{31}) + V_{31}' = -\frac{6i_o}{6} \left(\varphi_3 - 2\frac{\Delta}{6} \right) = -i_o \varphi_3 + 0,3333i_o \Delta$$

$$V_{35} = -\frac{3i_{35}}{L_{35}}(\varphi_3 - \psi_{35}) + V_{35}'' = -\frac{3i_o}{6} \left[\varphi_3 - \left(-\frac{\Delta}{6} \right) \right] = -0,5i_o \varphi_3 - 0,0833i_o \Delta$$

Reemplazamos valores y obtenemos:

$$-0,5i_o \varphi_3 + 0,4166i_o \Delta = 0 \quad \dots\dots\dots (b)$$



Resolvemos las ecuaciones (a) y (b), obteniendo:

$$i_o \varphi_3 = -0,7031$$

$$i_o \Delta = -0,8439$$

Con los valores obtenidos, determinamos los momentos en los nudos.

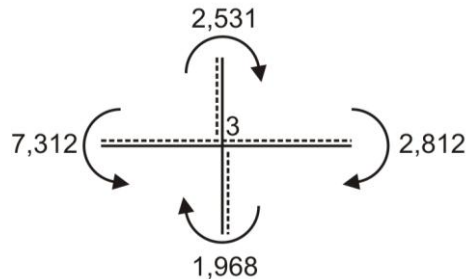
NUDO 3:

$$M_{31} = 4i_o\varphi_3 - i_o\Delta = 4(-0,7031) - (-0,8439) = -1,968\text{kN.m}$$

$$M_{34} = 4i_o\varphi_3 = 4(-0,7031) = -2,812\text{kN.m}$$

$$M_{35} = 3i_o\varphi_3 + 0,5i_o\Delta = 3(-0,7031) + 0,5(-0,8439) = -2,531\text{kN.m}$$

$$M_{32} = 4i_o\varphi_3 + 10,125 = 4(-0,7031) + 10,125 = 7,312\text{kN.m}$$



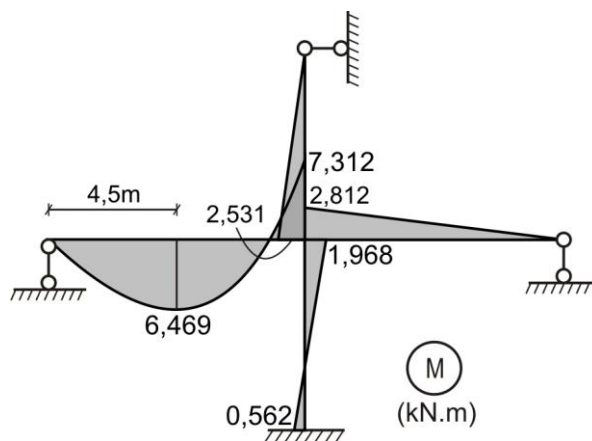
NUDO 1:

$$M_{13} = 2i_{31}(2\varphi_1 + \varphi_3 - 3\psi_{31}) + M'_{13} = 2i_o\left(\varphi_3 - 3\frac{\Delta}{6}\right) = 2i_o\varphi_3 - i_o\Delta$$

$$M_{13} = 2(-0,7031) + 0,8439 = -0,562\text{kN.m}$$



Para graficar el diagrama final de momento flector, agregamos el diagrama de momento flector de una viga simplemente apoyada para la barra cargada, en este caso la barra 23, obteniéndose el diagrama final como la suma de los dos diagramas anteriormente indicados.



2. Por simetría: $\varphi_4 = -\varphi_6$
 $\varphi_5 = 0$
 $\Delta = 0$

En consecuencia, el grado de indeterminación cinemática se reduce a uno, siendo la incógnita φ_4 . Determinamos la rigidez por unidad de longitud.

$$i_{45} = i_{56} = \frac{2EI}{4} = \frac{EI}{2} = i_o$$

$$i_{41} = i_{52} = i_{63} = \frac{3EI}{6} = \frac{EI}{2} = i_o$$

Analizamos el equilibrio del nudo rígido 4

NUDO 4:

$$\sum M_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad M_4 = M_{41} + M_{45} - 4 = 0$$

Siendo:

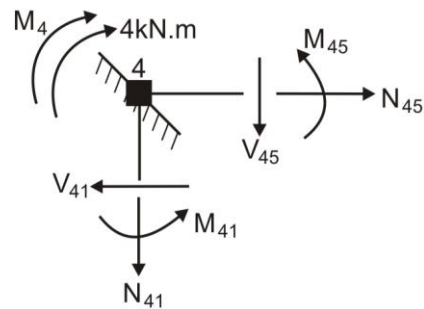
$$M_{41} = 2i_{41}(2\varphi_4 + \varphi_1 - 3\psi_{41}) + M'_{41} = 2i_o(2\varphi_4) = 4i_o\varphi_4$$

$$M_{45} = 2i_{45}(2\varphi_4 + \varphi_5 - 3\psi_{45}) + M'_{45} = 2i_o(2\varphi_4) = 4i_o\varphi_4$$

Reemplazamos valores y obtenemos:

$$8i_o\varphi_4 - 4 = 0$$

$$i_o\varphi_4 = 0,5$$

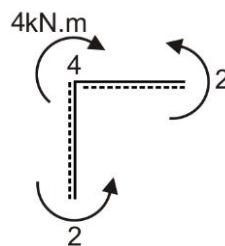


Con el valor obtenido, determinamos los momentos en los nudos.

NUDO 4:

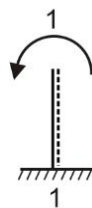
$$M_{41} = 4i_o\varphi_4 = 4(0,5) = 2\text{kN.m}$$

$$M_{45} = 4i_o\varphi_4 = 4(0,5) = 2\text{kN.m}$$



NUDO 1:

$$M_{14} = 2i_{41}(2\varphi_1 + \varphi_4 - 3\psi_{41}) + M'_{14} = 2i_o\varphi_4 = 2(0,5) = 1\text{kN.m}$$

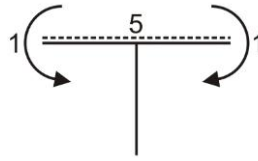


NUDO 5:

$$M_{54} = 2i_{45}(2\varphi_5 + \varphi_4 - 3\psi_{45}) + M'_{54} = 2i_o\varphi_4 = 2(0,5) = 1\text{kN.m}$$

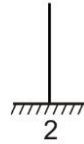
$$M_{52} = 2i_{52}(2\varphi_5 + \varphi_2 - 3\psi_{52}) + M'_{52} = 0$$

$$M_{56} = 2i_{56}(2\varphi_5 + \varphi_6 - 3\psi_{56}) + M'_{56} = 2i_o\varphi_6 = 2(-0,5) = -1\text{kN.m}$$



NUDO 2:

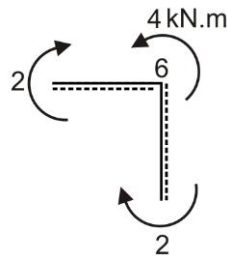
$$M_{25} = 2i_{52}(2\varphi_2 + \varphi_5 - 3\psi_{52}) + M'_{25} = 0$$



NUDO 6:

$$M_{65} = 2i_{56}(2\varphi_6 + \varphi_5 - 3\psi_{56}) + M'_{65} = 2i_o(2\varphi_6) = 4i_o\varphi_6 = 4(-0,5) = -2\text{kN.m}$$

$$M_{63} = 2i_{63}(2\varphi_6 + \varphi_3 - 3\psi_{63}) + M'_{63} = 2i_o(2\varphi_6) = 4i_o\varphi_6 = 4(-0,5) = -2\text{kN.m}$$



NUDO 3:

$$M_{36} = 2i_{63}(2\varphi_3 + \varphi_6 - 3\psi_{63}) + M'_{36} = 2i_o\varphi_6 = 2(-0,5) = -1\text{kN.m}$$



DIAGRAMA DE MOMENTO FLECTOR:

Con los valores obtenidos, graficamos el diagrama final de momento flector, teniendo en cuenta que si el pórtico es simétrico y las cargas también, entonces su diagrama de momento flector también será simétrico, tal como se muestra en la figura.

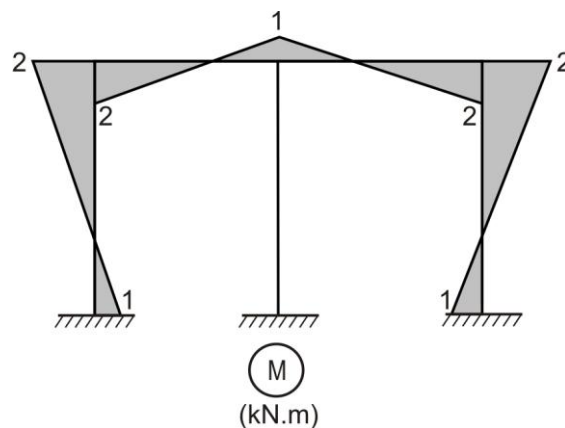


DIAGRAMA DE FUERZA CORTANTE:

Para graficar el diagrama de fuerza cortante, tenemos en cuenta que si el pórtico es simétrico y las cargas también, entonces su diagrama de fuerza cortante será antisimétrico.

$$V_{45} = V_{54} = -\frac{1+2}{4} = -0,75\text{kN}$$

$$V_{41} = V_{14} = -\frac{1+2}{6} = -0,5\text{kN}$$

$$V_{56} = V_{65} = \frac{1+2}{4} = 0,75\text{kN}$$

$$V_{63} = V_{36} = \frac{2+1}{6} = 0,5\text{kN}$$

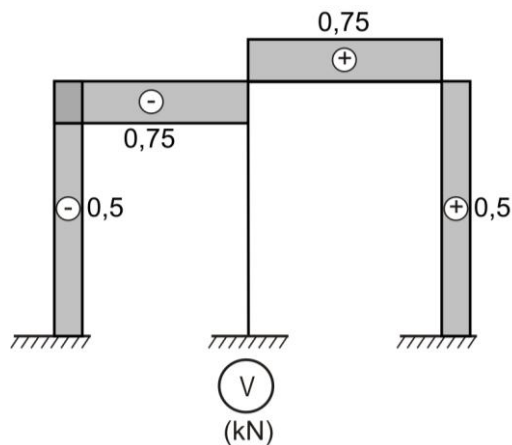


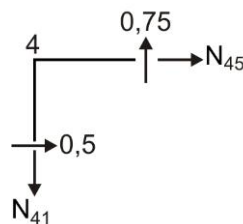
DIAGRAMA DE FUERZA AXIAL:

Las fuerzas axiales las obtenemos a partir de la condición de equilibrio de los nudos, considerando que la fuerza cortante es positiva si gira al nudo en sentido horario. Para facilidad de cálculo orientamos las fuerzas axiales en el sentido positivo (sale del nudo).

NUDO 4:

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad N_{45} = -0,5\text{kN} \text{ (COMPRESION)}$$

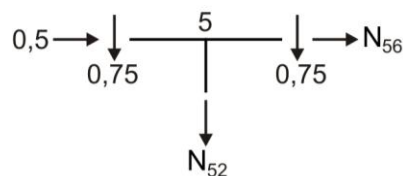
$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad N_{41} = 0,75\text{kN} \text{ (TRACCION)}$$



NUDO 5:

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad N_{56} = -0,5\text{kN} \text{ (COMPRESION)}$$

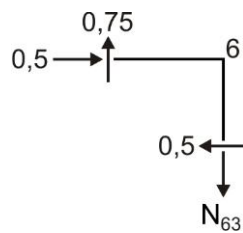
$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad N_{52} = -1,5\text{kN} \text{ (COMPRESION)}$$



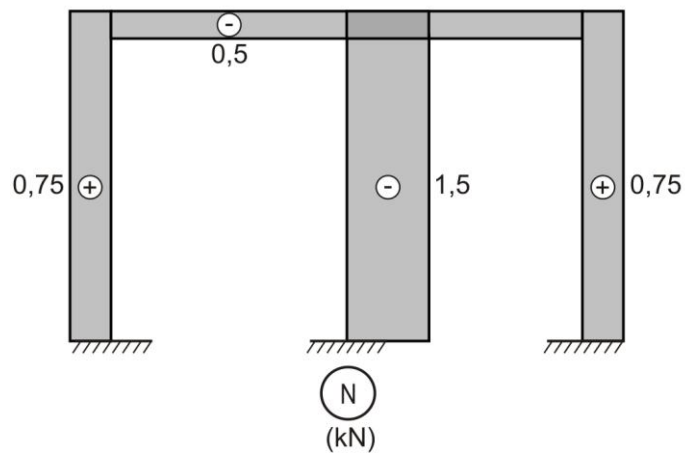
NUDO 6:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow 0,5 - 0,5 = 0 \quad (\text{OK})$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_{63} = 0,75 \text{ kN (TRACCION)}$$



Con los valores obtenidos, graficamos el diagrama final de fuerza axial o normal.

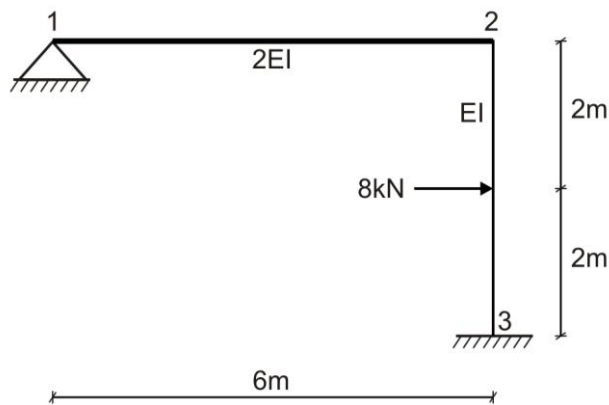




EVALUACIÓN	PRACTICA CALIFICADA N° 4	SEM. ACADÉMICO	2009 – II
CURSO	RESISTENCIA DE MATERIALES II	SECCIÓN	30F
PROFESOR	Ph.D. GENNER VILLARREAL CASTRO	DURACIÓN	90m
ESCUELA	INGENIERIA CIVIL	CICLO	VI

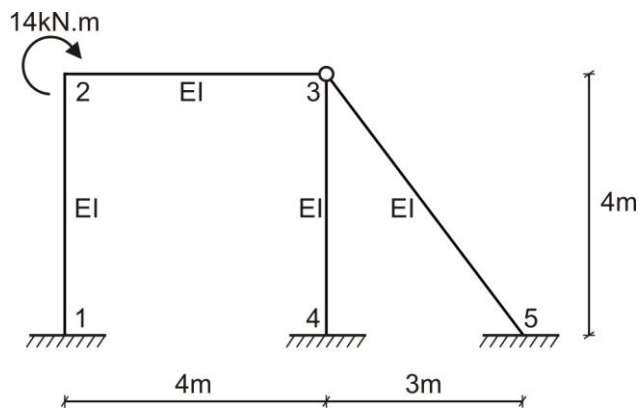
1. METODO DE DESPLAZAMIENTOS. Graficar los diagramas de fuerza axial, fuerza cortante y momento flector para el pórtico mostrado en la figura.

..... (10 puntos)



2. METODO DE DESPLAZAMIENTOS. Graficar el diagrama de momento flector para el pórtico mostrado en la figura.

..... (10 puntos)



FECHA	La Molina, 16 de Noviembre del 2009
--------------	-------------------------------------

SOLUCIONARIO DE PRÁCTICA CALIFICADA Nº 4

CICLO 2009 – II

1. Determinamos el grado de indeterminación cinemática del sistema.

$$n = n_n + n_d = 1 + 0 = 1$$

El único nudo rígido es el nudo 2 y su incógnita es φ_2

Luego, calculamos la rigidez por unidad de longitud.

$$i_{23} = \frac{EI}{4} = i_o$$

$$i_{12} = \frac{2EI}{6} = \frac{4}{3}i_o$$

Ahora, analizamos el equilibrio del nudo 2

NUDO 2:

$$\sum M_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad M_2 = M_{21} + M_{23} = 0$$

Siendo:

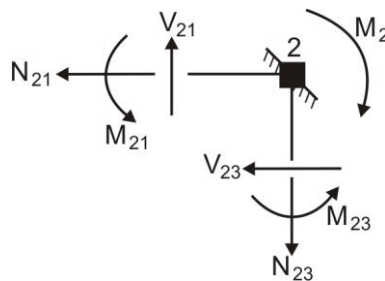
$$M_{21} = 3i_{21}(\varphi_2 - \psi_{21}) + M_{21}'' = 3 \cdot \frac{4}{3}i_o\varphi_2 = 4i_o\varphi_2$$

$$M_{23} = 2i_{23}(2\varphi_2 + \varphi_3 - 3\psi_{23}) + M_{23}' = 2i_o(2\varphi_2) + \frac{8.4}{8} = 4i_o\varphi_2 + 4$$

Reemplazamos valores y obtenemos:

$$4i_o\varphi_2 + 4i_o\varphi_2 + 4 = 0$$

$$i_o\varphi_2 = -0,5$$

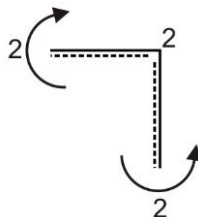


Con el valor obtenido, determinamos los momentos en los nudos.

NUDO 2:

$$M_{21} = 4i_o\varphi_2 = 4(-0,5) = -2\text{kN.m}$$

$$M_{23} = 4i_o\varphi_2 + 4 = 4(-0,5) + 4 = 2\text{kN.m}$$



NUDO 3:

$$M_{32} = 2i_{23}(2\varphi_3 + \varphi_2 - 3\psi_{23}) + M'_{32} = 2i_o\varphi_2 - \frac{8.4}{8} = 2i_o\varphi_2 - 4 = 2(-0,5) - 4 = -5\text{kN.m}$$



DIAGRAMA DE MOMENTO FLECTOR:

Para graficar el diagrama final de momento flector, agregamos el diagrama de momento flector de una viga simplemente apoyada para la barra cargada, en este caso la barra 23, obteniéndose el diagrama final como la suma de los dos diagramas anteriormente indicados.

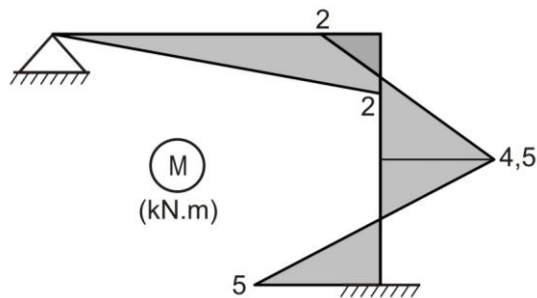


DIAGRAMA DE FUERZA CORTANTE:

Determinamos los valores de la fuerza cortante en cada tramo.

$$V_{12} = \frac{2}{6} = 0,333\text{kN}$$

$$V_{25} = -\frac{4,5 + 2}{2} = -3,25\text{kN}$$

$$V_{52} = \frac{4,5 + 5}{2} = 4,75\text{kN}$$

De esta manera, el diagrama final de fuerza cortante es el mostrado en la figura.

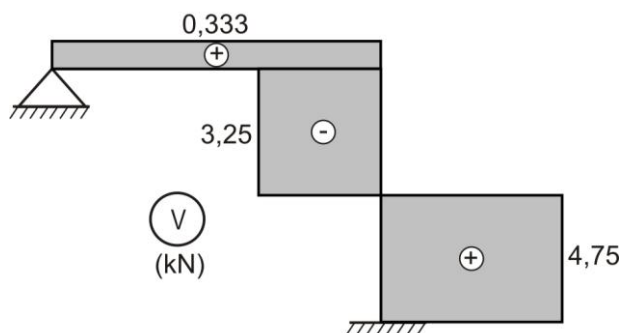
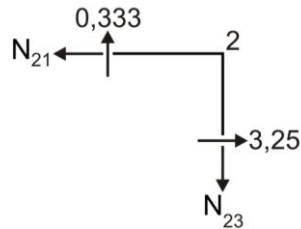


DIAGRAMA DE FUERZA AXIAL:

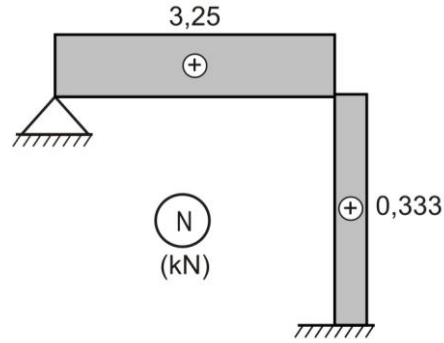
Analizamos el equilibrio del nudo 2

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad N_{21} = 3,25\text{kN (TRACCION)}$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad N_{23} = 0,333\text{kN (TRACCION)}$$



Con los valores obtenidos, graficamos el diagrama final de fuerza axial o normal mostrado en la figura.



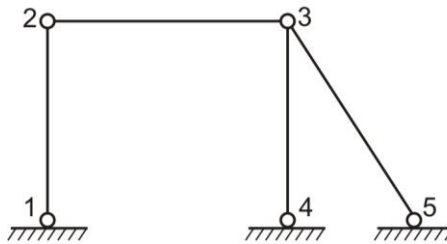
2. Determinamos el grado de indeterminación cinemática de la estructura.

$$n = n_n + n_d = 1 + 0 = 1$$

El único nudo rígido es el nudo 2 y su incógnita es φ_2

Para comprobar el número de desplazamientos lineales, analizamos la fórmula:

$$n_d = 2N - B - R = 2(5) - 4 - 6 = 0$$



Se comprueba que no hay desplazamiento lineal.

