

# CAPITULO III

## ESTÁTICA DE FLUIDOS

---



*La figura muestra la construcción de una presa para almacenar agua, allí se observa las inmensas fuerzas de presión ejercidas por el agua*

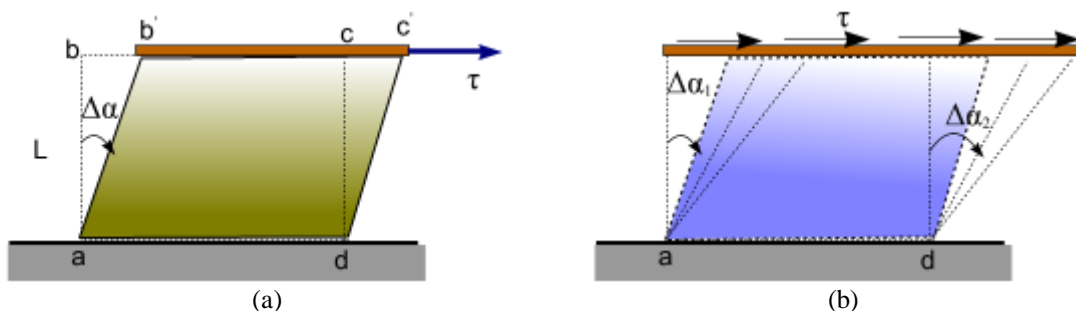
**3.1 PROPIEDADES DE LOS FLUIDOS Y DEFINICIONES**

La mecánica de fluidos es una ciencia que se ocupa del estudio de los fluidos en movimiento y/o en reposo y los efectos que ellos producen sobre los entornos que lo rodean los que pueden ser superficies sólidas u otros fluidos. Esta ciencia se ramifica en varias especialidades tales como aerodinámica, hidráulica, ingeniería naval, dinámica de gases y procesos de flujo. Tiene relación con la estática, cinemática y dinámica de los fluidos, ya que el movimiento de un fluido se produce debido al desequilibrio de las fuerzas que actúan sobre él. Para dar base al análisis se aplica los principios y leyes tales como: leyes de Newton del movimiento, leyes de la termodinámica, principio de conservación de masa, principio de conservación de la energía, entre otros.

En el estudio del movimiento de los fluidos, las propiedades más importantes y utilizadas son la viscosidad y la densidad. Por otro lado también es necesario observar el efecto de la tensión superficial así como las propiedades de tensión de vapor.

**3.1.1 Definición de Fluido**

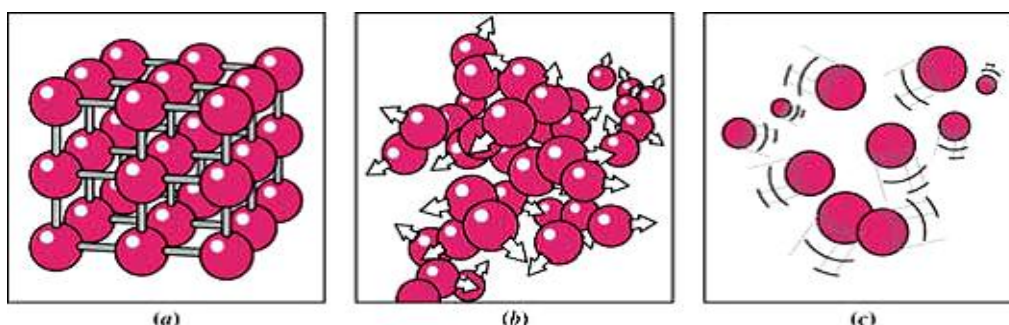
Un fluido se define como una sustancia que cambia su forma continuamente siempre que esté sometida a un esfuerzo cortante, sin importar que tan pequeño sea. En contraste un sólido experimenta un desplazamiento definido cuando se somete a un esfuerzo cortante. La figura 3.1 muestra éste efecto, en la figura 3.1a, el bloque sólido cambia su forma hasta un determinado grado de rectangular  $abcd$  a  $ab'c'd$  cuando se le aplica una esfuerzo cortante  $\tau$ . En contraste si este elemento fuera un fluido ver figura 3.1b, no existirá un  $\Delta\alpha$  fijo ni aun para un esfuerzo cortante infinitesimal. En lugar de esto persiste una deformación continua siempre que se aplique esfuerzo cortante  $\tau$ .



**Figura 3.1** (a) Sólido sometido a una fuerza cortante, (b) Fluido sometido a una fuerza cortante.

Según las formas físicas de existencia de la materia los fluidos pueden ser líquidos y gaseosos. Los fluidos líquidos tienen volumen definido pero no una forma definida por el contrario, los gases no tienen volumen ni forma definida.

Los fluidos líquidos son incompresibles debido a que presentan cambios pequeños en su densidad a pesar de estar sometidos a grandes presiones. Por otro lado los fluidos gaseosos son altamente compresibles es decir no pueden considerarse constante.

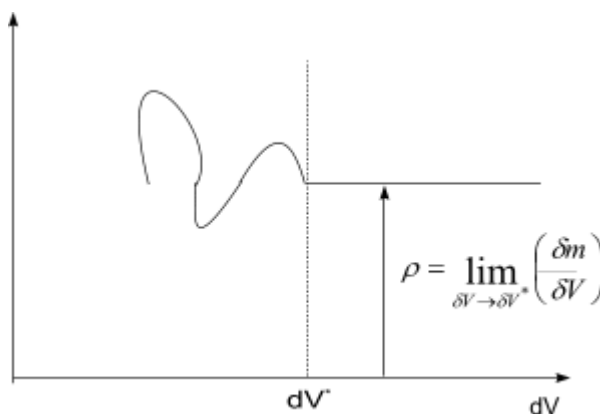


### 3.1.2 El fluido como medio continuo

Se sabe que todos los fluidos están compuestos por moléculas las que se encuentran en movimiento aleatorio, estas moléculas están muy separadas en los gases mientras que están próximas en los líquidos. La distancia entre moléculas es mucho mayor que el diámetro molecular. Debido al continuo movimiento molecular la densidad no tiene un significado preciso, pues el número de moléculas en un volumen cualquiera está cambiando continuamente. Este efecto cobra importancia si el volumen unidad es mucho mayor que el cubo de espaciamiento molecular. Si la unidad de volumen es demasiado grande es probable que haya una variación en la distribución global de partículas. Esta situación se observa en figura 3.2, en donde la densidad ( $\rho = \delta m / \delta V$ ), aparece en función del volumen escogido, de ella puede apreciarse que hay un volumen  $\delta V^*$  por debajo del cual las variaciones moleculares tienen importancia, análogamente por encima de  $\delta V^*$  las variaciones microscópicas también es importante. Entonces la densidad se expresa

$$\rho = \lim_{\delta V \rightarrow \delta V^*} \left( \frac{\delta m}{\delta V} \right) \quad (3.1)$$

Donde el volumen  $\delta V^*$  es igual a  $10^{-9} \text{ mm}^3$  para todos los fluidos.



**Figura 3.2.** Variación de la densidad con el volumen escogido.

Por otro lado debido a que los problemas ingenieriles estén relacionados con dimensiones físicas mucho mayores que el volumen  $\delta V^*$  la densidad puede considerarse como una función puntual y las propiedades del fluido pueden considerarse como variables continuas. Un fluido con estas características se le llama Medio Continuo. En estas condiciones la densidad se escribe

$$\rho(x, y, z, t) = \lim_{\delta V \rightarrow \delta V^*} \left( \frac{\delta m}{\delta V} \right)$$

$$\rho(x, y, z, t) = \frac{dm}{dV} \quad (3.2)$$

Las unidades de la densidad en el SI es el  $\text{Kg/m}^3$  y en el sistema C.G.S es el  $\text{gr/cm}^3$ . En la tabla I se representa la densidad para diferentes sustancias a presión y temperatura normales.

Tabla I. Densidad de algunas sustancias

Sustancia	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> ).10 <sup>3</sup>	Sustancia	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> ).10 <sup>3</sup>
Hielo	0,917	Agua	1,00
Aluminio	2,7	Glicerina	1,26
Acero	7,86	Alcohol etílico	0,806
Cobre	8,92	Benceno	0,879
Plata	10,5	Aire	1,29
Plomo	11,3	Oxígeno	1,43
Oro	19,3		
Platino	21,4		

Estos valores cambian ligeramente con la temperatura debido a que el volumen de una sustancia cambia con la temperatura.

### 3.1.3 Densidad relativa ( $\rho_r$ )

La densidad relativa de una sustancia es el cociente entre la densidad de una sustancia y la densidad de otra sustancia considerada como patrón. Para el caso de los fluidos líquidos la densidad patrón considerada es la del agua a 4°C en tanto que para los gases se considera la densidad del aire, es decir

$$\rho_r = \frac{\rho_{sus}}{\rho_w} \quad (3.3)$$

En donde el subíndice *sus* se refiere a la sustancia y el subíndice *w* se refiere al agua.

### 3.1.4 Peso específico ( $\gamma$ )

El peso específico de una sustancia se define como el peso por la unidad de volumen de una sustancia. Esto es

$$\gamma = \frac{W}{V} \quad (3.4)$$

Las unidades de  $\gamma$  son el (N/m<sup>3</sup>) en el SI y (lb/pie<sup>3</sup>) en el sistema británico. Por otro lado, debido a que  $w = mg = \rho Vg$ , la ecuación (4) puede escribirse

$$\gamma = \frac{mg}{V} = \rho g \quad (3.5)$$

### 3.1.5 Presión (p)

La presión ejercida por un fluido sobre un recipiente, es una magnitud tensorial que expresa la distribución normal de una fuerza sobre una determinada superficie. Lo de magnitud tensorial implica que la presión tiene múltiples puntos de aplicación y una manifestación normal a la superficie.

Para determinar la presión consideremos un fluido contenido dentro de una superficie S tal como se ve en la figura 3.3. Si se divide a la superficie en elementos de área  $\Delta A$  cuya dirección es  $\Delta \vec{A} = \Delta A \vec{n}$ , en donde  $\vec{n}$ , es un vector unitario perpendicular a la superficie, la fuerza que ejercerá el fluido sobre  $\Delta A$  es  $\Delta \vec{F}_\perp$ . Entonces la presión no es más sino la fuerza por unidad de área, esto es

$$p = \frac{\Delta F_\perp}{\Delta A} \quad (3.6)$$

Por otro lado, si se quiere determinar la presión en un punto, los elementos  $\Delta A$  se hacen cada vez más pequeños, es decir

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_{\perp}}{\Delta A}$$

$$p = \frac{dF_{\perp}}{dA} \tag{3.7}$$

Las unidades de presión en el SI es el  $N/m^2$  unidad conocida como el Pascal

$$1Pa = 1 N/m^2 \tag{3.8}$$

Por otro lado existen otras unidades como: dina/cm<sup>2</sup>; kg/m<sup>2</sup>; gr/cm<sup>2</sup>; lb/pie

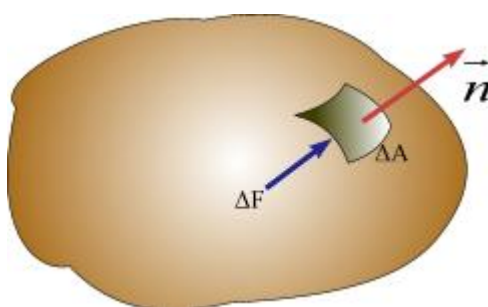
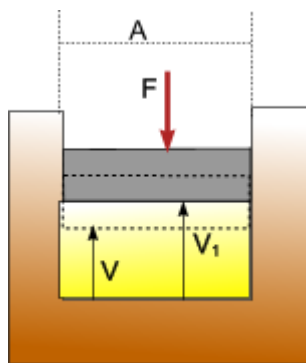


