

# **MECANICA DE MATERIALES**

**PRACTICAS Y EXAMENES UPC**

---

**Ph.D. Genner Villarreal Castro**

**PREMIO NACIONAL ANR 2006, 2007, 2008**

Lima – Perú

2015

# **MECANICA DE MATERIALES Prácticas y Exámenes UPC**

**Primera Edición Marzo 2015**

Tiraje: 1000 ejemplares

Diagramación: Víctor Dionicio Torres

Carátula: Puente del Mileno Gateshead - Newcastle Inglaterra

Estilo: Roxana Villarreal Gonzáles

Autor – Editor:

© Ph.D. Genner Villarreal Castro

[www.gennervillarrealcastro.blogspot.com](http://www.gennervillarrealcastro.blogspot.com)

Pablo Picasso 567 Urb. El Bosque

Telf: 202946 / 950907260

Trujillo – Perú

Impresión:

Editora & Imprenta Gráfica Norte S.R.L.

[graficanorte@hotmail.com](mailto:graficanorte@hotmail.com)

Oswaldo Herculles 401 Urb. Los Granados

Telf: 402705 / 969960030

Trujillo – Perú

Marzo, 2015

©Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú N° 2015-01288

ISBN: 978-612-00-1833-0

Prohibida la reproducción total o parcial sin autorización del Autor.

La Mecánica de Materiales, es una ciencia sobre los métodos de cálculo a la resistencia, la rigidez y la estabilidad de los elementos estructurales. Se entiende por *resistencia* a la capacidad de oponerse a la rotura, *rigidez* a la capacidad de oponerse a la deformación y *estabilidad* a la capacidad de mantener su condición original de equilibrio.

Por lo general, el dictado de los cursos de Mecánica de Materiales, se centran en la descripción teórica y en la resolución de un escaso número de problemas, lo cual dificulta el proceso de aprendizaje, más aún tratándose de un curso eminentemente práctico y con una diversidad de problemas.

El presente libro nació, después de comprobar las grandes dificultades mostradas por los alumnos en la resolución de problemas aplicados en prácticas calificadas y exámenes.

Es por ello, que tomé el reto de escribir un libro, que haga más didáctico el proceso de estudio individual, resolviendo en forma seria y con el rigor científico todas las prácticas calificadas y exámenes aplicados por el autor en el período 2011-01 al 2013-01, correspondiente al curso Mecánica de Materiales dictado en la Carrera de Ingeniería Civil de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas; propiciando, de esta manera, una forma más amena de convivencia con la Mecánica de Materiales y conducente a un mejor dominio de la materia.

Este libro es un complemento perfecto a los editados anteriormente por el autor, denominados Resistencia de Materiales, Resistencia de Materiales I Prácticas y Exámenes USMP, Resistencia de Materiales II Prácticas y Exámenes USMP, los cuales se usan como textos base en las Carreras de Ingeniería Civil de muchas Universidades nacionales y extranjeras, así como en Centros de Investigación en Ingeniería Estructural.

Como base se tomó la experiencia adquirida en el dictado de los cursos de Mecánica de Materiales y Resistencia de Materiales en la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas, Universidad de San Martín de Porres y Universidad Privada Antenor Orrego.

En mi modesta opinión, el presente libro es único en su género, tanto en la forma de resolución de problemas como en su contenido, que no es una repetición de otros textos, editados anteriormente.

El presente libro consta de 3 Prácticas Calificadas, Examen Parcial y Examen Final por cada ciclo, siendo un total de 5 ciclos.

En la Práctica Calificada N° 1 se evalúa el tema tracción y compresión.

En el Examen Parcial se evalúan los temas esfuerzo y deformación, torsión.

En la Práctica Calificada N° 2 se evalúa el tema esfuerzos en vigas.

En la Práctica Calificada N° 3 se evalúa el tema deformación en vigas.

En el Examen Final se evalúa el tema métodos energéticos.

El presente texto está dirigido a estudiantes de ingeniería civil y docentes que imparten el curso compacto de Mecánica de Materiales; así como a ingenieros civiles, postgraduandos e investigadores en el área de estructuras.

Este libro se lo dedico a mis alumnos de Mecánica de Materiales y Resistencia de Materiales de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas, Universidad de San Martín de Porres y Universidad Privada Antenor Orrego; quienes con sus consultas me motivaron a escribir el presente libro y con su energía renovada me permitieron culminar con éxito este trabajo.

Con todo mi amor, dedico el presente libro a mi linda esposa, la Lic. Brenda de Jesús Crisanto Panta, una extraordinaria mujer, quien con su inteligencia, comprensión, amor y dulzura, se ha convertido en mi soporte para cumplir con mi filosofía de vida “la educación es universal y debe estar al alcance de todos”, pidiendo a Dios bendiga por siempre nuestra unión.

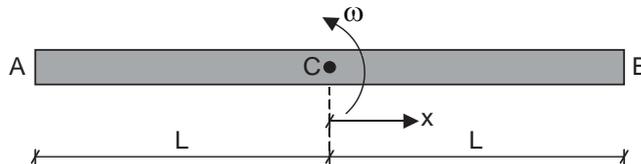
Ph.D. Genner Villarreal Castro  
genner\_vc@rambler.ru

Lima, Marzo del 2015

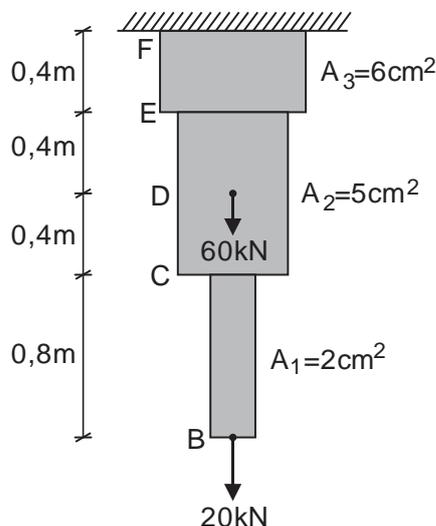
**MECANICA DE MATERIALES (CI80)**  
**PRACTICA CALIFICADA N° 1**  
**CICLO 2011-01**

**Profesor** : Ph.D. Genner Villarreal Castro  
**Sección** : CI51  
**Duración** : 170 minutos

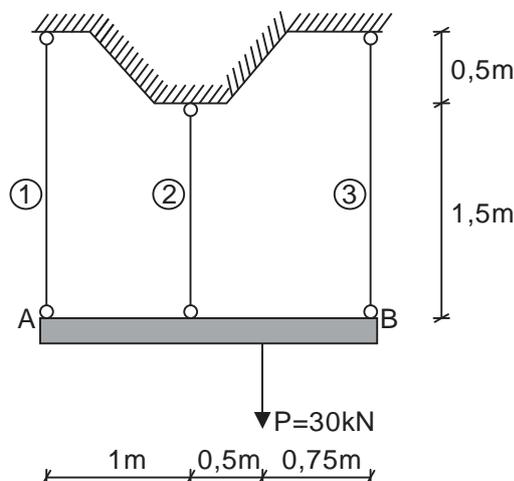
- Se somete a tracción en una máquina de ensayo a una barra de acero de sección transversal circular, cuyo diámetro es de 30mm por acción de una fuerza de 125kN. Con la ayuda de un tensómetro de base 50mm se midió el alargamiento total de la barra, resultando ser 0,043mm; en cambio su diámetro disminuyó en 0,007mm. Determinar el módulo de elasticidad del material y su coeficiente de Poisson. (2 puntos)
- Una barra circular ACB cuya longitud total es  $2L$  gira alrededor de un eje que pasa a través de su punto medio C con velocidad angular constante  $\omega$  (radianes por segundo). El material de la barra tiene un peso específico  $\gamma$ . Obtener una fórmula para el esfuerzo normal de tracción  $\sigma_x$  en la barra como una función de la distancia "x" desde el punto C. ¿Cuál es el esfuerzo de tracción máximo? (4 puntos)



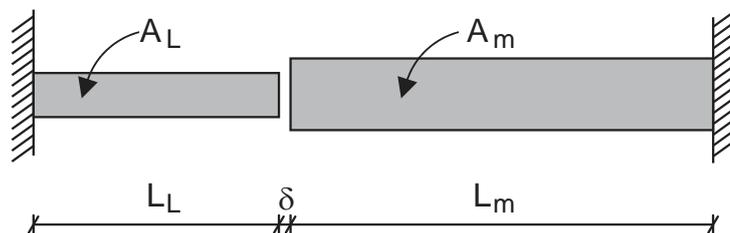
- Para la barra escalonada mostrada en la figura, se pide graficar los diagramas de fuerza axial o normal, esfuerzo normal y determinar el alargamiento absoluto de la barra, así como la energía potencial de deformación. Considerar  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$  (3 puntos)



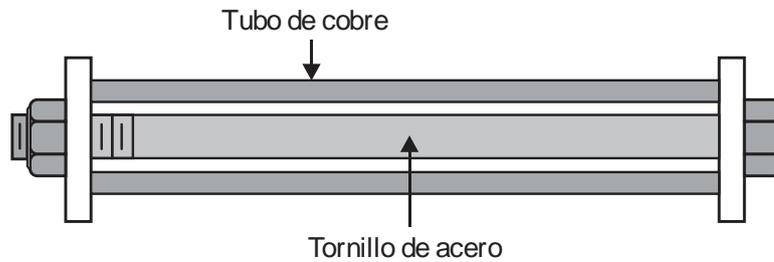
4. Una barra sólida AB es sostenida por tres cables, tal como se muestra en la figura. El cable 1 es de cobre y sección  $1\text{cm}^2$ ; el cable 2 es de acero y sección  $1,5\text{cm}^2$  y el cable 3 es de aluminio y sección  $2\text{cm}^2$ . Determinar los esfuerzos en los cables, si  $E_a = 2 \cdot 10^5 \text{MPa}$ ;  $E_c = 10^5 \text{MPa}$ ;  $E_{al} = 0,7 \cdot 10^5 \text{MPa}$  (3 puntos)



5. El elemento térmico bimetalítico mostrado en la figura está construido de una barra de latón (longitud  $L_L = 0,75\text{plg}$  y área de sección transversal  $A_L = 0,10\text{plg}^2$ ) y de una barra de magnesio (longitud  $L_m = 1,30\text{plg}$  y área de sección transversal  $A_m = 0,20\text{plg}^2$ ). Las barras se disponen de tal modo que la separación entre sus extremos libres es  $\delta = 0,0040\text{plg}$  a temperatura ambiente. Considerar las siguientes propiedades de los materiales:  $\alpha_L = 10 \cdot 10^{-6}/^\circ\text{F}$ ,  $\alpha_m = 14,5 \cdot 10^{-6}/^\circ\text{F}$ ,  $E_L = 15 \cdot 10^6 \text{psi}$  y  $E_m = 6,5 \cdot 10^6 \text{psi}$ . Se pide calcular:
- El incremento de temperatura  $\Delta T$  (sobre la temperatura ambiente) para el cual las barras hacen contacto. (1 punto)
  - El esfuerzo  $\sigma$  en la barra de magnesio cuando el incremento de temperatura  $\Delta T$  es de  $300^\circ\text{F}$  (3 puntos)



6. ¿Qué esfuerzos se producirán en un tornillo de acero y un tubo de cobre, debido a un cuarto de vuelta de la tuerca, si la longitud del tornillo es  $L = 30plg$ , el paso de la rosca es  $p = \frac{1}{8}plg$ , el área de la sección transversal del tornillo es  $A_a = plg^2$  y el área de la sección transversal del tubo es  $A_c = 2plg^2$ ? Considerar  $E_a = 30 \cdot 10^6 \text{ psi}$  y  $E_c = 16 \cdot 10^6 \text{ psi}$ . Nota: el paso de la rosca es la distancia que avanza la tuerca al girar una vuelta completa. (4 puntos)



Monterrico, 07 de abril de 2011

# SOLUCIONARIO DE PRÁCTICA CALIFICADA Nº 1

## CICLO 2011-01

1. Calculamos la deformación longitudinal:

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L} = \frac{0,043}{50} = 8,6 \cdot 10^{-4}$$

Ahora, calculamos la deformación transversal:

$$\varepsilon' = \frac{\Delta d}{d} = \frac{-0,007}{30} = -2,33 \cdot 10^{-4}$$

El coeficiente de Poisson será:

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right| = \left| \frac{-2,33 \cdot 10^{-4}}{8,6 \cdot 10^{-4}} \right| = 0,271$$

Luego, determinamos el módulo de elasticidad:

$$\sigma = \frac{P}{A} = E\varepsilon \quad \Rightarrow \quad E = \frac{P}{\varepsilon A} = \frac{125 \cdot 10^3}{8,6 \cdot 10^{-4} \cdot (\pi/4) \cdot 30^2 \cdot 10^{-6}} = 2,056 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$$

$$E = 2,056 \cdot 10^5 \text{ MPa (ACERO)}$$

2. Consideremos un elemento de la barra de longitud  $d\xi$  situado a la distancia  $\xi$  desde el eje de rotación. La fuerza centrífuga de este elemento debido a su movimiento en una trayectoria circular de radio  $\xi$  es:

$$dF = \frac{\gamma A d\xi}{g} \cdot \omega^2 \xi$$

Donde:

$$\frac{\gamma A d\xi}{g} \quad - \text{ masa del elemento}$$

$$\omega^2 \xi \quad - \text{ aceleración radial}$$

Esta fuerza actúa radialmente hacia fuera a lo largo del eje de la barra.

La tracción total  $P_x$  en una sección transversal  $mn$  definida por la distancia "x" desde el eje de giro, es la suma de todas estas fuerzas centrífugas entre  $\xi = x$  y  $\xi = L$ . Así:

$$P_x = \int_x^L \frac{\gamma A d\xi}{g} \cdot \omega^2 \xi = \frac{\gamma A \omega^2}{2g} (L^2 - x^2)$$

En consecuencia:

$$\sigma_x = \frac{P_x}{A} = \frac{\gamma \omega^2}{2g} (L^2 - x^2)$$

La fuerza de tracción es máxima en el punto medio de la barra ( $x = 0$ ), donde:

$$P_{\text{máx}} = \frac{\gamma A \omega^2 L^2}{2g}$$

Luego, el esfuerzo máximo será:

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{P_{\text{máx}}}{A} = \frac{\gamma \omega^2 L^2}{2g}$$

3. Determinamos los esfuerzos:

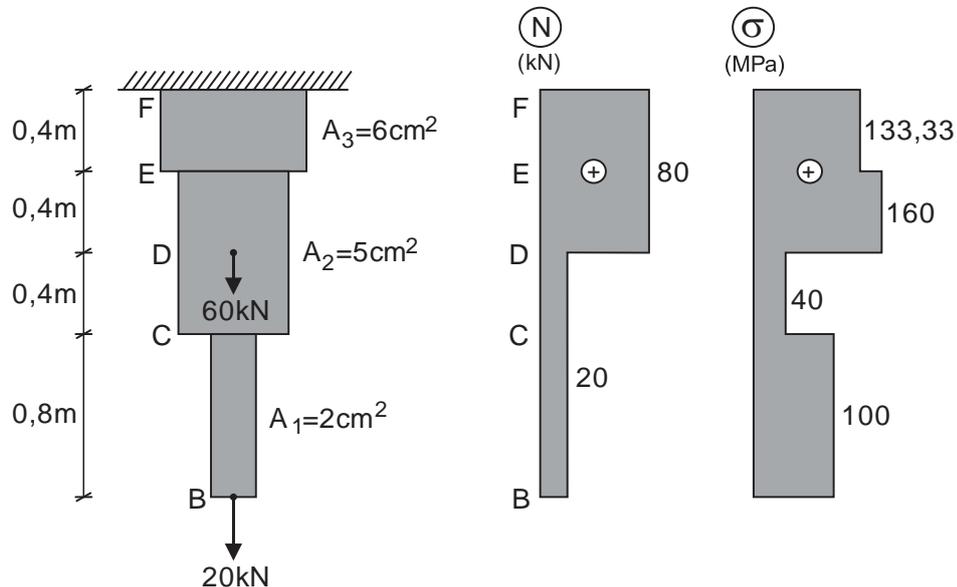
$$\sigma_{BC} = \frac{20 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{-4}} = 100 \text{MPa}$$

$$\sigma_{CD} = \frac{20 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^{-4}} = 40 \text{MPa}$$

$$\sigma_{DE} = \frac{80 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^{-4}} = 160 \text{MPa}$$

$$\sigma_{EF} = \frac{80 \cdot 10^3}{6 \cdot 10^{-4}} = 133,33 \text{MPa}$$

Graficamos los diagramas de fuerza axial o normal y de esfuerzos normales, tal como se muestra en la figura.



Calculamos el alargamiento de la barra:

$$\delta = \sum_{i=1}^4 \frac{P_i L_i}{EA_i} = \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 0,8}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 10^{-4}} + \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 0,4}{2 \cdot 10^{11} \cdot 5 \cdot 10^{-4}} + \frac{80 \cdot 10^3 \cdot 0,4}{2 \cdot 10^{11} \cdot 5 \cdot 10^{-4}} + \frac{80 \cdot 10^3 \cdot 0,4}{2 \cdot 10^{11} \cdot 6 \cdot 10^{-4}} = 10,67 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

$$\delta = 1,067 \text{ mm}$$

Determinamos la energía potencial de deformación:

$$U = \sum_{i=1}^4 \frac{P_i^2 L_i}{2EA_i} = \frac{20^2 \cdot 10^6 \cdot 0,8}{2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 10^{-4}} + \frac{20^2 \cdot 10^6 \cdot 0,4}{2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 5 \cdot 10^{-4}} + \frac{80^2 \cdot 10^6 \cdot 0,4}{2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 5 \cdot 10^{-4}} + \frac{80^2 \cdot 10^6 \cdot 0,4}{2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 6 \cdot 10^{-4}} = 28,27 \text{ N.m}$$

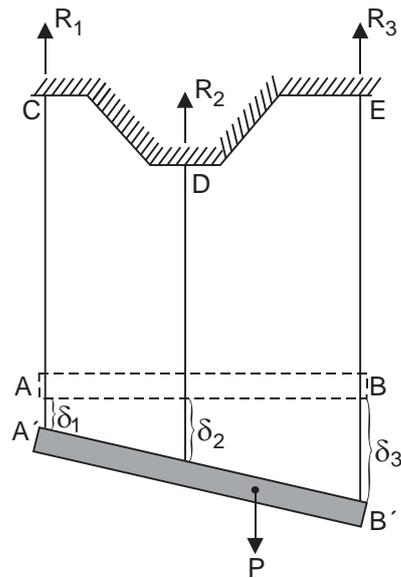
$$U = 28,27 \text{ J}$$

4. Supongamos que todas las reacciones son de tracción y que la barra después de la acción de la fuerza P ocupa la posición A'B'

Luego:

$$\sum M_C = 0 \quad \Rightarrow \quad R_2 + 2,25R_3 = 1,5P \quad \dots\dots\dots (a)$$

$$\sum M_E = 0 \quad \Rightarrow \quad 2,25R_1 + 1,25R_2 = 0,75P \quad \dots\dots\dots (b)$$



Del diagrama de desplazamientos se tiene:

$$\frac{\delta_2 - \delta_1}{1} = \frac{\delta_3 - \delta_1}{2,25}$$

$$1,25\delta_1 - 2,25\delta_2 + \delta_3 = 0$$

Reemplazamos valores:

$$1,25 \left[ \frac{R_1 \cdot 2}{10^5 \cdot 10^6 \cdot 10^{-4}} \right] - 2,25 \left[ \frac{R_2 \cdot 1,5}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 1,5 \cdot 10^{-4}} \right] + \left[ \frac{R_3 \cdot 2}{0,7 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^{-4}} \right] = 0$$

De donde:

$$2,5R_1 - 1,125R_2 + 1,43R_3 = 0 \quad \dots\dots\dots (c)$$

Resolvemos (a), (b) y (c), obteniendo:

$$R_1 = 0,018P = 0,54\text{kN}$$

$$R_2 = 0,568P = 17,04\text{kN}$$

$$R_3 = 0,414P = 12,42\text{kN}$$

En consecuencia, los esfuerzos serán:

$$\sigma_1 = \frac{R_1}{A_1} = \frac{0,54 \cdot 10^3}{10^{-4}} = 5,4\text{MPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{R_2}{A_2} = \frac{17,04 \cdot 10^3}{1,5 \cdot 10^{-4}} = 113,6\text{MPa}$$

$$\sigma_3 = \frac{R_3}{A_3} = \frac{12,42 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{-4}} = 62,1\text{MPa}$$

5. a) Para que las barras hagan contacto debe cumplirse:

$$\alpha_L L_L (\Delta T) + \alpha_m L_m (\Delta T) = \delta \quad \Rightarrow \quad \Delta T = \frac{\delta}{\alpha_L L_L + \alpha_m L_m}$$

$$\Delta T = \frac{0,0040}{10 \cdot 10^{-6} \cdot 0,75 + 14,5 \cdot 10^{-6} \cdot 1,30} = 151,8^\circ \text{F}$$

b) Superada la temperatura  $151,8^\circ \text{F}$ , será necesario que surja una fuerza de compresión  $P$  en los empotramientos, que impidan la dilatación posterior, cumpliéndose:

$$\delta_p = \delta_t \quad \Rightarrow \quad \frac{PL_L}{E_L A_L} + \frac{PL_m}{E_m A_m} = (\alpha_L L_L + \alpha_m L_m)(300 - 151,8)$$

$$P \left( \frac{E_m A_m L_L + E_L A_L L_m}{E_m A_m E_L A_L} \right) = (\alpha_L L_L + \alpha_m L_m)(300 - 151,8)$$

De donde:

$$\sigma = \sigma_m = \frac{E_m E_L A_L (\alpha_L L_L + \alpha_m L_m)(148,2)}{E_m A_m L_L + E_L A_L L_m}$$

$$\sigma = \frac{6,5 \cdot 10^6 \cdot 15 \cdot 10^6 \cdot 0,10 \cdot (10 \cdot 10^{-6} \cdot 0,75 + 14,5 \cdot 10^{-6} \cdot 1,30)(148,2)}{6,5 \cdot 10^6 \cdot 0,20 \cdot 0,75 + 15 \cdot 10^6 \cdot 0,10 \cdot 1,30}$$

$$\sigma = 13017 \text{psi} = 13,017 \text{ksi (COMPRESION)}$$

6. Como el paso de rosca es  $p = \frac{1}{8} \text{plg}$ , entonces al ajustar dando un cuarto de vuelta, sufrirán un

acortamiento  $\delta = \frac{1}{4} p = \frac{1}{32} \text{plg}$ ; oponiéndose el tornillo de acero por ser más resistente, siendo su

fuerza de tracción y el tubo de cobre de compresión, por ser menos resistente.

Luego:

$$\delta_a + \delta_c = \delta \quad \Rightarrow \quad \frac{P_a L}{E_a A_a} + \frac{P_c L}{E_c A_c} = \frac{1}{32}$$

Además:

$$P_a = P_c$$

Entonces se tendrá:

$$P_a L \left( \frac{1}{E_a A_a} + \frac{1}{E_c A_c} \right) = \frac{1}{32} \quad \Rightarrow \quad P_a = \frac{E_a A_a E_c A_c}{32L(E_a A_a + E_c A_c)}$$

$$P_a = \frac{30 \cdot 10^6 \cdot 1 \cdot 16 \cdot 10^6 \cdot 2}{32 \cdot 30(30 \cdot 10^6 \cdot 1 + 16 \cdot 10^6 \cdot 2)} = 16129,03 \text{lb}$$

En consecuencia:

$$\sigma_a = \frac{P_a}{A_a} = 16129,03 \text{psi} = 16,129 \text{ksi (TRACCION)}$$

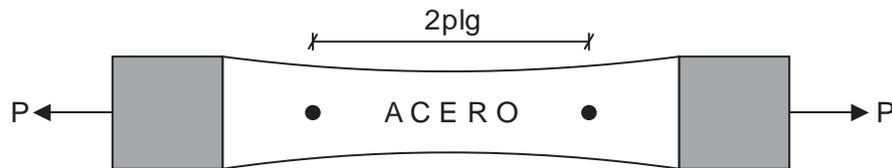
$$\sigma_c = \frac{P_c}{A_c} = 8064,51 \text{psi} = 8,064 \text{ksi (COMPRESION)}$$

**MECANICA DE MATERIALES (CI80)**  
**PRACTICA CALIFICADA N° 1**  
**CICLO 2011-02**

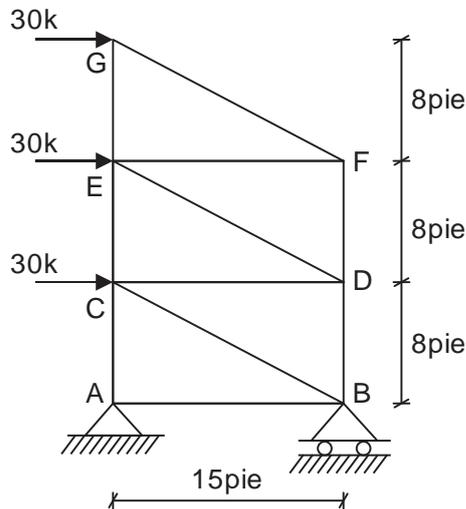
**Profesor : Ph.D. Genner Villarreal Castro**  
**Sección : CI51**  
**Duración : 170 minutos**

1. Responder las siguientes preguntas, justificando sus respuestas:

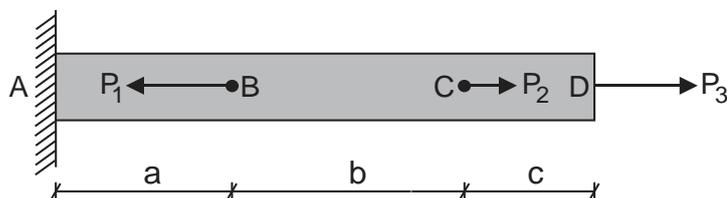
- a) ¿El módulo de elasticidad del concreto depende de su resistencia a la compresión? (1 punto)
- b) Durante una prueba de tracción de una probeta de acero, el extensómetro registra un alargamiento de 0,00141plg en una longitud calibrada de 2plg. Suponga que el acero queda sometido a esfuerzos inferiores al límite proporcional y que el módulo de elasticidad es  $E = 30 \cdot 10^6$  psi. Determine el esfuerzo normal máximo en la probeta. (1 punto)



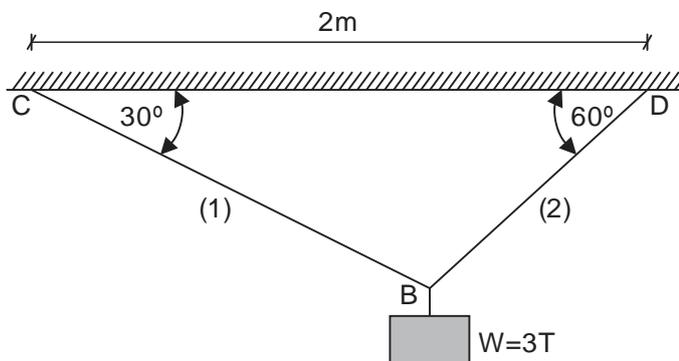
- c) Determine el área mínima admisible de la barra CD de la armadura mostrada en la figura, si el esfuerzo normal admisible no debe de pasar de 20ksi para las cargas mostradas. (1 punto)



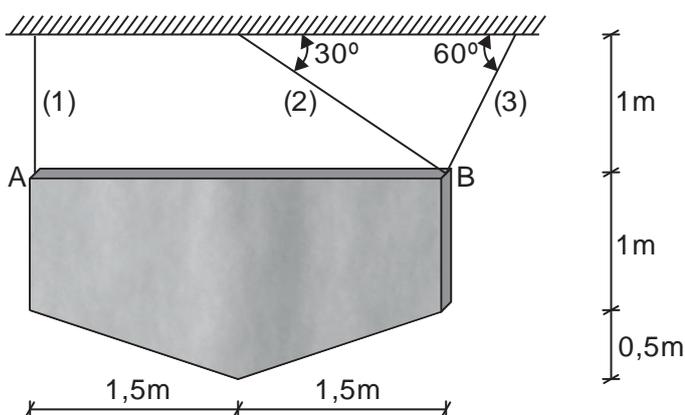
- d) Para el sistema que se muestra en la figura, determinar la fuerza  $P_1$  en función de las otras fuerzas, tal que el extremo D no se mueva horizontalmente cuando se aplican las cargas. Considerar que la rigidez es EA para toda la barra. (1 punto)



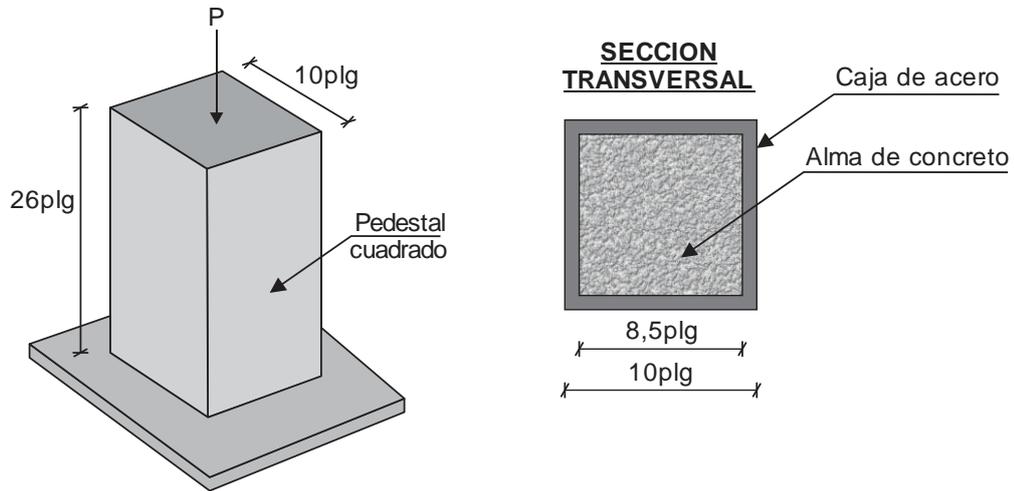
2. Se tiene un peso de  $3T$  sostenido por los cables de acero (1) y (2), cuyos módulos de elasticidad es  $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kgf/cm}^2$  y áreas de sección transversal iguales a  $1,27 \text{ cm}^2$ . Se pide determinar:
- Las fuerzas internas en los cables (1 punto)
  - Las deformaciones longitudinales en los cables (1) y (2) (1 punto)
  - Los desplazamientos horizontal y vertical del nudo B (1 punto)



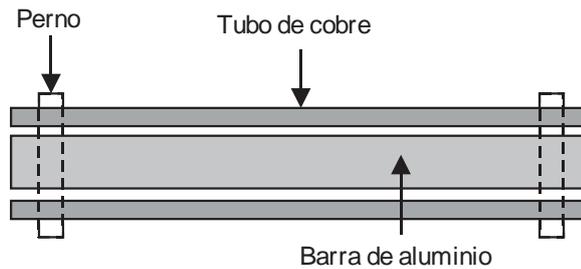
3. Para el cartel publicitario de madera mostrado en la figura, cuyo espesor es constante e igual a  $15 \text{ cm}$  y peso específico de  $850 \text{ kgf/m}^3$ , se pide:
- Determinar las tensiones en los cables (1.5 puntos)
  - Diseñar los cables por esfuerzo simple, teniendo en cuenta los diámetros comerciales de  $6 \text{ mm}$ ,  $\frac{1}{4}''$ ,  $8 \text{ mm}$ ,  $\frac{3}{8}''$ ,  $12 \text{ mm}$ ,  $\frac{1}{2}''$ ,  $\frac{5}{8}''$ ,  $\frac{3}{4}''$  y  $1''$ , factor de seguridad  $n = 2$  y esfuerzo de fluencia  $\sigma_y = 4200 \text{ kgf/cm}^2$  (1.5 puntos)



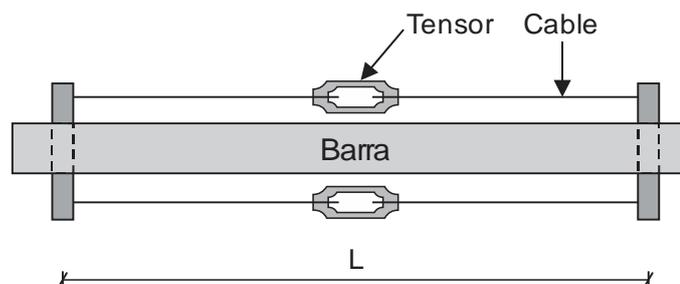
4. Un pedestal cuadrado de concreto de  $26 \text{ plg}$  de altura está formado por una caja de acero llena de concreto. La dimensión exterior de la caja es  $10 \text{ plg}$  y la interior es  $8,5 \text{ plg}$ . Suponga que los esfuerzos del acero y concreto se distribuyen uniformemente sobre sus respectivas áreas. Considerar  $E_c = 3000 \text{ ksi}$  y  $E_a = 30000 \text{ ksi}$
- ¿Qué fracción de la carga toma el área de acero? (1.5 puntos)
  - Si la carga  $P$  de compresión es  $100 \text{ k}$  ¿Cuáles son los esfuerzos en el acero y el concreto? y ¿Cuál es el acortamiento del pedestal? (1.5 puntos)



5. Una barra circular maciza de aluminio se introduce en un tubo de cobre de la misma longitud. El diámetro exterior del tubo de cobre es  $2plg$ , el diámetro interior es  $1,80plg$  y el diámetro de la barra de aluminio es  $1,75plg$ . En cada extremo del ensamble se insertan, perpendicularmente al eje de la barra, dos pernos de  $\frac{1}{4}$ " de diámetro que atraviesan ambas barras. Determinar el esfuerzo cortante medio en los pernos si la temperatura aumenta  $40^\circ F$ . Considerar para el aluminio,  $E_{al} = 10 \cdot 10^6 \text{ psi}$  y  $\alpha_{al} = 13 \cdot 10^{-6} / ^\circ F$ ; para el cobre  $E_c = 17 \cdot 10^6 \text{ psi}$  y  $\alpha_c = 9,3 \cdot 10^{-6} / ^\circ F$  (4 puntos)



6. La barra mostrada en la figura tiene longitud  $L$ , módulo de elasticidad  $E_b$  y área de sección transversal  $A_b$ . Dos cables con tensores se fijan a pernos robustos que atraviesan los extremos de la barra. Cada cable tiene longitud  $L$ , módulo de elasticidad  $E_c$  y área de sección transversal  $A_c$ . El paso de las roscas de los tensores de doble acción es "p" (esto es, una vuelta del tensor acorta el cable en  $2p$ ). Obtener una fórmula para el número de vueltas "n" de cada tensor requeridas para presforzar la barra bajo un esfuerzo de compresión uniforme  $\sigma_0$  (3 puntos)



**SOLUCIONARIO DE PRÁCTICA CALIFICADA Nº 1**  
**CICLO 2011-02**

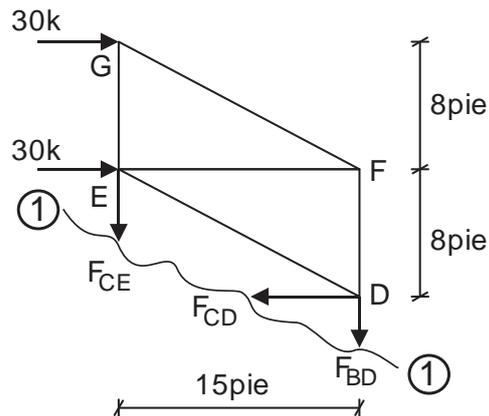
1. a) VERDADERO. Debido a que  $E_c = 15000\sqrt{f'_c}$ , siendo  $E_c$  el módulo de elasticidad del concreto y  $f'_c$  la resistencia a la compresión del concreto.

b) Sabemos que:

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{\delta}{L} = 30 \cdot 10^6 \cdot \frac{0,00141}{2} = 21,15 \text{ksi}$$

c) Efectuamos un corte 1-1 y analizamos el equilibrio de la parte superior de la armadura.

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow 30 + 30 - F_{CD} = 0 \quad \therefore \quad F_{CD} = 60 \text{k}$$



Luego:

$$\sigma_{CD} \leq [\sigma_{CD}] \Rightarrow \frac{60 \cdot 10^3}{A_{CD}} \leq 20 \cdot 10^3 \quad \therefore \quad A_{CD} \geq 3 \text{plg}^2$$

$$A_{CD}^{\text{mín}} = 3 \text{plg}^2$$

d) Por dato del problema  $\delta_D = 0$

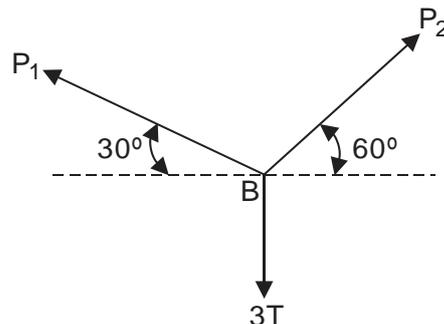
Luego:

$$\frac{P_3(a+b+c)}{EA} + \frac{P_2(a+b)}{EA} - \frac{P_1 a}{EA} = 0$$

De donde:

$$P_1 = \frac{P_2(a+b) + P_3(a+b+c)}{a} = \frac{(a+b)(P_2 + P_3) + P_3 c}{a} = (P_2 + P_3) \left(1 + \frac{b}{a}\right) + P_3 \left(\frac{c}{a}\right)$$

2. a) Determinamos las fuerzas internas en los cables:



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -P_1 \cos 30^\circ + P_2 \cos 60^\circ = 0 \quad \therefore P_2 = P_1 \sqrt{3}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow P_1 \sin 30^\circ + (P_1 \sqrt{3}) \sin 60^\circ = 3 \quad \therefore P_1 = 1,5T = 1500\text{kg}$$

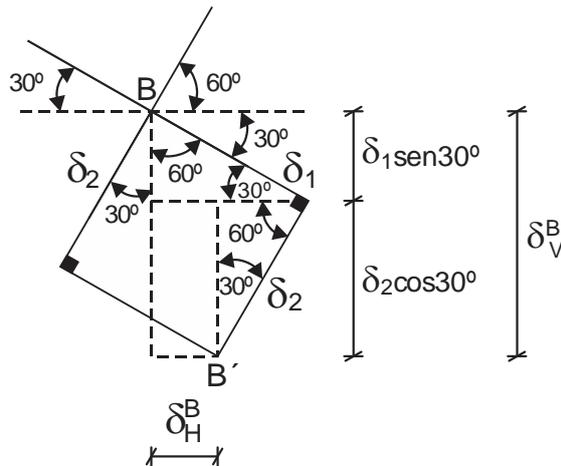
$$P_2 = 1,5\sqrt{3}T = 2598,07\text{kg}$$

b) Calculamos las deformaciones longitudinales en los cables (1) y (2)

$$\delta_1 = \frac{P_1 L_1}{EA} = \frac{1500 \cdot 173,2}{2,1 \cdot 10^6 \cdot 1,27} = 0,097\text{cm} = 0,97\text{mm}$$

$$\delta_2 = \frac{P_2 L_2}{EA} = \frac{2598,07 \cdot 100}{2,1 \cdot 10^6 \cdot 1,27} = 0,097\text{cm} = 0,97\text{mm}$$

c) Esquematizamos el diagrama de desplazamientos del nudo B



Calculamos los desplazamientos vertical y horizontal del nudo B

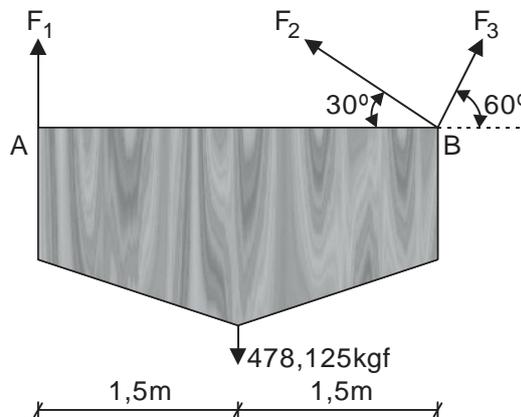
$$\delta_V^B = \delta_1 \sin 30^\circ + \delta_2 \cos 30^\circ = 0,97 \sin 30^\circ + 0,97 \cos 30^\circ = 1,325\text{mm} \downarrow$$

$$\delta_H^B = \delta_1 \cos 30^\circ - \delta_2 \sin 30^\circ = 0,97 \cos 30^\circ - 0,97 \sin 30^\circ = 0,355\text{mm} \rightarrow$$

3. a) Determinamos el peso del cartel.

$$P_{\text{cartel}} = 850 \cdot [3 \cdot 1,5 - 2 \cdot 0,5 \cdot (1,5 \cdot 0,5)] \cdot (0,15) = 478,125\text{kgf}$$

Efectuamos un corte en los cables y analizamos su equilibrio:



$$\sum M_B = 0 \Rightarrow -F_1(3) + 478,125(1,5) = 0 \quad \therefore F_1 = 239,062\text{kgf}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_3 \cos 60^\circ - F_2 \cos 30^\circ = 0 \quad \therefore F_3 = F_2 \sqrt{3}$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow 239,062 + F_2 \sin 30^\circ + (F_2 \sqrt{3}) \sin 60^\circ = 478,125$$

$$\therefore F_2 = 119,531 \text{kgf}$$

$$F_3 = 207,034 \text{kgf}$$

b) Determinamos el esfuerzo admisible y diseñamos los cables (1), (2) y (3)

$$[\sigma] = \frac{\sigma_y}{n} = \frac{4200}{2} = 2100 \text{kgf/cm}^2$$

CABLE 1:

$$\sigma_1 \leq [\sigma] \Rightarrow \frac{239,062}{A_1} \leq 2100 \quad \therefore A_1 \geq 0,114 \text{cm}^2$$

Elegimos diámetro de 6mm

CABLE 2:

$$\sigma_2 \leq [\sigma] \Rightarrow \frac{119,531}{A_2} \leq 2100 \quad \therefore A_2 \geq 0,057 \text{cm}^2$$

Elegimos diámetro de 6mm

CABLE 3:

$$\sigma_3 \leq [\sigma] \Rightarrow \frac{207,034}{A_3} \leq 2100 \quad \therefore A_3 \geq 0,098 \text{cm}^2$$

Elegimos diámetro de 6mm

4. a) Sabemos que:

$$P_a + P_c = P \quad \dots\dots\dots (a)$$

Además:

$$\delta_a = \delta_c \Rightarrow \frac{P_a L}{E_a A_a} = \frac{P_c L}{E_c A_c}$$

$$P_c = \frac{E_c A_c}{E_a A_a} P_a \quad \dots\dots\dots (b)$$

Reemplazamos (b) en (a):

$$P_a + \frac{E_c A_c}{E_a A_a} P_a = P \Rightarrow P_a = \frac{E_a A_a}{E_a A_a + E_c A_c} P$$

$$P_a = \frac{30 \cdot 10^6 \cdot 27,75}{30 \cdot 10^6 \cdot 27,75 + 3 \cdot 10^6 \cdot 8,5^2} (P) = 0,793P$$

Reemplazamos en (a) y obtenemos:

$$P_c = 0,207P$$

b) Determinamos los esfuerzos normales en el acero y el concreto.

$$\sigma_a = \frac{P_a}{A_a} = \frac{0,793 \cdot 100 \cdot 10^3}{10^2 - 8,5^2} = 2857,66 \text{psi} = 2,857 \text{ksi}$$

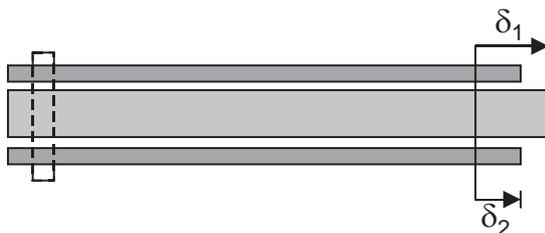
$$\sigma_c = \frac{P_c}{A_c} = \frac{0,207 \cdot 100 \cdot 10^3}{8,5^2} = 286,50 \text{psi} = 0,286 \text{ksi}$$

Calculamos el acortamiento del pedestal.

$$\delta = \frac{P_a L}{E_a A_a} = \frac{0,793 \cdot 100 \cdot 10^3 \cdot 26}{30 \cdot 10^6 \cdot 27,75} = 2,47 \cdot 10^{-3} \text{ plg}$$

5. Puesto que el tubo de cobre y la barra de aluminio son de diferentes materiales, sus alargamientos serían diferentes si se dilataran libremente. Sin embargo, se mantienen unidos por el ensamble, por lo que se producen esfuerzos térmicos.

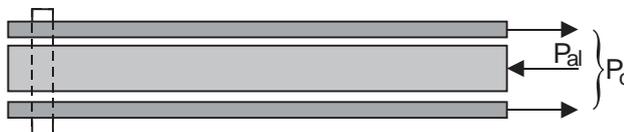
Se corta el ensamble en forma tal que se obtenga una estructura liberada estáticamente determinada. Una forma sencilla es quitar el perno derecho y analizar la estructura, considerando el cambio de temperatura  $\Delta T$ , lo que produce alargamientos  $\delta_1$  y  $\delta_2$  en la barra de aluminio y tubo de cobre, respectivamente.



$$\delta_1 = \alpha_{al}(\Delta T)L \text{ (barra de aluminio)}$$

$$\delta_2 = \alpha_c(\Delta T)L \text{ (tubo de cobre)}$$

Las fuerzas existentes en la barra de aluminio y tubo de cobre en el ensamble original deben ser tales que acorten la barra y alarguen el tubo, a fin de que los alargamientos finales de la barra de aluminio y del tubo de cobre sean las mismas.



$$\delta_3 = \frac{P_{al} L}{E_{al} A_{al}} \text{ (acortamiento de la barra de aluminio)}$$

$$\delta_4 = \frac{P_c L}{E_c A_c} \text{ (alargamiento del tubo de cobre)}$$

Como los alargamientos finales son los mismos:

$$\delta = \delta_1 - \delta_3 = \delta_2 + \delta_4$$

$$\alpha_{al}(\Delta T)L - \frac{P_{al} L}{E_{al} A_{al}} = \alpha_c(\Delta T)L + \frac{P_c L}{E_c A_c}$$

Además:

$$P_{al} = P_c$$

Luego:

$$(\alpha_{al} - \alpha_c)(\Delta T) = P_{al} \left( \frac{1}{E_{al} A_{al}} + \frac{1}{E_c A_c} \right)$$

$$(\alpha_{al} - \alpha_c)(\Delta T) = \frac{P_{al} (E_{al} A_{al} + E_c A_c)}{E_{al} A_{al} E_c A_c}$$

De donde:

$$P_{al} = \frac{(\alpha_{al} - \alpha_c)(\Delta T)E_{al}A_{al}E_cA_c}{E_{al}A_{al} + E_cA_c}$$
$$P_{al} = \frac{(13 \cdot 10^{-6} - 9,3 \cdot 10^{-6}) \cdot (40) \cdot 10 \cdot 10^6 \cdot (\pi/4) \cdot 1,75^2 \cdot 17 \cdot 10^6 \cdot (\pi/4) \cdot (2^2 - 1,8^2)}{10 \cdot 10^6 \cdot (\pi/4) \cdot 1,75^2 + 17 \cdot 10^6 \cdot (\pi/4) \cdot (2^2 - 1,8^2)}$$
$$P_{al} = P_c = 1056,21 \text{ lb}$$

En consecuencia:

$$\tau_{med} = \frac{V}{A} = \frac{1056,21}{2 \cdot (\pi/4) \cdot (1/16)} = 10758,5 \text{ psi} = 10,758 \text{ ksi}$$

6. Se sabe que el alargamiento será:

$$\delta = 2pn$$

Además:

$$\delta_b + \delta_c = \delta$$

$$\frac{P_b L}{E_b A_b} + \frac{P_c L}{2E_c A_c} = 2pn$$

Como:

$$P_b = P_c$$

$$\sigma_o = \frac{P_b}{A_b}$$

Se tendrá:

$$\frac{\sigma_o L}{E_b} + \frac{P_b L}{2E_c A_c} = 2pn$$

Dividimos entre  $A_b$

$$\frac{\sigma_o L}{E_b A_b} + \frac{P_b L}{2E_c A_c A_b} = \frac{2pn}{A_b}$$

$$\sigma_o L \left( \frac{1}{E_b A_b} + \frac{1}{2E_c A_c} \right) = \frac{2pn}{A_b}$$

$$\sigma_o L \left( \frac{2E_c A_c + E_b A_b}{2E_c A_c E_b A_b} \right) = \frac{2pn}{A_b}$$

De donde:

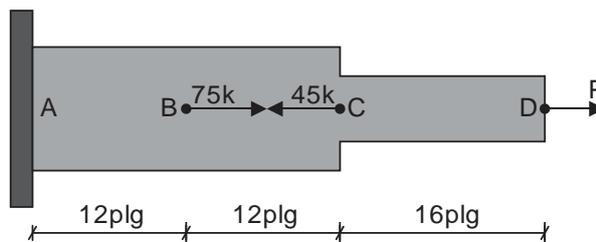
$$n = \frac{\sigma_o L}{2pE_b} \left( 1 + \frac{E_b A_b}{2E_c A_c} \right)$$

**MECANICA DE MATERIALES (CI80)**  
**PRACTICA CALIFICADA N° 1**  
**CICLO 2012-01**

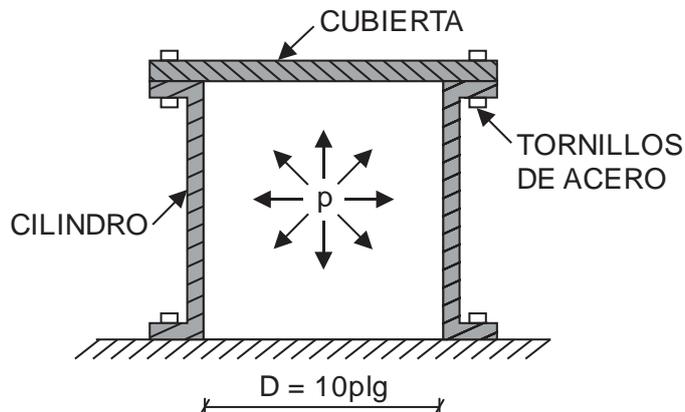
**Profesor : Ph.D. Genner Villarreal Castro**  
**Sección : CI51**  
**Duración : 170 minutos**

1. Responder las siguientes preguntas, justificando sus respuestas:

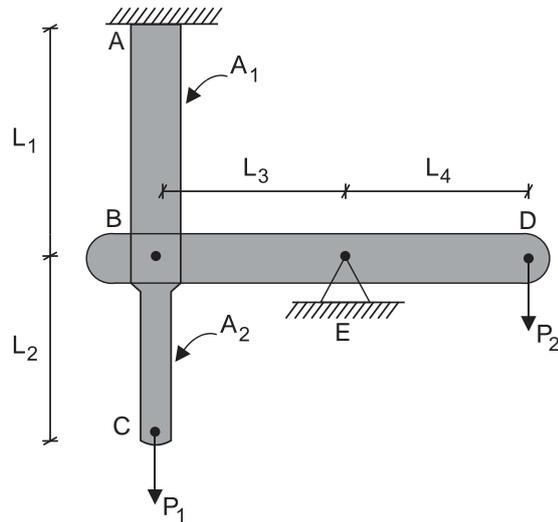
- a) ¿La Ley de Hooke sólo puede aplicarse en el rango plástico o de cedencia? (1 punto)
- b) Para la barra escalonada mostrada en la figura, determine la fuerza “P” para que la deformación en el punto D sea cero, considerando  $E = 29 \cdot 10^6 \text{ psi}$  para toda la barra,  $A_{AC} = 0,9 \text{ plg}^2$  y  $A_{CD} = 0,3 \text{ plg}^2$  (1 punto)



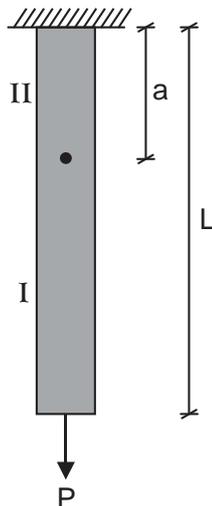
- c) Un cilindro que posee una cubierta hermética, formada por una placa circular y retenida por pernos de acero, contiene un gas a presión “p”, tal como se muestra en la figura. El diámetro de los tornillos es  $d_t = 0,5 \text{ plg}$  y el esfuerzo permisible a tracción de los mismos es  $[\sigma] = 10000 \text{ psi}$ . Si el diámetro interior del cilindro es  $D = 10 \text{ plg}$  y la presión  $p = 280 \text{ psi}$ , determine el número de tornillos “N” necesario para retener la cubierta. (2 puntos)



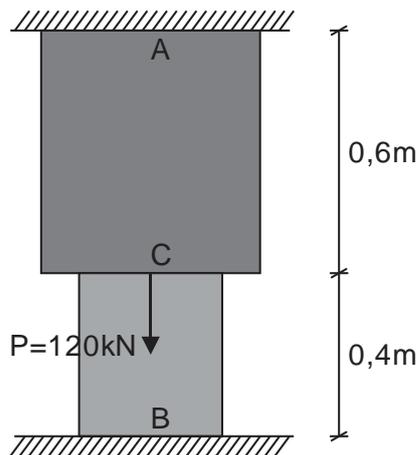
2. El ensamble mostrado en la figura se carga por fuerzas  $P_1$  y  $P_2$ . Si se supone que ambas porciones de la barra vertical ABC están hechas del mismo material, obtener una fórmula para la relación  $P_2/P_1$ , tal que la deflexión vertical del punto C sea igual a cero. Expresar el resultado en términos de las áreas de sección transversal  $A_1$  y  $A_2$  y las dimensiones  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  y  $L_4$  mostrados en la figura. (3 puntos)



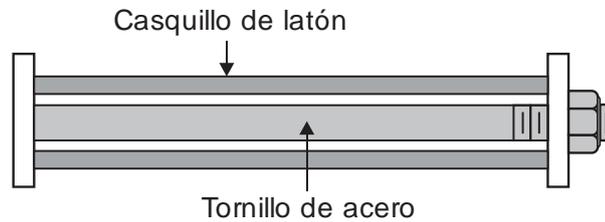
3. Determine el alargamiento del sector II de la barra prismática, si está sometida a la acción de la carga  $P$  y de su peso propio. Considere que el área de la barra es  $A$ , el módulo de elasticidad  $E$  y el peso específico  $\gamma$  (3 puntos)



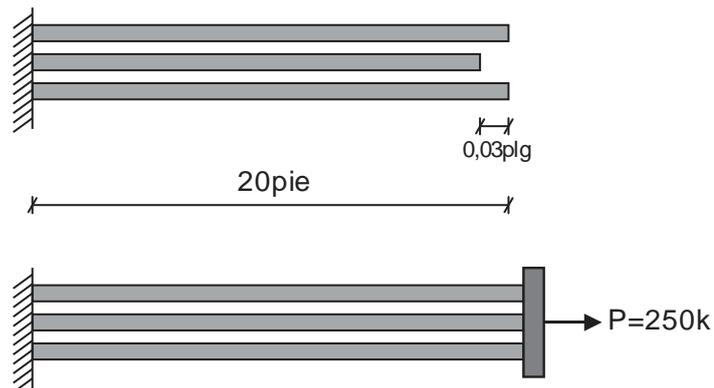
4. La barra escalonada mostrada en la figura, está compuesta por un tramo AC de acero y otro tramo CB de cobre, siendo las áreas de sección transversal en cada tramo  $A_a = 15\text{cm}^2$  y  $A_c = 10\text{cm}^2$ ; y los módulos de elasticidad  $E_a = 2 \cdot 10^5 \text{MPa}$  y  $E_c = 10^5 \text{MPa}$ . Se pide, graficar los diagramas de fuerza axial y esfuerzo normal para la barra escalonada. (3 puntos)



5. Un tornillo de acero se introduce dentro de un casquillo de latón y la tuerca se gira hasta que asienta perfectamente sin apretar. El tornillo tiene un diámetro de 25mm y el casquillo tiene diámetros interior y exterior de 26mm y 36mm, respectivamente. Calcular el incremento de temperatura  $\Delta T$  que se requiere para producir en el casquillo un esfuerzo de compresión de 30MPa. Considerar las siguientes propiedades de los materiales: para el latón,  $\alpha_L = 20 \cdot 10^{-6} / ^\circ\text{C}$  y  $E_L = 100\text{GPa}$ ; para el acero,  $\alpha_a = 12 \cdot 10^{-6} / ^\circ\text{C}$  y  $E_a = 200\text{GPa}$  (4 puntos)



6. Tres barras de acero adyacentes y paralelas ( $E = 30 \cdot 10^6 \text{ psi}$ ) soportarán conjuntamente una carga en tracción  $P = 250\text{k}$ . El área de sección transversal de cada barra es  $6\text{plg}^2$  y la longitud es 20pie. Si la barra central accidentalmente es 0,03plg más corta que las otras dos, ¿Cuál será el esfuerzo final  $\sigma$  en la barra central cuando se aplica la carga? (Suponer que los extremos de las barras se traccionan para alinearlas cuando se aplica la carga) (3 puntos)



Monterrico, 03 de abril de 2012

## SOLUCIONARIO DE PRÁCTICA CALIFICADA Nº 1

### CICLO 2012-01

1. a) FALSO. La Ley de Hooke sólo puede aplicarse en el rango lineal o elástico y depende de la relación proporcional entre el esfuerzo normal y la deformación unitaria longitudinal, es decir  $\sigma = E\varepsilon$ , siendo E el módulo de elasticidad del material.

b) Por condición del problema  $\delta_D = 0$ , obteniendo la siguiente ecuación:

$$\frac{P(16)}{29 \cdot 10^3 \cdot 0,3} + \frac{P(24)}{29 \cdot 10^3 \cdot 0,9} - \frac{45(24)}{29 \cdot 10^3 \cdot 0,9} + \frac{75(12)}{29 \cdot 10^3 \cdot 0,9} = 0 \quad \therefore \quad P = 2,5k$$

c) La carga del gas a presión que soportarán los tornillos será:

$$P = pA = 280 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 10^2 = 21991,148lb$$

Entonces, la carga que soportará cada tornillo será:

$$P_t = \frac{P}{N}$$

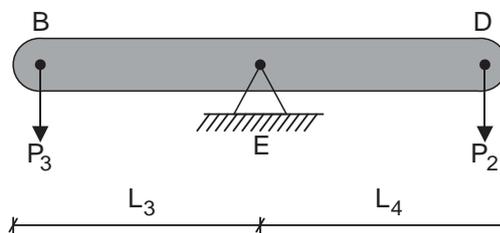
En consecuencia:

$$\sigma = \frac{P_t}{A_t} \leq [\sigma] \quad \Rightarrow \quad \frac{21991,148}{N(\pi/4)d_t^2} \leq 10000 \quad \therefore \quad N \geq 11,199$$

Por economía, asumimos  $N=12$  tornillos

2. Analizamos el equilibrio de la viga BD

$$\sum M_E = 0 \quad \Rightarrow \quad P_3 L_3 - P_2 L_4 = 0 \quad \therefore \quad P_3 = \frac{P_2 L_4}{L_3} \quad \dots\dots\dots (a)$$



Luego, en la barra ABC actuarán las cargas  $P_1$  y  $P_3$ , tal como se muestra en la figura, siendo por dato del problema, el desplazamiento vertical en C igual a cero.

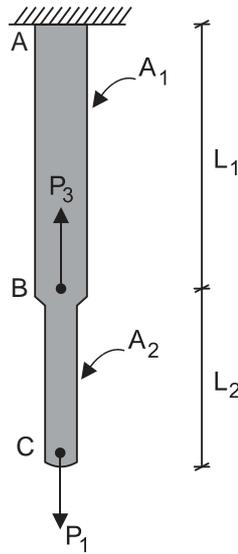
$$\delta_C = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{P_1 L_2}{EA_2} + \frac{P_1 L_1}{EA_1} - \frac{P_3 L_1}{EA_1} = 0 \quad \therefore \quad P_1 \left( \frac{L_2}{A_2} + \frac{L_1}{A_1} \right) = P_3 \left( \frac{L_1}{A_1} \right) \quad \dots\dots\dots (b)$$

Reemplazamos (a) en (b):

$$P_1 \left( \frac{L_2 A_1 + L_1 A_2}{A_1 A_2} \right) = P_2 \left( \frac{L_1 L_4}{L_3 A_1} \right)$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{(L_2 A_1 + L_1 A_2) L_3 A_1}{A_1 A_2 L_1 L_4} = \frac{(L_2 A_1 + L_1 A_2) L_3}{A_2 L_1 L_4}$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{L_3}{L_4} \left( 1 + \frac{A_1 L_2}{A_2 L_1} \right)$$



3. Determinamos el alargamiento total de la barra:

$$\delta = \int_0^L \frac{P_x dx}{EA} = \int_0^L \frac{(P + \gamma Ax) dx}{EA} = \frac{PL}{EA} + \frac{\gamma AL^2}{2EA} = \frac{PL}{EA} + \frac{\gamma L^2}{2E}$$

El alargamiento del sector I será:

$$\delta_I = \int_0^{L-a} \frac{P_x dx}{EA} = \int_0^{L-a} \frac{(P + \gamma Ax) dx}{EA} = \frac{P(L-a)}{EA} + \frac{\gamma A(L-a)^2}{2EA} = \frac{P(L-a)}{EA} + \frac{\gamma(L-a)^2}{2E}$$

Luego:

$$\delta_{II} = \delta - \delta_I = \frac{PL}{EA} + \frac{\gamma L^2}{2E} - \frac{P(L-a)}{EA} - \frac{\gamma(L-a)^2}{2E} = \frac{Pa}{EA} + \frac{\gamma a}{2E} (2L-a) = \frac{a}{E} \left[ \frac{P}{A} + \gamma \left( L - \frac{a}{2} \right) \right]$$

4. Por Estática:

$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad R_A + R_B = P$$

Esto implica que la estructura es una vez hiperestática, ya que existen dos incógnitas y una sola ecuación.

Para su solución, eliminamos el empotramiento en B y lo reemplazamos por su reacción  $R_B$ , tal como se muestra en la figura y consideramos que el desplazamiento en dicho extremo es cero por ser empotramiento perfecto.

$$\delta_B = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{PL_a}{E_a A_a} - \frac{R_B L_c}{E_c A_c} - \frac{R_B L_a}{E_a A_a} = 0 \quad \therefore \quad R_B = \frac{PL_a E_c A_c}{L_a E_c A_c + L_c E_a A_a}$$

Reemplazamos valores y obtenemos:

$$R_B = \frac{120 \cdot 10^3 \cdot 0,6 \cdot 10^{11} \cdot 10 \cdot 10^{-4}}{0,6 \cdot 10^{11} \cdot 10 \cdot 10^{-4} + 0,4 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 15 \cdot 10^{-4}} = 40000N = 40kN$$

Entonces:

$$R_A = 120 - 40 = 80kN$$

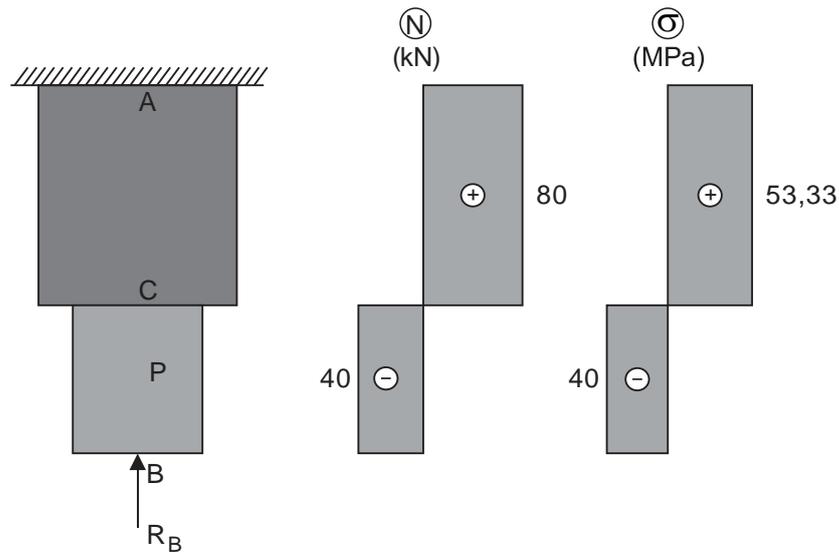
De esta manera, el diagrama de fuerza axial es la mostrada en la figura.

Para determinar los esfuerzos normales, dividimos entre el área respectiva.

$$\sigma_a = \frac{80 \cdot 10^3}{15 \cdot 10^{-4}} = 53,33MPa$$

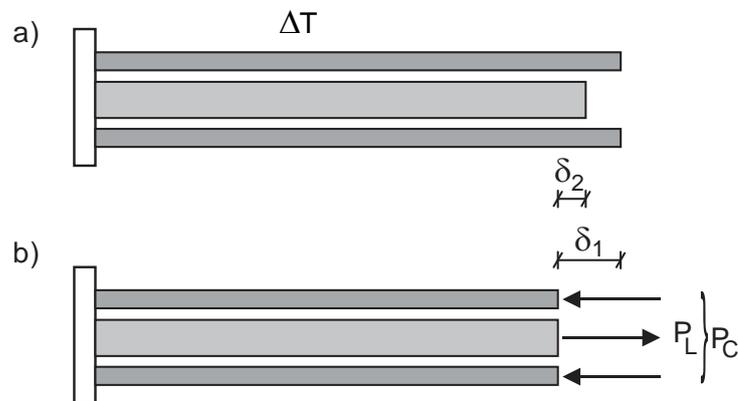
$$\sigma_c = -\frac{40 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^{-4}} = -40 \text{ MPa}$$

El diagrama de esfuerzos normales, se muestra en la figura.



5. Puesto que el casquillo y el tornillo son de diferentes materiales, sus alargamientos serían diferentes si se dilataran libremente. Sin embargo, se mantienen unidos por el ensamble, por lo que se producen esfuerzos térmicos.

Se corta el ensamble en forma tal, que se obtenga una estructura liberada estáticamente determinada. Una forma sencilla es quitar la cabeza del tornillo.