Calculamos la rigidez por unidad de longitud.

$$i_{21} = i_{34} = \frac{EI}{4} = 1,25i_o$$

$$i_{23} = \frac{EI}{4} = 1,25i_o$$

$$i_{35} = \frac{EI}{5} = i_o$$

Ahora, analizamos el equilibrio del nudo 2

NUDO 2:

$$\sum M_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad M_2 = M_{21} + M_{23} - 14 = 0$$

Siendo:

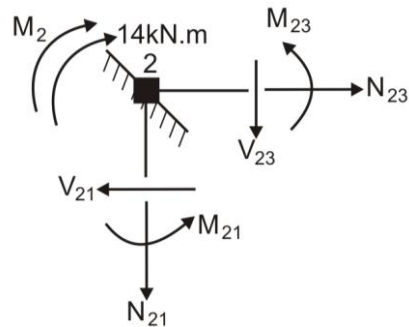
$$M_{21} = 2i_{21}(2\varphi_2 + \varphi_1 - 3\psi_{21}) + M'_{21} = 2(1,25i_o)(2\varphi_2) = 5i_o\varphi_2$$

$$M_{23} = 3i_{23}(\varphi_2 - \psi_{23}) + M''_{23} = 3(1,25i_o)(\varphi_2) = 3,75i_o\varphi_2$$

Reemplazamos valores y obtenemos:

$$5i_o\varphi_2 + 3,75i_o\varphi_2 - 14 = 0$$

$$i_o\varphi_2 = 1,6$$

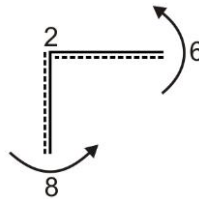


Con el valor obtenido, calculamos los momentos en los nudos.

NUDO 2:

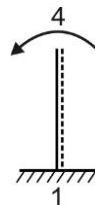
$$M_{21} = 5i_o\varphi_2 = 5 \cdot 1,6 = 8 \text{ kN.m}$$

$$M_{23} = 3,75i_o\varphi_2 = 3,75 \cdot 1,6 = 6 \text{ kN.m}$$



NUDO 1:

$$M_{12} = 2i_{21}(2\varphi_1 + \varphi_2 - 3\psi_{21}) + M'_{12} = 2(1,25i_o)(\varphi_2) = 2,5i_o\varphi_2 = 2,5 \cdot 1,6 = 4 \text{ kN.m}$$



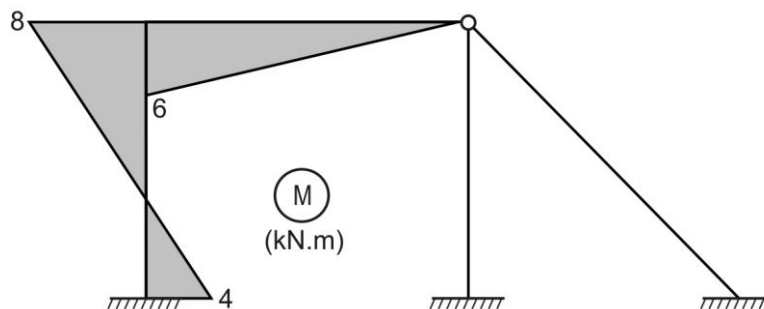
NUDO 4:

$$M_{43} = 3i_{34}(\varphi_4 - \psi_{43}) + M'_{43} = 0$$

NUDO 5:

$$M_{53} = 3i_{35}(\varphi_5 - \psi_{53}) + M'_{53} = 0$$

De esta manera, el diagrama final de momento flector es el mostrado en la figura.

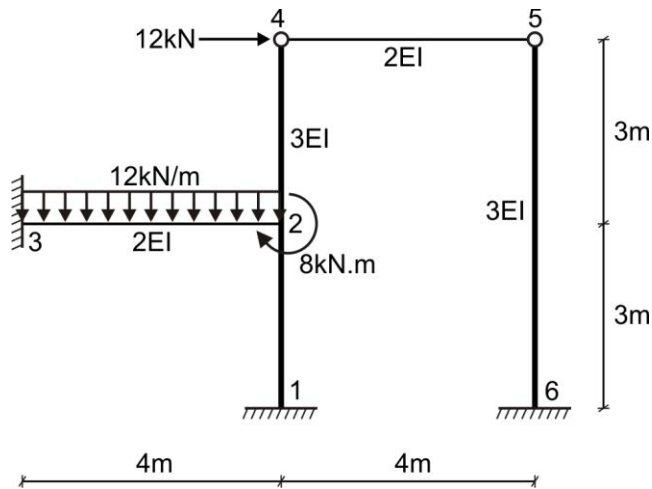




EVALUACIÓN	PRACTICA CALIFICADA N° 4	SEM. ACADÉMICO	2010 – I
CURSO	RESISTENCIA DE MATERIALES II	SECCIÓN	30F
PROFESOR	Ph.D. GENNER VILLARREAL CASTRO	DURACIÓN	90m
ESCUELA	INGENIERIA CIVIL	CICLO	VI

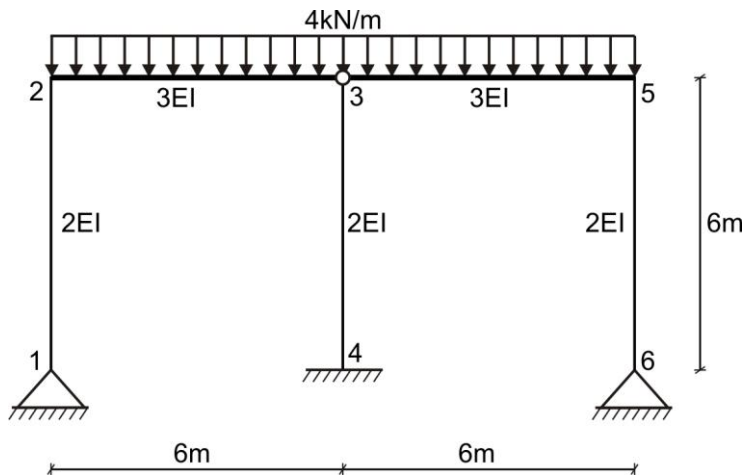
1. METODO DE DESPLAZAMIENTOS. Graficar los diagramas de fuerza axial, fuerza cortante y momento flector para el pórtico mostrado en la figura.

..... (10 puntos)



2. METODO DE DESPLAZAMIENTOS. Graficar los diagramas de fuerza axial, fuerza cortante y momento flector para el pórtico mostrado en la figura.

..... (10 puntos)



FECHA	La Molina, 14 de Junio del 2010
--------------	---------------------------------

SOLUCIONARIO DE PRÁCTICA CALIFICADA Nº 4

CICLO 2010 – I

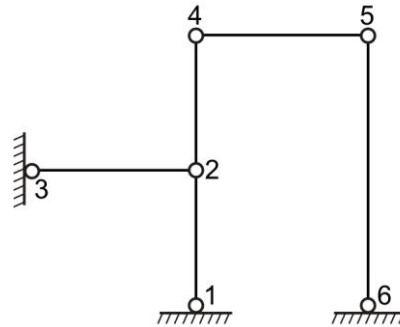
1. Determinamos el grado de indeterminación cinemática del sistema.

$$n = n_n + n_d = 1 + 1 = 2$$

Hay un nudo rígido y un desplazamiento lineal horizontal, siendo sus incógnitas φ_2 y Δ

Para comprobar el número de desplazamientos lineales, analizamos la fórmula:

$$n_d = 2N - B - R = 2(6) - 5 - 6 = 1$$



Luego, determinamos la rigidez por unidad de longitud.

$$i_{32} = i_{45} = \frac{2EI}{4} = \frac{EI}{2} = i_o$$

$$i_{42} = i_{21} = \frac{3EI}{3} = EI = 2i_o$$

$$i_{56} = \frac{3EI}{6} = \frac{EI}{2} = i_o$$

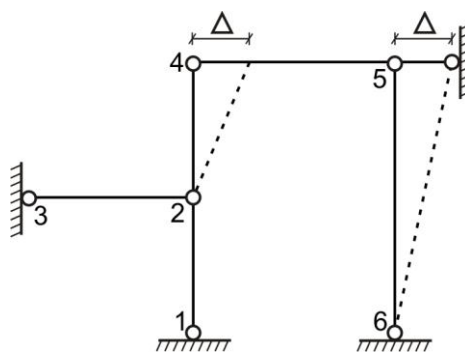
Ahora, determinamos el ángulo de desviación.

$$\psi_{32} = 0$$

$$\psi_{21} = 0$$

$$\psi_{42} = \frac{\Delta}{3}$$

$$\psi_{56} = \frac{\Delta}{6}$$



Analizamos el equilibrio del nudo rígido 2

NUDO 2:

$$\sum M_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad M_2 = M_{21} + M_{23} + M_{24} - 8 = 0$$

Siendo:

$$M_{21} = 2i_{21}(2\varphi_2 + \varphi_1 - 3\psi_{21}) + M'_{21} = 2(2i_o)(2\varphi_2) = 8i_o\varphi_2$$

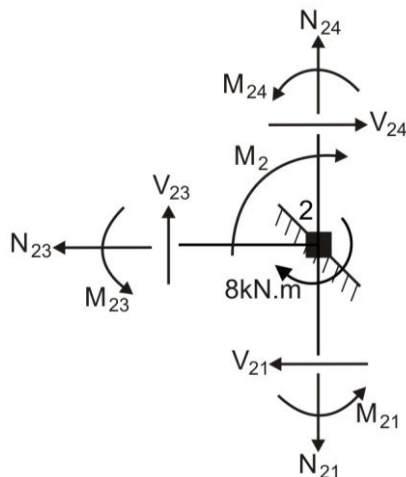
$$M_{23} = 2i_{32}(2\varphi_2 + \varphi_3 - 3\psi_{32}) + M'_{23} = 2i_o(2\varphi_2) + \frac{12.4^2}{12} = 4i_o\varphi_2 + 16$$

$$M_{24} = 3i_{42}(\varphi_2 - \psi_{42}) + M''_{24} = 3(2i_o)\left(\varphi_2 - \frac{\Delta}{3}\right) = 6i_o\varphi_2 - 2i_o\Delta$$

Reemplazamos valores y obtenemos:

$$8i_o\varphi_2 + 4i_o\varphi_2 + 16 + 6i_o\varphi_2 - 2i_o\Delta - 8 = 0$$

$$9i_o\varphi_2 - i_o\Delta + 4 = 0 \quad \dots\dots\dots (a)$$



Para determinar la ecuación adicional, analizamos el equilibrio de fuerzas horizontales de una parte del pórtico, que incluya la reacción en el apoyo ficticio.

CORTE EN EL PORTICO:

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad R = V_{42} + V_{56} - 12 = 0$$

Siendo:

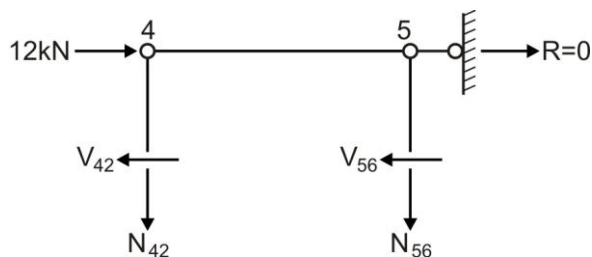
$$V_{42} = -\frac{3i_{42}}{L_{42}}(\varphi_2 - \psi_{42}) + V'_{42} = -\frac{3(2i_o)}{3}\left(\varphi_2 - \frac{\Delta}{3}\right) = -2i_o\varphi_2 + \frac{2i_o\Delta}{3}$$

$$V_{56} = -\frac{3i_{56}}{L_{56}}(\varphi_6 - \psi_{56}) + V'_{56} = -\frac{3i_o}{6}\left(-\frac{\Delta}{6}\right) = \frac{i_o\Delta}{12}$$

Reemplazamos valores y obtenemos:

$$-2i_o\varphi_2 + \frac{2i_o\Delta}{3} + \frac{i_o\Delta}{12} - 12 = 0$$

$$8i_o\varphi_2 - 3i_o\Delta + 48 = 0 \quad \dots\dots\dots (b)$$



Resolvemos las ecuaciones (a) y (b), obteniendo:

$$i_o \varphi_2 = 1,8947$$

$$i_o \Delta = 21,0523$$

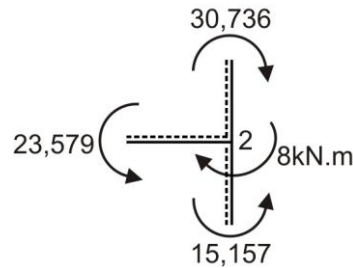
Con los valores obtenidos, determinamos los momentos en los nudos.

NUDO 2:

$$M_{21} = 8i_o \varphi_2 = 8(1,8947) = 15,157 \text{ kN.m}$$

$$M_{23} = 4i_o \varphi_2 + 16 = 4(1,8947) + 16 = 23,579 \text{ kN.m}$$

$$M_{24} = 6i_o \varphi_2 - 2i_o \Delta = 6(1,8947) - 2(21,0523) = -30,736 \text{ kN.m}$$



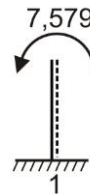
NUDO 3:

$$M_{32} = 2i_{32}(2\varphi_3 + \varphi_2 - 3\psi_{32}) + M'_{32} = 2i_o \varphi_2 - \frac{12,4^2}{12} = 2i_o \varphi_2 - 16 = 2(1,8947) - 16 = -12,210 \text{ kN.m}$$



NUDO 1:

$$M_{12} = 2i_{21}(2\varphi_1 + \varphi_2 - 3\psi_{21}) + M'_{12} = 2(2i_o)(\varphi_2) = 4i_o \varphi_2 = 4(1,8947) = 7,579 \text{ kN.m}$$



NUDO 6:

$$M_{65} = 3i_{56}(\varphi_6 - \psi_{56}) + M''_{65} = 3i_o \left(-\frac{\Delta}{6} \right) = -\frac{i_o \Delta}{2} = -\frac{21,0523}{2} = -10,526 \text{ kN.m}$$



DIAGRAMA DE MOMENTO FLECTOR:

De acuerdo a los resultados obtenidos, graficamos el diagrama de momentos en los nudos y en la barra cargada agregamos el diagrama de una viga simplemente apoyada sometida a la carga externa, obteniéndose el diagrama final de momento flector.

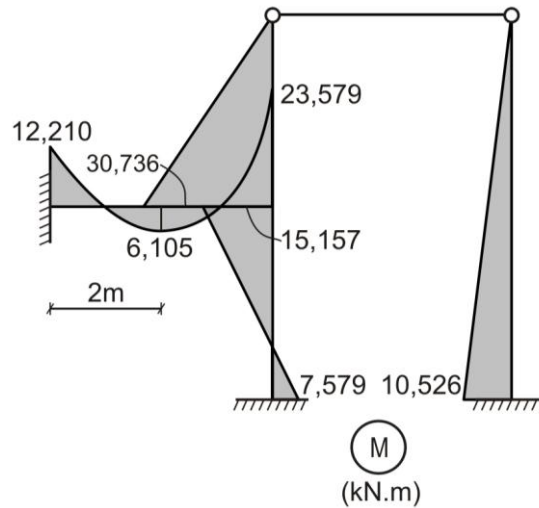


DIAGRAMA DE FUERZA CORTANTE:

Determinamos la fuerza cortante en cada uno de los tramos.

$$V_{32} = -\frac{23,579 - 12,210}{4} + \frac{12.4}{2} = 21,158 \text{ kN}$$

$$V_{23} = -\frac{23,579 - 12,210}{4} - \frac{12.4}{2} = -26,842 \text{ kN}$$

$$V_{42} = \frac{30,736}{3} = 10,245 \text{ kN}$$

$$V_{21} = -\frac{15,157 + 7,579}{3} = -7,578 \text{ kN}$$

$$V_{56} = \frac{10,526}{6} = 1,755 \text{ kN}$$

Con los valores obtenidos, graficamos el diagrama final de fuerza cortante mostrado en la figura.

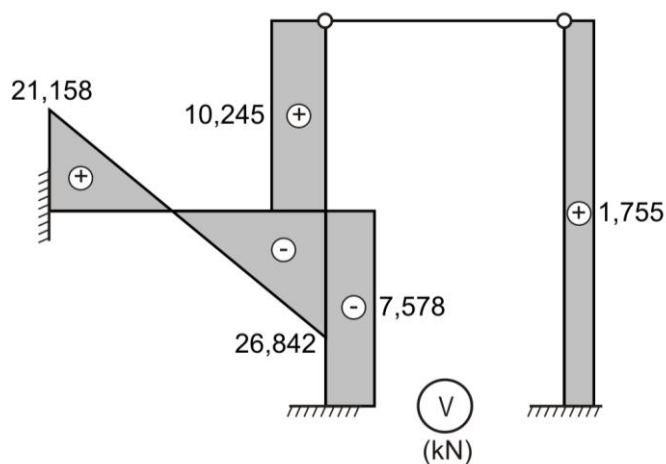


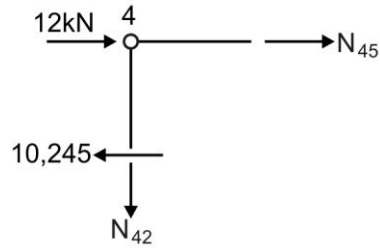
DIAGRAMA DE FUERZA AXIAL:

Analizamos el equilibrio de fuerzas en los nudos.

NUDO 4:

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad N_{45} + 12 - 10,245 = 0 \quad \therefore \quad N_{45} = -1,755 \text{ kN (COMPRESION)}$$

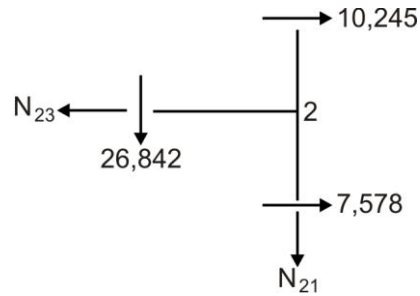
$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad N_{42} = 0$$



NUDO 2:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow 10,245 + 7,578 - N_{23} = 0 \quad \therefore N_{23} = 17,823 \text{ kN (TRACCION)}$$

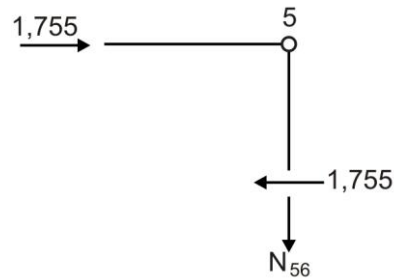
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_{21} + 26,842 = 0 \quad \therefore N_{21} = -26,842 \text{ kN (COMPRESION)}$$



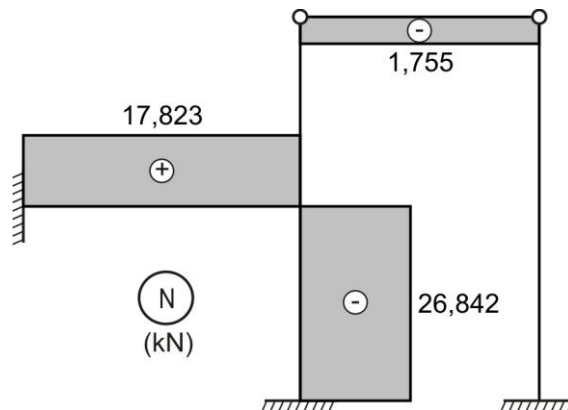
NUDO 5:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow 1,755 - 1,755 = 0 \quad (\text{OK})$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_{56} = 0$$



Con los valores obtenidos, graficamos el diagrama final de fuerza axial o normal, tal como se muestra en la figura.



COMPROBACION DE EQUILIBRIO TOTAL:

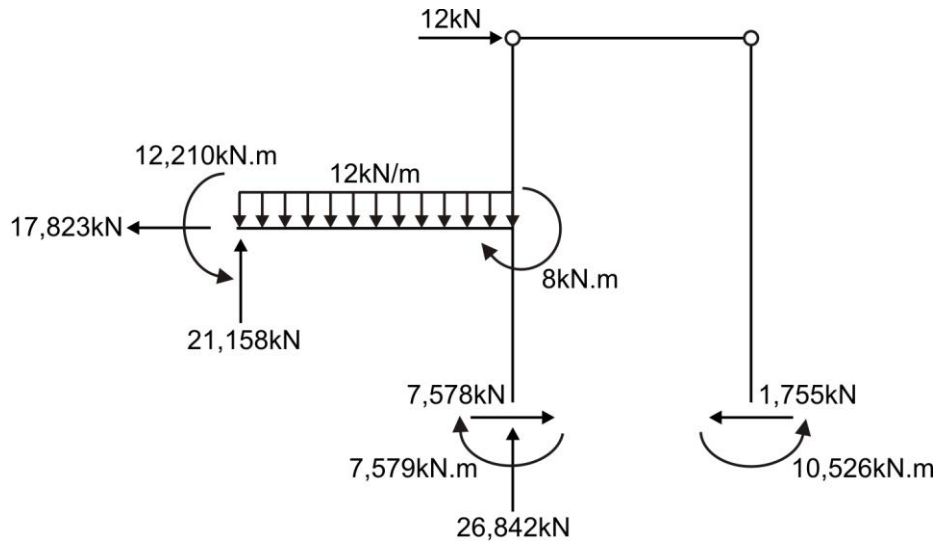
Analizamos el equilibrio de todo el pórtico, utilizando el DCL de la estructura.