Figura 3.3 Presión ejercida por un fluido sobre una superficie

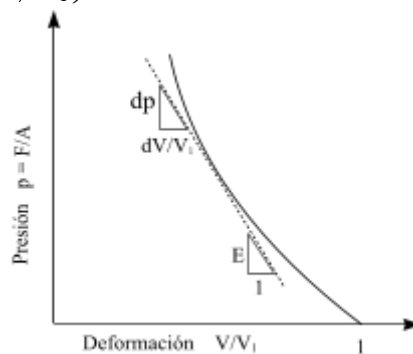
### 3.1.6 Módulo de elasticidad volumétrico ( $E_v$ )

Todos los fluidos se pueden comprimir mediante la aplicación de fuerzas de presión y en el proceso se almacena energía de la forma **elástica**. Es decir los fluidos se expanden al dejar de aplicar las fuerzas aplicadas convirtiendo su energía almacenada. Esta propiedad elástica se define mediante el módulo de elasticidad volumétrico, cuyo valor se determina utilizando un cilindro y un embolo al que se le aplica una fuerza como se muestra en a figura 3.4a. Si el cilindro es rígido y contiene un volumen  $V_1$  de fluido, la acción de  $F$  produce un aumento de la presión del fluido y hace que el volumen disminuya hasta un valor  $V$ . Trazando una gráfica presión ( $p$ ) vs  $V/V_1$  como se ve en la figura 3.4b, el módulo de elasticidad es la pendiente de la curva en un punto dado. Es decir

$$E_v = - \frac{dp}{\left( \frac{dV}{V_1} \right)} \tag{3.9}$$



(a)



(b)

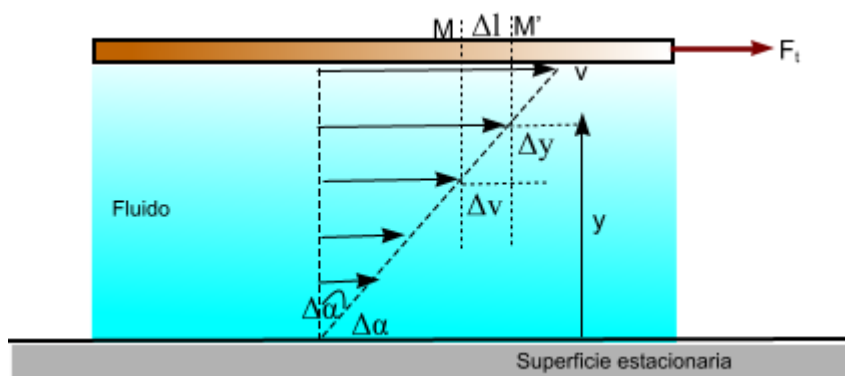
Figura 3.4. Determinación del módulo del módulo de elasticidad

Puesto que  $dV/V$  es adimensional, la unidad de  $E_v$  son las mismas que de la presión.

### 3.1.7 Viscosidad ( $\mu$ )

Cuando se observa el movimiento de fluidos se distinguen dos tipos básicos de movimiento. El primero es el **flujo laminar** aquel movimiento regular en el que las partículas del fluido parecen deslizar unas sobre otras en capas o láminas. El segundo llamado **flujo turbulento** es un movimiento caracterizado por la aleatoriedad del movimiento de las partículas observándose remolinos de varios tamaños.

Para determinar la viscosidad consideremos el flujo laminar de un fluido real que está confinado a moverse entre dos placas de extensión infinita, como se ve en la figura 3.5



**Figura 3.5** Deformación de un fluido bajo la acción de una fuerza cortante

La placa superior se mueve con velocidad constante  $v$ , por efecto de la fuerza cortante aplicada  $\vec{F}_t$ . El esfuerzo cortante  $\tau$ , será.

$$\tau = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta F}{\Delta A} \right) = \frac{dF}{dA} \quad (3.10)$$

Donde,  $\Delta A$ , es el área del elemento de fluido en contacto con la placa. En un intervalo de tiempo  $\Delta t$ , el elemento se deforma tal como se muestra en la figura. La rapidez de deformación está dada por

$$\text{rapidez de deformación} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta \alpha}{\Delta t} \right) = \frac{d\alpha}{dt} \quad (3.11)$$

Por otro lado de la figura 3.5 se observa además que la distancia  $\Delta l$  entre los puntos M y M' es

$$\Delta l = \Delta v \Delta t \quad (3.12)$$

Para ángulos pequeños la distancia  $\Delta l$  puede expresarse como

$$\Delta l = \Delta y \Delta \alpha \quad (3.13)$$

Igualando las ecuaciones (3.12) y (3.13), resulta

$$\begin{aligned} \Delta v \Delta t &= \Delta y \Delta \alpha \\ \frac{\Delta \alpha}{\Delta t} &= \frac{\Delta v}{\Delta y} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Llevando al límite ambos lados de la ecuación (3.14), resulta

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{dv}{dy} \quad (3.15)$$

Si el fluido es newtoniano, el esfuerzo cortante es proporcional a la rapidez de deformación, esto es

$$\tau \propto \frac{d\alpha}{dt}$$

$$\tau = \mu \frac{d\alpha}{dt} = \mu \frac{dv}{dy} \quad (3.16)$$

En donde  $\mu$  es la constante de proporcionalidad y se le llama “coeficiente de viscosidad dinámica”

En el SI la viscosidad se expresa en N.s/m<sup>2</sup> y en el sistema c.g.s. absoluto la unidad es el gr/cm.s unidad llamada como poise

La viscosidad no depende en gran medida de la presión. Sin embargo se observa que la viscosidad de un líquido disminuye con un aumento en la temperatura mientras que en un gas ocurre lo contrario. La explicación de estas tendencias es la siguiente: en un líquido las moléculas tienen una movilidad limitada con fuerzas cohesivas grandes presentes entre moléculas. Un aumento en la temperatura disminuye la cohesión entre moléculas disminuyendo la pegajosidad del fluido, es decir un descenso en la viscosidad. En un gas las moléculas tienen una alta movilidad y generalmente están separadas existiendo poca cohesión. Sin embargo las moléculas interactúan chocando unas con otras dando lugar a una disminución en la viscosidad.

### 3.1.8 Viscosidad cinemática ( $\nu$ )

Se define como la razón entre la viscosidad dinámica y la densidad.

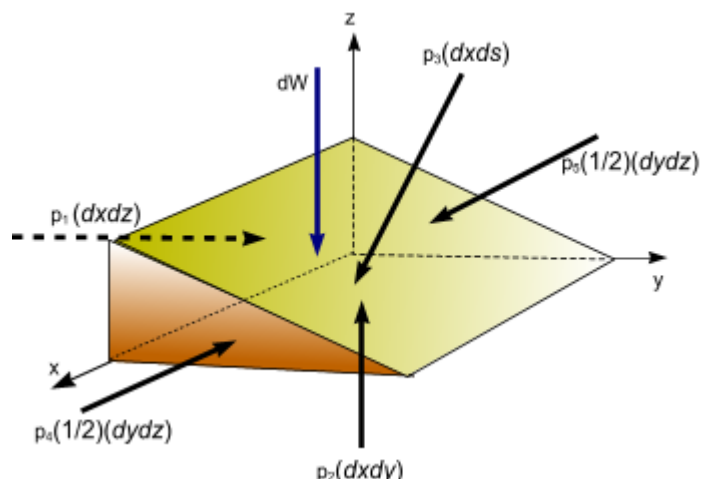
$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (3.17)$$

## 3.2 ESTÁTICA DE FLUIDOS

Un fluido se considera estático si todas sus partículas permanecen en reposo o tienen la misma velocidad constante con respecto a una distancia de referencia inercial. En esta sección se analizará la presión y sus variaciones a través del fluido así como se estudiará las fuerzas debidas a la presión sobre superficies definidas.

### 3.2.1 Presión en un punto

Para determinar la presión en un punto interior a un fluido consideremos un elemento de fluido en forma de cuña como se muestra en la figura 3.6. Debido a que la cuña está en reposo relativo no hay fuerzas cortantes y las fuerzas que existen son perpendiculares a las superficies.



**Figura 3.6.** Elemento de fluido en forma de cuña

Aplicando las ecuaciones de equilibrio según las direcciones mostradas y teniendo en cuenta que  $F = pA$ , resulta

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 \\ -p_4\left(\frac{1}{2} dydz\right) + p_5\left(\frac{1}{2} dydz\right) &= 0 \\ p_5 &= p_4 \end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned} \sum F_y &= 0 \\ p_1(dxdz) - p_3(dxds)\text{sen}\theta &= 0 \\ p_1 &= p_3 \end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned} \sum F_z &= 0 \\ p_2(dxdy) - p_3(dx)ds\text{cos}\theta - dW &= 0 \\ p_2 &= p_3 + \frac{1}{2}\gamma dz \end{aligned} \tag{3.20}$$

Las ecuaciones (3.18) y (3.19), indican que no hay variación de presión en dirección horizontal, mientras que la ecuación (3.20) indica en dirección vertical si hay variación de la presión dicha variación depende de la densidad del fluido, de la aceleración de la gravedad y de la diferencia de alturas. Sin embargo en el límite cuando  $dz$  tiende a cero, la ecuación (3.20) se escribe

$$p_2 = p_3 \tag{3.21}$$

Comparando la ecuación (3.19) y (3.20), se deduce que

$$p_1 = p_2 = p_3 \tag{3.22}$$

La presión en cualquier punto interior a un fluido es independiente de la orientación.

### 3.2.2 Variación de la presión en un fluido en reposo. Ecuación fundamental de la hidrostática

Las variaciones de presión en una determinada dirección se obtienen estudiando las variaciones que la presión experimenta a lo largo de una dirección horizontal y vertical. Para ello consideremos un



elemento de fluido de peso  $dW$  en forma de paralelepípedo rectangular de lados  $dx$ ,  $dy$ , y  $dz$  como se muestra en la figura 3.7. del gráfico se ve que sobre el elemento actúan las fuerzas de presión perpendicularmente a las caras.

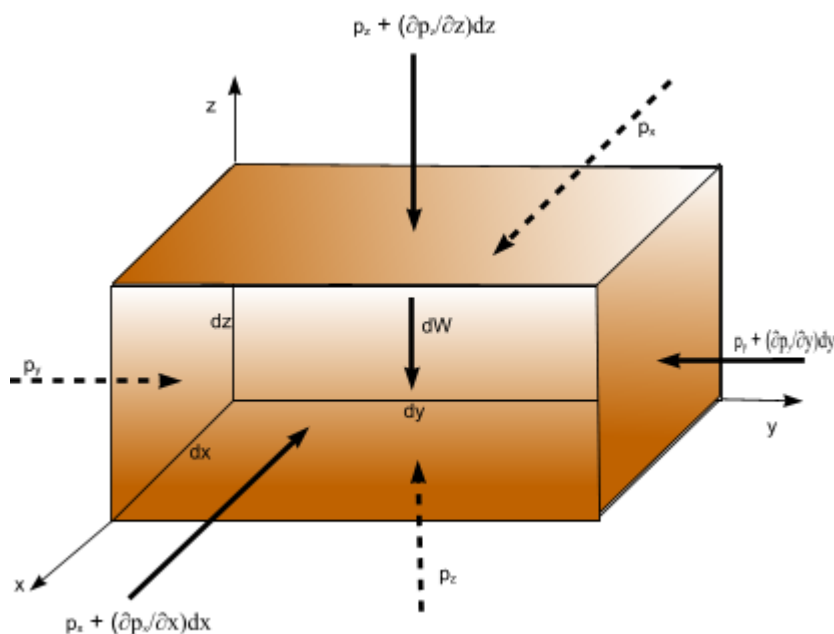


Figura 3.7. Elemento de fluido en forma de paralelepípedo.

Debido a que el elemento de fluido está en equilibrio, se cumple.