Luego, se supone que ocurre el cambio de temperatura  $\Delta T$ , lo que produce alargamientos  $\delta_1$  y  $\delta_2$  del casquillo y el tornillo, respectivamente.

$$\delta_1 = \alpha_L (\Delta T) L \text{ (casquillo de latón)}$$

$$\delta_2 = \alpha_a (\Delta T) L \text{ (tornillo de acero)}$$

Las fuerzas existentes en el casquillo y el tornillo en el ensamble original deben ser tales que acorten el casquillo y alarguen el tornillo, de tal manera que los alargamientos finales del casquillo y el tornillo sean iguales.

$$\delta_3 = \frac{P_L L}{E_L A_L} \text{ (acortamiento del casquillo)}$$

$$\delta_4 = \frac{P_a L}{E_a A_a} \text{ (alargamiento del tornillo)}$$

Como los alargamientos finales son los mismos:

$$\delta = \delta_1 - \delta_3 = \delta_2 + \delta_4$$

$$\alpha_L (\Delta T)L - \frac{P_L L}{E_L A_L} = \alpha_a (\Delta T)L + \frac{P_a L}{E_a A_a}$$

Además:

$$P_L = P_a$$

Luego:

$$(\alpha_L - \alpha_a)(\Delta T) = P_L \left( \frac{1}{E_L A_L} + \frac{1}{E_a A_a} \right)$$

$$(\alpha_L - \alpha_a)(\Delta T) = \frac{P_L (E_L A_L + E_a A_a)}{E_L A_L E_a A_a}$$

De donde:

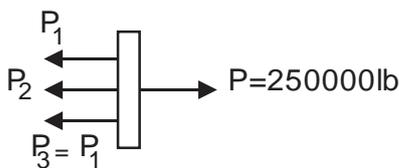
$$\Delta T = \frac{P_L (E_L A_L + E_a A_a)}{(\alpha_L - \alpha_a) E_L E_a A_a}$$

$$\Delta T = \frac{30 \cdot 10^6 \cdot \left( 100 \cdot 10^9 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 620 \cdot 10^{-6} + 200 \cdot 10^9 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 25^2 \cdot 10^{-6} \right)}{(20 \cdot 10^{-6} - 12 \cdot 10^{-6}) \cdot 100 \cdot 10^9 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 25^2 \cdot 10^{-6}}$$

$$\Delta T = 56,1^\circ \text{C}$$

6. Por simetría se sabe que las barras extremas son iguales, luego tenemos:

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad 2P_1 + P_2 = 250000 \quad \dots\dots\dots (a)$$

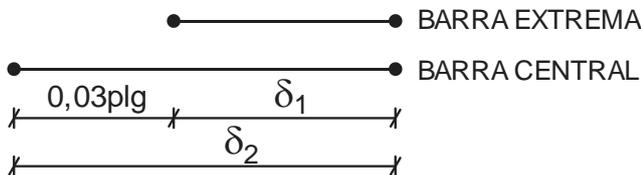


Analizamos el diagrama de desplazamientos en las barras extrema y central.

$$\delta_2 = \delta_1 + 0,03 \quad \Rightarrow \quad \frac{P_2 L}{EA} = \frac{P_1 L}{EA} + 0,03$$

$$P_2 = P_1 + 0,03 \frac{EA}{L} = P_1 + 0,03 \frac{30 \cdot 10^6 \cdot 6}{20 \cdot 12}$$

$$P_2 = P_1 + 22500 \quad \dots\dots\dots (b)$$



Reemplazamos (b) en (a):

$$2(P_2 - 22500) + P_2 = 250000$$

$$P_2 = 98333,33\text{lb}$$

En consecuencia:

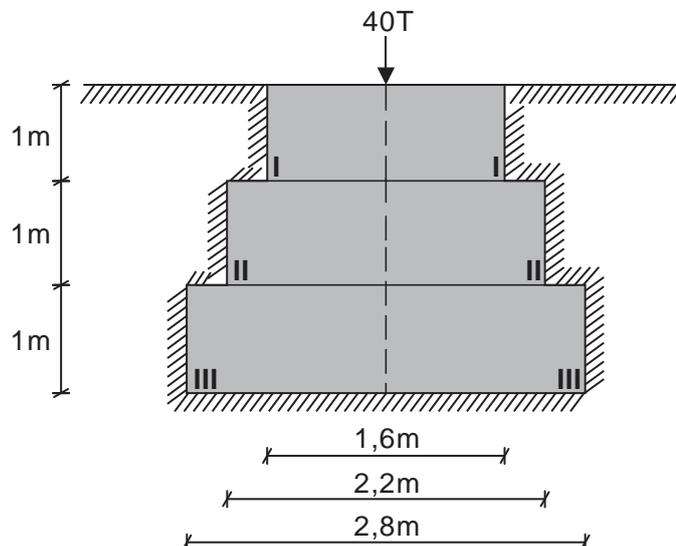
$$\sigma_2 = \frac{P_2}{A} = \sigma = 16388,89\text{psi} \approx 16,389\text{ksi}$$

**MECANICA DE MATERIALES (CI80)**  
**PRACTICA CALIFICADA N° 1**  
**CICLO 2012-02**

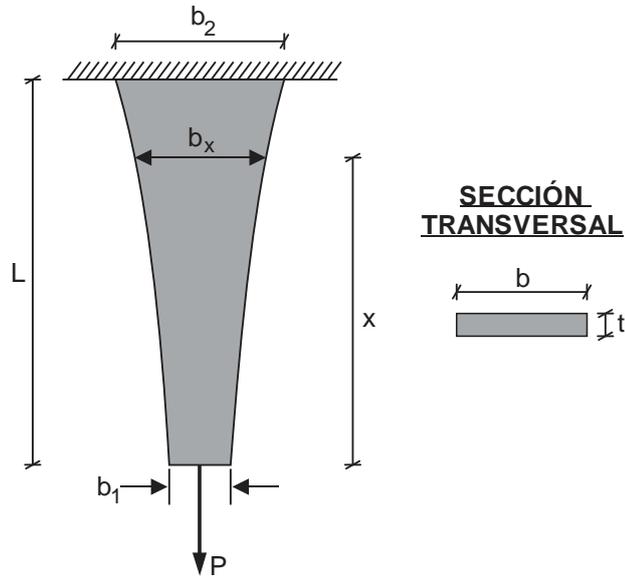
**Profesor : Ph.D. Genner Villarreal Castro**  
**Sección : CI51**  
**Duración : 170 minutos**

1. Responder las siguientes preguntas, justificando sus respuestas:

- a) ¿Para el acero estructural, el factor de seguridad depende de su esfuerzo de fluencia y del esfuerzo admisible? (1 punto)
- b) Una varilla de acero de sección transversal circular es sometida a tracción por una fuerza de 100kN. Se cumple que su deformación unitaria longitudinal no debe de ser mayor de 1/2000, lo mismo sucede con su esfuerzo normal, el cual debe ser menor que 120MPa. Determinar el diámetro menor de la varilla que cumpla con las condiciones dadas, sabiendo que  $E = 2.10^5 \text{ MPa}$  (1.5 puntos)
- c) Determinar los esfuerzos que surgen en las secciones I-I, II-II y III-III de la cimentación mostrada en la figura, si es de sección cuadrada. Considerar que el peso específico del concreto es  $\gamma_c = 2,4 \text{ T/m}^3$ . No considere la influencia del suelo alrededor de la cimentación. (1.5 puntos)

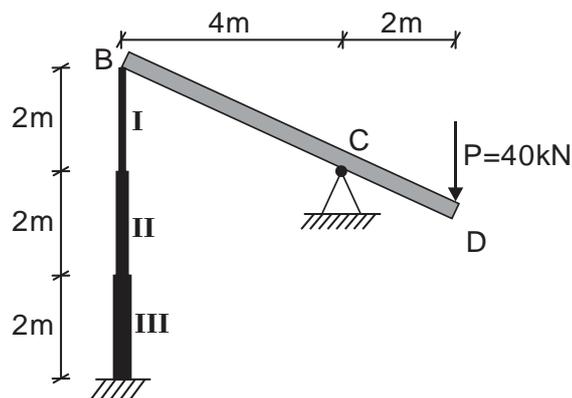


2. Una barra de sección transversal rectangular cuelga de un soporte y sostiene una carga  $P$  en su extremo inferior, además de su propio peso, tal como se muestra en la figura. El espesor " $t$ " de la barra es constante, pero su ancho " $b$ " varía por toda su longitud. La longitud de la barra es " $L$ " y el material tiene un peso específico " $\gamma$ ". Determinar la fórmula para el ancho  $b_x$  de una sección transversal a una distancia " $x$ " del extremo inferior, a fin de tener un esfuerzo de tracción constante  $\sigma_t$  en toda la barra. También, determinar los anchos  $b_1$  y  $b_2$  en los extremos inferior y superior de la barra, respectivamente, y determinar el volumen " $V$ " de la misma. (3 puntos)



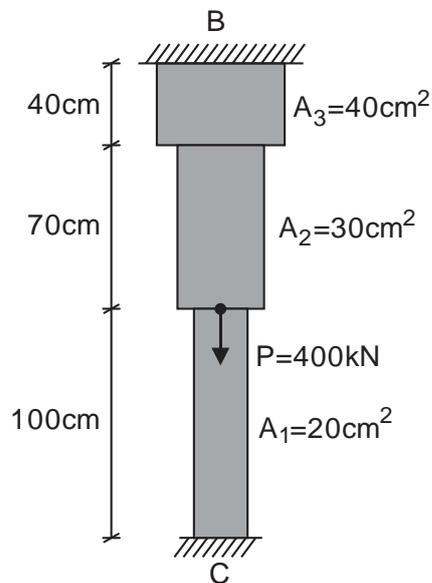
3. Determinar el desplazamiento vertical del nudo D, así como los esfuerzos normales en I, II y III. Considerar  $A_{III} = 2A_{II} = 4A_I = 10\text{cm}^2$ ,  $E = 2 \cdot 10^5 \text{MPa}$  y que la viga BCD es indeformable.

(3 puntos)

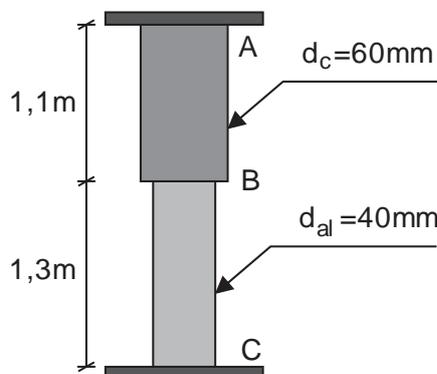


4. Determinar los esfuerzos normales en la barra escalonada doblemente empotrada, bajo la acción de la carga  $P = 400\text{kN}$ . Considerar que es un mismo material para toda la barra.

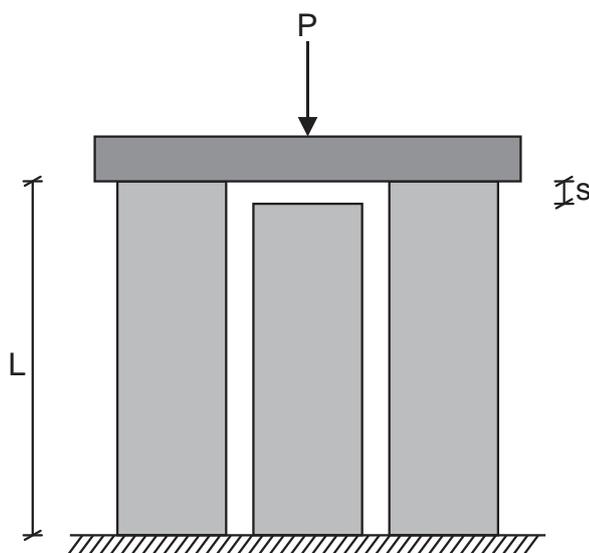
(3 puntos)



5. Una barra escalonada ABC está empotrada en ambos extremos. El tramo AB es de cobre y el tramo BC es de aluminio. Considerar que los módulos de elasticidad son  $E_c = 100\text{GPa}$  y  $E_{al} = 72\text{GPa}$ ; y los coeficientes de dilatación térmica del material  $\alpha_c = 16,5 \cdot 10^{-6}/^\circ\text{C}$  y  $\alpha_{al} = 23,9 \cdot 10^{-6}/^\circ\text{C}$ . Sabiendo que la barra escalonada está inicialmente sin esfuerzos, se pide determinar los esfuerzos normales inducidos en los tramos AB y BC por un incremento de temperatura de  $42^\circ\text{C}$  y el desplazamiento del punto B (3 puntos)



6. Una carga de compresión  $P$  se transmite mediante una placa rígida a tres barras que son idénticas, excepto en que inicialmente la barra central es ligeramente menor que las otras dos barras, tal como se muestra en la figura. Las dimensiones y propiedades del ensamble son las siguientes:  $L = 1\text{m}$ , el área de sección transversal de cada barra es  $A = 3000\text{mm}^2$ , el módulo de elasticidad  $E = 45\text{GPa}$  y la separación  $s = 1\text{mm}$
- Calcular el valor de la carga  $P$  necesaria para cerrar el claro. (1 punto)
  - Evaluar la deflexión total descendente  $\delta$  de la placa rígida cuando  $P$  tiene su valor máximo de  $400\text{kN}$  (2 puntos)
  - Determinar la energía potencial de deformación  $U$  almacenada en las tres barras cuando  $P$  tiene su máximo valor. (1 punto)



## SOLUCIONARIO DE PRÁCTICA CALIFICADA Nº 1

### CICLO 2012-02

1. a) VERDADERO. Efectivamente, el factor de seguridad para el acero estructural depende de su esfuerzo de fluencia y del esfuerzo admisible, siendo la relación  $n = \sigma_y / [\sigma]$ , donde  $n$  es el factor de seguridad,  $\sigma_y$  el esfuerzo de fluencia y  $[\sigma]$  el esfuerzo admisible.

b) Por dato del problema:

$$\sigma_{\text{máx}} \leq [\sigma] \Rightarrow \frac{P}{(\pi/4)d^2} \leq [\sigma] \quad \therefore \quad d \geq \sqrt{\frac{4P}{\pi[\sigma]}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 100 \cdot 10^3}{\pi \cdot 120 \cdot 10^6}} = 0,0326\text{m}$$

$$d \geq 3,26\text{cm}$$

Asimismo:

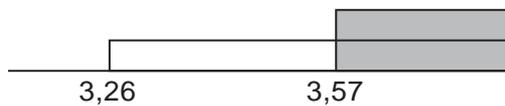
$$\varepsilon \leq [\varepsilon] \Rightarrow \frac{\delta}{L} \leq [\varepsilon]$$

$$\left(\frac{PL}{EA}\right) \cdot \frac{1}{L} \leq [\varepsilon] \quad \therefore \quad \frac{P}{E(\pi/4)d^2} \leq [\varepsilon]$$

$$d \geq \sqrt{\frac{4P}{\pi E[\varepsilon]}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 100 \cdot 10^3}{\pi \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 5 \cdot 10^{-4}}}$$

$$d \geq 0,0357\text{m}$$

$$d \geq 3,57\text{cm}$$



De donde:

$$d_{\text{mín}} = 3,57\text{cm}$$

- c) Consideramos el peso propio de la cimentación y calculamos las fuerzas axiales en cada tramo.

$$P_{\text{I-I}} = 40 + \gamma Ah = 40 + 2,4 \cdot 1,6^2 \cdot 1 = 46,144\text{T}$$

$$P_{\text{II-II}} = 46,144 + 2,4 \cdot 2,2^2 \cdot 1 = 57,760\text{T}$$

$$P_{\text{III-III}} = 57,760 + 2,4 \cdot 2,8^2 \cdot 1 = 76,576\text{T}$$

Luego, determinamos los esfuerzos normales en cada uno de los tramos, anteriormente indicados.

$$\sigma_{\text{I-I}} = \frac{46,144 \cdot 10^3}{1,6^2 \cdot 10^4} = 1,802\text{kgf / cm}^2$$

$$\sigma_{\text{II-II}} = \frac{57,760 \cdot 10^3}{2,2^2 \cdot 10^4} = 1,193\text{kgf / cm}^2$$

$$\sigma_{\text{III-III}} = \frac{76,576 \cdot 10^3}{2,8^2 \cdot 10^4} = 0,977\text{kgf / cm}^2$$

2. En la parte superior se tendrá:

$$A_1 = \frac{P}{\sigma_t}$$

Luego, a una distancia "x" será:

$$A_x = \frac{P + W_x}{\sigma_t}$$

Dónde:

$W_x$  - peso de la barra desde "0" hasta "x"

Entonces a una distancia "x + dx" se tendrá:

$$A_{x+dx} = A_x + dA_x = \frac{P + W_x}{\sigma_t} + \frac{\gamma A_x dx}{\sigma_t}$$

Siendo:

$dA_x$  - incremento de área

$$dA_x = \frac{\gamma A_x dx}{\sigma_t}$$

$$\int_{A_1}^{A_x} \frac{dA_x}{A_x} = \frac{\gamma}{\sigma_t} \int_0^x dx \quad \Rightarrow \quad \ln \frac{A_x}{A_1} = \frac{\gamma x}{\sigma_t} \quad \therefore \quad A_x = A_1 e^{(\gamma x / \sigma_t)}$$

En consecuencia:

$$b_x t = \frac{P}{\sigma_t} e^{(\gamma x / \sigma_t)} \quad \Rightarrow \quad b_x = \frac{P}{\sigma_t t} e^{(\gamma x / \sigma_t)}$$

Luego:

$$b_1 = \frac{P}{\sigma_t t}$$

$$b_2 = \frac{P}{\sigma_t t} e^{(\gamma L / \sigma_t)}$$

Posteriormente, calculamos el volumen de la barra:

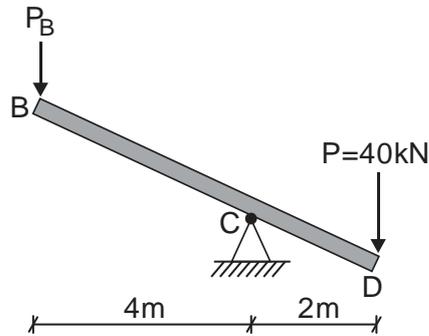
$$V = \int_0^L A_x dx = A_1 \int_0^L e^{(\gamma x / \sigma_t)} dx = \frac{P}{\sigma_t} \cdot \frac{\sigma_t}{\gamma} \int_0^L e^{(\gamma x / \sigma_t)} d\left(\frac{\gamma x}{\sigma_t}\right) = \frac{P}{\gamma} [e^{(\gamma L / \sigma_t)} - 1]$$

También se podrá obtener en función de las áreas:

$$V = \frac{P}{\gamma} [e^{(\gamma L / \sigma_t)} - 1] = \frac{P}{\sigma_t} [e^{(\gamma L / \sigma_t)} - 1] \frac{\sigma_t}{\gamma} = \frac{\sigma_t}{\gamma} (A_2 - A_1)$$

3. Hacemos un corte en el punto B y analizamos el equilibrio de la viga indeformable BCD

$$\sum M_C = 0 \quad \Rightarrow \quad 4P_B - 40(2) = 0 \quad \therefore \quad P_B = 20\text{kN}$$



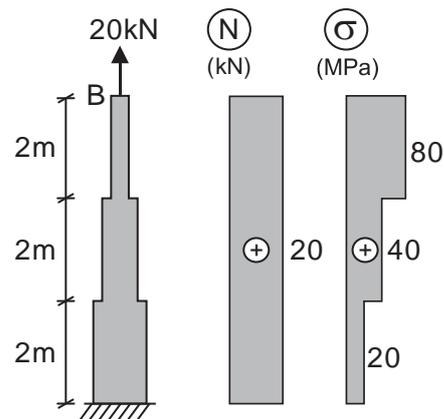
Luego, la barra escalonada quedará sometida a la acción de la carga  $P_B = 20\text{kN}$ , pero en sentido opuesto, de acuerdo al Principio de acción y reacción, tal como se muestra en la figura, graficando su diagrama de fuerza axial, el cual es constante en toda la barra.

Posteriormente, determinamos los esfuerzos normales en cada parte de la barra escalonada y graficamos su diagrama de esfuerzo normal.

$$\sigma_{\text{I}} = \frac{20 \cdot 10^3}{2,5 \cdot 10^{-4}} = 80\text{MPa}$$

$$\sigma_{\text{II}} = \frac{20 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^{-4}} = 40\text{MPa}$$

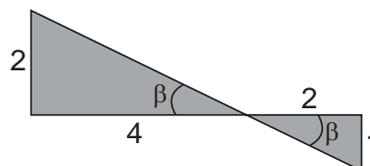
$$\sigma_{\text{III}} = \frac{20 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^{-4}} = 20\text{MPa}$$



Calculamos el alargamiento absoluto que sufre la barra escalonada.

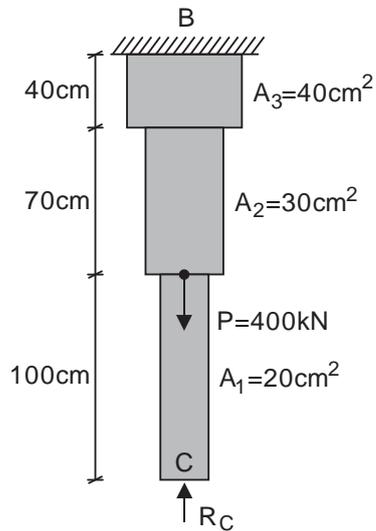
$$\delta = \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 2}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2,5 \cdot 10^{-4}} + \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 2}{2 \cdot 10^{11} \cdot 5 \cdot 10^{-4}} + \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 2}{2 \cdot 10^{11} \cdot 10 \cdot 10^{-4}} = 14 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 1,4\text{mm} \uparrow$$

De acuerdo a las relaciones de triángulos rectángulos tenemos:



Se puede notar, que si el punto B sube 1,4mm; luego, el punto D descenderá 0,7mm (su mitad), lo que indica que  $\delta_{\text{v}}^{\text{D}} = 0,7\text{mm} \downarrow$

4. Eliminamos el empotramiento en C y lo reemplazamos por su reacción  $R_C$ , tal como se muestra en la figura.



Se sabe que:

$$\delta_C = 0$$

$$-\frac{R_C \cdot 1}{E \cdot 20 \cdot 10^{-4}} - \frac{R_C \cdot 0,7}{E \cdot 30 \cdot 10^{-4}} - \frac{R_C \cdot 0,4}{E \cdot 40 \cdot 10^{-4}} + \frac{400 \cdot 10^3 \cdot 0,7}{E \cdot 30 \cdot 10^{-4}} + \frac{400 \cdot 10^3 \cdot 0,4}{E \cdot 40 \cdot 10^{-4}} = 0$$

De donde:

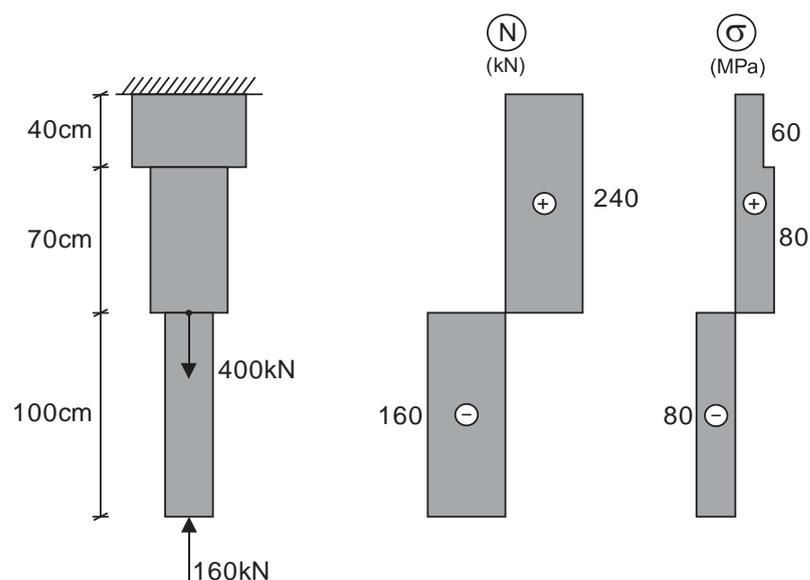
$$R = 160000\text{N} = 160\text{kN}$$

Luego, graficamos el diagrama de fuerzas axiales y determinamos los esfuerzos normales en cada tramo, graficando su diagrama de esfuerzos normales.

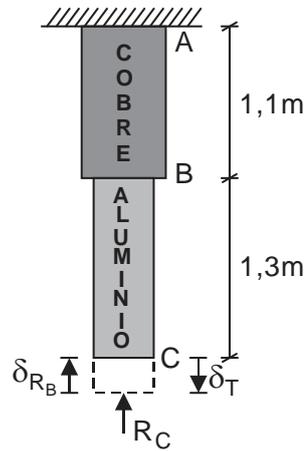
$$\sigma_1 = -\frac{160 \cdot 10^3}{20 \cdot 10^{-4}} = -80\text{MPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{240 \cdot 10^3}{30 \cdot 10^{-4}} = 80\text{MPa}$$

$$\sigma_3 = \frac{240 \cdot 10^3}{40 \cdot 10^{-4}} = 60\text{MPa}$$



5. Eliminamos el empotramiento en C y analizamos el diagrama de deformación por estados independientes de temperatura y carga.



Como C es empotramiento perfecto, se desprende del diagrama de deformaciones que:

$$\delta_T = \delta_{R_C}$$

$$\alpha_c (\Delta T)L_c + \alpha_{al} (\Delta T)L_{al} = \frac{R_C L_{al}}{E_{al} A_{al}} + \frac{R_C L_c}{E_c A_c}$$

$$16,5 \cdot 10^{-6} \cdot 42 \cdot 1,1 + 23,9 \cdot 10^{-6} \cdot 42 \cdot 1,3 = \frac{R_C \cdot 1,3}{72 \cdot 10^9 \cdot (\pi/4) \cdot 40^2 \cdot 10^{-6}} + \frac{R_C \cdot 1,1}{100 \cdot 10^9 \cdot (\pi/4) \cdot 60^2 \cdot 10^{-6}}$$

$$R_C = 113,21 \text{ kN}$$

Luego:

$$\sigma_{AB} = -\frac{R_C}{A_{AB}} = -\frac{113,21 \cdot 10^3}{(\pi/4) \cdot 60^2 \cdot 10^{-6}} = -40,04 \text{ MPa (COBRE)}$$

$$\sigma_{BC} = -\frac{R_C}{A_{BC}} = -\frac{113,21 \cdot 10^3}{(\pi/4) \cdot 40^2 \cdot 10^{-6}} = -90,09 \text{ MPa (ALUMINIO)}$$

Ahora, determinamos el desplazamiento en B

$$\delta_B = \delta_T^{AB} - \delta_{R_C}^{AB} = \alpha_c (\Delta T)L_c - \frac{R_C L_c}{E_c A_c} = 16,5 \cdot 10^{-6} \cdot 42 \cdot 1,1 - \frac{113,21 \cdot 10^3 \cdot 1,1}{100 \cdot 10^9 \cdot (\pi/4) \cdot 60^2 \cdot 10^{-6}} = 0,322 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

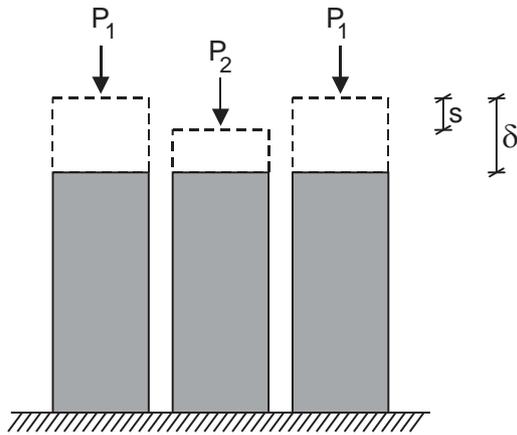
$$\delta_B = 0,322 \text{ mm} \downarrow$$

6. a) Las barras extremas son las que soportarán la misma carga e igual a P/2

Luego:

$$s = \frac{(P/2)L}{EA} \Rightarrow P = \frac{2EAs}{L} = \frac{2 \cdot 45 \cdot 10^9 \cdot 3000 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-3}}{1} = 270000 \text{ N} = 270 \text{ kN}$$

- b) Si  $P_{\text{máx}} = 400 \text{ kN}$ , luego, su nueva posición será la mostrada en la siguiente figura.



De donde:

$$2P_1 + P_2 = 400 \cdot 10^3 \quad \dots\dots\dots (a)$$

Además, se sabe que:

$$\delta = \delta_{P_1} = s + \delta_{P_2}$$

$$\frac{P_1 L}{EA} = s + \frac{P_2 L}{EA}$$

$$P_1 = P_2 + \frac{EAs}{L} \quad \dots\dots\dots (b)$$

Reemplazamos (b) en (a) y obtenemos:

$$2P_2 + \frac{2EAs}{L} + P_2 = 400 \cdot 10^3$$

$$3P_2 = 400 \cdot 10^3 - \frac{2 \cdot 45 \cdot 10^9 \cdot 3000 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-3}}{1}$$

$$P_2 = 43,33 \text{ kN}$$

Luego:

$$\delta = s + \frac{P_2 L}{EA} = 10^{-3} + \frac{43,33 \cdot 10^3 \cdot 1}{45 \cdot 10^9 \cdot 3000 \cdot 10^{-6}} = 1,321 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 1,321 \text{ mm}$$

c) Calculamos el valor de  $P_1$

$$P_1 = P_2 + \frac{EAs}{L} = 43,33 \cdot 10^3 + \frac{45 \cdot 10^9 \cdot 3000 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-3}}{1} = 178,33 \text{ kN}$$

Luego:

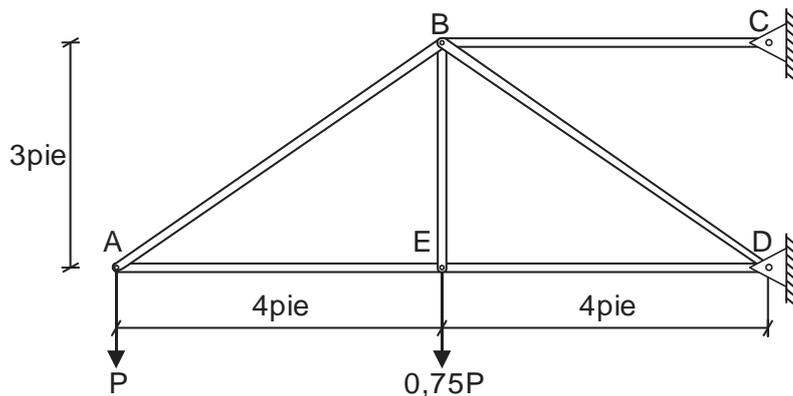
$$U = \frac{P_1^2 L}{2EA} + \frac{P_2^2 L}{2EA} + \frac{P_1^2 L}{2EA} = \left( P_1^2 + \frac{P_2^2}{2} \right) \frac{L}{EA} = \left( 178,33^2 + \frac{43,33^2}{2} \right) \cdot 10^6 \cdot \frac{1}{45 \cdot 10^9 \cdot 3000 \cdot 10^{-6}}$$

$$U = 242,52 \text{ J}$$

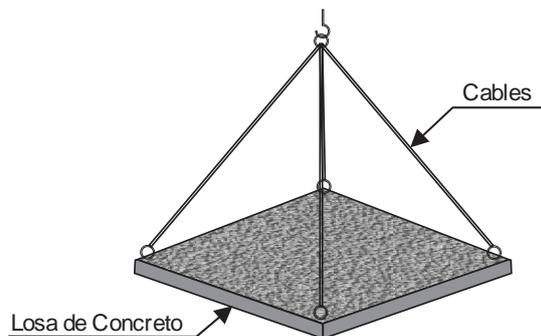
**MECANICA DE MATERIALES (CI80)**  
**PRACTICA CALIFICADA N° 1**  
**CICLO 2013-01**

**Profesor : Ph.D. Genner Villarreal Castro**  
**Sección : CI51**  
**Duración : 170 minutos**

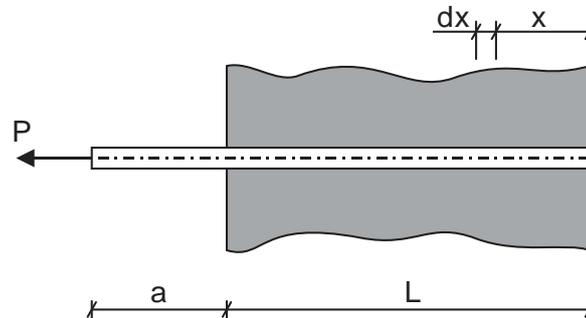
1. Responder las siguientes preguntas, justificando sus respuestas:
- ¿Será correcto afirmar que el esfuerzo normal simple es igual a la carga axial aplicada en una unidad de área? (1 punto)
  - Un alambre de diámetro 1,2mm fue sometido a un ensayo de tracción, cuya fuerza es 100N. Determinar el módulo de elasticidad del material, sabiendo que el ensayo se realizó con un tensómetro de base  $s = 10\text{cm}$  y su alargamiento total del material fue de 0,08mm (1 punto)
  - Las barras de la armadura mostrada en la figura tienen una sección transversal de  $1,25\text{plg}^2$ . Determinar el máximo valor de la carga "P", sabiendo que  $[\sigma] = 20\text{ksi}$  (1.5 puntos)



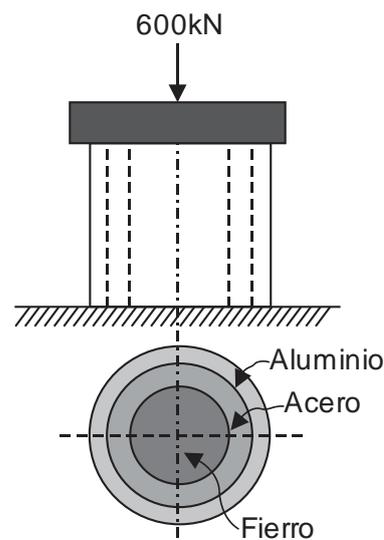
2. Una losa de concreto reforzado de 2,50m por lado y 225mm de espesor es levantada por cuatro cables unidos a sus esquinas, tal como se muestra en la figura. Los cables están unidos a un gancho situado a 1,60m sobre la losa. Los cables tienen un área de sección transversal de  $190\text{mm}^2$ . Determinar el esfuerzo de tensión en los cables debido al peso de la losa, considerando que el peso específico del concreto reforzado es  $24\text{kN/m}^3$  (3 puntos)



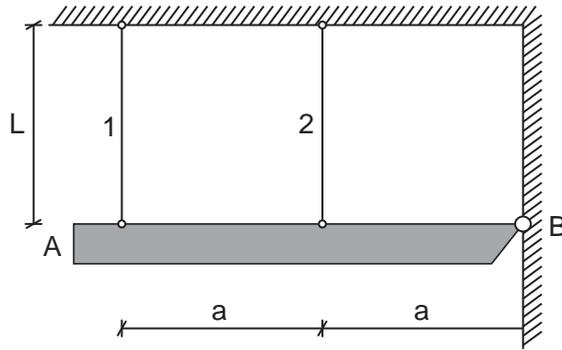
3. En la figura mostrada, es necesario aplicar una fuerza de tracción  $P = 20\text{kN}$ , para poder extraer la barra de acero que se encuentra dentro del muro de concreto, oponiéndose, para ello, unas fuerzas axiales distribuidas y constantes a lo largo del muro. El área de la sección transversal de la barra es  $2\text{cm}^2$  y su módulo de elasticidad  $E = 2 \cdot 10^5 \text{MPa}$ . Determinar el alargamiento absoluto y graficar el diagrama de esfuerzo normal de la barra, considerando  $L = 40\text{cm}$ ,  $a = 15\text{cm}$  (3.5 puntos)



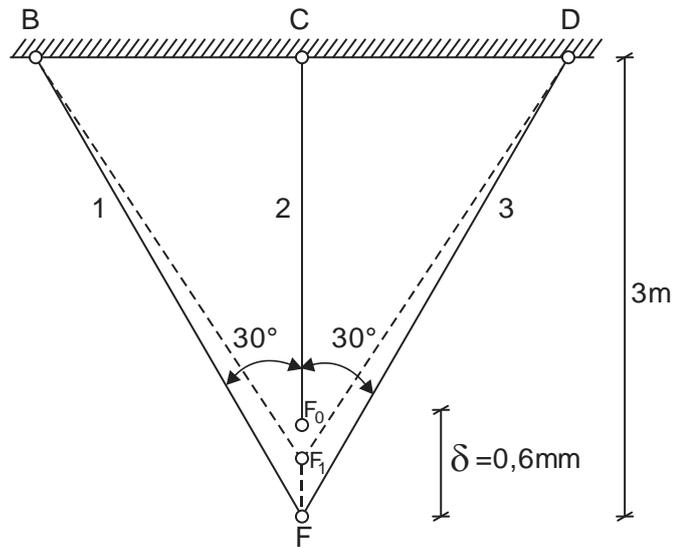
4. Una barra delgada circular de fierro de  $10\text{cm}$  de diámetro es colocada exactamente dentro de un tubo de acero con diámetro exterior  $15\text{cm}$ , el cual a su vez es colocado dentro de un tubo de aluminio con diámetro exterior  $20\text{cm}$ , sin hacer juego (sin holguras), tal como se muestra en la figura. Determinar los esfuerzos normales en la barra de fierro y los tubos de acero y aluminio, si los módulos de elasticidad son  $E_a = 2 \cdot 10^5 \text{MPa}$ ,  $E_f = 1,2 \cdot 10^5 \text{MPa}$  y  $E_{al} = 0,7 \cdot 10^5 \text{MPa}$  (4 puntos)



5. Después de haberse realizado el montaje del sistema estructural, se observó que las barras 1 y 2, que sostienen a la viga infinitamente rígida AB, sufrieron un incremento de temperatura de  $60^\circ\text{C}$ . La barra 1 es de acero y tiene un área de sección transversal de  $20\text{cm}^2$ , en cambio la barra 2 es de cobre y su área es  $80\text{cm}^2$ . Considerar que los coeficientes de dilatación térmica para el acero y el cobre son  $\alpha_a = 125 \cdot 10^{-7}/^\circ\text{C}$  y  $\alpha_c = 165 \cdot 10^{-7}/^\circ\text{C}$ . Además,  $E_a = 2 \cdot 10^5 \text{MPa}$  y  $E_c = 10^5 \text{MPa}$ . Determinar los esfuerzos en las barras 1 y 2 (3 puntos)



6. En el sistema estructural de barras de acero, la barra central fue fabricada menor de lo proyectado en 0,6mm. Determinar los esfuerzos en las barras después de efectuar el montaje de la estructura en F, con la condición que son de áreas iguales y con módulo de elasticidad  $E = 2.10^5 \text{ MPa}$  (3 puntos)



Monterrico, 03 de abril de 2013

## SOLUCIONARIO DE PRÁCTICA CALIFICADA Nº 1

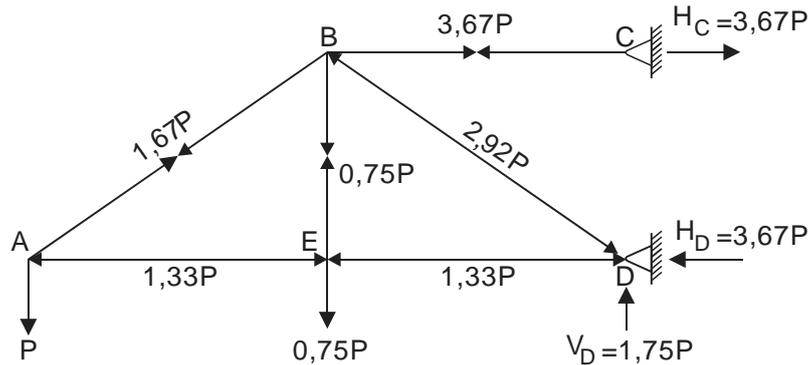
### CICLO 2013-01

1. a) VERDADERO. Efectivamente, el esfuerzo normal simple se calcula por la fórmula  $\sigma = P/A$ , siendo  $P$  la carga axial y  $A$  el área de la sección transversal.

b) Se sabe que:

$$\delta = \frac{PL}{EA} \Rightarrow E = \frac{PL}{\delta A} = \frac{Ps}{\delta A} = \frac{100.10.10^{-2}.4}{0,08.10^{-3}.\pi.1,2^2.10^{-6}} = 1,1.10^5 \text{ MPa (BRONCE)}$$

c) Calculamos las reacciones en los apoyos y determinamos las fuerzas internas en todas las barras de la armadura, tal como se muestra en la figura.



Aplicamos la condición de resistencia:

$$\sigma_{\text{máx}} \leq [\sigma] \Rightarrow \frac{3,67P}{1,25} \leq 20.10^3 \quad \therefore \quad P \leq 6812 \text{ lb}$$

Asumimos:

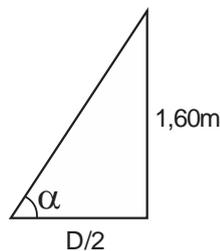
$$P_{\text{máx}} = 6,812 \text{ k}$$

2. Calculamos la diagonal de la losa:

$$D = \sqrt{2,5^2 + 2,5^2} = 3,54 \text{ m}$$

Formamos un triángulo, bajando una vertical desde el gancho hasta la losa y calculamos el ángulo  $\alpha$

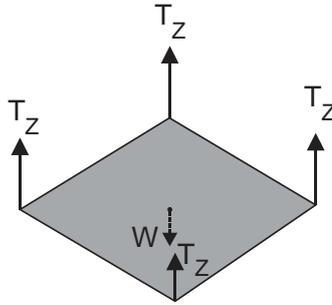
$$\text{tg}\alpha = \frac{1,60}{1,77} = 0,904 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 42,11^\circ$$



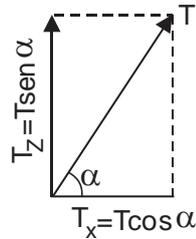
Ahora, calculamos la componente vertical de la tensión del cable:

PESO DE LA LOSA:

$$W = 24.2,5.2,5.0,225 = 33,75 \text{ kN}$$



Esquemizamos la tensión en el cable y sus componentes horizontal y vertical.



Analizamos el equilibrio de la losa:

$$\sum F_z = 0 \quad \Rightarrow \quad 4T_z - W = 0 \quad \therefore \quad 4(T \text{sen} 42,11^\circ) = 33,75$$

$$T = 12,58 \text{ kN}$$

Luego:

$$\sigma_{\text{cable}} = \frac{12,58 \cdot 10^3}{190 \cdot 10^{-6}} = 66,21 \text{ MPa}$$

3. En cualquier sección de la longitud "a" de la barra, su esfuerzo normal es:

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{20 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{-4}} = 100 \text{ MPa}$$

La fuerza de oposición será:

$$p = \frac{P}{L}$$

A una distancia "x" de la sección derecha, la fuerza equivalente de oposición será:

$$N = px = \frac{P}{L} x$$

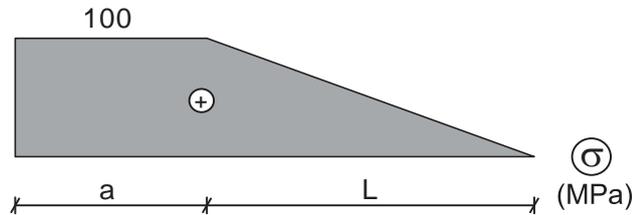
De esta manera, el esfuerzo normal en ese tramo será:

$$\sigma_x = \frac{Px}{LA}$$

Cuando  $x = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{x=0} = 0$

Cuando  $x = L \quad \Rightarrow \quad \sigma_{x=L} = \frac{PL}{LA} = \frac{P}{A} = 100 \text{ MPa}$

Con los valores obtenidos, graficamos el diagrama de esfuerzo normal de la barra, el cual se muestra en la figura.



Ahora, determinamos el alargamiento en cada tramo de la barra.

$$\delta_a = \frac{Pa}{EA} = \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 0,15}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 10^{-4}} = 7,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

$$\delta_L = \int_0^L \frac{Px dx}{LEA} = \frac{PL}{2EA} = \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 0,4}{2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 10^{-4}} = 10^{-4} \text{ m}$$

De esta manera, el alargamiento absoluto será:

$$\delta = \delta_a + \delta_L = 7,5 \cdot 10^{-5} + 10^{-4} = 17,5 \cdot 10^{-5} \text{ m} = 0,175 \text{ mm}$$

4. Bajo la acción de la fuerza  $P = 600 \text{ kN}$  en la barra y en los tubos se originan las fuerzas internas  $P_f$ ,  $P_a$  y  $P_{al}$

Por Estática:

$$\sum F_z = 0 \quad \Rightarrow \quad P_f + P_a + P_{al} = P \quad \dots\dots\dots (a)$$

De esta ecuación se deduce que la estructura es dos veces hiperestática.

Escribimos las fuerzas en función de los esfuerzos:

$$P_f = A_f \sigma_f \quad \dots\dots\dots (b)$$

$$P_a = A_a \sigma_a \quad \dots\dots\dots (c)$$

$$P_{al} = A_{al} \sigma_{al} \quad \dots\dots\dots (d)$$

Calculamos las áreas de sección transversal:

$$A_f = \frac{\pi}{4} \cdot 0,1^2 = 78,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$A_a = \frac{\pi}{4} (0,15^2 - 0,1^2) = 98,2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$A_{al} = \frac{\pi}{4} (0,2^2 - 0,15^2) = 137,4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

Reemplazamos los valores de las áreas en (a), (b), (c) y (d)

$$78,5\sigma_f + 98,2\sigma_a + 137,4\sigma_{al} = 6 \cdot 10^9 \quad \dots\dots\dots (e)$$

Se entiende, que todos los elementos de este sistema disminuyen su longitud en forma igual, es decir:

$$\delta_f = \delta_a = \delta_{al}$$

Además:

$$L_f = L_a = L_{al}$$

En consecuencia, se cumplirá que:

$$\epsilon_f = \epsilon_a = \epsilon_{al}$$

Por la Ley de Hooke, sabemos que  $\epsilon = \sigma / E$

Luego:

$$\frac{\sigma_f}{E_f} = \frac{\sigma_a}{E_a} = \frac{\sigma_{al}}{E_{al}} \dots\dots\dots (f)$$

Reemplazamos (f) en (e), obteniendo:

$$78,5\sigma_f + 98,2 \frac{E_a}{E_f} \sigma_f + 137,4 \frac{E_{al}}{E_f} \sigma_f = 6.10^9$$

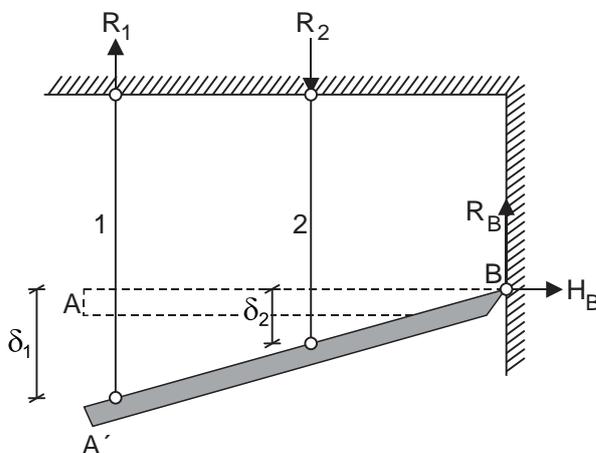
De donde:

$$\sigma_f = 18,6\text{MPa}$$

$$\sigma_a = 31\text{MPa}$$

$$\sigma_{al} = 10,85\text{MPa}$$

5. Posterior a la variación de temperatura, el sistema estructural es el mostrado en la figura, asumiendo que la barra 1 trabaja en tracción y la barra 2 en compresión.



Analizamos el equilibrio:

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow R_1(2a) - R_2(a) = 0 \quad \therefore R_2 = 2R_1$$

Del diagrama de desplazamientos, tenemos:

$$\delta_1 = 2\delta_2$$

Además:

$$\delta_1 = \frac{R_1 L}{E_a A_a} + \alpha_a L(\Delta T)$$

$$\delta_2 = -\frac{R_2 L}{E_c A_c} + \alpha_c L(\Delta T)$$

De esta manera, tenemos:

$$\frac{R_1 L}{E_a A_a} + \alpha_a L(\Delta T) = 2 \left( -\frac{2R_1 L}{E_c A_c} + \alpha_c L(\Delta T) \right)$$

$$\frac{R_1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 20 \cdot 10^{-4}} + 125 \cdot 10^{-7} \cdot 60 = 2 \left( -\frac{2R_1}{10^{11} \cdot 80 \cdot 10^{-4}} + 165 \cdot 10^{-7} \cdot 60 \right)$$

De donde:

$$R_1 = 164000\text{N} = 164\text{kN}$$

$$R_2 = 328000\text{N} = 328\text{kN}$$

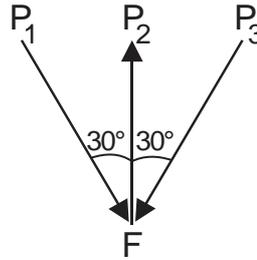
Esto quiere decir, las orientaciones inicialmente mostradas son correctas.

Determinamos los esfuerzos en las barras 1 y 2

$$\sigma_1 = \frac{R_1}{A_a} = \frac{164000}{20 \cdot 10^{-4}} = 82\text{MPa (TRACCION)}$$

$$\sigma_2 = \frac{R_2}{A_c} = \frac{328000}{80 \cdot 10^{-4}} = 41\text{MPa (COMPRESION)}$$

6. Analizamos el equilibrio del nudo F



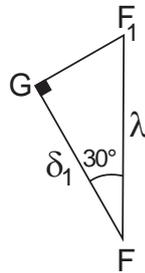
$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad P_1 \sin 30^\circ - P_3 \sin 30^\circ = 0 \quad \therefore \quad P_1 = P_3$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -P_1 \cos 30^\circ + P_2 - P_3 \cos 30^\circ = 0 \quad \therefore \quad P_2 = 1,73P_1$$

Como las áreas son iguales, se cumplirá:

$$\sigma_2 = 1,73\sigma_1$$

Después de efectuar el montaje en F, dicho nudo pasa a la posición F<sub>1</sub>



De acuerdo al diagrama de desplazamientos, se tendrá:

$$\delta = \delta_2 + \lambda = \delta_2 + \frac{\delta_1}{\cos 30^\circ} = \frac{P_2 L_2}{EA} + \frac{P_1 L_1}{EA \cos 30^\circ} = \frac{\sigma_2 L_2}{E} + \frac{\sigma_1}{E \cos 30^\circ} \left( \frac{L_2}{\cos 30^\circ} \right) = \frac{1,73\sigma_1 L_2}{E} + \frac{\sigma_1 L_2}{0,75E}$$

Reemplazando valores obtenemos:

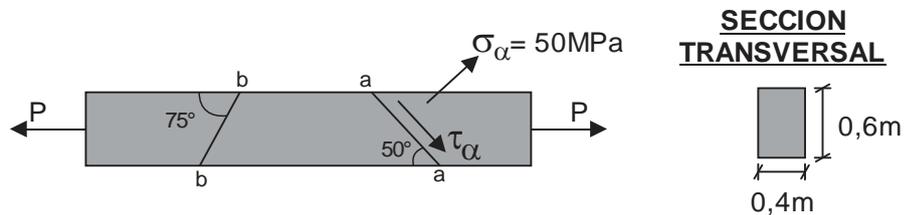
$$\sigma_1 = \sigma_3 = 13\text{MPa (COMPRESION)}$$

$$\sigma_2 = 1,73\sigma_1 = 22,5\text{MPa (TRACCION)}$$

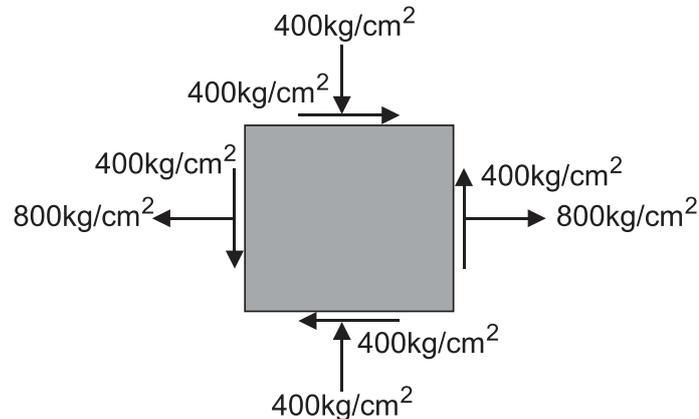
**MECANICA DE MATERIALES (CI80)**  
**EXAMEN PARCIAL**  
**CICLO 2011-01**

**Profesor** : Ph.D. Genner Villarreal Castro  
**Sección** : CI51  
**Duración** : 170 minutos

- Una viga está sometida a una fuerza axial  $P$ , la cual genera esfuerzos sobre la cara inclinada a-a. Se pide:
  - Determinar la carga  $P$  y el esfuerzo tangencial generado sobre dicha sección (1.5 puntos)
  - Determinar los esfuerzos sobre la cara inclinada b-b (1.5 puntos)

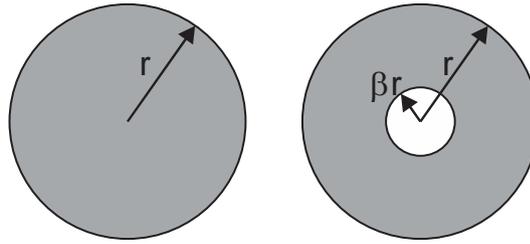


- Un cuerpo en estado plano de esfuerzos está sometido a los esfuerzos que se muestran en la figura. El esfuerzo normal en un plano que pasa por el punto es  $916,742 \text{ kg/cm}^2$ . Determinar en el mismo plano el valor del esfuerzo cortante. (3.5 puntos)

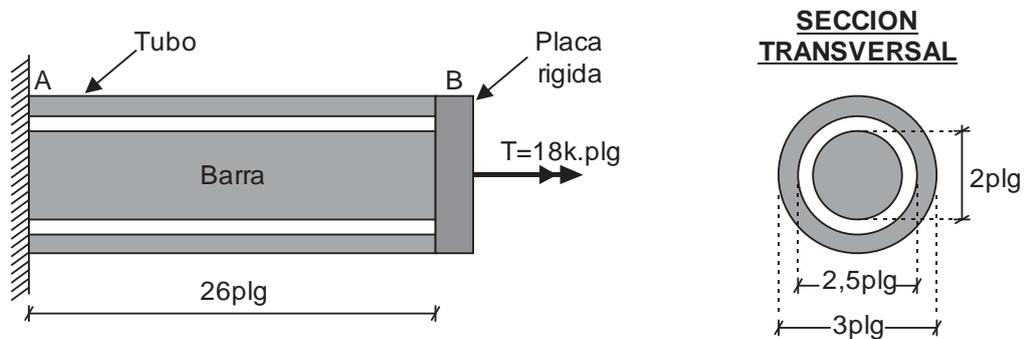


- Si  $\sigma_x = -20 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_y = \sigma_z = 0$ ,  $\tau_{xy} = -10 \text{ MPa}$ ,  $\tau_{xz} = 10 \text{ MPa}$ ,  $\tau_{yz} = 10 \text{ MPa}$ . Determinar los esfuerzos principales y los ángulos que forman cada uno de ellos con los ejes coordenados  $X, Y, Z$  (3.5 puntos)
- Una barra circular no hueca tiene inicialmente un radio  $r$ . Se barrena longitudinalmente un agujero de radio  $\beta r$ . Obtener fórmulas para:
  - El área porcentual extraída (1 punto)

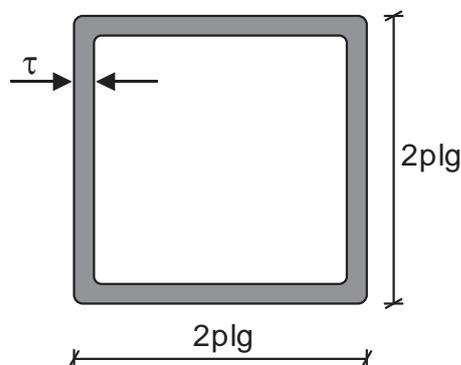
- b) La reducción porcentual en la magnitud del par que puede aplicarse a la barra (1 punto)  
 c) Trazar una gráfica que muestre dichos porcentajes en función de  $\beta$  (1 punto)



5. Una barra circular sólida de acero de 2plg de diámetro está rodeada por un tubo hueco también de acero, con diámetro exterior de 3plg y diámetro interior de 2,5plg. Las dos barras están rígidamente empotradas en A y soldadas a una placa de acero en B
- a) Si se aplica a la placa un momento torsor  $T = 18k \cdot plg$ , ¿Cuáles son los esfuerzos tangenciales máximos  $\tau_t$  y  $\tau_b$  en el tubo y la barra, respectivamente? (2 puntos)  
 b) ¿Cuál es el ángulo de giro en torsión  $\phi$  de la placa, si se supone  $G = 11,5 \cdot 10^6$  psi? (1 punto)  
 c) ¿Cuál es la rigidez torsional  $k$  del conjunto? (1 punto)



6. Una barra tubular de aluminio ( $G = 4 \cdot 10^6$  psi) de sección transversal cuadrada con dimensiones exteriores 2plg x 2plg debe resistir un par  $T = 3000lb \cdot plg$ . Calcular el espesor de pared mínimo requerido  $t$  si el esfuerzo cortante permisible es  $[\tau] = 4000$  psi y el ángulo de torsión por unidad de longitud permisible es  $[\phi_0] = 0,01$  rad / pie (3 puntos)



Monterrico, 11 de mayo de 2011

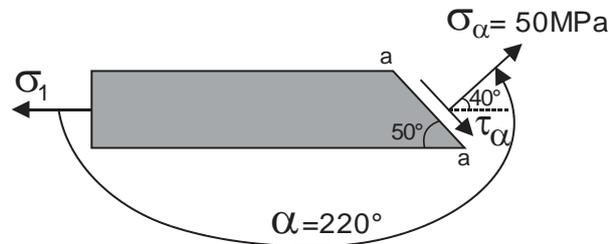
## SOLUCIONARIO DE EXAMEN PARCIAL

### CICLO 2011-01

1. a) Se sabe:

$$\sigma_1 \cos^2 220^\circ = 50 \quad \Rightarrow \quad \frac{P}{A} \cos^2 220^\circ = 50 \quad \therefore \quad P = \frac{50 \cdot 10^6 \cdot 0,4 \cdot 0,6}{\cos^2 220} = 20,45 \text{ MN}$$

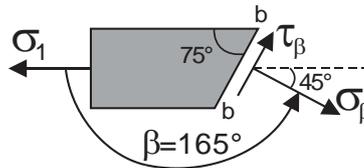
$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1}{2} \sin 2\alpha = \frac{20,45 \cdot 10^6}{2 \cdot 0,4 \cdot 0,6} \sin 440^\circ = 41,96 \text{ MPa}$$



b) Efectuamos cálculos en forma análoga:

$$\sigma_\beta = \sigma_1 \cos^2 165^\circ = \frac{20,45 \cdot 10^6}{0,4 \cdot 0,6} \cos^2 165^\circ = 79,50 \text{ MPa}$$

$$\tau_\beta = \frac{\sigma_1}{2} \sin 330^\circ = \frac{20,45 \cdot 10^6}{2 \cdot 0,4 \cdot 0,6} \sin 330^\circ = -21,30 \text{ MPa}$$



2. De acuerdo al problema:

$$\sigma_x = 800 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_y = -400 \text{ kg/cm}^2$$

$$\tau_{xy} = -400 \text{ kg/cm}^2$$

Luego:

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha$$

$$916,742 = \frac{800 - 400}{2} + \frac{800 - (-400)}{2} \cos 2\alpha - (-400) \sin 2\alpha$$

$$916,742 = 200 + 600(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + 400(2 \sin \alpha \cos \alpha)$$

$$600 \cos^2 \alpha - 600 \sin^2 \alpha + 800 \sin \alpha \cos \alpha - 716,742 = 0$$

$$600 \cos^2 \alpha - 600 \sin^2 \alpha + 800 \sin \alpha \cos \alpha - 716,742(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 0$$

$$1316,742 \sin^2 \alpha - 800 \sin \alpha \cos \alpha + 116,742 \cos^2 \alpha = 0$$

Dividimos entre  $\cos^2 \alpha$  y obtenemos una ecuación cuadrática:

$$1316,742 \operatorname{tg}^2 \alpha - 800 \operatorname{tg} \alpha + 116,742 = 0$$

Como resultado obtenemos dos soluciones:

1ra SOLUCION:

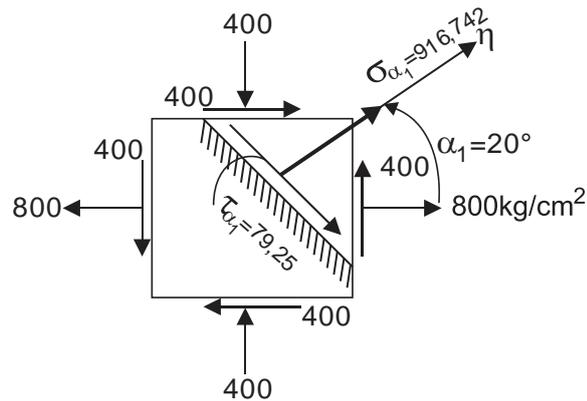
$$\operatorname{tg} \alpha_1 = 0,3640 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = 20^\circ$$

Luego:

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \operatorname{sen} 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha$$

$$\tau_{\alpha_1} = \frac{800 - (-400)}{2} \operatorname{sen} 40^\circ - 400 \cos 40^\circ = 79,25 \operatorname{kg/cm}^2$$

El esquema de distribución de esfuerzos es el mostrado en la figura:

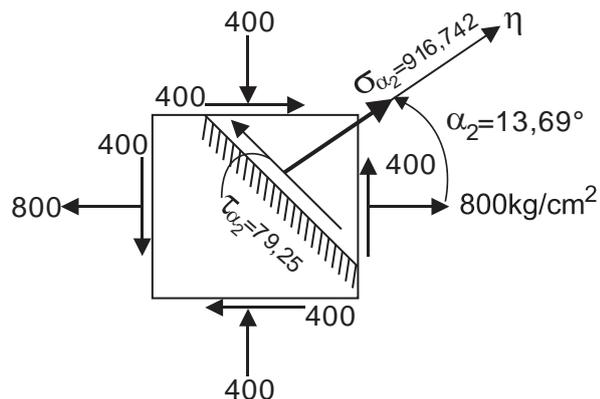


2da SOLUCION:

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = 0,2436 \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = 13,69^\circ$$

$$\tau_{\alpha_2} = \frac{800 - (-400)}{2} \operatorname{sen} 27,38^\circ - 400 \cos 27,38^\circ = -79,25 \operatorname{kg/cm}^2$$

La distribución de esfuerzos se muestra en la siguiente figura:



3. Resolvemos la ecuación cúbica:

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0$$

Dónde:

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = -20$$

$$I_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2 = -(-10)^2 - 10^2 - 10^2 = -300$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_X & \tau_{XY} & \tau_{XZ} \\ \tau_{XY} & \sigma_Y & \tau_{YZ} \\ \tau_{XZ} & \tau_{YZ} & \sigma_Z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -20 & -10 & 10 \\ -10 & 0 & 10 \\ 10 & 10 & 0 \end{vmatrix} = -10^3 - 10^3 + 20 \cdot 10^2 = 0$$

Reemplazamos y resolvemos la ecuación:

$$\sigma^3 + 20\sigma^2 - 300\sigma = 0$$

$$\sigma(\sigma + 30)(\sigma - 10) = 0$$

Ordenamos de mayor a menor ( $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ ), obteniendo:

$$\sigma_1 = 10 \text{MPa}$$

$$\sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = -30 \text{MPa}$$

ANGULOS DIRECTORES PARA  $\sigma_1$

Se sabe que:

$$(\sigma_1 - \sigma_X)k - \tau_{XY}m - \tau_{XZ}n = 0$$

$$-\tau_{XY}k + (\sigma_1 - \sigma_Y)m - \tau_{YZ}n = 0$$

$$-\tau_{XZ}k - \tau_{YZ}m + (\sigma_1 - \sigma_Z)n = 0$$

Reemplazamos valores:

$$3k + m - n = 0$$

$$k + m - n = 0$$

$$-k - m + n = 0$$

De donde:

$$k = 0$$

$$m = n$$

Además:

$$k^2 + m^2 + n^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad m = n = \sqrt{2}/2$$

Luego:

$$k = \cos \alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = 90^\circ$$

$$m = \cos \beta = \sqrt{2}/2 \quad \Rightarrow \quad \beta_1 = 45^\circ$$

$$n = \cos \gamma = \sqrt{2}/2 \quad \Rightarrow \quad \gamma_1 = 45^\circ$$

ANGULOS DIRECTORES PARA  $\sigma_2$

Procedemos en forma análoga al caso anterior.

$$(\sigma_2 - \sigma_X)k - \tau_{XY}m - \tau_{XZ}n = 0$$

$$-\tau_{XY}k + (\sigma_2 - \sigma_Y)m - \tau_{YZ}n = 0$$

$$-\tau_{XZ}k - \tau_{YZ}m + (\sigma_2 - \sigma_Z)n = 0$$

Reemplazamos valores:

$$2k + m - n = 0$$

$$k - n = 0$$

$$-k - m = 0$$

De donde:

$$k = n$$

$$m = -k$$

Además:

$$k^2 + m^2 + n^2 = 1$$

De donde:

$$k = \cos \alpha = 0,5773 \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = 54,74^\circ$$

$$m = \cos \beta = -0,5773 \quad \Rightarrow \quad \beta_2 = 125,26^\circ$$

$$n = \cos \gamma = 0,5773 \quad \Rightarrow \quad \gamma_2 = 54,74^\circ$$

ANGULOS DIRECTORES PARA  $\sigma_3$

Sabemos que:

$$(\sigma_3 - \sigma_x)k - \tau_{xy}m - \tau_{xz}n = 0$$

$$-\tau_{xy}k + (\sigma_3 - \sigma_y)m - \tau_{yz}n = 0$$

$$-\tau_{xz}k - \tau_{yz}m + (\sigma_3 - \sigma_z)n = 0$$

Reemplazamos valores:

$$-k + m - n = 0$$

$$k - 3m - n = 0$$

$$-k - m - 3n = 0$$

De donde:

$$k = -2n$$

$$m = -n$$

Además:

$$k^2 + m^2 + n^2 = 1$$

De donde:

$$k = \cos \alpha = -0,8164 \quad \Rightarrow \quad \alpha_3 = 144,72^\circ$$

$$m = \cos \beta = -0,4082 \quad \Rightarrow \quad \beta_3 = 114,09^\circ$$

$$n = \cos \gamma = 0,4082 \quad \Rightarrow \quad \gamma_3 = 65,91^\circ$$

4. a) Reducción de área =  $\frac{A_0 - A_f}{A_0} (100) = \frac{\pi r^2 - (\pi r^2 - \pi r^2 \beta^2)}{\pi r^2} (100) = 100\beta^2$

b) Como:

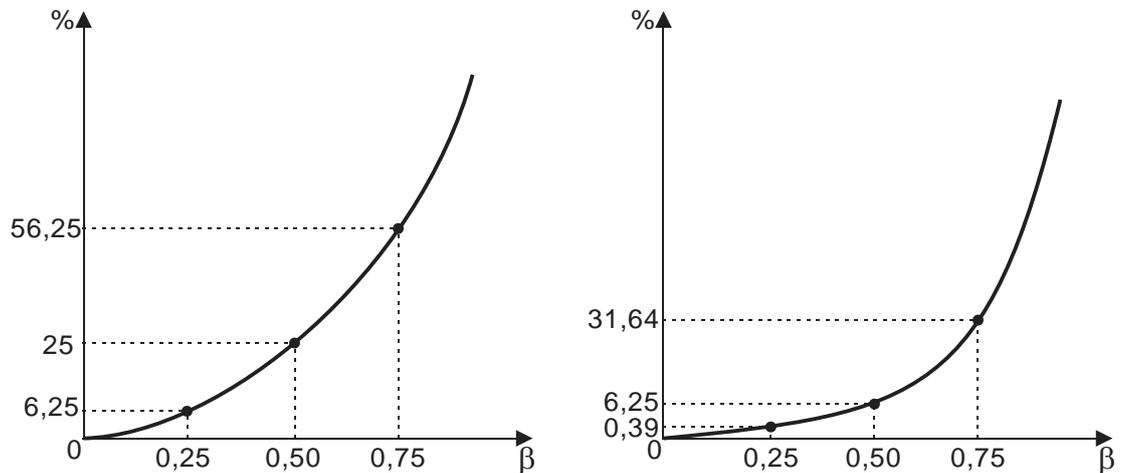
$$T_0 = \frac{\tau \cdot I_{p(\text{circular})}}{r} = \frac{\tau \pi (2r)^4}{32r} = \frac{\pi \tau}{32r} (2r)^4$$

$$T_f = \frac{\tau \cdot I_{p(\text{tubular})}}{r} = \frac{\pi \tau}{32r} [(2r)^4 - (2\beta r)^4]$$

Luego:

$$\text{Reducción del par} = \frac{T_0 - T_f}{T_0} (100) = \frac{\frac{\pi\tau}{32r} [(2r)^4 - (2r)^4 + (2\beta r)^4]}{\frac{\pi\tau}{32r} (2r)^4} (100) = 100\beta^4$$

c) De acuerdo a las ecuaciones obtenidas, ambos gráficos son curvos debido al exponente de  $\beta$



5. a) Como el momento torsor total será absorbido por el tubo y la barra, se tendrá:

$$T = T_t + T_b$$

Además, por tratarse de una sola estructura, se cumplirá que:

$$\phi = \frac{T_t L}{GI_{pt}} = \frac{T_b L}{GI_{pb}}$$

Luego:

$$T_t + \frac{I_{pb}}{I_{pt}} T_t = T$$

$$T_t = T \left( \frac{I_{pt}}{I_{pt} + I_{pb}} \right) = 18.10^3 \left( \frac{(\pi/32)(3^4 - 2.5^4)}{(\pi/32)(3^4 - 2.5^4) + (\pi/32)(2)^4} \right) = 13,029 \text{ k.p.lg}$$

$$T_b = 4,971 \text{ k.p.lg}$$

En consecuencia:

$$\tau_t = \frac{T_t (d_t / 2)}{I_{pt}} = \frac{13,029.10^3.1.5}{(\pi/32)(3^4 - 2.5^4)} = 4746,8 \text{ psi}$$

$$\tau_b = \frac{T_b (d_b / 2)}{I_{pb}} = \frac{4,971.10^3.1}{(\pi/32)(2)^4} = 3164,6 \text{ psi}$$

b) Determinamos el ángulo de giro en torsión:

$$\phi = \frac{T_b L}{GI_{pb}} = \frac{4,971.10^3.26}{11,5.10^6.(\pi/32)(2)^4} = 0,007155 \text{ rad} = 0,41^\circ$$

c) Calculamos la rigidez torsional:

$$k = \frac{T}{\phi} = \frac{18 \cdot 10^3}{0,007155} = 2,516 \cdot 10^6 \text{ lb.plg/ rad}$$

6. CONDICION DE RESISTENCIA:

$$\tau \leq [\tau] \Rightarrow \tau = \frac{T}{2tA_0} = \frac{3000}{2t(2-t)(2-t)} \leq 4000 \quad \therefore \quad t \geq 0,105 \text{ plg}$$

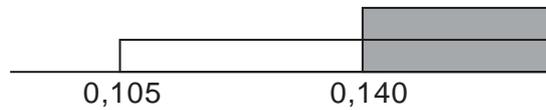
CONDICION DE RIGIDEZ:

$$\phi_0 \leq [\phi_0] \Rightarrow \phi_0 = \frac{T}{GI_t} = \frac{3000}{4 \cdot 10^6 \cdot t(2-t)^3} \leq \frac{0,01}{12} \quad \therefore \quad t \geq 0,140 \text{ plg}$$

Siendo:

$$I_t = \frac{2b^2h^2t_1t_2}{bt_1 + ht_2} = \frac{2(2-t)^2(2-t)^2t \cdot t}{(2-t)t + (2-t)t} = t(2-t)^3$$

En consecuencia:

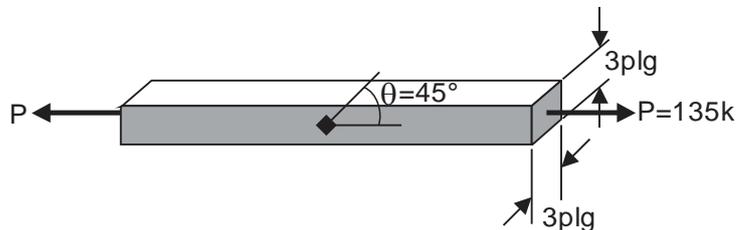


$$t_{\min} = 0,140 \text{ plg}$$

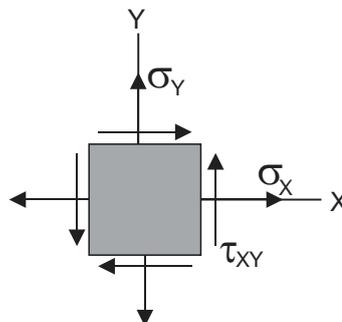
**MECANICA DE MATERIALES (CI80)**  
**EXAMEN PARCIAL**  
**CICLO 2011-02**

**Profesor** : Ph.D. Genner Villarreal Castro  
**Sección** : CI51  
**Duración** : 170 minutos

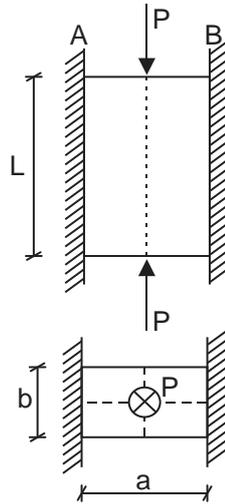
1. Una barra prismática de acero de sección transversal cuadrada de 3plg x 3plg se somete a una fuerza de tracción  $P = 135k$  . Determinar los esfuerzos normales y tangenciales en las cuatro caras de un elemento girado un ángulo  $\theta = 45^\circ$  (3 puntos)



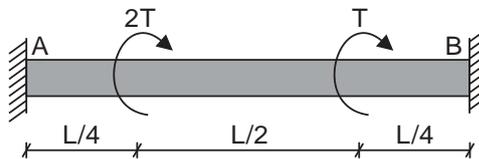
2. Un elemento está sometido al estado plano de esfuerzos, según se muestra en la figura, siendo  $\sigma_x = 44MPa$ ,  $\sigma_y = 194MPa$  y  $\tau_{xy} = -36MPa$ . Se pide determinar los esfuerzos que actúan sobre un elemento orientado a un ángulo  $\alpha = 35^\circ$  respecto al eje X, los esfuerzos principales y su orientación, así como el esfuerzo tangencial máximo. (3 puntos)



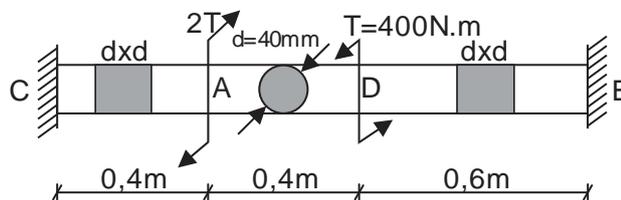
3. Entre las planchas fijas paralelas A y B está fuertemente apesada una barra de acero con forma de paralelepípedo, cuyos lados son  $a = 4cm$  ,  $b = 2cm$  ,  $L = 6cm$  . Calcular el coeficiente de Poisson del material de la barra, si se sabe que durante la compresión con unas fuerzas  $P = 100kN$  la presión de la barra sobre las planchas es  $p = 40MPa$ . Hallar el coeficiente de deformación volumétrica "e" y el acortamiento elástico de la barra  $\delta$  , despreciando las fuerzas de rozamiento de ésta sobre las planchas. Considerar  $E = 2.10^5 MPa$  (4 puntos)



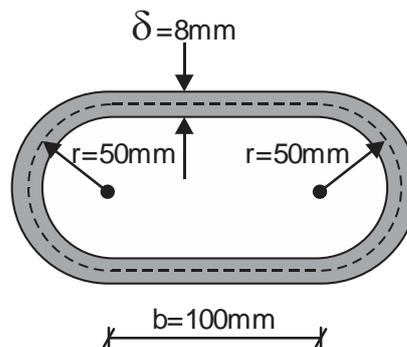
4. Obtener una fórmula para la energía potencial de deformación  $U$  de la barra circular AB, con extremos empotrados, mostrada en la figura. (3 puntos)



5. La barra mostrada en la figura, tiene sección transversal cuadrada en los tramos CA y DB de dimensiones  $40\text{mm} \times 40\text{mm}$  y en el tramo AD es de sección circular de diámetro  $40\text{mm}$ . Se pide determinar el esfuerzo tangencial máximo y el ángulo de giro en torsión en A, si  $G = 8 \cdot 10^4 \text{MPa}$  (4 puntos)



6. Calcular el esfuerzo tangencial  $\tau$  y el ángulo de giro en torsión  $\phi$  para un tubo de acero ( $G = 76\text{GPa}$ ) que tiene la sección transversal mostrada en la figura. El tubo tiene una longitud  $L = 1,5\text{m}$  y está sometido a un momento torsor  $T = 10\text{kN}\cdot\text{m}$  (3 puntos)



## SOLUCIONARIO DE EXAMEN PARCIAL

### CICLO 2011-02

1. Como:

$$\sigma_1 = \frac{P}{A} = \frac{135.10^3}{9} = 15000 \text{psi} = 15 \text{ksi}$$

Luego, analizamos cada una de las caras del elemento.