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad -17,823 + 12 + 7,578 - 1,755 = 0 \quad (\text{OK})$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad 21,158 + 26,842 - 12(4) = 0 \quad (\text{OK})$$

$$\sum M_6 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$21,158(8) - 17,823(3) - 12,210 - 12(4)(6) + 12(6) + 26,842(4) + 7,579 - 10,526 + 8 \approx 0 \quad (\text{OK})$$



2. Determinamos el grado de indeterminación cinemática de la estructura.

$$n = n_n + n_d = 1 + 0 = 1$$

Por simetría se tendrá:

$$\varphi_2 = -\varphi_5$$

$$\Delta = 0$$

En consecuencia, el grado de indeterminación se reduce a uno, siendo la incógnita φ_2

Luego, calculamos la rigidez por unidad de longitud.

$$i_{21} = i_{34} = i_{56} = \frac{2EI}{6} = \frac{EI}{3} = i_o$$

$$i_{23} = i_{35} = \frac{3EI}{6} = \frac{EI}{2} = 1,5i_o$$

Ahora, analizamos el equilibrio del nudo 2

NUDO 2:

$$\sum M_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad M_2 = M_{21} + M_{23} = 0$$

Siendo:

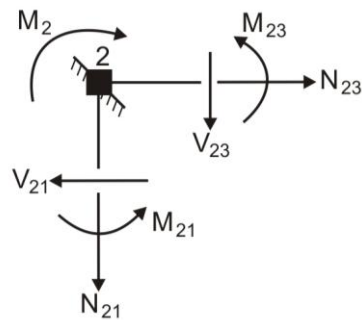
$$M_{21} = 3i_{21}(\varphi_2 - \psi_{21}) + M_{21}'' = 3i_o\varphi_2$$

$$M_{23} = 3i_{23}(\varphi_2 - \psi_{23}) + M_{23}'' = 3(1,5i_o)(\varphi_2) - \frac{4 \cdot 6^2}{8} = 4,5i_o\varphi_2 - 18$$

Reemplazamos valores y obtenemos:

$$3i_o\phi_2 + 4,5i_o\phi_2 - 18 = 0$$

$$i_o\phi_2 = 2,4$$



Con el valor obtenido, determinamos los momentos en el nudo 2

NUDO 2:

$$M_{21} = 3i_o\phi_2 = 3(2,4) = 7,2\text{kN.m}$$

$$M_{23} = 4,5i_o\phi_2 - 18 = 4,5(2,4) - 18 = -7,2\text{kN.m}$$

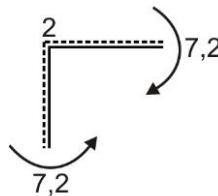


DIAGRAMA DE MOMENTO FLECTOR:

De acuerdo a los resultados obtenidos, graficamos el diagrama de momentos en los nudos y en las barras cargadas agregamos el diagrama de una viga simplemente apoyada sometida a la carga externa, obteniéndose el diagrama final de momento flector.

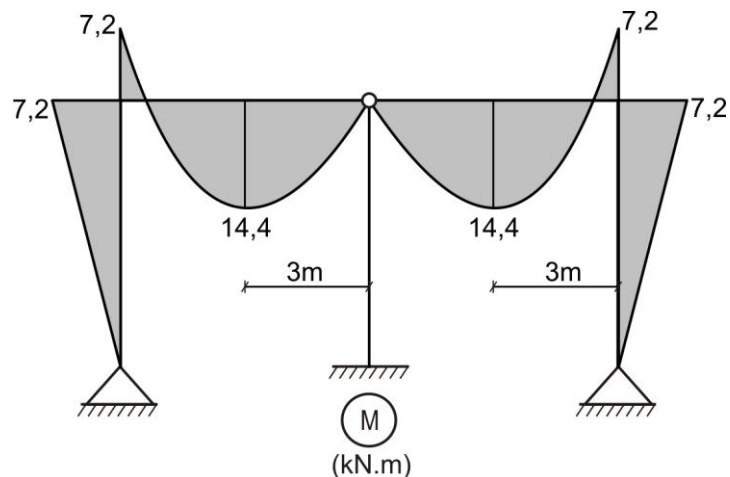


DIAGRAMA DE FUERZA CORTANTE:

Determinamos la fuerza cortante en cada tramo.

$$V_{23} = -\frac{0-7,2}{6} + \frac{4,6}{2} = 13,2\text{kN}$$

$$V_{32} = -\frac{0-7,2}{6} - \frac{4,6}{2} = -10,8\text{kN}$$

$$V_{21} = -\frac{0+7,2}{6} = -1,2\text{kN}$$

Con los valores obtenidos, graficamos el diagrama final de fuerza cortante, mostrado en la figura.

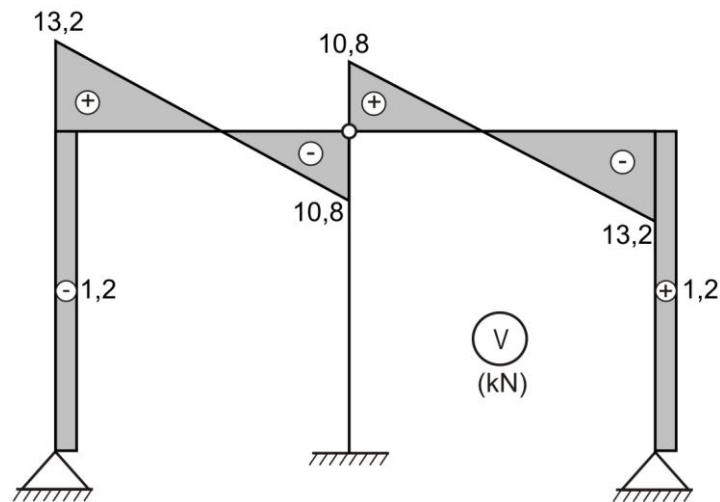


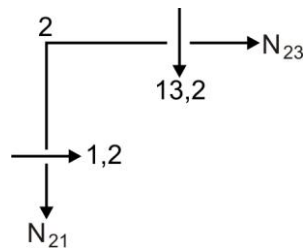
DIAGRAMA DE FUERZA AXIAL:

Analizamos el equilibrio de fuerzas en los nudos.

NUDO 2:

$$\sum F_X = 0 \quad \Rightarrow \quad N_{23} + 1,2 = 0 \quad \therefore \quad N_{23} = -1,2\text{kN (COMPRESION)}$$

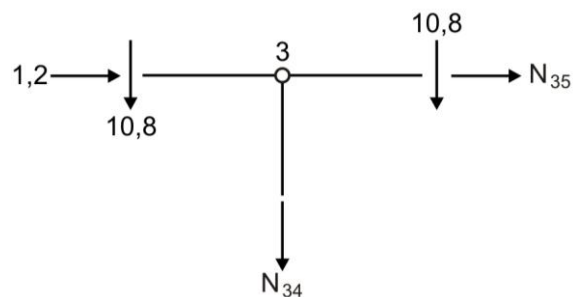
$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad -N_{21} - 13,2 = 0 \quad \therefore \quad N_{21} = -13,2\text{kN (COMPRESION)}$$



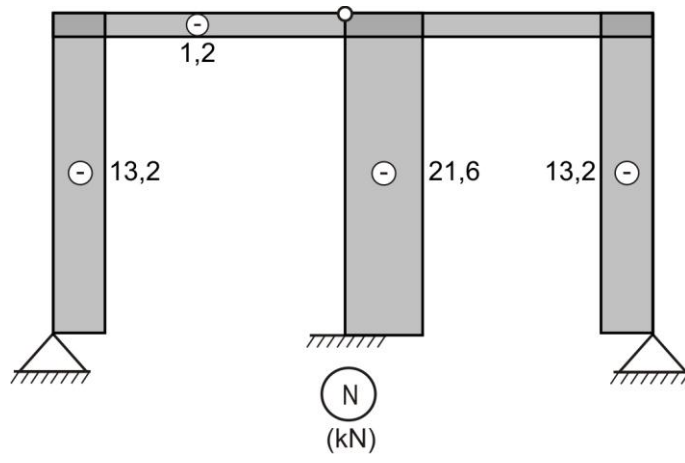
NUDO 3:

$$\sum F_X = 0 \quad \Rightarrow \quad N_{35} + 1,2 = 0 \quad \therefore \quad N_{35} = -1,2\text{kN (COMPRESION)}$$

$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad -N_{34} - 10,8 - 10,8 = 0 \quad \therefore \quad N_{34} = -21,6\text{kN (COMPRESION)}$$



Con los resultados obtenidos, graficamos el diagrama final de fuerza axial o normal, mostrado en la figura.

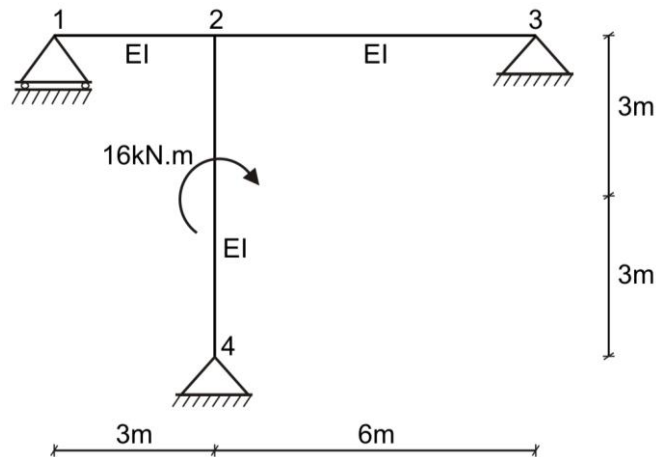




EVALUACIÓN	PRACTICA CALIFICADA N° 4	SEM. ACADÉMICO	2010 – II
CURSO	RESISTENCIA DE MATERIALES II	SECCIÓN	30F
PROFESOR	Ph.D. GENNER VILLARREAL CASTRO	DURACIÓN	90m
ESCUELA	INGENIERIA CIVIL	CICLO	VI

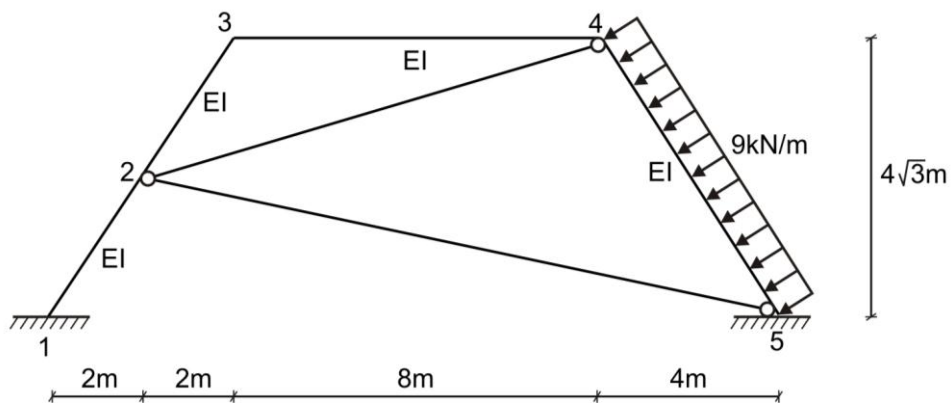
1. METODO DE DESPLAZAMIENTOS. Graficar los diagramas de fuerza axial, fuerza cortante y momento flector para el pórtico mostrado en la figura.

..... (10 puntos)



2. METODO DE DESPLAZAMIENTOS. Graficar el diagrama de momento flector para el pórtico mostrado en la figura, siendo $L_{12} = L_{23}$. No considerar la flexibilidad de los arriostres 2-4 y 2-5

..... (10 puntos)



FECHA	La Molina, 15 de Noviembre del 2010
--------------	-------------------------------------

SOLUCIONARIO DE PRÁCTICA CALIFICADA Nº 4

CICLO 2010 – II

1. Determinamos el grado de indeterminación cinemática del sistema.

$$n = n_n + n_d = 1 + 0 = 1$$

El único nudo rígido es el 2, siendo su incógnita φ_2

Comprobamos los desplazamientos lineales, a través de la fórmula.

$$n_d = 2N - B - R = 2(4) - 3 - 5 = 0$$

Luego, calculamos la rigidez por unidad de longitud.

$$i_{12} = \frac{EI}{3} = 2i_o$$

$$i_{23} = \frac{EI}{6} = i_o$$

$$i_{24} = \frac{EI}{6} = i_o$$

Analizamos el equilibrio del nudo 2

NUDO 2:

$$\sum M_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad M_2 = M_{21} + M_{23} + M_{24} = 0$$

Siendo:

$$M_{21} = 3i_{12}(\varphi_2 - \psi_{12}) + M_{21}'' = 3(2i_o)(\varphi_2) = 6i_o\varphi_2$$

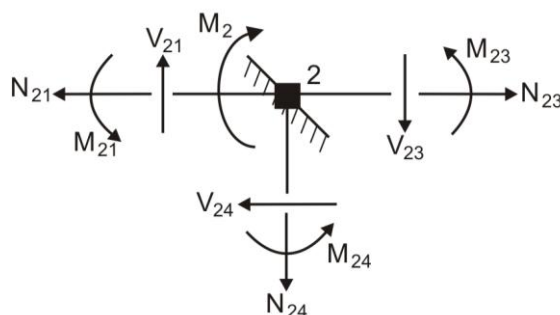
$$M_{23} = 3i_{23}(\varphi_2 - \psi_{23}) + M_{23}'' = 3i_o\varphi_2$$

$$M_{24} = 3i_{24}(\varphi_2 - \psi_{24}) + M_{24}'' = 3i_o\varphi_2 + \frac{16}{2}(1 - 3.0,5^2) = 3i_o\varphi_2 + 2$$

Reemplazamos valores y obtenemos:

$$6i_o\varphi_2 + 3i_o\varphi_2 + 3i_o\varphi_2 + 2 = 0$$

$$i_o\varphi_2 = -0,1667$$



Con el valor obtenido, determinamos los momentos en el nudo 2

NUDO 2:

$$M_{21} = 6i_o\varphi_2 = 6(-0,1667) = -1\text{kN.m}$$

$$M_{23} = 3i_o\varphi_2 = 3(-0,1667) = -0,5\text{kN.m}$$

$$M_{24} = 3i_o\varphi_2 + 2 = 3(-0,1667) + 2 = 1,5\text{kN.m}$$

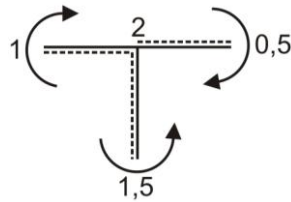


DIAGRAMA DE MOMENTO FLECTOR:

Para graficar el diagrama final de momento flector, agregamos el diagrama de momento flector de una viga simplemente apoyada para la barra cargada, en este caso la barra 24, obteniéndose el diagrama final como la suma de los dos diagramas anteriormente indicados.

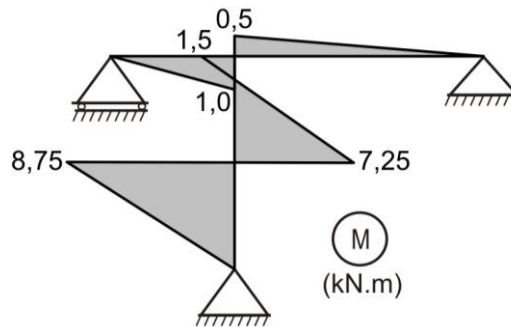


DIAGRAMA DE FUERZA CORTANTE:

Determinamos la fuerza cortante en cada tramo.

$$V_{12} = V_{21} = \frac{0+1}{3} = 0,333\text{kN}$$

$$V_{23} = V_{32} = \frac{0,5+0}{6} = 0,083\text{kN}$$

Elegimos un punto 5, ubicado en el lugar de la acción del momento de 16kN.m

$$V_{25} = V_{52} = -\frac{1,5+7,25}{3} = -2,916\text{kN}$$

$$V_{54} = V_{45} = -\frac{8,75+0}{3} = -2,916\text{kN}$$

Con los valores obtenidos, graficamos el diagrama final de fuerza cortante.

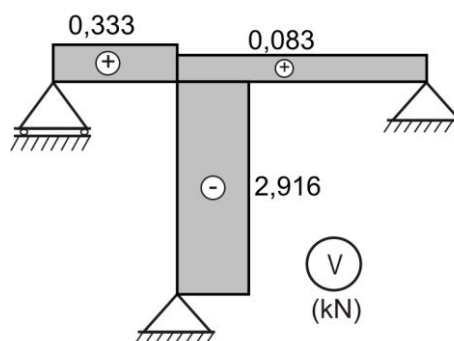


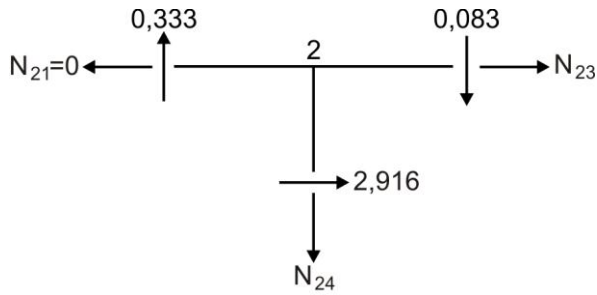
DIAGRAMA DE FUERZA AXIAL:

Determinamos el equilibrio del nudo 2

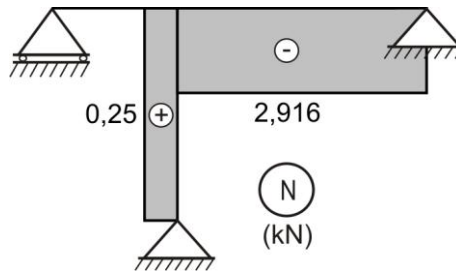
NUDO 2:

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad N_{23} + 2,916 = 0 \quad \therefore \quad N_{23} = -2,916\text{kN (COMPRESION)}$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad 0,333 - 0,083 - N_{24} = 0 \quad \therefore \quad N_{24} = 0,25\text{kN (TRACCION)}$$



Con los valores obtenidos, graficamos el diagrama final de fuerza axial o normal.



2. Determinamos el grado de indeterminación cinemática de la estructura.

$$n = n_n + n_d = 3 + 0 = 3$$

Los nudos rígidos son 2, 3 y 4, siendo sus incógnitas φ_2 , φ_3 y φ_4

Para comprobar el número de desplazamientos lineales, analizamos la fórmula:

$$n_d = 2N - B - R = 2(5) - 6 - 4 = 0$$

Se corrobora, que no existe desplazamiento lineal.

Luego, calculamos la rigidez por unidad de longitud.

$$i_{12} = \frac{EI}{4} = 2i_o$$

$$i_{23} = \frac{EI}{4} = 2i_o$$

$$i_{34} = \frac{EI}{8} = i_o$$

$$i_{45} = \frac{EI}{8} = i_o$$

Analizamos el equilibrio del nudo 2

NUDO 2:

$$\sum M_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad M_2 = M_{21} + M_{23} = 0$$

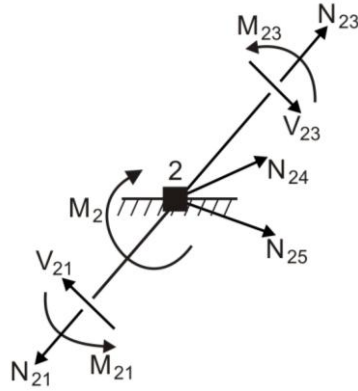
Siendo:

$$M_{21} = 2i_{12}(2\varphi_2 + \varphi_1 - 3\psi_{12}) + M'_{21} = 2(2i_o)(2\varphi_2) = 8i_o\varphi_2$$

$$M_{23} = 2i_{23}(2\varphi_2 + \varphi_3 - 3\psi_{23}) + M'_{23} = 2(2i_o)(2\varphi_2 + \varphi_3) = 8i_o\varphi_2 + 4i_o\varphi_3$$

Reemplazamos valores, simplificamos y obtenemos:

$$4i_o\varphi_2 + i_o\varphi_3 = 0 \quad \dots\dots\dots (a)$$



NUDO 3:

$$\sum M_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad M_3 = M_{32} + M_{34} = 0$$

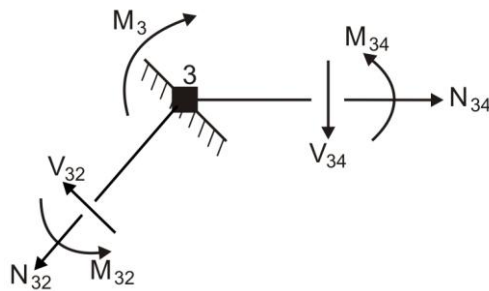
Siendo:

$$M_{32} = 2i_{23}(2\varphi_3 + \varphi_2 - 3\psi_{23}) + M'_{32} = 2(2i_o)(2\varphi_3 + \varphi_2) = 4i_o\varphi_2 + 8i_o\varphi_3$$

$$M_{34} = 2i_{34}(2\varphi_3 + \varphi_4 - 3\psi_{34}) + M'_{34} = 2i_o(2\varphi_3 + \varphi_4) = 4i_o\varphi_3 + 2i_o\varphi_4$$

Reemplazamos valores, simplificamos y obtenemos:

$$2i_o\varphi_2 + 6i_o\varphi_3 + i_o\varphi_4 = 0 \quad \dots\dots\dots (b)$$



NUDO 4:

$$\sum M_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad M_4 = M_{43} + M_{45} = 0$$

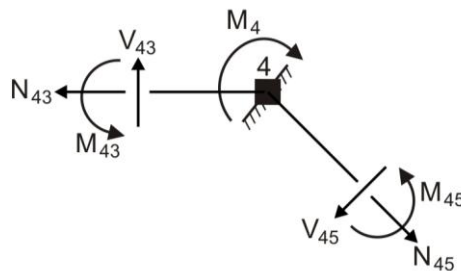
Siendo:

$$M_{43} = 2i_{34}(2\varphi_4 + \varphi_3 - 3\psi_{34}) + M'_{43} = 2i_o(2\varphi_4 + \varphi_3) = 2i_o\varphi_3 + 4i_o\varphi_4$$

$$M_{45} = 2i_{45}(2\varphi_4 + \varphi_5 - 3\psi_{45}) + M'_{45} = 2i_o(2\varphi_4) - \frac{9.8^2}{12} = 4i_o\varphi_4 - 48$$

Reemplazamos valores, simplificamos y obtenemos

$$i_o\varphi_3 + 4i_o\varphi_4 - 24 = 0 \quad \dots\dots\dots (c)$$



Resolvemos las ecuaciones (a), (b) y (c), obteniendo:

$$i_o \varphi_2 = 0,2857$$

$$i_o \varphi_3 = -1,1428$$

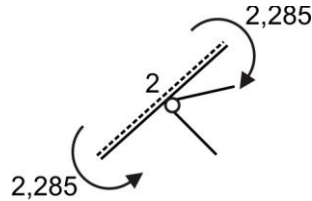
$$i_o \varphi_4 = 6,2854$$

Con los valores obtenidos, determinamos los momentos en los nudos.