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 \\ p_x(dydz) - \left( p_x + \frac{\partial p_x}{\partial x} dx \right) (dydz) &= 0 \\ \frac{\partial p_x}{\partial x} &= 0\end{aligned}\quad (3.23)$$

$$\begin{aligned}\sum F_y &= 0 \\ p_y(dxdz) - \left( p_y + \frac{\partial p_y}{\partial y} dy \right) (dxdz) &= 0 \\ \frac{\partial p_y}{\partial y} &= 0\end{aligned}\quad (3.24)$$

$$\begin{aligned}\sum F_z &= 0 \\ p_z(dxdy) - \left( p_z + \frac{\partial p_z}{\partial z} dz \right) (dxdy) - dW &= 0 \\ \frac{\partial p_z}{\partial z} &= -\rho g\end{aligned}\quad (3.25)$$

Las ecuaciones (3.23) y (3.24) indican que no existe variación en la presión en la dirección horizontal. Por el contrario la ecuación (3.25) muestra que en la dirección vertical si existe variación en la presión

### 3.2.2.1. Variación de la presión en un fluido incompresible

Se ha demostrado anteriormente que la presión experimenta variaciones en la dirección vertical, además se ha mostrado que la presión depende de la densidad así como de la aceleración de la gravedad y como la gravedad varía con la altura entonces afectará a la presión. Sin embargo, para propósitos ingenieriles se puede considerar a la aceleración de la gravedad como una constante, de otro lado como se trata de un fluido incompresible la densidad es constante entonces la ecuación (3.25) se escribe.

$$\frac{dp_z}{dz} = -\rho g = \text{constante} \quad (3.26)$$

A partir de este resultado, se observa que un incremento en la elevación ( $dz$ , *positivo*) corresponde a una disminución en la presión ( $dp$ , *negativo*). Siendo  $p_1$  y  $p_2$  las presiones en los puntos  $z_1$  y  $z_2$ , respectivamente, la ecuación (3.26) puede integrarse obteniendo

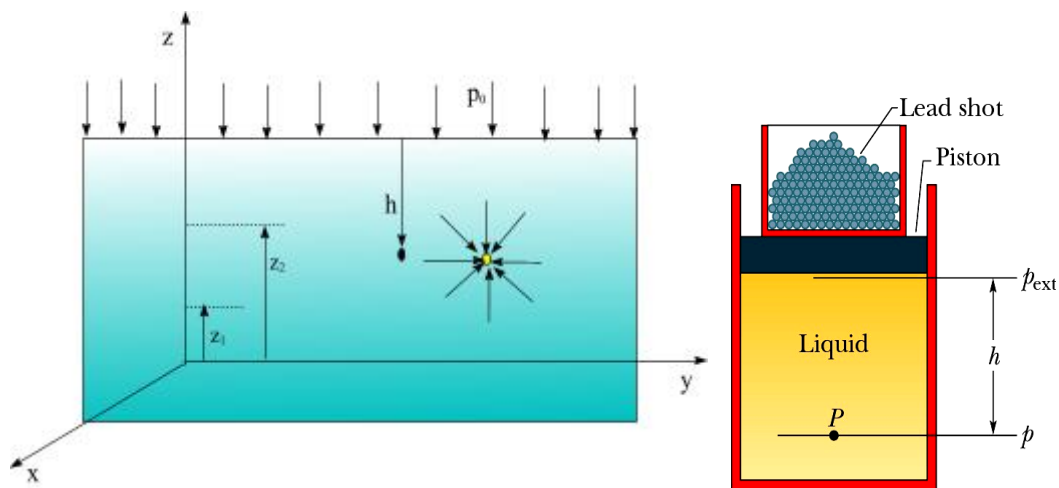
$$\int_{p_1}^{p_2} dp_z = -\rho g \int_{z_1}^{z_2} dz$$

$$p_2 = p_1 - \rho g(z_2 - z_1) \quad (3.27)$$

Por otro lado, si el recipiente está abierto en la parte superior como se ve en la Figura 3.8, la presión a cualquier profundidad  $h = z_1 - z_2$  es

$$p = p_0 + \rho g h \quad (3.28)$$

Donde  $p_0$  es la presión atmosférica,  $h$  es a profundidad medida a partir de la superficie libre.



**Figura 3.8** Variación de la presión en un fluido incompresible

Usualmente a la presión  $p$  se le llama presión absoluta y a la resta de  $p$  y  $p_0$  se le llama presión manométrica esto es

$$p_{man} = \rho g h \quad (3.29)$$

**Principio de Pascal.** Debido a que la presión en un fluido sólo depende de la profundidad, cualquier incremento en la presión en la superficie se debe transmitir a cualquier punto en el fluido. Este efecto fue descubierto por primera vez por Blaise Pascal y se le conoce como *Principio de Pascal* y establece:

*“Un cambio en la presión aplicada a un fluido encerrado en un depósito se transmite íntegramente a cualquier punto del fluido y a las paredes del recipiente que lo contiene”*

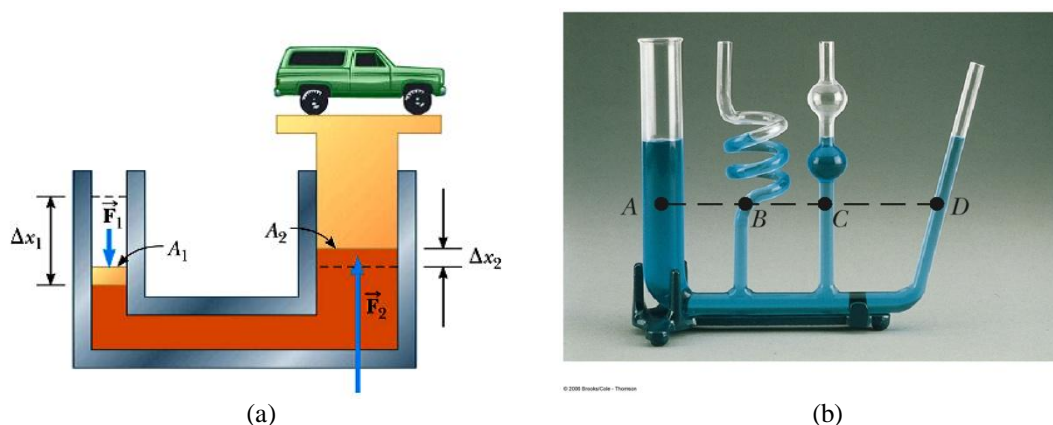
**Prensa Hidráulica-** Una de las aplicaciones más importantes del principio de pascal es la prensa hidráulica representada en la figura 3.9a. Consiste en dos cilindros de diferentes diámetros  $d_1$  y  $d_2$  ( $d_1 \ll d_2$ ) interconectados y llenados con un fluido los que llevan émbolos de áreas  $A_1$  y  $A_2$ . Si al émbolo  $A_1$  se le aplica una fuerza  $F_1$  esta provocará una presión adicional en el fluido, presión que se transmite según la ley de pascal hasta el émbolo de área  $A_2$  produciendo una fuerza  $F_2$  dada por

$$p = \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$$

$$F_2 = \left( \frac{A_2}{A_1} \right) F_1 \quad (30)$$

Puesto que  $d_1 \ll d_2$  entonces la fuerza  $F_2$  será mayor que  $F_1$ .

En la figura 3.9b se muestra el agua en un recipiente formado por partes de diferentes formas. En una primera observación, pareciera que la presión en el recipiente mayor es más elevada y que como consecuencia de ésta presión el agua deberá alcanzar mayor altura el recipiente más pequeño. Esto se conoce como *paradoja hidrostática*. La presión sólo depende de la profundidad, por tanto el líquido debe encontrarse a la misma altura en todas las partes del recipiente.



**Figura 3.9** (a) *La prensa hidráulica utilizada para multiplicar fuerzas, (b) vasos comunicantes*

### 3.2.2.1. Variación de la presión en un fluido Comprensible

La variación de la presión en un fluido compresible se puede determinar, también a partir de la ecuación (3.25). Sin embargo, antes de proceder a la integración, es necesario expresar la densidad del fluido en función de cualquiera de las otras variables de la ecuación de estado.

En muchos líquidos, la densidad depende muy débilmente de la temperatura. Sin embargo, la presión y la densidad están relacionadas por el módulo de elasticidad volumétrico

$$E_V = - \frac{dp}{d\rho/\rho} \quad (3.31)$$

Si este módulo es constante, entonces la densidad es función únicamente de la presión. Por otro lado, en el caso de los gases ideales, la densidad depende de la presión en la forma

$$\rho = \left( \frac{p}{p_0} \right) \rho_0 \quad (3.32)$$

Sustituyendo la ecuación (3.32) en la ecuación (3.26), resulta

$$\frac{dp}{dz} = -\left(\frac{p}{p_0}\right)\rho_0 g$$

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = -\frac{\rho_0 g}{p_0} \int_{z_0}^z dz$$

De donde, se obtiene

$$p = p_0 e^{-\frac{\rho_0 g}{p_0}(z-z_0)} \quad (3.33)$$

La ecuación (33) nos da la variación de la presión de un gas con la altura a temperatura constante. Si el gas ideal tiene un gradiente de temperatura expresado por

$$T = T_0 + \beta z \quad (3.34)$$

Donde  $T_0$ , es la temperatura en un nivel de referencia ( $z = 0$ ) y  $\beta$  es una constante que para atmósferas normales  $\beta = -0,0065 \text{ }^\circ\text{C/m}$  hasta la estratosfera. De la ecuación de estado se tiene.

$$\rho = \frac{p}{R(T_0 + \beta z)} \quad (3.35)$$

Sustituyendo la ecuación (3.35) en la ecuación (3.26), resulta

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{pg}{R(T_0 + \beta z)} \quad (3.36)$$

Integrando la ecuación (36), teniendo en cuenta nuevamente que la aceleración de la gravedad es constante, obtenemos

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = -\frac{g}{R} \int_0^z \frac{gdz}{(T_0 + \beta z)}$$

Finalmente se obtiene

$$p = p_0 \left( \frac{T_0}{T_0 + \beta z} \right)^{\frac{g}{\beta R}} \quad (3.37)$$

### 3.2.3 Presión absoluta y manométrica

Los valores de la presión se deben establecer respecto a un nivel de referencia. Si este nivel de referencia es el vacío, las presiones se denominan *presiones absolutas*, y cuando se toma como origen la presión atmosférica local, la presión se denomina *presión manométrica*.