CARA AB: Cuando  $\theta = 45^\circ$

$$\sigma_{\theta=45^\circ} = \sigma_1 \cos^2 45^\circ = 15 \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 = 7,5 \text{ksi}$$

$$\tau_{\theta=45^\circ} = \frac{1}{2} \sigma_1 \sin 90^\circ = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 1 = 7,5 \text{ksi}$$

CARA BC: Cuando  $\theta = 135^\circ$

$$\sigma_{\theta=135^\circ} = \sigma_1 \cos^2 135^\circ = 15 \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 = 7,5 \text{ksi}$$

$$\tau_{\theta=135^\circ} = \frac{1}{2} \sigma_1 \sin 270^\circ = \frac{1}{2} (15)(-1) = -7,5 \text{ksi}$$

CARA AD: Cuando  $\theta = -45^\circ$

$$\sigma_{\theta=-45^\circ} = \sigma_1 \cos^2 (-45^\circ) = 15 \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 = 7,5 \text{ksi}$$

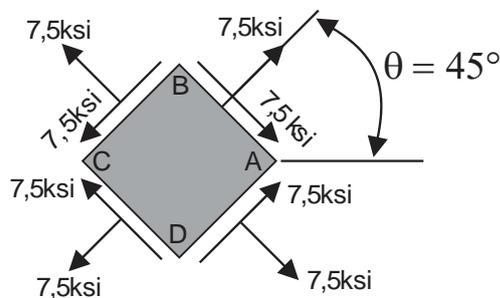
$$\tau_{\theta=-45^\circ} = \frac{1}{2} \sigma_1 \sin (-90^\circ) = \frac{1}{2} (15)(-1) = -7,5 \text{ksi}$$

CARA DC: Cuando  $\theta = -135^\circ$

$$\sigma_{\theta=-135^\circ} = \sigma_1 \cos^2 (-135^\circ) = 15 \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 = 7,5 \text{ksi}$$

$$\tau_{\theta=-135^\circ} = \frac{1}{2} \sigma_1 \sin (-270^\circ) = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 1 = 7,5 \text{ksi}$$

Siendo los esfuerzos normales y tangenciales los mostrados en la siguiente figura:



2. Determinamos los esfuerzos que actúan sobre un elemento orientado un ángulo  $\alpha = 35^\circ$  con respecto al eje X

$$\sigma_{\alpha=35^\circ} = \frac{44 + 194}{2} + \frac{44 - 194}{2} \cos 70^\circ + 36 \sin 70^\circ = 127,18 \text{MPa}$$

$$\tau_{\alpha=35^\circ} = \frac{44-194}{2} \sin 70^\circ - 36 \cos 70^\circ = -82,79 \text{MPa}$$

Calculamos los esfuerzos principales:

$$\sigma_1 = \frac{44+194}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(44-194)^2 + 4(-36)^2} = 202,19 \text{MPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{44+194}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(44-194)^2 + 4(-36)^2} = 35,81 \text{MPa}$$

Luego, la orientación de los esfuerzos principales es:

$$\text{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2(-36)}{44-194} = -0,48 \quad \Rightarrow \quad \alpha_0 = -12,82^\circ$$

Ahora, determinamos el esfuerzo tangencial máximo:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{202,19 - 35,81}{2} = 83,19 \text{MPa}$$

3. Del gráfico:

$$\sigma_x = p = -40 \text{MPa}$$

$$\sigma_y = 0$$

$$\sigma_z = -\frac{P}{ab} = -\frac{100 \cdot 10^3}{4 \cdot 2 \cdot 10^{-4}} = -125 \text{MPa}$$

Además:

$$\varepsilon_x = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] = 0$$

De donde:

$$\mu = \frac{\sigma_x}{\sigma_y + \sigma_z} = \frac{-40}{0 - 125} = 0,32$$

Luego:

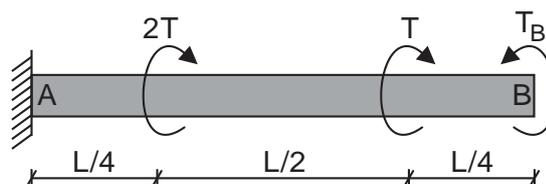
$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1-2\mu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1-2 \cdot 0,32}{2 \cdot 10^5} (-40 + 0 - 125) = -2,97 \cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] = \frac{1}{2 \cdot 10^5} [-125 - 0,32(-40 + 0)] = -5,61 \cdot 10^{-4}$$

Sabemos que:

$$\varepsilon_z = \frac{\delta}{L} \quad \Rightarrow \quad \delta = \varepsilon_z L = -5,61 \cdot 10^{-4} \cdot 6 \cdot 10^{-2} = -33,66 \cdot 10^{-6} \text{m} = -0,03366 \text{mm} \approx -0,034 \text{mm}$$

4. Eliminamos el empotramiento en B y lo reemplazamos por  $T_B$ , tal como se muestra en la figura.



Se sabe que:

$$\phi_B = 0$$

$$\frac{T_B L}{GI_p} - \frac{T(3L/4)}{GI_p} - \frac{2T(L/4)}{GI_p} = 0$$

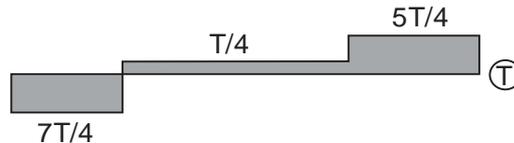
De donde:

$$T_B = \frac{5T}{4}$$

Luego:

$$\sum T_{\text{eje}} = 0 \quad \Rightarrow \quad T_A + T_B = 3T \quad \therefore \quad T_A = 3T - \frac{5T}{4} = \frac{7T}{4}$$

Con los valores obtenidos, graficamos el diagrama de momento torsor.

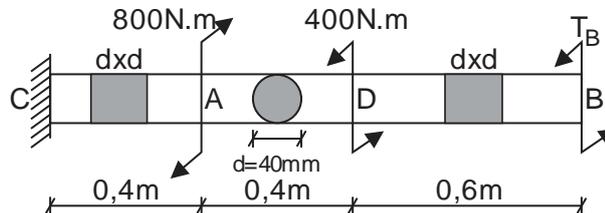


Determinamos la energía potencial de deformación.

$$U = \frac{(-7T/4)^2(L/4)}{2GI_p} + \frac{(T/4)^2(L/2)}{2GI_p} + \frac{(5T/4)^2(L/4)}{2GI_p} = \frac{49T^2L}{128GI_p} + \frac{T^2L}{64GI_p} + \frac{25T^2L}{128GI_p}$$

$$U = \frac{19T^2L}{32GI_p}$$

5. Eliminamos el empotramiento en B y lo reemplazamos por  $T_B$



Sabemos que:

$$\phi_B = 0$$

$$\frac{T_B \cdot 0,6}{G \cdot 0,141 \cdot 40^4 \cdot 10^{-12}} + \frac{(T_B + 400) \cdot 0,4}{G(\pi/32) \cdot 40^4 \cdot 10^{-12}} + \frac{(T_B - 400) \cdot 0,4}{G \cdot 0,141 \cdot 40^4 \cdot 10^{-12}} = 0$$

De donde:

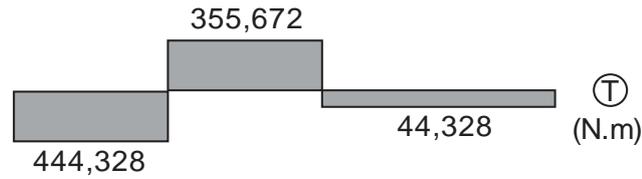
$$T_B = -44,328 \text{ N.m}$$

Con el valor obtenido, graficamos el diagrama de momento torsor y calculamos los esfuerzos tangenciales en cada tramo, para saber el tramo donde ocurre el valor máximo.

$$\tau_{\text{máx}} = \tau_{CA} = \frac{444,328}{0,208 \cdot 40^3 \cdot 10^{-9}} = 33,378 \text{ MPa}$$

$$\tau_{AD} = \frac{16.355,672}{\pi \cdot 40^3 \cdot 10^{-9}} = 28,303 \text{ MPa}$$

$$\tau_{DB} = \frac{44,328}{0,208.40^3 \cdot 10^{-9}} = 3,33 \text{MPa}$$



Determinamos el ángulo de giro en torsión en A

$$\phi_A = \frac{444,328 \cdot 0,4}{8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \cdot 0,141 \cdot 40^4 \cdot 10^{-12}} = 6,155 \cdot 10^{-3} \text{ rad} = 0,353^\circ$$

6. Se sabe que:

$$\tau = \frac{T}{2A_o \delta} = \frac{10 \cdot 10^3}{2 \cdot 17853,98 \cdot 10^{-6} \cdot 8 \cdot 10^{-3}} = 35 \text{MPa}$$

Dónde:

$$A_o = 100 \cdot 10^{-3} \cdot 100 \cdot 10^{-3} + \pi(50 \cdot 10^{-3})^2 = 17853,98 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$$

Luego:

$$\phi = \frac{TL}{GI_t} = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 1,5}{76 \cdot 10^9 \cdot 1,984 \cdot 10^{-5}} = 9,948 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \approx 0,01 \text{ rad}$$

Dónde:

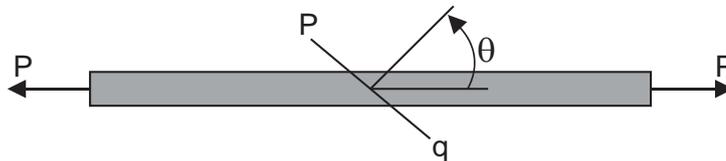
$$I_t = \frac{4A_o^2}{\int_0^{L_{media}} \frac{ds}{\delta}} = \frac{4(17853,98 \cdot 10^{-6})^2}{\int_0^{0,514} \frac{ds}{8 \cdot 10^{-3}}} = 1,984 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$$

$$L_{media} = 2 \cdot 100 \cdot 10^{-3} + 2\pi(50 \cdot 10^{-3}) = 0,514 \text{ m}$$

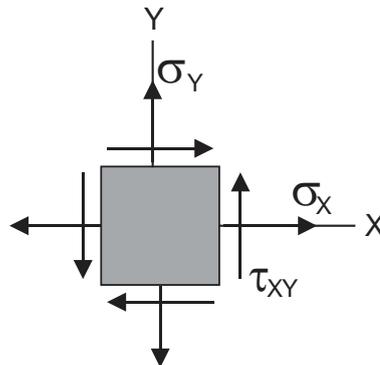
**MECANICA DE MATERIALES (CI80)**  
**EXAMEN PARCIAL**  
**CICLO 2012-01**

**Profesor : Ph.D. Genner Villarreal Castro**  
**Sección : CI51**  
**Duración : 170 minutos**

1. Una barra prismática, cuya área de sección transversal es  $A$ , se somete a fuerzas de tracción  $P$ , tal como se muestra en la figura. Los esfuerzos sobre un plano inclinado  $pq$  son  $\sigma_\theta = 81\text{MPa}$  y  $\tau_\theta = 27\text{MPa}$ . Determinar el esfuerzo normal  $\sigma_1$  y el ángulo  $\theta$  (2 puntos)

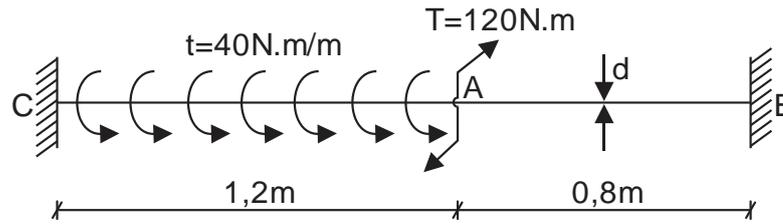


2. Un elemento está sometido al estado plano de esfuerzos, según se muestra en la figura, siendo  $\sigma_x = \sigma_y = 2000\text{psi}$  y  $\tau_{xy} = -2750\text{psi}$ . Se pide determinar los esfuerzos que actúan sobre un elemento orientado a un ángulo  $\theta = 60^\circ$  respecto al eje  $X$ , los esfuerzos principales y el esfuerzo tangencial máximo. (3 puntos)

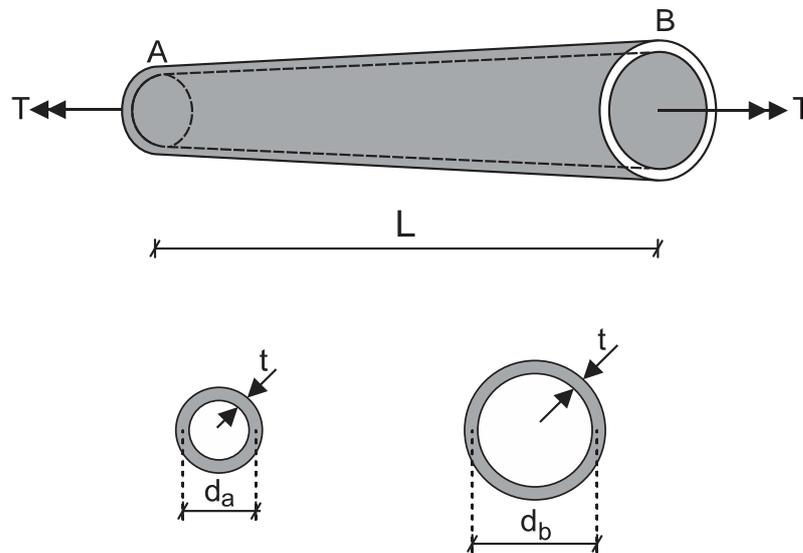


3. Determinar los esfuerzos principales y los ángulos directores de cada plano principal, sabiendo que  $\sigma_x = \sigma_y = 0$ ,  $\sigma_z = -10\text{MPa}$ ,  $\tau_{xy} = 5\text{MPa}$ ,  $\tau_{yz} = -5\text{MPa}$ ,  $\tau_{xz} = 5\text{MPa}$  (4 puntos)
4. Una barra eje para la hélice de una pequeña embarcación está hecha de una barra maciza de acero de 4plg de diámetro. El esfuerzo tangencial permisible es 7200psi y el ángulo de giro en torsión admisible es  $1^\circ$  en 60plg. Determinar el par máximo  $T$  que puede aplicarse a la barra, considerando que  $G = 11,8 \cdot 10^6 \text{psi}$  (3 puntos)

5. Determinar el diámetro de la barra doblemente empotrada mostrada en la figura y el ángulo de giro en torsión en A, si  $[\tau] = 10\text{MPa}$  y  $G = 8 \cdot 10^4\text{MPa}$  (4 puntos)



6. Un tubo hueco de pared delgada AB de forma cónica tiene espesor constante  $t$  y diámetros medios  $d_a$  y  $d_b$  en los extremos. Obtener una fórmula para la energía de deformación  $U$  del tubo cuando se somete a torsión pura mediante un momento torsor  $T$  (4 puntos)



Monterrico, 10 de mayo de 2012

## SOLUCIONARIO DE EXAMEN PARCIAL

### CICLO 2012-01

1. Como:

$$\sigma_{\theta} = \sigma_1 \cos^2 \theta$$

$$\tau_{\theta} = \frac{1}{2} \sigma_1 \sin 2\theta$$

Luego:

$$\sigma_1 \cos^2 \theta = 81 \quad \dots\dots\dots (a)$$

$$\sigma_1 \sin \theta \cos \theta = 27 \quad \dots\dots\dots (b)$$

Dividimos (b) entre (a):

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \theta = \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{3} \right) = 18,43^{\circ}$$

Entonces se tendrá:

$$\sigma_1 = \frac{81}{\cos^2 18,43^{\circ}} = 90 \text{MPa}$$

2. Determinamos los esfuerzos que actúan sobre un elemento orientado un ángulo  $\theta = 60^{\circ}$  con respecto al eje X

$$\sigma_{\theta=60^{\circ}} = \frac{2000 + 2000}{2} + \frac{2000 - 2000}{2} \cos 120^{\circ} - (-2750) \sin 120^{\circ} = 4381,57 \text{psi}$$

$$\tau_{\theta=60^{\circ}} = \frac{2000 - 2000}{2} \sin 120^{\circ} - 2750 \cos 120^{\circ} = 1375 \text{psi}$$

Calculamos los esfuerzos principales:

$$\sigma_1 = \frac{2000 + 2000}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(2000 - 2000)^2 + 4(-2750)^2} = 4750 \text{psi}$$

$$\sigma_2 = \frac{2000 + 2000}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(2000 - 2000)^2 + 4(-2750)^2} = -750 \text{psi}$$

Ahora, determinamos el esfuerzo tangencial máximo:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{4750 - (-750)}{2} = 2750 \text{psi}$$

3. Sabemos que:

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0$$

Dónde:

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = -10$$

$$I_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2 = -5^2 - 5^2 - (-5)^2 = -75$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 5 & 0 & -5 \\ 5 & -5 & -10 \end{vmatrix} = -125 - 125 + 250 = 0$$

Reemplazando valores obtenemos:

$$\sigma^3 + 10\sigma^2 - 75\sigma = 0$$

De donde:

$$\sigma_1 = 5\text{MPa}$$

$$\sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = -15\text{MPa}$$

ANGULOS DIRECTORES PARA  $\sigma_1$ :

$$(\sigma_1 - \sigma_x)k - \tau_{xy}m - \tau_{xz}n = 0$$

$$-\tau_{xy}k + (\sigma_1 - \sigma_y)m - \tau_{yz}n = 0$$

$$-\tau_{xz}k - \tau_{yz}m + (\sigma_1 - \sigma_z)n = 0$$

Dónde:

$k, m, n$  - cosenos directores

Reemplazamos valores y obtenemos:

$$k - m - n = 0 \quad \dots\dots\dots (a)$$

$$k - m - n = 0 \quad \dots\dots\dots (b)$$

$$-k + m + 3n = 0 \quad \dots\dots\dots (c)$$

Sumando (b) y (c):

$$n = 0$$

$$k = m$$

Elevamos al cuadrado la ecuación (a):

$$k^2 + m^2 + n^2 - 2km + 2mn - 2kn = 0$$

Por el curso Dinámica, se sabe que:

$$k^2 + m^2 + n^2 = 1$$

De donde:

$$1 - 2k^2 = 0$$

$$k = m = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Entonces:

$$k = \cos \alpha_1 = \sqrt{2}/2 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = 45^\circ$$

$$m = \cos \beta_1 = \sqrt{2}/2 \quad \Rightarrow \quad \beta_1 = 45^\circ$$

$$n = \cos \gamma_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma_1 = 90^\circ$$

ANGULOS DIRECTORES PARA  $\sigma_2$ :

No es necesario calcularlo, ya que  $\sigma_2 = 0$ , pero para efectos de direcciones lo efectuamos en forma análoga al caso anterior, obteniendo:

$$m + n = 0 \quad \dots\dots\dots (d)$$

$$-k + n = 0 \quad \dots\dots\dots (e)$$

$$-k + m + 2n = 0 \dots\dots\dots (f)$$

Restamos (f) menos (e):

$$m = -n$$

$$k = n$$

Además:

$$k^2 + m^2 + n^2 = 1$$

De donde:

$$k = \cos \alpha_2 = 0,5773 \Rightarrow \alpha_2 = 54,74^\circ$$

$$m = \cos \beta_2 = -0,5773 \Rightarrow \beta_2 = 125,26^\circ$$

$$n = \cos \gamma_2 = 0,5773 \Rightarrow \gamma_2 = 54,74^\circ$$

ANGULOS DIRECTORES PARA  $\sigma_3$ :

Analizamos en forma análoga a los casos anteriores, obteniendo:

$$3k + m + n = 0 \dots\dots\dots (g)$$

$$-k - 3m + n = 0 \dots\dots\dots (h)$$

$$-k + m - n = 0 \dots\dots\dots (i)$$

De donde:

$$k = -m$$

$$n = 2m$$

Elevamos al cuadrado la ecuación (i):

$$k^2 + m^2 + n^2 - 2km + 2kn - 2mn = 0$$

Además:

$$k^2 + m^2 + n^2 = 1$$

De donde:

$$k = \cos \alpha_3 = -0,4082 \Rightarrow \alpha_3 = 114,09^\circ$$

$$m = \cos \beta_3 = 0,4082 \Rightarrow \beta_3 = 65,90^\circ$$

$$n = \cos \gamma_3 = 0,8164 \Rightarrow \gamma_3 = 35,27^\circ$$

4. Como:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{16T}{\pi d^3} \leq \tau_{\text{perm}} \Rightarrow T \leq \frac{\pi d^3 \tau_{\text{perm}}}{16}$$

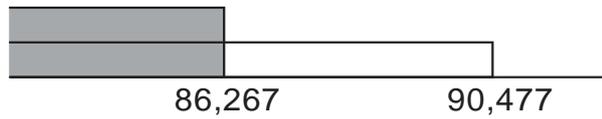
$$T \leq \frac{\pi \cdot 4^3 \cdot 7200}{16} = 90477 \text{ lb.p lg} = 90,477 \text{ k.p lg}$$

Además:

$$\phi = \frac{TL}{GI_p} \leq \phi_{\text{perm}} \Rightarrow T \leq \frac{\phi_{\text{perm}} GI_p}{L}$$

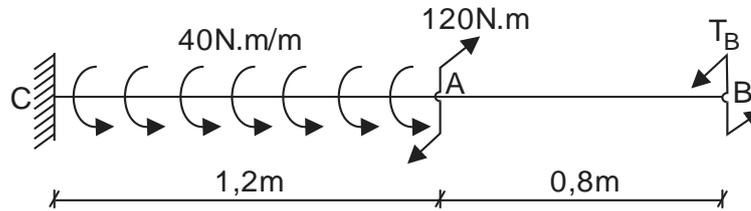
$$T \leq \frac{(\pi/180) \cdot 11,8 \cdot 10^6 \cdot (\pi/32) \cdot 4^4}{60} = 86267 \text{ lb.p lg} = 86,267 \text{ k.p lg}$$

Luego:



$$T_{\text{máx}} = 86,267 \text{ k.p.lg}$$

5. Eliminamos el empotramiento en B y lo reemplazamos por  $T_B$



Sabemos que:

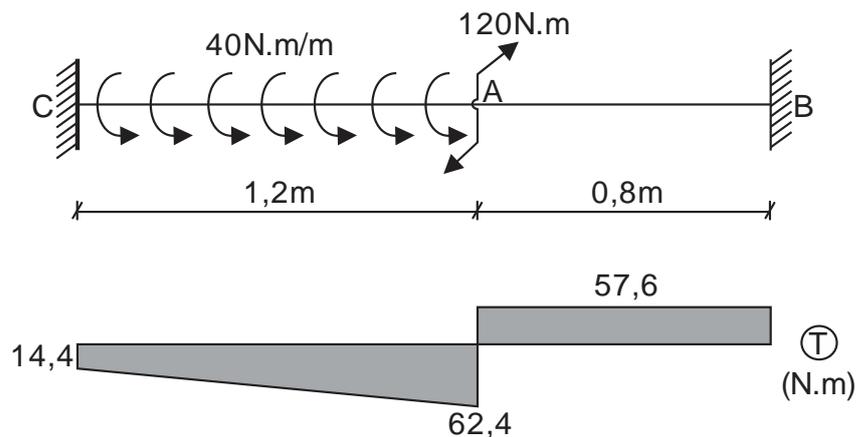
$$\phi_B = 0$$

$$\frac{T_B(0,8)}{GI_p} + \int_0^{1,2} \frac{(T_B - 120 + 40x)dx}{GI_p} = 0$$

De donde:

$$T_B = 57,6 \text{ N.m}$$

Con el valor obtenido, graficamos el diagrama de momento torsor, tal como se muestra en la figura.



Luego:

$$\frac{16.62,4}{\pi d^3} \leq 10 \cdot 10^6 \quad \Rightarrow \quad d \geq \sqrt[3]{\frac{16.62,4}{10\pi \cdot 10^6}} = 3,17 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 3,17 \text{ cm}$$

Asumimos:

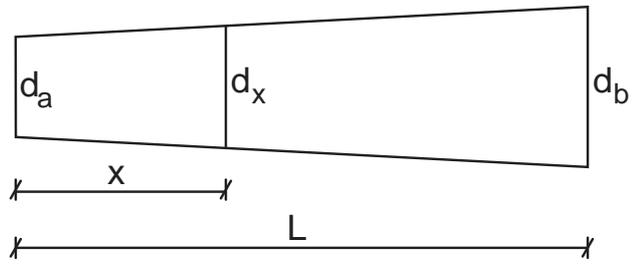
$$d = 3,17 \text{ cm}$$

Determinamos el ángulo de giro en torsión en A

$$\phi_A = \frac{57,6 \cdot 0,8}{8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \cdot (\pi/32) \cdot 3,17^4 \cdot 10^{-8}} = 5,81 \cdot 10^{-3} \text{ rad} = 0,33^\circ$$

6. Analizamos el diámetro medio a una distancia "x" de A

$$d_x = d_a + \left( \frac{d_b - d_a}{L} \right) x$$



Además:

$$I_{px} = \frac{\pi d_x^3 t}{4}$$

Luego:

$$U = \int_0^L \frac{T^2 dx}{2GI_{px}} = \frac{T^2}{2G} \int_0^L \frac{dx}{\pi d_x^3 t / 4} = \frac{2T^2}{\pi G t} \int_0^L \frac{dx}{d_x^3} = \frac{2T^2 L}{\pi G t (d_b - d_a)} \int_0^L \frac{d [d_a + (d_b - d_a)x/L]}{[d_a + (d_b - d_a)x/L]^3} = \frac{T^2 L (d_a + d_b)}{\pi G t d_a^2 d_b^2}$$

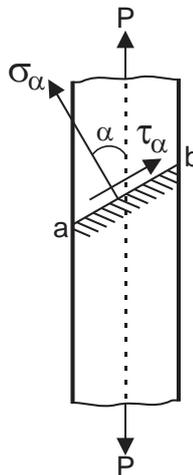
**MECANICA DE MATERIALES (CI80)**  
**EXAMEN PARCIAL**  
**CICLO 2012-02**

**Profesor** : Ph.D. Genner Villarreal Castro  
**Sección** : CI51  
**Duración** : 170 minutos

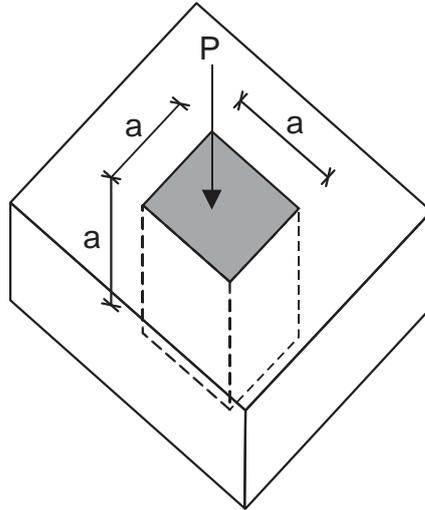
---

1. El diámetro de un tirante de sección circular es igual a 16mm. La fuerza de tracción  $P = 40\text{kN}$  origina en la sección inclinada  $ab$  un esfuerzo tangencial  $\tau_\alpha$  equivalente al 60% del esfuerzo normal en la misma sección  $ab$ . Determinar el ángulo de inclinación de la sección y los valores de  $\sigma_\alpha$  y  $\tau_\alpha$

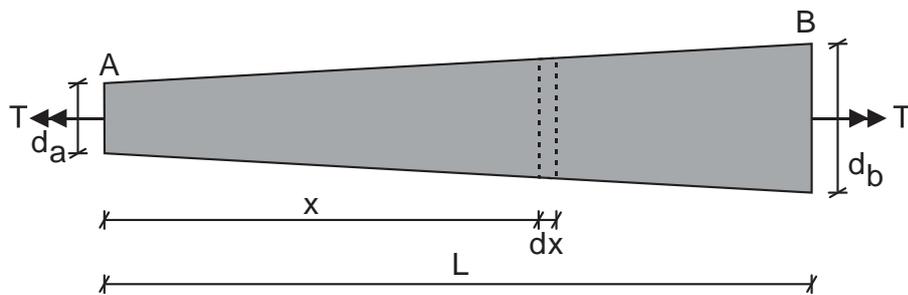
(2 puntos)



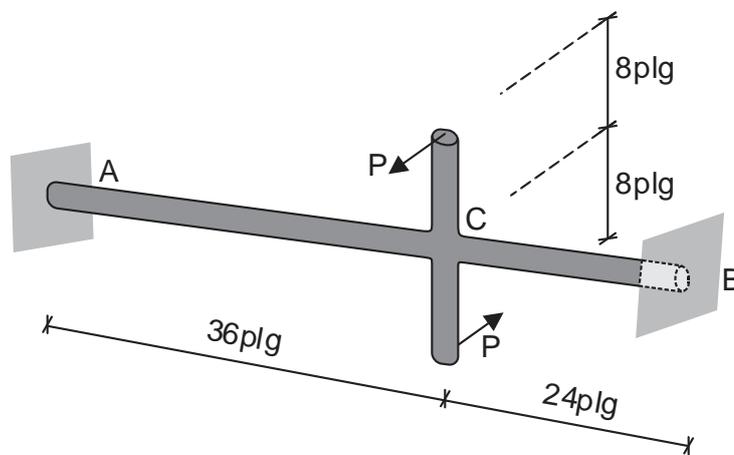
2. Una lámina cuadrada, cuyos lados son iguales a 0,2m tiene un espesor  $h = 10\text{mm}$ . En sus bordes está cargada con los esfuerzos normales  $\sigma_1 = 200\text{MPa}$  y  $\sigma_2 = -100\text{MPa}$ . Determinar las variaciones de los lados del cuadrado, del área de éste y del volumen de la lámina a causa de la deformación elástica de la misma. Considerar  $E = 2 \cdot 10^5 \text{MPa}$  y  $\mu = 0,25$
- (3 puntos)
3. Un cubo de cobre de arista igual a 0,1m está introducido sin holguras en el asiento de una placa de acero cuya docilidad puede despreciarse. Calcular las variaciones de volumen del cubo relativa  $\epsilon_v$  y absoluta  $\Delta V$  originadas por la acción de una fuerza de compresión  $P = 500\text{kN}$ . El módulo de elasticidad del cobre es  $E = 10^5 \text{MPa}$ , el coeficiente de Poisson  $\mu = 0,34$ . Determinar los esfuerzos tangenciales octaédricos  $\tau_{\text{oct}}$  y máximas  $\tau_{\text{máx}}$  en el cubo.
- (4 puntos)



4. Refiriéndose a la barra ahusada mostrada en la figura ¿Para qué relación  $d_b / d_a$  el ángulo de giro en torsión será igual a la mitad del ángulo de giro en torsión correspondiente a una barra prismática de diámetro  $d_a$ ? (4 puntos)

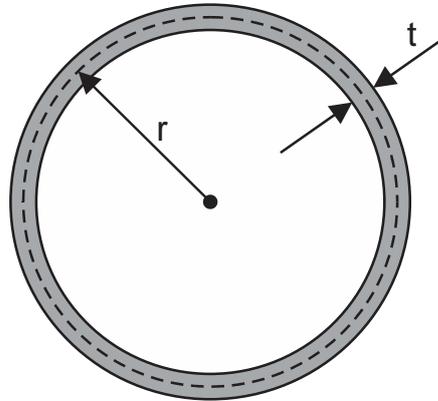


5. Una barra hueca de acero ACB con diámetro exterior de  $2plg$  y diámetro interior  $1,5plg$  está empotrada en los extremos A y B, tal como se muestra en la figura. En los extremos del brazo vertical se aplican fuerzas horizontales P. Determinar el valor permisible de las fuerzas P si el esfuerzo tangencial permisible en la barra es  $12000psi$  (4 puntos)



6. Comparar el ángulo de giro en torsión  $\phi_1$  para un tubo circular de pared delgada calculado a partir de la ecuación aproximada  $\phi = TL/2\pi Gr^3 t$  con el ángulo de giro en torsión  $\phi_2$  calculado con la ecuación exacta  $\phi = TL/GI_p$ . Expresar la relación  $\phi_1/\phi_2$  en términos de la relación adimensional  $\beta = r/t$

(3 puntos)



Monterrico, 09 de octubre de 2012

## SOLUCIONARIO DE EXAMEN PARCIAL

### CICLO 2012-02

1. Por dato del problema:

$$\tau_{\alpha} = 0,6\sigma_{\alpha} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\sigma_1 \sin 2\alpha = 0,6\sigma_1 \cos^2 \alpha \quad \therefore \quad \operatorname{tg}\alpha = 0,6$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} 0,6 = 30,96^{\circ}$$

Luego, determinamos el esfuerzo principal  $\sigma_1$

$$\sigma_1 = \frac{P}{A} = \frac{40 \cdot 10^3}{(\pi/4) \cdot 16^2 \cdot 10^{-6}} = 198,94 \text{MPa}$$

Ahora, calculamos los esfuerzos normal y tangencial en el plano inclinado.

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_1 \cos^2 \alpha = 198,94 \cos^2 30,96 = 146,29 \text{MPa}$$

$$\tau_{\alpha} = 0,6\sigma_{\alpha} = 0,6 \cdot 146,29 = 87,77 \text{MPa}$$

2. Determinamos la variación de los lados del cuadrado.

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] = \frac{1}{2 \cdot 10^5} [200 - 0,25(-100 + 0)] = 112,5 \cdot 10^{-5}$$

Como:

$$\varepsilon_1 = \frac{\delta_1}{L_1} \quad \Rightarrow \quad \delta_1 = \varepsilon_1 L_1 = 112,5 \cdot 10^{-5} \cdot 0,2 = 22,5 \cdot 10^{-5} \text{ m} = 0,225 \text{mm}$$

Procedemos en forma análoga en la otra dirección.

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)] = \frac{1}{2 \cdot 10^5} [-100 - 0,25(200 + 0)] = -75 \cdot 10^{-5}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\delta_2}{L_2} \quad \Rightarrow \quad \delta_2 = \varepsilon_2 L_2 = -75 \cdot 10^{-5} \cdot 0,2 = -15 \cdot 10^{-5} \text{ m} = -0,15 \text{mm}$$

Ahora, determinamos las áreas inicial y final.

$$\text{AREA INICIAL} \quad A_0 = 20 \cdot 20 = 400 \text{cm}^2$$

$$\text{AREA FINAL} \quad A = 20,0225 \cdot 19,985 = 400,15 \text{cm}^2$$

De esta manera, la variación del área será:

$$\Delta A = A - A_0 = 400,15 - 400 = 0,15 \text{cm}^2$$

Calculamos la variación de volumen.

$$\Delta V = V_0 \frac{1-2\mu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,01 \cdot \frac{1-2 \cdot 0,25}{2 \cdot 10^5} (200 - 100 + 0) = 0,01 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 = 0,1 \text{cm}^3$$

3. Por condición del problema:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] = 0 \quad \dots\dots\dots (a)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)] = 0 \quad \dots\dots\dots (b)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] \quad \dots\dots\dots (c)$$

Además por simetría  $\sigma_x = \sigma_y$

Según datos del problema:

$$\sigma_z = -\frac{P}{A} = -\frac{500 \cdot 10^3}{10^{-2}} = -50 \text{MPa}$$

De la ecuación (a) tenemos:

$$\sigma_x(1-\mu) = \mu\sigma_z \Rightarrow \sigma_x = \frac{\mu\sigma_z}{1-\mu} = \frac{0,34(-50)}{1-0,34} = -25,75 \text{MPa}$$

$$\sigma_y = -25,75 \text{MPa}$$

Pero:

$$\sigma_1 = \sigma_x = -25,75 \text{MPa}$$

$$\sigma_2 = \sigma_y = -25,75 \text{MPa}$$

$$\sigma_3 = \sigma_z = -50 \text{MPa}$$

Luego:

$$\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] = \frac{1}{10^5} [-50 - 0,34(-25,75 - 25,75)] = -3,25 \cdot 10^{-4}$$

$$\Delta V = \varepsilon_v \cdot V = -3,25 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-3} = -3,25 \cdot 10^{-7} \text{ m}^3 = -325 \text{mm}^3$$

Además:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{-25,75 - (-50)}{2} = 12,125 \text{MPa}$$

$$\tau_{\text{oct}} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

$$\tau_{\text{oct}} = \frac{1}{3} \sqrt{(-25,75 + 25,75)^2 + (-25,75 + 50)^2 + (-50 + 25,75)^2} = 11,43 \text{MPa}$$

#### 4. BARRA AHUSADA:

El diámetro  $d_x$  a una distancia "x" del extremo A es:

$$d_x = d_a + \frac{d_b - d_a}{L} x$$

Siendo el momento polar de inercia:

$$I_{px} = \frac{\pi d_x^4}{32} = \frac{\pi}{32} \left( d_a + \frac{d_b - d_a}{L} x \right)^4$$

Por lo tanto la expresión para el ángulo de giro en torsión es:

$$\phi_1 = \int_0^L \frac{T dx}{G I_{px}} = \int_0^L \frac{T dx}{G(\pi/32)[d_a + (d_b - d_a)x/L]^4} = \frac{32TL}{3\pi G(d_b - d_a)} \left( \frac{1}{d_a^3} - \frac{1}{d_b^3} \right)$$

BARRA PRISMÁTICA:

$$\phi_2 = \frac{TL}{G(\pi/32)d_a^4} = \frac{32TL}{\pi G d_a^4}$$

Por condición del problema:

$$\phi_1 = \frac{1}{2} \phi_2$$

$$\frac{32TL}{3\pi G(d_b - d_a)} \left( \frac{1}{d_a^3} - \frac{1}{d_b^3} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{32TL}{\pi G d_a^4} \right)$$

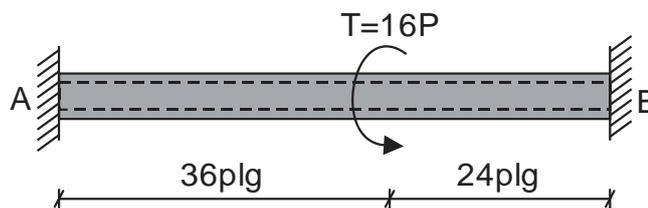
Efectuando operaciones obtenemos:

$$1,5 \left( \frac{d_b}{d_a} \right)^4 - 2,5 \left( \frac{d_b}{d_a} \right)^3 + 1 = 0$$

De donde:

$$\frac{d_b}{d_a} = 1,45$$

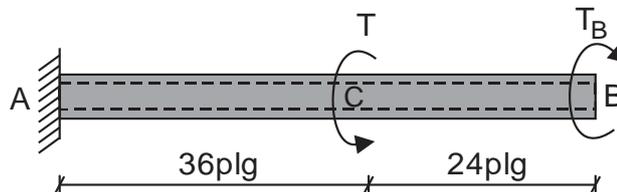
5. Del gráfico se tendrá:



Por condición de equilibrio, se tiene:

$$\sum T_{\text{eje}} = 0 \quad \Rightarrow \quad T_A + T_B = T \quad \dots\dots\dots (a)$$

Eliminamos el empotramiento en B y lo reemplazamos por  $T_B$ , tal como se muestra en el gráfico.



Se sabe que:

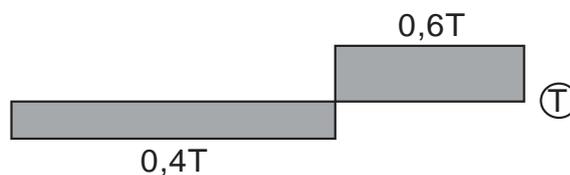
$$\phi_B = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{T_B(60)}{GI_p} - \frac{T(36)}{GI_p} = 0$$

$$T_B = 0,6T \quad \dots\dots\dots (b)$$

Reemplazamos (b) en (a) y obtenemos:

$$T_A = 0,4T$$

Con los valores obtenidos, graficamos el diagrama de momento torsor.



Aplicamos la condición de resistencia:

$$\tau_{\text{máx}} \leq [\tau] \quad \Rightarrow \quad \frac{T_{\text{máx}}}{W_p} \leq [\tau] \quad \therefore \quad \frac{0,6(16P)}{(\pi/16) \cdot 2^3 \cdot [1 - (1,5/2)^4]} \leq 12000$$

$$P \leq 1342,23 \text{ lb}$$

De esta manera, la carga máxima permisible es:

$$P_{\text{perm}} = 1342,23 \text{ lb}$$

6. ECUACION APROXIMADA:

$$\phi_1 = \frac{TL}{2\pi Gr^3 t} = \frac{TL}{2\pi Gt^4 \beta^3}$$

ECUACION EXACTA:

$$\phi_2 = \frac{TL}{GI_p} = \frac{TL}{G \frac{\pi}{2} \left[ \left( r + \frac{t}{2} \right)^4 - \left( r - \frac{t}{2} \right)^4 \right]} = \frac{TL}{G\pi r t \left( 2r^2 + \frac{t^2}{2} \right)} = \frac{2TL}{G\pi r t (4r^2 + t^2)} = \frac{2TL}{G\pi t^4 \beta (4\beta^2 + 1)}$$

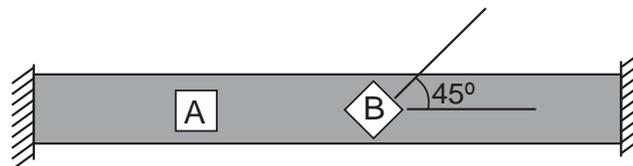
Luego:

$$\frac{\phi_1}{\phi_2} = \frac{\frac{TL}{2\pi Gt^4 \beta}}{\frac{2TL}{G\pi t^4 \beta (4\beta^2 + 1)}} = \frac{4\beta^2 + 1}{4\beta^2} = 1 + \frac{1}{4\beta^2}$$

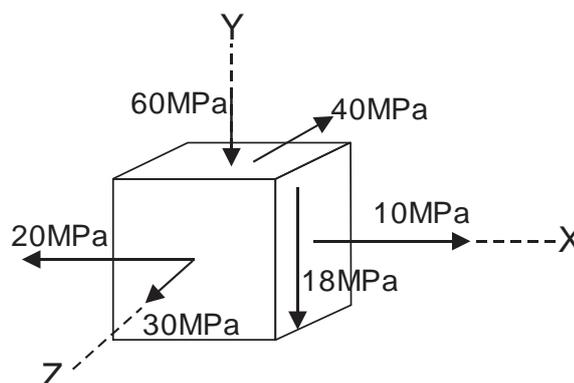
**MECANICA DE MATERIALES (CI80)**  
**EXAMEN PARCIAL**  
**CICLO 2013-01**

**Profesor : Ph.D. Genner Villarreal Castro**  
**Sección : CI51**  
**Duración : 170 minutos**

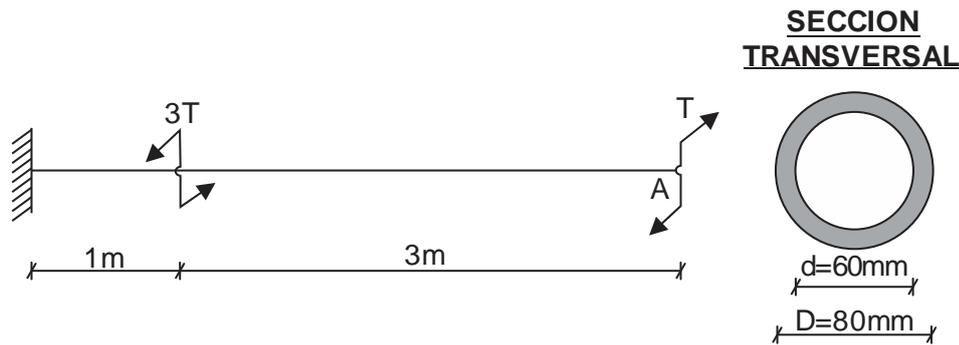
1. Una barra de cobre con sección transversal rectangular se sitúa entre soportes rígidos, después de lo cual la temperatura de la barra se incrementa  $60^{\circ}\text{C}$ . Determinar los esfuerzos en todas las caras de los elementos A y B e indicar tales esfuerzos sobre esquemas de los elementos. Considerar  $\alpha = 0,000017/^{\circ}\text{C}$  y  $E = 120\text{GPa}$  (3 puntos)



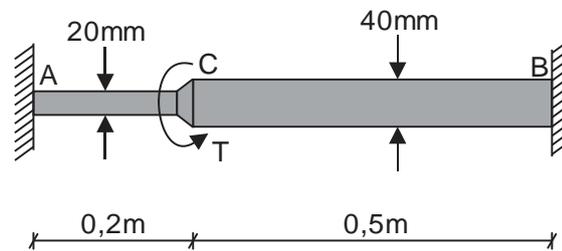
2. Para un cuerpo en estado plano, se cumple que la suma de los esfuerzos principales es  $30\text{MPa}$  y  $\tau_{\text{máx}} = 10\text{MPa}$ . Determinar  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ , sabiendo que  $\sigma_x = 2\sigma_y$  (3 puntos)
3. Dado el cubo de acero sometido a esfuerzos triaxiales y considerando que el módulo de elasticidad del material es  $E = 2.10^5\text{MPa}$  y su coeficiente de Poisson  $\mu = 0,3$ , se pide:
- Esquematizar todos los esfuerzos normales y tangenciales en las caras del cubo (1 punto)
  - Determinar los esfuerzos principales  $\sigma_1, \sigma_2$  y  $\sigma_3$  (1.5 puntos)
  - Calcular el esfuerzo tangencial máximo (0.5 puntos)
  - Determinar los esfuerzos normal  $\sigma_{\text{oct}}$  y tangencial  $\tau_{\text{oct}}$  octaédricos (1.5 puntos)
  - Calcular el cambio unitario de volumen o deformación volumétrica (0.5 puntos)



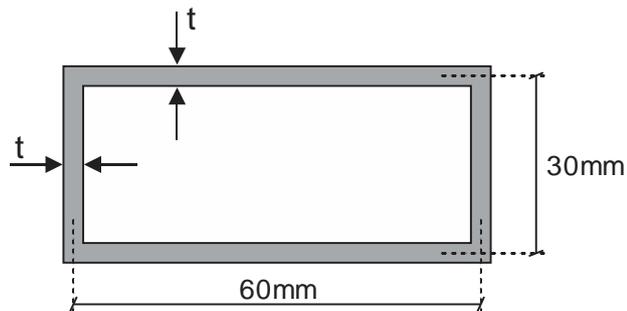
4. Determinar el momento torsor máximo  $T_{\text{máx}}$  y el ángulo de giro en torsión en A, si  $[\tau] = 20\text{MPa}$  y  $G = 8 \cdot 10^4\text{MPa}$  (3 puntos)



5. Una barra escalonada maciza de sección transversal circular está empotrada en los extremos. Si el esfuerzo permisible en cortante es  $55\text{MPa}$ , ¿Cuál es el par de torsión máximo  $T_{\text{máx}}$  que puede aplicarse a la barra en C? (4 puntos)



6. Se aplica un momento torsor de  $600\text{N}\cdot\text{m}$  a un tubo de sección rectangular, tal como se muestra en la figura. Determinar el espesor mínimo  $t_{\text{mín}}$  de sus paredes, de manera que el esfuerzo tangencial no exceda de  $60\text{MPa}$  (2 puntos)



Monterrico, 07 de mayo de 2013

## SOLUCIONARIO DE EXAMEN PARCIAL

### CICLO 2013-01

1. Se sabe que:

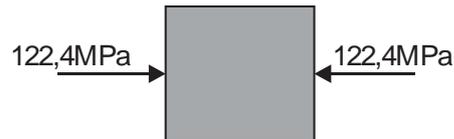
$$\delta_p = \delta_T \Rightarrow \frac{PL}{EA} = \alpha(\Delta T)L \quad \therefore \quad \sigma_1 = \sigma_x = E\alpha(\Delta T) = 120 \cdot 10^9 \cdot 0,000017 \cdot 60$$

$$\sigma_1 = 122,4 \text{MPa (COMPRESION)}$$

Ahora, analizamos cada uno de los elementos:

ELEMENTO "A":

Actúa únicamente  $\sigma_1 = 122,4 \text{MPa}$  y va en compresión, tal como se muestra en la figura.



ELEMENTO "B":

a) Si  $\alpha = 45^\circ$  (CARA DC)

$$\sigma_{\alpha=45^\circ} = \sigma_1 \cos^2 45^\circ = (-122,4) \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 = -61,2 \text{MPa}$$

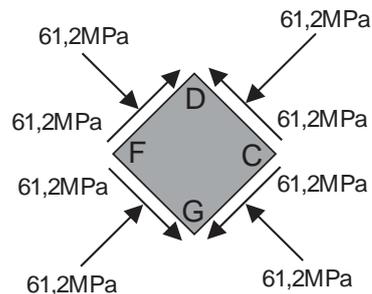
$$\tau_{\alpha=45^\circ} = \frac{1}{2} \sigma_1 \sin 90^\circ = \frac{1}{2} (-122,4)(1) = -61,2 \text{MPa}$$

b) Si  $\alpha = 135^\circ$  (CARA FD)

$$\sigma_{\alpha=135^\circ} = \sigma_1 \cos^2 135^\circ = (-122,4) \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 = -61,2 \text{MPa}$$

$$\tau_{\alpha=135^\circ} = \frac{1}{2} \sigma_1 \sin 270^\circ = \frac{1}{2} (-122,4)(-1) = 61,2 \text{MPa}$$

En las otras dos caras son opuestas a las anteriores, mostrándose la distribución de esfuerzos en la siguiente figura.



2. Por dato del problema:

$$\sigma_1 + \sigma_2 = 30 \quad \dots\dots\dots (a)$$

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = 10 \quad \Rightarrow \quad \sigma_1 - \sigma_2 = 20 \quad \dots\dots\dots (b)$$

Resolvemos (a) y (b), obteniendo:

$$\sigma_1 = 25 \text{MPa}$$

$$\sigma_2 = 5\text{MPa}$$

Además:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad \dots\dots\dots (c)$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad \dots\dots\dots (d)$$

Sumamos (c) y (d), considerando  $\sigma_x = 2\sigma_y$

$$2\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right) = 30 \quad \Rightarrow \quad 2\sigma_y + \sigma_y = 30 \quad \therefore \quad \sigma_y = 10\text{MPa}$$

$$\sigma_x = 20\text{MPa}$$

Ahora, restamos (c) - (d), obteniendo:

$$\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = 20$$

$$(20 - 10)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 400$$

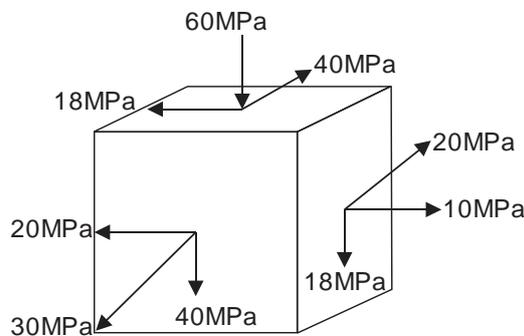
$$\tau_{xy} = 8,66\text{MPa}$$

3. a) Del gráfico mostrado en el enunciado del problema, se desprende que:

$$\sigma_x = 10\text{MPa}; \quad \sigma_y = -60\text{MPa}; \quad \sigma_z = 30\text{MPa}; \quad \tau_{xy} = 18\text{MPa}; \quad \tau_{xz} = -20\text{MPa};$$

$$\tau_{yz} = 40\text{MPa}$$

Con estos valores, esquematizamos los esfuerzos normales y tangenciales en las caras visibles del cubo, tal como se muestra en la figura.



b) Calculamos los esfuerzos principales:

$$I_1 = 10 - 60 + 30 = -20$$

$$I_2 = (10)(-60) + (10)(30) + (-60)(30) - 18^2 - (-20)^2 - 40^2 = -4424$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} 10 & 18 & -20 \\ 18 & -60 & 40 \\ -20 & 40 & 30 \end{vmatrix} = -48520$$

Luego:

$$\sigma^3 + 20\sigma^2 - 4424\sigma + 48520 = 0$$

$$\sigma_1 = 49,536\text{MPa}$$

$$\sigma_2 = 12,011 \text{MPa}$$

$$\sigma_3 = -81,547 \text{MPa}$$

c) Determinamos el esfuerzo tangencial máximo:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{49,536 - (-81,547)}{2} = 65,542 \text{MPa}$$

d) Calculamos los esfuerzos normal y tangencial octaédricos:

$$\sigma_{\text{oct}} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{49,536 + 12,011 - 81,547}{3} = -6,667 \text{MPa}$$

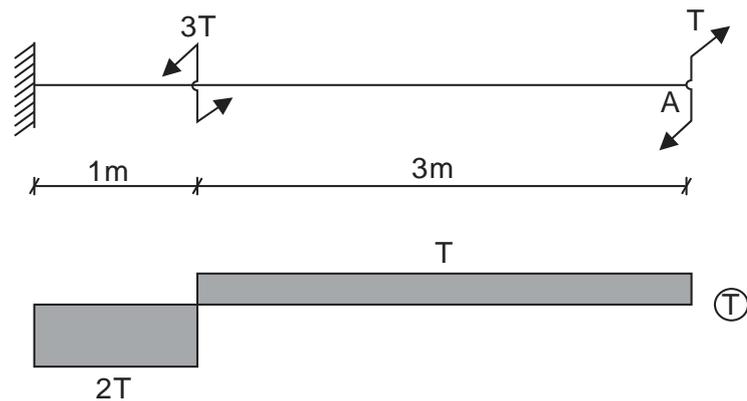
$$\tau_{\text{oct}} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

$$\tau_{\text{oct}} = \frac{1}{3} \sqrt{(49,536 - 12,011)^2 + (12,011 + 81,547)^2 + (-81,547 - 49,536)^2} = 55,120 \text{MPa}$$

e) Determinamos el cambio unitario de volumen:

$$e = \frac{1 - 2\mu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1 - 2(0,3)}{2 \cdot 10^5} (10 - 60 + 30) = -4 \cdot 10^{-5}$$

4. Graficamos el diagrama de momento torsor, tal como se muestra en la figura.



Determinamos los momentos de resistencia e inercia polar:

$$W_p = \frac{\pi \cdot 80^3 \cdot 10^{-9}}{16} \left[ 1 - \left( \frac{60}{80} \right)^4 \right] = 68,72 \cdot 10^{-6} \text{m}^3$$

$$I_p = \frac{\pi \cdot 80^4 \cdot 10^{-12}}{32} \left[ 1 - \left( \frac{60}{80} \right)^4 \right] = 2,75 \cdot 10^{-6} \text{m}^4$$

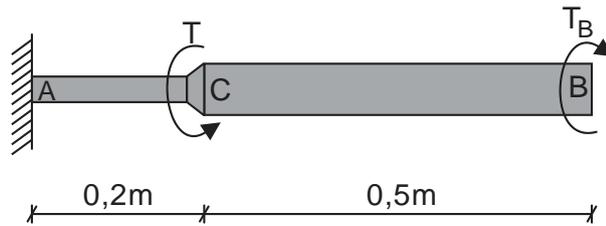
Calculamos el esfuerzo tangencial máximo:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{2T}{68,72 \cdot 10^{-6}} \leq 20 \cdot 10^6 \quad \Rightarrow \quad T \leq 687,2 \text{N.m} \quad \therefore \quad T_{\text{máx}} = 687,2 \text{N.m}$$

Ahora, determinamos el ángulo de giro en torsión en A

$$\phi_A = \frac{687,2 \cdot 3}{8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \cdot 2,75 \cdot 10^{-6}} - \frac{1374,4 \cdot 1}{8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \cdot 2,75 \cdot 10^{-6}} = 3,12 \cdot 10^{-3} \text{rad} = 0,179^\circ$$

5. Eliminamos el empotramiento en B y lo reemplazamos por  $T_B$ , tal como se muestra en la figura.



Como se sabe:

$$\phi_B = 0$$

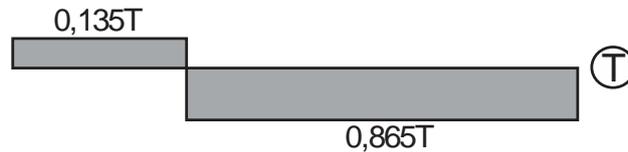
$$-\frac{T(0,2)}{G(\pi/32).20^4.10^{-12}} + \frac{T_B(0,2)}{G(\pi/32).20^4.10^{-12}} + \frac{T_B(0,5)}{G(\pi/32).40^4.10^{-12}} = 0$$

$$T_B = 0,865T$$

Luego:

$$T_A + T_B = T \Rightarrow T_A + 0,865T = T \quad \therefore T_A = 0,135T$$

Con los valores obtenidos, graficamos el diagrama de momento torsor.



Determinamos los esfuerzos tangenciales en AC y CB, con la finalidad, de conocer el tramo donde ocurre el esfuerzo tangencial máximo.

$$\tau_{\text{máx}} = \tau_{AC} = \frac{(0,135T).16}{\pi.20^3.10^{-9}} = 8,594.10^4 T$$

$$\tau_{CB} = \frac{(0,865T).16}{\pi.40^3.10^{-9}} = 6,883.10^4 T$$

Como:

$$\tau_{\text{máx}} \leq [\tau] \Rightarrow 8,594.10^4 T \leq 55.10^6 \quad \therefore T \leq 640N.m$$

En consecuencia:

$$T_{\text{máx}} = 640N.m$$

6. Se sabe que:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{T}{2A_0 t} \leq [\tau] \Rightarrow \frac{600}{2.30.10^{-3}.60.10^{-3}.t} \leq 60.10^6 \quad \therefore t \geq 2,78.10^{-3} m$$

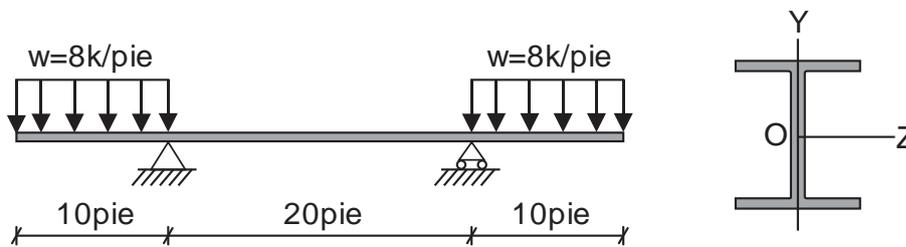
Asumimos:

$$t_{\text{mín}} = 2,78mm$$

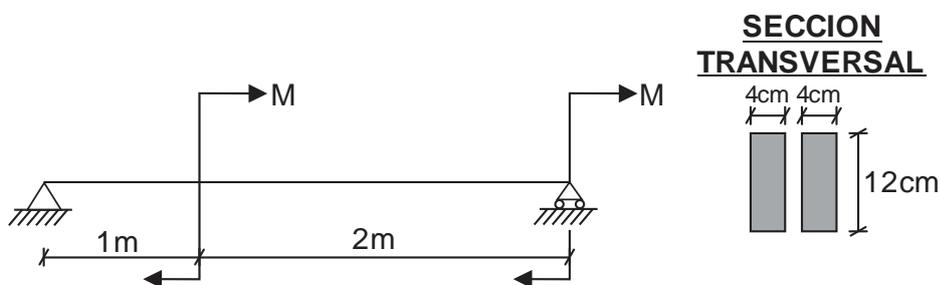
**MECANICA DE MATERIALES (CI80)**  
**PRACTICA CALIFICADA N° 2**  
**CICLO 2011-01**

**Profesor : Ph.D. Genner Villarreal Castro**  
**Sección : CI51**  
**Duración : 170 minutos**

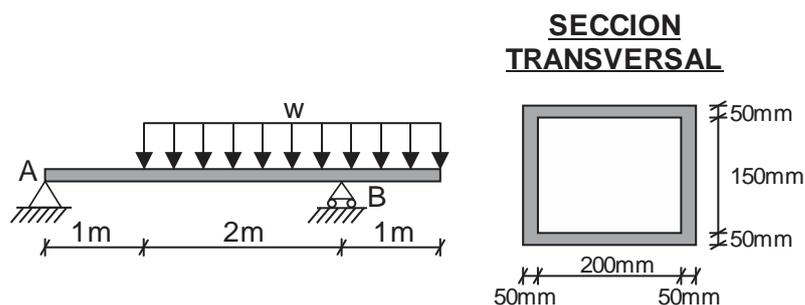
1. Una viga de acero de sección transversal del tipo de patín ancho está apoyada con extremos en voladizo, como se muestra en la figura. La viga soporta una carga uniforme de intensidad  $w = 8\text{k}/\text{pie}$  sobre cada voladizo. Si se supone que el módulo de sección de la sección transversal es  $W_z = 539\text{p lg}^3$ , determinar el esfuerzo de flexión máximo  $\sigma_{\text{máx}}$  en la viga debido a la carga  $w$  (3 puntos)



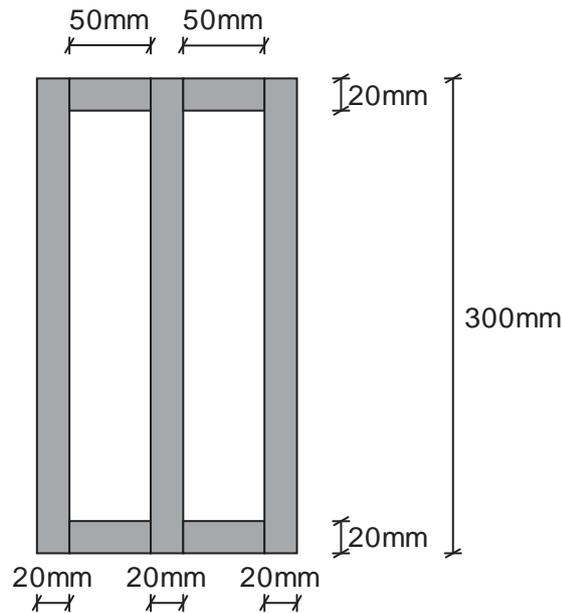
2. Determinar el valor del momento puntual  $M$ , si el esfuerzo admisible en flexión es  $[\sigma] = 10\text{MPa}$  (3 puntos)



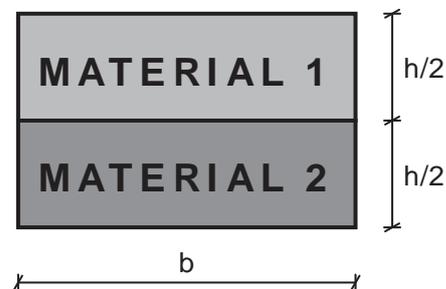
3. La carga distribuida mostrada en la figura está sostenida por una viga con sección tipo cajón, cuyas dimensiones se muestran en la misma figura. Determine el valor de " $w$ ", si  $[\sigma] = 14\text{MPa}$  y  $[\tau] = 1,2\text{MPa}$  (4 puntos)



4. Una viga compuesta está formada por láminas de 20mm x 300mm y de 50mm x 20mm, tal como se muestra en la figura. ¿Qué fuerza cortante producirá un esfuerzo tangencial máximo de 2,4MPa?  
(3 puntos)



5. Hallar la distribución de los esfuerzos normales en la sección de una viga compuesta cuando ésta se encuentra trabajando a flexión pura en el plano vertical e indicar la posición del eje neutro, considerando que la unión es absolutamente rígida y que el módulo de elasticidad del material 1 es tres veces el módulo de elasticidad del material 2  
(4 puntos)



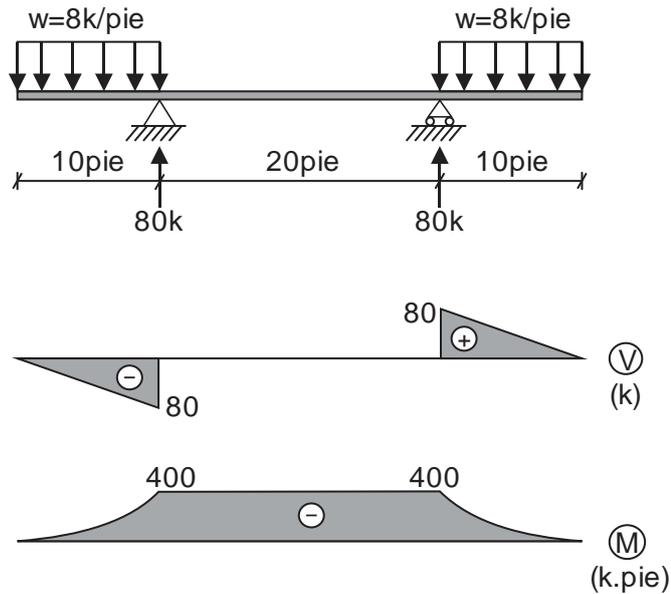
6. Las dimensiones de una viga de concreto armado son  $b = 300\text{mm}$ ,  $d = 450\text{mm}$ ,  $A_a = 1400\text{mm}^2$  y  $n = 8$ . Si los esfuerzos admisibles son  $[\sigma]_c = 12\text{MPa}$  y  $[\sigma]_a = 140\text{MPa}$ . Calcular el momento flector máximo que se puede aplicar. Considerar “d” como la distancia desde la ubicación del acero de refuerzo hasta la cara superior de la viga.  
(3 puntos)

Monterrico, 02 de junio de 2011

## SOLUCIONARIO DE PRÁCTICA CALIFICADA Nº 2

### CICLO 2011-01

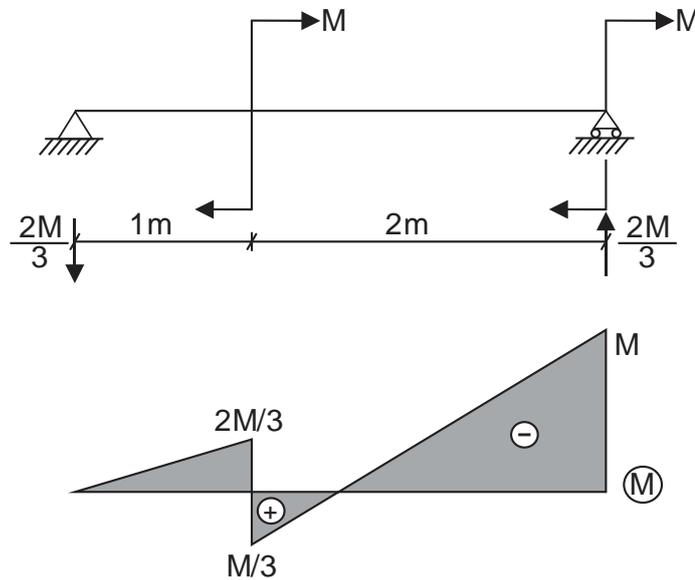
1. Graficamos los diagramas de fuerza cortante y momento flector, tal como se muestra en la figura:



Determinamos el esfuerzo normal máximo:

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{M_{\text{máx}}}{W_z} = \frac{400 \cdot 10^3 \cdot 12}{539} = 8905,38 \text{ psi}$$

2. Graficamos el diagrama de momento flector para la viga cargada con los momentos  $M$ , tal como se muestra en la figura:



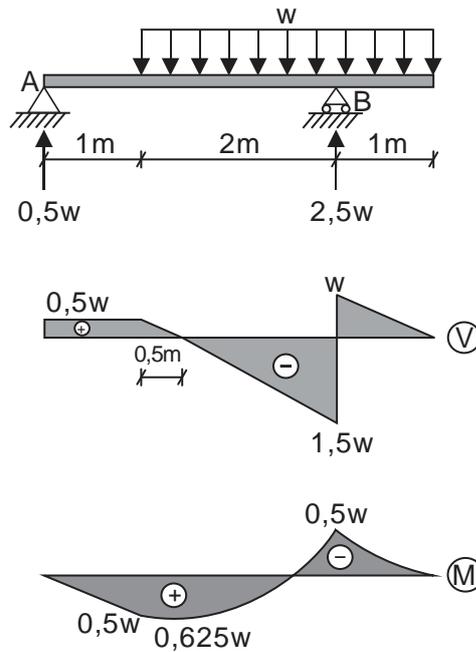
Aplicamos la condición de resistencia:

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{M_{\text{máx}}}{I_z} y_{\text{máx}} \leq [\sigma] \Rightarrow \frac{M}{2 \left( \frac{0,04 \cdot 0,12^3}{12} \right)} \cdot 0,06 \leq 10 \cdot 10^6 \quad \therefore \quad M \leq 1920 \text{ N.m}$$

De donde:

$$M_{\text{máx}} = 1,92 \text{ kN.m}$$

3. Graficamos los diagramas de fuerza cortante y momento flector para la viga mostrada en la figura:



Aplicamos las condiciones de resistencia para los esfuerzos normal y tangencial.