NUDO 2:

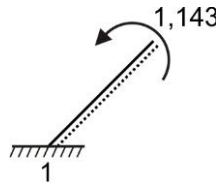
$$M_{21} = 8i_o \varphi_2 = 8(0,2857) = 2,285 \text{ kN.m}$$

$$M_{23} = 8i_o \varphi_2 + 4i_o \varphi_3 = 8(0,2857) + 4(-1,1428) = -2,285 \text{ kN.m}$$



NUDO 1:

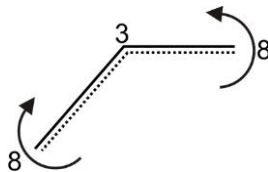
$$M_{12} = 2i_{12}(2\varphi_1 + \varphi_2 - 3\psi_{12}) + M'_{12} = 2(2i_o)(\varphi_2) = 4i_o \varphi_2 = 4(0,2857) = 1,143 \text{ kN.m}$$



NUDO 3:

$$M_{32} = 4i_o \varphi_2 + 8i_o \varphi_3 = 4(0,2857) + 8(-1,1428) = -8 \text{ kN.m}$$

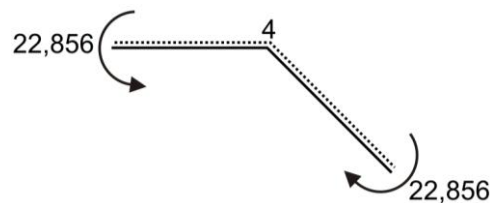
$$M_{34} = 4i_o \varphi_3 + 2i_o \varphi_4 = 4(-1,1428) + 2(6,2854) = 8 \text{ kN.m}$$



NUDO 4:

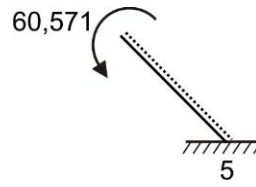
$$M_{43} = 2i_o \varphi_3 + 4i_o \varphi_4 = 2(-1,1428) + 4(6,2854) = 22,856 \text{ kN.m}$$

$$M_{45} = 4i_o \varphi_4 - 48 = 4(6,2854) - 48 = -22,856 \text{ kN.m}$$

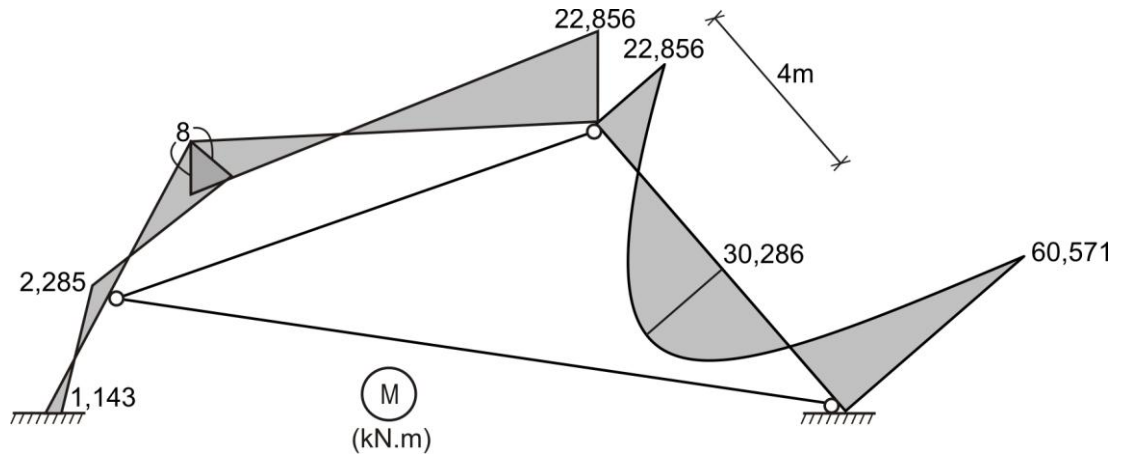


NUDO 5:

$$M_{54} = 2i_{45}(2\varphi_5 + \varphi_4 - 3\psi_{45}) + M'_{54} = 2i_o \varphi_4 + \frac{9.8^2}{12} = 2(6,2854) + 48 = 60,571 \text{ kN.m}$$



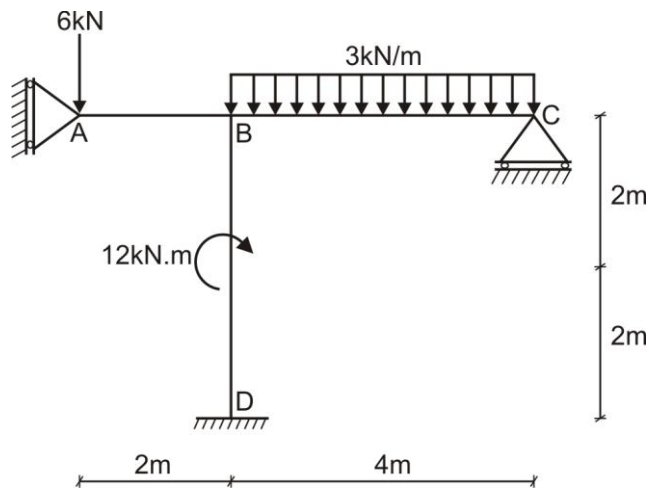
Para graficar el diagrama final de momento flector, agregamos el diagrama de momento flector de una viga simplemente apoyada para la barra cargada, en este caso la barra 45, obteniéndose el diagrama final como la suma de los dos diagramas anteriormente indicados.



EVALUACIÓN	EXAMEN FINAL	SEM. ACADÉMICO	2008 – II
CURSO	RESISTENCIA DE MATERIALES II	SECCIÓN	30F
PROFESOR	Ph.D. GENNER VILLARREAL CASTRO	DURACIÓN	90m
ESCUELA	INGENIERIA CIVIL	CICLO	VI

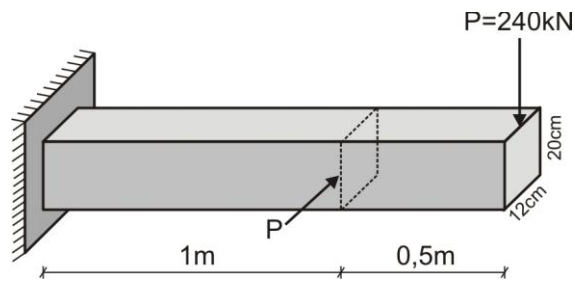
1. METODO DE LAS FUERZAS. Resolver el pórtico mostrado en la figura, graficando sus diagramas de fuerza axial, fuerza cortante y momento flector. Considerar EI constante en toda la estructura.

..... (10 puntos)



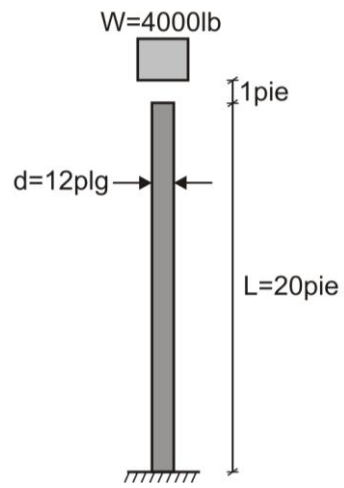
2. RESISTENCIA COMPUESTA. Determinar el esfuerzo normal máximo en valor absoluto y la ubicación del eje neutro en la sección más peligrosa de la viga.

..... (5 puntos)



3. CARGAS DE IMPACTO. Un peso $W = 4000\text{lb}$ cae desde una altura $h = 1\text{pie}$ sobre un poste vertical de madera de 20pie de longitud y 12plg de diámetro, que se supone perfectamente empotrado en su extremo inferior, tal como se muestra en la figura. Determinar el máximo esfuerzo de compresión σ en el poste, si $E = 1,5 \cdot 10^6 \text{psi}$ y el peso no rebota del poste.

..... (5 puntos)



FECHA	La Molina, 24 de Noviembre del 2008
--------------	-------------------------------------

SOLUCIONARIO DE EXAMEN FINAL

CICLO 2008 – II

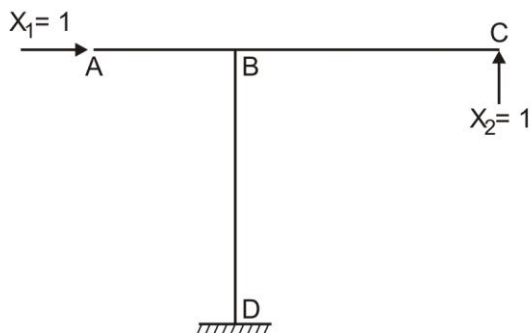
1. Determinamos el grado de indeterminación del sistema.

$$G.I. = 3C - A = 3 \cdot 2 - 4 = 2$$

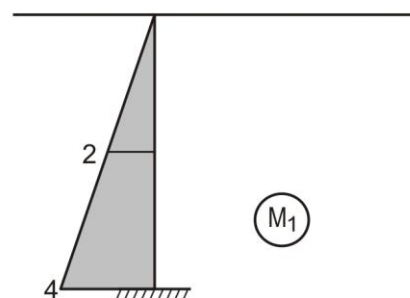
El pórtico es dos veces hiperestático.

En la figura a) se muestra el sistema principal y en las figuras b), c) y d) se muestran los diagramas de momentos unitarios y de cargas reales para dicho sistema principal.

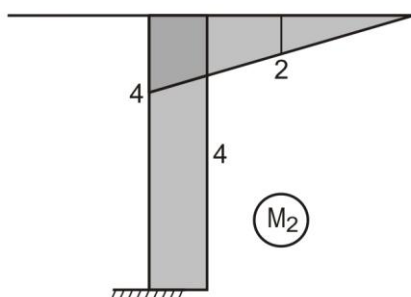
a)



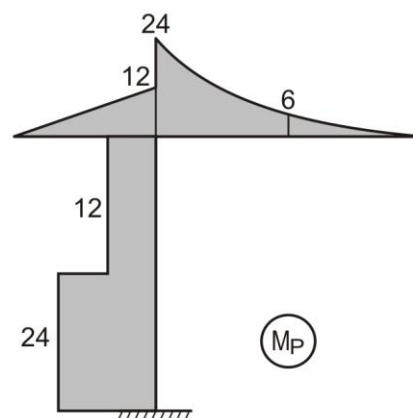
b)



c)



d)



El sistema de ecuaciones canónicas será:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} = 0$$

$$\delta_{12}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0$$

Siendo:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 = \frac{21,333}{EI}$$

$$\delta_{12} = -\frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = -\frac{32}{EI}$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + 4 \cdot 4 \cdot 4 \right] = \frac{85,333}{EI}$$

$$\Delta_{1P} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 12 + \frac{(4+2) \cdot 2}{2} \cdot 24 \right] = \frac{168}{EI}$$

$$\Delta_{2P} = -\frac{4}{6EI} [4 \cdot 24 + 4 \cdot 2 \cdot 6 + 0] = -\frac{384}{EI}$$

Luego:

$$\frac{21,333}{EI} X_1 - \frac{32}{EI} X_2 + \frac{168}{EI} = 0$$

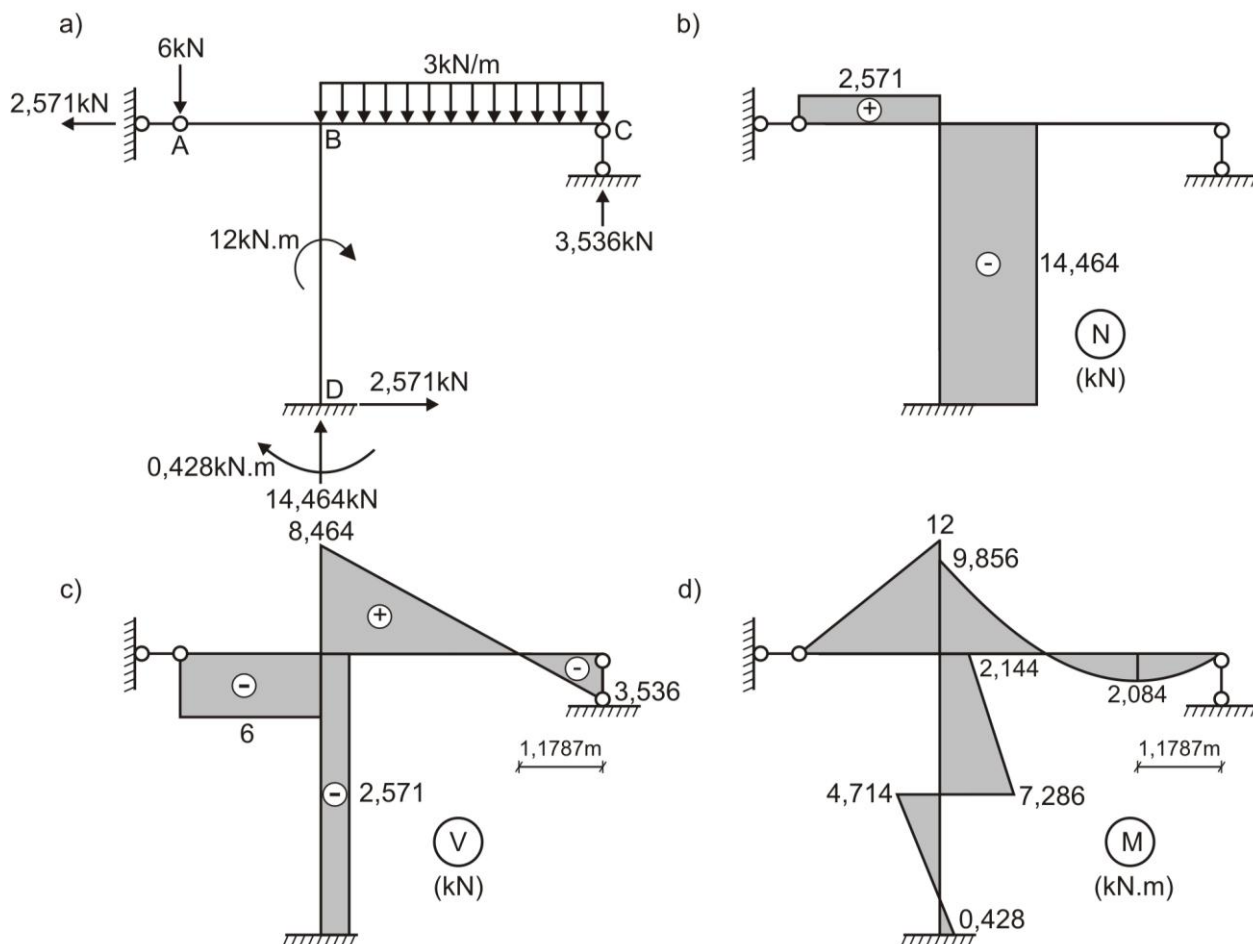
$$-\frac{32}{EI} X_1 + \frac{85,333}{EI} X_2 - \frac{384}{EI} = 0$$

De donde:

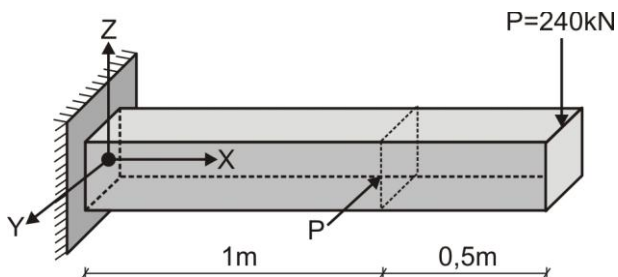
$$X_1 = H_A = -2,571 \text{ kN} \leftarrow$$

$$X_2 = V_C = 3,536 \text{ kN} \uparrow$$

Con los resultados obtenidos, esquematizamos las reacciones en los apoyos (figura a) y graficamos los diagramas de fuerza axial (figura b), fuerza cortante (figura c) y momento flector (figura d)



2. De acuerdo a los conocimientos de Estática, calculamos los momentos flectores máximos respecto a los ejes Y, Z



$$M_{Y,\text{máx}} = -240 \cdot 1,5 = -360 \text{ kN.m}$$

$$M_{Z,\text{máx}} = 240 \cdot 1 = 240 \text{ kN.m}$$

Determinamos los momentos de inercia de la sección transversal respecto a dichos ejes coordenados.

$$I_Y = \frac{12 \cdot 20^3}{12} = 8000 \text{cm}^4 = 8000 \cdot 10^{-8} \text{m}^4$$

$$I_Z = \frac{20 \cdot 12^3}{12} = 2880 \text{cm}^4 = 2880 \cdot 10^{-8} \text{m}^4$$

Como nos pide en valor absoluto, entonces, consideramos el valor absoluto de los esfuerzos respecto a ambos ejes.

$$|\sigma_{\text{máx}}| = \frac{360 \cdot 10^3}{8000 \cdot 10^{-8}} \cdot 10 \cdot 10^{-2} + \frac{240 \cdot 10^3}{2880 \cdot 10^{-8}} \cdot 6 \cdot 10^{-2} = 950 \text{MPa}$$

Ahora, determinamos la ubicación del eje neutro:

$$\text{tg}\alpha = -\frac{240 \cdot 10^3}{-360 \cdot 10^3} \cdot \frac{8000 \cdot 10^{-8}}{2880 \cdot 10^{-8}} = 1,8518 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \text{arctg}1,8518 = 61,63^\circ$$

3. Para la deflexión de la barra debido al peso W se calculará por la relación:

$$\delta = \delta_{\text{est}} + \sqrt{\delta_{\text{est}}^2 + 2h\delta_{\text{est}}}$$

Siendo:

$$\delta_{\text{est}} = \frac{WL}{EA}$$

De esta forma, obtenemos la relación para el esfuerzo normal.

$$\sigma = E\varepsilon = \frac{E\delta}{L} = \frac{W}{A} + \sqrt{\left(\frac{W}{A}\right)^2 + \frac{2WhE}{AL}}$$

Reemplazamos valores y obtenemos el esfuerzo de compresión.