La figura 3.10 muestra los orígenes y las relaciones de las unidades de las escalas más frecuentes. La presión atmosférica normal es la presión medida a nivel del mar, la que se toma el valor de  $1 \text{ atm}$  ó  $760 \text{ mm de Hg}$ . Cuando la presión se expresa por la altura de una columna líquida, se refiere a la fuerza por unidad de área en la base de la columna del líquido. La variación de la presión de un líquido con la altura se expresa como:

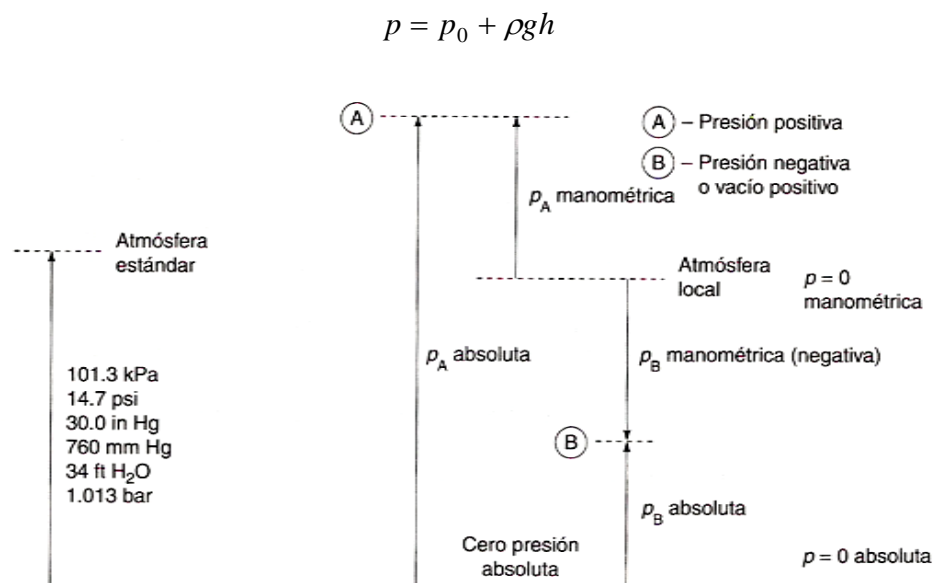


Figura 3.10 Relación entre presión absoluta y la presión manométrica

3.2.4 El Barómetro

El barómetro es un dispositivo que nos permite medir la presión atmosférica local consiste en un tubo de vidrio cerrado por uno de sus extremos y abierto por el otro, a este tubo se le llena con mercurio y después tapado el extremo abierto se invierte en una cubeta de mercurio, como se muestra en la figura 3.11. El espacio vacío que se forma en la parte superior del tubo contiene únicamente vapor de mercurio, cuya presión a temperaturas ordinarias es muy pequeña de tal manera que se puede despreciar. Si se comienza en éste punto y se aplica la hidrostática se tiene

$$p_{atm} = p_{vapor,Hg} + \gamma_{Hg} h$$

$$= 0 + \gamma_{Hg} h$$

$$p_{atm} = \gamma_{Hg} h$$

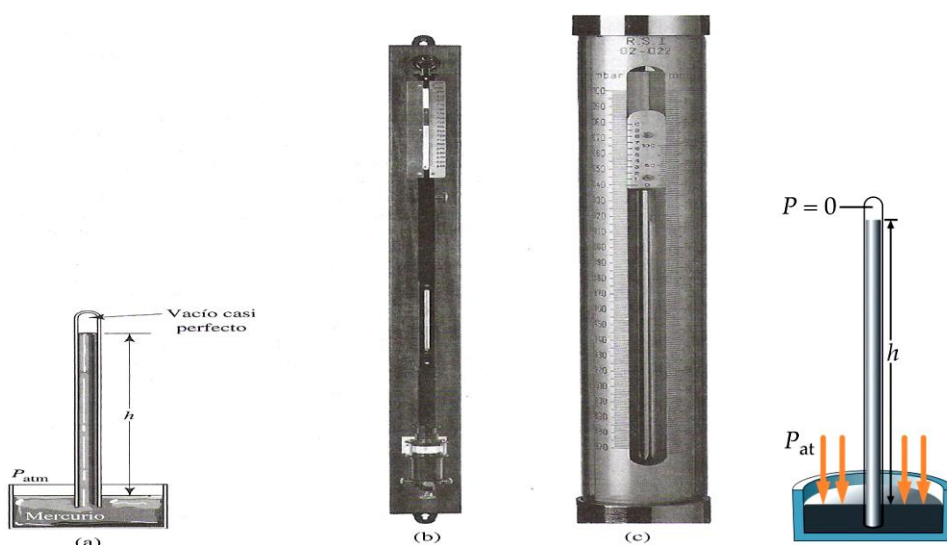
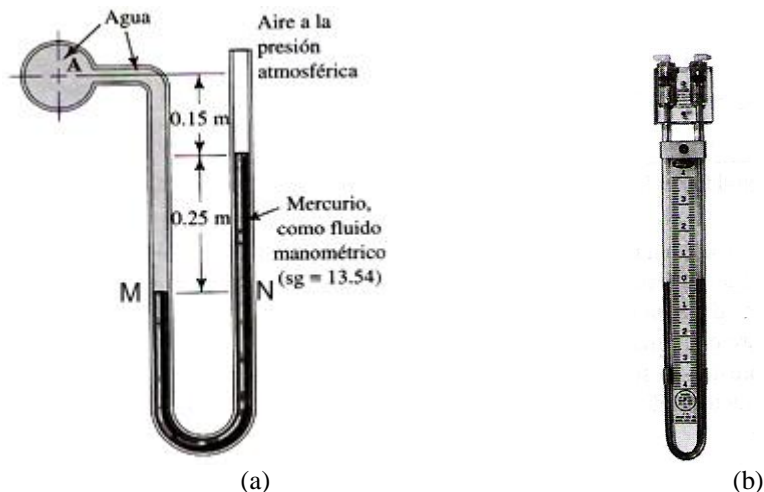


Figura 3.11 Barómetro de mercurio inventado por Torricelli: (a) diagrama esquemático; (b) barómetro científico; (c) barómetro con escala para la lectura de la presión atmosférica; (d) presión sobre el Hg.

### 3.2.5 Manómetros

Los manómetros son dispositivos que sirven para medir la diferencia de presión. En general existen muchos dispositivos llamados manómetros que nos permiten determinar diferencias de presión positivas o negativas siendo uno de estos el manómetro en U, mostrado en la figura 3.12.



**Figura 3.12** Manómetro de tubo en U, utilizado para determinar presiones manométricas.

Para determinar la presión en el punto A, se utiliza la ley fundamental de la hidrostática, esto es, los puntos M y N están a la misma presión entonces

$$\begin{aligned}
 p_M &= p_N \\
 p_A + \gamma_w h_w &= p_0 + \gamma_{Hg} h_{Hg} \\
 p_A - p_0 &= \gamma_{Hg} h_{Hg} - \gamma_w h_w \\
 p_{A,man} &= \gamma_{Hg} h_{Hg} - \gamma_w h_w
 \end{aligned}$$

Donde  $\gamma_w$  y  $\gamma_{Hg}$  son los pesos específicos de los fluidos agua y mercurio, respectivamente

Para resolver problemas que involucran manómetros se sigue el procedimiento.

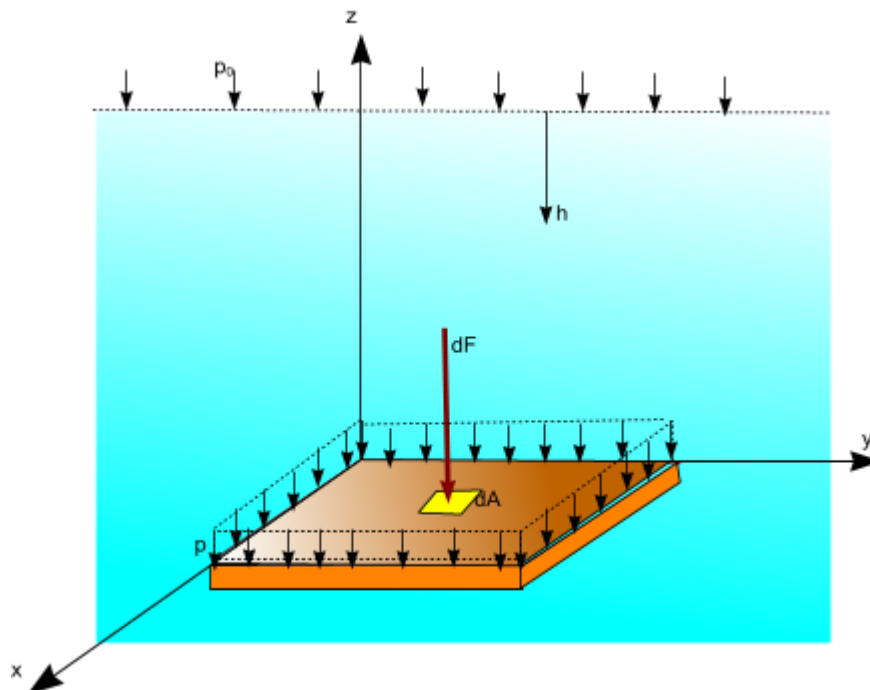
1. Partir de un menisco cualquiera y exprese la presión en sus respectivas unidades y seguir la continuidad del tubo.
2. Sumar algebraicamente a esta presión el cambio de presión que a parece en las mismas unidades desde un menisco a otro (*más* sí el próximo está más abajo y *menos* sí este más alto).
3. Continuar así hasta que se alcance el otro extremo del manómetro e igualar la expresión a la presión en aquel punto.

### 3.2.6 Fuerzas hidrostáticas sobre superficies sumergidas

Cuando se va a diseñar canales, compuertas, barcos, submarinos y otros, es necesario estudiar las fuerzas que se originan por la acción de la presión sobre superficies sumergidas. Para que queden completamente determinadas estas fuerzas es necesario especificar: la magnitud, dirección y sentido a sí como su línea de acción de la fuerza resultante. En esta sección se estudiará las fuerzas debidas a la presión sobre superficies planas y curvas, sumergidas en líquidos.

### 3.2.6.1 Fuerza hidrostática sobre una superficie plana horizontal sumergida en un fluido estático incompresible

En la figura 3.13, se muestra una superficie plana en posición horizontal sumergida en un fluido, entonces ella estará sometida a una presión constante.



**Figura 3.13.** Fuerza hidrostática sobre una superficie plana sumergida

La fuerza debida a la presión que actúa sobre el elemento de área  $d\vec{A}$ , de la cara superior de la superficie es

$$d\vec{F} = -pdA\vec{k} \quad (3.38)$$

Debido a que la dirección positiva de  $d\vec{A}$  es perpendicular a la superficie y dirigido hacia fuera, el signo menos de la ecuación (3.38) indica que la fuerza  $d\vec{F}$  actúa en contra de la superficie, es decir en dirección opuesta a  $d\vec{A}$ .

La fuerza resultante  $\vec{F}_R$  que actúa sobre toda la placa se puede obtener integrando sobre toda la superficie la ecuación (3.39). Esto es

$$\vec{F}_R = -\int_A pdA\vec{k} \quad (3.39)$$

Teniendo en cuenta que la presión es una función de la profundidad y esta dado por ( $p = p_0 + \rho gh$ ), la ecuación (3.39) se escribe

$$\vec{F}_R = -\int_A (p_0 + \rho gh)dA\vec{k} \quad (3.40)$$

Puesto que la superficie se encuentra horizontal todos los puntos de ella están a la misma profundidad  $h$ , entonces

$$\vec{F}_R = (p_0 + \rho gh) \int_A dA \vec{k}$$

$$\vec{F}_R = (p_0 + \rho gh) A \vec{k} \quad (3.41)$$

El punto de aplicación de la fuerza resultante (*centro de presiones*) se determina utilizando el criterio de que. *El momento  $\vec{F}_R$  con respecto a los ejes  $x$  ó  $y$  es igual al momento del conjunto de fuerzas distribuidas respecto al mismo eje  $x$  ó  $y$ .* Siendo el vector de posición de  $\vec{F}_R$  con respecto al punto  $O$  y  $\vec{r}$  el vector de posición de  $d\vec{F}$ , respecto al mismo punto, se tiene

$$x_C F_R = \int_A x p dA \quad (3.42)$$

$$y_C F_R = \int_A y p dA \quad (3.43)$$

Reemplazando la magnitud de  $F_R$  y el valor de la presión a una profundidad  $h$  en la ecuación (3.42), tenemos

$$x_C (p_0 + \rho gh) A = \int_A x (p_0 + \rho gh) dA$$

$$x_C = \frac{1}{A} \int_A x dA$$

$$x_C = \bar{x} \quad (3.44)$$

Siendo  $\bar{x}$  la distancia al centroide, además

$$y_C (p_0 + \rho gh) = \int_A y (p_0 + \rho gh) dA$$

$$y_C = \frac{1}{A} \int_A y dA$$

$$y_C = \bar{y} \quad (3.45)$$

Donde  $\bar{y}$  es la distancia al centroide.

Las ecuaciones (3.44) y (3.45) indican que la fuerza resultante está dirigida perpendicularmente a la superficie hacia abajo y actúa en el centroide de la placa.