ESFUERZO NORMAL:

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{M_{\text{máx}}}{I_z} y_{\text{máx}} \leq [\sigma] \Rightarrow \frac{0,625w}{\left[ \frac{0,3 \cdot 0,25^3}{12} - \frac{0,2 \cdot 0,15^3}{12} \right]} \cdot 0,125 \leq 14 \cdot 10^6$$

De donde:

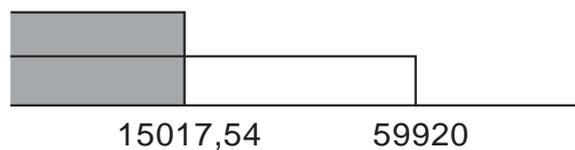
$$w \leq 59920 \text{ N/m}$$

ESFUERZO TANGENCIAL:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{V_{\text{máx}} S_{z,\text{máx}}}{I_z b} \leq [\tau] \Rightarrow \frac{1,5w(0,3 \cdot 0,125 \cdot 0,0625 - 0,2 \cdot 0,075 \cdot 0,0375)}{\left[ \frac{0,3 \cdot 0,25^3}{12} - \frac{0,2 \cdot 0,15^3}{12} \right] \cdot 0,1} \leq 1,2 \cdot 10^6$$

De donde:

$$w \leq 15017,54 \text{ N/m}$$



Asumimos:

$$w_{\text{máx}} = 15017,54 \text{ N/m} = 15,017 \text{ kN/m}$$

4. Determinamos el momento estático máximo y momento de inercia, respecto al eje neutro.

$$S_{z,\text{máx}} = 0,16 \cdot 0,15 \cdot 0,075 - 2(0,05 \cdot 0,13 \cdot 0,065) = 9,55 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$$

$$I_z = \frac{0,16 \cdot 0,3^3}{12} - 2 \left[ \frac{0,05 \cdot 0,26^3}{12} \right] = 2,135 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

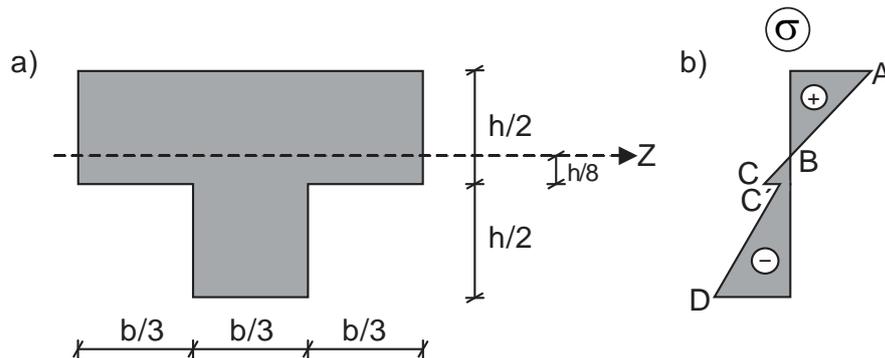
Luego, aplicamos la condición de resistencia para esfuerzo tangencial.

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{V_{\text{máx}} S_{z,\text{máx}}}{I_z b} \leq [\tau] \Rightarrow \frac{V \cdot 9,55 \cdot 10^{-4}}{2,135 \cdot 10^{-4} \cdot 0,06} \leq 2,4 \cdot 10^6 \quad \therefore \quad V \leq 32192,67 \text{ N}$$

Asumimos:

$$V_{\text{máx}} = 32192,67 \text{ N} = 32,192 \text{ kN}$$

5. Por dato del problema, la relación modular es  $n = E_1 / E_2 = 3$  y, de esta manera, la sección transformada es la mostrada en la figura a)



Determinamos la ubicación del eje neutro, tomando como referencia el eje en la parte inferior de la sección transversal de la viga.

$$Y_{\text{CG}} = \frac{\left(\frac{b}{3}\right)\left(\frac{h}{2}\right)\left(\frac{h}{4}\right) + b\left(\frac{h}{2}\right)\left(\frac{3h}{4}\right)}{\left(\frac{b}{3}\right)\left(\frac{h}{2}\right) + b\left(\frac{h}{2}\right)} = \frac{5h}{8}$$

Calculamos el momento de inercia respecto al eje neutro.

$$I_z = \frac{b\left(\frac{h}{2}\right)^3}{12} + b\left(\frac{h}{2}\right)\left(\frac{h}{8}\right)^2 + \frac{\left(\frac{b}{3}\right)\left(\frac{h}{2}\right)^3}{12} + \left(\frac{b}{3}\right)\left(\frac{h}{2}\right)\left(\frac{3h}{8}\right)^2 = \frac{13bh^3}{288}$$

Ubicamos las zonas de tracción y compresión, utilizando como única alternativa las áreas, ya que el momento es desconocido su signo.

$$A_{\text{sup}}^z = b\left(\frac{3h}{8}\right) = \frac{3bh}{8}$$

$$A_{\text{inf}}^z = \left(\frac{b}{3}\right)\left(\frac{h}{2}\right) + b\left(\frac{h}{8}\right) = \frac{7bh}{24}$$

Como podemos apreciar, el área de la parte superior al eje neutro es mayor que el área de la parte inferior, en consecuencia, la zona de tracción es la superior y la de compresión la inferior.

Ahora, determinamos los valores del esfuerzo normal para los puntos indicados en el gráfico b) mostrada en la figura anterior.

$$\sigma_A = \frac{M}{\left(\frac{13bh^3}{288}\right)} \left(\frac{3h}{8}\right) = \frac{108M}{13bh^2}$$

$$\sigma_B = 0 \text{ (eje neutro)}$$

$$\sigma_C = -\frac{M}{\left(\frac{13bh^3}{288}\right)} \left(\frac{h}{8}\right) = -\frac{36M}{13bh^2}$$

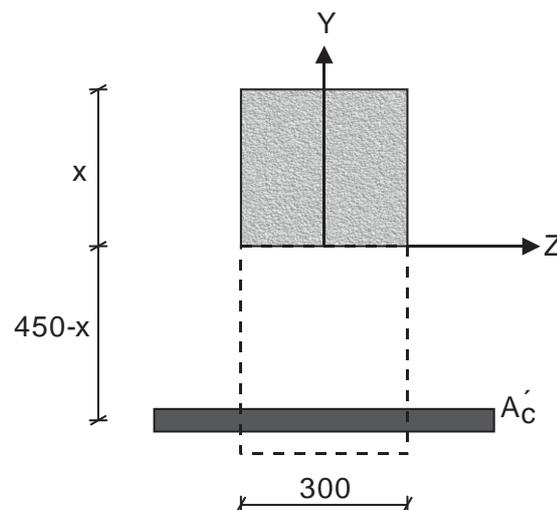
$$\sigma_{C'} = -\left(\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{M}{\left(\frac{13bh^3}{288}\right)} \left(\frac{h}{8}\right) = -\frac{12M}{13bh^2}$$

$$\sigma_D = -\left(\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{M}{\left(\frac{13bh^3}{288}\right)} \left(\frac{5h}{8}\right) = -\frac{60M}{13bh^2}$$

Como se podrá apreciar, se ha colocado signo (+) a los esfuerzos de la zona de tracción y signo (-) a los esfuerzos de la zona de compresión.

6. Calculamos el área transformada del acero en concreto.

$$A'_c = nA_a = 8.1400 = 11200\text{mm}^2$$



Determinamos la ubicación del eje neutro:

$$S_z^{\text{sup}} = S_z^{\text{inf}} \Rightarrow 300x \left(\frac{x}{2}\right) = 11200(450 - x)$$

$$150x^2 + 11200x - 5040000 = 0$$

De donde.

$$x = 149,7\text{mm}$$

Calculamos el momento de inercia respecto al eje neutro:

$$I_z = \frac{300 \cdot 149,7^3}{12} + 300 \cdot 149,7 \cdot 74,85^2 + 11200 \cdot 300,3^2 = 1345496055\text{mm}^4$$

Aplicamos las condiciones de resistencia para cada material.

CONCRETO:

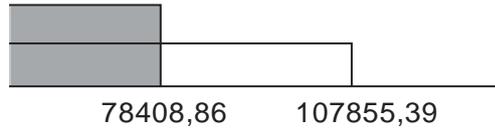
$$\sigma_c^{\text{máx}} = \frac{M_{\text{máx}}}{I_z} y_c^{\text{máx}} \leq [\sigma]_c \quad \Rightarrow \quad \frac{M_{\text{máx}}}{1345496055 \cdot 10^{-12}} \cdot 149,7 \cdot 10^{-3} \leq 12 \cdot 10^6$$

$$\therefore M_{\text{máx}} \leq 107855,39 \text{ N.m}$$

ACERO:

$$\sigma_a^{\text{máx}} = \frac{E_a}{E_c} \frac{M_{\text{máx}}}{I_z} y_a^{\text{máx}} \leq [\sigma]_a \quad \Rightarrow \quad 8 \cdot \frac{M_{\text{máx}}}{1345496055 \cdot 10^{-12}} \cdot 300,3 \cdot 10^{-3} \leq 140 \cdot 10^6$$

$$\therefore M_{\text{máx}} \leq 78408,86 \text{ N.m}$$



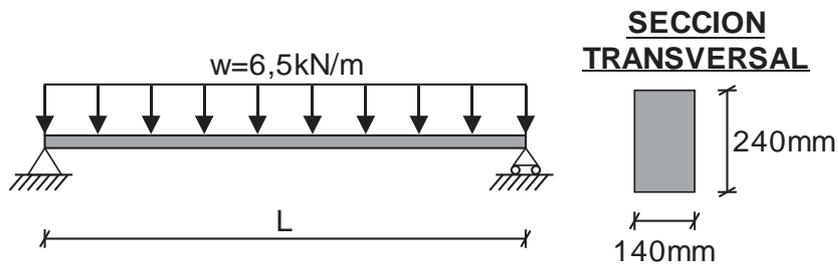
De donde:

$$M_{\text{máx}} = 78408,86 \text{ N.m} = 78,409 \text{ kN.m}$$

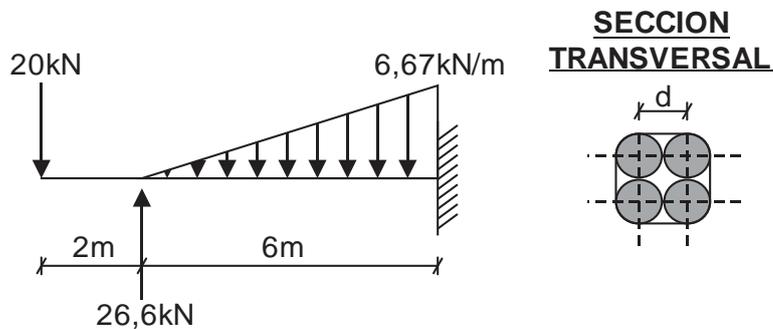
**MECANICA DE MATERIALES (CI80)**  
**PRACTICA CALIFICADA N° 2**  
**CICLO 2011-02**

**Profesor : Ph.D. Genner Villarreal Castro**  
**Sección : CI51**  
**Duración : 170 minutos**

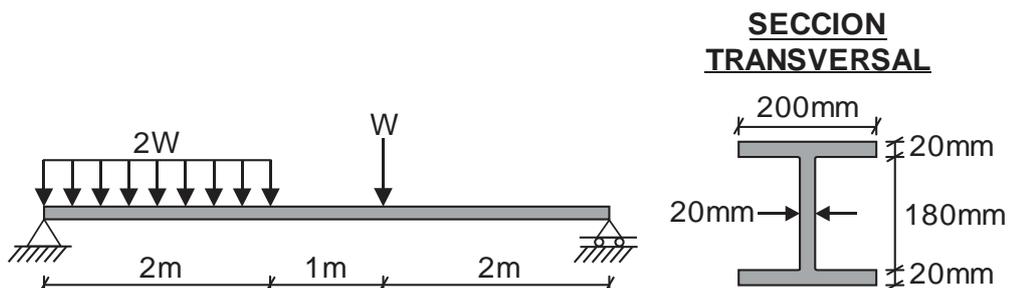
1. Determinar la longitud máxima de la viga simplemente apoyada de sección transversal rectangular de dimensiones 140mm x 240mm, sometida a una carga uniformemente distribuida  $w = 6,5\text{kN/m}$ , si el esfuerzo normal permisible es 8,2MPa (3 puntos)



2. Para la viga mostrada en la figura, determinar el diámetro mínimo requerido  $d_{\text{mín}}$ , si el esfuerzo normal permisible es 10MPa (4 puntos)

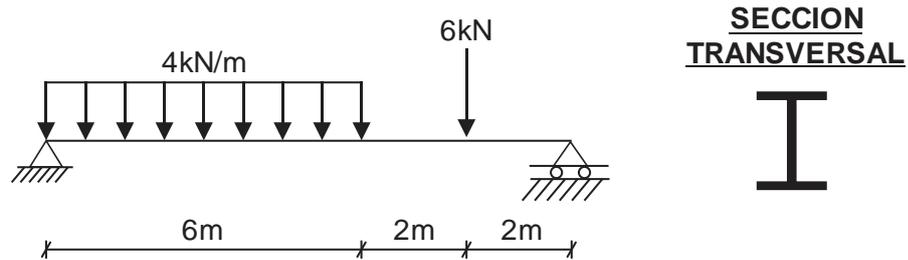


3. La viga de patín ancho sostiene una carga concentrada  $W$  y una carga uniformemente distribuida  $2W$ , tal como se muestra en la figura. Determinar el valor máximo de " $W$ " si  $[\sigma] = 10\text{MPa}$  y  $[\tau] = 1,4\text{MPa}$  (3 puntos)

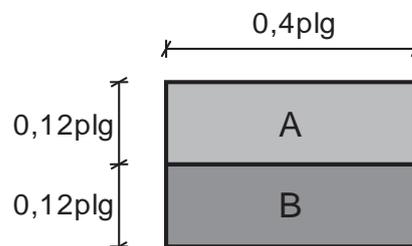


4. Elegir el perfil I más adecuado para la viga mostrada en la figura, considerando  $[\sigma] = 100 \text{ MPa}$ .  
 Determinar el esfuerzo tangencial máximo. (3 puntos)

PERFIL	h (mm)	b <sub>alma</sub> (mm)	I <sub>Z</sub> (cm <sup>4</sup> )	W <sub>Z</sub> (cm <sup>3</sup> )	S <sub>Z,máx</sub> (cm <sup>3</sup> )
1	220	5,4	2790	254	143
2	240	5,6	3800	317	178
3	270	6,0	5500	407	229
4	300	6,5	7780	519	292



5. La sección transversal de una tira bimetalica se muestra en la figura. Si se supone que los módulos de elasticidad para los metales A y B son  $E_A = 42 \cdot 10^6 \text{ psi}$  y  $E_B = 21 \cdot 10^6 \text{ psi}$ , respectivamente, determinar los dos módulos de resistencia para la viga (esto es, la relación del momento flector al esfuerzo normal por flexión). ¿En cuál material ocurre el esfuerzo máximo? (4 puntos)



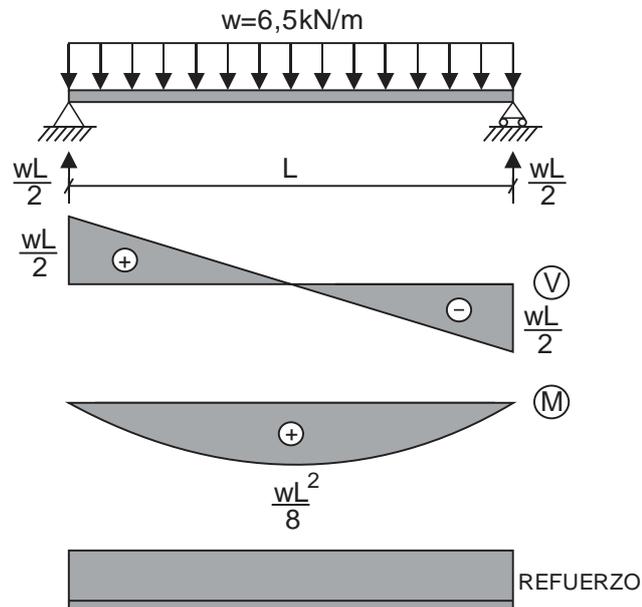
6. En una viga de concreto armado,  $b = 500 \text{ mm}$ ,  $d = 750 \text{ mm}$ ,  $A_a = 6000 \text{ mm}^2$  y  $n = 10$ . Considerar "d" como la distancia desde la ubicación del acero de refuerzo hasta la cara superior de la viga. Determinar esfuerzos máximos en el acero y el concreto, si  $M_{\text{máx}} = 270 \text{ kN.m}$  (3 puntos)

Monterrico, 27 de octubre de 2011

## SOLUCIONARIO DE PRÁCTICA CALIFICADA Nº 2

### CICLO 2011-02

1. Determinamos las reacciones en los apoyos y graficamos los diagramas de fuerza cortante, momento flector y refuerzo, tal como se muestran en la figura.



Aplicamos la condición de resistencia:

$$\sigma_{\text{máx}} \leq [\sigma] \quad \Rightarrow \quad \frac{\left(\frac{6,5 \cdot 10^3 \cdot L^2}{8}\right) \cdot 0,12}{1,6128 \cdot 10^{-4}} \leq 8,2 \cdot 10^6 \quad \therefore \quad L \leq 3,68\text{m}$$

Dónde:

$$M_{\text{máx}} = \frac{wL^2}{8} = \frac{6,5 \cdot 10^3 \cdot L^2}{8}$$

$$y_{\text{máx}} = \frac{h}{2} = 0,12\text{m}$$

$$I_z = \frac{bh^3}{12} = \frac{0,14 \cdot 0,24^3}{12} = 1,6128 \cdot 10^{-4} \text{m}^4$$

Del resultado obtenido, asumimos:

$$L_{\text{máx}} = 3,68\text{m}$$

2. Determinamos las reacciones en el empotramiento y graficamos los diagramas de fuerza cortante y momento flector, tal como se muestra en la figura de la siguiente página.

Aplicamos la condición de resistencia:

$$\sigma_{\text{máx}} \leq [\sigma] \quad \Rightarrow \quad \frac{40,42 \cdot 10^3}{\left(\frac{5\pi d^4}{16}\right)} (d) \leq 10 \cdot 10^6 \quad \therefore \quad d \geq 0,16\text{m}$$

Dónde:

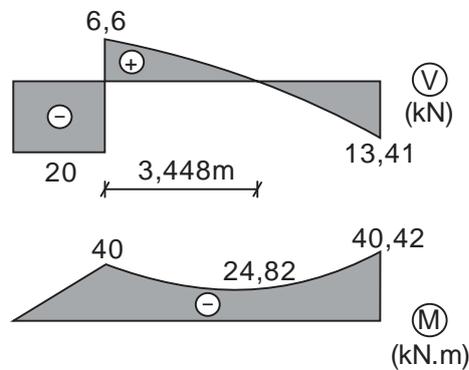
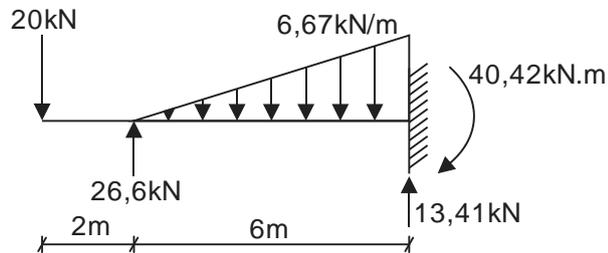
$$M_{\text{máx}} = 40,42\text{kN.m}$$

$$y_{\text{máx}} = d$$

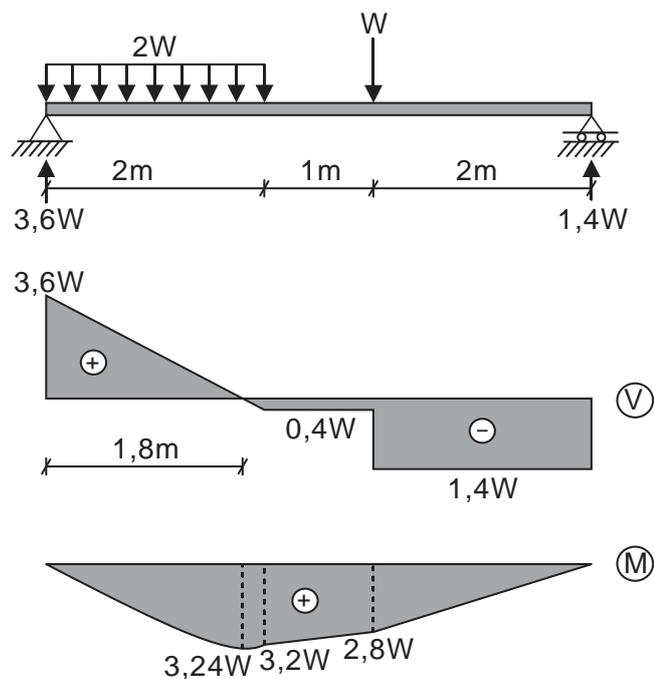
$$I_z = 4 \cdot \left[ \frac{\pi d^4}{64} + \frac{\pi d^2}{4} \left( \frac{d}{2} \right)^2 \right] = \frac{5\pi d^4}{16}$$

Del resultado obtenido, asumimos:

$$d_{\text{mín}} = 16\text{cm}$$



3. Calculamos las reacciones en los apoyos y graficamos los diagramas de fuerza cortante y momento flector.



Aplicamos las condiciones de resistencia para los esfuerzos normal y tangencial.

ESFUERZO NORMAL:

$$\sigma_{\text{máx}} \leq [\sigma] \Rightarrow \frac{3,24W}{9 \cdot 10^{-5}} \cdot 0,11 \leq 10 \cdot 10^6 \quad \therefore \quad W \leq 2525,25N$$

Dónde:

$$M_{\text{máx}} = 3,24W$$

$$y_{\text{máx}} = 0,11m$$

$$I_z = 2 \cdot \left[ \frac{0,2 \cdot 0,02^3}{12} + 0,2 \cdot 0,02 \cdot 0,1^2 \right] + \frac{0,02 \cdot 0,18^3}{12} = 9 \cdot 10^{-5} m^4$$

ESFUERZO TANGENCIAL:

$$\tau_{\text{máx}} \leq [\tau] \Rightarrow \frac{3,6W \cdot 4,81 \cdot 10^{-4}}{9 \cdot 10^{-5} \cdot 0,02} \leq 1,4 \cdot 10^6 \quad \therefore \quad W \leq 1455,30N$$

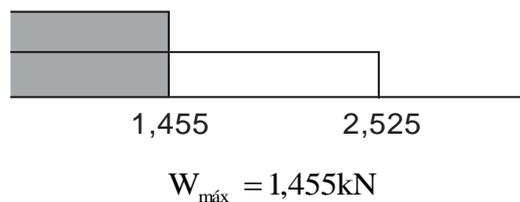
Dónde:

$$V_{\text{máx}} = 3,6W$$

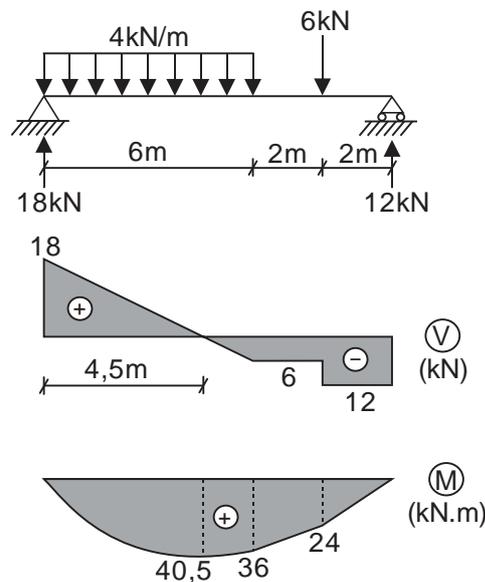
$$S_{z,\text{máx}} = 0,2 \cdot 0,02 \cdot 0,1 + 0,02 \cdot 0,09 \cdot 0,045 = 4,81 \cdot 10^{-4} m^3$$

$$b_{\text{alma}} = 0,02m$$

De las respuestas obtenidas, elegimos en kN la que cumpla con ambas condiciones, considerando para efectos prácticos tres decimales.



4. Calculamos las reacciones en los apoyos y graficamos los diagramas de fuerza cortante y momento flector, tal como se muestra en la figura.



Aplicamos la condición de resistencia para el esfuerzo normal.

$$\sigma_{\text{máx}} \leq [\sigma] \quad \Rightarrow \quad \frac{40,5 \cdot 10^3}{W_Z} \leq 100 \cdot 10^6 \quad \therefore \quad W_Z \geq 405 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$W_Z \geq 405 \text{ cm}^3$$

De los perfiles indicados, elegimos el N° 3 por tener un módulo de resistencia un poco mayor al requerido.

Ahora, de acuerdo al perfil elegido, calculamos el esfuerzo tangencial máximo.

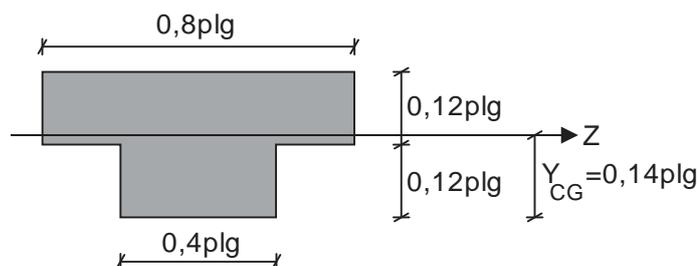
$$\tau_{\text{máx}} = \frac{V_{\text{máx}} S_{Z,\text{máx}}}{I_Z b_{\text{alma}}} = \frac{18 \cdot 10^3 \cdot 229 \cdot 10^{-6}}{5500 \cdot 10^{-8} \cdot 6 \cdot 10^{-3}} = 12,49 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 12,49 \text{ MPa}$$

5. Transformamos el material A al material B

$$b'_B = \frac{E_A}{E_B} b_A = \frac{42 \cdot 10^6}{21 \cdot 10^6} \cdot 0,4 = 0,8 \text{ plg}$$

Esquemizamos la nueva sección equivalente de la viga y determinamos la ubicación del eje neutro, eligiendo como eje de referencia la parte inferior de la sección transversal.

$$Y_{\text{CG}} = \frac{0,4 \cdot 0,12 \cdot 0,06 + 0,8 \cdot 0,12 \cdot 0,18}{0,4 \cdot 0,12 + 0,8 \cdot 0,12} = 0,14 \text{ plg}$$



Calculamos el momento de inercia de la sección equivalente respecto al eje neutro.

$$I_Z = \frac{0,4 \cdot 0,12^3}{12} + 0,4 \cdot 0,12 \cdot 0,08^2 + \frac{0,8 \cdot 0,12^3}{12} + 0,8 \cdot 0,12 \cdot 0,04^2 = 6,336 \cdot 10^{-4} \text{ plg}^4$$

Ahora, determinamos los módulos de resistencia para cada uno de los materiales.

MATERIAL "B":

$$\sigma_B = \frac{M}{I_Z} y_B \quad \Rightarrow \quad W_Z^B = \frac{M}{\sigma_B} = \frac{I_Z}{y_B} = \frac{6,336 \cdot 10^{-4}}{0,14} = 4,52 \cdot 10^{-3} \text{ plg}^3$$

MATERIAL "A":

$$\sigma_A = \left( \frac{E_A}{E_B} \right) \frac{M}{I_Z} y_A \quad \Rightarrow \quad W_Z^A = \frac{M}{\sigma_A} = \frac{I_Z}{2y_A} = \frac{6,336 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 0,10} = 3,17 \cdot 10^{-3} \text{ plg}^3$$

Luego, determinamos los esfuerzos normales para cada material.

MATERIAL "B":

$$\sigma_B = \left( \frac{M}{I_Z} \right) \cdot 0,14 = 0,14 \frac{M}{I_Z}$$

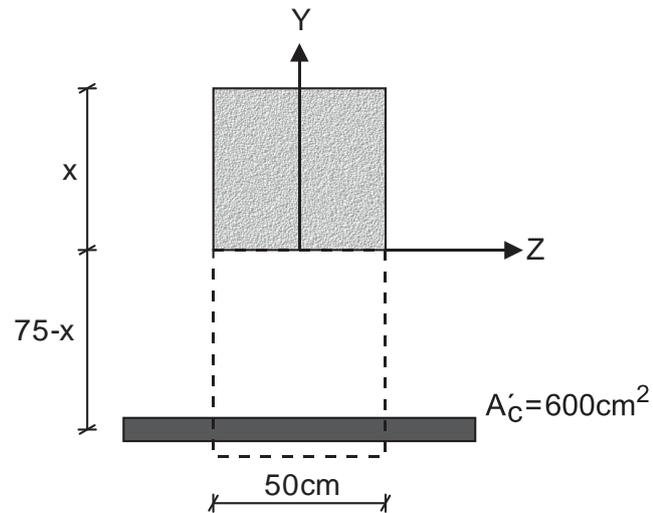
MATERIAL "A":

$$\sigma_A = \left( \frac{E_A}{E_B} \right) \frac{M}{I_Z} y_A = 2 \cdot \frac{M}{I_Z} \cdot 0,10 = 0,20 \frac{M}{I_Z}$$

De esta manera, podemos concluir que el esfuerzo normal máximo ocurre en el material A

6. Determinamos el área del acero transformado en concreto.

$$A'_c = nA_a = 10 \cdot 6000 = 60000 \text{mm}^2 = 600 \text{cm}^2$$



Determinamos la ubicación del eje neutro, a través de la igualdad de los momentos estáticos.

$$S_z^{\text{sup}} = S_z^{\text{inf}} \quad \Rightarrow \quad 50x \left( \frac{x}{2} \right) = 600(75 - x)$$

$$x^2 + 24x - 1800 = 0$$

De donde:

$$x = 32,1 \text{cm}$$

Calculamos el momento de inercia respecto al eje neutro.

$$I_z = \frac{50 \cdot 32,1^3}{12} + 50 \cdot 32,1 \cdot 16,05^2 + 600 \cdot 42,9^2 = 1655515,35 \text{cm}^4$$

Determinamos los esfuerzos normales máximos para cada material.

CONCRETO:

$$\sigma_c^{\text{máx}} = \frac{M_{\text{máx}}}{I_z} y_c^{\text{máx}} = \frac{270 \cdot 10^3}{1655515,35 \cdot 10^{-8}} \cdot 32,1 \cdot 10^{-2} = 5,23 \text{MPa}$$

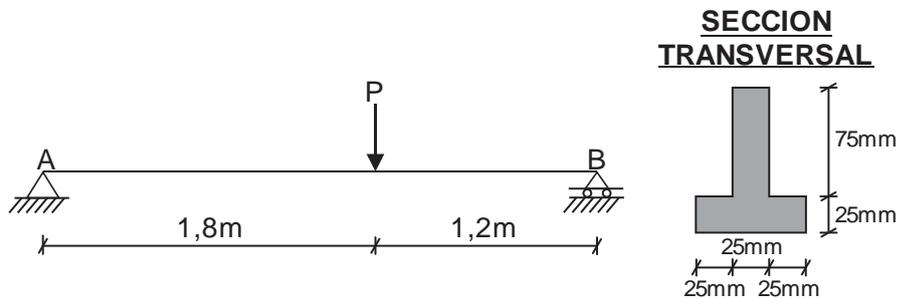
ACERO:

$$\sigma_a^{\text{máx}} = \frac{E_a}{E_c} \frac{M_{\text{máx}}}{I_z} y_a^{\text{máx}} = 10 \cdot \frac{270 \cdot 10^3}{1655515,35 \cdot 10^{-8}} \cdot 42,9 \cdot 10^{-2} = 69,97 \text{MPa}$$

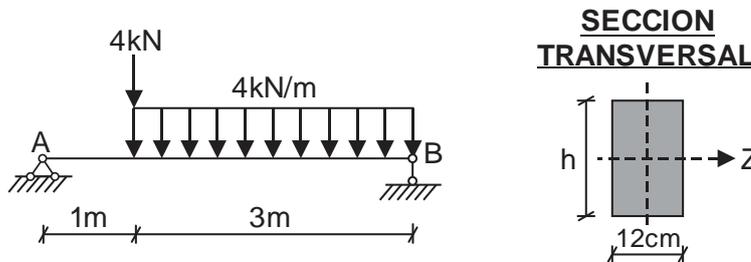
**MECANICA DE MATERIALES (CI80)**  
**PRACTICA CALIFICADA N° 2**  
**CICLO 2012-01**

**Profesor : Ph.D. Genner Villarreal Castro**  
**Sección : CI51**  
**Duración : 170 minutos**

1. Determinar el esfuerzo de flexión máximo  $\sigma_{\text{máx}}$  causado por la carga concentrada  $P$  que actúa sobre la viga simplemente apoyada  $AB$  mostrada en la figura, si  $P = 5,4\text{kN}$  y la sección transversal tiene las dimensiones mostradas. Ubicar previamente la posición racional de la viga. (3 puntos)

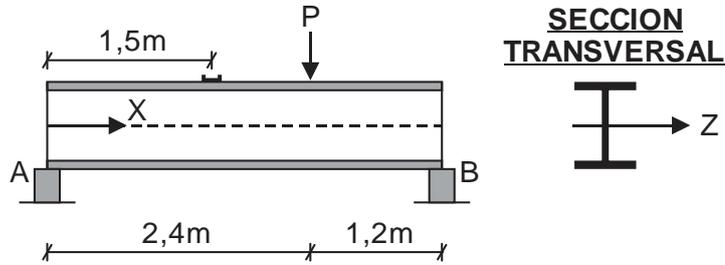


2. Determinar el valor del peralte "h" de la viga de madera mostrada en la figura, si  $[\sigma] = 14\text{MPa}$  y comprobar su resistencia por esfuerzo tangencial, considerando  $[\tau] = 2\text{MPa}$  (2 puntos)

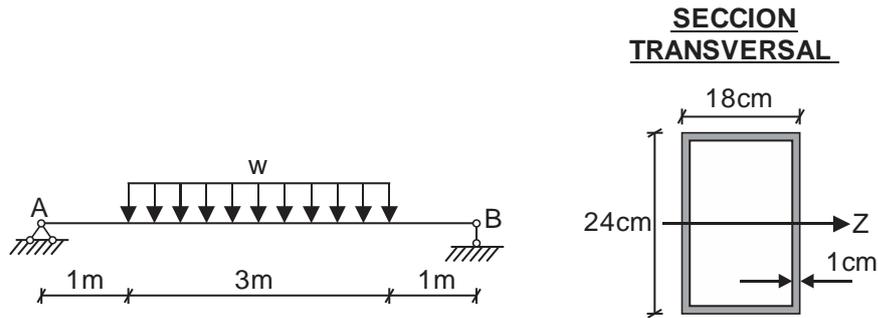


3. La viga de acero mostrada en la figura, está sometida a la acción de una carga  $P$ . Se pide, determinar el valor de la carga y los esfuerzos normal y tangencial máximos, si con la ayuda de un tensómetro se midió la deformación lineal de la fibra superior en la sección  $x = 1,5\text{m}$ ; siendo  $\epsilon_x = \epsilon = -4,6 \cdot 10^{-4}$ . Considerar  $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{MPa}$  y las características geométricas del perfil metálico son las indicadas en la siguiente tabla. (4 puntos)

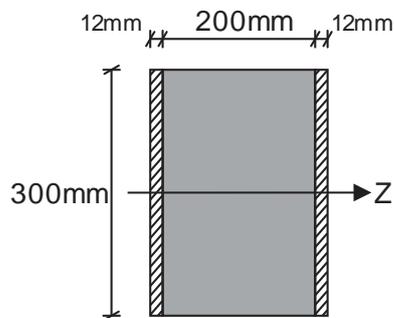
PERFIL	$b_{\text{alma}}$ (mm)	$I_z$ ( $\text{cm}^4$ )	$W_z$ ( $\text{cm}^3$ )	$S_{z,\text{máx}}$ ( $\text{cm}^3$ )
I	5,4	2550	232	131



4. Para la viga de acero mostrada en la figura, se pide, determinar el valor de la carga uniformemente distribuida “w” y graficar su diagrama de esfuerzo tangencial. Considerar  $[\sigma] = 210\text{MPa}$  (4 puntos)



5. Una viga de madera de dimensiones 200mm x 300mm se refuerza en sus costados por placas de acero de 12mm de espesor, tal como se muestra en la figura. Los módulos de elasticidad para el acero y la madera son  $E_a = 204\text{GPa}$  y  $E_m = 8,5\text{GPa}$ , respectivamente. También, los esfuerzos admisibles son  $[\sigma]_a = 130\text{MPa}$  y  $[\sigma]_m = 8\text{MPa}$ . Calcular el momento flector máximo  $M_{\text{máx}}$  respecto al eje Z (3 puntos)



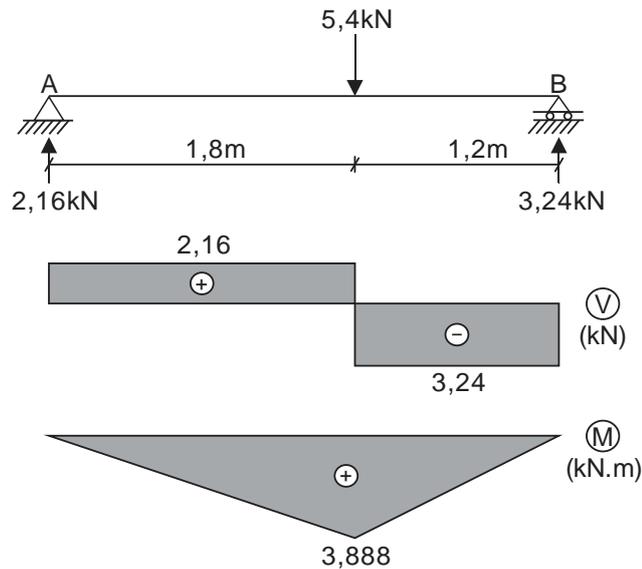
6. En una viga de concreto armado,  $b = 300\text{mm}$ ,  $d = 600\text{mm}$  y  $n = 9$ . Al aplicar un momento flector de 80kN.m, el esfuerzo normal máximo en el concreto es de 5MPa. ¿Qué esfuerzo aparecerá en el acero? ¿Cuál será el área de acero requerida? Considerar “d” como la distancia desde la ubicación del acero de refuerzo hasta la cara superior de la viga. (4 puntos)

Monterrico, 24 de mayo de 2012

## SOLUCIONARIO DE PRÁCTICA CALIFICADA Nº 2

### CICLO 2012-01

1. Determinamos las reacciones en los apoyos y graficamos los diagramas de fuerza cortante y momento flector, tal como se muestran en la figura.



Determinamos la ubicación del centro de gravedad de la sección transversal.

$$Y_{CG} = \frac{75 \cdot 25 \cdot 12,5 + 25 \cdot 75 \cdot 62,5}{75 \cdot 25 + 25 \cdot 75} = 37,5 \text{ mm}$$

Determinamos la ubicación de las zonas de tracción y compresión.

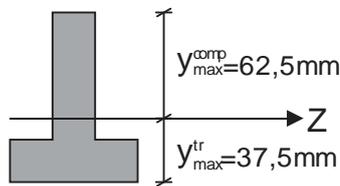
- a) Momento flector máximo:  $M_{\text{máx}} = 3,888 \text{ kN.m}$ , implica que la zona superior al eje neutro es de compresión y la zona inferior de tracción.

- b) Áreas de sección transversal:

$$A_Z^{\text{sup}} = 25 \cdot 62,5 = 1562,5 \text{ mm}^2 \text{ (COMPRESION)}$$

$$A_Z^{\text{inf}} = 75 \cdot 25 + 25 \cdot 12,5 = 2187,5 \text{ mm}^2 \text{ (TRACCION)}$$

Como coincide la ubicación de las zonas de tracción y de compresión, tanto por momento flector, como por áreas, se concluye que dicha posición es la racional.



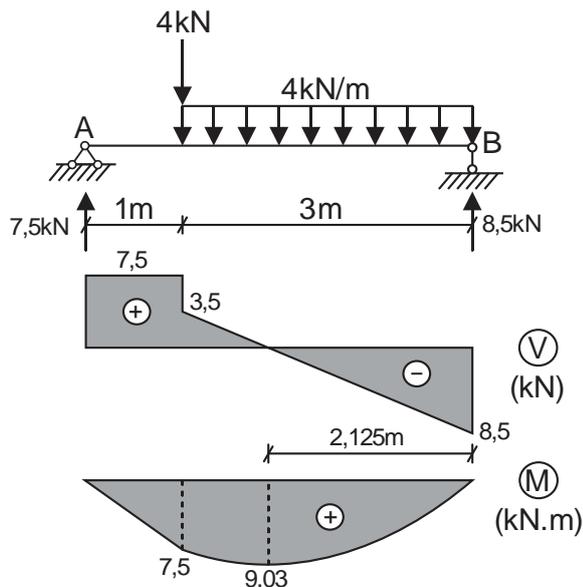
Calculamos el momento de inercia respecto al eje neutro.

$$I_Z = \frac{25 \cdot 75^3}{12} + 25 \cdot 75 \cdot 25^2 + \frac{75 \cdot 25^3}{12} + 75 \cdot 25 \cdot 25^2 = 3320312,5 \text{ mm}^4$$

Determinamos el esfuerzo normal máximo.

$$\sigma_{\text{máx}} = \sigma_{\text{máx}}^{\text{comp}} = \frac{M_{\text{máx}}}{I_Z} y_{\text{máx}}^{\text{comp}} = \frac{3,888 \cdot 10^3}{3320312,5 \cdot 10^{-12}} \cdot 62,5 \cdot 10^{-3} = 73,186 \text{ MPa}$$

2. Determinamos las reacciones en los apoyos y graficamos los diagramas de fuerza cortante y momento flector, tal como se muestra en la figura.



Aplicamos la condición de resistencia:

$$\sigma_{\text{máx}} \leq [\sigma] \quad \Rightarrow \quad \frac{9,03 \cdot 10^3}{(0,12h^3 / 12)} (0,5h) \leq 14 \cdot 10^6 \quad \therefore \quad h \geq 0,1796\text{m}$$

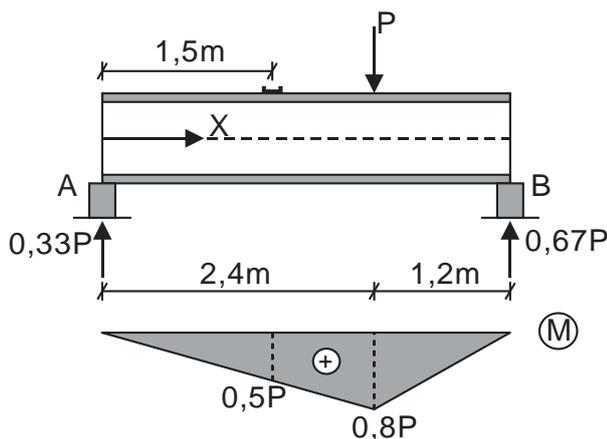
Asumimos:

$$h = 18\text{cm}$$

Luego, determinamos el esfuerzo tangencial máximo.

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{3V_{\text{máx}}}{2A} = \frac{3 \cdot 3,85 \cdot 10^3}{2 \cdot 0,12 \cdot 0,18} = 0,6\text{MPa} < [\tau] \quad (\text{OK})$$

3. Calculamos las reacciones en los apoyos y graficamos los diagramas de fuerza cortante y momento flector, tal como se muestra en la figura.



Aplicamos la Ley de Hooke para determinar el esfuerzo normal.

$$\sigma = E\varepsilon = 2,1 \cdot 10^5 \cdot (-4,6 \cdot 10^{-4}) = -96,6\text{MPa} \text{ (COMPRESION)}$$

Este esfuerzo corresponde al momento flector en la sección dada, siendo su valor:

$$M = |\sigma| \cdot W_z = 96,6 \cdot 10^6 \cdot 232 \cdot 10^{-6} = 22,41\text{kN.m}$$

Luego, determinamos la carga P, expresando el momento flector en función de esta fuerza e igualando con el valor obtenido en el diagrama, para el lugar donde está ubicado el tensómetro.

$$M_{x=1,5m} = 0,5P = 22,41 \Rightarrow P = 44,82\text{kN}$$

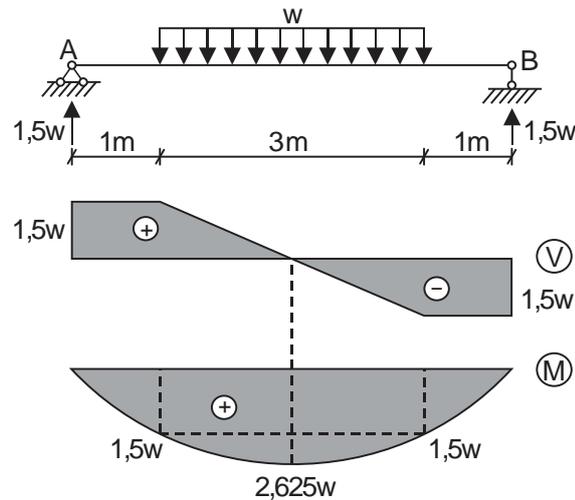
Ahora, calculamos el esfuerzo normal máximo, que surgirá en el lugar donde actúa la carga P

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{M_{\text{máx}}}{W_Z} = \frac{0,8.44,82.10^3}{232.10^{-6}} = 154,55\text{MPa}$$

Determinamos el esfuerzo tangencial máximo.

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{V_{\text{máx}} S_Z^{\text{sup}}}{I_Z b_{\text{alma}}} = \frac{0,67.44,82.10^3.131.10^{-6}}{2550.10^{-8}.5,4.10^{-3}} = 28,57\text{MPa}$$

4. Calculamos las reacciones en los apoyos y graficamos los diagramas de fuerza cortante y momento flector, tal como se muestra en la figura.



Determinamos las características geométricas de la sección transversal de la viga, analizándolo como la diferencia entre dos rectángulos.

$$I_Z = \frac{18.24^3}{12} - \frac{16.22^3}{12} = 6538,67\text{cm}^4$$

$$W_Z = \frac{6538,67}{12} = 544,89\text{cm}^3$$

$$S_{Z,\text{máx}} = 18.12.6 - 16.11.5,5 = 328\text{cm}^3$$

Determinamos el momento flector admisible.

$$M = [\sigma]W_Z = 210.10^6.544,89.10^{-6} = 114,43\text{kN.m}$$

Luego, determinamos el valor de la carga "w"

$$114,43 = 2,625w \Rightarrow w = 43,6\text{kN/m}$$

Calculamos los valores de los esfuerzos tangenciales en la sección transversal y graficamos su diagrama, tal como se muestra en la figura de la siguiente página.

$$\tau_A = 0$$

$$\tau_B = \frac{1,5.43,6.10^3.207.10^{-6}}{6538,67.10^{-8}.18.10^{-2}} = 1,15\text{MPa}$$

$$S_Z^B = 18.1.11,5 = 207\text{cm}^3$$

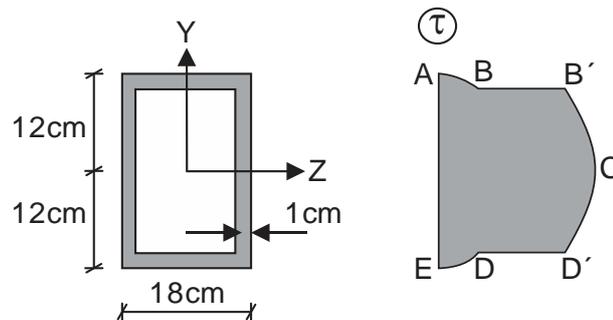
$$\tau_{B'} = \frac{1,5.43,6.10^3.207.10^{-6}}{6538,67.10^{-8}.2.10^{-2}} = 10,35\text{MPa}$$

$$\tau_C = \tau_{\text{m}\acute{\text{a}}\text{x}} = \frac{1,5.43,6.10^3.328.10^{-6}}{6538,67.10^{-8}.2.10^{-2}} = 16,40\text{MPa}$$

$$\tau_{D'} = \tau_{B'} = 10,35\text{MPa}$$

$$\tau_D = \tau_B = 1,15\text{MPa}$$

$$\tau_E = 0$$



5. Determinamos el ancho equivalente de la viga de acero, convertida en madera.

$$b'_m = \frac{E_a}{E_m} b_a = \frac{204.10^9}{8,5.10^9} \cdot 12 = 288\text{mm}$$

Calculamos el momento de inercia respecto al eje neutro, el cual sigue coincidiendo con el eje Z inicial.

$$I_Z = \frac{776.300^3}{12} = 1746.10^6 \text{mm}^4$$

Aplicamos las condiciones de resistencia para la madera y el acero, determinando en ambos casos el rango del momento flector máximo.

MADERA:

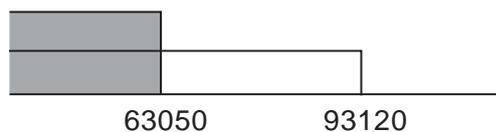
$$\sigma_m^{\text{m}\acute{\text{a}}\text{x}} = \frac{M_{\text{m}\acute{\text{a}}\text{x}}}{I_Z} y_m^{\text{m}\acute{\text{a}}\text{x}} \leq [\sigma]_m \quad \Rightarrow \quad \frac{M_{\text{m}\acute{\text{a}}\text{x}}}{1746.10^6.10^{-12}} \cdot 150.10^{-3} \leq 8.10^6$$

$$M_{\text{m}\acute{\text{a}}\text{x}} \leq 93120\text{N.m}$$

ACERO:

$$\sigma_a^{\text{m}\acute{\text{a}}\text{x}} = \left( \frac{E_a}{E_m} \right) \frac{M_{\text{m}\acute{\text{a}}\text{x}}}{I_Z} y_a^{\text{m}\acute{\text{a}}\text{x}} \leq [\sigma]_a \quad \Rightarrow \quad \frac{204.10^9}{8,5.10^9} \cdot \frac{M_{\text{m}\acute{\text{a}}\text{x}}}{1746.10^6.10^{-12}} \cdot 150.10^{-3} \leq 130.10^6$$

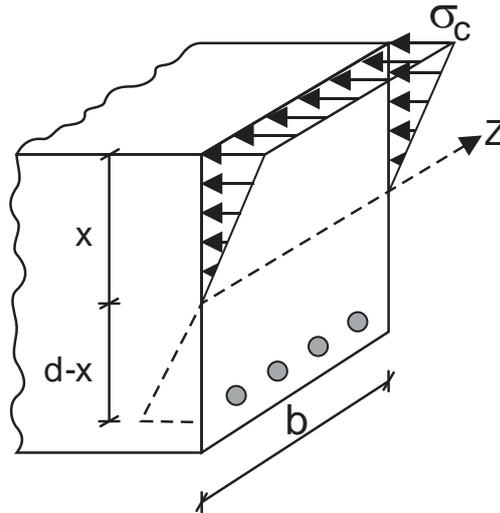
$$M_{\text{m}\acute{\text{a}}\text{x}} \leq 63050\text{N.m}$$



De los resultados obtenidos, elegimos el menor valor, porque cumple con ambas condiciones.

$$M_{\text{m}\acute{\text{a}}\text{x}} = 63050\text{N.m} = 63,05\text{kN.m}$$

6. Esquematisamos para la zona de compresión, la distribución del esfuerzo normal en la viga, tal como se muestra en la figura.



Del gráfico se desprende que el momento flector que puede soportar la sección en función del esfuerzo normal máximo en el concreto es:

$$M_{\text{máx}} = \frac{1}{2}(\sigma_c)(b)(x)\left(d - \frac{x}{3}\right) \Rightarrow 80 \cdot 10^3 \cdot 10^2 = \frac{1}{2}\left(5 \cdot \frac{10^6}{10^4}\right)(30)(x)\left(60 - \frac{x}{3}\right)$$

$$0,333x^2 - 60x + 1066,67 = 0$$

De donde:

$$x = 20\text{cm}$$

Ahora, determinamos el valor del momento de inercia respecto al eje neutro.

$$\sigma_c^{\text{máx}} = \frac{M_{\text{máx}}}{I_z} y_c^{\text{máx}} \Rightarrow 5 \cdot 10^6 = \frac{80 \cdot 10^3}{I_z} \cdot 0,2$$

$$I_z = 3,2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$$

De esta manera, el esfuerzo en el acero será:

$$\sigma_a^{\text{máx}} = \left(\frac{E_a}{E_c}\right) \frac{M_{\text{máx}}}{I_z} y_a^{\text{máx}} = 9 \cdot \frac{80 \cdot 10^3}{3,2 \cdot 10^{-3}} \cdot 0,4 = 90 \text{ MPa}$$

Además, el área de acero transformado en concreto es  $A_c' = nA_a = 9A_a$

Determinamos el área del acero en función del momento estático.

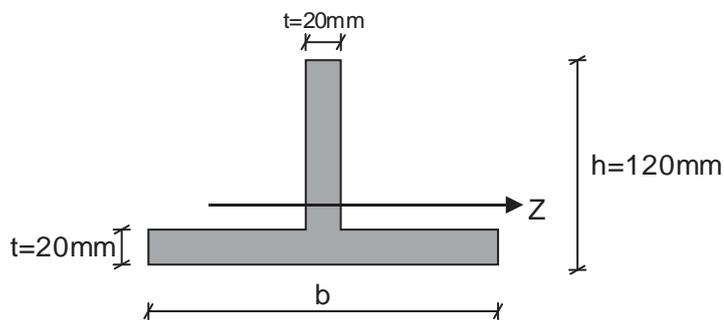
$$S_Z^{\text{sup}} = S_Z^{\text{inf}} \Rightarrow 30(20)(10) = 9(A_a)(40)$$

$$A_a = 16,67 \text{ cm}^2$$

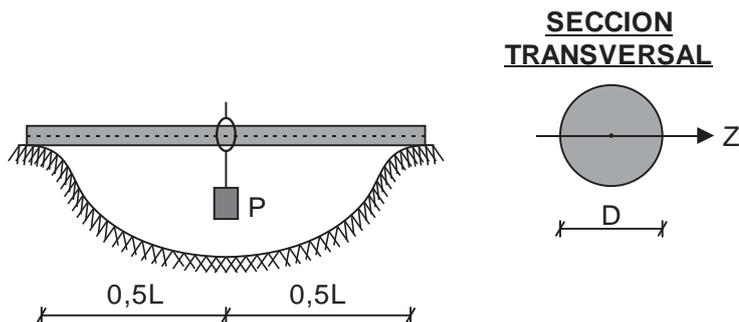
**MECANICA DE MATERIALES (CI80)**  
**PRACTICA CALIFICADA N° 2**  
**CICLO 2012-02**

**Profesor** : Ph.D. Genner Villarreal Castro  
**Sección** : CI51  
**Duración** : 170 minutos

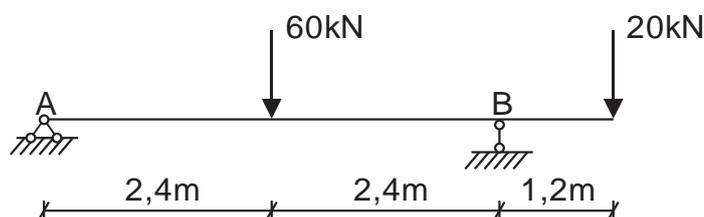
1. Determinar el ancho “b” del patín de la viga T mostrada en la figura, tal que los esfuerzos normales en las partes superior e inferior de la viga estén en la relación 3:1, respectivamente. (2 puntos)



2. Una viga de madera de sección transversal circular de diámetro  $D = 16\text{cm}$ , cubre una luz “L” y está cargada en la parte central por una carga puntual  $P = 4\text{kN}$ . Determinar la longitud máxima  $L_{\text{máx}}$ , considerando un factor de seguridad o coeficiente de sobrecarga  $n = 1,3$  y esfuerzo normal admisible  $[\sigma] = 14\text{MPa}$  (3 puntos)



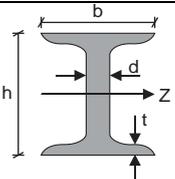
3. Para la viga mostrada en la figura, considerar un factor de seguridad o coeficiente de sobrecarga  $n = 1,2$  y esfuerzo normal admisible  $[\sigma] = 210\text{MPa}$



Se pide:

a) Elegir el perfil I más adecuado, según tabla adjunta

(1 punto)

PERFIL	Nº	h (cm)	b (cm)	d (cm)	t (cm)	$I_z$ (cm <sup>4</sup> )	$W_z$ (cm <sup>3</sup> )	$S_z$ (cm <sup>3</sup> )
	1	22	11	0,54	0,87	2550	232	131
	2	24	11,5	0,56	0,95	3460	289	163
	3	27	12,5	0,60	0,98	5010	371	210
	4	30	13,5	0,65	1,02	7080	472	268

b) Graficar los diagramas  $\sigma$  y  $\tau$  para la sección más peligrosa

(3 puntos)

c) Para la sección más peligrosa, determinar los esfuerzos principales y ángulos de giro de los planos principales en el punto de unión del alma con el ala o patín del perfil elegido, correspondiente a la zona traccionada

(2 puntos)

d) Determinar el momento de destrucción o colapso en el estado plástico flexionante de fluencia, si

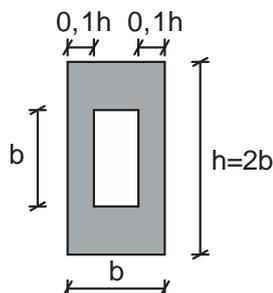
$$\sigma_y = 230\text{MPa}$$

(1 punto)

4. Graficar el diagrama de esfuerzo tangencial para la sección transversal mostrada en la figura, si

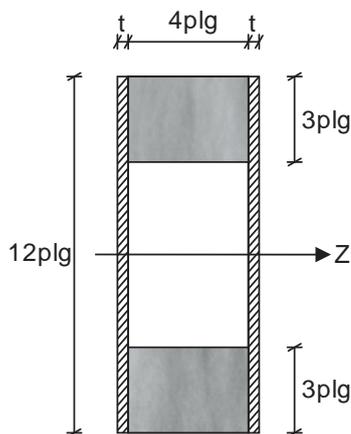
$$\tau_{\text{máx}} = \tau_o$$

(2 puntos)

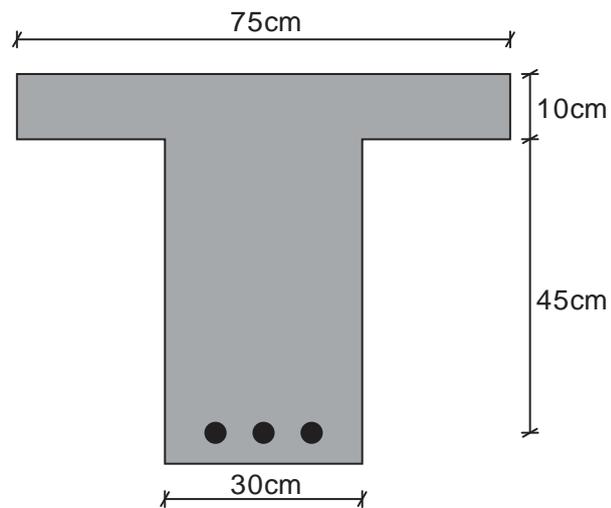


5. Una viga simplemente apoyada con una luz de 11pie, soporta una carga uniforme de 3200lb/pie. La sección transversal de la viga es del tipo cajón con patines de madera y almas de acero, tal como se muestra en la figura. ¿Cuál es el espesor mínimo requerido  $t_{\text{min}}$  de las placas de acero, si los esfuerzos permisibles son 18000psi para el acero y 1200psi para la madera? Suponer que los módulos de elasticidad para el acero y la madera son  $30 \cdot 10^6$  psi y  $1,5 \cdot 10^6$  psi, respectivamente

(3 puntos)



6. Para la viga T de concreto armado mostrada en la figura, se pide determinar el momento flector máximo que puede aplicarse, sin exceder los esfuerzos normales de 12MPa y 140MPa para el concreto y acero, respectivamente. Considerar  $n = 8$  y  $A_a = 3300\text{mm}^2$  (3 puntos)



**Monterrico, 30 de octubre de 2012**

**SOLUCIONARIO DE PRÁCTICA CALIFICADA Nº 2**  
**CICLO 2012-02**

1. Por dato del problema:

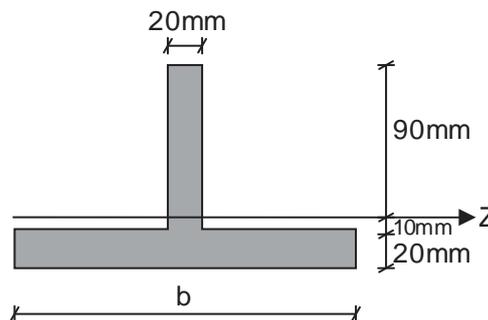
$$\frac{\sigma_{\text{sup}}}{\sigma_{\text{inf}}} = \frac{3}{1} \quad \Rightarrow \quad \frac{\frac{M}{I_Z} y_{\text{sup}}}{\frac{M}{I_Z} y_{\text{inf}}} = \frac{3}{1} \quad \therefore \quad y_{\text{sup}} = 3y_{\text{inf}}$$

Como:

$$y_{\text{sup}} + y_{\text{inf}} = 120 \quad \Rightarrow \quad y_{\text{sup}} = 90\text{mm}$$

$$y_{\text{inf}} = 30\text{mm}$$

Las dimensiones se muestran en la figura:



Además, se sabe que:

$$S_Z^{\text{sup}} = S_Z^{\text{inf}} \quad \Rightarrow \quad 20(90)(45) = 20b(20) + 20(10)(5) \quad \therefore \quad b = 200\text{mm}$$

2. Graficamos el diagrama de momento flector debido a la acción de la carga P, obteniendo como valor máximo:

$$M_{\text{máx}}^{\text{normal}} = \frac{PL}{4} = \frac{4L}{4} = L$$

Luego, determinamos el momento máximo debido a la sobrecarga:

$$M_{\text{máx}}^{\text{s/c}} = 1,3M_{\text{máx}}^{\text{normal}} = 1,3L = M_{\text{máx}}$$

En consecuencia:

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{M_{\text{máx}}}{W_Z} \leq [\sigma] \quad \Rightarrow \quad \frac{1,3L}{(\pi/32) \cdot 16^3 \cdot 10^{-6}} \leq 14 \cdot 10^3 \quad \therefore \quad L \leq 4,33\text{m}$$

Asumimos:

$$L_{\text{máx}} = 4,33\text{m}$$

3. a) Graficamos los diagramas de fuerza cortante y momento flector, tal como se muestra en la figura de la siguiente página.

Determinamos el momento máximo debido a la sobrecarga.

