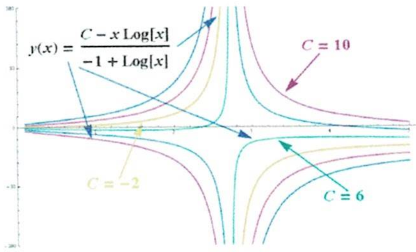
# CALCULO IV




Ing. Gelacio Pozo Pino

## INTRODUCCION

- **ECUACION DIFERENCIAL**

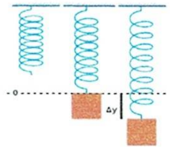
$$\frac{dy}{dx} + y = 5x \rightarrow y(x) = ?$$

- **ECUACION ALGEBRAICA**

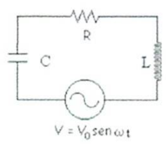
$$x^2 + y^2 = 16 \begin{cases} x = ? \\ y = ? \end{cases}$$

# ¿Por qué es importante estudiar ecuaciones diferenciales?

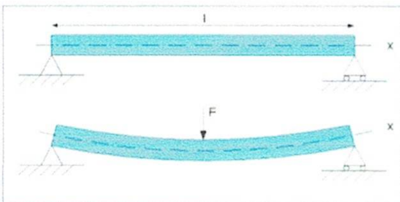
Nos permite modelar sistemas en movimiento




Ecuación diferencial del movimiento armónico simple: $m\frac{d^2y}{dt^2} + ky = 0$




Ecuación diferencial de la corriente eléctrica: $L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = 0$




Deflexión de una viga

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

# ECUACION DIFERENCIAL

**Es una igualdad que contiene derivadas o diferenciales de una función incógnita.**

**variable dependiente o función incógnita**

$$\frac{dy}{dt} + y = 4t + 5$$

**variable independiente**

## ejemplos:

- $\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2} + y = \text{sen } 3x$
- $x'' + x' + x = 0$
- $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0$

- $\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + = \sqrt{xy}$
- $\sqrt{x^2 + y}\, dx + y^2 \frac{dy}{dx} = 0$
- $L\, \frac{d^2q}{dt^2} + R\, \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}\, q = 0$

## CLASIFICACION DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

Se clasifican de acuerdo a 3 criterios: tipo , orden y linealidad

**Según el tipo**

**ECUACION DIFERENCIAL ORDINARIA (EDO)**

Si la función incógnita depende de una sola variable independiente

**Ejemplo:**

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + y = 0$$

**ECUACION DIFERENCIAL PARCIAL (EDP)**

Si la función incógnita depende de varias variables independientes

**Ejemplo:**

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0$$

**Según el orden**

**Orden 1, orden 2, orden 3,..., orden n**

El orden de una ecuación diferencial está dado por el mayor orden derivada presente en la ecuación diferencial.

**Según la linealidad**

**ECUACION DIFERENCIAL LINEAL**

**Si la ecuación diferencial se puede expresar de la siguiente forma:**

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

1. La función incógnita y todas las derivadas tienen exponente 1

2. Los coeficientes: $a_0(x), a_1(x), a_2(x), \dots, a_n(x)$ $y$ $g(x)$ dependen únicamente de x (variable independiente) o son constantes

**ECUACION DIFERENCIAL NO LINEAL**

Caso contrario

**Ejemplos:**

$$t^2\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dx}{dt}+0=\sin 3t \rightarrow$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{d^2y}{dx^2}+y=0 \rightarrow$$

$$y''+3xy'+y=\sqrt{x} \rightarrow$$

$$2x^4\frac{d^3y}{dx^3}+sen(2x^3)\frac{d^2y}{dx^2}+(3x^5+\ln x)\frac{dy}{dx}+2x^3y=3e^{5x}$$

## NOTACION DE LA ECUACION DIFERENCIAL ORDINARIA

Se denotan de la siguiente de la forma:

$$F\left(x,y,\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2},\dots,\frac{d^ny}{dx^n}\right)=0$$

Donde: F indica la relación entre las variables x, y, y sus derivadas

**Ejemplo**

$$\frac{d^3y}{dt^3}+3t\,\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}+y=sen\ 3t$$

**de manera simbólica**

$$F\left(t,y,\frac{dy}{dt},\frac{d^2y}{dt^2},\frac{d^3y}{dt^2}\right)=0 \rightarrow \text{EDO de Orden 3}$$

## Solución de una EDO

**La solución de una EDO en un intervalo I es cualquier función definida en I que satisface la EDO, es decir la reduce a una identidad.**

Si: $y = F(x) \rightarrow$ función

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

$$dy = f'(x)dx$$

$$\int dy = \underbrace{\int f'(x)dx}_{g(x)} + c$$

$y = g(x) + c \rightarrow$ *Solución General de la ecuación diferencial*

**Dando valores arbitrarios a C, se obtendrá múltiples soluciones llamado soluciones particulares.**

**La solución de una ecuación diferencial es una función que satisface la ecuación diferencial**

## TIPOS DE SOLUCIONES DE UNA EDO

### Solución General

Es una solución de tipo genérico, expresado con una o más constantes, tiene un orden infinitivo de acuerdo a su cantidad de constantes.