### 3.2.6.2. Fuerza hidrostática sobre una superficie plana inclinada sumergida en un fluido estático incompresible

Consideremos ahora el caso general de una superficie plana inclinada sumergida como se muestra en la figura 3.14, localizada en un plano inclinado un ángulo  $\theta$  con respecto a la horizontal. El plano XY contiene a la superficie. Para encontrar la fuerza resultante se divide a la superficie en elementos de área  $dA$ . Debido a que el fluido esta en reposo no existe esfuerzos cortantes, entonces la fuerza actuará perpendicularmente a  $dA$ . Esto es

$$d\vec{F} = -p dA \vec{k} \quad (3.46)$$

Teniendo en cuenta que la presión a una profundidad  $h$  es  $p = p_0 + \rho gh$ , la ecuación (3.46) se escribe



$$d\vec{F} = -(p_0 + \rho_0 gh) dA\vec{k}$$

De la figura se tiene además que  $h = y \operatorname{sen}\theta$ , entonces

$$d\vec{F} = -(p_0 + \rho_0 gy \operatorname{sen}\theta) dA\vec{k} \quad (3.47)$$

La fuerza resultante sobre toda la superficie se obtiene integrando la ecuación (46), esto es

$$\begin{aligned} \vec{F} &= -\int_A (p_0 + \rho gy \operatorname{sen}\theta) dA\vec{k} \\ \vec{F} &= -\int_A p_0 dA\vec{k} - \int_A \rho gy \operatorname{sen}\theta dA\vec{k} \\ \vec{F} &= -p_0 A\vec{k} - \rho g \operatorname{sen}\theta \int_A y dA\vec{k} \end{aligned} \quad (3.48)$$

Teniendo en cuenta la definición de centroide  $y_C A = \int y dA$ , resulta

$$\vec{F} = -p_0 A\vec{k} - \rho g A y_C \operatorname{sen}\theta \vec{k} \quad (3.49)$$

De la figura 3.14, se observa que  $h_{CG} = y_C \operatorname{sen}\theta$ , entonces la ecuación anterior se escribe

$$\vec{F} = -(p_0 + \rho gh_{CG}) A \vec{k} \quad (3.50)$$

La magnitud de la fuerza resultante ejercida por los fluidos sobre la superficie es

$$F = (p_0 + \rho gh_{CG}) A \quad (3.51)$$

Asumiendo que la presión en el centro de gravedad  $p_C = p_0 + \rho gh_{CG}$ , la ecuación (3.51) se escribe

$$F = p_C A \quad (3.52)$$

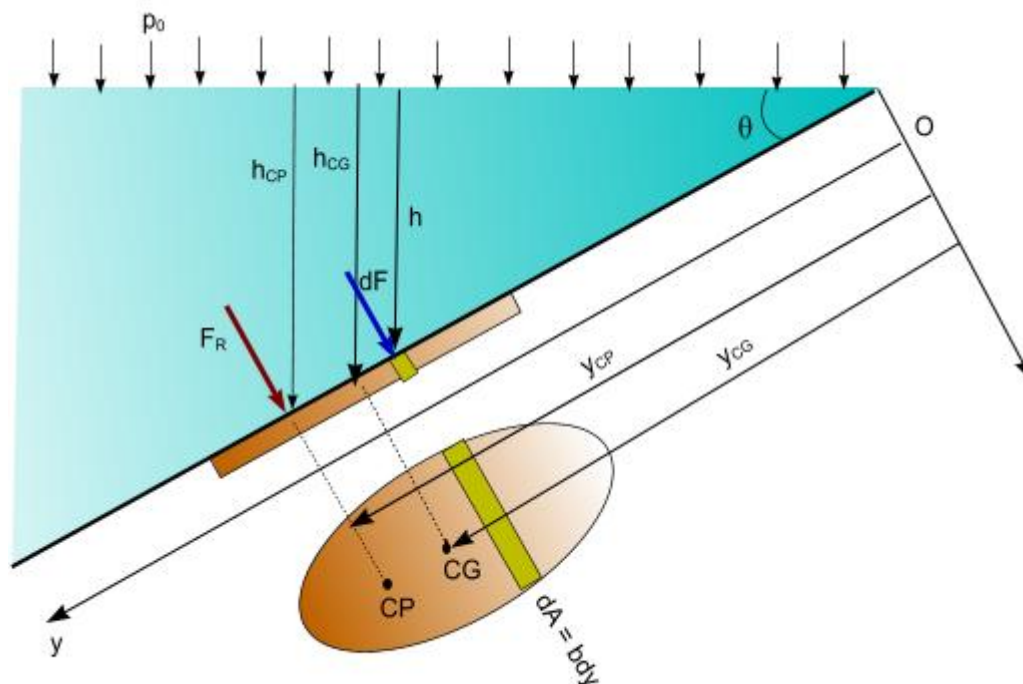


Figura 3.14. Fuerza hidrostática sobre una superficie plana inclinada

Las coordenadas del punto de aplicación de la fuerza resultante (Centro de presiones) se determinan utilizando el principio de momentos. *El momento de la fuerza resultante con respecto a los ejes x o y es igual al momento de las fuerzas distribuidas respecto a los mismos ejes.*

La coordenada  $y_{CP}$  se obtiene tomando momentos con respecto al eje x, esto es

$$\begin{aligned} y_{CP}p_C A &= \int_A y(p_0 + \rho gh) dA \\ &= p_0 \int_A y dA + \rho g \operatorname{sen} \theta \int_A y^2 dA \\ y_{CP}p_C A &= p_0 A y_{CG} + \rho g \operatorname{sen} \theta I_{xx} \end{aligned} \quad (3.53)$$

Donde  $I_{xx} = \int_A y^2 dA$ , es el momento de inercia de área respecto al eje x. Utilizando el teorema de Steiner el momento de inercia se escribe ( $I_{xx} = I_{Gx} + A y_{CG}^2$ ), en esta ecuación  $I_{Gx}$  es el momento de inercia de área respecto a un eje que pasa por el centro de gravedad de la compuerta. La ecuación (52) se escribe

$$\begin{aligned} y_{CP}p_C A &= p_0 A y_{CG} + \rho g \operatorname{sen} \theta (I_{Gx} + A y_{CG}^2) \\ y_{CP}p_C A &= (p_0 + \rho g \operatorname{sen} \theta y_{CG}) A y_{CG} + \rho g \operatorname{sen} \theta I_{Gx} \\ y_{CP}p_C A &= (p_0 + \rho g h_{CG}) A y_{CG} + \rho g \operatorname{sen} \theta I_{Gx} \\ y_{CP}p_C A &= p_C A y_{CG} + \rho g \operatorname{sen} \theta I_{Gx} \\ y_{CP} &= y_{CG} + \frac{\rho g \operatorname{sen} \theta I_{Gx}}{p_C A} \end{aligned} \quad (3.54)^*$$

La coordenada  $x_{CP}$  se obtiene tomando momentos con respecto al eje y, esto es

$$\begin{aligned} x_{CP}p_C A &= \int_A x(p_0 + \rho gh) dA \\ &= p_0 \int_A x dA + \rho g \operatorname{sen} \theta \int_A xy dA \\ x_{CP}p_C A &= p_0 A x_{CG} + \rho g \operatorname{sen} \theta I_{xy} \end{aligned} \quad (3.55)$$

Donde  $I_{xy} = \int_A xy dA$ , es el producto de inercia de área. Utilizando el teorema de Steiner, el producto de inercia se escribe ( $I_{xy} = I_{Gxy} + A x_{CG} y_{CG}$ ), en esta ecuación  $I_{Gxy}$  es el producto de inercia de área respecto a los x e y que pasan por el centro de gravedad de la compuerta. La ecuación (3.55) se escribe

$$\begin{aligned} x_{CP}p_C A &= p_0 A x_{CG} + \rho g \operatorname{sen} \theta (I_{Gxy} + A x_{CG} y_{CG}) \\ x_{CP}p_C A &= p_0 A x_{CG} + \rho g A \operatorname{sen} \theta x_{CG} y_{CG} + \rho g \operatorname{sen} \theta I_{Gxy} \\ x_{CP}p_C A &= (p_0 + \rho g h_{CG}) A x_{CG} + \rho g \operatorname{sen} \theta I_{Gxy} \\ x_{CP}p_C A &= p_C A x_{CG} + \rho g \operatorname{sen} \theta I_{Gxy} \\ x_{CP} &= x_{CG} + \frac{\rho g \operatorname{sen} \theta I_{Gxy}}{p_C A} \end{aligned} \quad (3.56)^*$$

Las ecuaciones (3.55) y (3.56) indican que el centro de presiones está mucho más abajo del centroide, tal como lo muestra la figura 3.15.

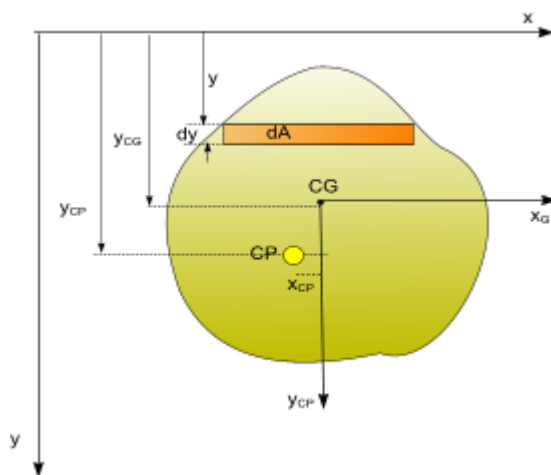


Figura 3.15. Localización del centro de presiones

3.2.6.3. Fuerza hidrostática sobre una superficie curva sumergida en fluidos estáticos.

Cuando la placa sumergida es curva, la presión que actúa perpendicularmente, cambia de dirección continuamente, y por consiguiente, el cálculo de la magnitud de la fuerza resultante  $\vec{F}_R$  y su localización (*centro de presiones*) es más difícil que para el caso de una superficie plana, pero puede determinarse con facilidad mediante el cálculo de sus componentes horizontal y vertical, respectivamente. Considere las fuerzas sobre la porción curvada AB mostrada en la figura 3.16a. Sobre cada elemento de superficie  $dA$ , se puede calcular la magnitud, la dirección (normal al elemento), y la localización de la fuerza de presión por medio de los principios anteriores, y estas conducirán a la distribución de presión indicada, que se puede reducir a una única fuerza resultante  $\vec{F}_R$ , de componentes,  $F_H$  y  $F_V$ , según se muestra en la figura 3.16b.

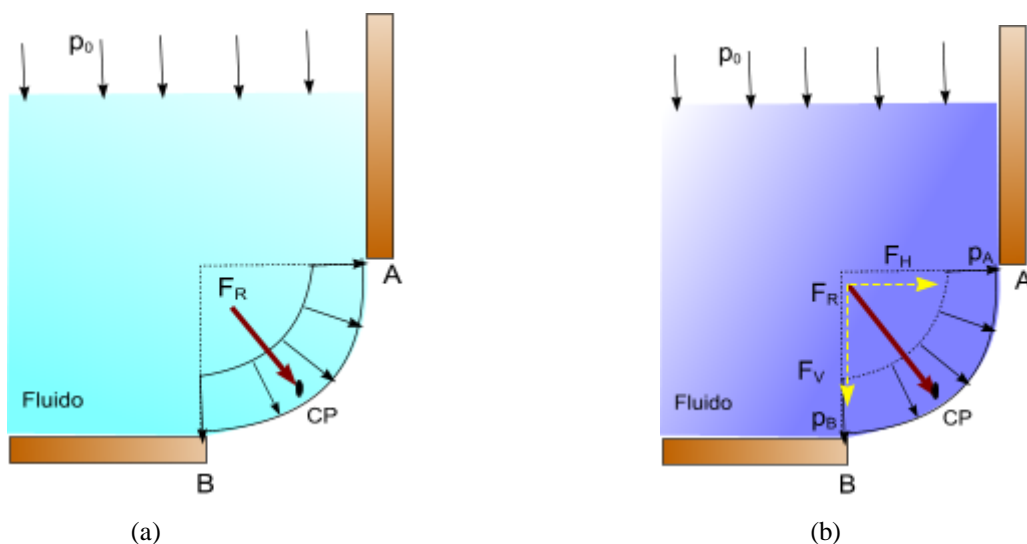


Figura 3.16 (a) Vista de una superficie curva AB (b) vista de la distribución de presión sobre AB y las componentes de la fuerza distribuida sobre la superficie curva.