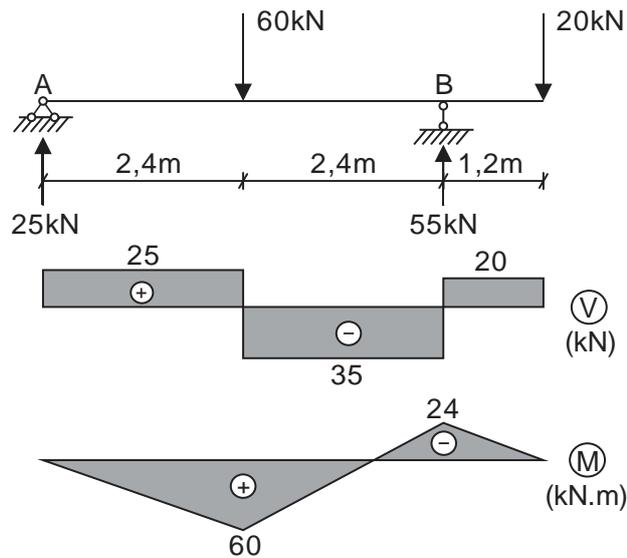
$$M_{\text{máx}}^{\text{s/c}} = 1,2 \cdot 60 = 72\text{kN.m} = M_{\text{máx}}$$

Luego:

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{M_{\text{máx}}}{W_Z} \leq [\sigma] \quad \Rightarrow \quad \frac{72 \cdot 10^3}{W_Z} \leq 210 \cdot 10^6 \quad \therefore \quad W_Z \geq 3,43 \cdot 10^{-4} \text{m}^3$$

$$W_z \geq 343 \text{ cm}^3$$

De los perfiles indicados, elegimos el N°3



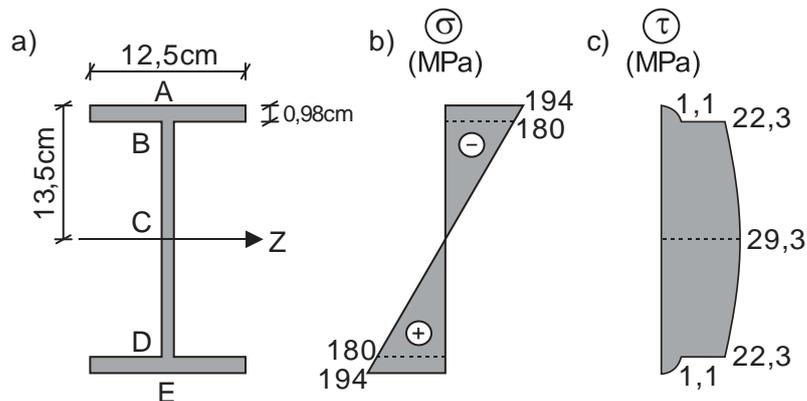
b) Determinamos los esfuerzos normales máximos en la sección más peligrosa.

$$\sigma_{\text{máx}} = |\sigma_{\text{mín}}| = \frac{72 \cdot 10^3}{371 \cdot 10^{-6}} = 194 \text{ MPa}$$

En la sección más peligrosa, la fibra superior trabaja en compresión y la fibra inferior en tracción. Determinamos los esfuerzos normales a la altura de la unión del alma con el ala o patín.

$$\sigma = \frac{M_{\text{máx}}}{I_z} y = \frac{72 \cdot 10^3}{5010 \cdot 10^{-8}} \cdot 12,52 \cdot 10^{-2} = 180 \text{ MPa}$$

Con los valores obtenidos, se grafica el diagrama de esfuerzo normal mostrado en la figura b)



El esfuerzo tangencial es máximo en el tramo donde la fuerza cortante es  $V = -35 \text{ kN}$

Determinamos la fuerza cortante debido a la sobrecarga.

$$V_{\text{máx}}^{s/c} = 1,2 \cdot 35 = 42 \text{ kN} = V_{\text{máx}}$$

Ahora, calculamos los esfuerzos tangenciales en los puntos estratégicos para la sección más peligrosa.

$$\tau_A = 0$$

$$\tau_B = \frac{V_{\max} S_Z^B}{I_Z b} = \frac{42 \cdot 10^3 \cdot 159,4 \cdot 10^{-6}}{5010 \cdot 10^{-8} \cdot 12,5 \cdot 10^{-2}} = 1,1 \text{MPa}$$

$$S_Z^B = 12,5 \cdot 0,98 \cdot 13,01 = 159,4 \text{cm}^3$$

$$\tau_{B'} = \frac{V_{\max} S_Z^B}{I_Z d} = \frac{42 \cdot 10^3 \cdot 159,4 \cdot 10^{-6}}{5010 \cdot 10^{-8} \cdot 0,6 \cdot 10^{-2}} = 22,3 \text{MPa}$$

$$\tau_C = \frac{V_{\max} S_Z}{I_Z d} = \frac{42 \cdot 10^3 \cdot 210 \cdot 10^{-6}}{5010 \cdot 10^{-8} \cdot 0,6 \cdot 10^{-2}} = 29,3 \text{MPa}$$

$$\tau_{D'} = \tau_{B'} = 22,3 \text{MPa}$$

$$\tau_D = \tau_B = 1,1 \text{MPa}$$

$$\tau_E = 0$$

En la figura c) se muestra el diagrama de esfuerzo tangencial, siendo el signo el mismo que la fuerza cortante máxima considerada.

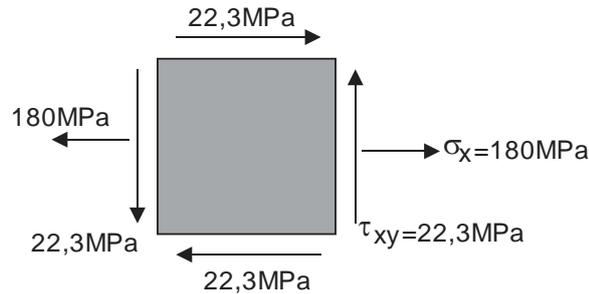
c) De las figuras b) y c) del punto anterior, tenemos:

$$\sigma_X = \sigma = 180 \text{MPa}$$

$$\sigma_Y = 0$$

$$\tau_{XY} = -22,3 \text{MPa}$$

La distribución de esfuerzos se muestra en la siguiente figura.



Luego:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_X + \sigma_Y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_X - \sigma_Y)^2 + 4\tau_{XY}^2} = \frac{180 + 0}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(180 - 0)^2 + 4(-22,3)^2} = 182,7 \text{MPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_X + \sigma_Y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_X - \sigma_Y)^2 + 4\tau_{XY}^2} = \frac{180 + 0}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(180 - 0)^2 + 4(-22,3)^2} = -2,7 \text{MPa}$$

Ahora, determinamos los ángulos de giro de los planos principales.

$$\text{tg} 2\alpha_o' = -\frac{2\tau_{XY}}{\sigma_X - \sigma_Y} = -\frac{2(-22,3)}{180 - 0} = 0,248 \Rightarrow \alpha_o' = 7^\circ$$

$$\alpha_o'' = -83^\circ$$

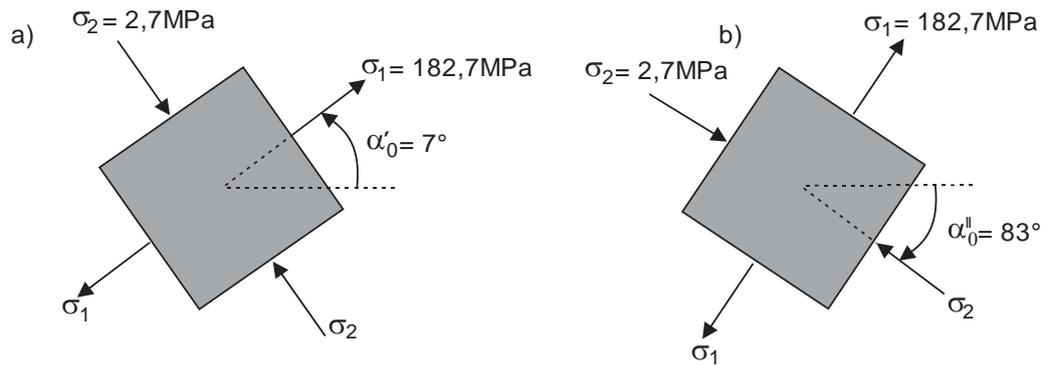
Otra forma de obtener dichos resultados es:

$$\text{tg} \alpha_o' = -\frac{\tau_{XY}}{\sigma_1} = -\frac{-22,3}{182,7} = 0,122 \Rightarrow \alpha_o' = 7^\circ$$

$$\text{tg} \alpha_o'' = -\frac{\tau_{XY}}{\sigma_2} = -\frac{-22,3}{-2,7} = -8,259 \Rightarrow \alpha_o'' = -83^\circ$$

Siendo  $\alpha'_0$  el ángulo que forma  $\sigma_x$  con  $\sigma_1$  y  $\alpha''_0$  el ángulo entre  $\sigma_x$  con  $\sigma_2$

La distribución de esfuerzos y ángulos de desviación se muestran en la siguiente figura.



d) Determinamos el momento de destrucción o colapso en el estado plástico flexionante.

$$M_{\text{destr}} = \sigma_y W_{\text{pl}} = \sigma_y \cdot 2S_z = 230 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 210 \cdot 10^{-6} = 96600 \text{ N.m} = 96,6 \text{ kN.m}$$

Siendo:

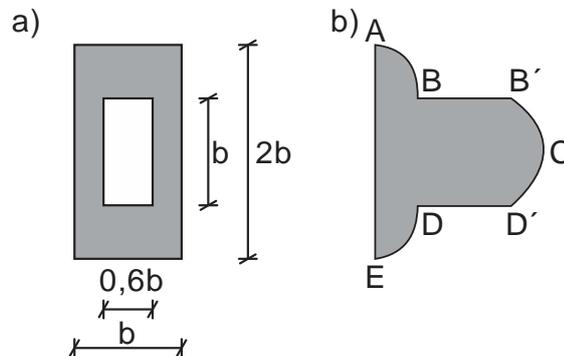
$\sigma_y$  - esfuerzo de fluencia del material de la viga

$W_{\text{pl}}$  - momento plástico de resistencia de la sección en estado plástico, el cual para secciones simétricas respecto al eje central es:

$$W_{\text{pl}} = 2S_z$$

La rótula plástica se forma en la sección, donde el momento flector es máximo, es decir, en el punto de aplicación de la carga de 60kN

4. Como la sección transversal es simétrica, entonces, su diagrama de esfuerzo tangencial también lo será, tal como se muestra en la figura b)



Determinamos los esfuerzos tangenciales para cada uno de los puntos estratégicos.

$$\tau_A = 0$$

$$\tau_B = \frac{VS_Z^B}{I_Z b_B} = \frac{(V)(0,375b^3)}{(0,617b^4)(b)} = 0,608 \frac{V}{b^2} = 0,353\tau_o$$

$$S_Z^B = (0,5b)(b)(0,75b) = 0,375b^3$$

$$I_Z = \frac{(b)(2b)^3}{12} - \frac{(0,6b)(b)^3}{12} = 0,617b^4$$

$$\tau_{B'} = \frac{VS_Z^B}{I_Z b_{B'}} = \frac{(V)(0,375b^3)}{(0,617b^4)(0,4b)} = 1,519 \frac{V}{b^2} = 0,882\tau_o$$

$$\tau_C = \frac{VS_Z^C}{I_Z b_C} = \frac{(V)(0,425b^3)}{(0,617b^4)(0,4b)} = 1,722 \frac{V}{b^2} = \tau_o$$

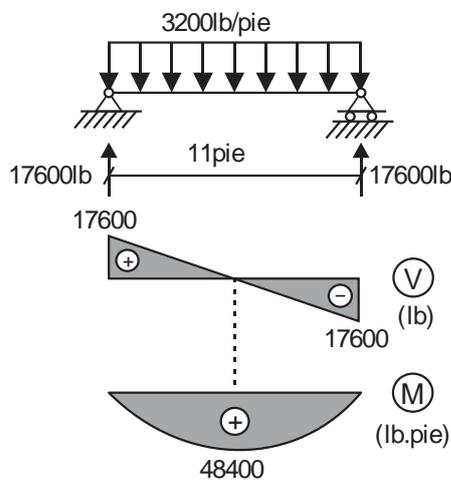
$$S_Z^C = (b)(b)(0,5b) - (0,6b)(0,5b)(0,25b) = 0,425b^3$$

$$\tau_{D'} = \tau_{B'} = 0,882\tau_o$$

$$\tau_D = \tau_B = 0,353\tau_o$$

$$\tau_E = 0$$

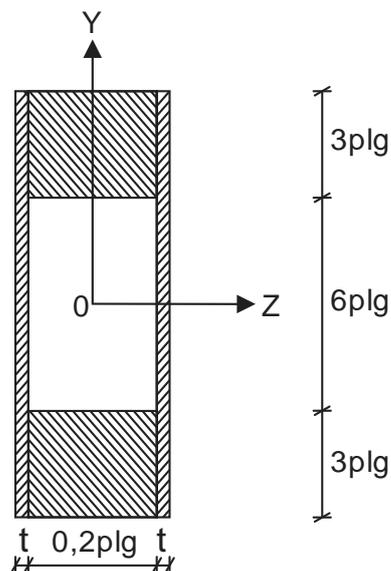
5. De acuerdo a los datos del problema, esquematizamos la carga, calculamos las reacciones en los apoyos y graficamos los diagramas de fuerza cortante y momento flector, tal como se muestra en la figura.



Luego, convertimos la madera en acero.

$$b'_a = \frac{E_m}{E_a} b_m = \frac{1,5 \cdot 10^6}{30 \cdot 10^6} \cdot 4 = 0,2 \text{ plg}$$

De esta manera, la sección transformada es la mostrada en la siguiente figura:



Ahora, calculamos el momento de inercia respecto al eje neutro:

$$I_z = \frac{(0,2 + 2t)(12)^3}{12} - \frac{0,2 \cdot 6^3}{12} = 25,2 + 288t$$

Aplicamos las condiciones de resistencia para el acero y la madera, determinando en ambos casos el rango del espesor "t"

ACERO:

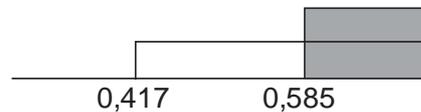
$$\sigma_a^{\text{máx}} = \frac{M_{\text{máx}}}{I_z} y_a^{\text{máx}} \leq [\sigma]_a \Rightarrow \frac{48400 \cdot 12}{25,2 + 288t} \cdot 6 \leq 18000$$

$$t \geq 0,585 \text{ plg}$$

MADERA:

$$\sigma_m^{\text{máx}} = \left( \frac{E_m}{E_a} \right) \frac{M_{\text{máx}}}{I_z} y_m^{\text{máx}} \leq [\sigma]_m \Rightarrow \left( \frac{1}{20} \right) \frac{48400 \cdot 12}{25,2 + 288t} \cdot 6 \leq 1200$$

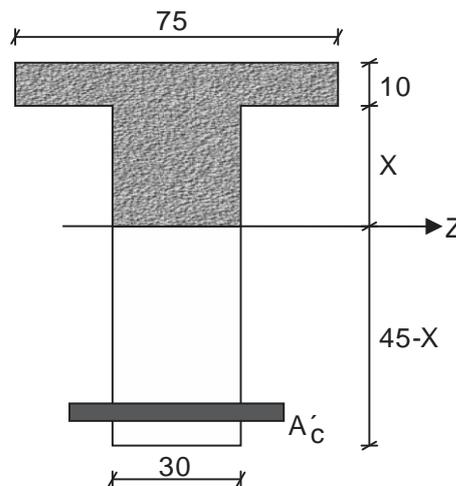
$$t \geq 0,417 \text{ plg}$$



De los resultados obtenidos, elegimos el menor valor que cumpla con ambas condiciones.

$$t_{\text{mín}} = 0,585 \text{ plg}$$

6. Esquematizamos la sección transversal de la viga, utilizando sección transformada.



Calculamos el área del acero transformada en concreto.

$$A'_c = nA_a = 8 \cdot 3300 = 26400 \text{ mm}^2 = 264 \text{ cm}^2$$

Determinamos la ubicación del eje neutro, a través del momento estático.

$$S_z^{\text{sup}} = S_z^{\text{inf}} \Rightarrow (75)(10)(5 + X) + (30)(X)(0,5X) = (264)(45 - X)$$

$$5X^2 + 338X - 2710 = 0$$

De donde:

$$X = 7,24 \text{ cm}$$

Ahora, calculamos el momento de inercia respecto al eje neutro:

$$I_z = \frac{75 \cdot 10^3}{12} + 75 \cdot 10 \cdot 12,24^2 + \frac{30 \cdot 7,24^3}{12} + 30 \cdot 7,24 \cdot 3,62^2 + 264 \cdot 37,76^2 = 498824,08 \text{ cm}^4$$

Posteriormente, aplicamos las condiciones de resistencia para ambos materiales.

CONCRETO:

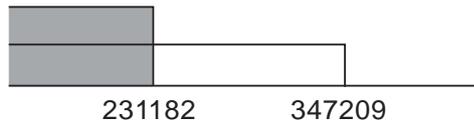
$$\sigma_c^{\text{máx}} = \frac{M_{\text{máx}}}{I_Z} y_c^{\text{máx}} \leq [\sigma]_c \quad \Rightarrow \quad \frac{M_{\text{máx}}}{498824,08 \cdot 10^{-8}} \cdot 17,24 \cdot 10^{-2} \leq 12 \cdot 10^6$$

$$M_{\text{máx}} \leq 347209 \text{ N.m}$$

ACERO:

$$\sigma_a^{\text{máx}} = \left( \frac{E_a}{E_c} \right) \frac{M_{\text{máx}}}{I_Z} y_a^{\text{máx}} \leq [\sigma]_a \quad \Rightarrow \quad 8 \cdot \frac{M_{\text{máx}}}{498824,08 \cdot 10^{-8}} \cdot 37,76 \cdot 10^{-2} \leq 140 \cdot 10^6$$

$$M_{\text{máx}} \leq 231182 \text{ N.m}$$



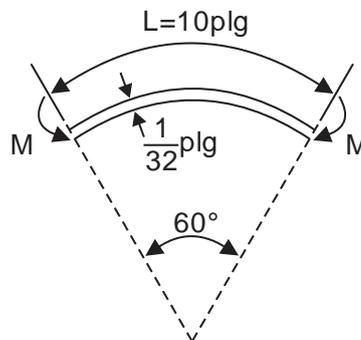
Asumimos:

$$M_{\text{máx}} = 231182 \text{ N.m} = 231,182 \text{ kN.m}$$

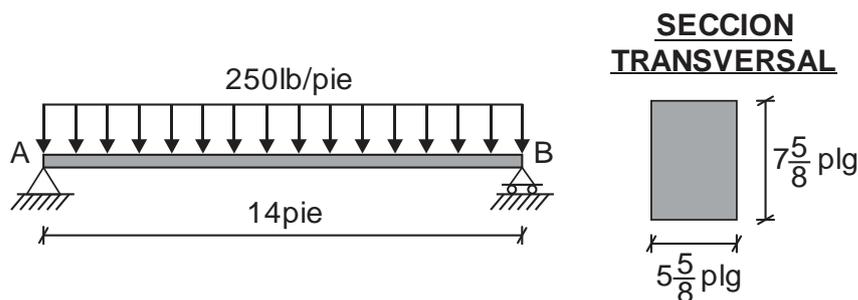
**MECANICA DE MATERIALES (CI80)**  
**PRACTICA CALIFICADA N° 2**  
**CICLO 2013-01**

**Profesor** : Ph.D. Genner Villarreal Castro  
**Sección** : CI51  
**Duración** : 170 minutos

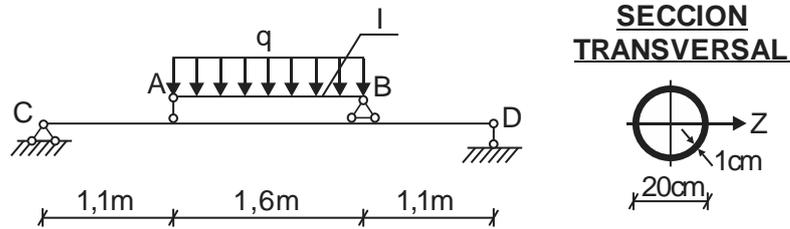
1. Una regla delgada de acero, con módulo de elasticidad  $E = 30 \cdot 10^6$  psi, de espesor  $1/32$  plg y longitud  $L=10$  plg, se flexiona mediante momentos  $M$  en sus extremos y forma un arco circular que subtiende un ángulo central de  $60^\circ$ , tal como se muestra en la figura. Determinar el esfuerzo normal máximo  $\sigma_{\text{máx}}$  en la regla. (2 puntos)



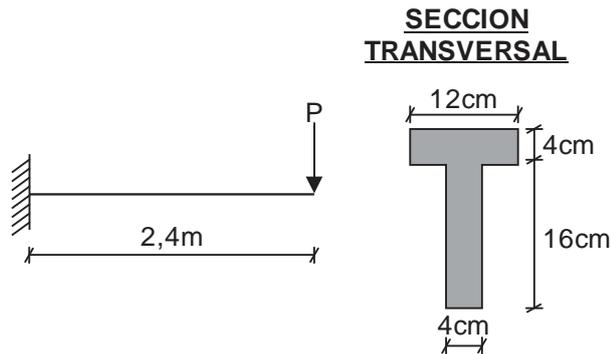
2. Una viga de sección transversal rectangular y simplemente apoyada, con una luz de 14 pie, soporta una carga uniformemente distribuida de intensidad 250 lb/pie, tal como se muestra en la figura. Determinar el esfuerzo normal máximo en flexión  $\sigma_{\text{máx}}$  (2 puntos)



3. La viga AB se apoya sobre la viga CD en los puntos A y B. La sección transversal de la viga AB es un perfil I con módulo de resistencia  $W_z = 109 \text{ cm}^3$  y la sección de la viga CD es tubular, tal como se muestra en la figura. Determinar el valor máximo de la carga uniformemente distribuida  $q_{\text{máx}}$  en kN.m, considerando que ambas vigas son de acero y con esfuerzo admisible  $[\sigma] = 210 \text{ MPa}$  (4 puntos)



4. Para la viga en voladizo de hierro fundido mostrada en la figura, se pide, determinar la carga máxima  $P_{\text{máx}}$  y graficar los diagramas  $\sigma$  y  $\tau$  en la sección más peligrosa. Considerar  $[\sigma]_{\text{tr}} = 50\text{MPa}$  y  $[\sigma]_{\text{comp}} = 140\text{MPa}$  (5 puntos)



5. Una viga de madera de 150mm x 250mm se refuerza con dos placas de acero de 10mm de espesor en las caras superior e inferior. Calcular el ancho que deben de tener las placas, si la viga soportará un momento máximo de 50kN.m y los esfuerzos admisibles son de 8MPa y 110MPa, en la madera y el acero, respectivamente. Considerar  $n = 15$  (3 puntos)
6. Se diseña una viga de concreto armado para alcanzar simultáneamente los esfuerzos  $\sigma_c = 12\text{MPa}$  y  $\sigma_a = 140\text{MPa}$ . Si  $n = 8$  y  $d = 450\text{mm}$ , calcular el brazo de momento del par resistente, considerando “d” como la distancia desde la ubicación del acero de refuerzo hasta la cara superior de la viga. (4 puntos)

Monterrico, 28 de mayo de 2013

## SOLUCIONARIO DE PRÁCTICA CALIFICADA N° 2

### CICLO 2013-01

1. Sabemos que:

$$\sigma_{\text{máx}} = Eky = E\left(\frac{1}{\rho}\right)y = \frac{Ed}{2\rho} = \frac{(30 \cdot 10^6) \cdot (1/32)}{(60/\pi)} = 49087,38 \text{ psi}$$

Dónde:

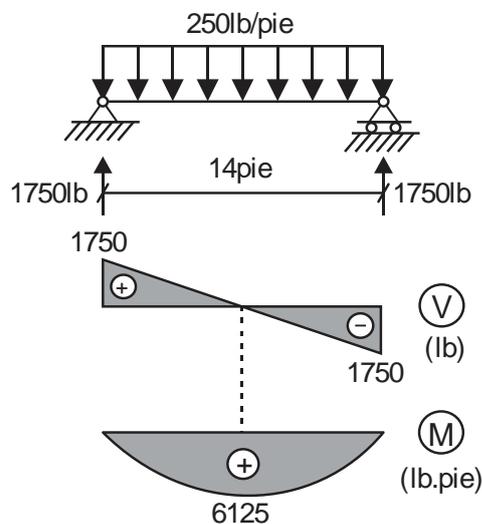
$$2\pi\rho = 60 \quad \Rightarrow \quad 2\rho = \frac{60}{\pi}$$

Siendo:

k - curvatura

$\rho$  - radio de curvatura

2. Graficamos los diagramas de fuerza cortante y momento flector, tal como se muestra en la figura.



Calculamos el esfuerzo normal máximo:

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{M_{\text{máx}}}{I_z} y_{\text{máx}} = \frac{6125 \cdot 12}{207,81} \cdot 3,8125 = 1348,44 \text{ psi}$$

Siendo:

$$I_z = \frac{bh^3}{12} = \frac{(5,625)(7,625)^3}{12} = 207,81 \text{ plg}^4$$

$$y_{\text{máx}} = \frac{h}{2} = \frac{7,625}{2} = 3,8125 \text{ plg}$$

3. Como es un sistema estructural montado, analizamos en forma independiente cada viga.

VIGA AB:

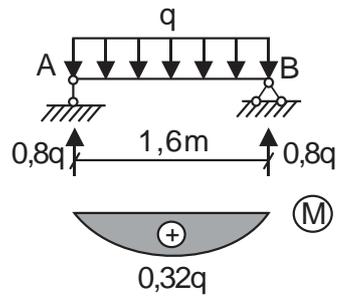
Graficamos el diagrama de momento flector, tal como se muestra en la figura de la siguiente página.

Luego, determinamos el valor del momento admisible.

$$[M] = [\sigma]W_z = 210 \cdot 10^6 \cdot 109 \cdot 10^{-6} = 22890 \text{ N} = 22,89 \text{ kN}$$

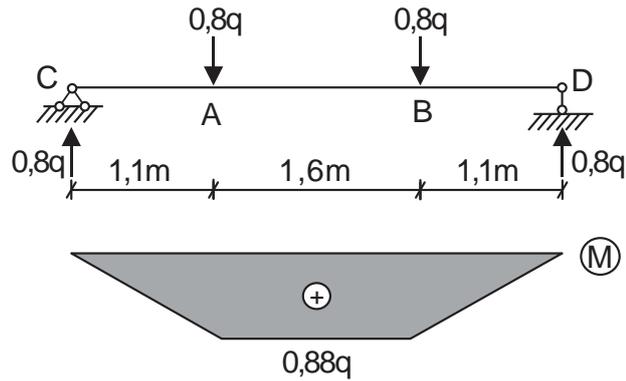
De esta manera, se tendrá:

$$M_{\text{máx}} = 0,32q \leq 22,89 \quad \Rightarrow \quad q \leq 71,53 \text{ kN/m}$$



VIGA CD:

Graficamos el diagrama de momento flector.



Determinamos el módulo de resistencia respecto al eje neutro.

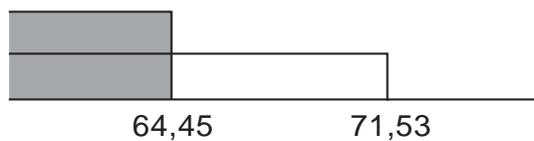
$$W_z = \frac{\pi}{32} \cdot 20^3 \left[ 1 - \left( \frac{18}{20} \right)^4 \right] = 270,1 \text{cm}^3$$

Luego:

$$[M] = [\sigma] W_z = 210 \cdot 10^6 \cdot 270,1 \cdot 10^{-6} = 56721 \text{N} = 56,721 \text{kN}$$

$$M_{\text{máx}} = 0,88q \leq 56,721 \Rightarrow q \leq 64,45 \text{kN/m}$$

Como se sabe, se debe de cumplir para ambos casos.

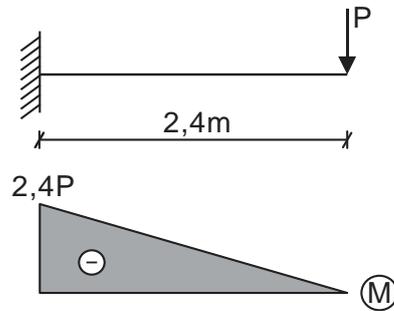


Asumimos:

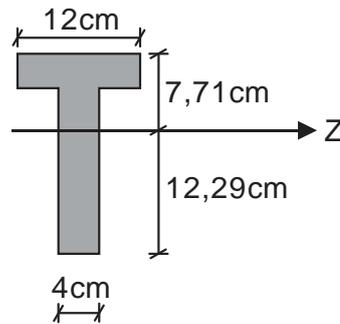
$$q_{\text{máx}} = 64,45 \text{kN/m}$$

4. Graficamos el diagrama de momento flector, tal como se muestra en la figura de la siguiente página. Luego, determinamos la ubicación del centro de gravedad.

$$Y_{\text{CG}} = \frac{4 \cdot 16 \cdot 8 + 4 \cdot 12 \cdot 18}{4 \cdot 16 + 4 \cdot 12} = 12,29 \text{cm}$$



La ubicación del centro de gravedad, se muestra en la siguiente figura.



Calculamos el momento de inercia respecto al eje neutro.

$$I_z = \frac{4 \cdot 16^3}{12} + 4 \cdot 16 \cdot 4,29^2 + \frac{12 \cdot 4^3}{12} + 12 \cdot 4 \cdot 5,71^2 = 4172,19 \text{ cm}^4$$

Ahora, determinamos los módulos de resistencia para las zonas de tracción (superior al eje neutro) y de compresión (inferior al eje neutro)

$$W_{tr} = \frac{I_z}{h_{tr}} = \frac{4172,19}{7,71} = 541,1 \text{ cm}^3$$

$$W_{comp} = \frac{I_z}{h_{comp}} = \frac{4172,19}{12,29} = 339,5 \text{ cm}^3$$

Aplicamos la condición de resistencia para cada zona y determinamos la carga máxima

TRACCION:

$$[M] = [\sigma]_{tr} W_{tr} = 50 \cdot 10^6 \cdot 541,1 \cdot 10^{-6} = 27055 \text{ N} = 27,055 \text{ kN}$$

Además:

$$M_{m\acute{a}x} = 2,4P \leq [M] \quad \Rightarrow \quad 2,4P \leq 27,055 \quad \therefore \quad P \leq 11,27 \text{ kN}$$

COMPRESION:

$$[M] = [\sigma]_{comp} W_{comp} = 140 \cdot 10^6 \cdot 339,5 \cdot 10^{-6} = 47530 \text{ N} = 47,53 \text{ kN}$$

Además:

$$M_{m\acute{a}x} = 2,4P \leq [M] \quad \Rightarrow \quad 2,4P \leq 47,53 \quad \therefore \quad P \leq 19,80 \text{ kN}$$

Como se sabe, se debe de cumplir para ambos casos.



Asumimos:

$$P_{\text{máx}} = 11,27\text{kN}$$

De esta manera, se tendrá:

$$V_{\text{máx}} = P_{\text{máx}} = 11,27\text{kN}$$

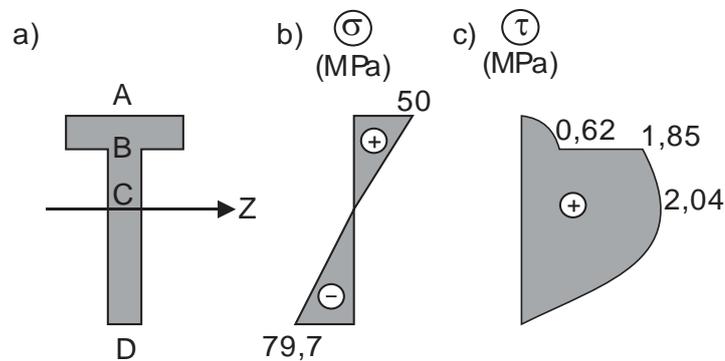
$$M_{\text{máx}} = 2,4P_{\text{máx}} = 27,048\text{kN.m}$$

Luego, determinamos los esfuerzos normales máximo y mínimo

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{M_{\text{máx}}}{W_{\text{tr}}} = \frac{27,048 \cdot 10^3}{541,1 \cdot 10^{-6}} = 50\text{MPa}$$

$$|\sigma_{\text{mín}}| = \frac{M_{\text{máx}}}{W_{\text{comp}}} = \frac{27,048 \cdot 10^3}{339,5 \cdot 10^{-6}} = 79,7\text{MPa}$$

El diagrama de esfuerzo normal se muestra en la figura b)



Ahora, graficamos el diagrama de esfuerzo tangencial.

$$\tau_A = 0$$

$$\tau_B = \frac{V_{\text{máx}} S_Z^B}{I_Z b_B} = \frac{11,27 \cdot 10^3 \cdot 274,08 \cdot 10^{-6}}{4172,19 \cdot 10^{-8} \cdot 12 \cdot 10^{-2}} = 0,62\text{MPa}$$

$$S_Z^B = 12 \cdot 4,5 \cdot 71 = 274,08\text{cm}^3$$

$$\tau_{B'} = \frac{V_{\text{máx}} S_Z^B}{I_Z b_{B'}} = \frac{11,27 \cdot 10^3 \cdot 274,08 \cdot 10^{-6}}{4172,19 \cdot 10^{-8} \cdot 4 \cdot 10^{-2}} = 1,85\text{MPa}$$

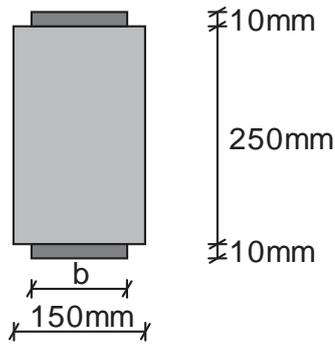
$$\tau_{\text{máx}} = \tau_C = \frac{V_{\text{máx}} S_Z^C}{I_Z b_C} = \frac{11,27 \cdot 10^3 \cdot 301,61 \cdot 10^{-6}}{4172,19 \cdot 10^{-8} \cdot 4 \cdot 10^{-2}} = 2,04\text{MPa}$$

$$S_Z^C = 274,08 + 4,3 \cdot 71 \cdot 1,855 = 301,61\text{cm}^3$$

$$\tau_D = 0$$

El diagrama de esfuerzo tangencial se muestra en la figura c)

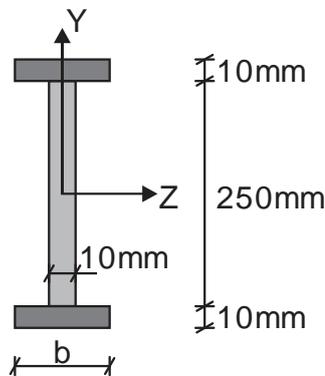
- Esquematizamos la sección transversal de la viga compuesta, la cual se muestra en la figura de la siguiente página.



Luego, convertimos la madera en acero.

$$b'_a = \frac{E_m}{E_a} b_m = \frac{1}{15} \cdot 150 = 10\text{mm}$$

De esta manera, la sección transformada es la mostrada en la siguiente figura:



Ahora, calculamos el momento de inercia respecto al eje neutro:

$$I_z = 2 \left[ \frac{b \cdot 10^3}{12} + 10b \cdot 130^2 \right] + \frac{10 \cdot 250^3}{12} = 338166,67b + 13020833,33$$

Aplicamos las condiciones de resistencia para el acero y la madera, determinando en ambos casos el rango del ancho "b"

ACERO:

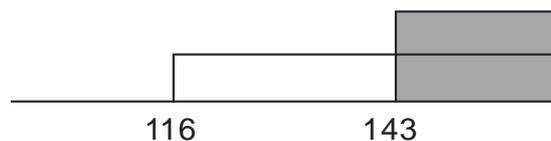
$$\sigma_a^{\text{máx}} = \frac{M_{\text{máx}}}{I_z} y_a^{\text{máx}} \leq [\sigma]_a \Rightarrow \frac{50 \cdot 10^3}{(338166,67b + 13020833,33) \cdot 10^{-12}} \cdot 135 \cdot 10^{-3} \leq 110 \cdot 10^6$$

$$b \geq 143\text{mm}$$

MADERA:

$$\sigma_m^{\text{máx}} = \left( \frac{E_m}{E_a} \right) \frac{M_{\text{máx}}}{I_z} y_m^{\text{máx}} \leq [\sigma]_m \Rightarrow \frac{1}{15} \left[ \frac{50 \cdot 10^3}{(338166,67b + 13020833,33) \cdot 10^{-12}} \right] \cdot 125 \cdot 10^{-3} \leq 8 \cdot 10^6$$

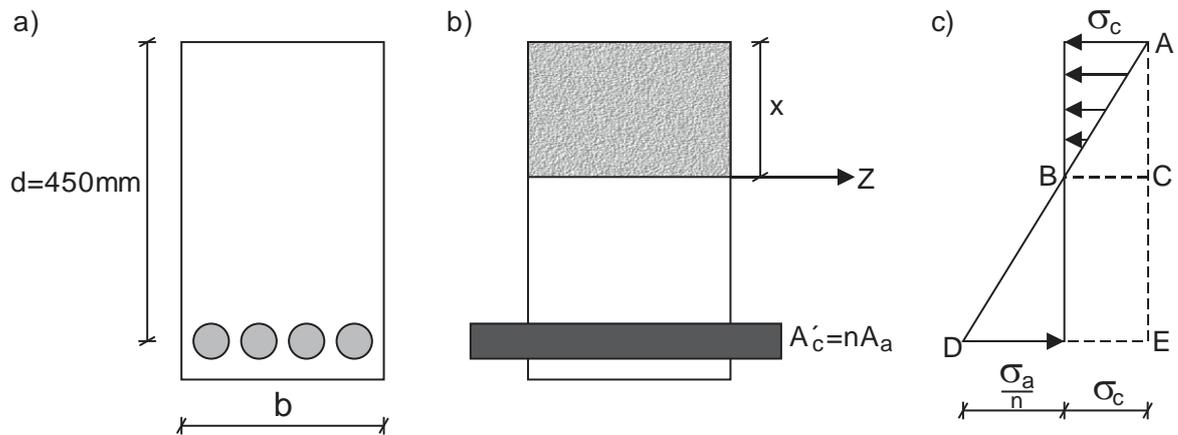
$$b \geq 116\text{mm}$$



De los resultados obtenidos, elegimos el menor valor que cumpla con ambas condiciones.

$$b_{\min} = 143\text{mm}$$

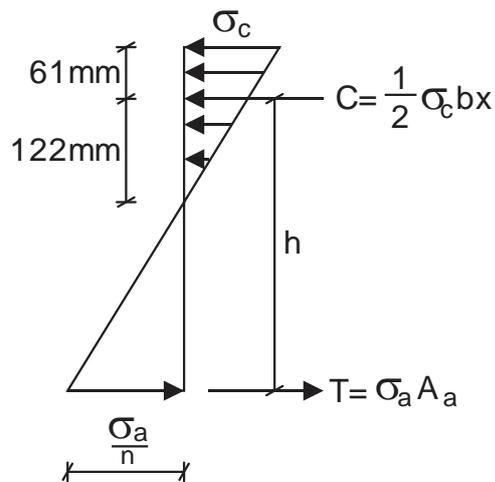
6. Esquemizamos la sección transversal de la viga (figura a), la sección transformada (figura b) y la distribución de esfuerzos (figura c)



Del gráfico:

$$\frac{x}{d} = \frac{\sigma_c}{(\sigma_a/n) + \sigma_c} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{450} = \frac{12}{(140/8) + 12} \quad \therefore \quad x = 183\text{mm}$$

En la siguiente figura, se muestran las fuerzas resultantes de tracción (T) generado por el acero y compresión (C) generado por el concreto, así como la ubicación de las mismas.



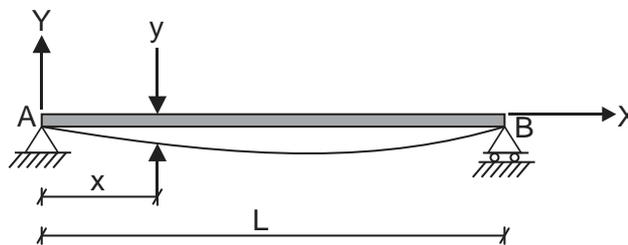
Luego, el brazo de momento del par resistente es "h", siendo su valor:

$$h = d - 61 = 450 - 61 = 389\text{mm}$$

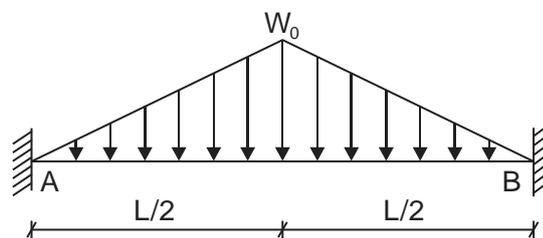
**MECANICA DE MATERIALES (CI80)**
  
**PRACTICA CALIFICADA N° 3**
  
**Ciclo 2011-01**

**Profesor : Ph.D. Genner Villarreal Castro**  
**Sección : CI51**  
**Duración : 170 minutos**

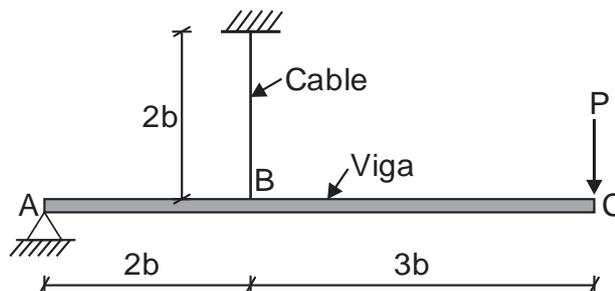
1. METODO DE LA DOBLE INTEGRACION. La ecuación de la curva elástica para la viga simplemente apoyada mostrada en la figura es  $y = -\frac{W_0 x}{360LEI} (7L^4 - 10L^2 x^2 + 3x^4)$ . Determinar y esquematizar la carga aplicada sobre la viga. (4 puntos)



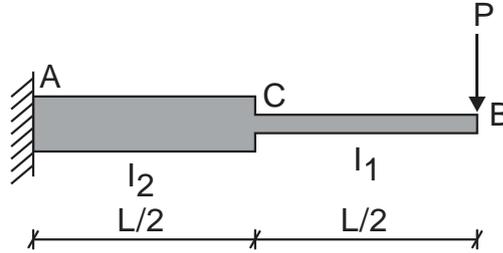
2. METODO DE LA DOBLE INTEGRACION. Resolver la viga mostrada en la figura y determinar su deflexión máxima. (4 puntos)



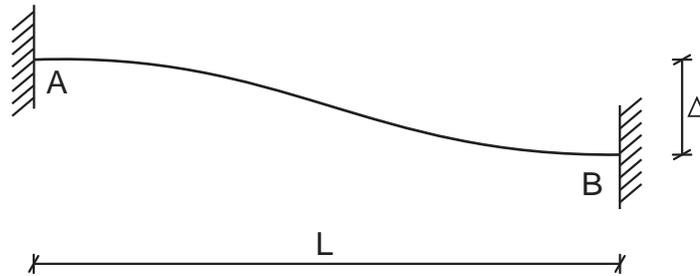
3. METODO DE LA DOBLE INTEGRACION. Una viga de acero ABC está simplemente apoyada en A y sostenida mediante un cable de acero de alta resistencia en B, tal como se muestra en la figura. Una carga  $P = 200\text{lb}$  actúa en el extremo libre C. El cable tiene rigidez axial  $EA = 300 \cdot 10^3\text{lb}$  y la viga tiene una rigidez a flexión  $EI = 30 \cdot 10^6\text{lb}\cdot\text{p}\cdot\text{lg}^2$ . Si  $b = 10\text{p}\cdot\text{lg}$  ¿Cuál es la deflexión en el punto C? (4 puntos)



4. METODO DE LA VIGA CONJUGADA. La viga en voladizo AB mostrada en la figura tiene momentos de inercia  $I_2$  e  $I_1$  en los tramos AC y CB, respectivamente. Se pide:
- Determinar la deflexión  $y_B$  en el extremo libre debido a la carga  $P$  (2 puntos)
  - Determinar la relación  $r$  de la deflexión  $y_B$  a la deflexión en B para una barra prismática en voladizo con un momento de inercia  $I_1$  (2 puntos)



5. METODO DE LA VIGA CONJUGADA. El extremo B de la viga perfectamente empotrada sufre un asentamiento  $\Delta$ , tal como se muestra en la figura. Se pide graficar sus diagramas de fuerzas internas y refuerzo. (4 puntos)



Monterrico, 23 de junio de 2011

## SOLUCIONARIO DE PRÁCTICA CALIFICADA N° 3

CICLO 2011-01

1. Por dato del problema:

$$y = -\frac{w_0 x}{360LEI} (7L^4 - 10L^2 x^2 + 3x^4)$$

Luego:

$$EIy = -\frac{w_0 x}{360L} (7L^4 - 10L^2 x^2 + 3x^4)$$

$$EIy = -\frac{w_0}{360L} (7L^4 x - 10L^2 x^3 + 3x^5)$$

Derivamos en forma consecutiva, obteniendo:

$$EIy' = -\frac{w_0}{360L} (7L^4 - 30L^2 x^2 + 15x^4)$$

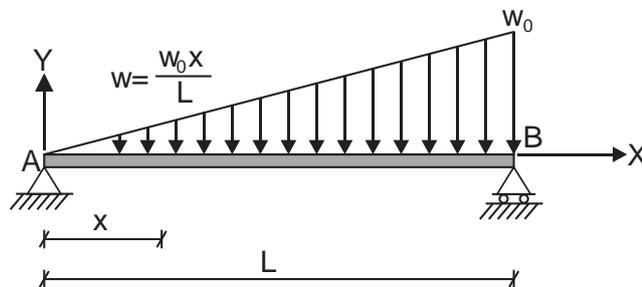
$$EIy'' = -\frac{w_0}{360L} (-60L^2 x + 60x^3)$$

$$EIy''' = -\frac{w_0}{360L} (-60L^2 + 180x^2)$$

$$EIy^{IV} = -\frac{w_0}{360L} (360x)$$

$$EIy^{IV} = -\frac{w_0 x}{L}$$

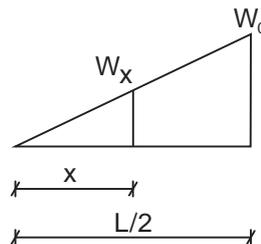
De esta forma, podemos indicar que la carga actuante en la viga es la triangular mostrada en la figura.



2. Por simetría:

$$V_A = V_B = \frac{1}{2} \left( \frac{L}{2} \right) w_0 = \frac{w_0 L}{4} \uparrow$$

Por relaciones de triángulos rectángulos, determinamos el valor de la carga  $w_x$



$$\frac{w_x}{x} = \frac{w_0}{L/2} \quad \Rightarrow \quad w_x = \frac{2w_0 x}{L}$$

Orientamos el momento en A en sentido antihorario y planteamos las ecuaciones del método de la doble integración.

TRAMO I-I ( $0 \leq x \leq L/2$ )

$$EIy'' = \frac{w_0 L}{4} x - M_A - \frac{1}{2}(x)(w_0 x) \left( \frac{1}{3} x \right)$$

$$EIy'' = \frac{w_0 L}{4} x - M_A - \frac{w_0 x^3}{3L}$$

$$EIy' = \frac{w_0 L x^2}{8} - M_A x - \frac{w_0 x^4}{12L} + C_1$$

$$EIy = \frac{w_0 L x^3}{24} - \frac{M_A x^2}{2} - \frac{w_0 x^5}{60L} + C_1 x + C_2$$

CONDICIONES:

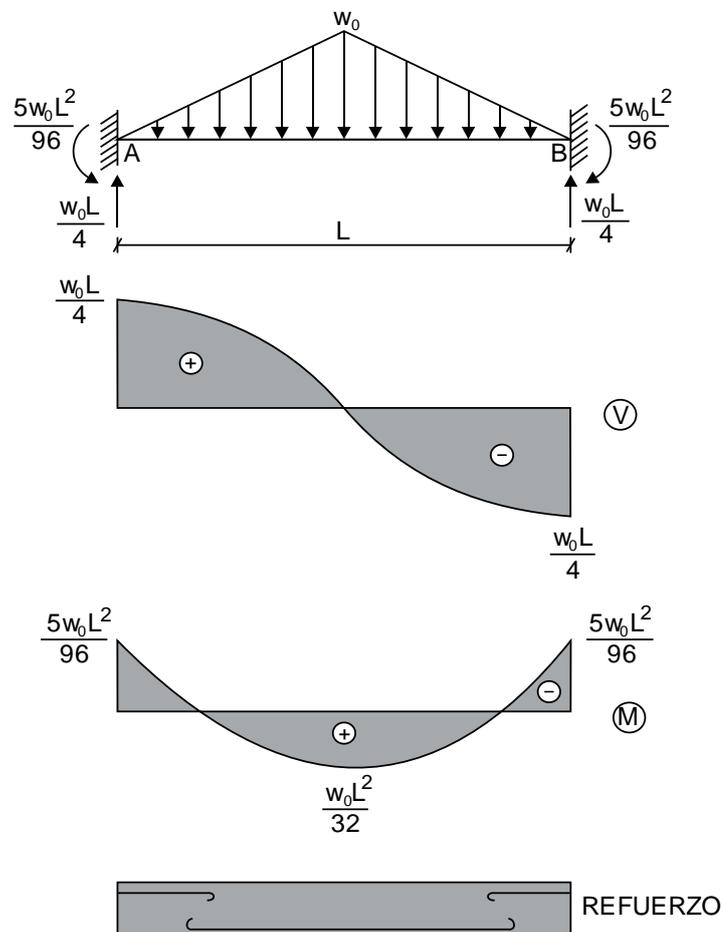
a) Si  $x = 0 \Rightarrow \theta_{x=0}^I = \theta_A = 0 \quad \therefore C_1 = 0$

b) Si  $x = 0 \Rightarrow y_{x=0}^I = y_A = 0 \quad \therefore C_2 = 0$

c) Si  $x = L/2 \Rightarrow \theta_{x=L/2}^I = 0$  (Simetría)

$$\frac{w_0 L}{8} \left( \frac{L}{2} \right)^2 - M_A \left( \frac{L}{2} \right) - \frac{w_0}{12L} \left( \frac{L}{2} \right)^4 = 0 \Rightarrow M_A = \frac{5w_0 L^2}{96}$$

Con el valor obtenido, graficamos los diagramas de fuerza cortante, momento flector y refuerzo.



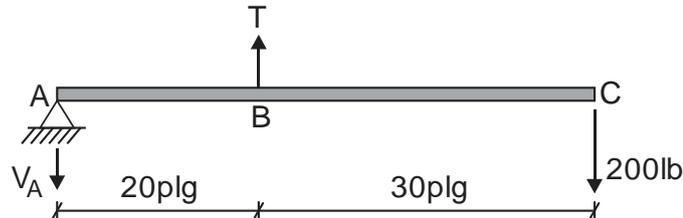
DEFLEXION MAXIMA:

$$y_{\text{máx}} = y_{x=L/2}^I = \frac{1}{EI} \left[ \frac{w_o L}{24} \left( \frac{L}{2} \right)^3 - \frac{1}{2} \left( \frac{5w_o L}{96} \right) \left( \frac{L}{2} \right)^2 - \frac{w_o}{60L} \left( \frac{L}{2} \right)^5 \right] = -\frac{7w_o L^4}{3840EI} \downarrow$$

3. Efectuamos un corte en el cable y analizamos el equilibrio de la viga ABC

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad 20T - 200(50) = 0 \quad \therefore \quad T = 500\text{lb (TRACCION)}$$

$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad -V_A - 200 + 500 = 0 \quad \therefore \quad V_A = 300\text{lb} \downarrow$$



0

Analizamos tramo por tramo.

TRAMO I-I ( $0 \leq x \leq 20$ )

$$EIy'' = -300x$$

$$EIy' = -150x^2 + C_1$$

$$EIy = -50x^3 + C_1x + C_2$$

CONDICION:

$$\text{a) Si } x = 0 \quad \Rightarrow \quad y_{x=0}^I = y_A = 0 \quad \therefore \quad C_2 = 0$$

TRAMO II-II ( $20 \leq x \leq 50$ )

$$EIy'' = -300x + 500(x - 20)$$

$$EIy' = -150x^2 + 250(x - 20)^2 + C_3$$

$$EIy = -50x^3 + \frac{250(x - 20)^3}{3} + C_3x + C_4$$

PRINCIPIO DE CONTINUIDAD:

$$\text{b) Si } x = 20 \quad \Rightarrow \quad \theta_{x=20}^I = \theta_{x=20}^{II} \quad \therefore \quad C_3 = C_1$$

$$\text{c) Si } x = 20 \quad \Rightarrow \quad y_{x=20}^I = y_{x=20}^{II} \quad \therefore \quad C_4 = 0$$

Determinamos la deflexión en B, analizando el alargamiento del cable.

$$y_B = \delta_B = \frac{TL}{EA} = \frac{500 \cdot 20}{300 \cdot 10^3} = 0,033\text{plg} \downarrow$$

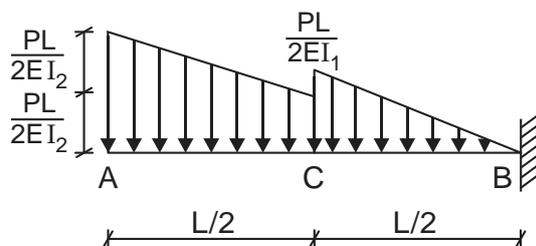
Reemplazamos en la ecuación de la deflexión para el tramo I-I

$$-30 \cdot 10^6 \cdot 0,033 = -50 \cdot 20^3 + 20C_1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = -30000$$

Luego, determinamos la deflexión en C, analizando el tramo II-II

$$y_C = y_{x=50}^{II} = \frac{1}{30 \cdot 10^6} \left[ -50 \cdot 50^3 + \frac{250 \cdot 30^3}{3} - 30000 \cdot 50 \right] = -0,183\text{plg} \downarrow$$

4. a) BARRA ESCALONADA

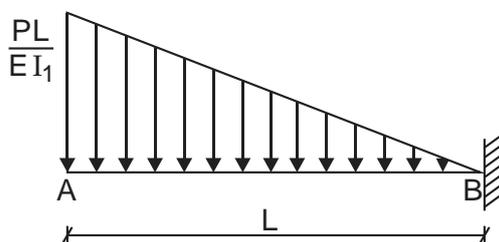


Determinamos la deflexión en el extremo libre B

$$y_B = \bar{M}_B = -\frac{1}{2} \left( \frac{L}{2} \right) \left( \frac{PL}{2EI_2} \right) \left( \frac{2}{3} \cdot \frac{L}{2} \right) - \frac{L}{2} \left( \frac{PL}{2EI_1} \right) \left( \frac{3L}{4} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{L}{2} \right) \left( \frac{PL}{2EI_2} \right) \left( \frac{5L}{6} \right)$$

$$y_B = -\frac{PL^3}{24E} \left( \frac{1}{I_1} + \frac{7}{I_2} \right)$$

b) BARRA PRISMÁTICA



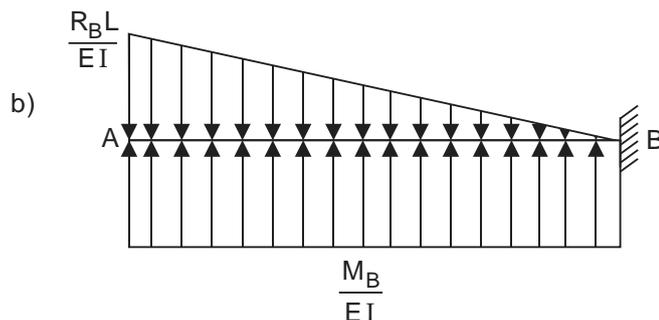
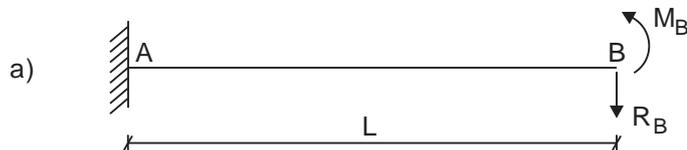
Determinamos la deflexión en el extremo libre B

$$y_B = -\frac{1}{2} (L) \left( \frac{PL}{EI_1} \right) \left( \frac{2}{3} L \right) = -\frac{PL^3}{3EI_1}$$

Luego:

$$r = \frac{y_B}{y'_B} = \frac{-\frac{PL^3}{24E} \left( \frac{1}{I_1} + \frac{7}{I_2} \right)}{-\frac{PL^3}{3EI_1}} = \frac{1}{8} \left( 1 + \frac{7I_1}{I_2} \right)$$

5. Liberamos el empotramiento en B y lo reemplazamos por sus reacciones (figura a). Luego, aplicamos viga conjugada para dicha viga (figura b)



Se sabe que:

$$\theta_B = 0 \Rightarrow \theta_B = \bar{V}_B = (L)\left(\frac{M_B}{EI}\right) - \frac{1}{2}(L)\left(\frac{R_B L}{EI}\right) = 0 \quad \therefore \quad M_B = \frac{R_B L}{2}$$

Además se sabe por dato del problema que  $y_B = -\Delta$

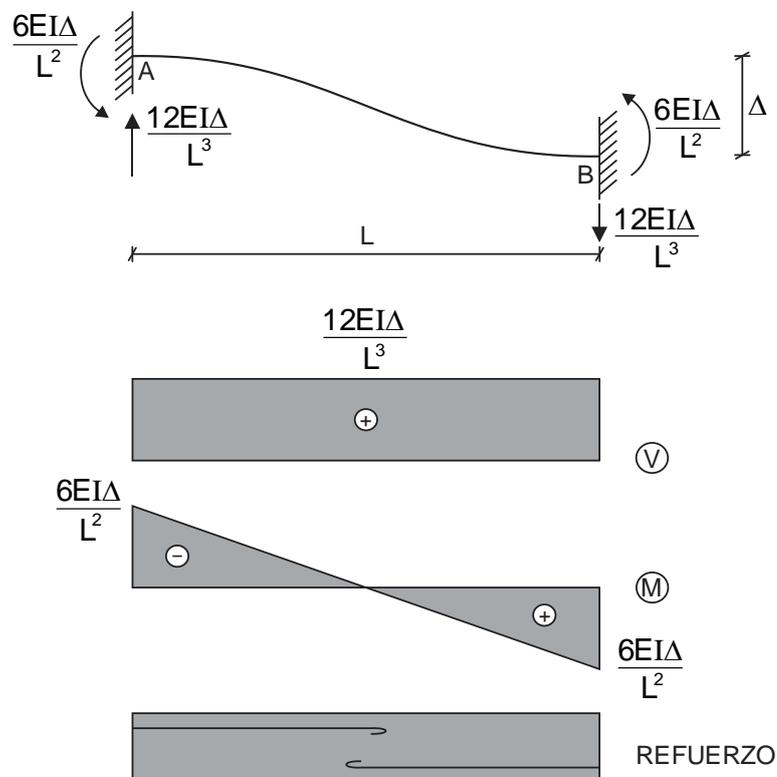
$$y_B = \bar{M}_B = (L)\left(\frac{R_B L}{2EI}\right)\left(\frac{L}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{R_B L}{EI}\right)(L)\left(\frac{2L}{3}\right) = -\Delta$$

$$R_B = \frac{12EI\Delta}{L^3}$$

En consecuencia:

$$M_B = \frac{6EI\Delta}{L^2}$$

Con los valores obtenidos, graficamos los diagramas de fuerzas internas y refuerzo.



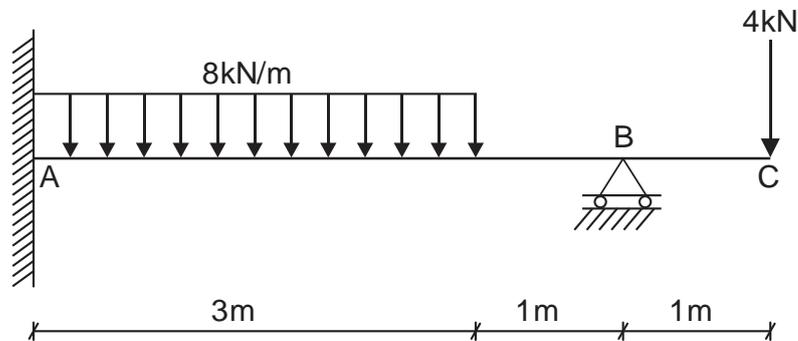
**MECANICA DE MATERIALES (CI80)**  
**PRACTICA CALIFICADA N° 3**  
**Ciclo 2011-02**

**Profesor** : Ph.D. Genner Villarreal Castro  
**Sección** : CI51  
**Duración** : 170 minutos

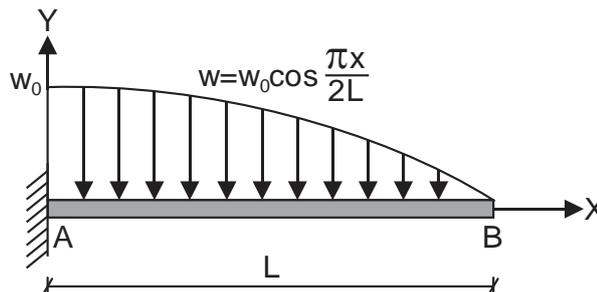
1. METODO DE LA DOBLE INTEGRACION. Una viga simplemente apoyada se somete a la acción de un par  $M$  en su extremo derecho, como se muestra en la figura. Demostrar que la deflexión máxima tiene lugar a una distancia  $x = 0,577L$  del apoyo izquierdo y determinar su valor de dicha deflexión máxima. (3 puntos)



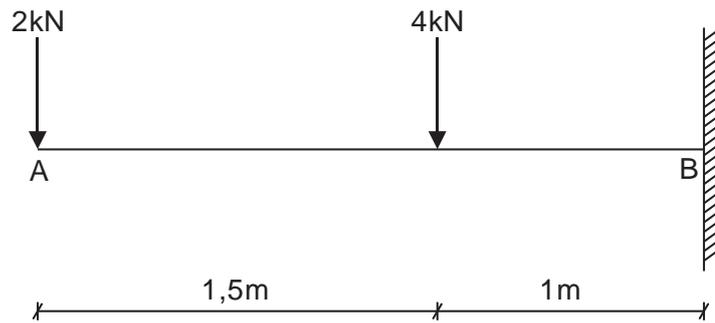
2. METODO DE LA DOBLE INTEGRACION. La viga ABC mostrada en la figura tiene una rigidez  $EI = 4MN.m^2$ . Cuando se aplican las cargas, el apoyo B se asienta verticalmente una distancia de 3mm. Calcular la reacción  $V_B$  y graficar los diagramas de fuerzas internas. (5 puntos)



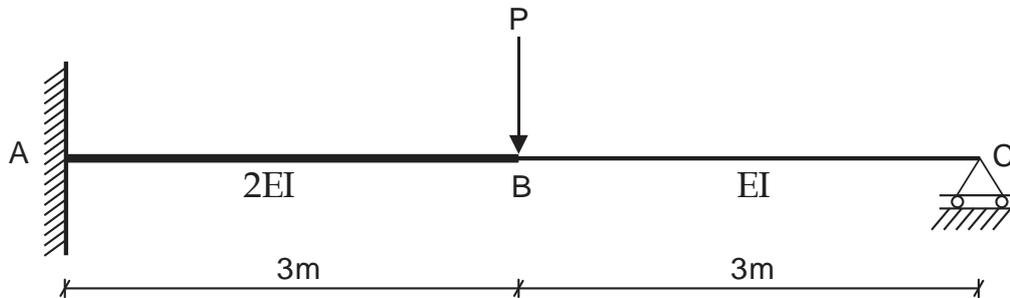
3. METODO DE LA DOBLE INTEGRACION. La carga distribuida que actúa sobre una viga en voladizo tiene una intensidad  $w$  dada por la expresión  $w = w_0 \cos \frac{\pi x}{2L}$ , donde  $w_0$  es la intensidad máxima de la carga. Determinar la ecuación de la curva de deflexión y la deflexión en el extremo libre. (4 puntos)



4. METODO DE LA VIGA CONJUGADA. La viga en voladizo mostrada en la figura, tiene una sección transversal rectangular de 50mm de ancho y “h” mm de altura. Determinar “h” de manera que la deflexión máxima sea de 10mm. Considerar  $E = 10\text{GPa}$  (3 puntos)



5. METODO DE LA VIGA CONJUGADA. Determinar el valor de “P” y graficar los diagramas de fuerza cortante, momento flector y refuerzo, si la reacción en C es 8T y está orientada hacia arriba. Considerar  $E = 3 \cdot 10^6 \text{T/m}^2$ , el momento de inercia  $I = 0,0054\text{m}^4$  y determinar la deflexión en el centro de la viga. (5 puntos)

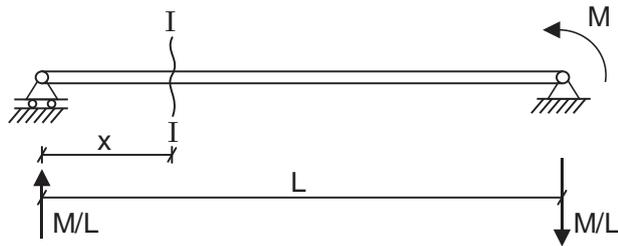


Monterrico, 17 de noviembre de 2011

## SOLUCIONARIO DE PRÁCTICA CALIFICADA N° 3

### CICLO 2011-02

1. Calculamos sus reacciones en los apoyos y analizamos el tramo I-I



TRAMO I-I ( $0 \leq x \leq L$ )

$$EIy'' = \frac{M}{L}x$$

$$EIy' = \frac{Mx^2}{2L} + C_1$$

$$EIy = \frac{Mx^3}{6L} + C_1x + C_2$$

CONDICIONES:

a) Si  $x = 0 \Rightarrow y_{x=0} = 0 \quad \therefore C_2 = 0$

b) Si  $x = L \Rightarrow y_{x=L} = 0 \quad \therefore C_1 = -\frac{ML}{6}$

De esta manera las ecuaciones serán:

$$EIy' = \frac{Mx^2}{2L} - \frac{ML}{6}$$

$$EIy = \frac{Mx^3}{6L} - \frac{MLx}{6}$$

Como se sabe, la deflexión máxima se debe de producir donde la pendiente es cero, por ello, igualamos a cero la ecuación de la pendiente, con la finalidad de determinar el lugar donde ocurre dicha deflexión máxima.

$$\frac{Mx^2}{2L} - \frac{ML}{6} = 0 \Rightarrow x = \frac{L}{\sqrt{3}} = 0,577L$$

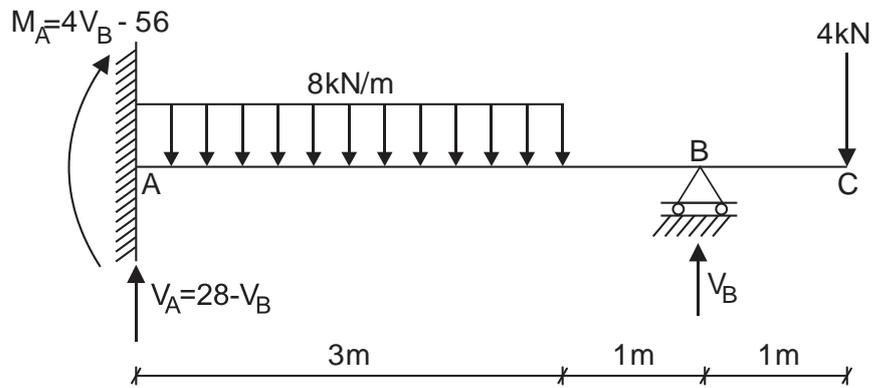
De esta manera, queda demostrado que a la distancia  $x = 0,577L$  del apoyo izquierdo ocurre la deflexión máxima y su valor es:

$$y_{\text{máx}} = y_{x=0,577L} = \frac{1}{EI} \left[ \frac{M(0,577L)^3}{6L} - \frac{ML(0,577L)}{6} \right] = -0,064 \frac{ML^2}{EI} \downarrow$$

2. Calculamos las reacciones en el empotramiento A en función de la  $V_B$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow V_A + V_B - 8.3 - 4 = 0 \quad \therefore V_A = (28 - V_B) \uparrow$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -M_A + 4V_B - 8.3 \cdot 1.5 - 4.5 = 0 \quad \therefore M_A = 4V_B - 56$$



TRAMO I-I ( $0 \leq x \leq 3$ )

$$EIy'' = (28 - V_B)x + (4V_B - 56) - 4x^2$$

$$EIy' = (28 - V_B)\frac{x^2}{2} + (4V_B - 56)x - \frac{4x^3}{3} + C_1$$

$$EIy = (28 - V_B)\frac{x^3}{6} + (4V_B - 56)\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{3} + C_1x + C_2$$

CONDICIONES:

a) Si  $x = 0 \Rightarrow \theta_{x=0} = \theta_A = 0 \quad \therefore C_1 = 0$

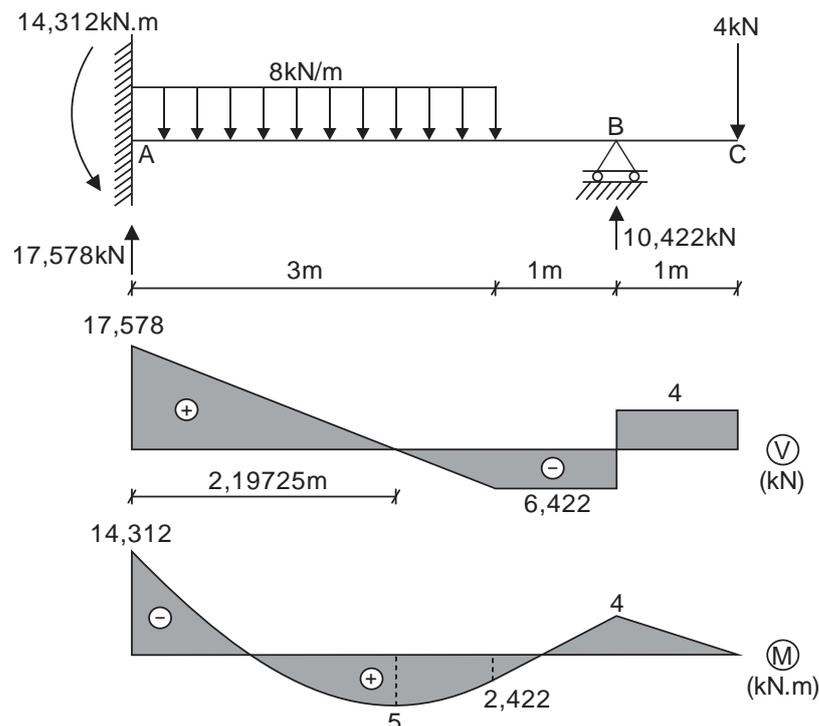
b) Si  $x = 0 \Rightarrow y_{x=0} = y_A = 0 \quad \therefore C_2 = 0$

TRAMO II-II ( $3 \leq x \leq 4$ )

$$EIy'' = (28 - V_B)x + (4V_B - 56) - 24(x - 1,5)$$

$$EIy' = (28 - V_B)\frac{x^2}{2} + (4V_B - 56)x - 12(x - 1,5)^2 + C_3$$

$$EIy = (28 - V_B)\frac{x^3}{6} + (4V_B - 56)\frac{x^2}{2} - 4(x - 1,5)^3 + C_3x + C_4$$



PRINCIPIO DE CONTINUIDAD:

$$c) \text{ Si } x = 3\text{m} \quad \Rightarrow \quad \theta_{x=3}^I = \theta_{x=3}^{II} \quad \therefore \quad C_3 = -9$$

$$d) \text{ Si } x = 3\text{m} \quad \Rightarrow \quad y_{x=3}^I = y_{x=3}^{II} \quad \therefore \quad C_4 = 13,5$$

Por condición del problema  $y_B = -0,003\text{m} \downarrow$

Reemplazamos valores, siendo  $x = 4\text{m}$

$$4 \cdot 10^3 (-3 \cdot 10^{-3}) = (28 - V_B) \frac{4^3}{6} + (4V_B - 56) \frac{4^2}{2} - 4(4 - 1,5)^3 - 9(4) + 13,5$$

$$V_B = 10,422\text{kN} \uparrow$$

Con el valor obtenido, calculamos las otras reacciones y graficamos los diagramas finales de fuerza cortante y momento flector, mostrados en la página anterior.