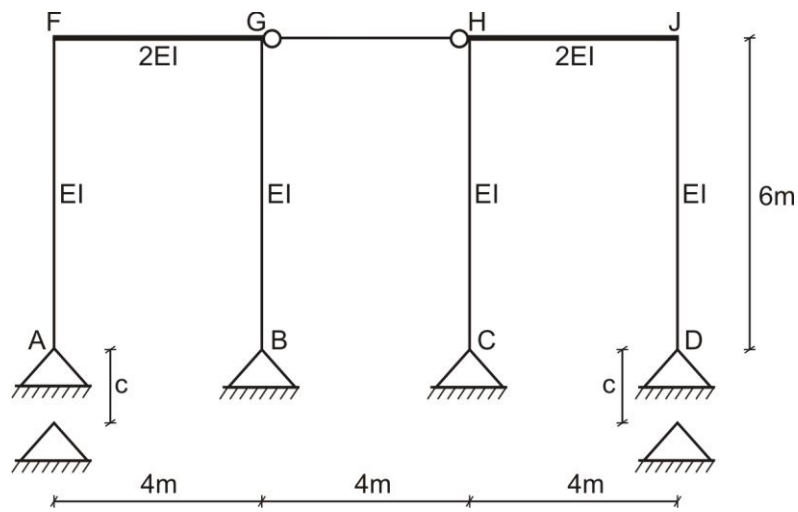
$$\sigma = \frac{4000}{(\pi/4) \cdot 12^2} + \sqrt{\left(\frac{4000}{(\pi/4) \cdot 12^2}\right)^2 + \frac{2 \cdot 4000 \cdot (1 \cdot 12) \cdot 1,5 \cdot 10^6}{(\pi/4) \cdot 12^2 \cdot (20 \cdot 12)}} = 2338,93 \text{psi}$$



EVALUACIÓN	EXAMEN FINAL	SEM. ACADÉMICO	2009 – I
CURSO	RESISTENCIA DE MATERIALES II	SECCIÓN	30F
PROFESOR	Ph.D. GENNER VILLARREAL CASTRO	DURACIÓN	90m
ESCUELA	INGENIERIA CIVIL	CICLO	VI

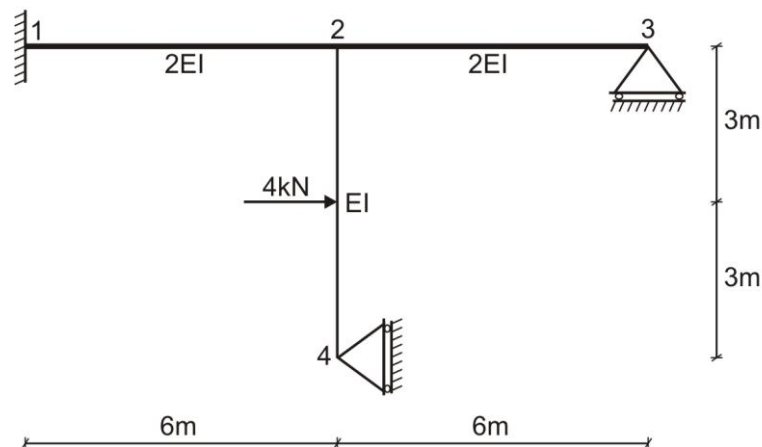
1. METODO DE LAS FUERZAS. Resolver el pórtico simétrico mostrado en la figura y graficar sus diagramas de fuerza axial, fuerza cortante y momento flector, debido al asentamiento $c = 0,1\text{m}$ en los apoyos A y D. No considerar la flexibilidad de la barra GH

..... (10 puntos)



2. METODO DE DESPLAZAMIENTOS. Determinar el desplazamiento vertical del nudo 2

..... (10 puntos)



FECHA	La Molina, 22 de Junio del 2009
--------------	---------------------------------

SOLUCIONARIO DE EXAMEN FINAL

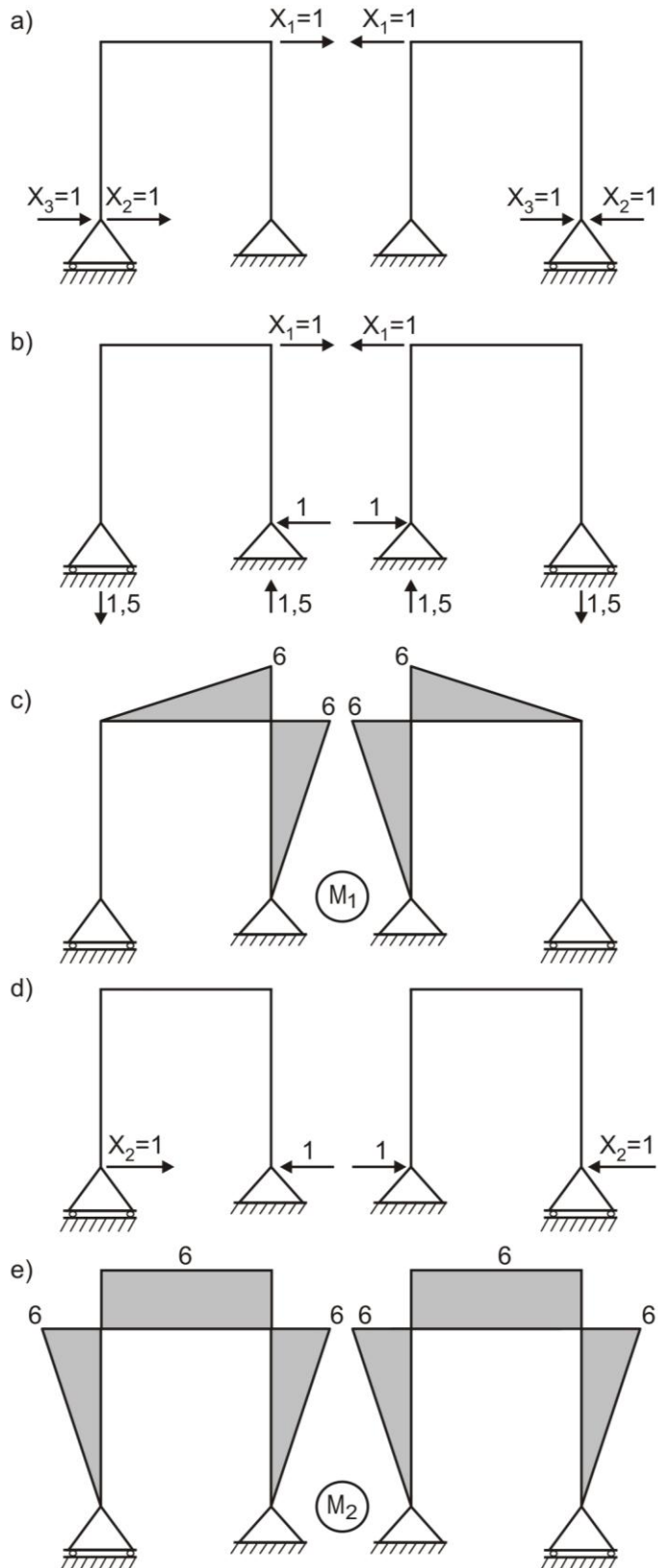
CICLO 2009 – I

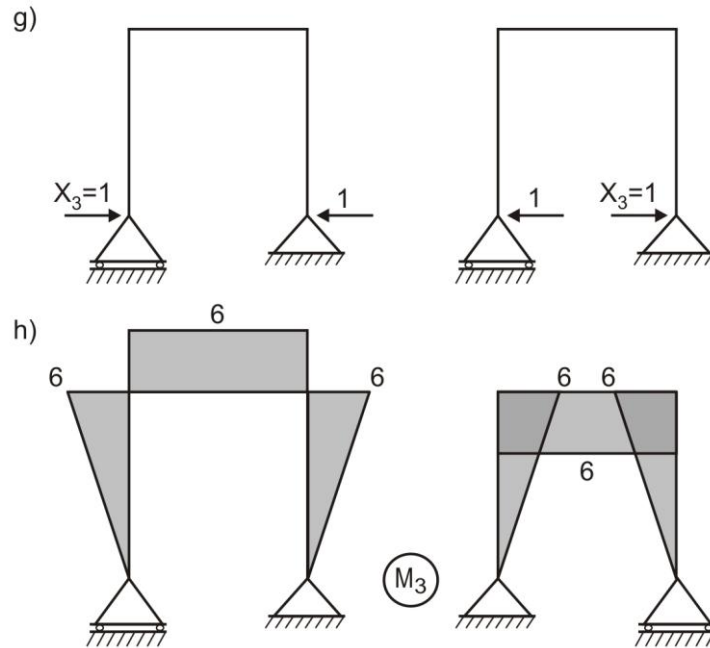
1. Determinamos el grado de indeterminación del sistema.

$$G.I. = 3C - A = 3 \cdot 3 - 6 = 3$$

El pórtico es tres veces hiperestático.

Como el pórtico es simétrico, elegimos el sistema principal (figura a), calculando sus reacciones (figuras b, d, g) y graficando los diagramas de momentos unitarios (figuras c, e, h)





El sistema de ecuaciones canónicas es:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1C} = 0$$

$$\delta_{12}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2C} = 0$$

$$\delta_{13}X_1 + \delta_{23}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3C} = 0$$

Como los diagramas M_1 y M_2 son simétricos y el diagrama M_3 es antisimétrico, se tendrá que

$$\delta_{13} = 0 \text{ y } \delta_{23} = 0$$

De las reacciones se puede deducir que $\Delta_{2C} = 0$ y $\Delta_{3C} = 0$ por no tener reacciones verticales en A y

D. En consecuencia $X_3 = 0$

De esta manera, el sistema de ecuaciones canónicas se reduce al siguiente sistema:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1C} = 0$$

$$\delta_{12}X_1 + \delta_{22}X_2 = 0$$

Determinamos los coeficientes del sistema de ecuaciones canónicas:

$$\delta_{11} = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6.4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6.2 + \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6.6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6.2 = \frac{192}{EI}$$

$$\delta_{12} = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6.4 \cdot 6.2 + \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6.6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6.2 = \frac{216}{EI}$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6.6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6.4 + \frac{1}{2EI} \cdot 6.4 \cdot 6.2 = \frac{432}{EI}$$

$$\Delta_{1C} = -(1,5,0,1) \cdot 2 = -0,3$$

Reemplazamos valores y obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{192}{EI} X_1 + \frac{216}{EI} X_2 = 0,3$$

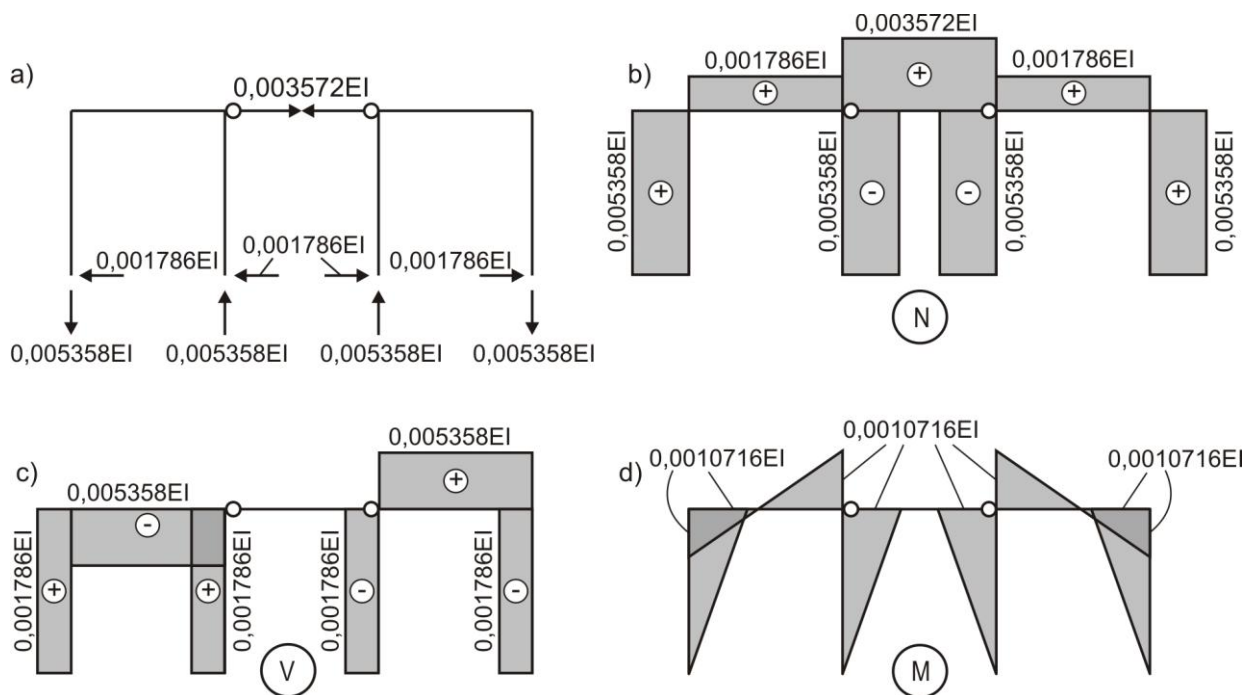
$$\frac{216}{EI} X_1 + \frac{432}{EI} X_2 = 0$$

De donde:

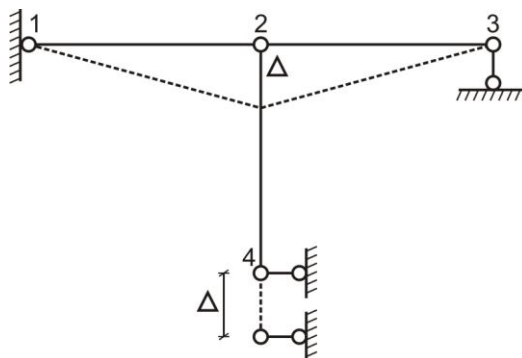
$$X_1 = 0,003572EI$$

$$X_2 = -0,001786EI$$

En la siguiente figura, se muestra el diagrama de cuerpo libre del pórtico (figura a) y sus diagramas de fuerza axial (figura b), fuerza cortante (figura c) y momento flector (figura d)



- Para determinar el número de desplazamientos lineales de los nudos, elaboramos el esquema del pórtico con rótulas, ingresando articulación en el nudo rígido.



Ahora, determinamos el grado de indeterminación cinemática del sistema.

$$n = n_n + n_d = 1 + 1 = 2$$

En consecuencia, el grado de indeterminación cinemática es dos, siendo las incógnitas φ_2 y Δ

Determinamos la rigidez por unidad de longitud.

$$i_{12} = i_{23} = \frac{2EI}{6} = 2i_o$$

$$i_{24} = \frac{EI}{6} = i_o$$

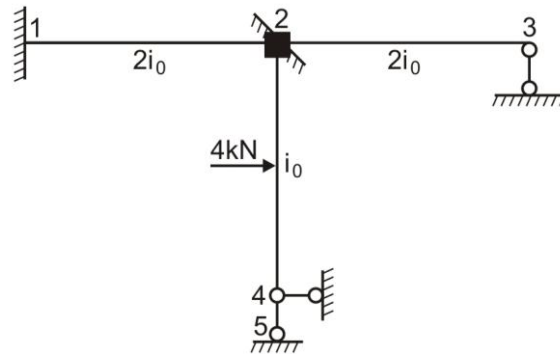
Calculamos el ángulo de desviación de la barra.

$$\psi_{12} = \frac{\Delta}{6}$$

$$\psi_{23} = -\frac{\Delta}{6}$$

$$\psi_{24} = 0$$

Esquematisamos el sistema principal, ingresando en el nudo rígido 2 un empotramiento elástico que impide el probable ángulo de giro de este nudo. También se ingresó una barra adicional que impide el desplazamiento lineal de los nudos del pórtico.



Analizamos el equilibrio del nudo rígido 2

NUDO 2:

$$\sum M_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad M_2 = M_{21} + M_{24} + M_{23} = 0 \quad \dots\dots\dots (a)$$

Siendo:

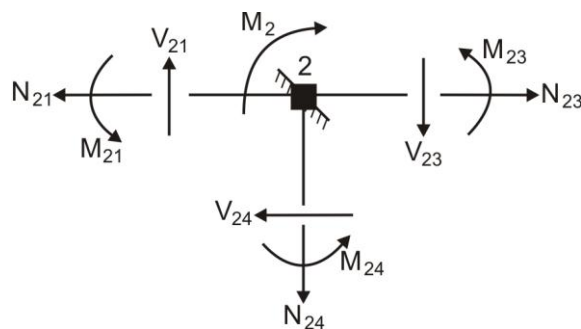
$$M_{21} = 2i_{12}(2\varphi_2 + \varphi_1 - 3\psi_{12}) + M'_{21} = 2.2i_o \left(2\varphi_2 - 3 \cdot \frac{\Delta}{6} \right) = 8i_o\varphi_2 - 2i_o\Delta$$

$$M_{24} = 3i_{24}(\varphi_2 - \psi_{24}) + M''_{24} = 3i_o(\varphi_2) + \frac{3}{16} \cdot 4.6 = 3i_o\varphi_2 + 4,5$$

$$M_{23} = 3i_{23}(\varphi_2 - \psi_{23}) + M'''_{23} = 3.2i_o \left(\varphi_2 + \frac{\Delta}{6} \right) = 6i_o\varphi_2 + i_o\Delta$$

Reemplazamos valores en la ecuación (a) y obtenemos:

$$17i_o\varphi_2 - i_o\Delta + 4,5 = 0 \quad \dots\dots\dots (b)$$



Ahora, elaboramos la segunda ecuación, a partir de la condición de igualdad a cero de la reacción en la barra adicional. Para ello, efectuamos un corte en el pórtico, analizando la parte de la barra adicional que impide el desplazamiento lineal y planteamos la ecuación de equilibrio de la parte cortada del pórtico a analizar, en función de las fuerzas cortantes.

CORTE EN EL PORTICO:

$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad R = V_{23} - V_{21} = 0 \quad \dots\dots\dots (c)$$

Siendo:

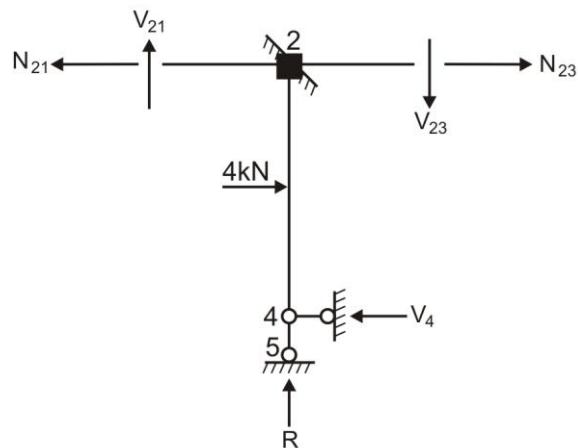
$$V_{23} = -\frac{3i_{23}}{L_{23}}(\varphi_2 - \psi_{23}) + V_{23}'' = -\frac{3.2i_o}{6}\left(\varphi_2 + \frac{\Delta}{6}\right) = -i_o\varphi_2 - 0,1667i_o\Delta$$

$$V_{21} = -\frac{6i_{12}}{L_{12}}(\varphi_1 + \varphi_2 - 2\psi_{12}) + V_{21}' = -\frac{6.2i_o}{6}\left(\varphi_2 - 2 \cdot \frac{\Delta}{6}\right) = -2i_o\varphi_2 + 0,6667i_o\Delta$$

Reemplazamos en (c), obteniendo:

$$i_o\varphi_2 - 0,8334i_o\Delta = 0$$

$$i_o\varphi_2 = 0,8334i_o\Delta \quad \dots\dots\dots (d)$$



Reemplazamos (d) en (b), obteniendo:

$$17(0,8334i_o\Delta) - i_o\Delta + 4,5 = 0$$

$$13,1678i_o\Delta = -4,5$$

Como $i_o = \frac{EI}{6}$ se tendrá:

$$13,1678 \cdot \frac{EI}{6} \cdot \Delta = -4,5$$

De donde:

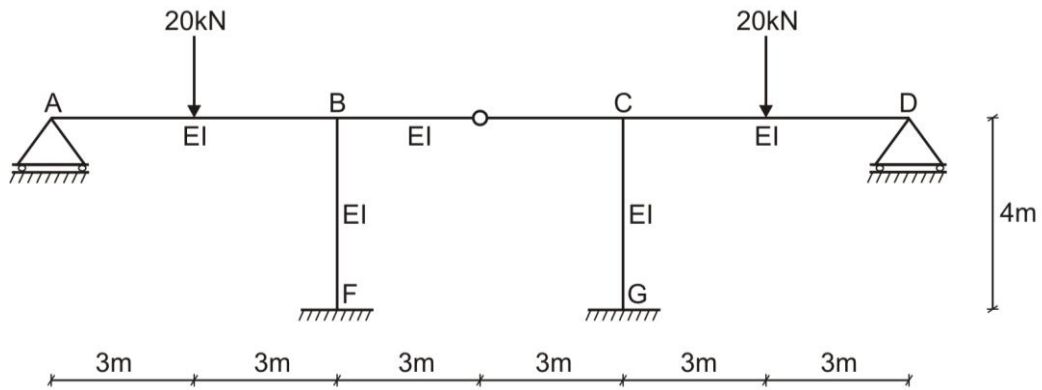
$$\Delta = -\frac{2,050}{EI} \uparrow$$

El signo negativo, indica que el desplazamiento del nudo 2 va hacia arriba, tan igual que el apoyo movable 4

EVALUACIÓN	EXAMEN FINAL	SEM. ACADÉMICO	2009 – II
CURSO	RESISTENCIA DE MATERIALES II	SECCIÓN	30F
PROFESOR	Ph.D. GENNER VILLARREAL CASTRO	DURACIÓN	90m
ESCUELA	INGENIERIA CIVIL	CICLO	VI

1. METODO DE LAS FUERZAS. Resolver el pórtico simétrico mostrado en la figura y graficar sus diagramas de fuerza axial, fuerza cortante y momento flector.

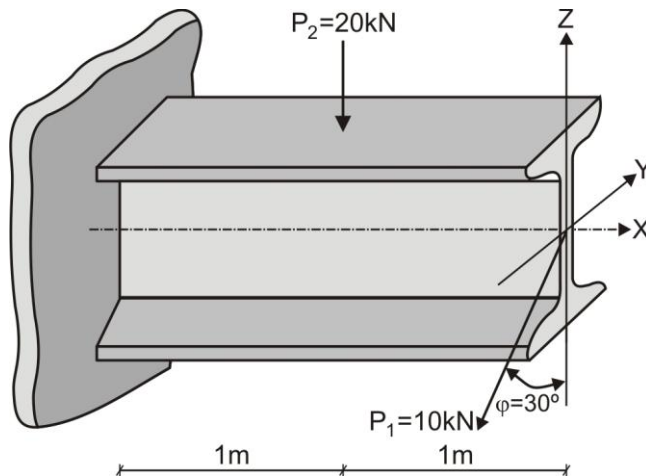
..... (10 puntos)



2. RESISTENCIA COMPUESTA. Determinar el esfuerzo normal máximo en valor absoluto y la ubicación del eje neutro en la sección más peligrosa de la viga, si las características del perfil metálico se dan en la siguiente tabla.

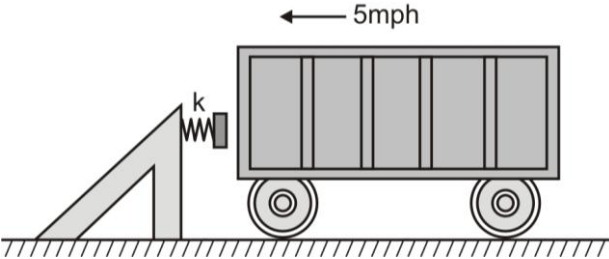
Área (A) cm ²	W_Y cm ³	W_Z cm ³	I_Y cm ⁴	I_Z cm ⁴
100	1589	123	39727	1043

..... (5 puntos)



3. CARGAS DE IMPACTO. Un amortiguador de choques para vagones de mina se construye con un resorte de rigidez $k = 1000\text{lb}/\text{plg}$, tal como se muestra en la figura. Si un vagón que pesa 1500lb viaja a 5mph cuando golpea el resorte, ¿Cuál es la deflexión máxima δ de éste?