El análisis del cuerpo de fluido ABC mostrado en la figura 3.17, permite el cálculo de las componentes de la fuerza resultante ejercida por la superficie AB,  $F_H$  y  $F_V$ , sobre el fluido, y posteriormente las respectivas e iguales y opuestas  $F_H$  y  $F_V$ ,

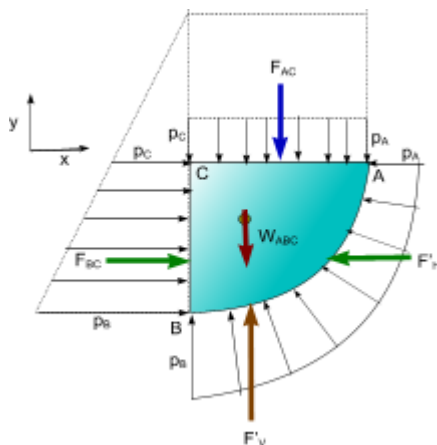


Figura 3.17. Cálculo de las componentes de la fuerza hidrostática sobre una superficie curva

Del diagrama de cuerpo libre estático se tiene,

$$\sum F_x = F_{BC} - F_H = 0 \quad \Rightarrow \quad F_H = F_{BC} \quad (3.57)$$

$$\sum F_y = F_V - F_{AC} - W_{ABC} = 0 \Rightarrow F_V = F_{AC} + W_{ABC} \quad (3.58)$$

De la incapacidad del cuerpo libre de fluido de soportar esfuerzos cortantes se desprende que  $F_H$  debe ser colineal con  $F_{BC}$  y que  $F_V$  debe ser colineal con la resultante de  $F_{AC}$  y  $W_{ABC}$ .

El análisis anterior reduce el problema a cálculo de la magnitud y de la localización de  $F_{BC}$ ,  $F_{AC}$  y  $W_{ABC}$ . Para determinar  $F_{BC}$  y  $F_{AC}$  se usa los métodos usados para determinar fuerzas sobre placas planas sumergidas, en tanto que  $W_{ABC}$  es el peso del cuerpo libre del fluido y actúa necesariamente sobre su centro de gravedad. La fuerza resultante sobre un área como la descrita, se puede obtener por la aplicación de los métodos de la sección anterior. Se encontrará que la componente horizontal  $F_H$  pasa por el centroide de la proyección vertical el área, y que la componente vertical pasará a través del centroide de la proyección horizontal del área.

Existe otra técnica mediante la cual los ingenieros obtienen las componentes de las fuerzas resultantes producidas por distribuciones de presión sobre superficies curvas. El método puede aprenderse utilizando a figura 3.18, la presión puede variar de cualquier manera desde  $p_A$  en A hasta  $p_B$  en B pero la presión sobre cualquier elemento de área  $dA$ , es perpendicular a  $dA$ . La fuerza diferencial sobre  $dA$  es  $pdA$ , y el ángulo  $\theta$  define la pendiente de  $dA$  con relación al conjunto de ejes  $x$  e  $y$ .

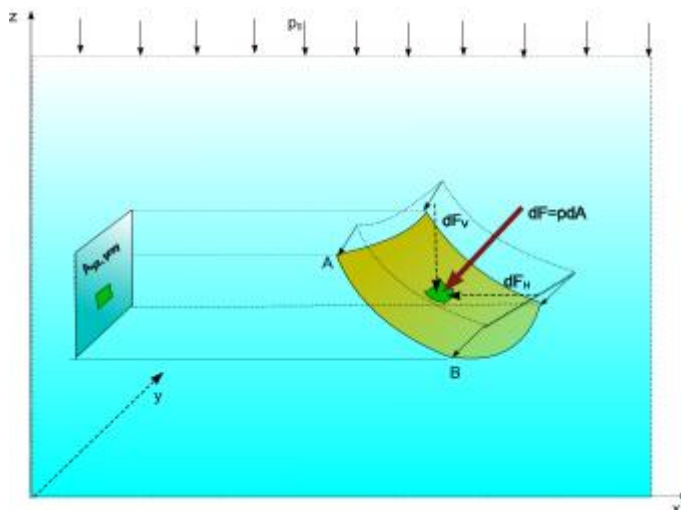


Figura 13.8. Determinación de la componente horizontal de la fuerza hidrostática.

La **componente horizontal** de esta fuerza paralela al eje x, es

$$dF_H = dF \sin \theta = p dA \sin \theta \quad (3.59)$$

La fuerza resultante horizontal sobre la superficie se obtiene integrando la ecuación anterior, esto es

$$F_H = \int dF_x = \int p dA \sin \theta \quad (3.60)$$

De la figura puede observarse que la proyección de  $dA$  sobre el plano perpendicular a x es  $\sin \theta dA$ . El elemento de fuerza sobre el área proyectada es  $p dA \sin \theta$  que tiene también la dirección del eje x. proyectando cada elemento sobre un plano perpendicular a x es equivalente a proyectar toda la superficie como u todo sobre el plan. De aquí que:

*La componente horizontal de la fuerza debida a las presiones sobre una superficie curva es igual a la fuerza debida a las presiones que se ejercería sobre la proyección de la superficie curva. El plano vertical de proyección es normal a la dirección de la componente.*

Bajo estas consideraciones la ecuación (59) se escribe

$$F_H = \int p dA_{yz} = \int \gamma z dA_{yz} = \gamma \int z dA_{yz} \quad (3.61)$$

Teniendo en cuenta que  $z_{CG} = \frac{1}{A_z} \int z dA_{yz}$ , la ecuación (60) se escribe

$$F_H = \gamma z_{CG} A_{yz, proy} \quad (3.62)$$

Para encontrar la línea de acción de la componente horizontal de la fuerza que actúa sobre la superficie curva, se usa el teorema de momentos, eso es

$$\begin{aligned} z_C F_H &= \int \gamma z dA_{yz} \\ z_C &= \frac{1}{F_H} \int \gamma z dA_{yz} \end{aligned} \quad (3.63)$$

La componente vertical de la fuerza, paralela al eje z, es

$$dF_V = dF \cos \theta = p dA \cos \theta \quad (3.64)$$

Sumando las componentes según el eje z de las fuerzas sobre a superficie curva se obtiene

$$F_V = \int dF_V = \int p dA \cos \theta \quad (3.65)$$

De la figura 3.19, se observa que la proyección de  $dA$  sobre el plano perpendicular a z es  $\cos \theta dA$ , con lo que la ec. (64) se escribe

$$F_V = \int p dA_{xy} = \int \gamma h dA_{xy} \quad (3.66)$$

Pero  $h dA_{xy}$  es el volumen de fluido situado verticalmente por encima del elemento de área, entonces

$$F_V = \gamma \int dV = \gamma V \quad (3.67)$$

Por lo tanto: *La componente vertical debida a las presiones sobre una superficie curva es igual al peso del fluido situado verticalmente por encima de la superficie curva y extendida hasta la superficie libre.*

La línea de acción de la componente vertical se determina igualando los momentos de las componentes diferencias verticales, respecto a un eje convenientemente elegido, con el momento de la fuerza resultante respecto al mismo eje, esto es

$$x_C F_V = \gamma \int x dV \quad (3.68)$$

Donde  $x_C$ , es la distancia desde el eje  $y$  a la línea de acción de  $F_V$ , al remplazar la ecuación (66) en la ecuación (67), resulta

$$x_C = \frac{1}{F_V} \int x dV \quad (3.69)$$

Es decir la fuerza vertical pasa por el centroide del volumen de fluido real imaginario que se extiende por encima de la superficie curva hasta la superficie libre real o imaginaria.

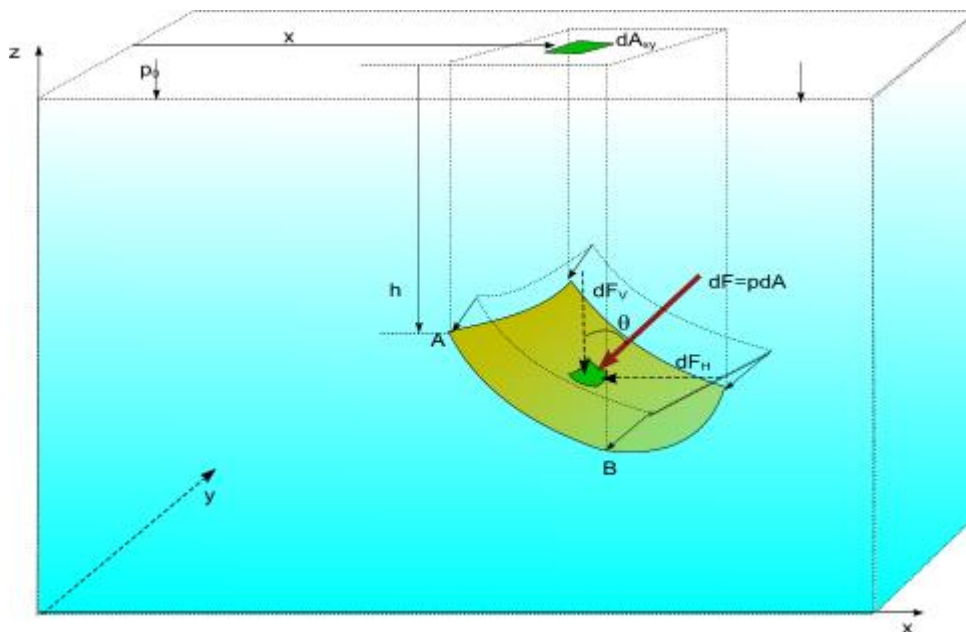


Figura 3.19. Determinación de la componente vertical de la fuerza hidrostática

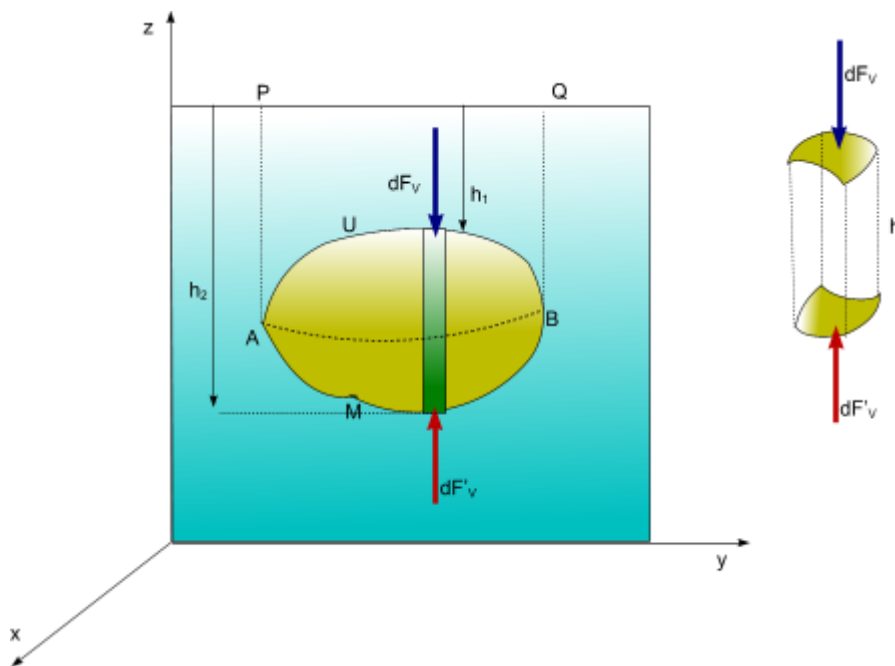
### 3.3 BOYANTEZ (EMPUJE) Y FLOTACION.