3. Planteamos la ecuación de la carga distribuida.

$$EIy^{IV} = -w_o \cos \frac{\pi x}{2L}$$

Integramos por primera vez y obtenemos:

$$EIy^{III} = -\frac{2w_o L}{\pi} \text{sen} \frac{\pi x}{2L} + C_1$$

CONDICION:

$$a) \text{ Si } x = L \quad \Rightarrow \quad V_{x=L} = 0 \quad \therefore \quad C_1 = \frac{2w_o L}{\pi}$$

De esta manera, la ecuación de la fuerza cortante quedará así:

$$EIy^{III} = -\frac{2w_o L}{\pi} \text{sen} \frac{\pi x}{2L} + \frac{2w_o L}{\pi}$$

Integramos por segunda vez, obteniendo:

$$EIy^{II} = \frac{4w_o L^2}{\pi^2} \cos \frac{\pi x}{2L} + \frac{2w_o Lx}{\pi} + C_2$$

CONDICION:

$$b) \text{ Si } x = L \quad \Rightarrow \quad M_{x=L} = 0 \quad \therefore \quad C_2 = -\frac{2w_o L^2}{\pi}$$

Entonces la ecuación de momento flector quedará así:

$$EIy^{II} = \frac{4w_o L^2}{\pi^2} \cos \frac{\pi x}{2L} + \frac{2w_o Lx}{\pi} - \frac{2w_o L^2}{\pi}$$

Integramos por tercera vez y obtenemos:

$$EIy^I = \frac{8w_o L^3}{\pi^3} \text{sen} \frac{\pi x}{2L} + \frac{w_o Lx^2}{\pi} - \frac{2w_o L^2 x}{\pi} + C_3$$

CONDICION:

$$c) \text{ Si } x = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta_{x=0} = 0 \quad \therefore \quad C_3 = 0$$

De esta manera, la ecuación de la pendiente quedará así:

$$EIy^I = \frac{8w_o L^3}{\pi^3} \text{sen} \frac{\pi x}{2L} + \frac{w_o Lx^2}{\pi} - \frac{2w_o L^2 x}{\pi}$$

Integramos por cuarta vez y obtenemos:

$$EIy = -\frac{16w_0L^4}{\pi^4} \cos \frac{\pi x}{2L} + \frac{w_0Lx^3}{3\pi} - \frac{w_0L^2x^2}{\pi} + C_4$$

CONDICION:

d) Si  $x = 0 \Rightarrow y_{x=0} = 0 \therefore C_4 = \frac{16w_0L^4}{\pi^4}$

De esta manera, la ecuación de la deflexión será:

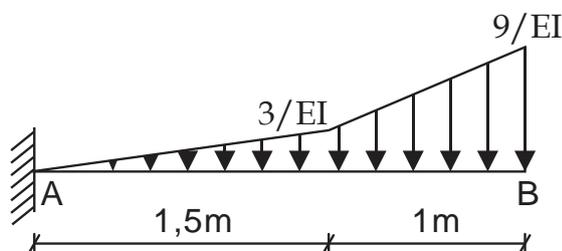
$$EIy = -\frac{16w_0L^4}{\pi^4} \cos \frac{\pi x}{2L} + \frac{w_0Lx^3}{3\pi} - \frac{w_0L^2x^2}{\pi} + \frac{16w_0L^4}{\pi^4}$$

$$y = -\frac{w_0L}{3\pi^4EI} \left[ 48L^3 \cos \frac{\pi x}{2L} - 48L^3 + 3\pi^3Lx^2 - \pi^3x^3 \right]$$

Determinamos el valor de la deflexión en el extremo libre B, el cual debe ser máximo.

$$y_{\text{máx}} = y_B = y_{x=L} = -\frac{w_0L}{3\pi^4EI} \left[ -48L^3 + 3\pi^3L^3 - \pi^3L^3 \right] = -0,048 \frac{w_0L^4}{EI} \downarrow$$

4. Transformamos la viga real en viga conjugada, sometida a las cargas mostradas en la figura.



$$y_{\text{máx}} = y_A = \bar{M}_A = -\frac{1}{2}(1,5)\left(\frac{3}{EI}\right)(1) - (1)\left(\frac{3}{EI}\right)(2) - \frac{1}{2}(1)\left(\frac{6}{EI}\right)\left(1,5 + \frac{2}{3} \cdot 1\right) = -\frac{14,75}{EI}$$

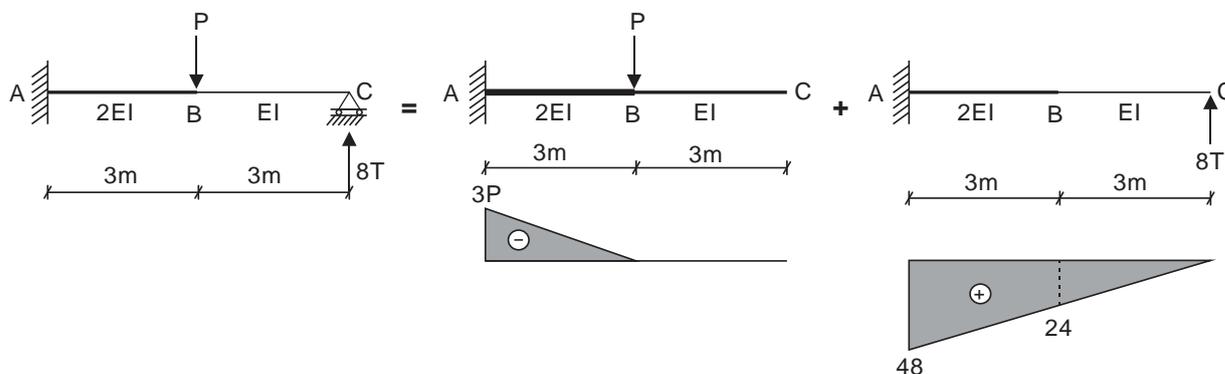
Reemplazando valores:

$$-10 \cdot 10^{-3} = -\frac{14,75}{10 \cdot 10^6 \left( \frac{0,05h^3}{12} \right)}$$

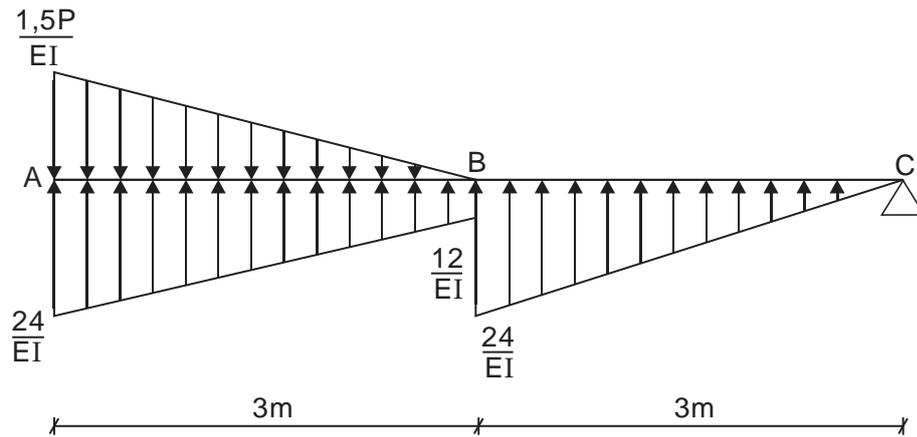
De donde:

$$h = 0,328\text{m} = 328\text{mm}$$

5. Aplicamos el Principio de Superposición, graficando sus diagramas de momento flector para cada caso.



Ahora, lo transformamos en viga conjugada y aplicamos las cargas distribuidas de los diagramas  $M/EI$ , considerando la variación de rigidez.



$$y_C = \bar{M}_C = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}(3)\left(\frac{24}{EI}\right)(2) + 3\left(\frac{12}{EI}\right)(4,5) + \frac{1}{2}(3)\left(\frac{12}{EI}\right)(5) - \frac{1}{2}(3)\left(\frac{1,5P}{EI}\right)(5) = 0$$

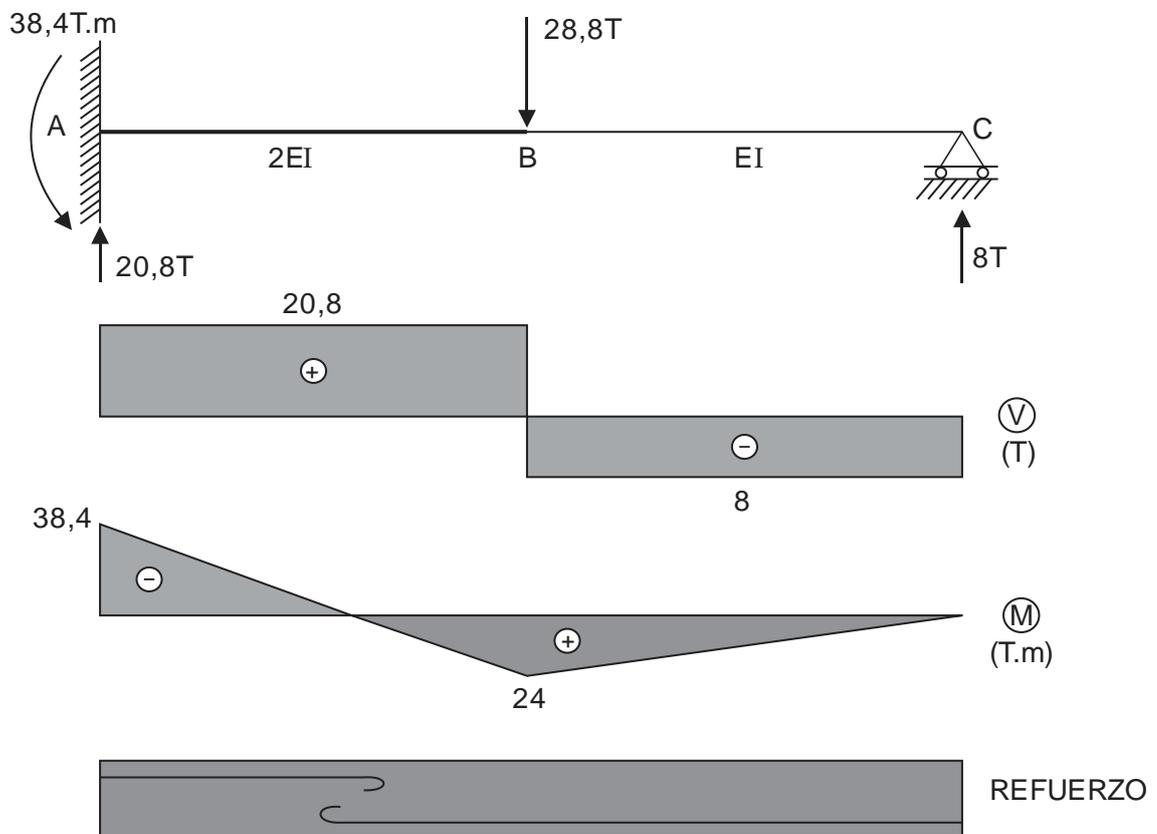
$$P = 28,8T$$

Luego, determinamos la deflexión en el centro de la viga.

$$y_B = \bar{M}_B = 3\left(\frac{12}{EI}\right)(1,5) + \frac{1}{2}(3)\left(\frac{12}{EI}\right)(2) - \frac{1}{2}(3)\left(\frac{1,5 \cdot 28,8}{EI}\right)(2) = -\frac{39,6}{EI} = -\frac{39,6}{3 \cdot 10^6 \cdot 0,0054} = -2,44 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$y_B = -2,44 \text{ mm} \downarrow$$

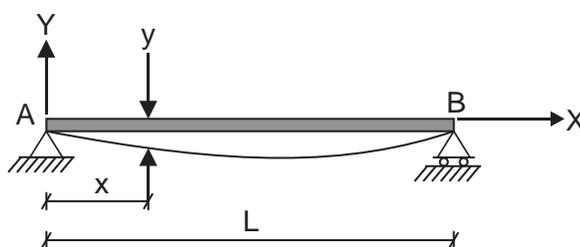
Graficamos los diagramas de fuerza cortante, momento flector y refuerzo.



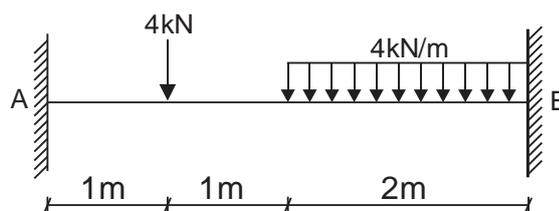
**MECANICA DE MATERIALES (CI80)**  
**PRACTICA CALIFICADA N° 3**  
**Ciclo 2012-01**

**Profesor** : Ph.D. Genner Villarreal Castro  
**Sección** : CI51  
**Duración** : 170 minutos

1. METODO DE LA DOBLE INTEGRACION. La ecuación de la curva elástica para la viga simplemente apoyada mostrada en la figura es  $y = -\frac{w_0 L^4}{\pi^4 EI} \text{sen} \frac{\pi x}{L}$ . Determinar y esquematizar la carga aplicada sobre la viga. (3 puntos)



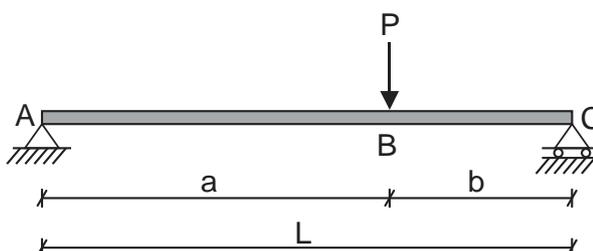
2. METODO DE LA DOBLE INTEGRACION. Una viga de madera de 100mm de ancho por 150mm de altura soporta las cargas mostradas en la figura. Determinar el esfuerzo normal máximo, si el empotramiento derecho sufre un asentamiento de 20mm, pero sin rotación alguna. Considerar  $E = 10\text{GPa}$  (5 puntos)



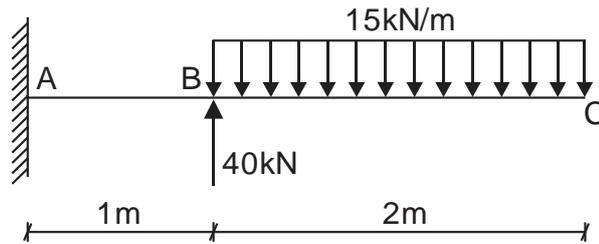
3. METODO DE LA DOBLE INTEGRACION. Una viga simplemente apoyada soporta una carga concentrada aplicada en un punto cualquiera de su longitud, tal como se muestra en la figura.

Demostrar que la deflexión máxima tiene lugar a una distancia del apoyo A igual a  $x = \sqrt{\frac{L^2 - b^2}{3}}$

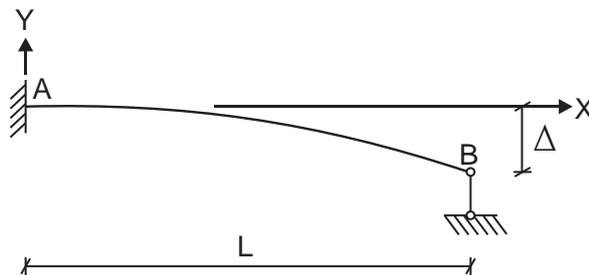
(5 puntos)



4. METODO DE LA VIGA CONJUGADA. Para la viga en voladizo mostrada en la figura, determinar la pendiente en B y la deflexión en C, considerando que su rigidez  $EI$  es constante. (3 puntos)



5. METODO DE LA VIGA CONJUGADA. Una viga AB está empotrada en A y el extremo B sufre un asentamiento  $\Delta$ . Determinar la ecuación de la curva de deflexión de la viga y graficar sus diagramas de fuerza cortante, momento flector y refuerzo. Considerar que la rigidez  $EI$  de la viga es constante. (4 puntos)



Monterrico, 21 de junio de 2012

## SOLUCIONARIO DE PRÁCTICA CALIFICADA N° 3

CICLO 2012-01

1. Por dato del problema:

$$y = -\frac{w_0 L^4}{\pi^4 EI} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L}$$

Luego:

$$EIy = -\frac{w_0 L^4}{\pi^4} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L}$$

Derivamos en forma consecutiva, obteniendo:

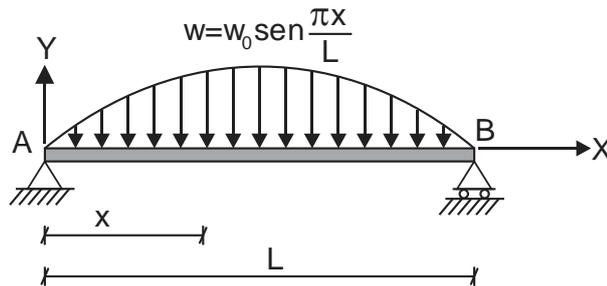
$$EIy' = -\frac{w_0 L^3}{\pi^3} \cos \frac{\pi x}{L}$$

$$EIy'' = \frac{w_0 L^2}{\pi^2} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L}$$

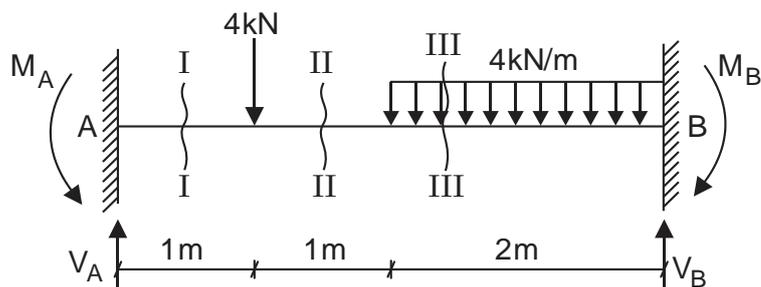
$$EIy''' = \frac{w_0 L}{\pi} \cos \frac{\pi x}{L}$$

$$EIy^{IV} = -w_0 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L}$$

De esta forma, podemos indicar que la carga actuante en la viga es de tipo sinoidal, tal como se muestra en la figura.



2. Esquematizamos las reacciones en los apoyos y los cortes a efectuar.



TRAMO I-I ( $0 \leq x \leq 1$ )

$$EIy'' = V_A x - M_A$$

$$EIy' = \frac{V_A x^2}{2} - M_A x + C_1$$

$$EIy = \frac{V_A x^3}{6} - \frac{M_A x^2}{2} + C_1 x + C_2$$

CONDICIONES:

$$a) \text{ Si } x = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta_{x=0} = \theta_A = 0 \quad \therefore \quad C_1 = 0$$

$$b) \text{ Si } x = 0 \quad \Rightarrow \quad y_{x=0} = y_A = 0 \quad \therefore \quad C_2 = 0$$

TRAMO II-II ( $1 \leq x \leq 2$ )

$$EIy'' = V_A x - M_A - 4(x-1)$$

$$EIy' = \frac{V_A x^2}{2} - M_A x - 2(x-1)^2 + C_3$$

$$EIy = \frac{V_A x^3}{6} - \frac{M_A x^2}{2} - \frac{2(x-1)^3}{3} + C_3 x + C_4$$

PRINCIPIO DE CONTINUIDAD:

$$c) \text{ Si } x = 1 \quad \Rightarrow \quad \theta_{x=1}^I = \theta_{x=1}^{II} \quad \therefore \quad C_3 = 0$$

$$d) \text{ Si } x = 1 \quad \Rightarrow \quad y_{x=1}^I = y_{x=1}^{II} \quad \therefore \quad C_4 = 0$$

TRAMO III-III ( $2 \leq x \leq 4$ )

$$EIy'' = V_A x - M_A - 4(x-1) - 2(x-2)^2$$

$$EIy' = \frac{V_A x^2}{2} - M_A x - 2(x-1)^2 - \frac{2(x-2)^3}{3} + C_5$$

$$EIy = \frac{V_A x^3}{6} - \frac{M_A x^2}{2} - \frac{2(x-1)^3}{3} - \frac{(x-2)^4}{6} + C_5 x + C_6$$

PRINCIPIO DE CONTINUIDAD:

$$e) \text{ Si } x = 2 \quad \Rightarrow \quad \theta_{x=2}^{II} = \theta_{x=2}^{III} \quad \therefore \quad C_5 = 0$$

$$f) \text{ Si } x = 2 \quad \Rightarrow \quad y_{x=2}^{II} = y_{x=2}^{III} \quad \therefore \quad C_6 = 0$$

CONDICIONES:

$$g) \text{ Si } x = 4 \quad \Rightarrow \quad \theta_{x=4}^{III} = 0$$

$$\frac{V_A (4)^2}{2} - M_A (4) - 2(3)^2 - \frac{2(2)^3}{3} = 0$$

$$8V_A - 4M_A = 23,333 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$h) \text{ Si } x = 4 \quad \Rightarrow \quad y_{x=4}^{III} = -0,02$$

$$\frac{V_A (4)^3}{6} - \frac{M_A (4)^2}{2} - \frac{2(3)^3}{3} - \frac{2^4}{6} = -0,02 \cdot 10^7 \cdot \left( \frac{0,1 \cdot 0,15^3}{12} \right)$$

$$10,667V_A - 8M_A = 15,042 \quad \dots\dots\dots (2)$$

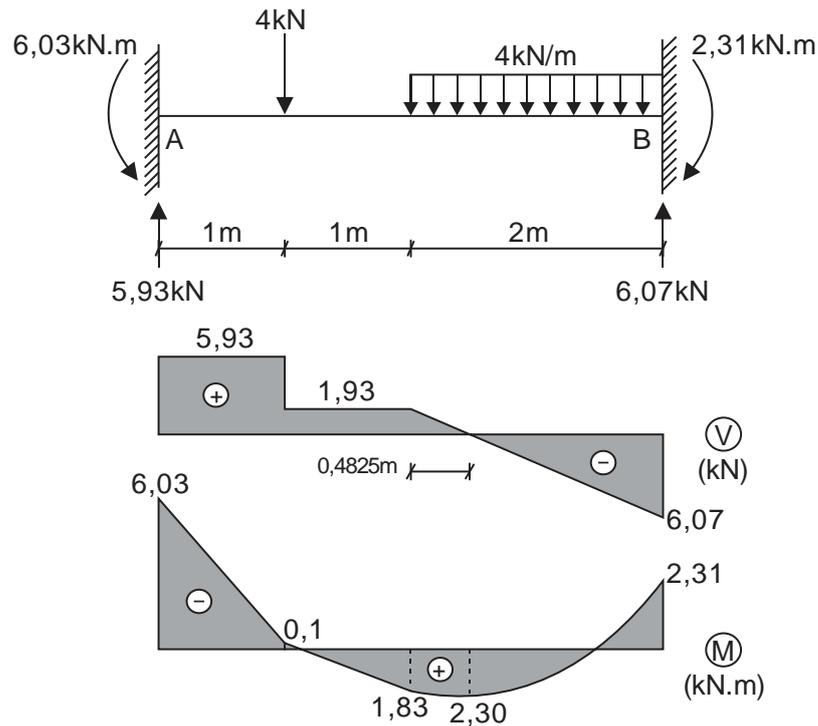
Resolvemos las ecuaciones (1) y (2), obteniendo:

$$V_A = 5,93 \text{ kN } \uparrow$$

$$M_A = 6,03 \text{ kN.m}$$

Como el signo es positivo, indica que la orientación del momento en A es la misma que la asumida al inicio del problema, es decir, en sentido antihorario.

Con los valores obtenidos, calculamos las reacciones en el empotramiento B y graficamos sus diagramas de fuerza cortante y momento flector.



Determinamos el esfuerzo normal máximo.

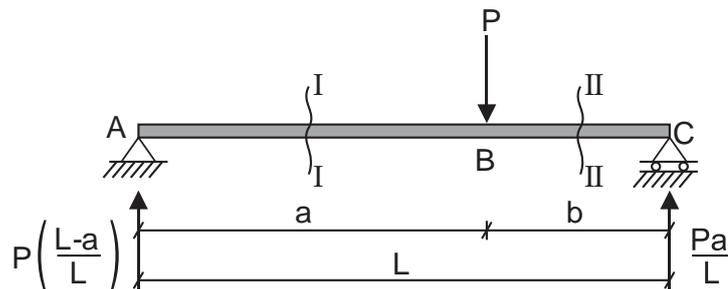
$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{M_{\text{máx}}}{I_Z} \cdot y_{\text{máx}} = \frac{6,03 \cdot 10^3}{(0,1 \cdot 0,15^3)/12} \cdot 0,075 = 16,08 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 16,08 \text{ MPa}$$

3. Calculamos las reacciones en los apoyos:

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad V_C L - Pa = 0 \quad \therefore \quad V_C = \frac{Pa}{L} \uparrow$$

$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad V_A + \frac{Pa}{L} - P = 0 \quad \therefore \quad V_A = P \left( \frac{L-a}{L} \right) \uparrow$$

Esquematisamos los tramos a efectuar.



TRAMO I-I ( $0 \leq x \leq a$ )

$$EIy'' = P \left( \frac{L-a}{L} \right) \cdot x$$

$$EIy' = P \left( \frac{L-a}{L} \right) \frac{x^2}{2} + C_1$$

$$EIy = P\left(\frac{L-a}{L}\right)\frac{x^3}{6} + C_1x + C_2$$

CONDICION:

a) Si  $x = 0 \Rightarrow y_{x=0} = y_A = 0 \quad \therefore C_2 = 0$

TRAMO II-II ( $a \leq x \leq L$ )

$$EIy'' = P\left(\frac{L-a}{L}\right)x - P(x-a)$$

$$EIy' = P\left(\frac{L-a}{L}\right)\frac{x^2}{2} - \frac{P(x-a)^2}{2} + C_3$$

$$EIy = P\left(\frac{L-a}{L}\right)\frac{x^3}{6} - \frac{P(x-a)^3}{6} + C_3x + C_4$$

PRINCIPIO DE CONTINUIDAD:

b) Si  $x = a \Rightarrow \theta_{x=a}^I = \theta_{x=a}^{II} \quad \therefore C_3 = C_1$

c) Si  $x = a \Rightarrow y_{x=a}^I = y_{x=a}^{II} \quad \therefore C_4 = 0$

CONDICION:

d) Si  $x = L \Rightarrow y_{x=L}^{II} = 0$

$$P\left(\frac{L-a}{L}\right)\frac{L^3}{6} - \frac{P(L-a)^3}{6} + C_3L = 0$$

$$C_3 = C_1 = \frac{P(L-a)^3}{6L} - \frac{PL(L-a)}{6}$$

Para que la deflexión sea máxima, se debe de cumplir que, la pendiente en dicho punto debe de ser cero.

Para ello, analizamos el tramo I-I, igualando la ecuación de la pendiente a cero.

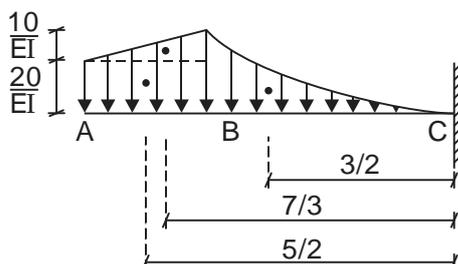
$$P\left(\frac{L-a}{L}\right)\frac{x^2}{2} + \frac{P(L-a)^3}{6L} - \frac{PL(L-a)}{6} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{L} + \frac{(L-a)^2}{3L} - \frac{L}{3} = 0$$

Reemplazamos  $L - a = b$ , obteniendo:

$$x = \sqrt{\frac{L^2 - b^2}{3}}$$

Como el valor obtenido es positivo, encontrándose en el tramo de la viga y conociendo que una viga ante la carga indicada se flexionará hacia abajo, teniendo un único valor de deflexión máxima, entonces se concluye que no es necesario analizar el tramo II-II, quedando demostrado el valor obtenido.

4. Transformamos la viga real en viga conjugada, sometida a las cargas mostradas en la figura.



Determinamos la pendiente en B

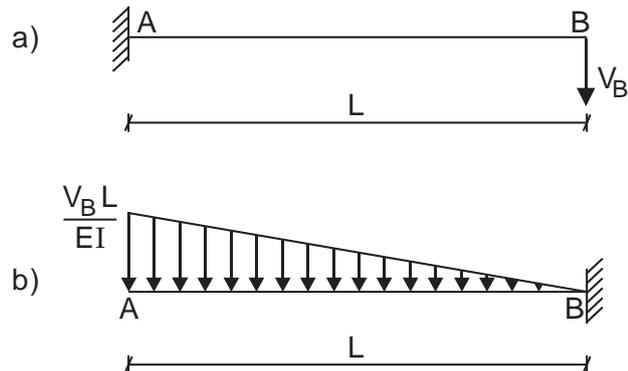
$$\theta_B = \bar{V}_B = -(1)\left(\frac{20}{EI}\right) - \frac{1}{2}(1)\left(\frac{10}{EI}\right) = -\frac{25}{EI}$$

Como el signo es negativo, indica que la pendiente va en sentido horario.

Ahora, calculamos la deflexión en C

$$y_C = \bar{M}_C = -\frac{1}{3}(2)\left(\frac{30}{EI}\right)\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{2}(1)\left(\frac{10}{EI}\right)\left(\frac{7}{3}\right) - (1)\left(\frac{20}{EI}\right)\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{91,667}{EI} \downarrow$$

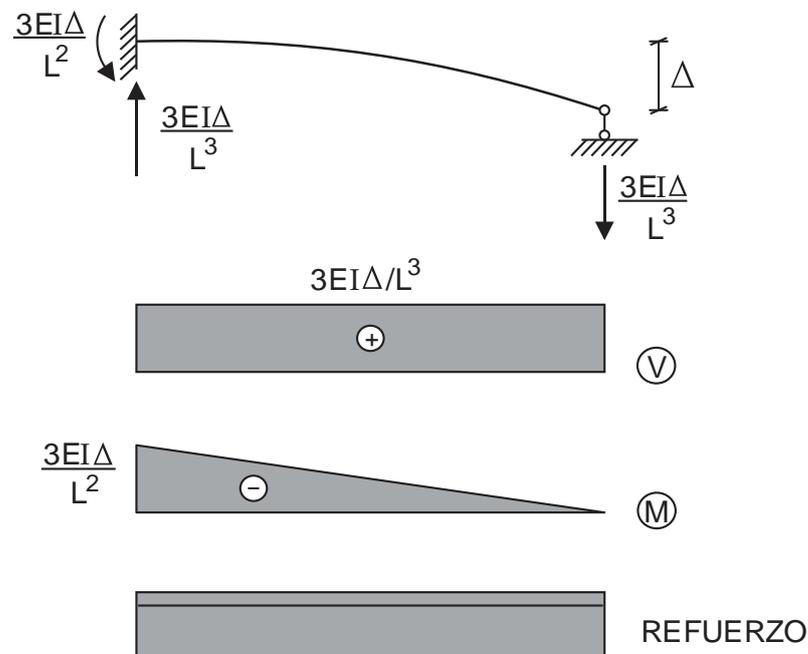
5. Liberamos el apoyo en B y lo reemplazamos por su reacción (figura a). Luego, aplicamos viga conjugada para dicha viga (figura b)



Se sabe que:

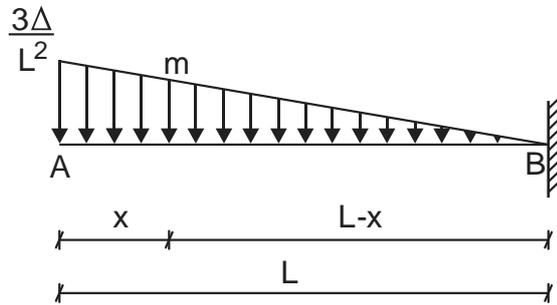
$$y_B = -\Delta \Rightarrow y_B = \bar{M}_B = -\frac{1}{2}(L)\left(\frac{V_B L}{EI}\right)\left(\frac{2L}{3}\right) = -\Delta \quad \therefore V_B = \frac{3EI\Delta}{L^3} \downarrow$$

Con el valor obtenido, determinamos las reacciones en el empotramiento A y graficamos los diagramas de fuerzas internas y refuerzo.



Para determinar la ecuación de la curva de deflexión de la viga, analizamos a una longitud “x” del extremo A de la viga conjugada, para ello, previamente, determinamos por relaciones de triángulos rectángulos el valor de “m”

$$\frac{m}{L-x} = \frac{3\Delta/L^2}{L} \Rightarrow m = \frac{3\Delta}{L^3}(L-x)$$



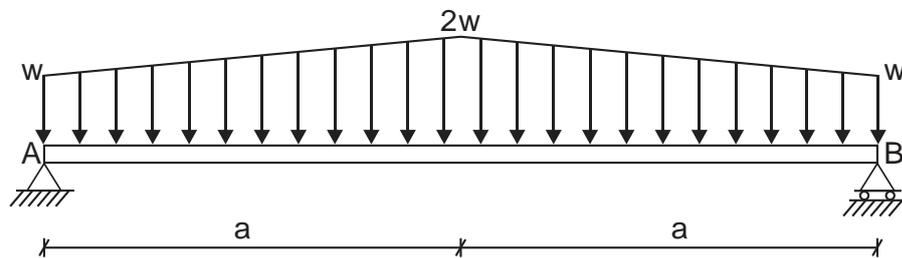
Luego:

$$y_{(x)} = \bar{M}_{(x)} = -\frac{3\Delta}{L^3}(L-x)(x)\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{3\Delta}{L^2} - \frac{3\Delta}{L^3}(L-x)\right)(x)\left(\frac{2x}{3}\right) = -\frac{\Delta x^2}{2L^3}(3L-x)$$

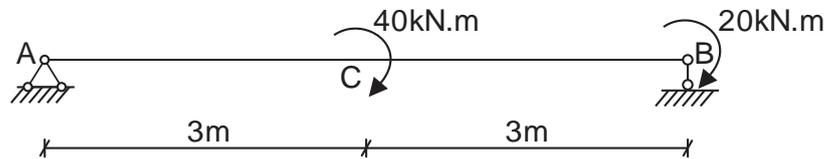
**MECANICA DE MATERIALES (CI80)**  
**PRACTICA CALIFICADA N° 3**  
**Ciclo 2012-02**

**Profesor : Ph.D. Genner Villarreal Castro**  
**Sección : CI51**  
**Duración : 170 minutos**

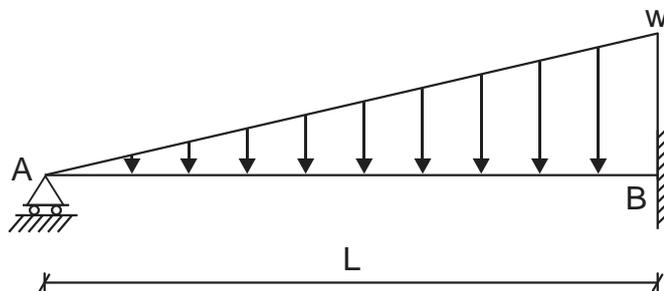
1. METODO DE LA DOBLE INTEGRACION. Utilizando la relación diferencial de cuarto orden, determinar la deflexión máxima para la viga mostrada en la figura, si es de sección constante. (4 puntos)



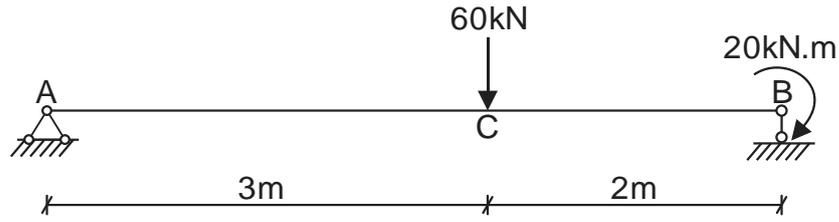
2. METODO DE LA DOBLE INTEGRACION. Para la viga de sección constante mostrada en la figura, determinar la deflexión en C y la pendiente en B (4 puntos)



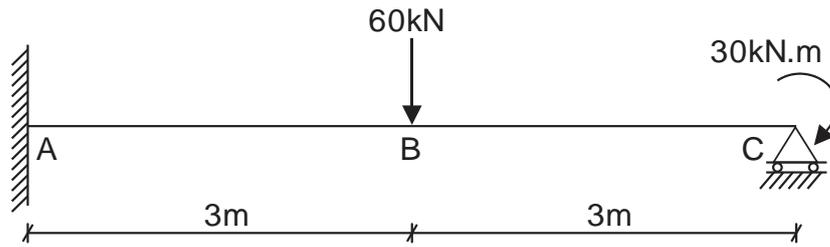
3. METODO DE LA DOBLE INTEGRACION. Resolver la viga de sección constante mostrada en la figura, graficando sus diagramas de fuerza cortante y momento flector. (4 puntos)



4. METODO DE LA VIGA CONJUGADA. Para la viga de sección constante mostrada en la figura, determinar la deflexión en C y las pendientes en los apoyos A y B (4 puntos)



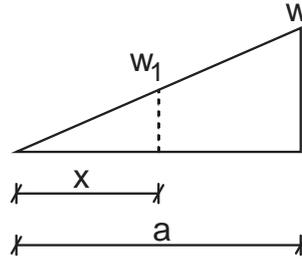
5. METODO DE LA VIGA CONJUGADA. Resolver la viga de sección constante mostrada en la figura, graficando sus diagramas de fuerza cortante, momento flector y refuerzo. (4 puntos)



Monterrico, 15 de noviembre de 2012

**SOLUCIONARIO DE PRÁCTICA CALIFICADA N° 3**  
**CICLO 2012-02**

1. Determinamos  $w_1$  a una distancia "x" del apoyo A



$$\frac{w_1}{x} = \frac{w}{a} \Rightarrow w_1 = \frac{wx}{a} \quad \therefore \quad w_x = w + w_1 = w + \frac{wx}{a}$$

Luego:

$$EIy^{IV} = -w - \frac{wx}{a}$$

Integramos y obtenemos:

$$EIy^{III} = -wx - \frac{wx^2}{2a} + C_1$$

CONDICION:

a) Si  $x = a \Rightarrow V_{x=a} = 0 \quad \therefore \quad -wa - \frac{wa}{2} + C_1 = 0$

$$C_1 = \frac{3wa}{2}$$

De esta manera, se obtendrá:

$$EIy^{III} = -wx - \frac{wx^2}{2a} + \frac{3wa}{2}$$

Integramos y obtenemos:

$$EIy^{II} = -\frac{wx^2}{2} - \frac{wx^3}{6a} + \frac{3wax}{2} + C_2$$

CONDICION:

b) Si  $x = 0 \Rightarrow M_{x=0} = 0 \quad \therefore \quad C_2 = 0$

De esta manera, la ecuación quedará así:

$$EIy^{II} = -\frac{wx^2}{2} - \frac{wx^3}{6a} + \frac{3wax}{2}$$

Integramos y obtenemos:

$$EIy' = -\frac{wx^3}{6} - \frac{wx^4}{24a} + \frac{3wax^2}{4} + C_3$$

CONDICION:

c) Si  $x = a \Rightarrow \theta_{x=a} = 0 \quad \therefore \quad -\frac{wa^3}{6} - \frac{wa^3}{24} + \frac{3wa^3}{4} + C_3 = 0$

$$C_3 = -\frac{13wa^3}{24}$$

De esta manera, la ecuación quedará así:

$$EIy' = -\frac{wx^3}{6} - \frac{wx^4}{24a} + \frac{3wax^2}{4} - \frac{13wa^3}{24}$$

Integramos y obtenemos:

$$EIy = -\frac{wx^4}{24} - \frac{wx^5}{120a} + \frac{3wax^3}{12} - \frac{13wa^3x}{24} + C_4$$

CONDICION:

d) Si  $x = 0 \Rightarrow y_{x=0} = 0 \therefore C_4 = 0$

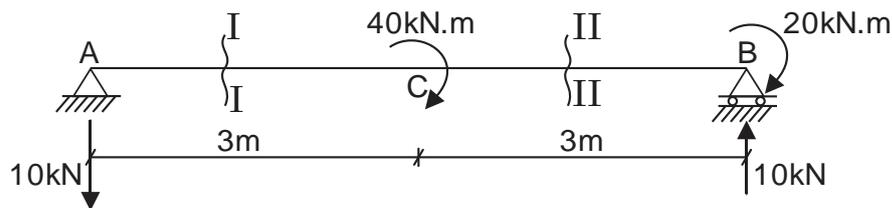
De esta manera, la ecuación final de deflexión será:

$$EIy = -\frac{wx^4}{24} - \frac{wx^5}{120a} + \frac{wax^3}{4} - \frac{13wa^3x}{24}$$

Determinamos la deflexión máxima, la cual ocurrirá en el centro de la viga:

$$y_{\text{máx}} = y_{x=a} = \frac{1}{EI} \left[ -\frac{wa^4}{24} - \frac{wa^4}{120} + \frac{wa^4}{4} - \frac{13wa^4}{24} \right] = -\frac{41wa^4}{120EI} \downarrow$$

2. Determinamos las reacciones en los apoyos y analizamos los tramos I-I y II-II



TRAMO I-I ( $0 \leq x \leq 3$ )

$$EIy'' = -10x$$

$$EIy' = -5x^2 + C_1$$

$$EIy = -\frac{5x^3}{3} + C_1x + C_2$$

CONDICION:

a) Si  $x = 0 \Rightarrow y_{x=0} = 0 \therefore C_2 = 0$

TRAMO II-II ( $3 \leq x \leq 6$ )

$$EIy'' = -10x + 40$$

$$EIy' = -5x^2 + 40x + C_3$$

$$EIy = -\frac{5x^3}{3} + 20x^2 + C_3x + C_4$$

PRINCIPIO DE CONTINUIDAD:

b) Si  $x = 3 \Rightarrow \theta_{x=3}^I = \theta_{x=3}^{II} \therefore -5(3)^2 + C_1 = -5(3)^2 + 40(3) + C_3$

$$C_3 = C_1 - 120$$

c) Si  $x = 3 \Rightarrow y'_{x=3} = y''_{x=3} \therefore$

$$-\frac{5(3)^3}{3} + C_1(3) = -\frac{5(3)^3}{3} + 20(3)^2 + (C_1 - 120)(3) + C_4$$

$$C_4 = 180$$

CONDICION:

d) Si  $x = 6 \Rightarrow y''_{x=6} = 0 \therefore$

$$-\frac{5(6)^3}{3} + 20(6)^2 + (C_1 - 120)(6) + 180 = 0$$

$$C_1 = 30$$

$$C_3 = -90$$

DEFLEXION EN "C":

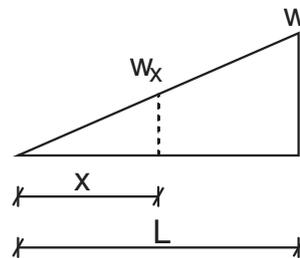
$$y_C = y'_{x=3} = \frac{1}{EI} \left[ -\frac{5(3)^3}{3} + 30(3) \right] = \frac{45}{EI} \uparrow$$

PENDIENTE EN "B":

$$\theta_B = \theta''_{x=6} = \frac{1}{EI} [-5(6)^2 + 40(6) - 90] = -\frac{30}{EI}$$

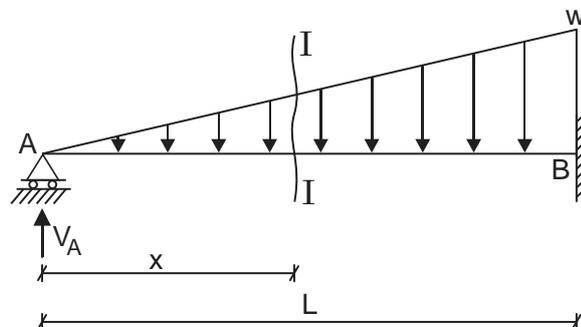
El signo negativo, indica que la pendiente va en sentido horario.

3. Determinamos el valor de  $w_x$  a una distancia "x" del apoyo A



$$\frac{w_x}{x} = \frac{W}{L} \Rightarrow w_x = \frac{Wx}{L}$$

Luego, efectuamos el corte I-I y analizamos dicho tramo



TRAMO I-I ( $0 \leq x \leq L$ )

$$EIy'' = V_A x - \frac{1}{2} x \left( \frac{Wx}{L} \right) \left( \frac{x}{3} \right) = V_A x - \frac{Wx^3}{6L}$$

$$EIy' = \frac{V_A x^2}{2} - \frac{wx^4}{24L} + C_1$$

$$EIy = \frac{V_A x^3}{6} - \frac{wx^5}{120L} + C_1 x + C_2$$

CONDICIONES:

a) Si  $x = 0 \Rightarrow y_{x=0} = 0 \quad \therefore C_2 = 0$

b) Si  $x = L \Rightarrow \theta_{x=L} = 0 \quad \therefore C_1 = \frac{wL^3}{24} - \frac{V_A L^2}{2}$

c) Si  $x = L \Rightarrow y_{x=L} = 0 \quad \therefore V_A = \frac{wL}{10} = 0,1wL \uparrow$

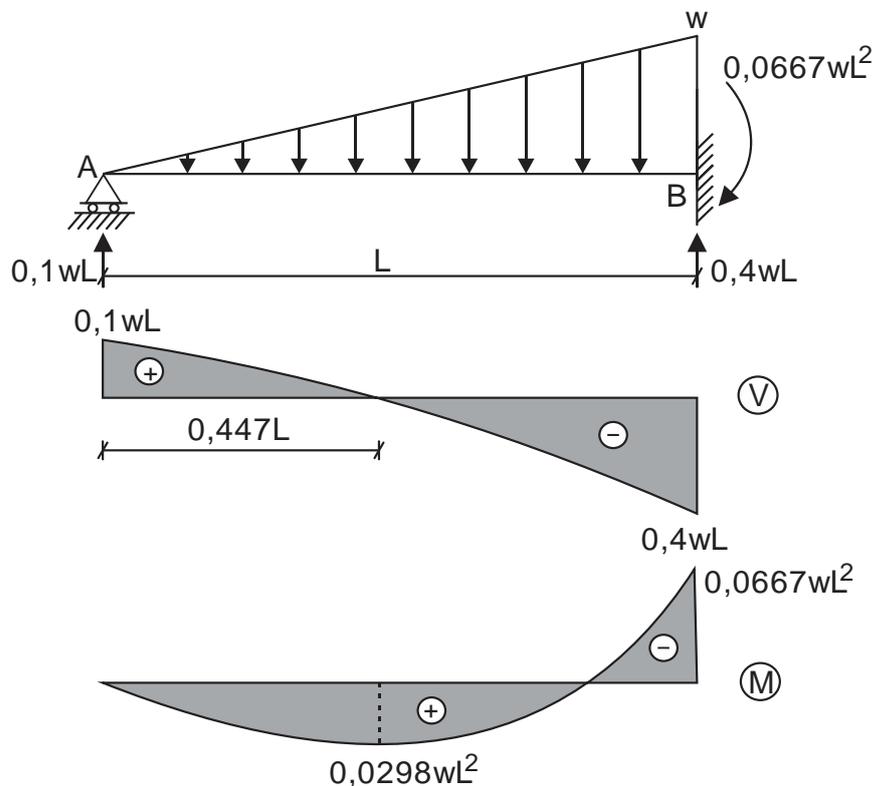
Con la reacción obtenida, determinamos las reacciones en el empotramiento B

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow 0,1wL - \frac{1}{2}(L)(w) + V_B = 0 \quad \therefore V_B = 0,4wL \uparrow$$

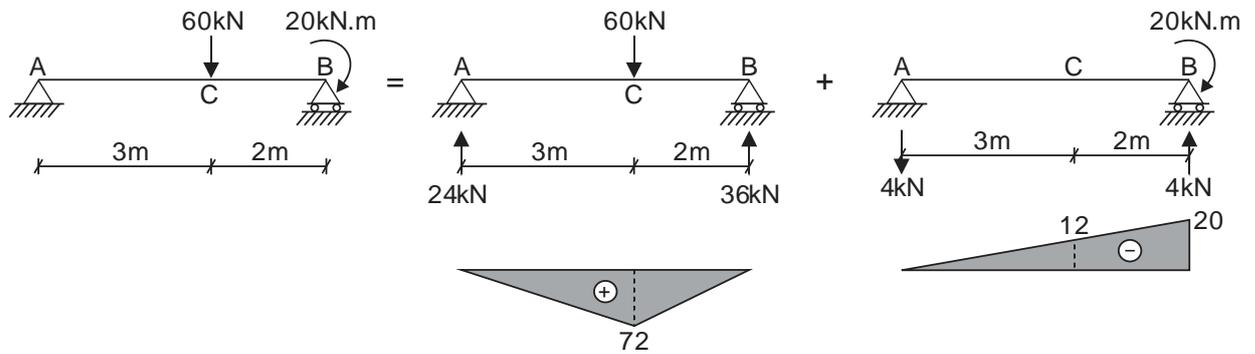
$$\sum M_B = 0 \Rightarrow 0,1wL^2 - \frac{1}{2}wL\left(\frac{L}{3}\right) + M_B = 0 \quad \therefore M_B = 0,0667wL^2$$

El sentido del momento en B es horario.

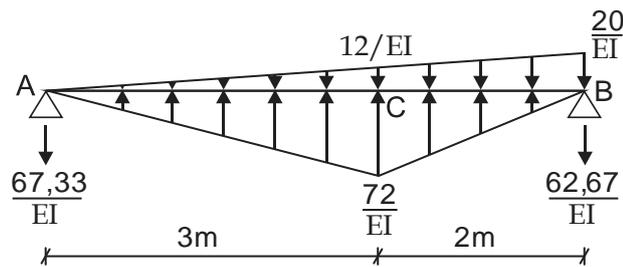
De esta manera, graficamos los diagramas de fuerza cortante y momento flector, tal como se muestra en la figura.



4. Debido a que el diagrama de momento flector tendrá diagrama positivo y negativo, mejor aplicamos el Principio de Superposición de Cargas y efectuamos los diagramas en forma independiente, tal como se muestra en la figura de la siguiente página.



Con los diagramas obtenidos, aplicamos viga conjugada, tal como se muestra en la figura.



$$\sum \bar{M}_A = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}(3)\left(\frac{72}{EI}\right)(2) + \frac{1}{2}(2)\left(\frac{72}{EI}\right)\left(\frac{11}{3}\right) - \frac{1}{2}(5)\left(\frac{20}{EI}\right)\left(\frac{2}{3} \cdot 5\right) - \bar{V}_B(5) = 0$$

$$\bar{V}_B = \frac{62,67}{EI} \downarrow$$

$$\sum \bar{F}_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad -\bar{V}_A - \frac{1}{2}(5)\left(\frac{20}{EI}\right) + \frac{1}{2}(5)\left(\frac{72}{EI}\right) - \frac{62,67}{EI} = 0$$

$$\bar{V}_A = \frac{67,33}{EI} \downarrow$$

Luego, determinamos las pendientes en A y B y la deflexión en C

PENDIENTE EN "A":

$$\theta_A = \bar{V}_A = -\frac{67,33}{EI}$$

La pendiente en A es negativa, porque la cortante de la viga conjugada va hacia abajo de izquierda a derecha, siendo su signo negativo, de acuerdo a la convención de signos de la Estática y su sentido de la pendiente es horario.

PENDIENTE EN "B":

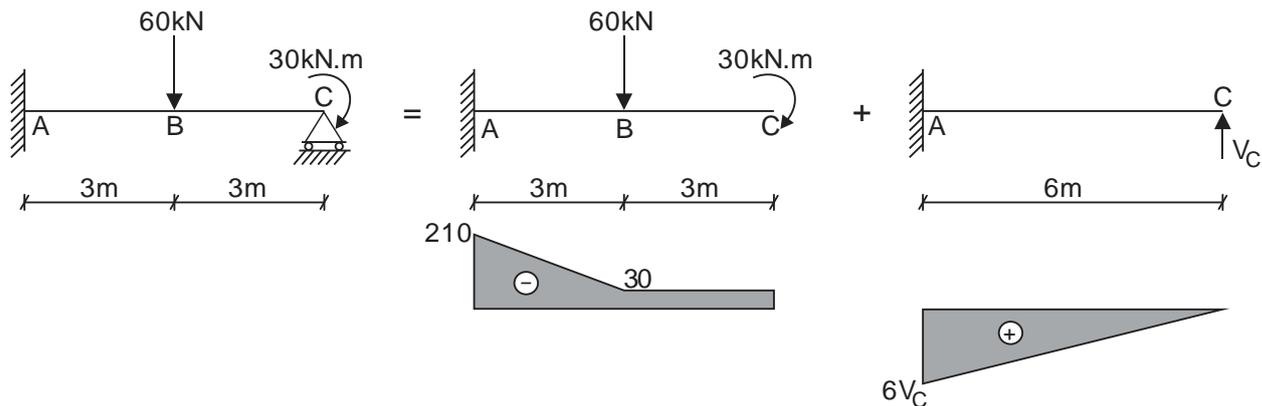
$$\theta_B = \bar{V}_B = \frac{62,67}{EI}$$

La pendiente en B es positiva, porque la cortante de la viga conjugada va hacia abajo de derecha a izquierda, siendo su signo positivo, de acuerdo a la convención de signos de la Estática y su sentido de la pendiente es antihorario.

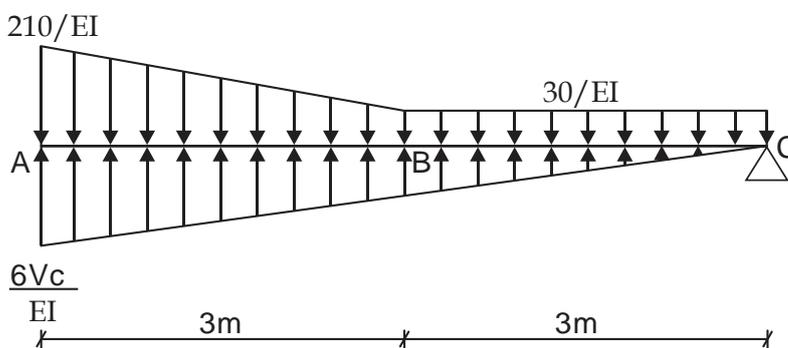
DEFLEXION EN "C":

$$y_C = \bar{M}_C = -\frac{67,33}{EI}(3) - \frac{1}{2}(3)\left(\frac{12}{EI}\right)(1) + \frac{1}{2}\left(\frac{72}{EI}\right)(3)(1) = -\frac{112}{EI} \downarrow$$

5. Liberamos el apoyo en C, lo reemplazamos por su reacción y luego, aplicamos el Principio de Superposición de Cargas para realizar los diagramas de momento flector.



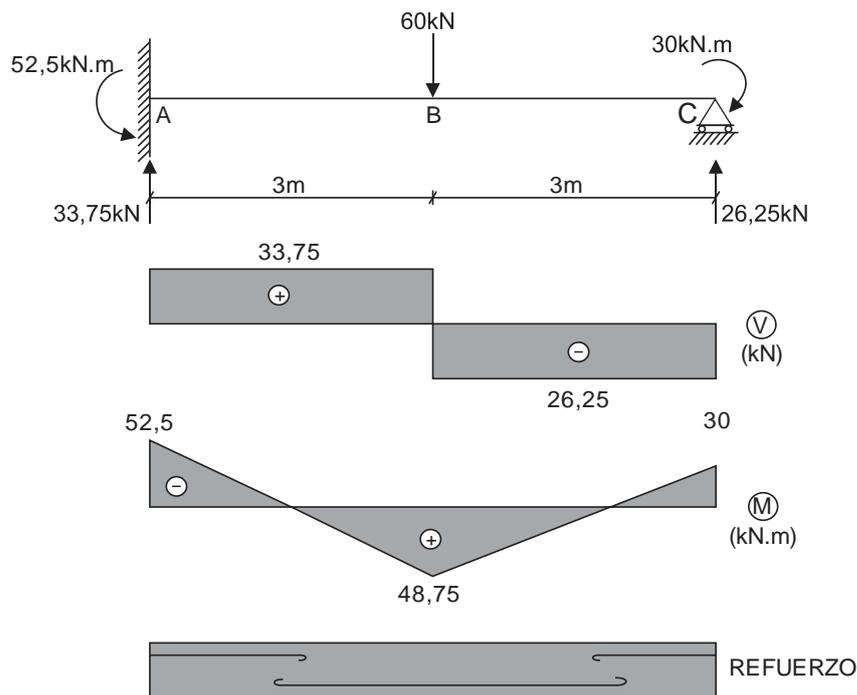
Ahora, aplicamos viga conjugada, tal como se muestra en la figura.



$$y_C = \bar{M}_C = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \left( \frac{6V_C}{EI} \right) (6)(4) - \left( \frac{30}{EI} \right) (6)(3) - \frac{1}{2} \left( \frac{180}{EI} \right) (3)(5) = 0$$

$$V_C = 26,25 \text{ kN} \uparrow$$

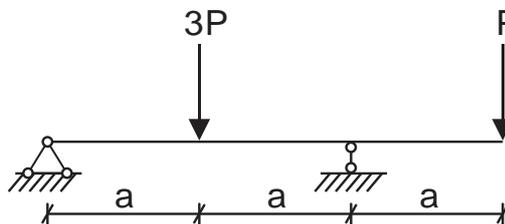
Con el valor obtenido, determinamos las reacciones en el empotramiento A y graficamos los diagramas de fuerza cortante, momento flector y refuerzo, tal como se muestra en la figura.



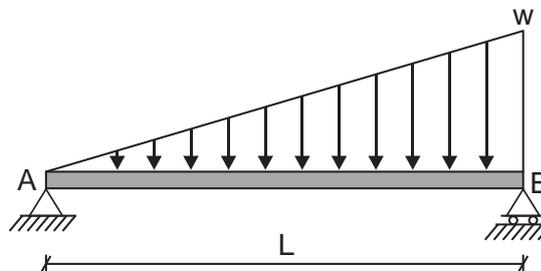
**MECANICA DE MATERIALES (CI80)**  
**PRACTICA CALIFICADA N° 3**  
**Ciclo 2013-01**

**Profesor** : Ph.D. Genner Villarreal Castro  
**Sección** : CI51  
**Duración** : 170 minutos

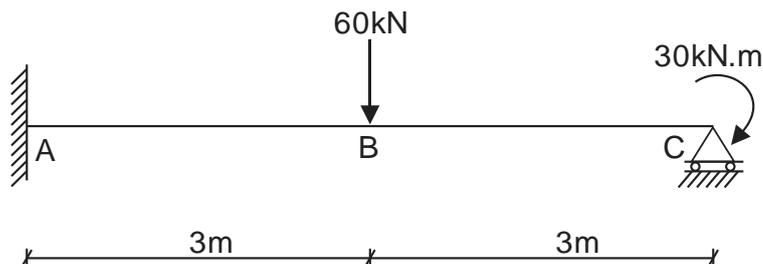
1. METODO DE LA DOBLE INTEGRACION. Determinar la deflexión máxima de la viga de sección constante mostrada en la figura y su relación con la deflexión en el punto de aplicación de la carga  $3P$  (5 puntos)



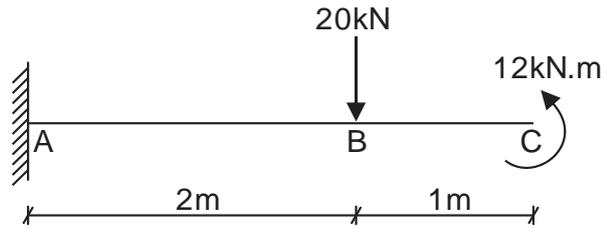
2. METODO DE LA DOBLE INTEGRACION. Obtener la ecuación de la curva de deflexión para una viga simplemente apoyada de sección constante, que soporta una carga distribuida triangularmente de intensidad máxima " $w$ ". Determinar la deflexión máxima de la viga, utilizando la ecuación diferencial de cuarto orden de la curva de deflexión (ecuación de carga) (4 puntos)



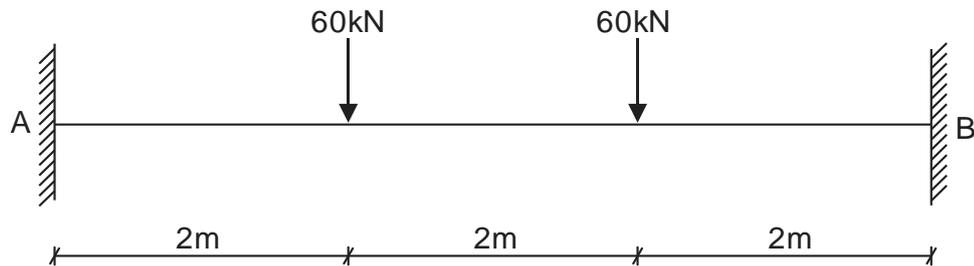
3. METODO DE LA DOBLE INTEGRACION. Resolver la viga de sección constante mostrada en la figura, graficando sus diagramas de fuerza cortante, momento flector y refuerzo. Determinar la deflexión en el centro de la viga y la pendiente en el apoyo derecho. (4 puntos)



4. METODO DE LA VIGA CONJUGADA. Para la viga de sección constante mostrada en la figura, determinar la deflexión en C y la pendiente en B (3 puntos)



5. METODO DE LA VIGA CONJUGADA. Resolver la viga de sección constante mostrada en la figura, graficando sus diagramas de fuerza cortante, momento flector y refuerzo. Determinar la deflexión máxima, considerando  $E = 19000\text{N/mm}^2$ ,  $b = 400\text{mm}$  y  $h = 600\text{mm}$  (4 puntos)

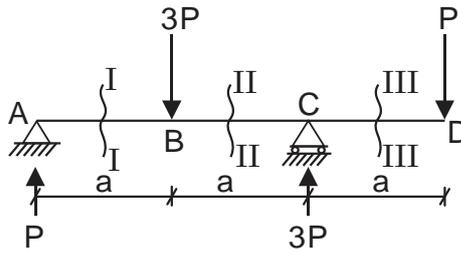


Monterrico, 19 de junio de 2013

## SOLUCIONARIO DE PRÁCTICA CALIFICADA N° 3

### CICLO 2013-01

1. Determinamos las reacciones en los apoyos y analizamos tramo por tramo en toda la viga



TRAMO I-I ( $0 \leq x \leq a$ )

$$EIy'' = Px$$

$$EIy' = \frac{Px^2}{2} + C_1$$

$$EIy = \frac{Px^3}{6} + C_1x + C_2$$

CONDICION:

a) Si  $x = 0 \Rightarrow y_{x=0} = 0 \quad \therefore C_2 = 0$

TRAMO II-II ( $a \leq x \leq 2a$ )

$$EIy'' = Px - 3P(x - a)$$

$$EIy' = \frac{Px^2}{2} - \frac{3P(x - a)^2}{2} + C_3$$

$$EIy = \frac{Px^3}{6} - \frac{P(x - a)^3}{2} + C_3x + C_4$$

PRINCIPIO DE CONTINUIDAD:

b) Si  $x = a \Rightarrow \theta_{x=a}^I = \theta_{x=a}^{II} \quad \therefore C_3 = C_1$

c) Si  $x = a \Rightarrow y_{x=a}^I = y_{x=a}^{II} \quad \therefore C_4 = 0$

CONDICION:

d) Si  $x = 2a \Rightarrow y_{x=2a}^{II} = 0 \quad \therefore \frac{P(2a)^3}{6} - \frac{Pa^3}{2} + C_3(2a) = 0$

$$C_3 = C_1 = -\frac{5Pa^2}{12}$$

Luego, determinamos la deflexión en el punto de aplicación de la carga 3P, es decir el punto B

$$y_B = y_{x=a}^I = \frac{1}{EI} \left[ \frac{Pa^3}{6} - \frac{5Pa^2}{12}(a) \right] = -0,25 \frac{Pa^3}{EI} \downarrow$$

TRAMO III-III ( $2a \leq x \leq 3a$ )

$$EIy'' = Px - 3P(x - a) + 3P(x - 2a)$$

$$EIy' = \frac{Px^2}{2} - \frac{3P(x-a)^2}{2} + \frac{3P(x-2a)^2}{2} + C_5$$

$$EIy = \frac{Px^3}{6} - \frac{P(x-a)^3}{2} + \frac{P(x-2a)^3}{2} + C_5x + C_6$$

PRINCIPIO DE CONTINUIDAD:

$$e) \text{ Si } x = 2a \Rightarrow \theta_{x=2a}^{\text{II}} = \theta_{x=2a}^{\text{III}} \therefore C_5 = C_3$$

$$f) \text{ Si } x = 2a \Rightarrow y_{x=2a}^{\text{II}} = y_{x=2a}^{\text{III}} \therefore C_6 = 0$$

Como la deflexión máxima se origina donde la pendiente es cero, entonces, analizamos los 3 tramos, igualando en cada uno de ellos la ecuación de la pendiente a cero.

TRAMO I-I ( $0 \leq x \leq a$ )

$$\frac{Px^2}{2} - \frac{5Pa^2}{12} = 0 \Rightarrow x = 0,9128a$$

$$y_{\text{máx}}^{\text{I}} = y_{x=0,9128a}^{\text{I}} = \frac{1}{EI} \left[ \frac{P(0,9128a)^3}{6} - \frac{5Pa^2}{12}(0,9128a) \right] = -0,2536 \frac{Pa^3}{EI} \downarrow$$

TRAMO II-II ( $a \leq x \leq 2a$ )

$$\frac{Px^2}{2} - \frac{3P(x-a)^2}{2} - \frac{5Pa^2}{12} = 0 \Rightarrow x_1 = 2,0773a$$

$$x_2 = 0,9226a$$

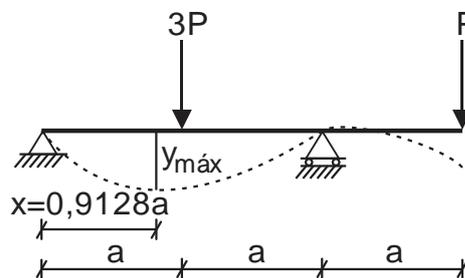
No cumplen ambos valores, por no encontrarse en el tramo respectivo, descartándose ambas soluciones.

TRAMO III-III ( $2a \leq x \leq 3a$ )

En este tramo no es necesario igualar a cero la ecuación de la pendiente, debido a que la deflexión máxima del tramo ocurre en el extremo libre.

$$y_{\text{máx}}^{\text{III}} = y_{x=3a}^{\text{III}} = \frac{1}{EI} \left[ \frac{P(3a)^3}{6} - \frac{P(2a)^3}{2} + \frac{Pa^3}{2} - \frac{5Pa^2}{12}(3a) \right] = -0,25 \frac{Pa^3}{EI} \downarrow$$

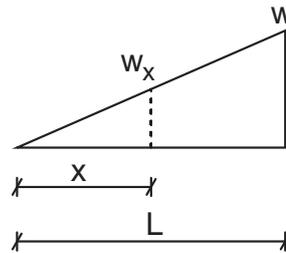
De esta manera, la forma de deformada de la viga es la mostrada en la figura.