Ejemplo: $y(x) = C_1 senx + C_2 \cos x$

### Solución Particular

Es un caso particular de la solución general, en donde la constante recibe un valor especifico.

Ejemplo: $y(x) = senx + 3\cos x$

### Solución Explicita

Es cuando la variable dependiente se exprese tan solo en términos de la variable independiente x, y constantes.

Ejemplo:

### Solución Implícita

Se trata de una relación G(x, y) = 0 en la que no se puede despejar mediante funciones elementales.

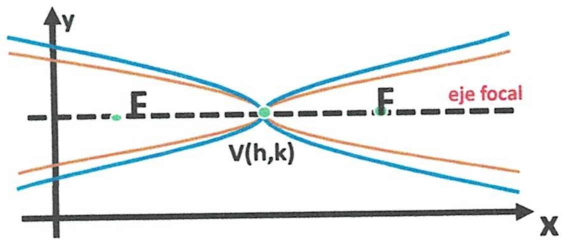
Ejemplo:

**ORIGEN DE LAS EDO:** Se originan a partir de curvas geométricas y de problemas físicos.

A PARTIR DE CURVAS GEOMETRICAS:

EJEMPLO:

**Hallar la ecuación diferencial de la familia de parábolas que tienen su eje focal paralelo al eje de las x**




## 2. A partir de problemas físicos

### Ejemplo

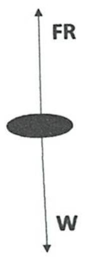
Al abrir su paracaídas un paracaidista está cayendo a una velocidad de 176 pies/s, si la fuerza de resistencia del aire es $\frac{wv^2}{256}$lb donde w es el peso total de la persona y del paracaídas y v es la velocidad con que va cayendo.

A) Determinar la ecuación diferencial del movimiento del paracaídas.

B) Hallar la velocidad en cualquier tiempo después de abierto del paracaídas

Solución:

D.C.L




**Por la 2da ley de Newton**

$$\Sigma_F = m \cdot a$$

$$w - FR = m \cdot a$$

$$w - \frac{wv^2}{256} = m \cdot \frac{dv}{dt}$$

$$w = mg \; ; g = \frac{32pies}{s} \; ;$$

$$w - \frac{wv^2}{256} = \frac{w}{32}\frac{dv}{dt}$$

$$256 - v^2 = 8\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dv}{(256 - v^2)dt} = \frac{dt}{8}.$$

*Es la ecuacion diferencial del movimiento del paracaidas.*

## PROBLEMAS DE VALOR INICIAL

$$P.V.I \begin{cases} F(y, y', y'', \ldots, y^n) = 0 & (EC. Diferencial) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ y''(x_0) = y_1 \\ . \\ . \\ . \\ y^{n-1}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

**Condiciones Iniciales (C.I)**

## PROBLEMAS DE VALOR DE FRONTERA

$$P.V.F\begin{cases} F(x,y,y',y'',\dots,y^n)=0 & (\boldsymbol{EC.Diferencial}) \\ y(x_0)=y_0 \\ y(x_1)=y_1 \\ y(x_2)=y_2 \\ . \\ . \\ . \\ y(x_{n-1})=y_{n-1} \end{cases}$$

**Condiciones de Frontera (C.F)**

**Ejemplo:** En el problema anterior, el problema de valor inicial es el siguiente:

El problema de valor inicial (P.V.I)

$$P.V.I\begin{cases} \dfrac{dv}{(256-v^2)dt}=\dfrac{dt}{8} \\ v(0)=176pie/s \end{cases}$$

Resolviendo la ecuación diferencial y aplicando la condición inicial, se obtiene la velocidad del paracaídas en cualquier instante t.

$$v(t)=16\frac{6e^{4t}+5}{6e^{4t}-5}$$

## EDO DE PRIMER ORDEN

Se expresan de la forma: $F(x, y, y')$=0

**Tipos de EDO de Primer Orden**

- EDO **de variable separable**
- EDO **reducible a variable separable**
- EDO **exacta**
- EDO **inexacta**
- EDO **homogénea**
- EDO **reducible a homogénea**
- EDO **lineal**
- EDO **reducible a lineal**

## ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN

### 1) Ecuación Diferencial Ordinaria de variable separable

**Definición.-** Se dice que una ecuación diferencial ordinario es de variable separable si tiene la siguiente forma

$$\underbrace{M(x)}_{\textit{Función sólo de } x}dx + \underbrace{N(y)}_{\textit{Función sólo de } y}dy = 0$$

La solución se obtiene integrando ambos términos.