..... (5 puntos)



FECHA	La Molina, 23 de Noviembre del 2009
-------	-------------------------------------

SOLUCIONARIO DE EXAMEN FINAL

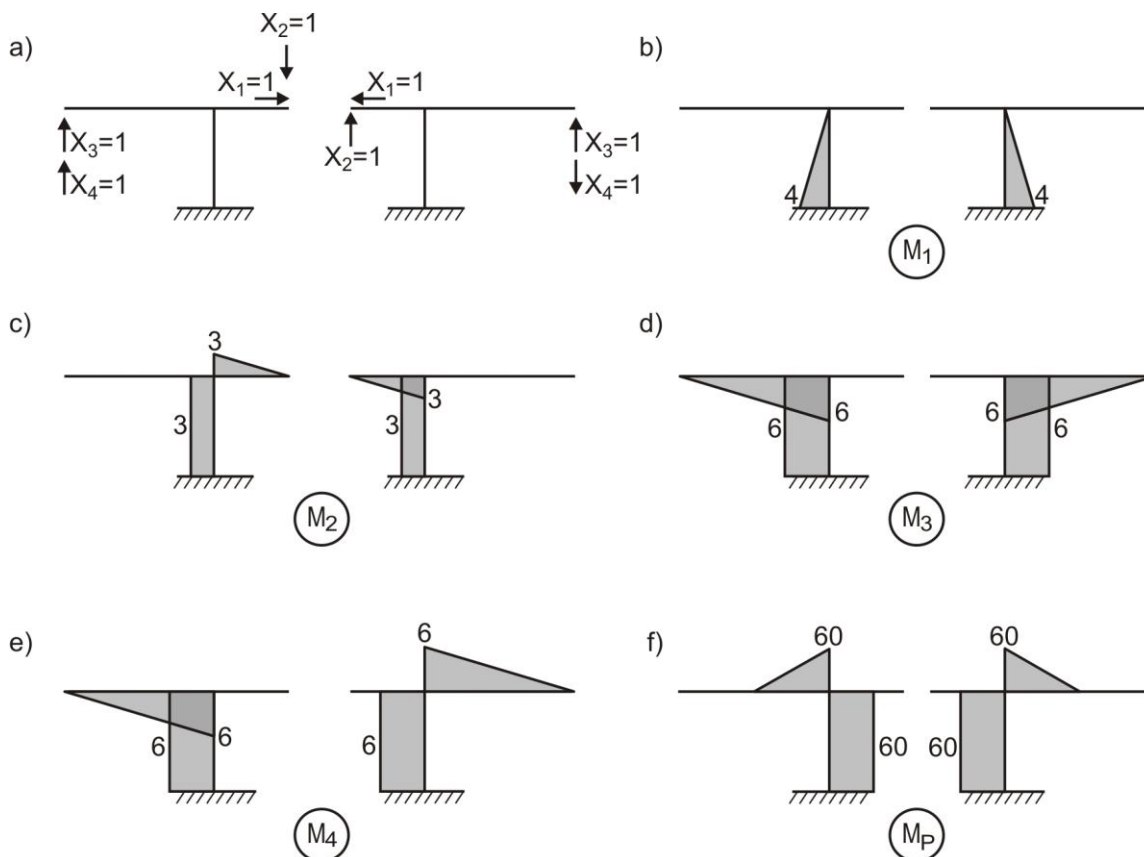
CICLO 2009 – II

1. Determinamos el grado de indeterminación del sistema.

$$G.I. = 3C - A = 3 \cdot 3 - 5 = 4$$

El pórtico es cuatro veces hiperestático.

Elegimos el sistema principal (figura a) y graficamos los diagramas de momentos unitarios (figuras b, c, d, e) y de carga real (figura f)



El sistema inicial de ecuaciones canónicas es:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \delta_{14}X_4 + \Delta_{1P} = 0$$

$$\delta_{12}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \delta_{24}X_4 + \Delta_{2P} = 0$$

$$\delta_{13}X_1 + \delta_{23}X_2 + \delta_{33}X_3 + \delta_{34}X_4 + \Delta_{3P} = 0$$

$$\delta_{14}X_1 + \delta_{24}X_2 + \delta_{34}X_3 + \delta_{44}X_4 + \Delta_{4P} = 0$$

Como los diagramas M_1 , M_3 y M_P son simétricos y los diagramas M_2 y M_4 son antisimétricos, se desprende que los coeficientes δ_{12} , δ_{14} , δ_{23} , δ_{34} , Δ_{2P} y Δ_{4P} serán iguales a cero y, en consecuencia, el sistema de ecuaciones canónicas del método de las fuerzas tendrá la forma:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1P} = 0$$

$$\delta_{13}X_1 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3P} = 0$$

$$\delta_{22}X_2 + \delta_{24}X_4 = 0$$

$$\delta_{24}X_2 + \delta_{44}X_4 = 0$$

La solución del sistema de ecuaciones correspondiente a las dos últimas ecuaciones es $X_2 = 0$ y $X_4 = 0$, esto es, las incógnitas antisimétricas por acción de cargas externas simétricas resultaron ser iguales a cero.

Luego, determinamos los coeficientes de las dos primeras ecuaciones.

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \cdot 2 = \frac{42,667}{EI}$$

$$\delta_{13} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 2 = \frac{96}{EI}$$

$$\delta_{33} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 + 6 \cdot 4 \cdot 6 \right] \cdot 2 = \frac{432}{EI}$$

$$\Delta_{1P} = -\frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 60 \cdot 2 = -\frac{960}{EI}$$

$$\Delta_{3P} = -\frac{3}{6EI} [0 + 4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 30 + 6 \cdot 60] \cdot 2 - \frac{1}{EI} \cdot 6 \cdot 4 \cdot 60 \cdot 2 = -\frac{3780}{EI}$$

De esta manera, las ecuaciones serán:

$$\frac{42,667}{EI} X_1 + \frac{96}{EI} X_3 = \frac{960}{EI}$$

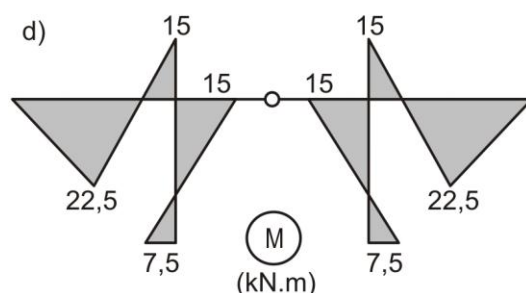
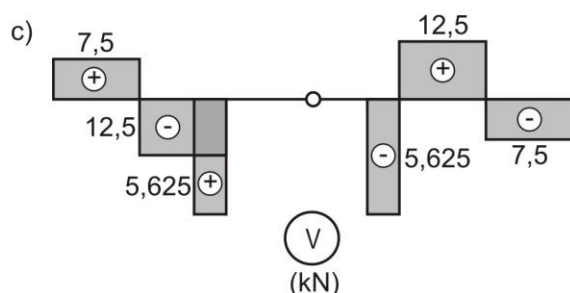
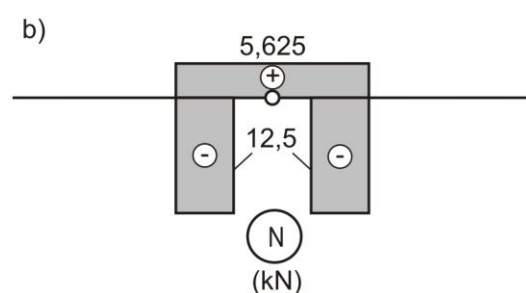
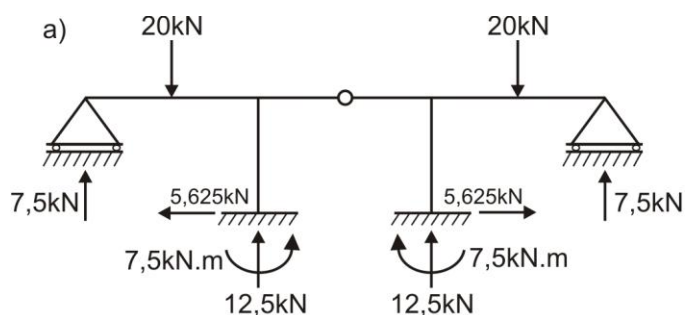
$$\frac{96}{EI} X_1 + \frac{432}{EI} X_3 = \frac{3780}{EI}$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones y obtenemos:

$$X_1 = 5,625 \text{ kN}$$

$$X_3 = 7,5 \text{ kN}$$

Con los valores obtenidos, calculamos las otras reacciones en los apoyos (figura a) y graficamos los diagramas de fuerza axial (figura b), fuerza cortante (figura c) y momento flector (figura d)



2. Los momentos flectores máximos surgen en el empotramiento, siendo sus valores.

$$M_{Y,\text{máx}} = -20(1) - 10 \cos 30^\circ (2) = -37,32 \text{ kN.m}$$

$$M_{Z,\text{máx}} = -10 \sin 30^\circ (2) = -10 \text{ kN.m}$$

Como nos pide en valor absoluto, entonces, consideramos el valor absoluto de los esfuerzos respecto a ambos ejes.

$$|\sigma_{\text{máx}}| = \frac{M_{Y,\text{máx}}}{W_Y} + \frac{M_{Z,\text{máx}}}{W_Z} = \frac{37,32 \cdot 10^3}{1589 \cdot 10^{-6}} + \frac{10 \cdot 10^3}{123 \cdot 10^{-6}} = 104,787 \text{ MPa}$$

Para determinar el punto más peligroso, determinamos la ubicación de la línea neutra. El coeficiente de giro de la línea neutra es:

$$k = \text{tg} \alpha = -\frac{M_{Z,\text{máx}}}{M_{Y,\text{máx}}} \cdot \frac{I_Y}{I_Z} = -\frac{10 \cdot 10^3}{37,32 \cdot 10^3} \cdot \frac{39727 \cdot 10^{-8}}{1043 \cdot 10^{-8}} = -10,206$$

Luego:

$$\alpha = \arctg(-10,206) = -84,4^\circ$$

El signo negativo implica que se girará en el sentido horario respecto al eje Y

3. Por datos del problema, se tiene que:

$$P = 1500 \text{ lb}$$

$$g = 32,2 \text{ pie/s}^2 = 386,4 \text{ plg/s}^2$$

$$V = 5 \text{ mph} = 5 \left(\frac{22}{15} \right) \text{ pie/s} = \left(\frac{22}{3} \right) \cdot 12 \text{ plg/s} = 88 \text{ plg/s}$$

Para una carga de impacto, cuando el objeto que se desplaza horizontalmente golpea el extremo de una barra o resorte, donde la energía cinética de la masa móvil es $MV^2/2$ y la energía de deformación de la barra es $EA\delta^2/2L$, se puede formular la siguiente ecuación de conservación de energía:

$$\frac{MV^2}{2} = \frac{EA\delta^2}{2L}$$

Siendo:

δ - deflexión máxima del extremo de la barra o del resorte

Por lo tanto, para nuestro caso se tendrá:

$$\delta = \sqrt{\frac{MV^2L}{EA}} = \sqrt{\frac{PV^2}{gk}} = \sqrt{\frac{1500 \cdot 88^2}{386,4 \cdot 1000}} = 5,483 \text{ plg}$$

Donde:

$$M = \frac{P}{g}$$

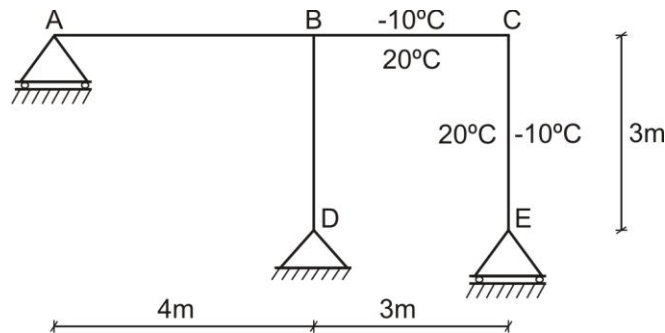
$$k = \frac{EA}{L}$$



EVALUACIÓN	EXAMEN FINAL	SEM. ACADÉMICO	2010 – I
CURSO	RESISTENCIA DE MATERIALES II	SECCIÓN	30F
PROFESOR	Ph.D. GENNER VILLARREAL CASTRO	DURACIÓN	90m
ESCUELA	INGENIERIA CIVIL	CICLO	VI

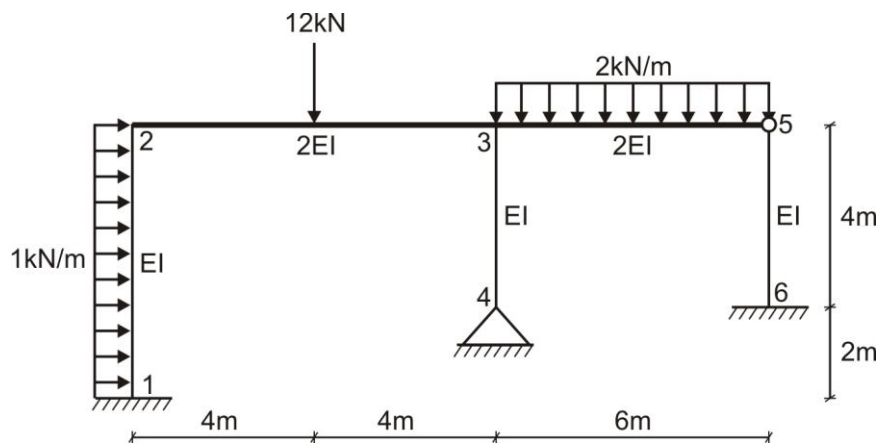
1. METODO DE LAS FUERZAS. Resolver el pórtico mostrado en la figura, graficando sus diagramas de fuerzas internas y determinar el desplazamiento horizontal del apoyo A, debido a la variación de temperatura en las barras BC y CE, en las cuales la temperatura exterior es -10°C y la temperatura interior es 20°C . En el resto de barras del pórtico no existe variación de temperatura. Considerar $EI = \text{const}$ para todo el pórtico; $b = 0,5\text{m}$ y $\alpha = \text{const}$ para las barras BC y CE

..... (10 puntos)



2. METODO DE DESPLAZAMIENTOS. Resolver el pórtico mostrado en la figura y graficar los diagramas de fuerza axial, fuerza cortante y momento flector.

..... (10 puntos)



FECHA	La Molina, 21 de Junio del 2010
--------------	---------------------------------

SOLUCIONARIO DE EXAMEN FINAL

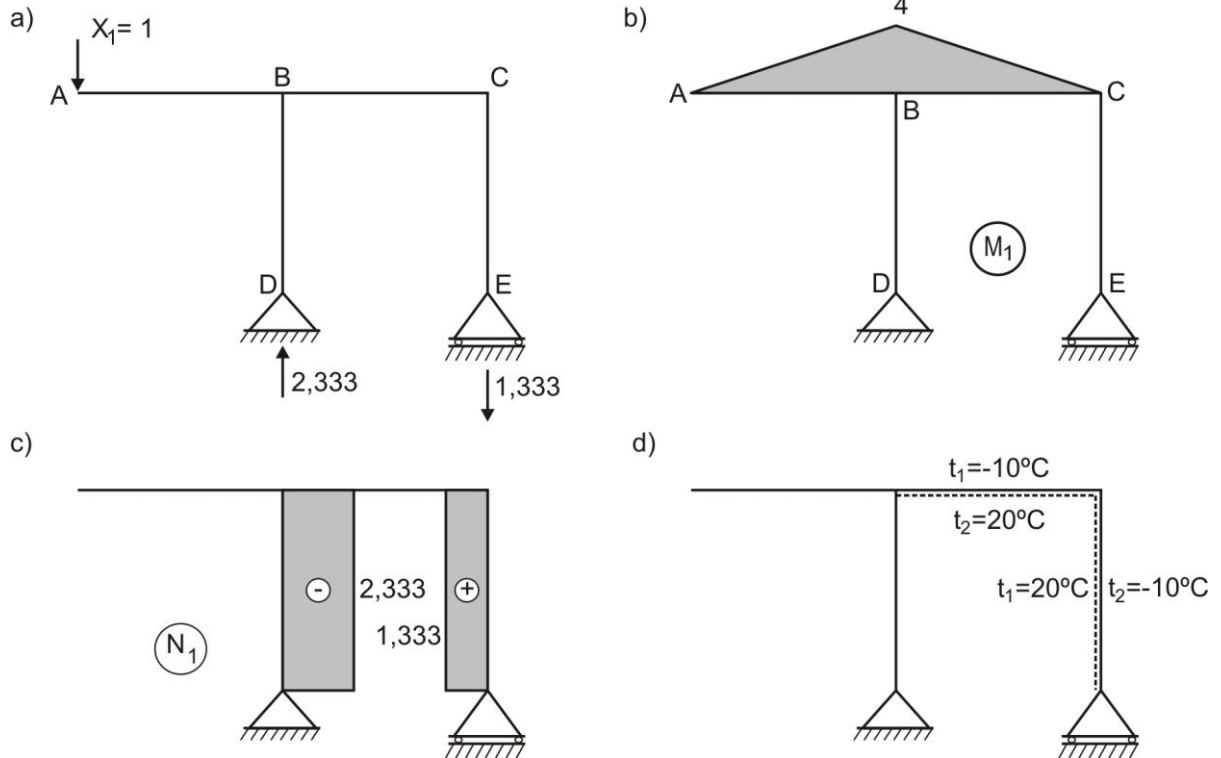
CICLO 2010 – I

1. Determinamos el grado de indeterminación del sistema.

$$G.I. = 3C - A = 3 \cdot 2 - 5 = 1$$

El pórtico es una vez hiperestático.

Elegimos el sistema principal y graficamos los diagramas M_1 , N_1 , así como esquematizamos las zonas traccionadas por temperatura.



La ecuación canónica será:

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1T} = 0$$

Siendo:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \right] = \frac{37,333}{EI}$$

$$\Delta_{1T} = -\alpha \frac{|-10 - 20|}{0,5} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 + \alpha \frac{|20 - 10|}{2} \cdot 1,333 \cdot 3 = -340\alpha$$

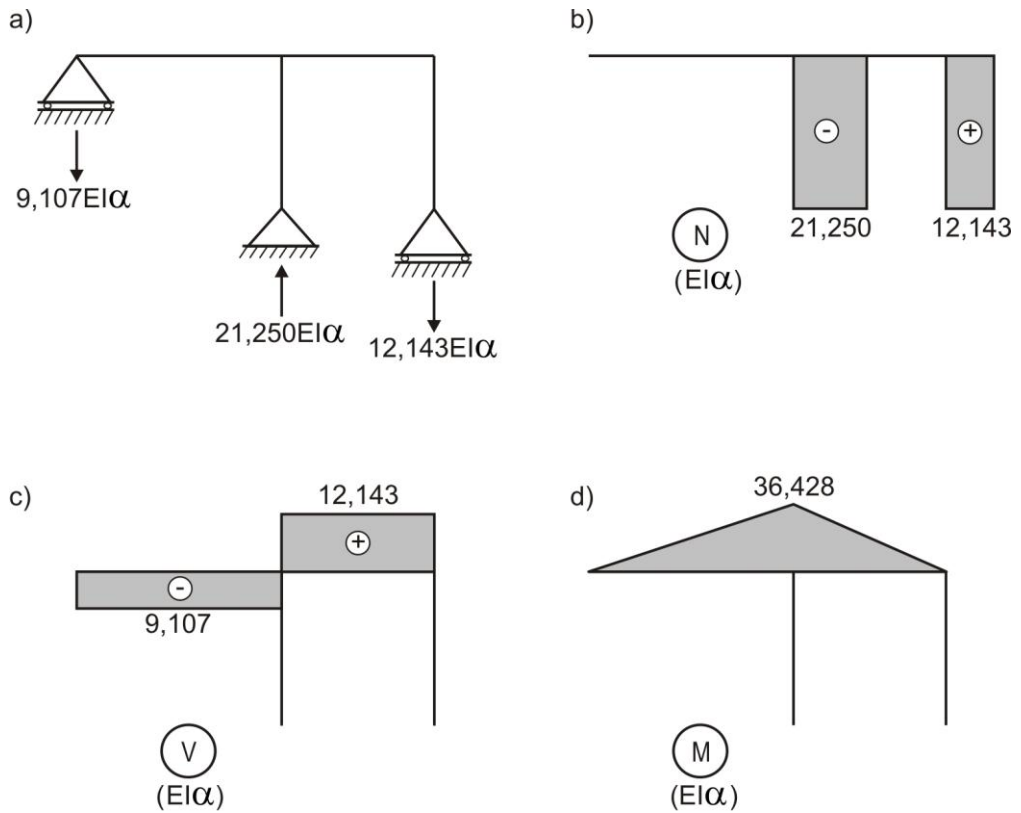
Reemplazamos valores:

$$\frac{37,333}{EI} X_1 - 340\alpha = 0$$

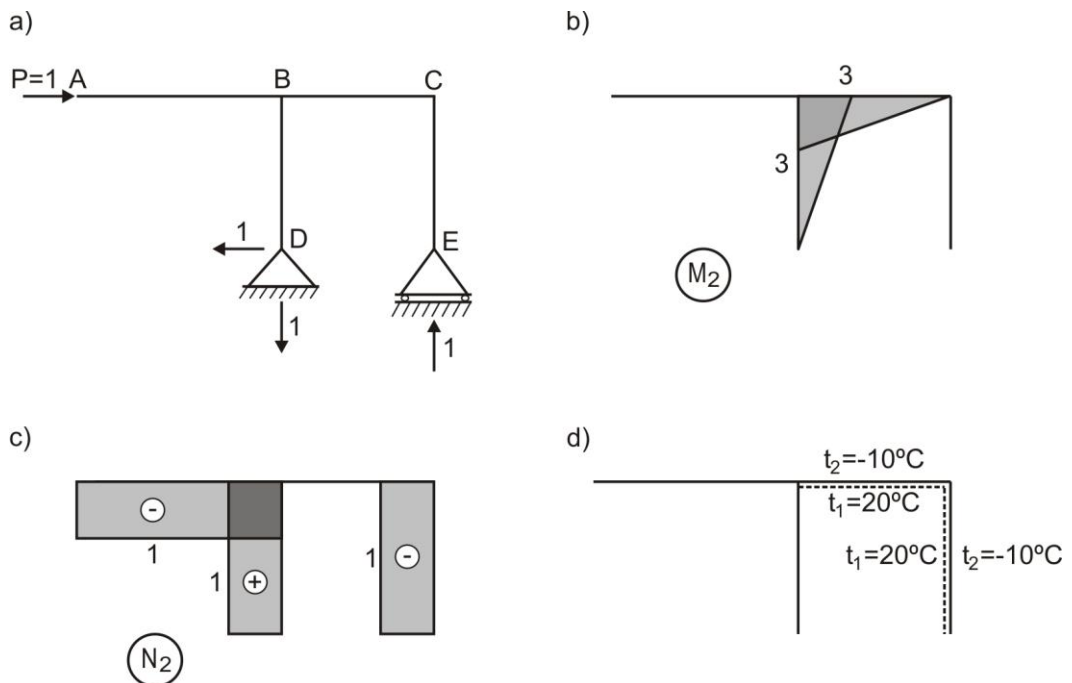
De donde:

$$X_1 = 9,107EI\alpha$$

De esta manera, las reacciones en los apoyos y diagramas finales de fuerza axial, fuerza cortante y momento flector, son los mostrados en la figura.