Finalmente, determinamos la relación entre la deflexión máxima con la deflexión en B

$$\frac{y_{\text{máx}}}{y_B} = \frac{y_{x=0,9128a}^{\text{I}}}{y_{x=a}^{\text{I}}} = \frac{-0,2536 \frac{Pa^3}{EI}}{-0,25 \frac{Pa^3}{EI}} = 1,0144$$

2. Determinamos el valor de  $w_x$  a una distancia "x" del apoyo A



$$\frac{w_x}{x} = \frac{W}{L} \Rightarrow w_x = \frac{Wx}{L}$$

Luego, determinamos las reacciones en los apoyos:

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow V_A(L) - \frac{1}{2}(L)(W)\left(\frac{1}{3}L\right) = 0 \quad \therefore V_A = \frac{WL}{6} \uparrow$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow \frac{WL}{6} + V_B - \frac{1}{2}WL = 0 \quad \therefore V_B = \frac{WL}{3} \uparrow$$

Ahora, planteamos la ecuación de cuarto orden.

$$EIy^{IV} = -\frac{Wx}{L}$$

$$EIy^{III} = -\frac{Wx^2}{2L} + C_1$$

CONDICION:

$$a) \text{ Si } x = 0 \Rightarrow V_{x=0} = \frac{WL}{6} \quad \therefore C_1 = \frac{WL}{6}$$

Integramos una vez más y obtenemos:

$$EIy'' = -\frac{Wx^3}{6L} + \frac{WL}{6}x + C_2$$

CONDICION:

$$b) \text{ Si } x = 0 \Rightarrow M_{x=0} = 0 \quad \therefore C_2 = 0$$

Integramos otra vez y obtenemos:

$$EIy' = -\frac{Wx^4}{24L} + \frac{WLx^2}{12} + C_3$$

Integramos una vez más y obtenemos:

$$EIy = -\frac{Wx^5}{120L} + \frac{WLx^3}{36} + C_3x + C_4$$

CONDICIONES:

$$c) \text{ Si } x = 0 \Rightarrow y_{x=0} = 0 \quad \therefore C_4 = 0$$

$$d) \text{ Si } x = L \Rightarrow y_{x=L} = 0 \quad \therefore -\frac{WL^4}{120} + \frac{WL^4}{36} + C_3L = 0$$

$$C_3 = -\frac{7WL^3}{360}$$

ECUACION DE LA CURVA DE DEFLEXION:

$$y = \frac{1}{EI} \left( -\frac{wx^5}{120L} + \frac{wLx^3}{36} - \frac{7wL^3x}{360} \right) = -\frac{wx}{360LEI} (3x^4 - 10L^2x^2 + 7L^4)$$

ECUACION DE LA PENDIENTE:

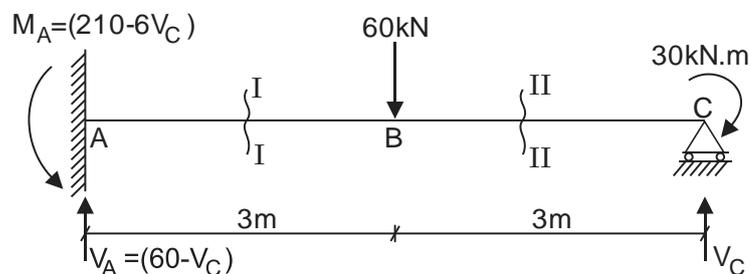
$$\theta = \frac{1}{EI} \left( -\frac{wx^4}{24L} + \frac{wLx^2}{12} - \frac{7wL^3}{360} \right) = -\frac{w}{360LEI} (15x^4 - 30L^2x^2 + 7L^4)$$

La deflexión será máxima, cuando la pendiente es cero, para ello, igualamos a cero su ecuación y obtenemos una única solución que cumple con el tramo.

$$15x^4 - 30L^2x^2 + 7L^4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0,5193L$$

$$y_{\text{máx}} = y_{x=0,5193L} = -\frac{w(0,5193L)}{360LEI} [3(0,5193L)^4 - 10L^2(0,5193L)^2 + 7L^4] = -0,0065 \frac{wL^4}{EI} \downarrow$$

3. Calculamos las reacciones en el empotramiento A en función de  $V_C$  y analizamos los tramos I-I y II-II, tal como se muestra en la figura.



TRAMO I-I ( $0 \leq x \leq 3$ )

$$EIy'' = (60 - V_C)x - (210 - 6V_C)$$

$$EIy' = (60 - V_C) \frac{x^2}{2} - (210 - 6V_C)x + C_1$$

$$EIy = (60 - V_C) \frac{x^3}{6} - (210 - 6V_C) \frac{x^2}{2} + C_1x + C_2$$

CONDICIONES:

a) Si  $x = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta_{x=0} = 0 \quad \therefore \quad C_1 = 0$

b) Si  $x = 0 \quad \Rightarrow \quad y_{x=0} = 0 \quad \therefore \quad C_2 = 0$

TRAMO II-II ( $3 \leq x \leq 6$ )

$$EIy'' = (60 - V_C)x - (210 - 6V_C) - 60(x - 3)$$

$$EIy' = (60 - V_C) \frac{x^2}{2} - (210 - 6V_C)x - 30(x - 3)^2 + C_3$$

$$EIy = (60 - V_C) \frac{x^3}{6} - (210 - 6V_C) \frac{x^2}{2} - 10(x - 3)^3 + C_3x + C_4$$

PRINCIPIO DE CONTINUIDAD:

c) Si  $x = 3 \quad \Rightarrow \quad \theta_{x=3}^I = \theta_{x=3}^{II} \quad \therefore \quad C_3 = 0$

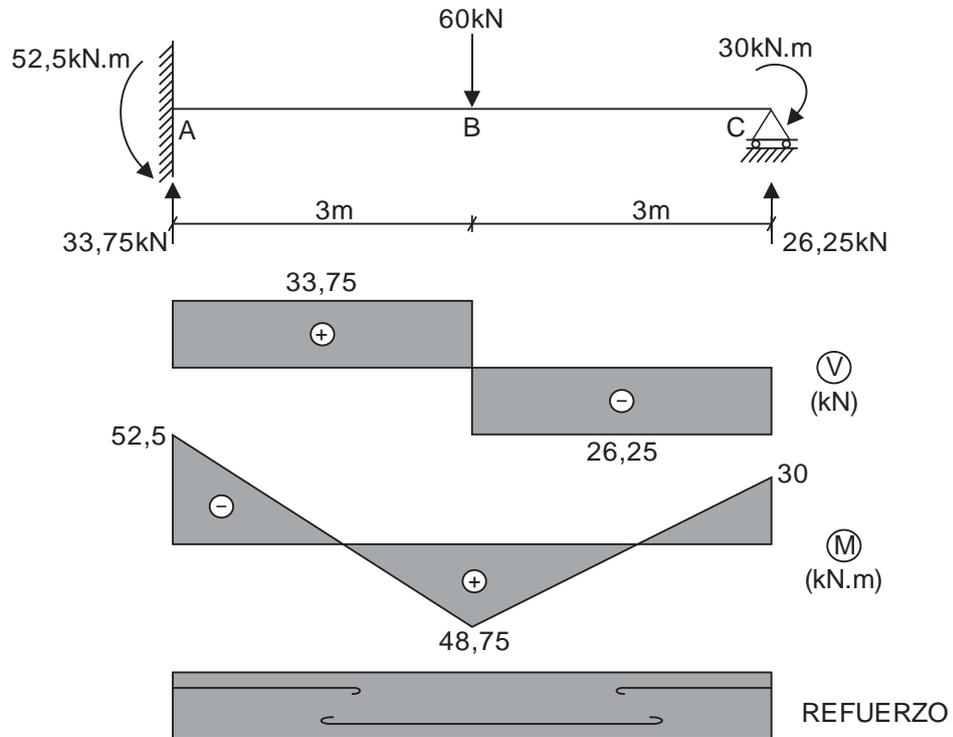
d) Si  $x = 3 \Rightarrow y_{x=3}^I = y_{x=3}^{II} \therefore C_4 = 0$

CONDICION:

e) Si  $x = 6 \Rightarrow y_{x=6} = 0 \therefore (60 - V_C) \frac{6^3}{6} - (210 - 6V_C) \frac{6^2}{2} - 10(3)^3 = 0$

$V_C = 26,25\text{kN} \uparrow$

De esta manera, graficamos los diagramas requeridos, tal como se muestra en la figura.



DEFLEXION EN "B":

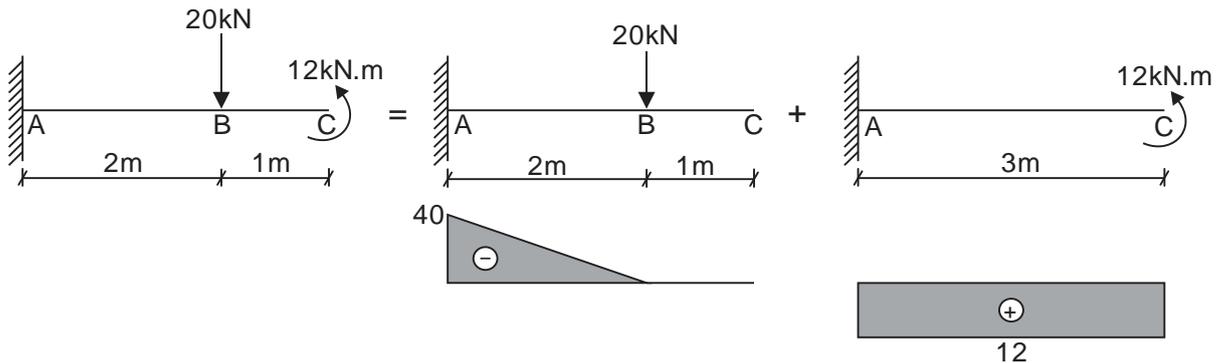
$$y_B = y_{x=3}^I = \frac{1}{EI} \left( 33,75 \cdot \frac{3^3}{6} - 52,5 \cdot \frac{3^2}{2} \right) = -\frac{84,375}{EI} \downarrow$$

PENDIENTE EN "C":

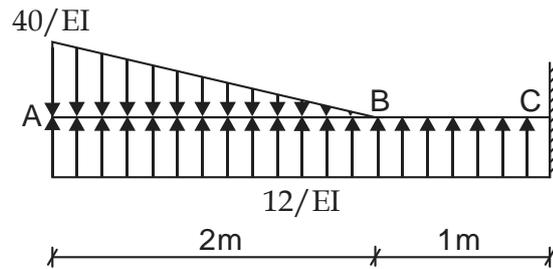
$$\theta_C = \theta_{x=6}^{II} = \frac{1}{EI} \left( 33,75 \cdot \frac{6^2}{2} - 52,5 \cdot 6 - 30 \cdot 3^2 \right) = \frac{22,5}{EI}$$

La pendiente en C va en sentido antihorario.

4. Debido a que el diagrama de momento flector tendrá diagrama positivo y negativo, mejor aplicamos el Principio de Superposición de Cargas y efectuamos los diagramas en forma independiente, tal como se muestra en la figura.



Con los diagramas obtenidos, aplicamos viga conjugada, tal como se muestra en la figura.



DEFLEXION EN "C":

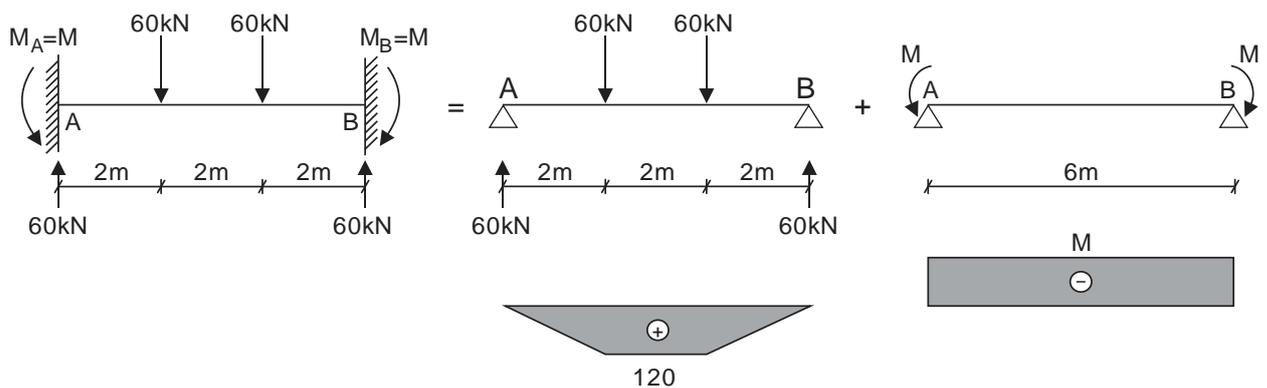
$$y_C = \bar{M}_C = -\frac{1}{2}(2)\left(\frac{40}{EI}\right)\left(\frac{2}{3} \cdot 2 + 1\right) + (3)\left(\frac{12}{EI}\right)\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{39,33}{EI} \downarrow$$

PENDIENTE EN "B":

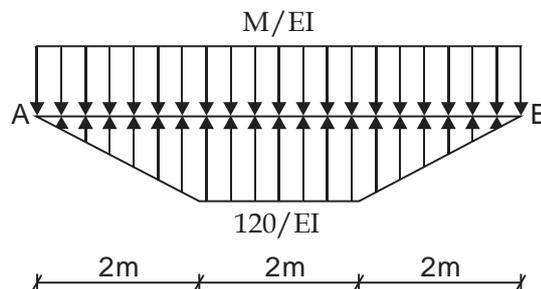
$$\theta_B = \bar{V}_B = (2)\left(\frac{12}{EI}\right) - \frac{1}{2}(2)\left(\frac{40}{EI}\right) = -\frac{16}{EI}$$

La pendiente en B va en sentido horario.

5. Para realizar los diagramas de momento flector, aplicamos el Principio de Superposición de Cargas.



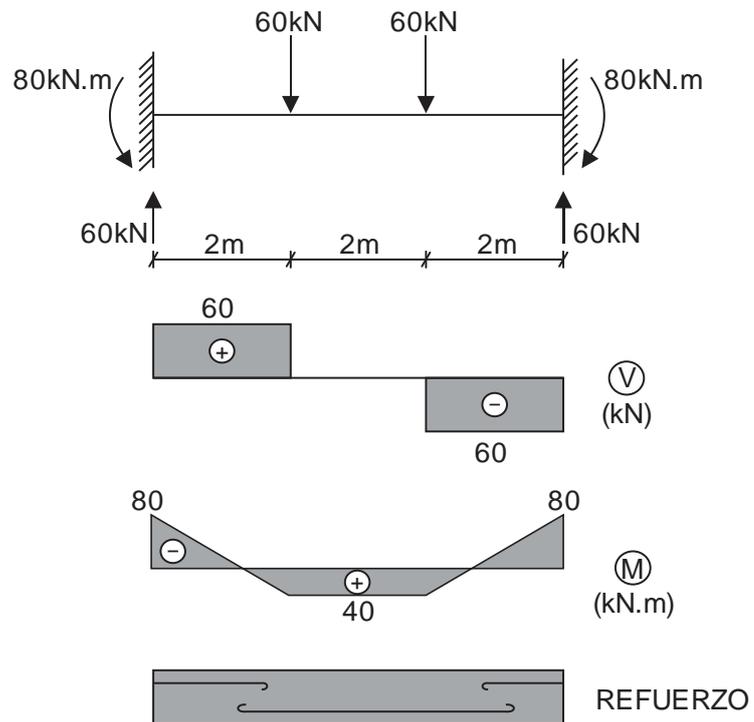
Ahora, aplicamos viga conjugada, tal como se muestra en la figura.



$$\theta_B = \bar{V}_B = 0 \quad \Rightarrow \quad -6\left(\frac{M}{EI}\right) + 2 \cdot \left[\frac{1}{2}(2)\left(\frac{120}{EI}\right)\right] + (2)\left(\frac{120}{EI}\right) = 0$$

$$M = 80\text{kN.m}$$

Con el valor obtenido, graficamos los diagramas de fuerza cortante, momento flector y refuerzo, tal como se muestra en la figura.



DEFLEXION MAXIMA:

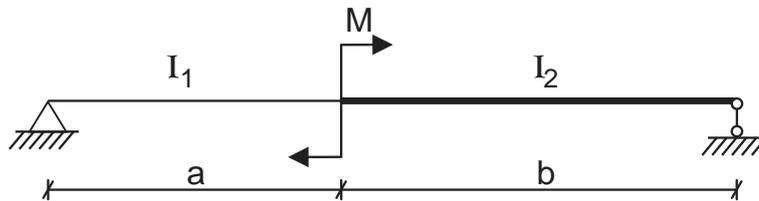
$$y_{\text{máx}} = y_{x=3} = \frac{1}{2}(2)\left(\frac{120}{EI}\right)\left(\frac{1}{3} \cdot 2 + 1\right) + (1)\left(\frac{120}{EI}\right)\left(\frac{1}{2}\right) - (3)\left(\frac{80}{EI}\right)\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{100}{EI} = -\frac{100}{19 \cdot 10^6 \cdot (0,4 \cdot 0,6^3 / 12)}$$

$$y_{\text{máx}} = -7,3 \cdot 10^{-4} \text{ m} = -0,73 \text{ mm} \downarrow$$

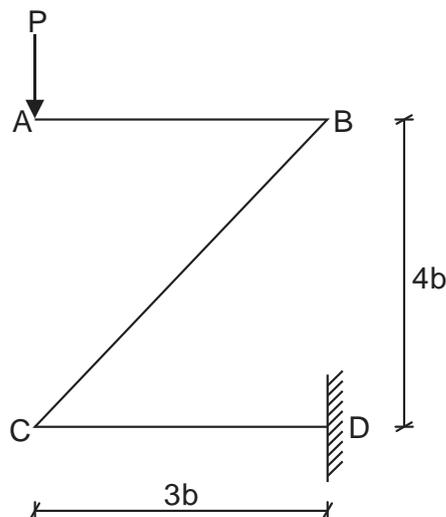
**MECANICA DE MATERIALES (CI80)**  
**EXAMEN FINAL**  
**Ciclo 2011-01**

**Profesor** : Ph.D. Genner Villarreal Castro  
**Sección** : CI51  
**Duración** : 170 minutos

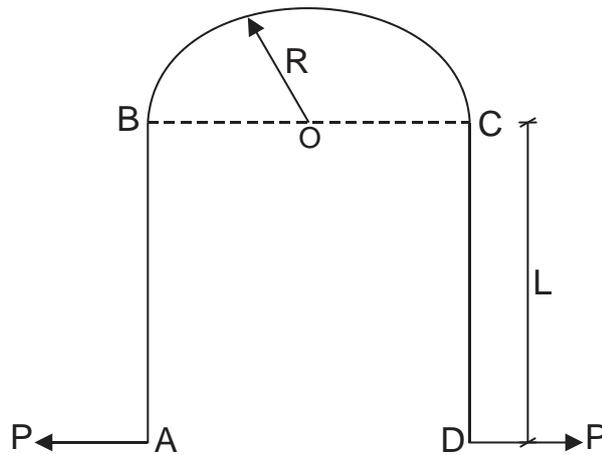
1. METODO DEL TRABAJO VIRTUAL. Teniendo las magnitudes “a” y “b” dadas, se pide determinar con qué relación entre los momentos de inercia de las secciones transversales  $I_1 / I_2$  la deflexión vertical de la viga en el punto donde está aplicado el momento flector M, será igual a cero. ¿Qué valor tiene en este caso la pendiente en el mismo punto? Considerar que la longitud de la viga es L (4 puntos)



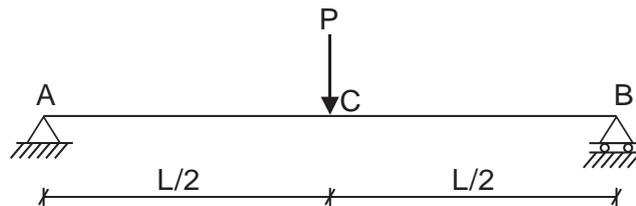
2. METODO DEL TRABAJO VIRTUAL. La estructura ABCD en forma de Z mostrada en la figura, está empotrada en el apoyo D y libre en A. La rigidez a flexión  $EI$  es la misma para todos los miembros. Determinar la deflexión vertical  $y_A$  y la pendiente  $\theta_A$  en el extremo libre A, debido a la carga P que actúa en el punto A (4 puntos)



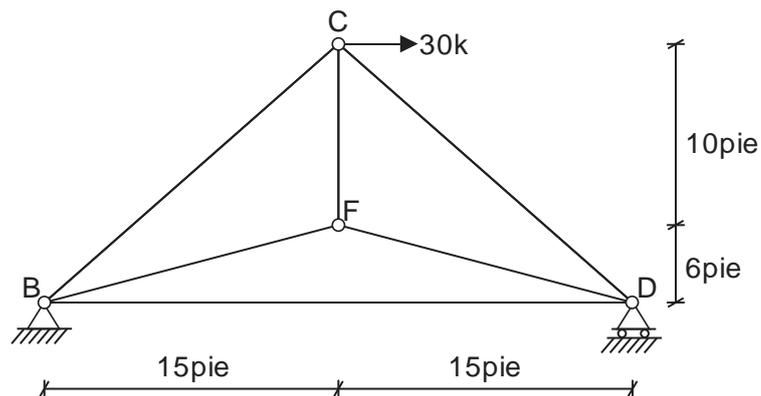
3. METODO DEL TRABAJO VIRTUAL. Una estructura delgada ABCD consiste en una porción semicircular BC de radio R y dos partes rectas AB y CD de longitud L. Todas las partes tienen una rigidez a flexión EI. Determinar el incremento  $\Delta$  en la distancia entre los puntos A y D debido a las cargas P (4 puntos)



4. TEOREMA DE CASTIGLIANO. Una viga simplemente apoyada AB de longitud L y rigidez a flexión EI soporta una carga concentrada P en el punto medio C. Determinar la deflexión en el centro de la viga y la pendiente en el apoyo A (4 puntos)



5. TEOREMA DE CASTIGLIANO. Resolver la armadura mostrada en la figura, si la rigidez EA es constante para toda la estructura. (4 puntos)

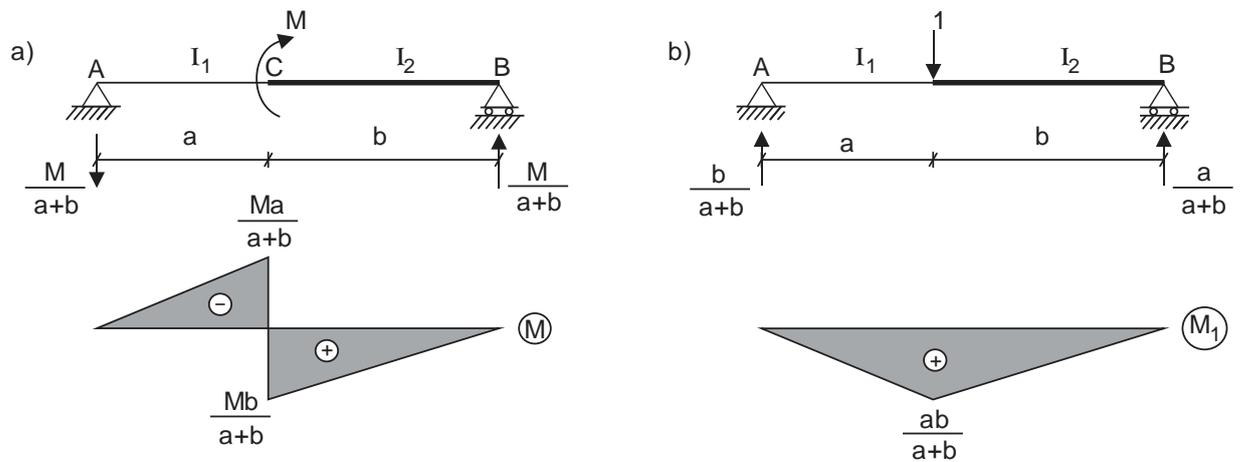


Monterrico, 06 de julio de 2011

## SOLUCIONARIO DE EXAMEN FINAL

### CICLO 2011-01

1. Graficamos los diagramas de momento flector, debido a la acción del momento real (figura a) y la carga unitaria aplicada en C (figura b)



Por condición del problema:

$$y_c = \delta_v^C = 0$$

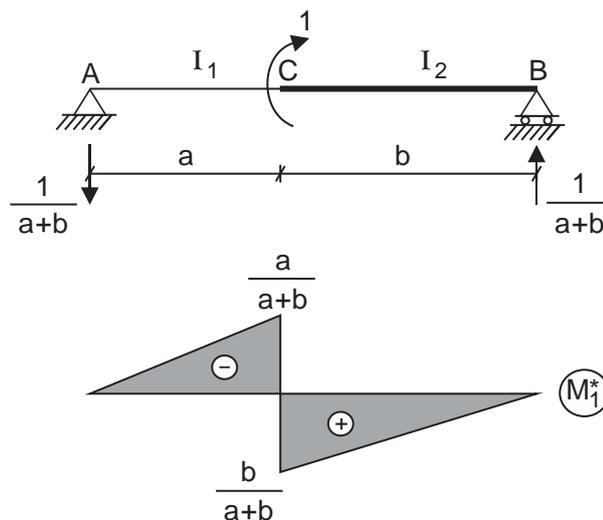
Luego:

$$y_c = \sum \int \frac{MM_1 dx}{EI_i} = -\frac{1}{EI_1} \left( \frac{1}{2} \right) (a) \left( \frac{Ma}{a+b} \right) \left( \frac{2}{3} \cdot \frac{ab}{a+b} \right) + \frac{1}{EI_2} \left( \frac{1}{2} \right) (b) \left( \frac{Mb}{a+b} \right) \left( \frac{2}{3} \cdot \frac{ab}{a+b} \right) = 0$$

De donde:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{a^2}{b^2}$$

Ahora, graficamos el diagrama de momento flector, debido a la acción del momento unitario en C



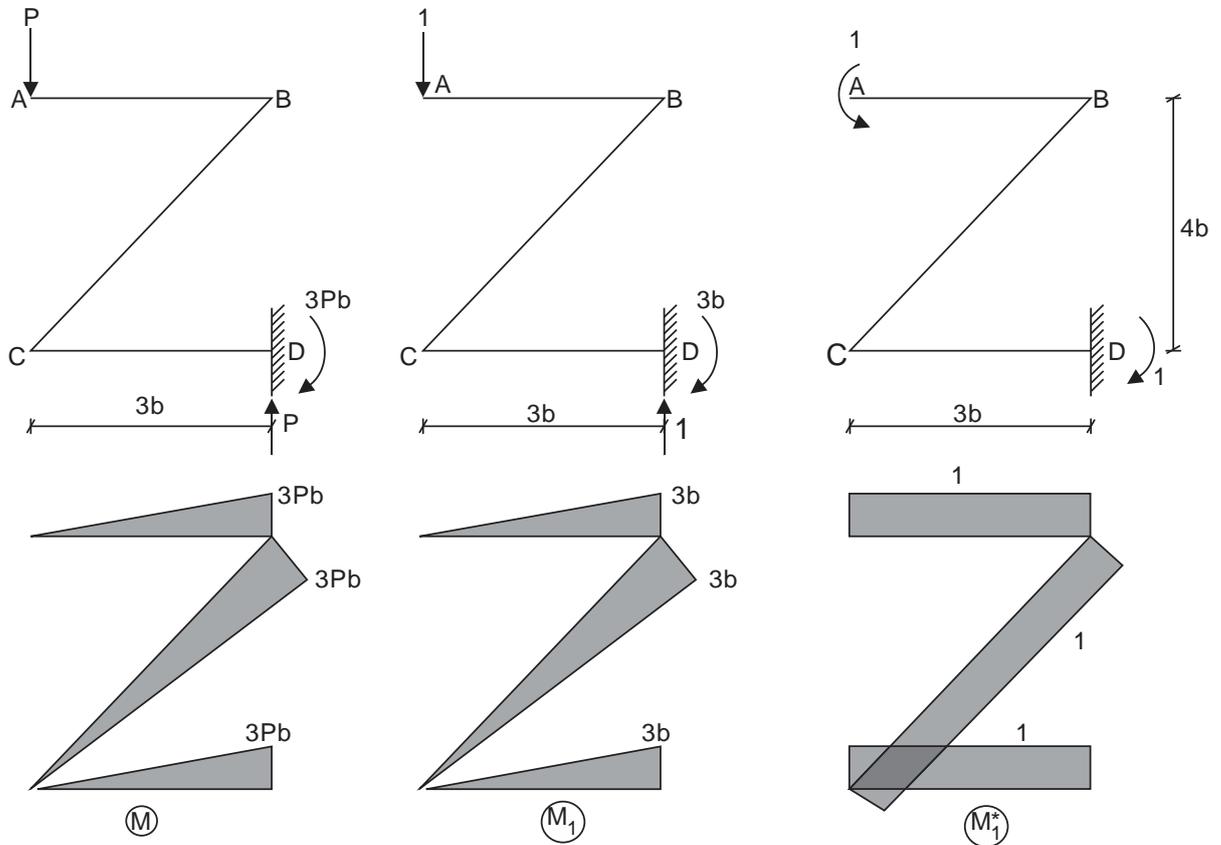
Determinamos la pendiente en C

$$\theta_c = \sum \int \frac{MM_1^* dx}{EI_i} = \frac{1}{EI_1} \left( \frac{1}{2} \right) (a) \left( \frac{Ma}{a+b} \right) \left( \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{a+b} \right) + \frac{1}{EI_2} \left( \frac{1}{2} \right) (b) \left( \frac{Mb}{a+b} \right) \left( \frac{2}{3} \cdot \frac{b}{a+b} \right)$$

$$\theta_c = \frac{1}{EI_1} \cdot \frac{Ma^3}{3(a+b)^2} + \frac{1}{EI_1} \cdot \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{Mb^3}{3(a+b)^2} = \frac{Ma^2}{3EI_1L^2}(a+b) = \frac{Ma^2}{3EI_1L}$$

Como la pendiente es positiva, entonces va en sentido horario.

2. Graficamos los diagramas de momento flector, debido a la acción de la carga real (figura a), carga unitaria (figura b) y momento unitario (figura c)



Determinamos la deflexión y la pendiente en el extremo libre A

$$y_A = \frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{2} (3b)(3Pb) \left( \frac{2}{3} \cdot 3b \right) \cdot 2 + \frac{1}{2} (5b)(3Pb) \left( \frac{2}{3} \cdot 3b \right) \right] = \frac{33Pb^3}{EI} \downarrow$$

$$\theta_A = \frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{2} (3b)(3Pb)(1) \cdot 2 + \frac{1}{2} (5b)(3Pb)(1) \right] = \frac{33Pb^2}{2EI}$$

Como el signo es positivo, indica que la pendiente va en sentido antihorario.

3. Planteamos las ecuaciones de momento debido a las cargas reales P y cargas unitarias aplicadas en los mismos puntos y direcciones que las cargas P, analizando tramo por tramo en forma consecutiva.

TRAMOS AB y DC ( $0 \leq y \leq L$ )

$$M = Py$$

$$M_1 = y$$

TRAMO BC ( $0 \leq \varphi \leq \pi$ )

$$M = P(L + R \operatorname{sen} \varphi)$$

$$M_1 = (L + R \operatorname{sen} \varphi)$$

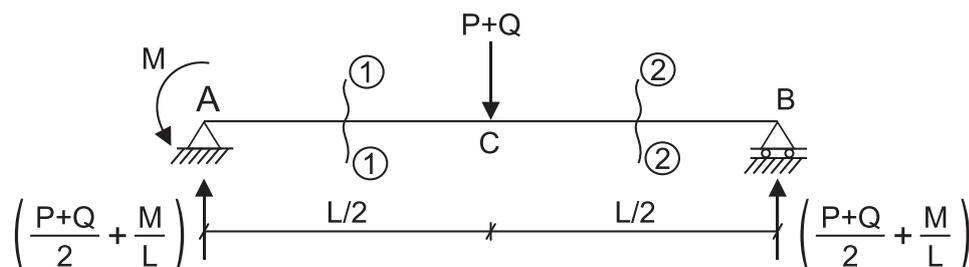
$$ds = R d\varphi$$

Luego:

$$\Delta = 2 \cdot \frac{1}{EI} \int_0^L (Py)(y)dy + \frac{1}{EI} \int_0^\pi P(L + R\sin\phi)^2 R d\phi = 2 \cdot \frac{1}{EI} \left( \frac{PL^3}{3} \right) + \frac{PR}{EI} \int_0^\pi (L^2 + 2LR\sin\phi + R^2\sin^2\phi) d\phi$$

$$\Delta = \frac{2PL^3}{3EI} + \frac{PR}{2EI} (2\pi L^2 + 8LR + \pi R^2)$$

4. Analizamos en un solo gráfico ambas condiciones del problema, es decir, la deflexión en C y la pendiente en A, asignándole respectivamente la carga Q y el momento M, tal como se muestra en la figura.



Luego, calculamos sus reacciones en los apoyos y analizamos tramo por tramo, a través de los cortes 1-1 y 2-2

TRAMO AC ( $0 \leq x \leq L/2$ )

$$M_I = \left( \frac{P+Q}{2} + \frac{M}{L} \right) x - M$$

$$\frac{\partial M_I}{\partial Q} = \frac{x}{2}$$

$$\frac{\partial M_I}{\partial M} = \frac{x}{L} - 1$$

TRAMO CB ( $L/2 \leq x \leq L$ )

$$M_{II} = \left( \frac{P+Q}{2} + \frac{M}{L} \right) x - M - (P+Q) \left( x - \frac{L}{2} \right)$$

$$\frac{\partial M_{II}}{\partial Q} = \frac{x}{2} - x + \frac{L}{2} = \frac{L-x}{2}$$

$$\frac{\partial M_{II}}{\partial M} = \frac{x}{L} - 1$$

DEFLEXION EN "C":

$$y_C = \int_0^{L/2} M_I \left( \frac{\partial M_I}{\partial Q} \right) \frac{dx}{EI} + \int_{L/2}^L M_{II} \left( \frac{\partial M_{II}}{\partial Q} \right) \frac{dx}{EI}$$

$$y_C = \frac{1}{EI} \left[ \int_0^{L/2} \left( \frac{Px}{2} \right) \left( \frac{x}{2} \right) dx + \int_{L/2}^L \left( \frac{Px}{2} - Px + \frac{PL}{2} \right) \left( \frac{L-x}{2} \right) dx \right] = \frac{PL^3}{48EI} \downarrow$$

PENDIENTE EN "A":

$$\theta_A = \int_0^{L/2} M_I \left( \frac{\partial M_I}{\partial M} \right) \frac{dx}{EI} + \int_{L/2}^L M_{II} \left( \frac{\partial M_{II}}{\partial M} \right) \frac{dx}{EI}$$

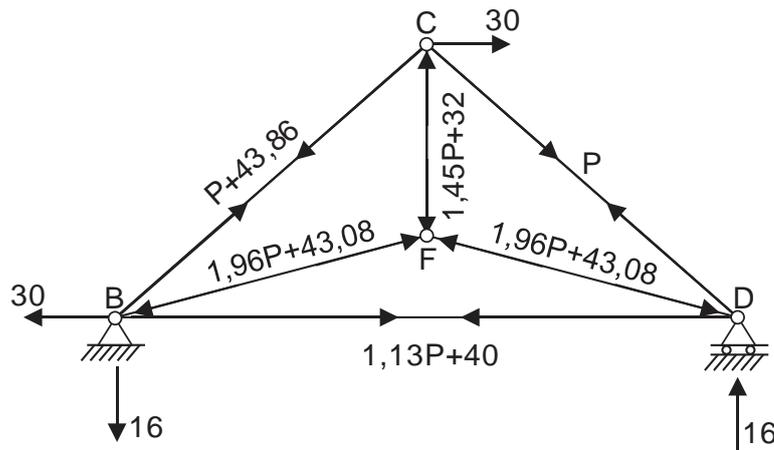
$$\theta_A = \frac{1}{EI} \left[ \int_0^{L/2} \left( \frac{Px}{2} \right) \left( \frac{x}{L} - 1 \right) dx + \int_{L/2}^L \left( \frac{Px}{2} - Px + \frac{PL}{2} \right) \left( \frac{x}{L} - 1 \right) dx \right] = -\frac{PL^2}{16EI}$$

El signo (-) indica que la pendiente va en sentido opuesto al momento M, es decir, en sentido horario.

5. Determinamos el grado de indeterminación del sistema.

$$G.I. = B - 2N = 9 - 2(4) = 1$$

Efectuamos un corte en la barra CD y lo reemplazamos por P, determinando las reacciones en los apoyos y fuerzas internas en las barras, por medio de la Estática.



Los resultados obtenidos los esquematizamos en una tabla, con la finalidad de determinar la fuerza axial en la barra CD

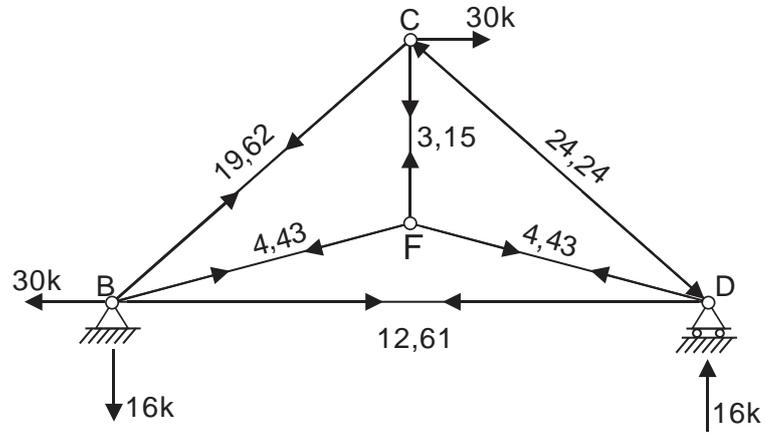
BARRA	L	EA	$F_{(P)}$	$\frac{\partial F}{\partial P}$	$F \frac{\partial F}{\partial P} \frac{L}{EA}$
BC	21,93	EA	$P + 43,86$	1	$\frac{21,93P + 961,850}{EA}$
BF	16,15	EA	$-(1,96P + 43,08)$	-1,96	$\frac{62,042P + 1363,654}{EA}$
BD	30	EA	$1,13P + 40$	1,13	$\frac{38,307P + 1356}{EA}$
CF	10	EA	$-(1,45P + 32)$	-1,45	$\frac{21,025P + 464}{EA}$
FD	16,15	EA	$-(1,96P + 43,08)$	-1,96	$\frac{62,042P + 1363,654}{EA}$
CD	21,93	EA	P	1	$\frac{21,93P}{EA}$

$$\sum = \frac{227,276P + 5509,158}{EA}$$

Luego:

$$\frac{227,276P + 5509,158}{EA} = 0 \quad \Rightarrow \quad P = -24,24k$$

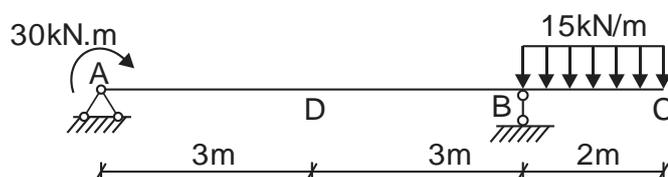
Con el resultado obtenido, calculamos las otras fuerzas internas o simplemente reemplazamos el valor de P en las fuerzas internas de la figura de la página anterior, obteniendo los resultados mostrados en la siguiente figura.



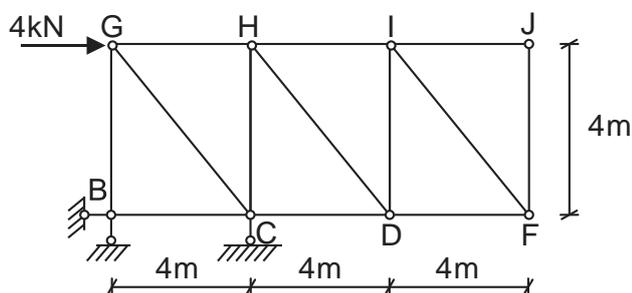
**MECANICA DE MATERIALES (CI80)**  
**EXAMEN FINAL**  
**Ciclo 2011-02**

**Profesor** : Ph.D. Genner Villarreal Castro  
**Sección** : CI51  
**Duración** : 170 minutos

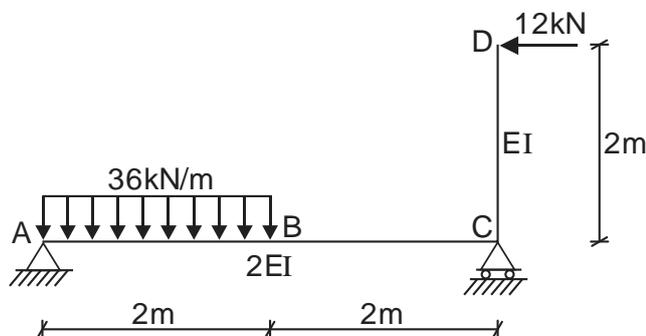
1. METODO DEL TRABAJO VIRTUAL. Determinar la deflexión vertical en C y D, así como la pendiente en el apoyo B. Considerar que la rigidez  $EI$  es constante para toda la viga. (4 puntos)



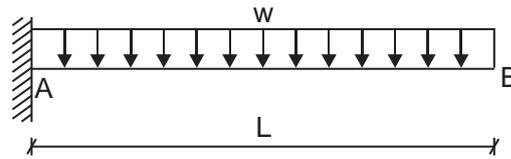
2. METODO DEL TRABAJO VIRTUAL. Determinar la deflexión vertical en D, considerando que la rigidez axial  $EA$  es igual para todas las barras de la armadura. (4 puntos)



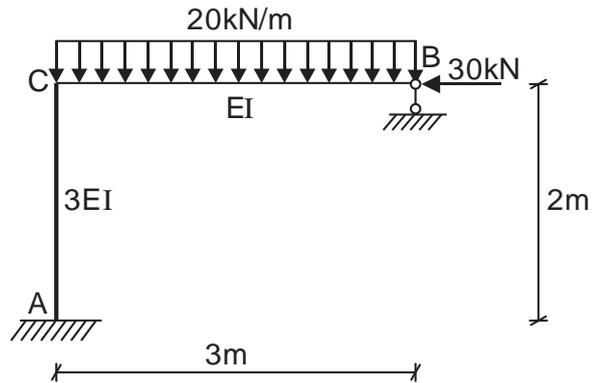
3. METODO DEL TRABAJO VIRTUAL. Determinar la deflexión vertical en B, el desplazamiento horizontal en D y la pendiente en C, si  $E = 23000\text{MPa}$  e  $I = 0,003125\text{m}^4$  (4 puntos)



4. TEOREMA DE CASTIGLIANO. Una viga en voladizo AB de longitud L y rigidez a flexión EI soporta una carga uniforme de intensidad "w" a través de toda su longitud. Determinar la deflexión vertical y la pendiente en el extremo libre B de la viga. (4 puntos)



5. TEOREMA DE CASTIGLIANO. Resolver el pórtico mostrado en la figura, graficando sus diagramas de fuerza axial, fuerza cortante y momento flector. (4 puntos)

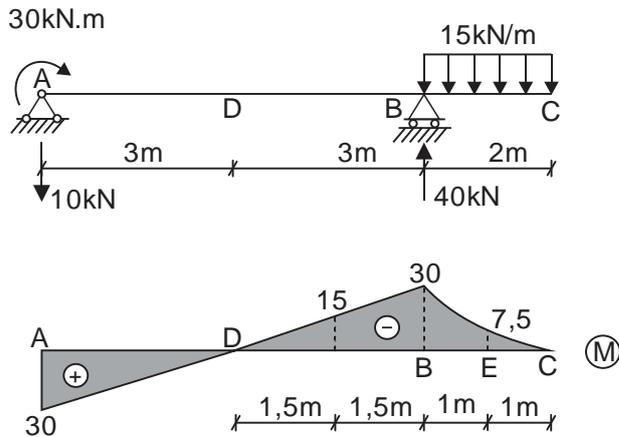


Monterrico, 01 de diciembre de 2011

## SOLUCIONARIO DE EXAMEN FINAL

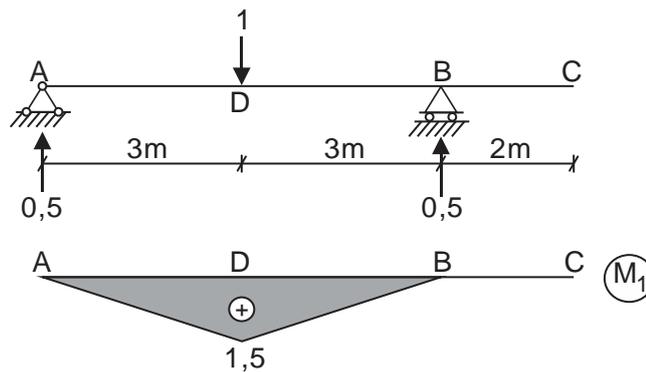
### CICLO 2011-02

1. Graficamos el diagrama de momento flector, debido a la acción de las cargas reales, tal como se muestra en la figura.



DEFLEXION EN "D":

Para determinar la deflexión en D, aplicamos una carga unitaria en dicho punto y graficamos su diagrama de momento flector.

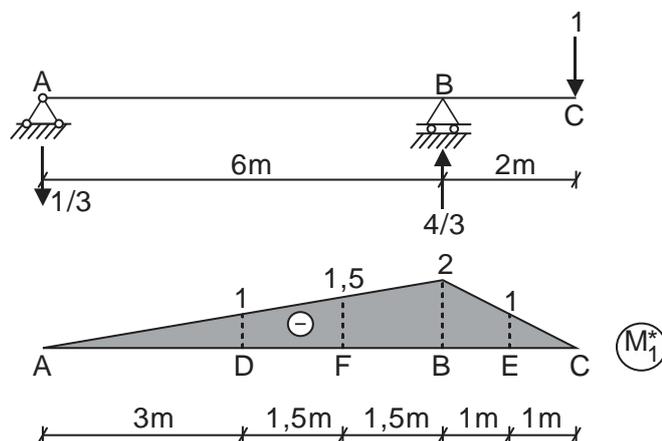


Luego:

$$y_D = \sum \int \frac{MM_1 dx}{EI} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 30 \cdot 0,5 - \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 30 \cdot 0,5 = 0$$

DEFLEXION EN "C":

Ahora, aplicamos una carga unitaria en C y graficamos su diagrama de momento flector.

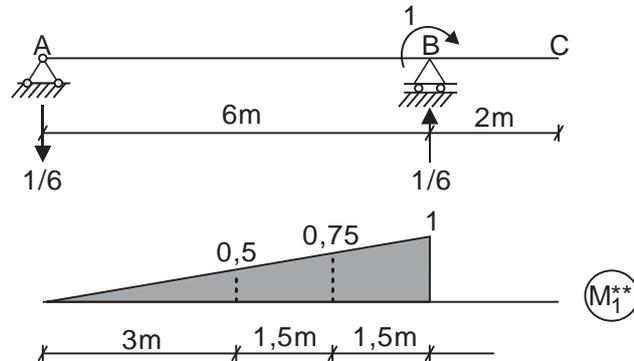


Determinamos la deflexión vertical en C

$$y_C = \sum \int \frac{MM_1^* dx}{EI} = -\frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 30 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 1\right) + \frac{3}{6EI} (4 \cdot 15 \cdot 1,5 + 30 \cdot 2) + \frac{2}{6EI} (30 \cdot 2 + 4 \cdot 7,5 \cdot 1) = \frac{90}{EI} \downarrow$$

PENDIENTE EN "B":

Aplicamos un momento unitario en el apoyo B y graficamos su diagrama de momento flector.

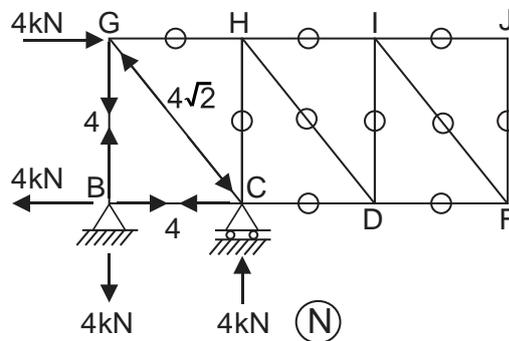


Calculamos la pendiente en B

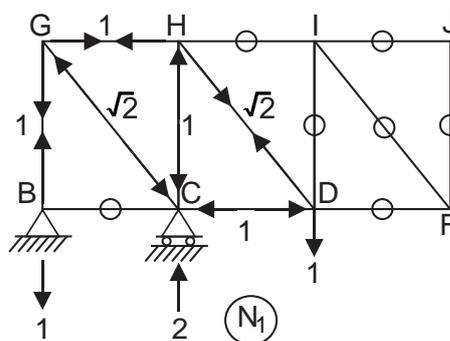
$$\theta_B = \sum \int \frac{MM_1^{**} dx}{EI} = -\frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 30 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 0,5\right) + \frac{3}{6EI} (4 \cdot 15 \cdot 0,75 + 30 \cdot 1) = \frac{30}{EI}$$

Como el signo es positivo, indica que la pendiente va en el mismo sentido que el momento unitario, es decir, en sentido horario.

- Determinamos las reacciones y fuerzas internas para la armadura sometida a la carga real, tal como se muestra en la figura.



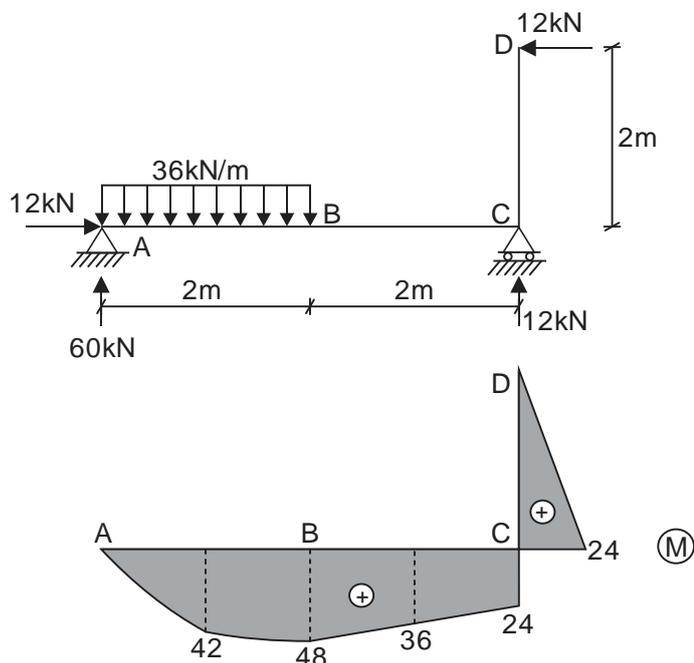
Ahora, aplicamos una carga vertical unitaria en el nudo D, determinando las reacciones en los apoyos y fuerzas internas en las barras de la armadura.



Calculamos la deflexión vertical en el nudo D

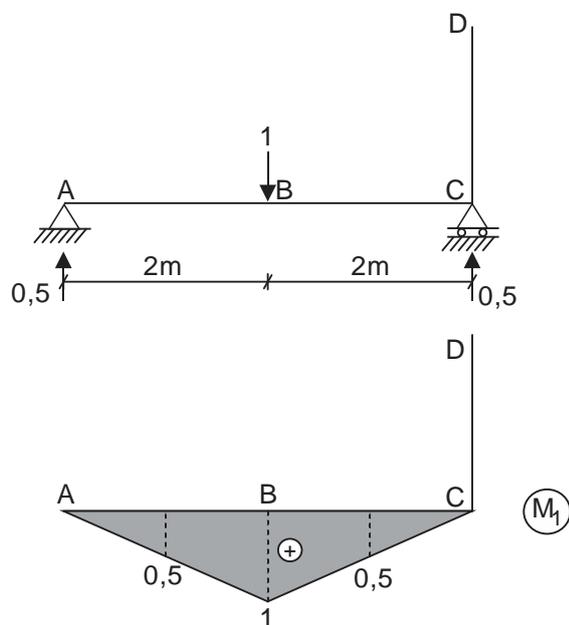
$$y_D = \sum \frac{NN_1L}{EA} = \frac{1}{EA} [(-4\sqrt{2})(-\sqrt{2})(4\sqrt{2}) + (4)(1)(4)] = \frac{61,25}{EA} \downarrow$$

3. Graficamos el diagrama de momento flector debido a la acción de las cargas reales, tal como se muestra en la figura.



DEFLEXION VERTICAL EN "B":

Aplicamos una carga vertical unitaria en B y graficamos el diagrama de momento flector debido a la acción de dicha carga.



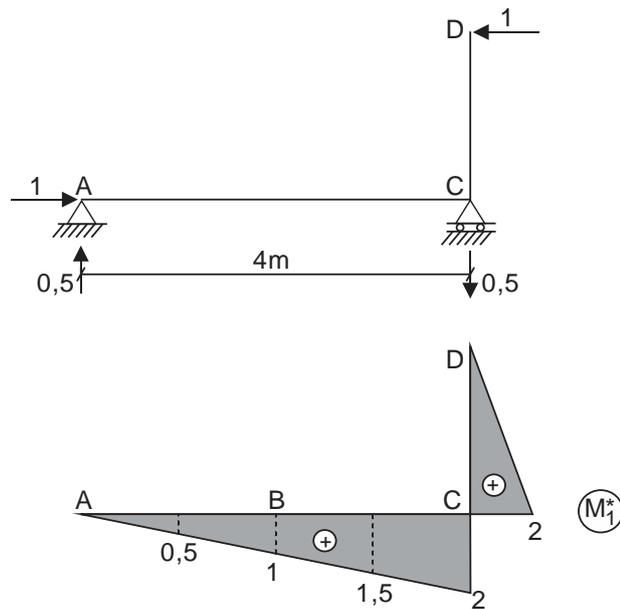
Determinamos la deflexión vertical en B

$$\delta_V^B = \sum \int \frac{MM_1 dx}{EI} = \frac{2}{6(2EI)} [4 \cdot 42 \cdot 0,5 + 48 \cdot 1] + \frac{2}{6(2EI)} [48 \cdot 1 + 4 \cdot 36 \cdot 0,5] = \frac{42}{EI} = \frac{42}{23 \cdot 10^6 \cdot 0,003125}$$

$$\delta_V^B = 5,84 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 0,584 \text{ mm} \downarrow$$

DESPLAZAMIENTO HORIZONTAL EN "D":

Aplicamos una carga horizontal unitaria en D y graficamos el diagrama de momento flector, debido a la acción de dicha carga.



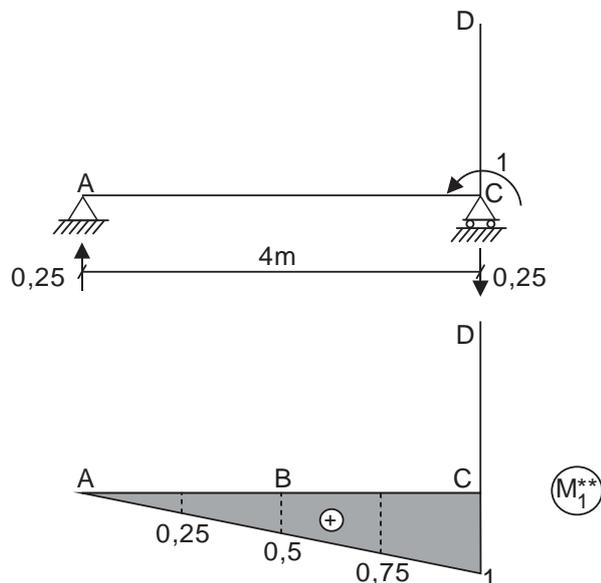
Calculamos el desplazamiento horizontal en D

$$\delta_H^D = \sum \int \frac{MM_1^* dx}{EI} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 24 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{2}{6(2EI)} [4 \cdot 42 \cdot 0,5 + 48 \cdot 1] + \frac{2}{6(2EI)} [48 \cdot 1 + 4 \cdot 36 \cdot 1,5 + 24 \cdot 2]$$

$$\delta_H^D = \frac{106}{EI} = \frac{106}{23 \cdot 10^6 \cdot 0,003125} = 1,474 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 1,474 \text{ mm} \leftarrow$$

PENDIENTE EN "C":

Ahora, aplicamos un momento unitario en el apoyo C y graficamos su diagrama de momento flector.



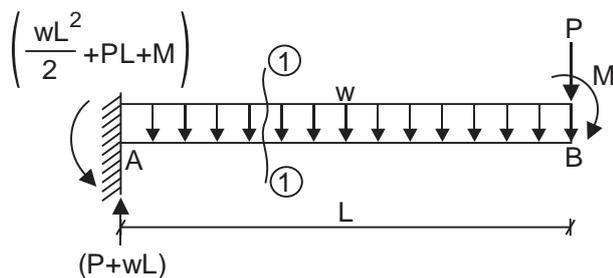
Determinamos la pendiente en C

$$\theta_C = \sum \frac{MM_1^{**} dx}{EI} = \frac{2}{6(2EI)} [4 \cdot 42 \cdot 0,25 + 48 \cdot 0,5] + \frac{2}{6(2EI)} [48 \cdot 0,5 + 4 \cdot 36 \cdot 0,75 + 24 \cdot 1] = \frac{37}{EI}$$

$$\theta_C = \frac{37}{23 \cdot 10^6 \cdot 0,003125} = 5,147 \cdot 10^{-4} \text{ rad} = 0,029^\circ$$

Como el signo es positivo, la pendiente va en el mismo sentido que el momento unitario, es decir, en sentido antihorario.

4. Aplicamos una carga vertical  $P$  y un momento  $M$  en el extremo libre de la viga, determinando sus reacciones en el empotramiento A, tal como se muestra en la figura.



TRAMO AB ( $0 \leq x \leq L$ )

$$M_I = (P + wL)x - \left( \frac{wL^2}{2} + PL + M \right) - \frac{wx^2}{2}$$

$$\frac{\partial M_I}{\partial P} = x - L$$

$$\frac{\partial M_I}{\partial M} = -1$$

Luego, determinamos la deflexión y pendiente en B

DEFLEXION EN "B":

$$y_B = \int_0^L M_I \left( \frac{\partial M_I}{\partial P} \right) \frac{dx}{EI} = \frac{1}{EI} \left[ \int_0^L \left( wLx - \frac{wL^2}{2} - \frac{wx^2}{2} \right) (x - L) dx \right] = \frac{wL^4}{8EI} \downarrow$$

PENDIENTE EN "B":

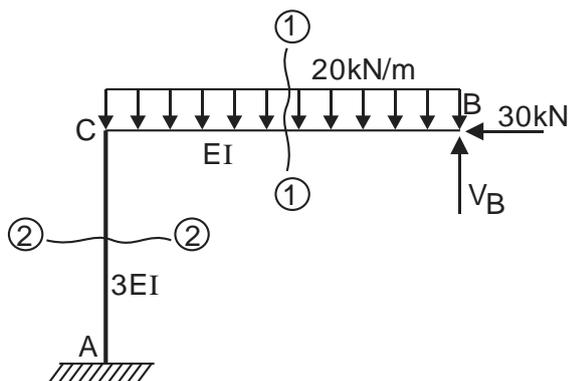
$$\theta_B = \int_0^L M_I \left( \frac{\partial M_I}{\partial M} \right) \frac{dx}{EI} = \frac{1}{EI} \left[ \int_0^L \left( wLx - \frac{wL^2}{2} - \frac{wx^2}{2} \right) (-1) dx \right] = \frac{wL^3}{6EI}$$

El signo positivo indica que la pendiente va en el mismo sentido que el momento  $M$ , es decir, en sentido horario.

5. Determinamos el grado de indeterminación del sistema.

$$G.I. = 3C - A = 3(1) - 2 = 1$$

Reemplazamos el apoyo B por su reacción  $V_B$ , tal como se muestra en la figura, analizando los tramos 1-1 y 2-2



TRAMO BC ( $0 \leq x \leq 3$ )

$$M_I = V_B x - 10x^2$$

$$\frac{\partial M_I}{\partial V_B} = x$$

TRAMO CA ( $0 \leq y \leq 2$ )

$$M_{II} = 3V_B + 30y - 90$$

$$\frac{\partial M_{II}}{\partial V_B} = 3$$

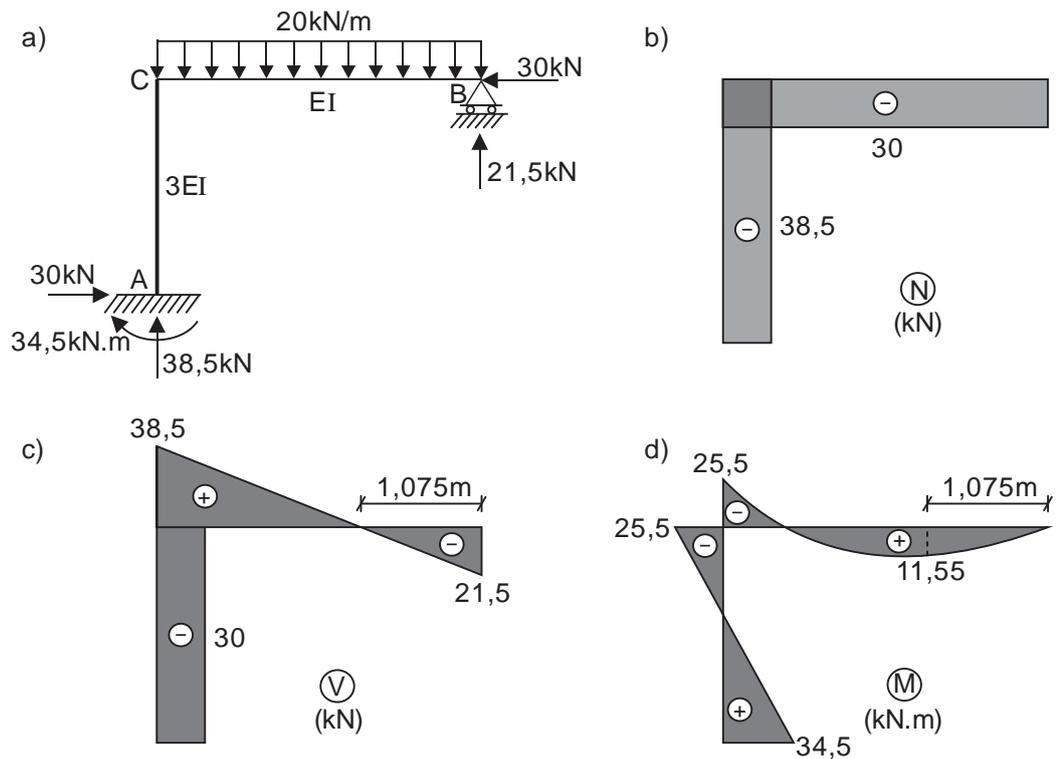
Como:

$$y_B = 0 \Rightarrow \frac{1}{EI} \left[ \int_0^3 (V_B x - 10x^2)(x) dx + \frac{1}{3EI} \int_0^2 (3V_B + 30y - 90)(3) dy \right] = 0$$

De donde:

$$V_B = 21,5 \text{ kN} \uparrow$$

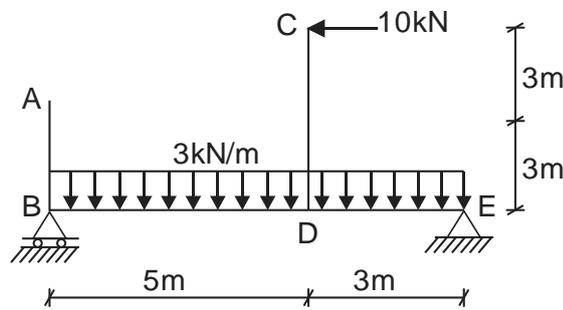
Con el valor obtenido, determinamos las reacciones en los apoyos y graficamos los diagramas de fuerza axial, fuerza cortante y momento flector, los cuales se muestran en la siguiente figura.



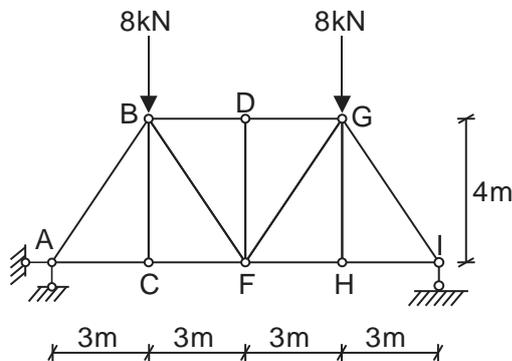
**MECANICA DE MATERIALES (CI80)**  
**EXAMEN FINAL**  
**Ciclo 2012-01**

**Profesor : Ph.D. Genner Villarreal Castro**  
**Sección : CI51**  
**Duración : 170 minutos**

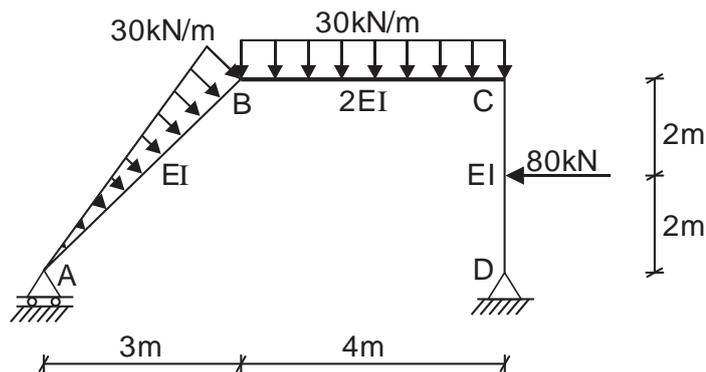
1. METODO DEL TRABAJO VIRTUAL. Determinar el acercamiento horizontal mutuo entre A y C, considerando que el elemento horizontal tiene rigidez  $5EI$  y los elementos verticales tienen rigidez  $4EI$  (4 puntos)



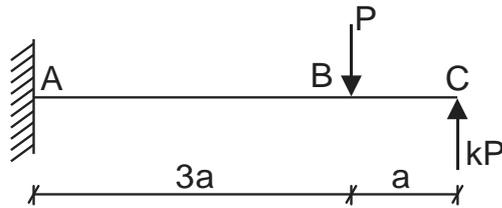
2. METODO DEL TRABAJO VIRTUAL. Determinar la deflexión vertical en F, considerando que la rigidez axial  $EA$  es igual para todas las barras de la armadura. (3 puntos)



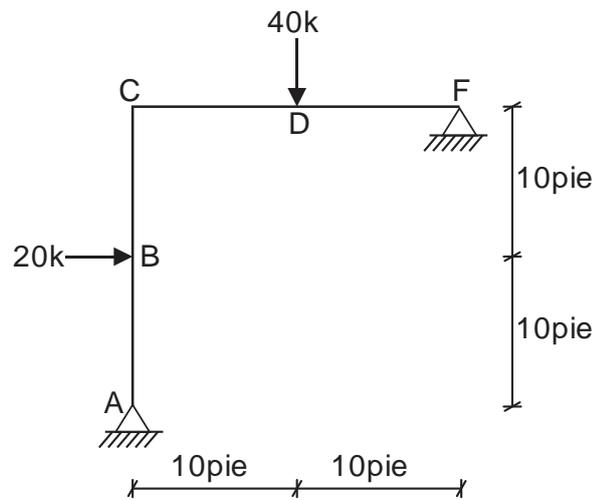
3. METODO DEL TRABAJO VIRTUAL. Determinar el desplazamiento horizontal del nudo C y la pendiente en el apoyo A, si  $E = 23000\text{MPa}$  y la columna CD es de  $30\text{cm} \times 30\text{cm}$  (5 puntos)



4. TEOREMA DE CASTIGLIANO. Para la viga en voladizo de sección constante mostrada en la figura, determinar el valor del coeficiente "k", si la deflexión vertical en el extremo libre C de la viga es cero. (4 puntos)



5. TEOREMA DE CASTIGLIANO. Resolver el pórtico mostrado en la figura, graficando sus diagramas de fuerza axial, fuerza cortante y momento flector. Considerar que la rigidez en flexión  $EI$  es constante para toda la estructura. (4 puntos)

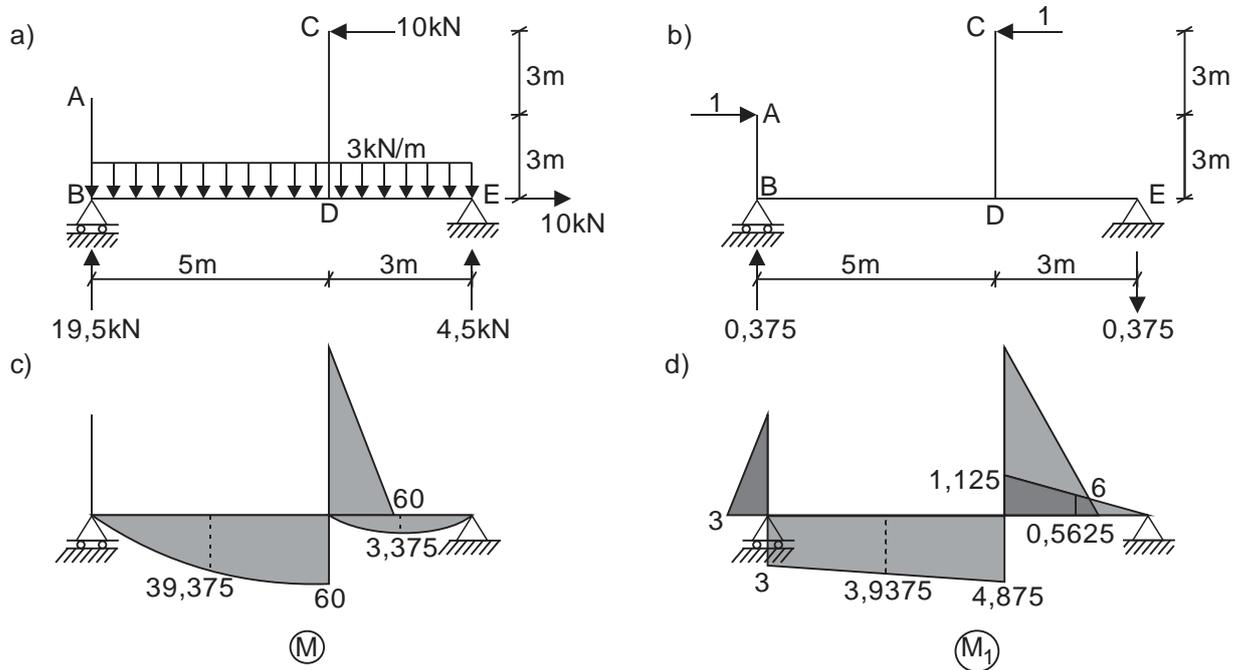


Monterrico, 05 de julio de 2012

## SOLUCIONARIO DE EXAMEN FINAL

### CICLO 2012-01

1. Calculamos las reacciones en los apoyos y graficamos los diagramas  $M$  y  $M_1$ , debido a las cargas reales y cargas unitarias, respectivamente.