#### 3.3.1 Flotación.

Cuando un cuerpo se encuentra total o parcialmente sumergido en un fluido experimenta una fuerza ascendente que actúa sobre él llamada **fuerza de empuje o flotación**. La causa de esta fuerza es la diferencia de presiones existentes sobre las superficies superior e inferior. Las leyes de boyantez o empuje se enuncian:

- 1° Un cuerpo sumergido en un fluido experimenta una fuerza de flotación (empuje) verticalmente hacia arriba igual al peso de fluido que desaloja.
- 2° Un cuerpo que flota desplaza un volumen de fluid equivalente a su propio peso.

Para demostrar la primera de éstas leyes consideremos un cuerpo totalmente sumergido en un fluido como se muestra en la Figura 3.20.



**Figura 3.20.** *Cuerpo cerrado, sumergido completamente en un fluido*

La superficie de cuerpo se ha dividido en dos partes una superior AUB y la inferior AMB, mediante una curva, dibujada en línea de trazos.

*La fuerza de flotación o empuje sobre el cuerpo sumergido es la diferencia entre la componente vertical debida a la presión sobre la parte inferior AMB y la componente vertical de la fuerza debida a la presión sobre la parte superior AUB. Esto es*

$$\begin{aligned}
 dF_B &= dF_V - dF_V \\
 dF_B &= p dA - p dA \\
 dF_B &= (p_0 + \gamma h_2) dA - (p_0 + \gamma h_1) dA \\
 dF_B &= \gamma (h_2 - h_1) dA \\
 dF_B &= \gamma h dA \tag{3.70}
 \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que  $h dA = dV$ , es el volumen del elemento diferencial, se tiene

$$dF_B = \gamma dV$$

Al integrar la ecuación anterior resulta

$$\begin{aligned}
 F_V &= \int dF_V = \int \gamma dV \\
 F_V &= \gamma V \tag{3.71}
 \end{aligned}$$

Donde  $\gamma$ , es el peso específico del líquido considerado en este caso constante y  $V$  es el volumen del cuerpo sumergido.

Para encontrar la línea de acción de la fuerza de flotación se toma momentos de la fuerza diferencial alrededor de un eje conveniente y se iguala al momento de la resultante con respecto al mismo eje, esto es

$$y_C F_V = \int \gamma y dV$$

Al remplazar la ecuación (3.71) en la ecuación anterior resulta

$$y_c = \frac{1}{V} \int y dV \quad (3.72)$$

En esta ecuación  $y_c$ , es la distancia del eje a la línea de acción de la fuerza de flotación, que en este caso es la distancia del eje al centroide del volumen; por tanto.

**La línea de acción de la fuerza de flotación pasa a través del centroide del volumen de fluido desplazado.**

Esto es válido tanto como para cuerpos sumergidos así como para cuerpos que flotan en fluidos. Al centroide se le da el nombre de **centro de flotación**.

Esta información acerca de la magnitud la línea de acción de las fuerzas de flotación se conoce como primer principio de flotación de Arquímedes, ya que fue él quien lo descubrió en el año 220 antes de Cristo.

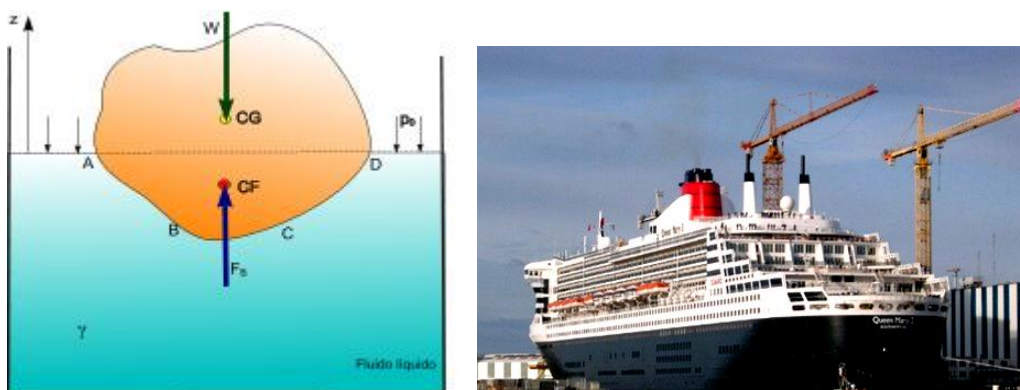
Un análisis similar probará que para un cuerpo que flota, tal como se muestra en la figura 3.21, la fuerza de flotación viene expresada en la forma

$$F_V = \gamma V_{desplazado} \quad (3.73)$$

Al evaluar el equilibrio estático del cuerpo se observa que el peso  $W$ , debe ser igual a la fuerza de flotación o empuje  $F_V$ , por tanto. *Un cuerpo que flota desplaza un volumen de fluido equivalente a su propio peso.* Eso es

$$W = \gamma V_S \quad (3.74)$$

Donde:  $\gamma$ , es el peso específico del fluido desalojado y  $V_S$  el volumen sumergido (volumen ABCD).



**Fig. 21. Cuerpo sumergido parcialmente en un fluido líquido**

Por otro lado, cuando el cuerpo flota en la superficie de separación de dos fluidos inmiscibles como se muestra en la figura 3.22, la fuerza de flotación sobre un prisma vertical de sección recta  $dA$ , es

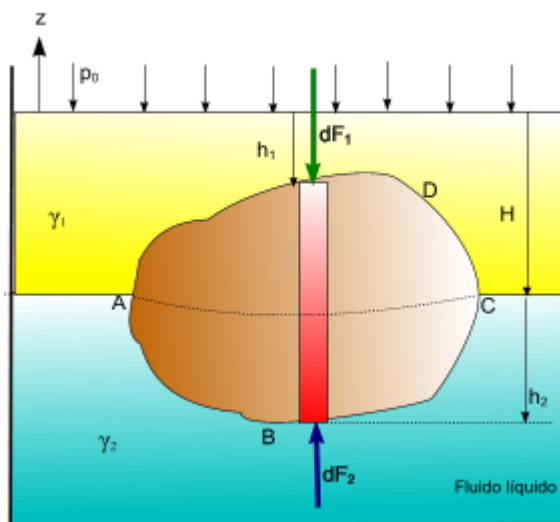
$$\begin{aligned} dF_B &= (p_2 - p_1)dA \\ dF_B &= [(\gamma_1 H + \gamma_2 h_2) - \gamma_1(H - h_1)]dA \\ dF_B &= (\gamma_2 h_2 + \gamma_1 h_1) \end{aligned} \quad (3.75)$$

Donde  $\gamma_2$  y  $\gamma_1$  son los pesos específicos de los fluidos denso y menos denso respectivamente. Al integrar la ecuación anterior resulta



$$F_B = \gamma_2 \int h_2 dA + \gamma_1 \int h_1 dA$$

$$F_B = \gamma_2 V_2 + \gamma_1 V_1 \tag{3.76}$$



**Figura 3.22. Cuerpo flotando en la interface de dos líquidos inmiscibles**

Para ubicar la fuerza de flotación se toma momentos respecto a un eje convenientemente elegido esto es

$$y_C F_V = \gamma_1 \int y_1 dV_1 + \gamma_2 \int y_2 dV_2$$

$$y_C = \frac{\gamma_1 y_{C1} V_1 + \gamma_2 y_{C2} V_2}{\gamma_2 V_2 + \gamma_1 V_1} \tag{3.77}$$

### 3.3.2 Estabilidad de cuerpos sumergidos

La estabilidad puede demostrarse evaluando la estabilidad vertical de un cuerpo flotante. Si el cuerpo se eleva una distancia pequeña, la fuerza de flotación disminuye y el peso del cuerpo regresa a éste último a su posición original. Por otro lado, si un cuerpo flotante se hunde un poco, la fuerza de flotación aumenta y regresa al cuerpo a su posición original. Esto indica que un cuerpo flotante tiene estabilidad vertical porque una desviación pequeña respecto a su posición de equilibrio da lugar a una fuerza de restauración

Consideremos ahora la estabilidad rotacional de un cuerpo sumergido mostrado en la figura 3.23 en la parte (a) el centro de gravedad G del cuerpo está arriba del centro de flotación C del volumen desplazado, y una rotación angular pequeña produce un momento que continuará impulsando la rotación; por tanto, el cuerpo es inestable y se vuelca. Si el centro de gravedad está por debajo del centro de flotación como en la parte (c) una rotación angular pequeña produce un momento restaurador y el cuerpo en este caso es estable. En la parte (b) se observa la estabilidad neutral en el que el centro de gravedad coincide con el centro de flotación. Esta situación se observa en aquellos casos en donde la densidad es constante en todos los puntos del cuerpo sumergido.

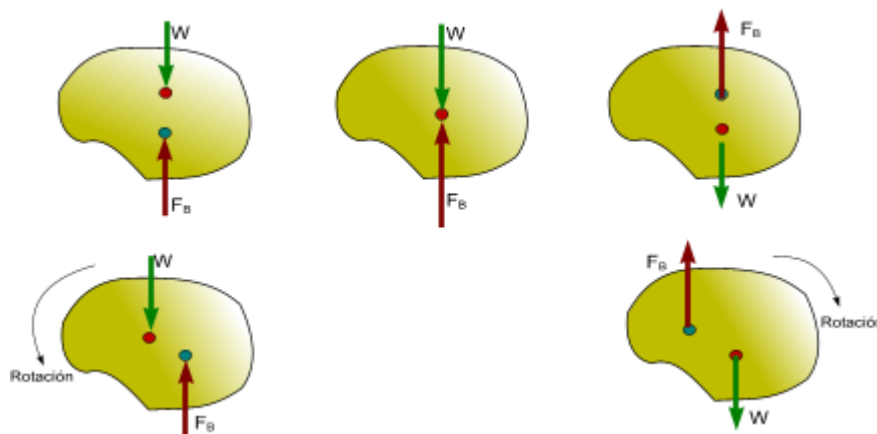


Figura 3.23 Estabilidad de un cuerpo sumergido: (a) inestable; (b) neutral; (c) estable

Ahora se considera la estabilidad rotacional del cuerpo flotante. Si el centro de gravedad está por debajo del centro de flotación, el cuerpo es siempre estable (ver figura 3.23c). Sin embargo, existe algunas situaciones en el cual el cuerpo puede ser estable si G está por encima de C esta situación se muestra en la figura 3.24a. Cuando el cuerpo gira, el centro de flotación del volumen de fluido desplazado se mueve a un nuevo punto C', que se muestra en la figura 3.24b. Si el centro de flotación se desplaza lo suficiente, surge un momento restaurador y el cuerpo es estable. Esto lo determina la *altura metacéntrica GM* definida como la distancia desde G hasta el punto de intersección de la fuerza de flotación antes de la rotación con la fuerza de flotación después de la rotación. Si GM es positiva como se muestra, el cuerpo es estable; si GM es negativa (M está debajo de G) el cuerpo es inestable.

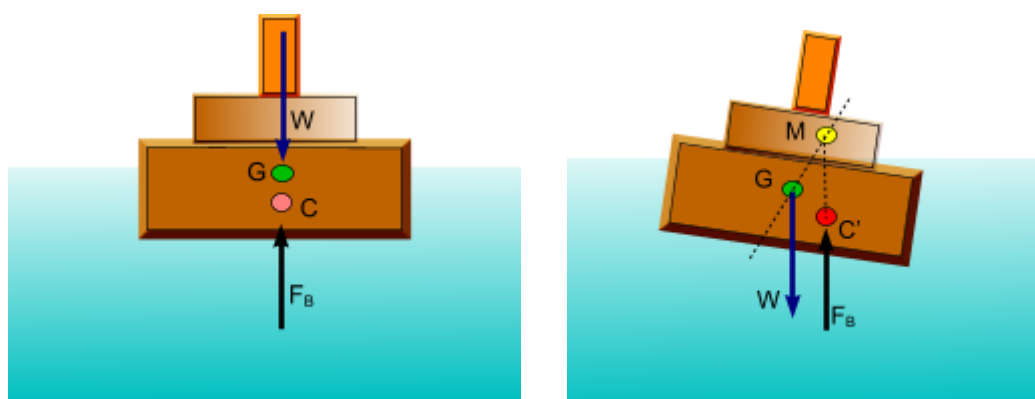


Figura 3.24 Estabilidad de un cuerpo flotante: (a) posición de equilibrio; (b) posición girada.