$$\boxed{\int M(x)dx + \int N(y)dy = C}$$

## **Ejemplo:** Resolver las ecuaciones diferenciales

1). $\frac{dy}{dx} + e^{xy} = 0$

$\rightarrow \frac{dy}{dx} = e^{x-y}$

$\rightarrow dy = e^{-x}.e^{-y}dx$

$\frac{dy}{e^{-y}} = e^{x}dx \rightarrow e^{y}dy = -e^{x}dx$

$\rightarrow e^{x}dy = -e^{x}dx$

EDO variable separable

$\int e^{y}\,dy = \int -e^{x}dx + c \rightarrow e^{y} = -e^{x} + c$

$\rightarrow y = \ln(c - e^{x})$

2). $\frac{dy}{dx} = \frac{ycosx}{1-2y} \rightarrow \frac{(1-2y)}{x}dy = cosxdx$

$\int\left(\frac{1-2y}{y}\right)dy = \int cosxdx + c$

$\int\left(\frac{1}{y}\right)dy - 2\int dy = senx + c$

$\ln(y) - 2y = senx + c$

### 2) Ecuación diferencial ordinaria reducible a variable separable

**Definición.-**Este tipo de E.D.O tiene la siguiente forma

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c)$$

No son de variable separable para resolver se transforman en variable separable, haciendo:

$$z = ax + by + c$$

## Ejemplo Resolver las E.D

1). $x + y + 1 + y'(2x + 2y - 1) = 0$

$$x + y + 1 + y'(2(x + y) - 1) = 0$$

*Sea:* $z = x + y \to y = z - x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 1$$

*Reemplazando en la E.D*

$$z + 1 + \left(\frac{dz}{dx} - 1\right)(2z - 1) = 0$$

$$z + 1 + 2z\frac{dz}{dx} - \frac{dz}{dx} - 2z + 1 = 0$$

$$-z + 2 + \frac{dz}{dx}(2z - 1) = 0$$

$$\frac{dz}{dx}(2z - 1) = z - 2$$

$\left(\frac{2z-1}{z-2}\right)\boldsymbol{dz = dx}$ **E.D.O de Variable Separable**

$$\int \frac{2z - 1}{z - 2} dz = \int dz + c$$

$$\int \frac{2z}{z - 2} dz = \int \frac{dz}{z - 2} = x + c$$

$$\int \frac{(2z + z - z + 2 - 2)}{z - 2} dz - \int \frac{dz}{z - 2} = x + c$$

$$\int \frac{z - 2}{z - 2} dz + \int \frac{z + 2}{z - 2} dz - \int \frac{dz}{z - 2} = x + c$$

$$\int dz + \int \frac{z - 2}{z - 2} dz + \int \frac{4}{z - 2} dz - \int \frac{dz}{z - 2} = x + c$$

$$\int dz = \int dz + 4\ln(z - 2) - \ln(z - 2) = x - c$$

$$2z + 3\ln(z - 2) = x + c$$

*como* $z = x + y$

$2(x + y) + 3\,ln(x + y - 2) = x + c \ldots$ ***Solucion General de la E.D***

## Ejercicios

*Resolver las E.D mediante separación de variable*

1). $4tx\frac{dx}{dt} = x^2 + 1$

$*$ *separamos E.D*

$$\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{x^2 + 1}{4t}$$

$$\left[\frac{x}{x^2 + 1} dx\right] = \left[\frac{1}{4t} dt\right]$$

$*$ *Integramos*

$$\int \frac{x}{x^2 + 1} dx = \int \frac{1}{4t} dt$$

$\boldsymbol{u = x^2 + 1 \; d\mu = 2xdx}$

$$\int \frac{d\mu}{2\mu} = \frac{1}{2}\int \frac{d\mu}{\mu}$$

$$\to \frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) = \frac{1}{4}\ln(z + c)$$

$$\ln(x^2 + 1) = \frac{1}{2} ln + c$$

$$\int \frac{d\mu}{\mu} = \ln(\mu)$$

# 3). ECUACION DIFERENCIAL ORDINARIA EXACTA

**DEFINICION:** La ecuación diferencial $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ es exacta, si existe una función $f(x,y)$, tal que:

$$\boxed{\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \quad \wedge \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N(x,y)}$$

**Teorema:**

La condición necesaria y suficiente para que la ED $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ sea exacta es que se cumpla:

$$\boxed{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}}$$

La solución del EDO exacta es la función $\boxed{f(x,y)}$

## 3) Ecuación diferencial ordinaria inexacta

**Definición.-** Si la E.D $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ no es exacta. Se puede transformar en exacta obteniendo un factor integrante $\mu(x,y)$ tal que al multiplicar la ED por este factor, esta se transforma en exacta.

- **CASO I: Factor Integrante Dependiente de X**

$$\mu(x) = e^{\int f(x)dx}$$

*donde:*

$$f(x) = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}$$

- **CASO II: Factor Integrante Dependiente de Y**

$$\mu(y) = e^{\int g(y)dy}$$

*donde:*

$$g(y) = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}$$

- **CASO III: Factor Integrante de la forma**

$$\mu(x,y) = x^m y^n$$

*Si existen m y n que se pueden obtener aplicando el teorema de la E.D exacta*