Para calcular el desplazamiento horizontal en A, aplicamos una carga horizontal $P = 1$ en el sistema principal y en el punto requerido, graficando sus diagramas M_2 , N_2 , así como esquematizando las zonas traccionadas por temperatura.

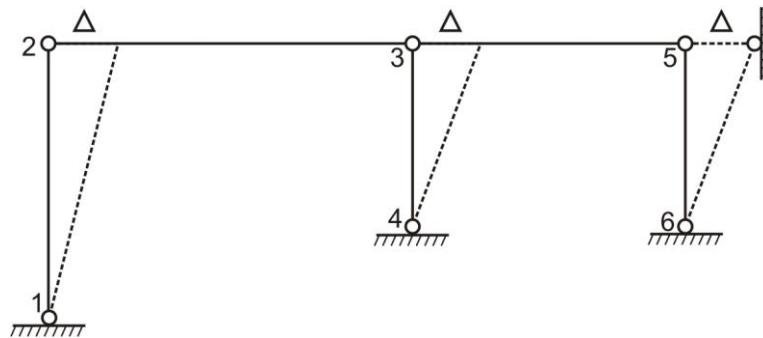


Determinamos el desplazamiento horizontal en A

$$\Delta_X^A = \sum \int \frac{MM_2}{EI} ds + \sum \alpha \frac{|t_1 - t_2|}{b} A_{M_2} + \sum \alpha \frac{|t_1 + t_2|}{2} A_{N_2}$$

$$\Delta_X^A = -\frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot (36,428EI\alpha) \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + \alpha \frac{|20+10|}{0,5} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 - \alpha \frac{|20-10|}{2} \cdot 1 \cdot 3 = 145,716\alpha \rightarrow$$

2. Para determinar los desplazamientos lineales, esquemizamos el pórtico con rótulas.



Determinamos el grado de indeterminación cinemática del sistema.

$$n = n_n + n_d = 2 + 1 = 3$$

Siendo, las incógnitas los desplazamientos angulares φ_2 , φ_3 y el desplazamiento lineal Δ

Determinamos la rigidez por unidad de longitud.

$$i_{23} = \frac{2EI}{8} = \frac{EI}{4} = i_o$$

$$i_{35} = \frac{2EI}{6} = \frac{4}{3}i_o$$

$$i_{34} = i_{56} = \frac{EI}{4} = i_o$$

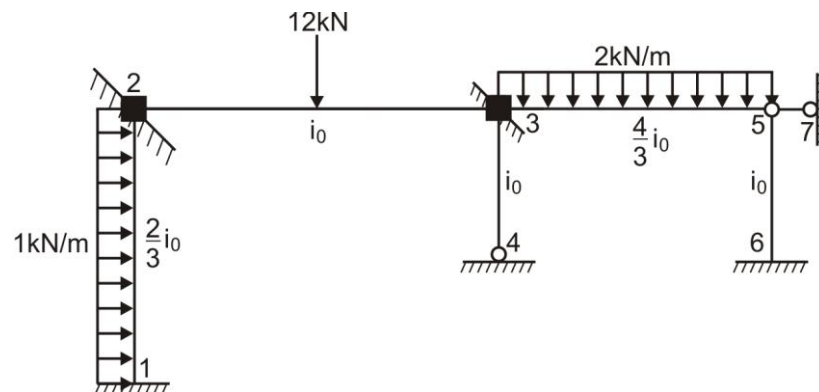
$$i_{21} = \frac{EI}{6} = \frac{2}{3}i_o$$

Calculamos el ángulo de desviación de la barra.

$$\psi_{21} = \frac{\Delta}{6}$$

$$\psi_{34} = \psi_{56} = \frac{\Delta}{4}$$

$$\psi_{23} = \psi_{35} = 0$$



Esquematisamos el sistema principal, incorporando los empotramientos elásticos en los nudos rígidos 2, 3 y la barra adicional en el nudo 5, tal como se muestra en la figura de la página anterior.

Analizamos el equilibrio del nudo rígido 2

NUDO 2:

$$\sum M_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad M_2 = M_{21} + M_{23} = 0 \quad \dots\dots\dots (a)$$

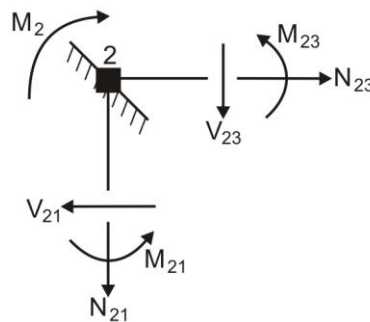
Siendo:

$$M_{21} = 2i_{21}(2\varphi_2 + \varphi_1 - 3\psi_{21}) + M'_{21} = 2 \cdot \frac{2}{3} i_o \left(2\varphi_2 - 3\frac{\Delta}{6} \right) + \frac{1.6^2}{12} = 2,6667i_o\varphi_2 - 0,6667i_o\Delta + 3$$

$$M_{23} = 2i_{23}(2\varphi_2 + \varphi_3 - 3\psi_{23}) + M'_{23} = 2i_o(2\varphi_2 + \varphi_3) - \frac{12.8}{8} = 4i_o\varphi_2 + 2i_o\varphi_3 - 12$$

Reemplazamos valores en la ecuación (a) y obtenemos:

$$6,6667i_o\varphi_2 + 2i_o\varphi_3 - 0,6667i_o\Delta - 9 = 0 \quad \dots\dots\dots (b)$$



Ahora, analizamos el equilibrio del nudo rígido 3

NUDO 3:

$$\sum M_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad M_3 = M_{32} + M_{34} + M_{35} = 0 \quad \dots\dots\dots (c)$$

Siendo:

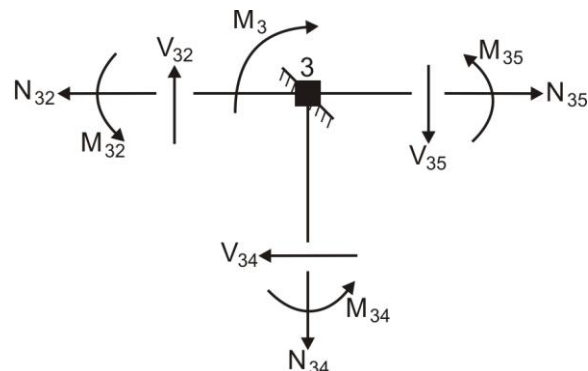
$$M_{32} = 2i_{23}(2\varphi_3 + \varphi_2 - 3\psi_{23}) + M'_{32} = 2i_o(2\varphi_3 + \varphi_2) + \frac{12.8}{8} = 2i_o\varphi_2 + 4i_o\varphi_3 + 12$$

$$M_{34} = 3i_{34}(\varphi_3 - \psi_{34}) + M''_{34} = 3i_o \left(\varphi_3 - \frac{\Delta}{4} \right) = 3i_o\varphi_3 - 0,75i_o\Delta$$

$$M_{35} = 3i_{35}(\varphi_3 - \psi_{35}) + M''_{35} = 3 \cdot \frac{4}{3} i_o (\varphi_3) - \frac{2.6^2}{8} = 4i_o\varphi_3 - 9$$

Reemplazamos valores en la ecuación (c) y obtenemos:

$$2i_o\varphi_2 + 11i_o\varphi_3 - 0,75i_o\Delta + 3 = 0 \quad \dots\dots\dots (d)$$



Ahora, elaboramos la tercera ecuación, a partir de la condición de igualdad a cero de la reacción en la barra adicional. Para ello, efectuamos un corte en el pórtico, analizando la parte de la barra adicional que impide el desplazamiento lineal y planteamos la ecuación de equilibrio de la parte cortada del pórtico a analizar, en función de las fuerzas cortantes.

CORTE EN EL PORTICO:

$$\sum F_X = 0 \quad \Rightarrow \quad R = V_{21} + V_{34} + V_{56} = 0 \quad \dots\dots\dots (e)$$

Siendo:

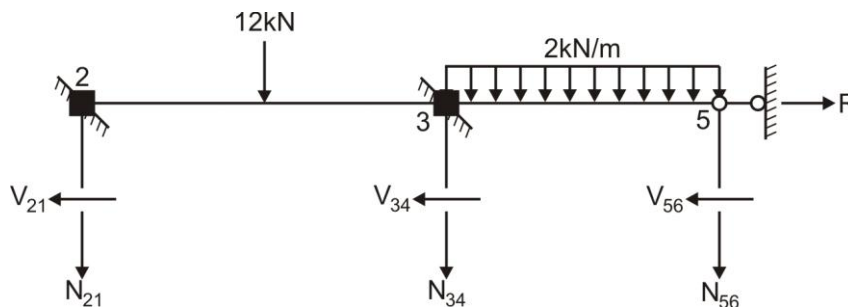
$$V_{21} = -\frac{6i_{21}}{L_{21}}(\varphi_2 + \varphi_1 - 2\psi_{21}) + V'_{21} = -\frac{6(2i_o/3)}{6}\left(\varphi_2 - 2\frac{\Delta}{6}\right) - \frac{1.6}{2} = -0,6667i_o\varphi_2 + 0,2222i_o\Delta - 3$$

$$V_{34} = -\frac{3i_{34}}{L_{34}}(\varphi_3 - \psi_{34}) + V''_{34} = -\frac{3i_o}{4}\left(\varphi_3 - \frac{\Delta}{4}\right) = -0,75i_o\varphi_3 + 0,1875i_o\Delta$$

$$V_{56} = -\frac{3i_{56}}{L_{56}}(\varphi_6 - \psi_{56}) + V'''_{56} = -\frac{3i_o}{4}\left(-\frac{\Delta}{4}\right) = 0,1875i_o\Delta$$

Reemplazamos valores en la ecuación (e) y obtenemos:

$$0,6667i_o\varphi_2 + 0,75i_o\varphi_3 - 0,5972i_o\Delta + 3 = 0 \quad \dots\dots\dots (f)$$



Resolvemos las ecuaciones (b), (d) y (f), obteniendo:

$$i_o\varphi_2 = 2,1182$$

$$i_o\varphi_3 = -0,1686$$

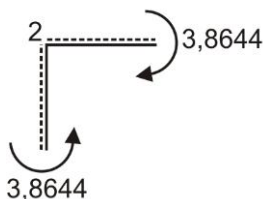
$$i_o\Delta = 7,1757$$

Con los valores obtenidos, determinamos los momentos flectores en los nudos.

NUDO 2:

$$M_{23} = 4(2,1182) + 2(-0,1686) - 12 = -3,8644\text{kN.m}$$

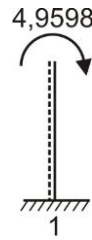
$$M_{21} = 2,6667(2,1182) - 0,6667(7,1757) + 3 = 3,8644\text{kN.m}$$



NUDO 1:

$$M_{12} = 2i_{21}(2\varphi_1 + \varphi_2 - 3\psi_{21}) + M'_{12} = 2 \cdot \frac{2}{3}i_o\left(\varphi_2 - 3\frac{\Delta}{6}\right) - \frac{1.6^2}{12} = 1,3333i_o\varphi_2 - 0,6667i_o\Delta - 3$$

$$M_{12} = 1,3333(2,1182) - 0,6667(7,1757) - 3 = -4,9598 \text{ kN.m}$$

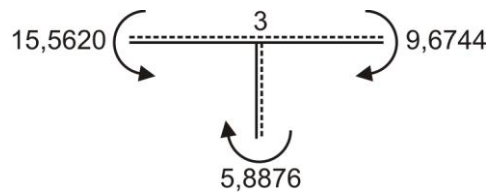


NUDO 3:

$$M_{32} = 2(2,1182) + 4(-0,1686) + 12 = 15,5620 \text{ kN.m}$$

$$M_{35} = 4(-0,1686) - 9 = -9,6744 \text{ kN.m}$$

$$M_{34} = 3(-0,1686) - 0,75(7,1757) = -5,8876 \text{ kN.m}$$



NUDO 6:

$$M_{65} = 3i_{56}(\varphi_6 - \psi_{56}) + M_{65}'' = 3i_o \left(-\frac{\Delta}{4} \right) = -0,75i_o \Delta = -0,75(7,1757) = -5,3818 \text{ kN.m}$$

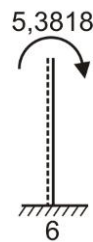


DIAGRAMA DE MOMENTO FLECTOR:

Con los valores obtenidos graficamos el diagrama de momentos en los nudos y para obtener el diagrama final de momento flector, al diagrama de momentos en los nudos le agregamos el diagrama de cargas en cada barra, asumiendo como una viga simplemente apoyada. Los diagramas de momentos en los nudos y final se muestran en las figuras a) y b) respectivamente.

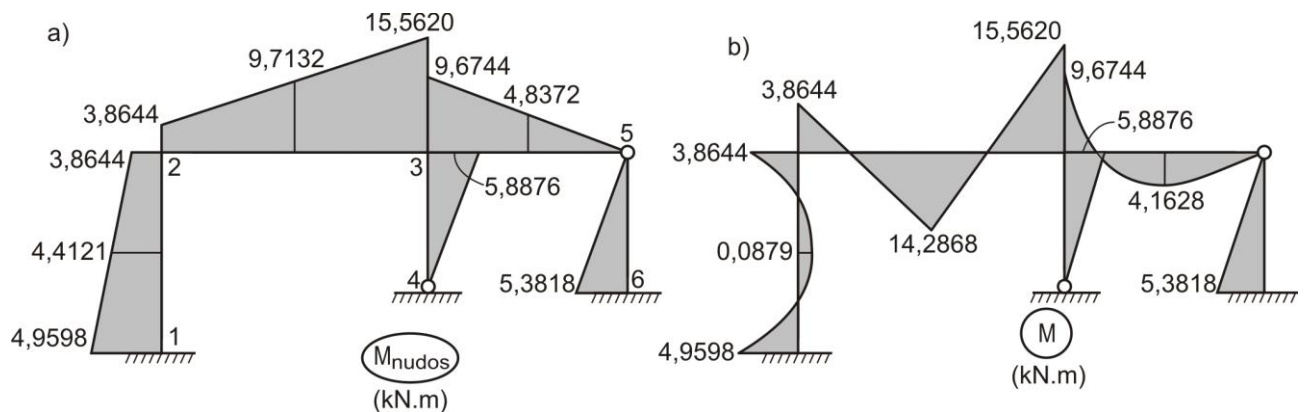


DIAGRAMA DE FUERZA CORTANTE:

Determinamos la fuerza cortante en cada tramo.

$$V_{23} = \frac{3,8644 + 14,2868}{4} = 4,5378 \text{ kN}$$

$$V_{32} = -\frac{14,2868 + 15,5620}{4} = -7,4622 \text{ kN}$$

$$V_{35} = -\frac{0 - 9,6744}{4} + \frac{2,6}{2} = 7,6124 \text{ kN}$$

$$V_{53} = -\frac{0 - 9,6744}{6} - \frac{2,6}{2} = -4,3876 \text{ kN}$$

$$V_{12} = -\frac{3,8644 - 4,9598}{6} + \frac{1,6}{2} = 3,1826 \text{ kN}$$

$$V_{21} = -\frac{3,8644 - 4,9598}{6} - \frac{1,6}{2} = -2,8174 \text{ kN}$$

$$V_{34} = V_{43} = \frac{5,8876}{4} = 1,4719 \text{ kN}$$

$$V_{56} = V_{65} = \frac{5,3818}{4} = 1,3455 \text{ kN}$$

Con los valores obtenidos graficamos el diagrama de fuerza cortante, agregando en los tramos cargados el efecto de dichas cargas.

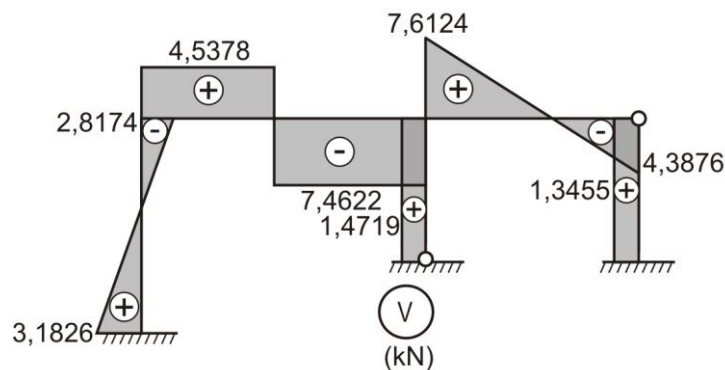


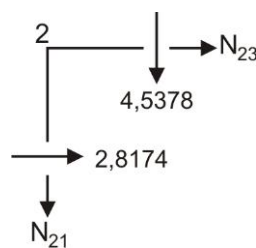
DIAGRAMA DE FUERZA AXIAL:

Analizamos el equilibrio de cada nudo, determinando las fuerzas axiales en las barras.

NUDO 2:

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad N_{23} = -2,8174 \text{ kN (COMPRESION)}$$

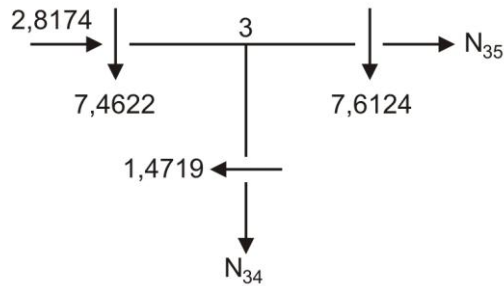
$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad N_{21} = -4,5378 \text{ kN (COMPRESION)}$$



NUDO 3:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_{35} + 2,8174 - 1,4719 = 0 \quad \therefore N_{35} = -1,3455 \text{ kN (COMPRESION)}$$

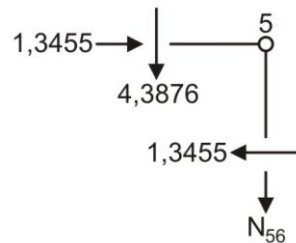
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -N_{34} - 7,4622 - 7,6124 = 0 \quad \therefore N_{34} = -15,0746 \text{ kN (COMPRESION)}$$



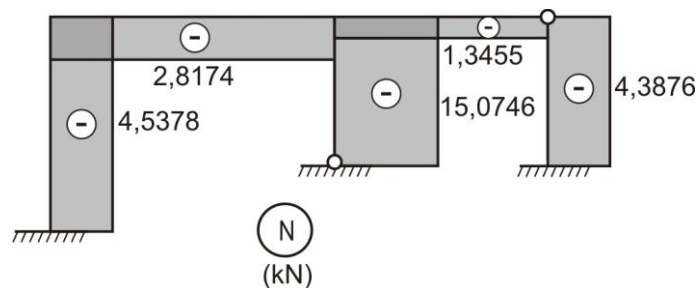
NUDO 5:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow 1,3455 - 1,3455 = 0 \quad (\text{OK})$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -N_{56} - 4,3876 = 0 \quad \therefore N_{56} = -4,3876 \text{ kN (COMPRESION)}$$



Con los valores obtenidos, graficamos el diagrama de fuerza axial.



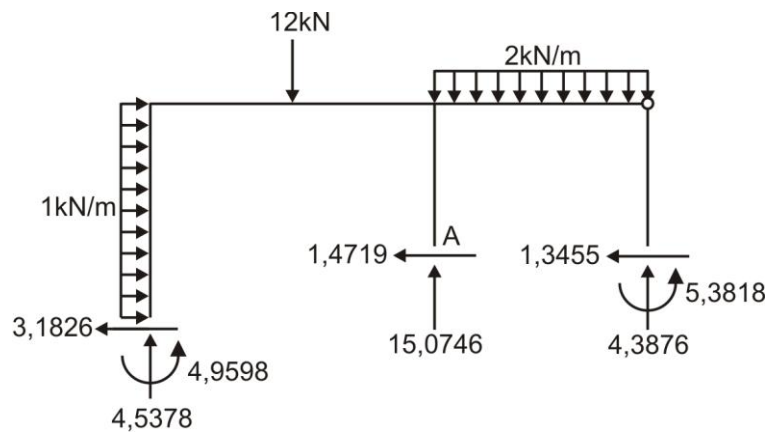
COMPROBACION DE EQUILIBRIO TOTAL:

Analizamos el equilibrio de todo el pórtico, utilizando el DCL de la estructura.