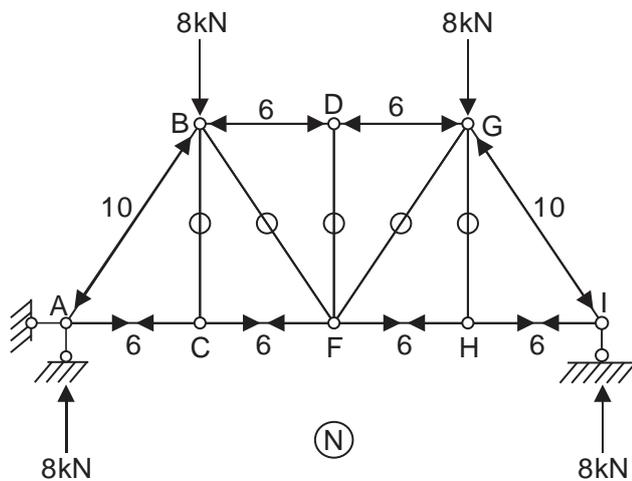


Determinamos el acercamiento horizontal entre los puntos A y C

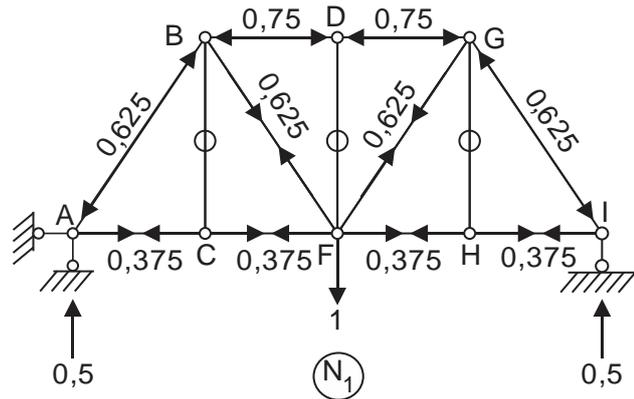
$$\Delta_{A-C}^H = \frac{1}{4EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 + \frac{5}{6(5EI)} [4 \cdot 39,375 \cdot 3,9375 + 60 \cdot 4,875] - \frac{3}{6(5EI)} [4 \cdot 3,375 \cdot 0,5625]$$

$$\Delta_{A-C}^H = \frac{331,25}{EI} \text{ (m)}$$

2. Determinamos las reacciones y fuerzas internas para la armadura sometida a las cargas reales, tal como se muestra en la figura.



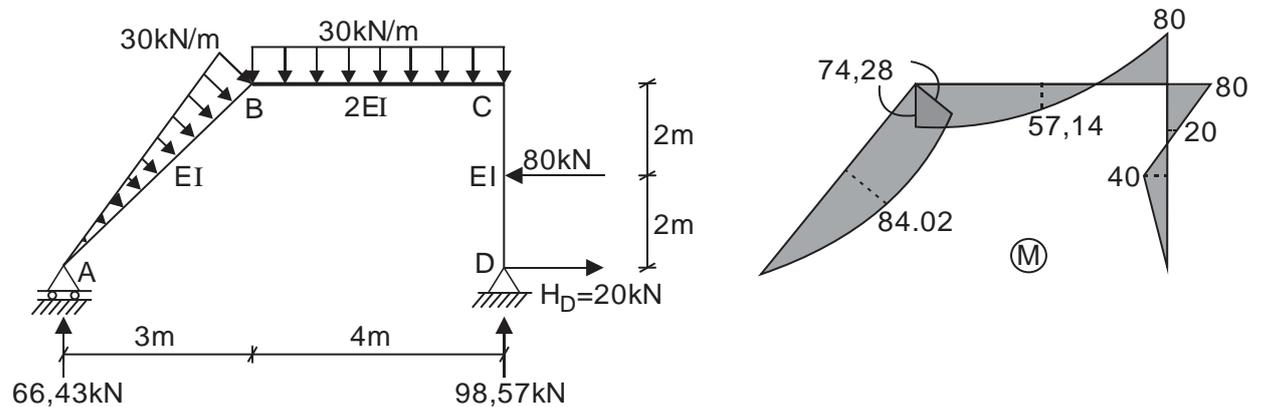
Ahora, aplicamos una carga vertical unitaria en el nudo F, determinando las reacciones en los apoyos y fuerzas internas en las barras de la armadura.



Calculamos la deflexión vertical en el nudo F

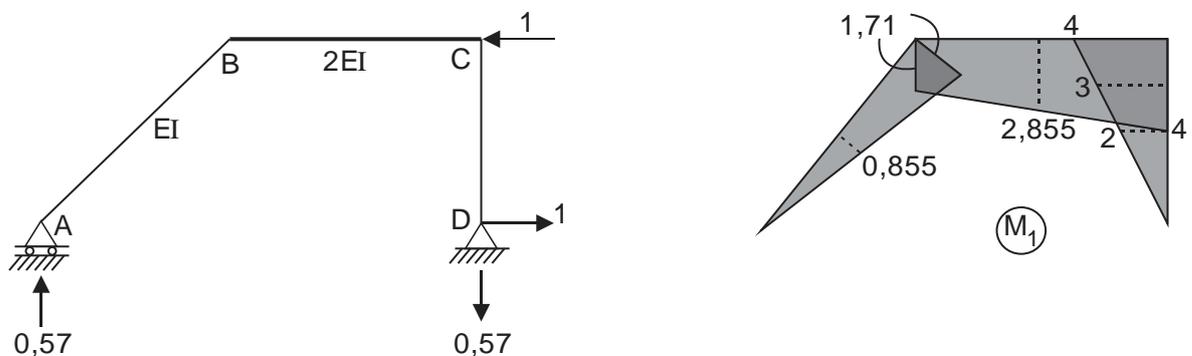
$$y_F = \sum \frac{NN_1L}{EA} = \frac{1}{EA} [(-10)(-0,625)(5)(2) + (-6)(-0,75)(3)(2) + (0,375)(6)(3)(4)] = \frac{116,5}{EA} \downarrow$$

3. Graficamos el diagrama de momento flector debido a la acción de las cargas reales, tal como se muestra en la figura.



DESPLAZAMIENTO HORIZONTAL EN "C":

Aplicamos una carga horizontal unitaria en C y graficamos el diagrama de momento flector debido a la acción de dicha carga.



Nótese, que en los diagramas no colocamos los valores máximos, sino los valores que son necesarios en el centro de cada tramo, con la finalidad de aplicar el método de Simpson.

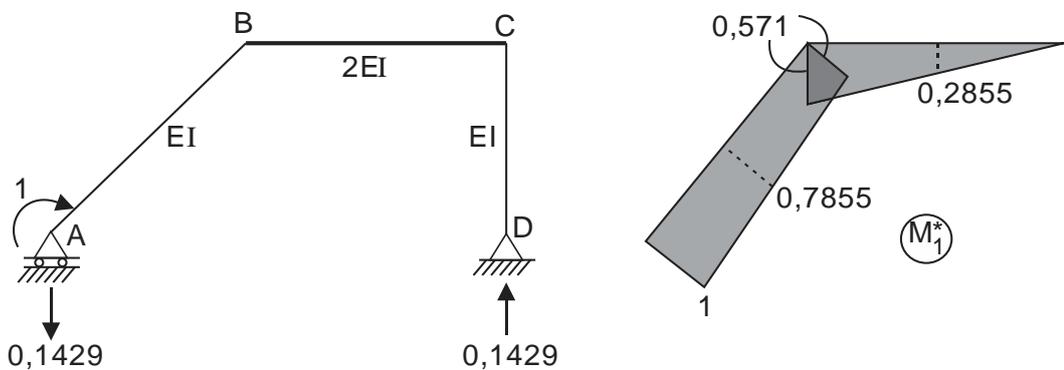
Determinamos el desplazamiento horizontal en C

$$\delta_H^C = \sum \int \frac{MM_1 dx}{EI} = \frac{5}{6EI} [4.84,02 \cdot 0,855 + 74,28 \cdot 1,71] + \frac{4}{6(2EI)} [74,28 \cdot 1,71 + 4.57,14 \cdot 2,855 - 80.4] + \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2.40 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{2}{6EI} [-80.4 - 4.20 \cdot 3 + 40.2]$$

$$\delta_H^C = \frac{391,825}{EI} = \frac{391,825}{23 \cdot 10^6 \cdot (0,3 \cdot 0,3^3 / 12)} = 0,025\text{m} = 25\text{mm} \leftarrow$$

PENDIENTE EN "A":

Aplicamos un momento unitario en A y graficamos el diagrama de momento flector debido a la acción de dicho momento.



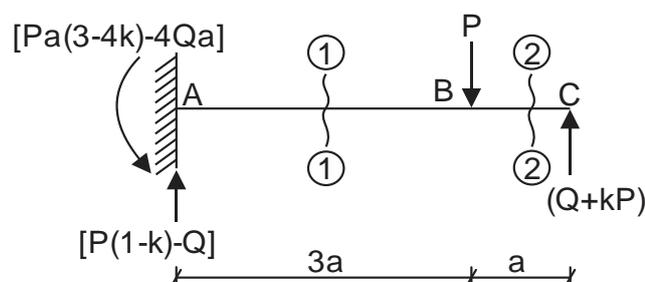
Calculamos la pendiente en A

$$\theta_A = \sum \int \frac{MM_1^* dx}{EI} = \frac{5}{6EI} [4.84,02 \cdot 0,7855 + 74,28 \cdot 0,571] + \frac{4}{6(2EI)} [74,28 \cdot 0,571 + 4.57,14 \cdot 0,2855]$$

$$\theta_A = \frac{291,226}{EI} = \frac{291,226}{23 \cdot 10^6 \cdot (0,3 \cdot 0,3^3 / 12)} = 0,0187\text{rad} = 1,07^\circ$$

Como el signo es positivo, la pendiente va en el mismo sentido que el momento unitario, es decir, en sentido horario.

- Aplicamos una carga vertical Q en el extremo libre de la viga, determinando sus reacciones en el empotramiento A, tal como se muestra en la figura.



TRAMO AB ( $0 \leq x \leq 3a$ )

$$M_I = [P(1-k) - Q]x - [Pa(3-4k) - 4Qa]$$

$$\frac{\partial M_I}{\partial Q} = -x + 4a$$

TRAMO BC ( $3a \leq x \leq 4a$ )

$$M_{II} = [P(1-k) - Q]x - [Pa(3-4k) - 4Qa] - P(x-3a)$$

$$\frac{\partial M_{II}}{\partial Q} = -x + 4a$$

Luego, por condición del problema, se tendrá:

$$y_C = \int_0^{3a} M_I \left( \frac{\partial M_I}{\partial Q} \right) \frac{dx}{EI} + \int_{3a}^{4a} M_{II} \left( \frac{\partial M_{II}}{\partial Q} \right) \frac{dx}{EI} = 0$$

$$y_C = \frac{1}{EI} \left\{ \int_0^{3a} [P(1-k)x - Pa(3-4k)](-x+4a)dx + \int_{3a}^{4a} [P(1-k)x - Pa(3-4k) - P(x-3a)](-x+4a)dx \right\} = 0$$

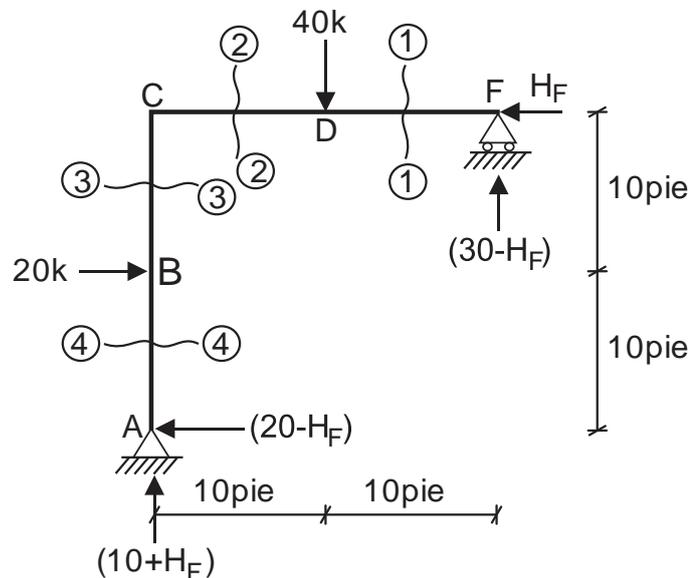
Efectuando cálculos se obtendrá:

$$21,333ka^3 - 13,5a^3 = 0 \Rightarrow k = 0,6328$$

5. Determinamos el grado de indeterminación del sistema.

$$G.I. = 3C - A = 3(1) - 2 = 1$$

Convertimos el apoyo fijo F en móvil, reemplazando su componente horizontal por  $H_F$  y calculando las reacciones restantes en función de  $H_F$ , tal como se muestra en la figura, luego analizamos los tramos 1-1, 2-2, 3-3 y 4-4



TRAMO FD ( $0 \leq x \leq 10$ )

$$M_I = (30 - H_F)x$$

$$\frac{\partial M_I}{\partial H_F} = -x$$

TRAMO DC ( $10 \leq x \leq 20$ )

$$M_{II} = (30 - H_F)x - 40(x - 10)$$

$$\frac{\partial M_{II}}{\partial H_F} = -x$$

TRAMO CB ( $0 \leq y \leq 10$ )

$$M_{III} = (30 - H_F).20 + H_F y - 400$$

$$\frac{\partial M_{III}}{\partial H_F} = -20 + y$$

TRAMO BA ( $10 \leq y \leq 20$ )

$$M_{IV} = (30 - H_F).20 + H_F y - 400 - 20(y - 10)$$

$$\frac{\partial M_{IV}}{\partial H_F} = -20 + y$$

Como:

$$\delta_H^F = \int_0^{10} M_I \left( \frac{\partial M_I}{\partial H_F} \right) \frac{dx}{EI} + \int_{10}^{20} M_{II} \left( \frac{\partial M_{II}}{\partial H_F} \right) \frac{dx}{EI} + \int_0^{10} M_{III} \left( \frac{\partial M_{III}}{\partial H_F} \right) \frac{dy}{EI} + \int_{10}^{20} M_{IV} \left( \frac{\partial M_{IV}}{\partial H_F} \right) \frac{dy}{EI} = 0$$

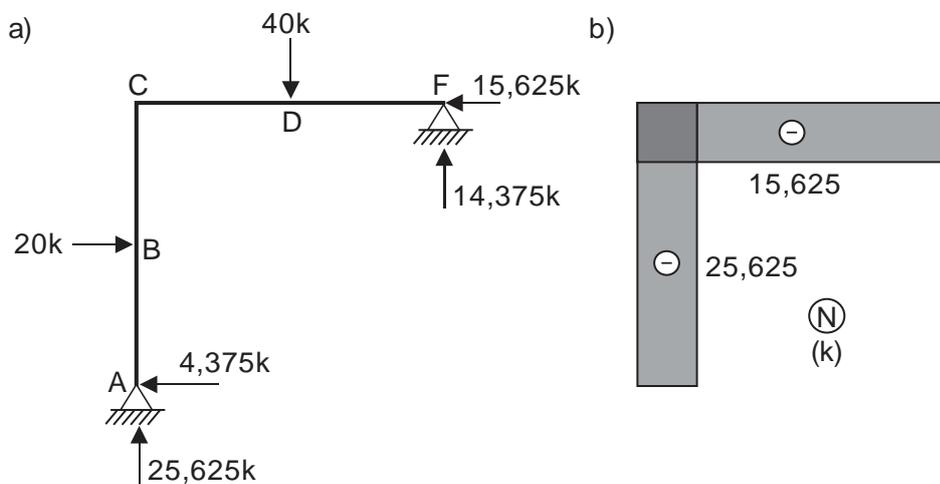
Reemplazamos valores:

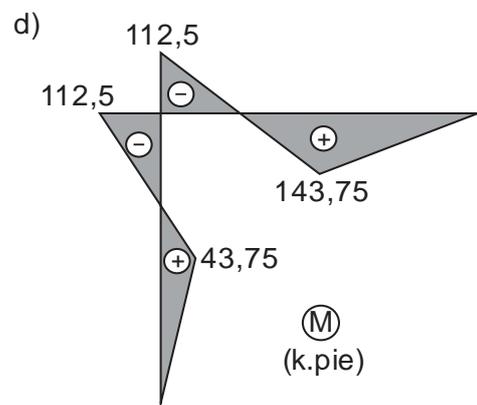
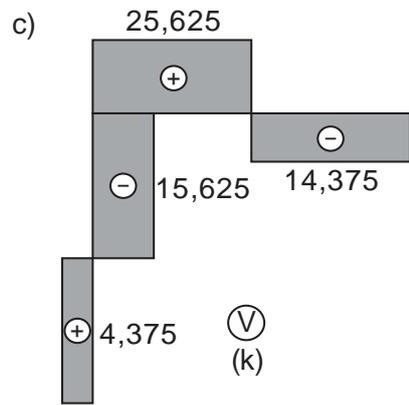
$$\frac{1}{EI} \left\{ \int_0^{10} [(30 - H_F)x](-x)dx + \int_{10}^{20} [(30 - H_F)x - 40(x - 10)](-x)dx + \int_0^{10} [(30 - H_F).20 + H_F y - 400](-20 + y)dy + \int_{10}^{20} [(30 - H_F).20 + H_F y - 400 - 20(y - 10)](-20 + y)dy \right\} = 0$$

De donde:

$$H_F = 15,625k \leftarrow$$

Con el valor obtenido, determinamos las reacciones en los apoyos y graficamos los diagramas de fuerza axial, fuerza cortante y momento flector, tal como se muestra en la figura.

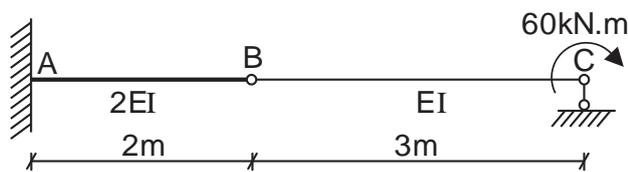




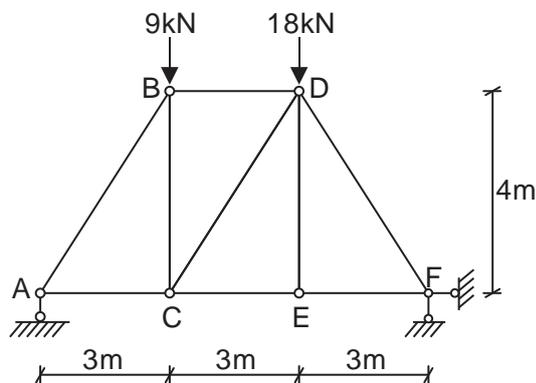
**MECANICA DE MATERIALES (CI80)**  
**EXAMEN FINAL**  
**Ciclo 2012-02**

**Profesor** : Ph.D. Genner Villarreal Castro  
**Sección** : CI51  
**Duración** : 170 minutos

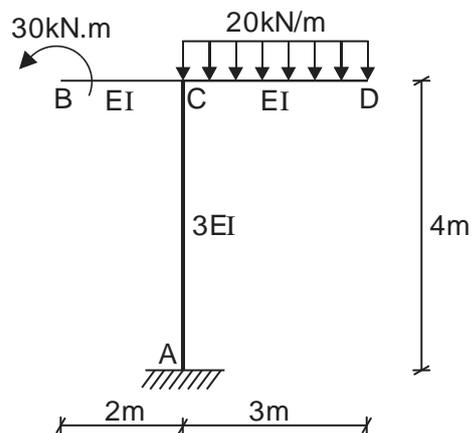
1. METODO DEL TRABAJO VIRTUAL. Para la viga mostrada en la figura, determinar la deflexión vertical y el ángulo de giro mutuo en la rótula B (4 puntos)



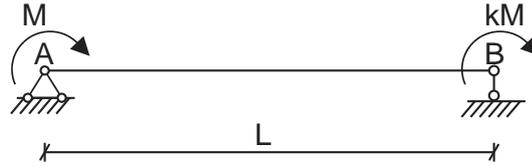
2. METODO DEL TRABAJO VIRTUAL. Determinar el ángulo de giro de la barra DE de la armadura mostrada en la figura, considerando que su rigidez axial EA es igual para todas sus barras. (4 puntos)



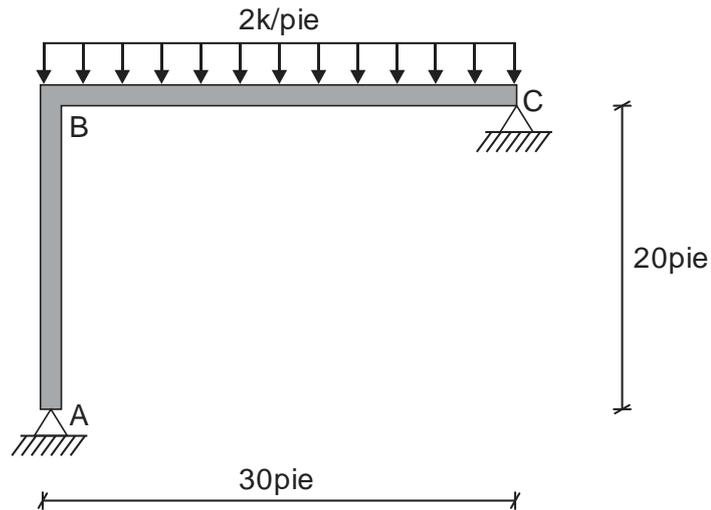
3. METODO DEL TRABAJO VIRTUAL. Para el pórtico mostrado en la figura, determinar la pendiente en C, la deflexión vertical en B y el desplazamiento horizontal en D (4 puntos)



4. TEOREMA DE CASTIGLIANO. Para la viga simplemente apoyada de sección constante mostrada en la figura, determinar el valor del coeficiente "k", si la pendiente en A es cero. (4 puntos)



5. TEOREMA DE CASTIGLIANO. Resolver el pórtico mostrado en la figura, graficando sus diagramas de fuerza axial, fuerza cortante y momento flector. Considerar que la rigidez en flexión  $EI$  es constante para toda la estructura. (4 puntos)

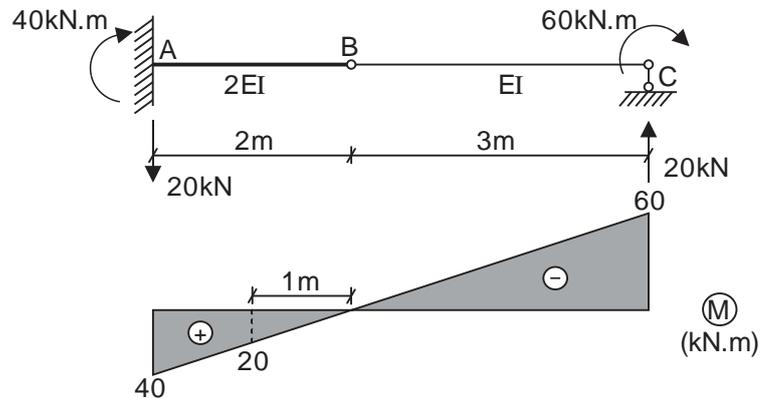


Monterrico, 27 de noviembre de 2012

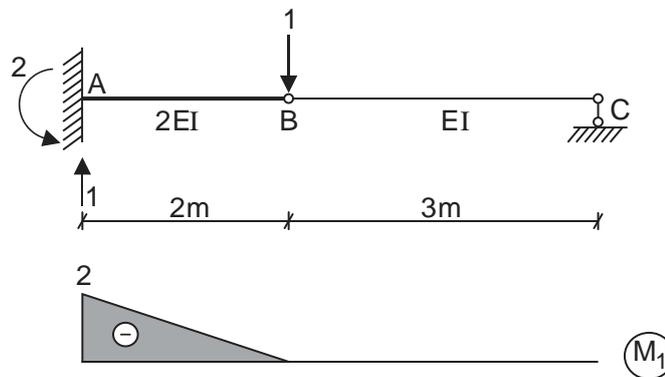
## SOLUCIONARIO DE EXAMEN FINAL

### CICLO 2012-02

1. Calculamos las reacciones en los apoyos y graficamos el diagrama  $M$ , debido a la acción de la carga real.



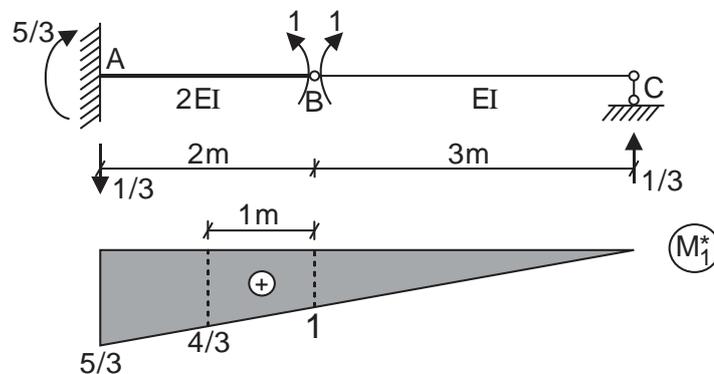
Aplicamos la carga unitaria en la rótula B, determinando las reacciones en los apoyos y graficando el diagrama  $M_1$



DEFLEXION EN "B":

$$y_B = -\frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 2 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 2\right) = -\frac{26,67}{EI} \uparrow$$

Ahora, aplicamos momentos unitarios mutuos en B, determinando las reacciones en los apoyos y graficando el diagrama  $M_1^*$

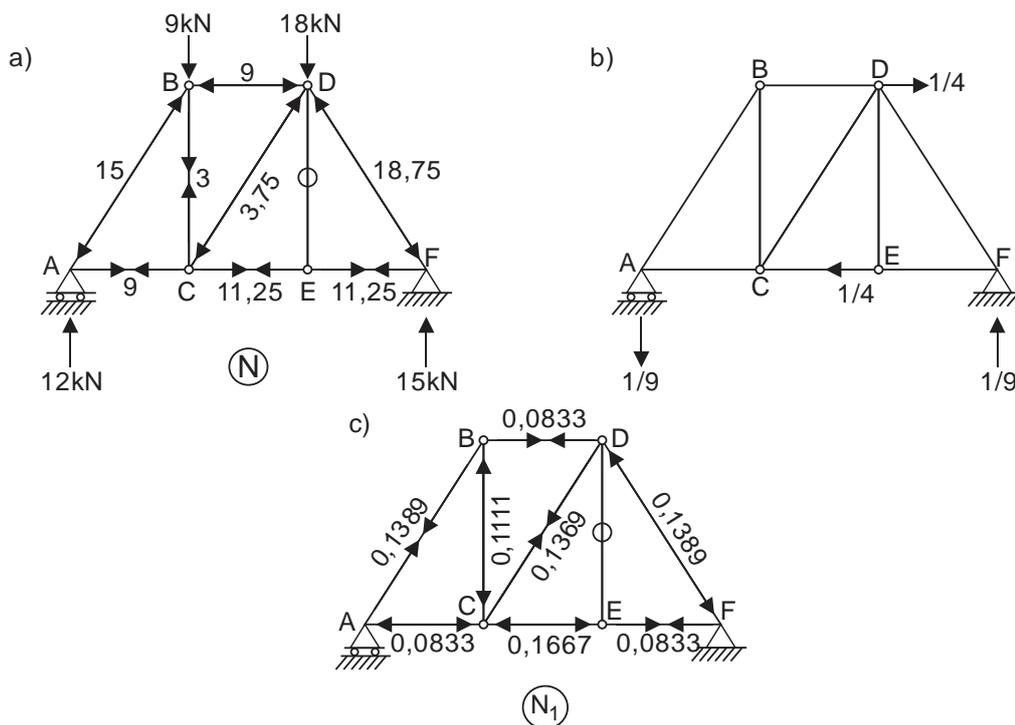


ANGULO DE GIRO MUTUO EN "B":

$$\theta_B = \frac{2}{6(2EI)} \left[ 40 \cdot \frac{5}{3} + 4 \cdot 20 \cdot \frac{4}{3} \right] - \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 3 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 1\right) = -\frac{1,11}{EI}$$

El signo negativo, indica que va en sentido opuesto a los momentos unitarios.

2. Determinamos las fuerzas internas en la armadura ante la carga real (fig. a), luego, ante el momento unitario (fig. c), aplicando cargas  $P = M/L_{DE} = 1/4$  en los nudos D y E (fig. b)

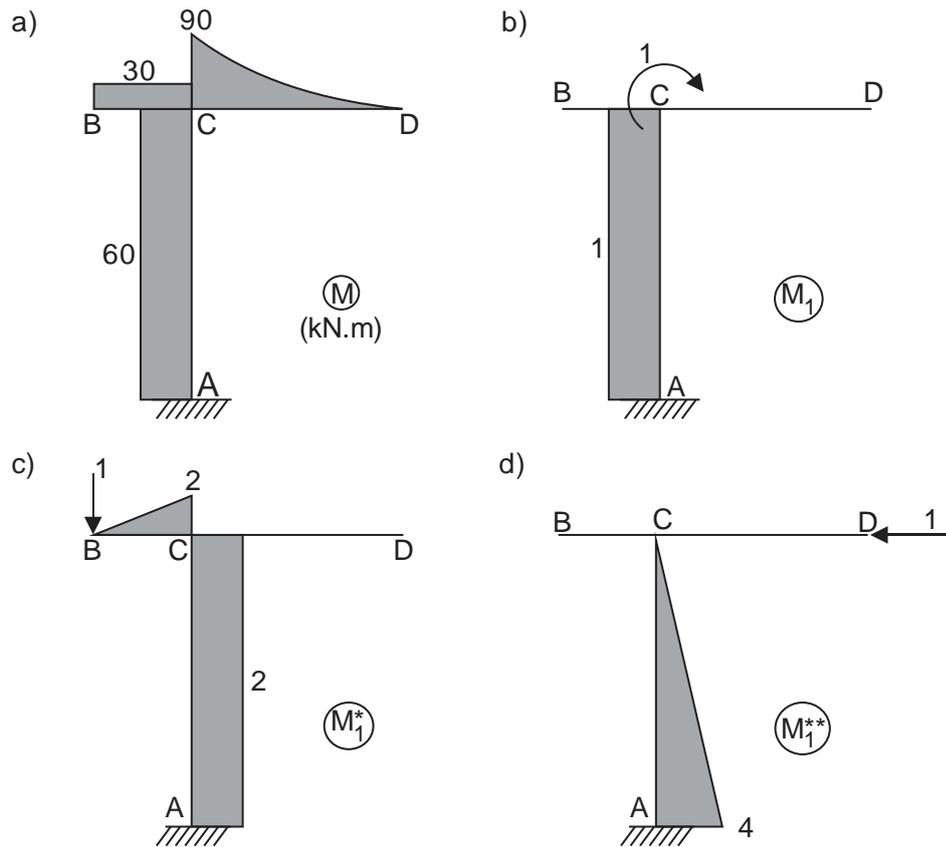


BARRA	L (m)	N	N <sub>1</sub>	$\frac{NN_1L}{EA}$
AB	5	-15	0,1389	$-\frac{10,4175}{EA}$
AC	3	9	-0,0833	$-\frac{2,2491}{EA}$
BC	4	3	-0,1111	$-\frac{1,3332}{EA}$
BD	3	-9	0,0833	$-\frac{2,2491}{EA}$
CD	5	-3,75	0,1389	$-\frac{2,6044}{EA}$
CE	3	11,25	-0,1667	$-\frac{5,6261}{EA}$
DE	4	0	0	0
DF	5	-18,75	-0,1389	$\frac{13,0219}{EA}$
EF	3	11,25	0,0833	$\frac{2,8114}{EA}$

$$\theta_{DE} = -\frac{8,6461}{EA} \text{ (rad)}$$

El signo negativo, indica que el giro de la barra DE es en sentido opuesto, es decir, antihorario.

3. Graficamos el diagrama de momento flector debido a las cargas reales (fig. a), momento unitario en C (fig. b), carga vertical unitaria en B (fig. c) y carga unitaria horizontal en D (fig. d)



PENDIENTE EN "C":

$$\theta_c = \sum \int \frac{MM_1 dx}{EI} = \frac{1}{3EI} \cdot 60 \cdot 4 \cdot 1 = \frac{80}{EI}$$

El signo positivo, indica que va en el mismo sentido que el momento unitario, es decir, en sentido horario.

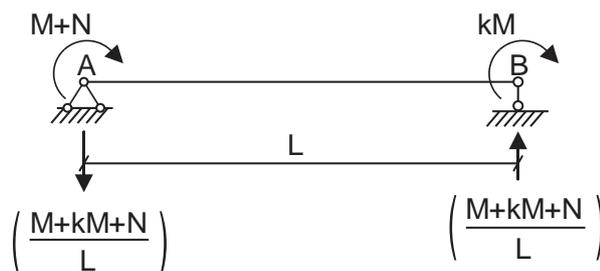
DEFLEXION VERTICAL EN "B":

$$\delta_v^B = \sum \int \frac{MM_1^* dx}{EI} = \frac{1}{EI} \cdot 30 \cdot 2 \cdot 1 - \frac{1}{3EI} \cdot 60 \cdot 4 \cdot 2 = -\frac{100}{EI} \uparrow$$

DESPLAZAMIENTO HORIZONTAL EN "D":

$$\delta_H^D = \sum \int \frac{MM_1^{**} dx}{EI} = -\frac{1}{3EI} \cdot 60 \cdot 4 \cdot 2 = -\frac{160}{EI} \rightarrow$$

4. Aplicamos un momento N en el apoyo A, determinando sus reacciones en los apoyos A y B



TRAMO AB ( $0 \leq x \leq L$ )

$$M_I = -\left(\frac{M + kM + N}{L}\right) \cdot x + (M + N)$$

$$\frac{\partial M_I}{\partial N} = -\frac{x}{L} + 1$$

Luego, por condición del problema, se tendrá:

$$\theta_A = \int_0^L M_I \left(\frac{\partial M_I}{\partial N}\right) \frac{dx}{EI} = 0$$

$$\theta_A = \frac{1}{EI} \left\{ \int_0^L \left[ -\left(\frac{M + kM}{L}\right) \cdot x + M \right] \left[ -\frac{x}{L} + 1 \right] dx \right\} = 0$$

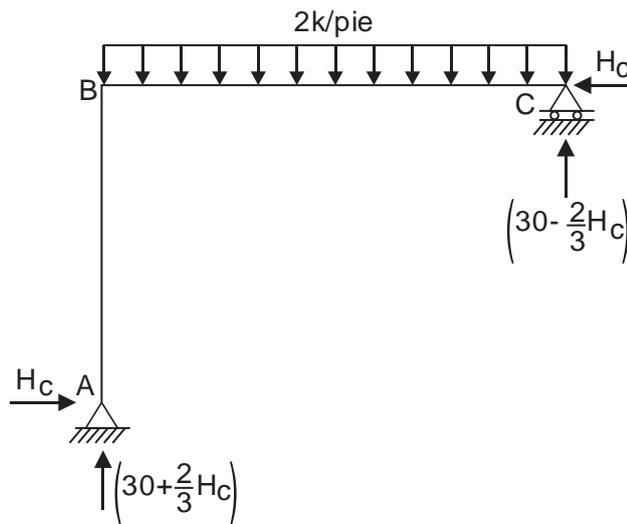
Efectuando cálculos se obtendrá:

$$2ML - kML = 0 \Rightarrow k = 2$$

5. Determinamos el grado de indeterminación del sistema.

$$G.I. = 3C - A = 3(1) - 2 = 1$$

Convertimos el apoyo fijo C en móvil, reemplazando su componente horizontal por  $H_C$  y calculando las reacciones restantes en función de  $H_C$ , tal como se muestra en la figura.



TRAMO AB ( $0 \leq y \leq 20$ )

$$M_I = -H_C y$$

$$\frac{\partial M_I}{\partial H_C} = -y$$

TRAMO BC ( $0 \leq x \leq 30$ )

$$M_{II} = \left(30 + \frac{2}{3} H_C\right) \cdot x - 20H_C - x^2$$

$$\frac{\partial M_{II}}{\partial H_C} = \frac{2x}{3} - 20$$

Como:

$$\delta_H^C = \int_0^{20} M_I \left( \frac{\partial M_I}{\partial H_C} \right) \frac{dy}{EI} + \int_0^{30} M_{II} \left( \frac{\partial M_{II}}{\partial H_C} \right) \frac{dx}{EI} = 0$$

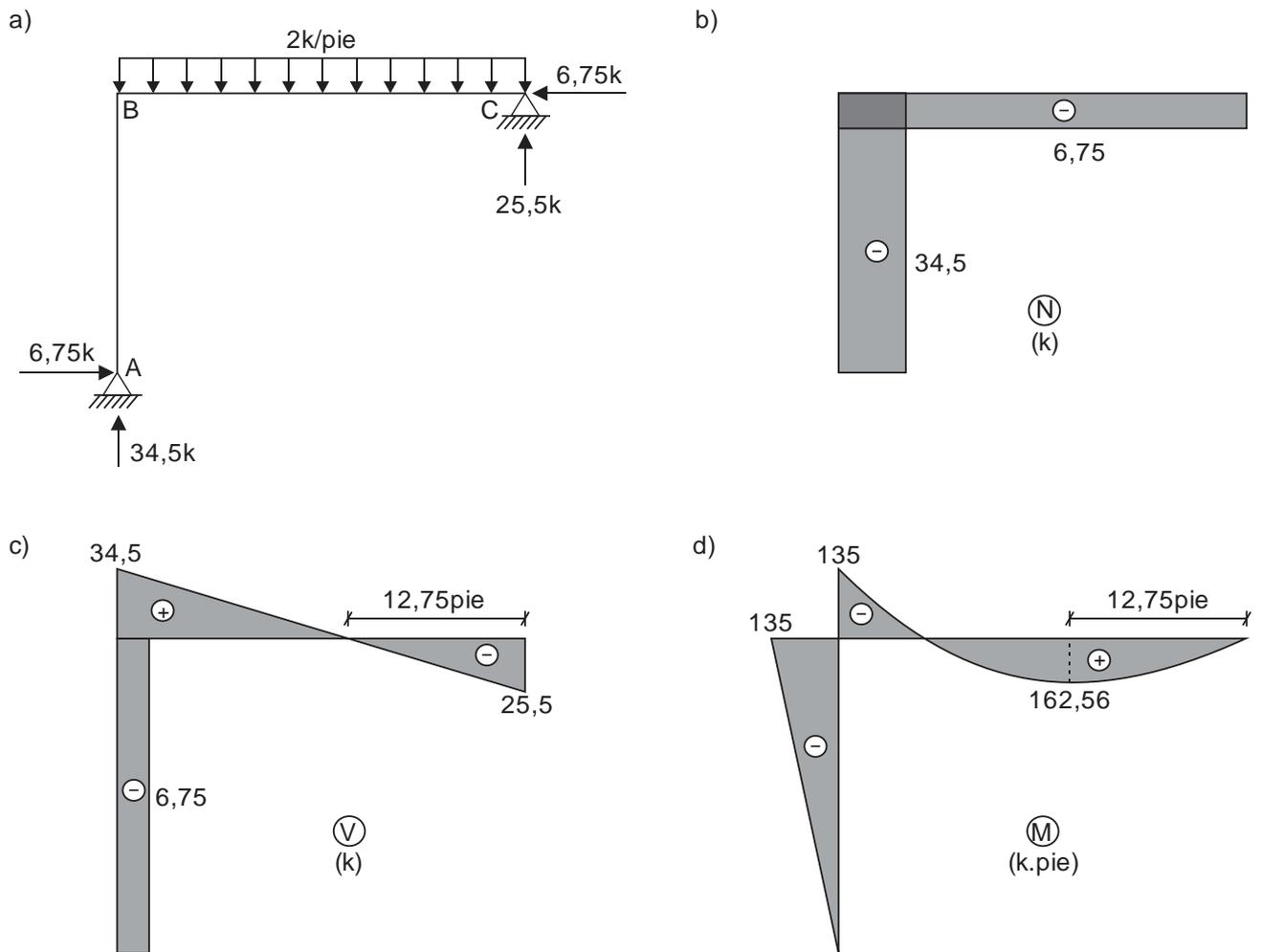
Reemplazamos valores:

$$\frac{1}{EI} \left\{ \int_0^{20} (-H_C y)(-y) dy + \int_0^{30} \left[ \left( 30 + \frac{2}{3} H_C \right) \cdot x - 20 H_C - x^2 \right] \left[ \frac{2x}{3} - 20 \right] dx \right\} = 0$$

De donde:

$$H_C = 6,75k \leftarrow$$

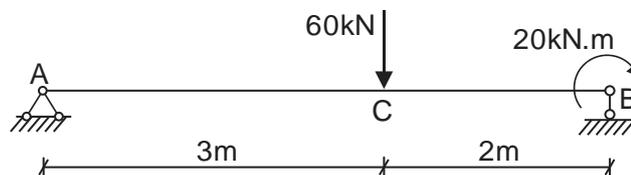
Con el valor obtenido, determinamos las reacciones en los apoyos y graficamos los diagramas de fuerza axial, fuerza cortante y momento flector, tal como se muestra en la figura.



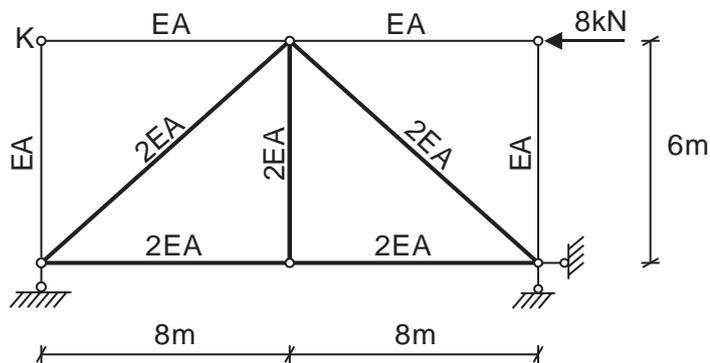
**MECANICA DE MATERIALES (CI80)**  
**EXAMEN FINAL**  
**Ciclo 2013-01**

**Profesor : Ph.D. Genner Villarreal Castro**  
**Sección : CI51**  
**Duración : 170 minutos**

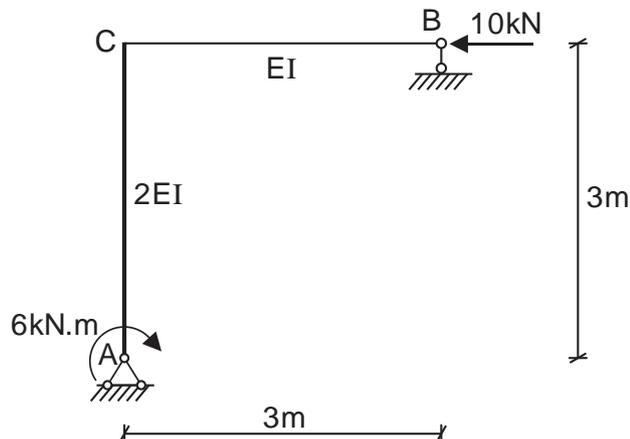
1. METODO DEL TRABAJO VIRTUAL. Para la viga de sección constante mostrada en la figura, determinar la deflexión en C y las pendientes en los apoyos A y B (4 puntos)



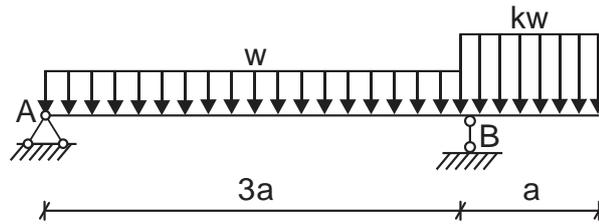
2. METODO DEL TRABAJO VIRTUAL. Para la armadura mostrada en la figura, determinar el desplazamiento horizontal del nudo K (3 puntos)



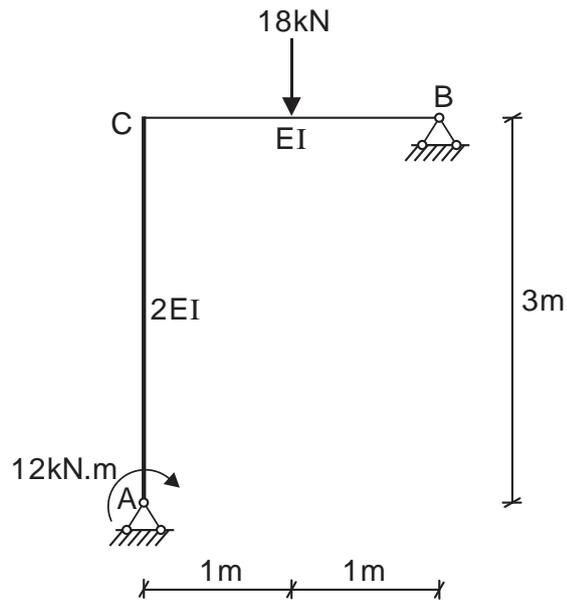
3. METODO DEL TRABAJO VIRTUAL. Para el pórtico mostrado en la figura, determinar el desplazamiento horizontal del apoyo B y la pendiente en el apoyo A (4 puntos)



4. TEOREMA DE CASTIGLIANO. Para la viga de sección constante mostrada en la figura, determinar el valor del coeficiente "k", si la pendiente en A es cero. (4 puntos)



5. TEOREMA DE CASTIGLIANO. Resolver el pórtico mostrado en la figura, graficando sus diagramas de fuerza axial, fuerza cortante y momento flector. (5 puntos)

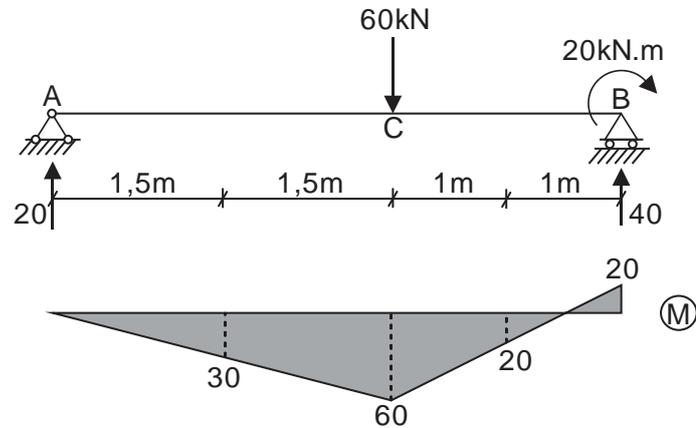


Monterrico, 03 de julio de 2013

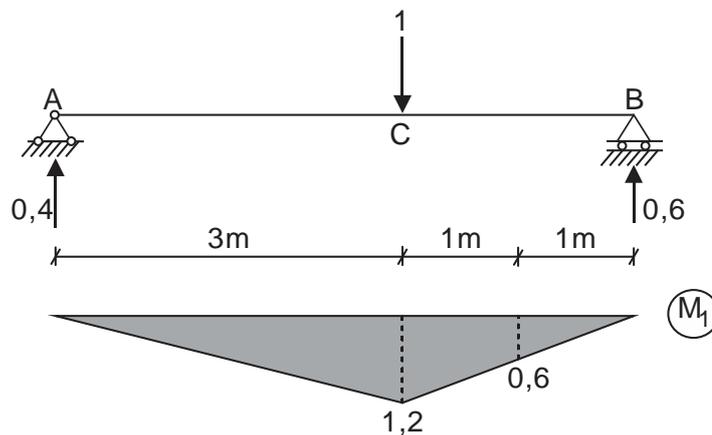
## SOLUCIONARIO DE EXAMEN FINAL

### CICLO 2013-01

1. Calculamos las reacciones en los apoyos y graficamos el diagrama  $M$ , debido a la acción de las cargas reales.



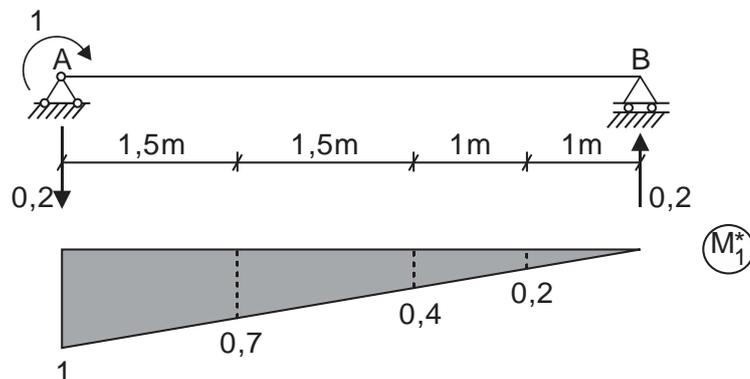
Aplicamos la carga unitaria en C, determinando las reacciones en los apoyos y graficando el diagrama  $M_1$



DEFLEXION EN "C":

$$y_C = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 60 \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 1,2 \right) + \frac{2}{6EI} (60 \cdot 1,2 + 4 \cdot 20 \cdot 0,6) = \frac{112}{EI} \downarrow$$

Luego, aplicamos momento unitario en el apoyo A, determinando las reacciones en los apoyos y graficando el diagrama  $M_1^*$

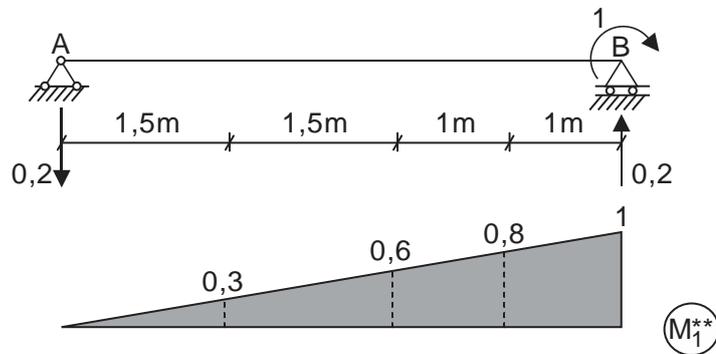


PENDIENTE EN "A":

$$\theta_A = \frac{3}{6EI} (4.30.0,7 + 60.0,4) + \frac{2}{6EI} (60.0,4 + 4.20.0,2) = \frac{67,33}{EI}$$

El signo positivo, indica que va en el mismo sentido que el momento unitario, es decir, en sentido horario.

Ahora, aplicamos un momento unitario en el apoyo B, determinando las reacciones en los apoyos y graficando el diagrama  $M_1^{**}$

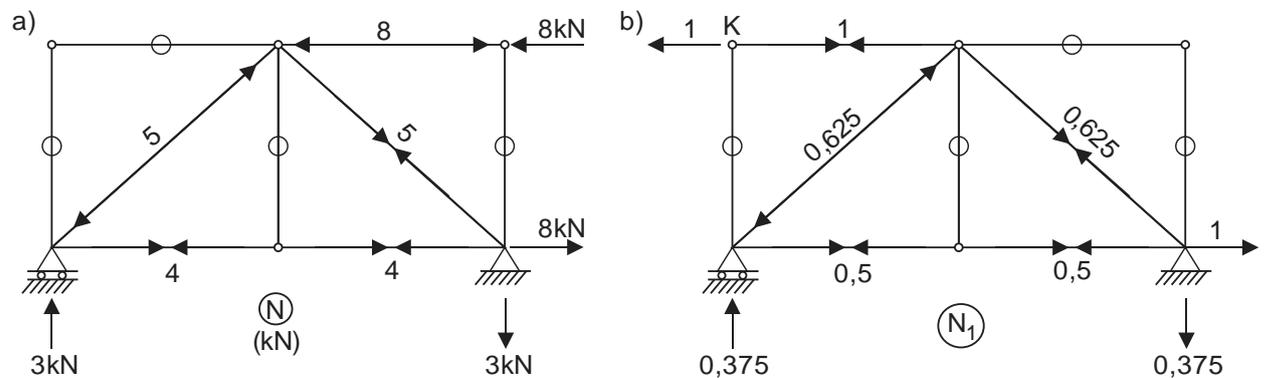


PENDIENTE EN "B":

$$\theta_B = -\frac{3}{6EI} (4.30.0,3 + 60.0,6) + \frac{2}{6EI} (-60.0,6 - 4.20.0,8 + 20.1) = -\frac{62,67}{EI}$$

El signo negativo, indica que va en sentido opuesto al momento unitario, es decir, en sentido antihorario.

2. Determinamos las fuerzas internas en las barras de la armadura para la carga real (fig. a) y carga unitaria (fig. b)



$$\delta_H^K = \frac{1}{2EA} [(-5)(-0,625)(10) + (5)(0,625)(10)] + \frac{1}{2EA} (4)(0,5)(8).2 = \frac{47,25}{EA} \leftarrow$$

3. Determinamos las reacciones en los apoyos debido a las cargas reales (fig. a) y graficamos su diagrama de momento flector (fig. b). Luego, calculamos las reacciones debido a la carga unitaria horizontal en B (fig. c) y graficamos su diagrama de momento flector (fig. d). Finalmente, calculamos las reacciones en los apoyos debido al momento unitario en A (fig. e) y graficamos su diagrama de momento flector (fig. f)

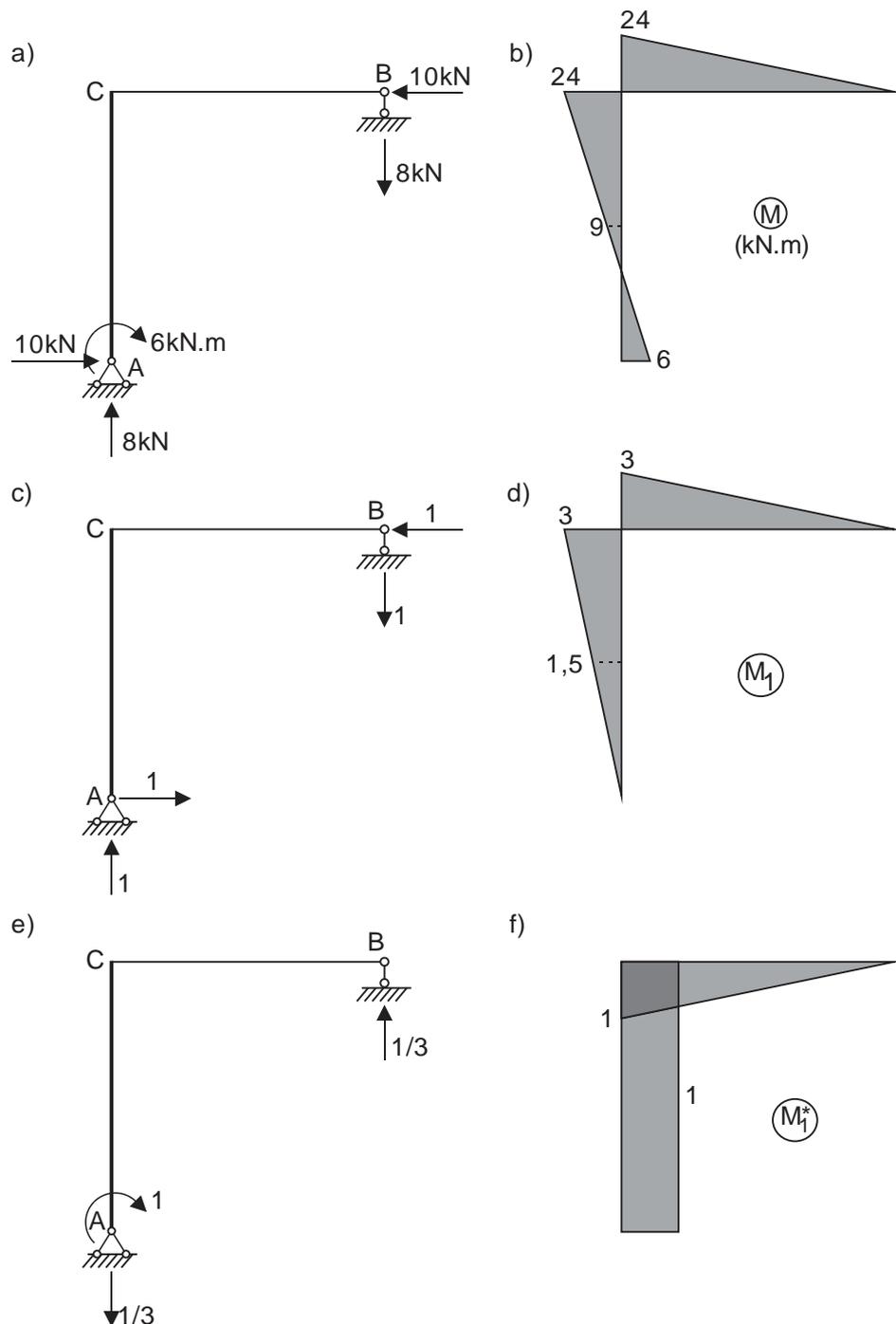
DESPLAZAMIENTO HORIZONTAL EN "B":

$$\delta_H^B = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 24.3 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 3\right) + \frac{3}{6(2EI)} (24.3 + 4.9.1,5) = \frac{103,5}{EI} \leftarrow$$

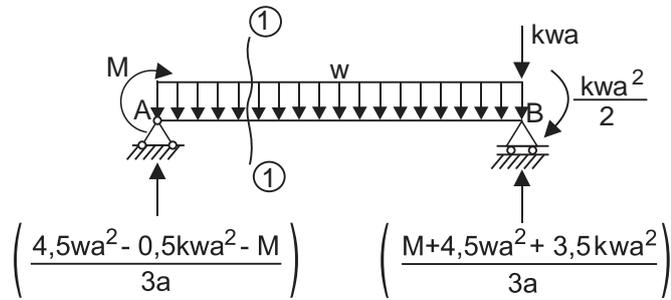
PENDIENTE EN "A":

$$\theta_A = -\frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 3 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 1\right) - \frac{3}{6(2EI)} (24 \cdot 1 + 4 \cdot 9 \cdot 1 - 6 \cdot 1) = -\frac{37,5}{EI}$$

El signo negativo, indica que la pendiente va en sentido opuesto al momento unitario, es decir, en sentido antihorario.



- Aplicamos un momento ficticio  $M$  en el apoyo A y reemplazamos la carga distribuida  $kw$  por su acción equivalente, luego determinamos las reacciones en los apoyos A y B en función de  $M$



TRAMO I-I ( $0 \leq x \leq 3a$ )

$$M_I = \left( \frac{4,5wa^2 - 0,5kwa^2 - M}{3a} \right) \cdot x + M - \frac{wx^2}{2}$$

$$\frac{\partial M_I}{\partial M} = -\frac{x}{3a} + 1$$

Luego, por condición del problema, se tendrá:

$$\theta_A = \int_0^{3a} M_I \left( \frac{\partial M_I}{\partial M} \right) \frac{dx}{EI} = 0$$

$$\theta_A = \frac{1}{EI} \int_0^{3a} \left[ \left( \frac{4,5wa^2 - 0,5kwa^2}{3a} \right) \cdot x - \frac{wx^2}{2} \right] \left[ -\frac{x}{3a} + 1 \right] dx = 0$$

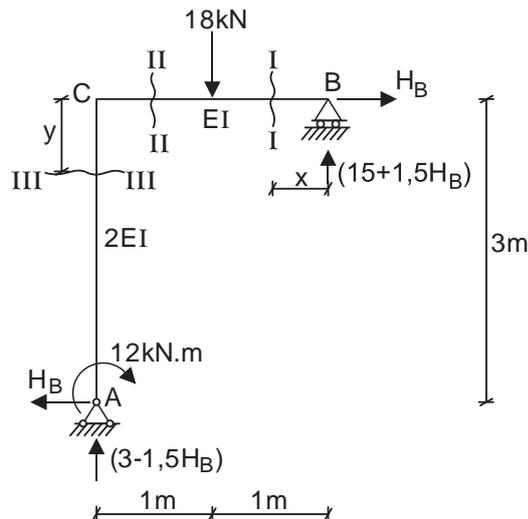
Efectuando cálculos se obtendrá:

$$1,125wa^3 - 0,25kwa^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad k = 4,5$$

5. Determinamos el grado de indeterminación del sistema.

$$G.I. = 3C - A = 3(1) - 2 = 1$$

Convertimos el apoyo fijo B en móvil, reemplazando su componente horizontal por  $H_B$  y calculando las reacciones restantes en función de  $H_B$ , tal como se muestra en la figura.



TRAMO I-I ( $0 \leq x \leq 1$ )

$$M_I = (15 + 1,5H_B)x$$

$$\frac{\partial M_I}{\partial H_B} = 1,5x$$

TRAMO II-II ( $1 \leq x \leq 2$ )

$$M_{II} = (15 + 1,5H_B)x - 18(x - 1)$$

$$\frac{\partial M_{II}}{\partial H_B} = 1,5x$$

TRAMO III-III ( $0 \leq y \leq 3$ )

$$M_{III} = (15 + 1,5H_B)(2) - 18(1) - H_B y = 12 + 3H_B - H_B y$$

$$\frac{\partial M_{III}}{\partial H_B} = 3 - y$$

Luego:

$$\delta_H^B = \int_0^1 M_I \left( \frac{\partial M_I}{\partial H_B} \right) \frac{dx}{EI} + \int_1^2 M_{II} \left( \frac{\partial M_{II}}{\partial H_B} \right) \frac{dx}{EI} + \int_0^3 M_{III} \left( \frac{\partial M_{III}}{\partial H_B} \right) \frac{dy}{2EI} = 0$$

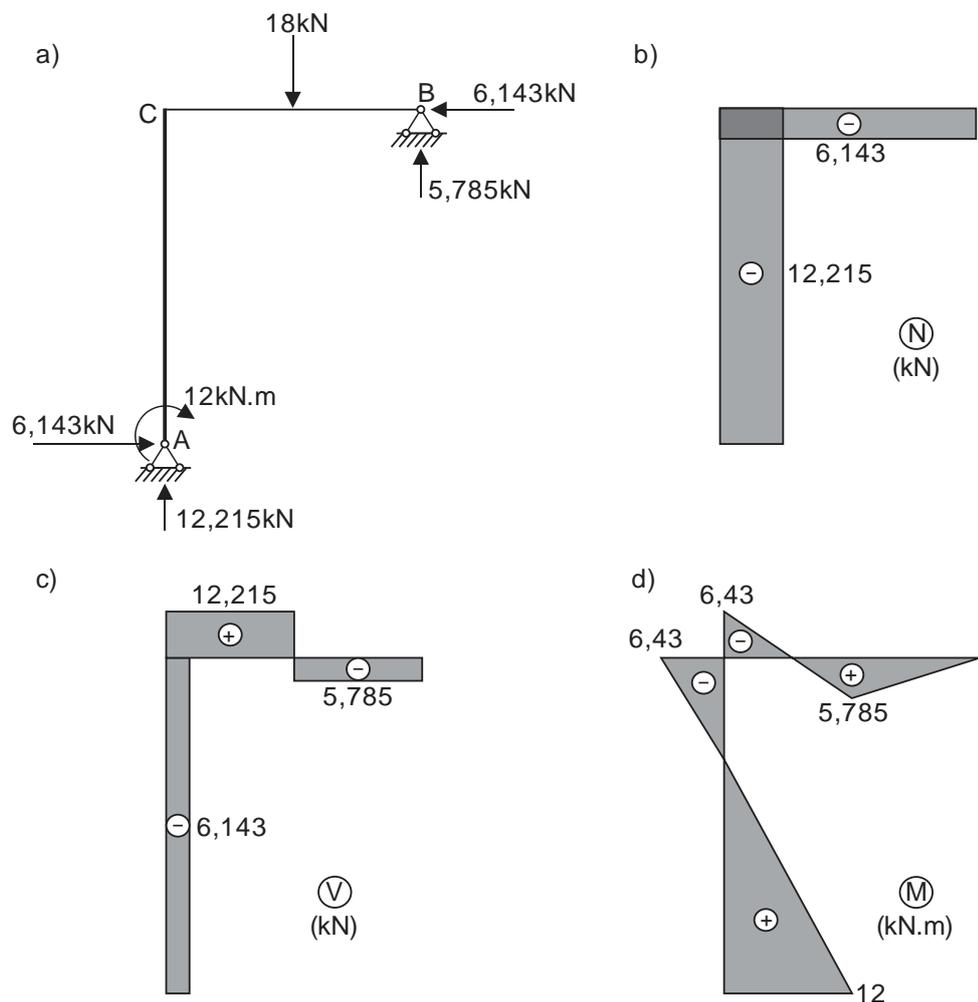
Reemplazamos valores:

$$\frac{1}{EI} \left\{ \int_0^1 (15 + 1,5H_B)(x)(1,5x) dx + \int_1^2 [(15 + 1,5H_B)(x) - 18(x - 1)](1,5x) dx \right\} + \frac{1}{2EI} \int_0^3 (12 + 3H_B - H_B y)(3 - y) dy = 0$$

De donde:

$$H_B = -6,143 \text{ kN} \leftarrow$$

Con el valor obtenido, determinamos las reacciones en los apoyos y graficamos los diagramas de fuerza axial, fuerza cortante y momento flector, tal como se muestra en la figura.



## BIBLIOGRAFIA

1. **Gere James – Timoshenko Stephen.** Mecánica de materiales. Grupo Editorial Iberoamericana. México, 1986. – 825p.
2. **Miroliubov I.N. y otros.** Problemas de resistencia de materiales. Editorial Escuela Superior. Moscú, 2005. – 396p.
3. **Nelson James – McCormac Jack.** Análisis de estructuras. Editorial Alfaomega. México, 2006. – 582p.
4. **Pytel Andrew – Singer Ferdinand.** Resistencia de materiales. Editorial Oxford. México, 2006. – 584p.
5. **Villarreal Castro Genner.** Interacción sísmica suelo-estructura en edificaciones con zapatas aisladas. Asamblea Nacional de Rectores. Lima, 2006. – 125p.
6. **Villarreal Castro Genner.** Análisis de estructuras con el programa LIRA 9.0. Lima, 2006. – 115p.
7. **Villarreal Castro Genner.** Interacción suelo-estructura en edificios altos. Asamblea Nacional de Rectores. Lima, 2007. – 142p.
8. **Villarreal Castro Genner.** Análisis estructural. Lima, 2008. – 335p.
9. **Villarreal Castro Genner – Oviedo Sarmiento Ricardo.** Edificaciones con disipadores de energía. Asamblea Nacional de Rectores. Lima, 2009. – 159p.
10. **Villarreal Castro Genner.** Resistencia de materiales. Lima, 2009. – 336p.
11. **Villarreal Castro Genner.** Estática: Problemas resueltos. Lima, 2011. – 227p.
12. **Villarreal Castro Genner.** Resistencia de materiales I: Prácticas y exámenes USMP. Lima, 2012. – 206p.
13. **Villarreal Castro Genner.** Resistencia de materiales II: Prácticas y exámenes USMP. Lima, 2013. – 199p.
14. **Villarreal Castro Genner.** Ingeniería Sismo-Resistente: Prácticas y exámenes UPC. Lima, 2013. – 100p.
15. **Volmir A.** Problemas de resistencia de materiales. Editorial MIR. Moscú, 1986. – 478p.

## INDICE

PROLOGO.....	03
PRACTICA CALIFICADA Nº 1.....	05
EXAMEN PARCIAL.....	45
PRACTICA CALIFICADA Nº 2.....	79
PRACTICA CALIFICADA Nº 3.....	118
EXAMEN FINAL.....	157
BIBLIOGRAFIA.....	194