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -3,1826 + 1(6) - 1,4719 - 1,3455 = 0 \quad (\text{OK})$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 4,5378 - 12 + 15,0746 - 2(6) + 4,3876 = 0 \quad (\text{OK})$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 4,3876(6) + 5,3818 - 2(6)(3) + 12(4) - 1(6)(1) + 4,9598 - 3,1826(2) - 4,5378(8) \approx 0 \quad (\text{OK})$$

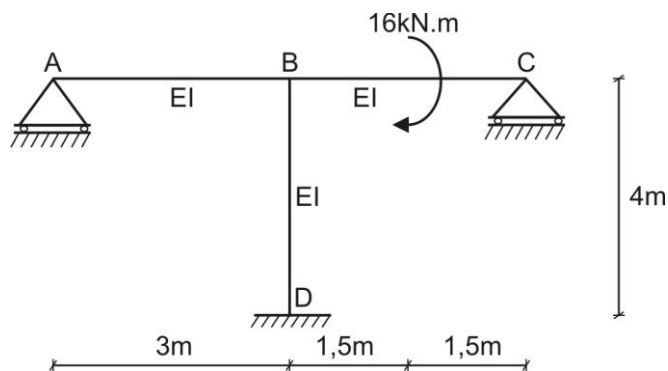




EVALUACIÓN	EXAMEN FINAL	SEM. ACADÉMICO	2010 – II
CURSO	RESISTENCIA DE MATERIALES II	SECCIÓN	30F
PROFESOR	Ph.D. GENNER VILLARREAL CASTRO	DURACIÓN	90m
ESCUELA	INGENIERIA CIVIL	CICLO	VI

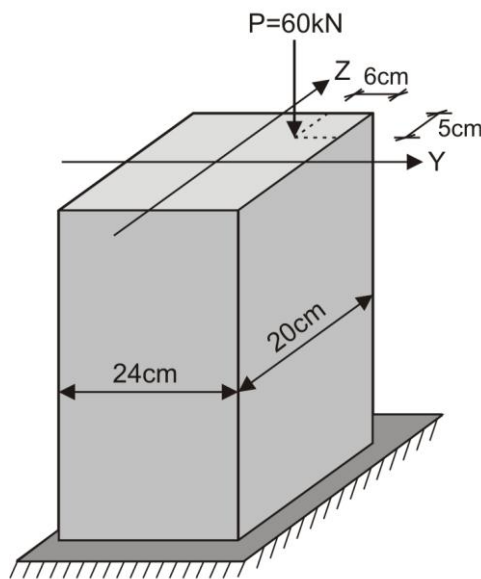
1. METODO DE LAS FUERZAS. Resolver el pórtico mostrado en la figura y graficar sus diagramas de fuerza axial, fuerza cortante y momento flector.

..... (10 puntos)



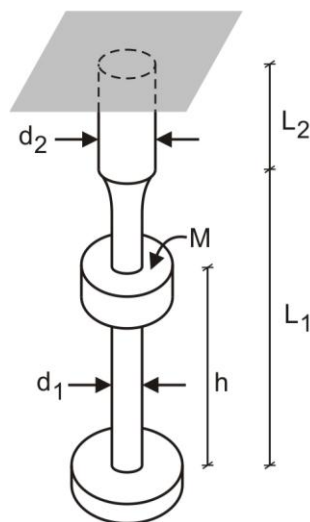
2. RESISTENCIA COMPUESTA. Determinar los esfuerzos normales máximo $\sigma_{\text{máx}}$ y mínimo $\sigma_{\text{mín}}$, así como la posición del eje neutro en la sección más peligrosa.

..... (5 puntos)



3. CARGAS DE IMPACTO. Un collar deslizante de masa M cae desde una altura h sobre el extremo inferior de una barra no prismática, tal como se muestra en la figura. La parte superior de la barra tiene diámetro d_2 y la parte inferior tiene diámetro d_1 . Las longitudes de las dos partes son L_2 y L_1 , respectivamente. El material de la barra permanece linealmente elástico con módulo de elasticidad E . Determinar la deflexión máxima δ y el esfuerzo de tracción máximo σ debidos al impacto, si las dimensiones y propiedades son las siguientes: $M = 5\text{kg}$, $h = 10\text{mm}$, $E = 200\text{GPa}$, $d_1 = 5\text{mm}$, $d_2 = 10\text{mm}$, $L_1 = 300\text{mm}$, $L_2 = 100\text{mm}$

..... (5 puntos)



FECHA	La Molina, 22 de Noviembre del 2010
-------	-------------------------------------

SOLUCIONARIO DE EXAMEN FINAL

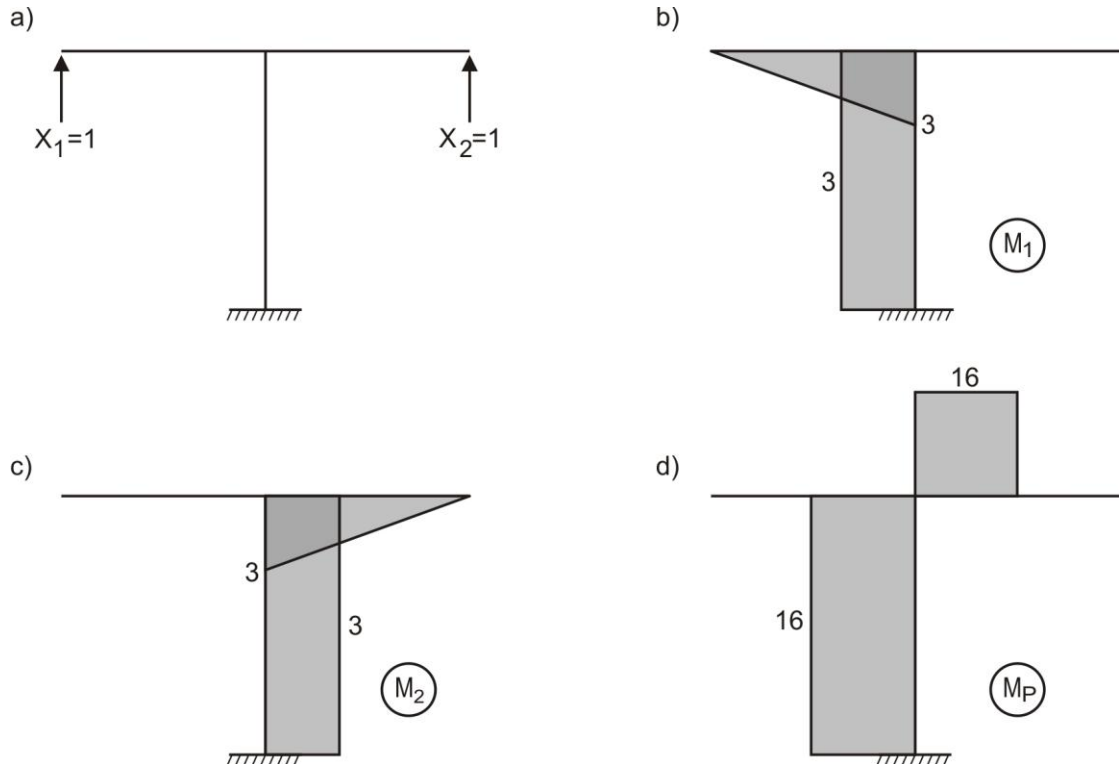
CICLO 2010 – II

1. Determinamos el grado de indeterminación del sistema.

$$G.I. = 3C - A = 3 \cdot 2 - 4 = 2$$

El pórtico es dos veces hiperestático.

Elegimos el sistema principal (figura a) y graficamos los diagramas de momentos unitarios (figuras b y c), así como de carga real (figura d)



El sistema de ecuaciones canónicas será:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} = 0$$

$$\delta_{12}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0$$

Siendo:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + 3 \cdot 4 \cdot 3 \right] = \frac{45}{EI}$$

$$\delta_{12} = -\frac{1}{EI} \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 = -\frac{36}{EI}$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + 3 \cdot 4 \cdot 3 \right] = \frac{45}{EI}$$

$$\Delta_{1P} = \frac{1}{EI} \cdot 3 \cdot 4 \cdot 16 = \frac{192}{EI}$$

$$\Delta_{2P} = -\frac{1,5}{6EI} [1 \cdot 6 \cdot 3 + 4 \cdot 16 \cdot 2,25 + 16 \cdot 1,5] - \frac{1}{EI} \cdot 3 \cdot 4 \cdot 16 = -\frac{246}{EI}$$

Reemplazamos valores:

$$\frac{45}{EI} X_1 - \frac{36}{EI} X_2 = -\frac{192}{EI}$$

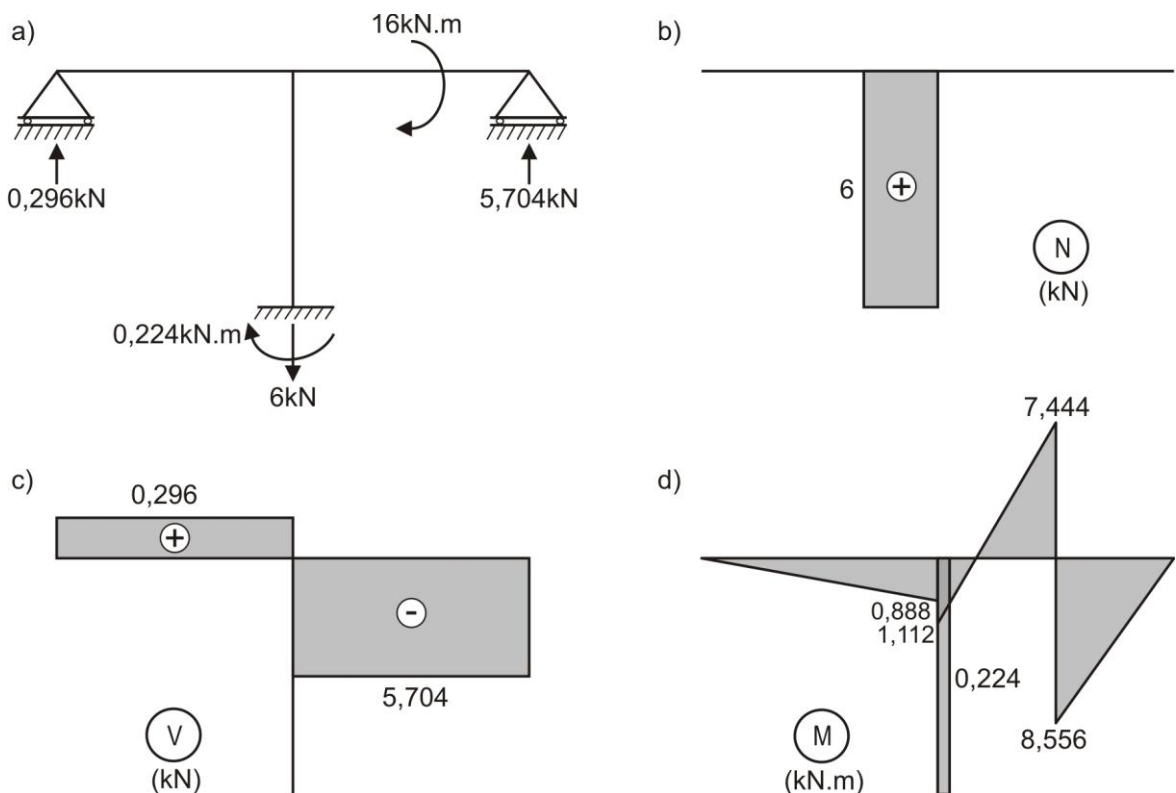
$$-\frac{36}{EI} X_1 + \frac{45}{EI} X_2 = \frac{246}{EI}$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones y obtenemos:

$$X_1 = V_A = 0,296 \text{ kN } \uparrow$$

$$X_2 = V_C = 5,704 \text{ kN } \uparrow$$

Con los valores obtenidos, esquematizamos las reacciones en los apoyos (figura a) y graficamos los diagramas de fuerza axial (figura b), fuerza cortante (figura c) y momento flector (figura d)



2. Calculamos las características geométricas de la sección transversal.

$$A = 24 \cdot 20 = 480 \text{ cm}^2$$

$$I_Y = \frac{24 \cdot 20^3}{12} = 16000 \text{ cm}^4$$

$$I_Z = \frac{20 \cdot 24^3}{12} = 23040 \text{ cm}^4$$

Los cuadrados de los radios de inercia son:

$$i_Y^2 = \frac{I_Y}{A} = \frac{16000}{480} = 33,333 \text{ cm}^2$$

$$i_Z^2 = \frac{I_Z}{A} = \frac{23040}{480} = 48 \text{ cm}^2$$

Las fuerzas internas que surgen en cualquier sección son:

$$N_x = -P$$

$$M_y = -P|e_z|$$

$$M_z = -P|e_y|$$

Donde, las coordenadas del polo (lugar de acción de la carga, es decir, punto C) son:

$$e_y = 6\text{cm}$$

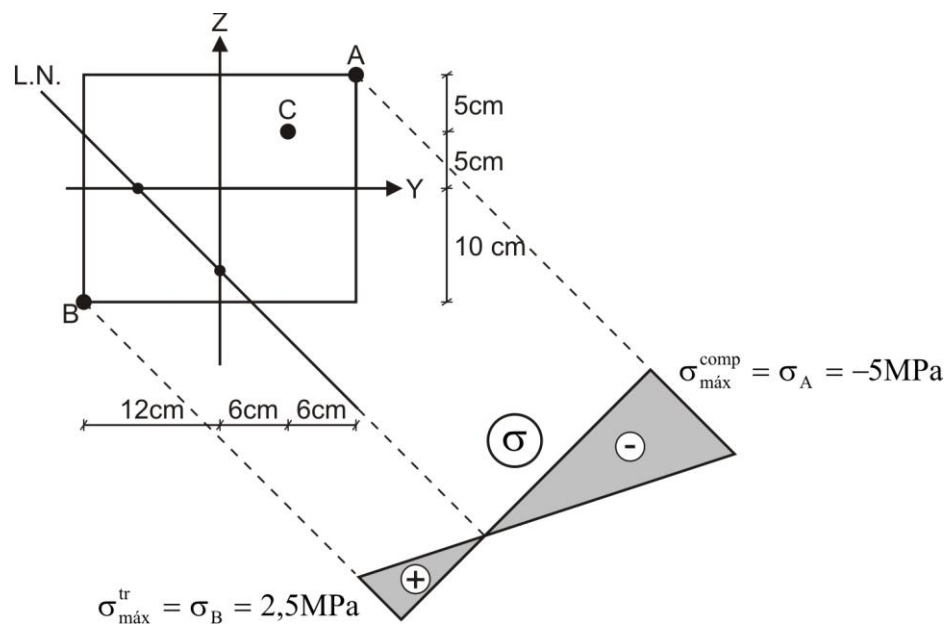
$$e_z = 5\text{cm}$$

Para determinar los puntos peligrosos de la sección, trazamos la línea neutra, calculando previamente los tramos de longitud a_y , a_z que intersecan a los ejes centrales principales.

$$a_y = -\frac{i_z^2}{e_y} = -\frac{48}{6} = -8\text{cm}$$

$$a_z = -\frac{i_y^2}{e_z} = -\frac{33,333}{5} = -6,667\text{cm}$$

Efectuando el trazo de la línea neutra, observamos, que los puntos más alejados son el punto A ($y_A = 12\text{cm}$, $z_A = 10\text{cm}$), en el cual surgen los esfuerzos de compresión y el punto B ($y_B = -12\text{cm}$, $z_B = -10\text{cm}$), en el cual surgen los esfuerzos de tracción.



$$\sigma_{\text{máx}}^{\text{tr}} = \sigma_B = \frac{N_x}{A} + \frac{M_y}{I_y} z_B + \frac{M_z}{I_z} y_B$$

$$\sigma_{\text{máx}}^{\text{tr}} = \sigma_B = -\frac{60 \cdot 10^3}{480 \cdot 10^{-4}} - \frac{60 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 10^{-2}}{16000 \cdot 10^{-8}} (-10 \cdot 10^{-2}) - \frac{60 \cdot 10^3 \cdot 6 \cdot 10^{-2}}{23040 \cdot 10^{-8}} (-12 \cdot 10^{-2}) = 2,5 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

$$\sigma_{\text{máx}}^{\text{tr}} = \sigma_B = 2,5\text{MPa}$$

$$\sigma_{\text{máx}}^{\text{comp}} = \sigma_A = \frac{N_X}{A} + \frac{M_Y}{I_Y} z_A + \frac{M_Z}{I_Z} y_A$$

$$\sigma_{\text{máx}}^{\text{comp}} = \sigma_A = -\frac{60 \cdot 10^3}{480 \cdot 10^{-4}} - \frac{60 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 10^{-2}}{16000 \cdot 10^{-8}} (10 \cdot 10^{-2}) - \frac{60 \cdot 10^3 \cdot 6 \cdot 10^{-2}}{23040 \cdot 10^{-8}} (12 \cdot 10^{-2}) = -5 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

$$\sigma_{\text{máx}}^{\text{comp}} = \sigma_A = -5 \text{ MPa}$$

3. Iniciamos calculando una rigidez equivalente k para la barra. Si una carga estática P_1 actúa en el extremo libre de la barra, el alargamiento resultante δ_1 será:

$$\delta_1 = \frac{P_1 L_1}{EA_1} + \frac{P_1 L_2}{EA_2} = \frac{P_1}{E} \left(\frac{L_1 A_2 + L_2 A_1}{A_1 A_2} \right)$$

Además:

$$k = \frac{P_1}{\delta_1} = \frac{EA_1 A_2}{L_1 A_2 + L_2 A_1} = \frac{200 \cdot 10^9 \cdot (\pi/4) \cdot 5^2 \cdot 10^{-6} \cdot (\pi/4) \cdot 10^2 \cdot 10^{-6}}{300 \cdot 10^{-3} \cdot (\pi/4) \cdot 10^2 \cdot 10^{-6} + 100 \cdot 10^{-3} \cdot (\pi/4) \cdot 5^2 \cdot 10^{-6}} = 12,08 \text{ MN/m}$$

Luego:

$$\delta_{\text{est}} = \frac{W}{k} = \frac{Mg}{k} = \frac{5,9,81}{12,08 \cdot 10^6} = 4,06 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 0,00406 \text{ mm}$$

En consecuencia:

$$\delta = \delta_{\text{est}} + \sqrt{\delta_{\text{est}}^2 + 2h\delta_{\text{est}}} = 0,00406 + \sqrt{0,00406^2 + 2 \cdot 10 \cdot 0,00406} = 0,289 \text{ mm}$$

La carga estática P que producirá la misma deflexión δ es:

$$P = k\delta = 12,08 \cdot 10^6 \cdot 0,289 \cdot 10^{-3} = 3491,12 \text{ N}$$

Por lo tanto, el esfuerzo máximo será:

$$\sigma = \frac{P}{A_1} = \frac{3491,12}{(\pi/4) \cdot 5^2 \cdot 10^{-6}} = 177,8 \text{ MPa}$$

BIBLIOGRAFIA

1. **Gere James – Timoshenko Stephen.** Mecánica de materiales. Grupo Editorial Iberoamericana. México, 1986. – 825p.
2. **Miroliubov I.N. y otros.** Problemas de resistencia de materiales. Editorial Escuela Superior. Moscú, 2005. – 396p.
3. **Nelson James – McCormac Jack.** Análisis de estructuras. Editorial Alfaomega. México, 2006. – 582p.
4. **Popov Egor.** Mecánica de sólidos. Pearson Educación. México, 2000. – 864p.
5. **Pytel Andrew – Singer Ferdinand.** Resistencia de materiales. Editorial Oxford. México, 2006. – 584p.
6. **Uribe Escamilla Jairo.** Análisis de estructuras. Editorial Uniandes. Colombia, 2004. – 840p.
7. **Villarreal Castro Genner.** Interacción sísmica suelo-estructura en edificaciones con zapatas aisladas. Asamblea Nacional de Rectores. Lima, 2006. – 125p.
8. **Villarreal Castro Genner.** Análisis de estructuras con el programa LIRA 9.0. Lima, 2006. – 115p.
9. **Villarreal Castro Genner.** Interacción suelo-estructura en edificios altos. Asamblea Nacional de Rectores. Lima, 2007. – 142p.
10. **Villarreal Castro Genner.** Análisis estructural. Lima, 2008. – 335p.
11. **Villarreal Castro Genner – Oviedo Sarmiento Ricardo.** Edificaciones con disipadores de energía. Asamblea Nacional de Rectores. Lima, 2009. – 159p.
12. **Villarreal Castro Genner.** Resistencia de materiales. Lima, 2009. – 336p.
13. **Villarreal Castro Genner.** Estática: Problemas resueltos. Lima, 2011. – 227p.
14. **Villarreal Castro Genner.** Resistencia de materiales I: Prácticas y exámenes USMP. Lima, 2012. – 206p.
15. **Volmir A.** Problemas de resistencia de materiales. Editorial MIR. Moscú, 1986. – 478p.

INDICE

PROLOGO.....	02
PRACTICA CALIFICADA Nº 1.....	04
PRACTICA CALIFICADA Nº 2.....	38
EXAMEN PARCIAL.....	73
PRACTICA CALIFICADA Nº 3.....	101
PRACTICA CALIFICADA Nº 4.....	129
EXAMEN FINAL.....	165
BIBLIOGRAFIA.....	197