Para determinar una relación cuantitativa de GM utilicemos la figura 3.25. Para esto determinemos la coordenada  $x$  del centro de flotación del fluido desplazado  $\bar{x}$ . Esto puede hacerse considerando que el volumen es igual a la suma del volumen de fluido original más el volumen de la cuña cuya área transversal es DOE, menos la sección en forma de cuña restada que tiene área de sección transversal AOB. Para ubicar el centro de flotación del volumen compuesto, tomamos momentos como sigue

$$\bar{x}V = \bar{x}_0V_0 + \bar{x}_1V_1 - \bar{x}_2V_2 \tag{3.78}$$

Donde  $V_0$  es el volumen original por debajo de la línea de flotación,  $V_1$  es el área DOE multiplicada por su longitud y  $V_2$  es el área AOB multiplicada por la longitud. Se supone que la sección transversal es uniforme de modo que la longitud  $l$  es constante. La cantidad  $\bar{x}_0$  es la coordenada  $x$  del centro de flotación, es cero. La mejor manera de representar los dos términos restantes es con integrales, esto es

$$\bar{x}V = \int_{V_1} x dV - \int_{V_2} x dV \tag{3.79}$$

Entonces  $dV = x \tan \alpha dA$  es el volumen 1 y  $dV = -x \tan \alpha dA$  es el volumen 2, donde  $dA = l dx$ . Entonces la ecuación (3.79) se escribe

$$\begin{aligned} \bar{x}V &= \tan \alpha \int_{A_1} x^2 dA + \tan \alpha \int_{A_2} x^2 dA \\ &= \tan \alpha \int_A x^2 dA \\ \bar{x}V &= \tan \alpha I_0 \end{aligned} \tag{3.80}$$

Donde  $I_0$  es el momento de inercia del área de línea de flotación alrededor de un eje que pasa por el origen O. El área de línea de flotación sería la longitud  $\overline{AE}$  multiplicada por la longitud  $l$  del cuerpo si  $l$  es constante. De la figura puede observarse además que  $\bar{x} = \overline{CM} \tan \alpha$ , se puede escribir

$$\overline{CM} V = I_0 \tag{3.81}$$

Finalmente se obtiene

$$\overline{GM} = \frac{I_0}{V} - \overline{CG} \tag{7.82}$$

De la ecuación anterior si GM es positiva es cuerpo es estable. Debe indicarse además que aunque la deducción fue realizada para un cuerpo de sección uniforme los resultados son válidos para cualquier cuerpo en general.

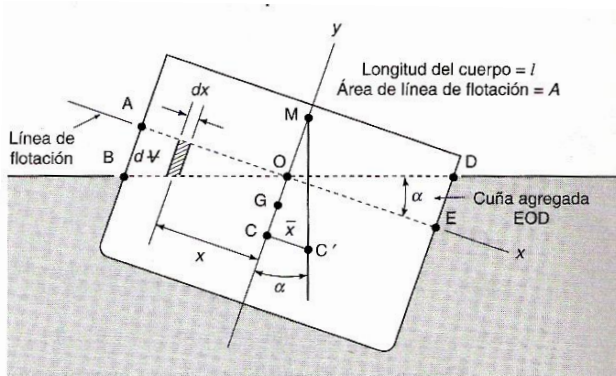
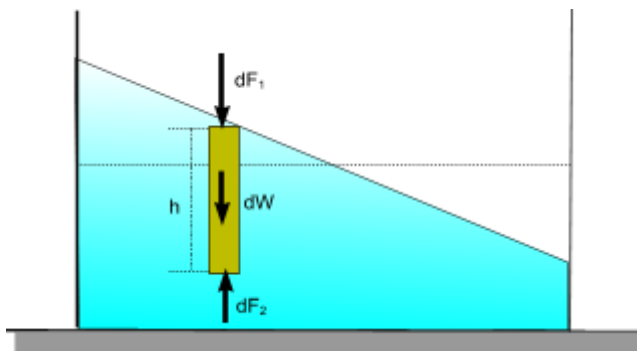


Figura 3.25 Sección transversal uniforme de un cuerpo flotante

### 3.4 TRASLACION Y ROTACIÓN DE MASAS LÍQUIDAS

#### 3.4.1 Líquido bajo aceleración horizontal uniforme.

Consideremos un recipiente abierto conteniendo un líquido tal como se muestra en la Fig. 23, sometido a una aceleración uniforme horizontal. En la figura se observa que después de ser sometido a dicha aceleración el líquido por si mismo se dispone de tal forma que se mueve como un sólido sometido a una fuerza aceleradora. Para determinar la variación de presión en dirección vertical se considera el DCL de una porción de fluido en forma vertical y se aplica la segunda ley de Newton.



**Figura 3.26.** Variación de la presión con la profundidad en un fluido con movimiento acelerado horizontalmente.

Debido a que el movimiento es como un sólido, los esfuerzos cortantes se desprecian, entonces la segunda ley de Newton en dirección vertical nos da

$$\begin{aligned}\sum F_y &= ma_y \\ dF_2 - dF_1 - dW &= m(0) \\ p_2 dA - p_1 dA &= \rho g dV \\ (p_0 + p) dA - p_0 dA &= \rho g h dA \\ p &= \rho g h\end{aligned}\quad (3.83)$$

La ecuación anterior establece que la variación de la presión en dirección vertical es la misma que la de un fluido en reposo relativo.

Para determinar la variación de presión en la dirección horizontal, se considera el DCL en la posición horizontal tal como se muestra en la figura 3.26, y se aplica la segunda ley de Newton, esto es

$$\begin{aligned}\sum F_x &= ma_x \\ dF_2 - dF_1 &= (dm)a_x \\ (p_0 + \gamma h_1) dA - (p_0 + \gamma h_2) dA &= \rho dV(a_x) \\ \rho g(h_1 - h_2) dA &= \rho g L dA(a_x) \\ \frac{h_1 - h_2}{L} &= \frac{a_x}{g}\end{aligned}\quad (3.84)$$

De la figura se observa además que  $\left(\frac{h_1 - h_2}{L}\right)$  es la pendiente de la superficie libre, esto es

$$\tan \theta = \frac{h_1 - h_2}{L} = \frac{a_x}{g}\quad (3.85)$$

La ecuación (3.85) indica que cuando el fluido es sometido a una aceleración constante, la superficie libre del fluido es un plano inclinado de pendiente constante y dependiente de la aceleración.

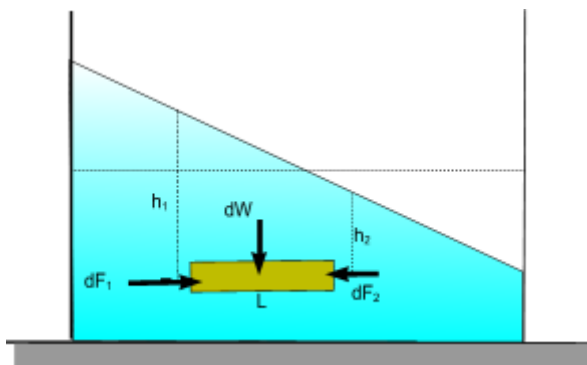


Figura 3.27. Variación de la presión en dirección horizontal en un fluido sometido a aceleración constante

3.4.2 Líquido bajo aceleración uniforme vertical.

Consideremos ahora el movimiento de un depósito conteniendo un fluido de densidad  $\rho$ , en dirección vertical con una aceleración  $a_y$ . La figura 3.28, muestra que en este caso la superficie libre permanece horizontal durante el movimiento. Es decir la presión en planos horizontales permanece constante, pero en dirección vertical no, para verificar la variación en dicha dirección se traza el DCL de una porción de fluido como se muestra y se aplica la segunda ley de Newton, es decir

$$\begin{aligned} \sum F_y &= ma_y \\ dF_2 - dF_1 - dW &= (dm)a_y \\ (p_0 + p_2)dA - (p_0 + p_1)dA - \rho g dV &= \rho \cdot dV \cdot a_y \\ (p_2 - p_1)dA - \rho g h dA &= \rho \cdot h \cdot dA \cdot a_y \\ (p_2 - p_1) &= \rho h(g + a_y) \end{aligned} \tag{3.86}$$

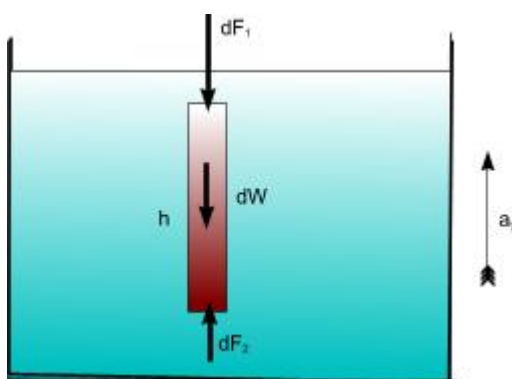


Figura 3.28 Variación de la presión en dirección vertical para un fluido con movimiento vertical y aceleración uniforme

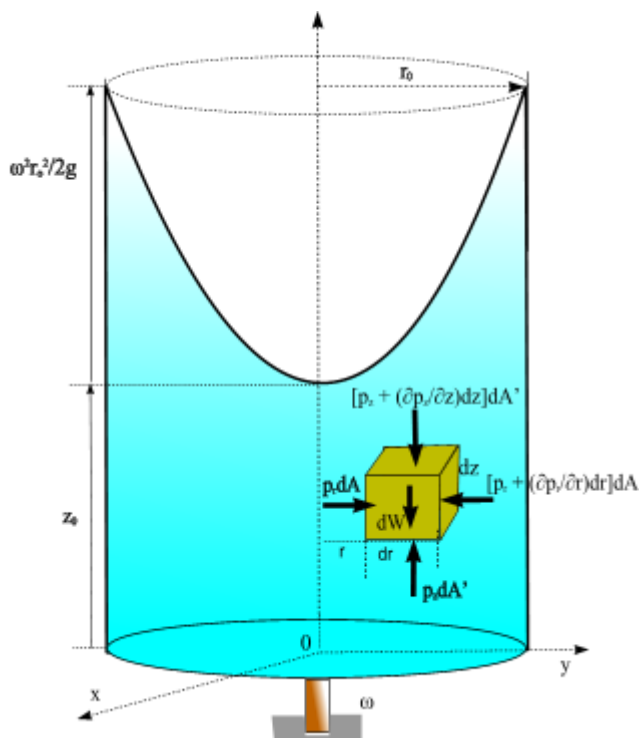
La ecuación (3.86) indica que la presión en la dirección vertical varía con la profundidad y con la aceleración aplicada al depósito. Un caso particular es aquel en el cual se deja caer libremente el depósito desde cierta altura, aquí  $a_y = -g$ , con cual resulta.

$$\begin{aligned} (p_2 - p_1) &= \rho h(g + (-g)) \\ p_2 &= p_1 \end{aligned} \tag{3.87}$$

Esto indica que cuando el depósito cae libremente la presión es la misma en todos los puntos del fluido.

**3.4.3 Líquido bajo rotación uniforme alrededor de un eje vertical.**

Consideremos ahora un recipiente cilíndrico con un líquido que se mantiene con una rotación uniforme a una velocidad angular constante  $\omega$ , girando alrededor del eje z, tal como se muestra en la figura 3.29. En este caso cada una de las partículas del fluido describe circunferencias con la misma velocidad angular, es decir el fluido se mueve como un sólido cuando se alcanza dicha velocidad angular, por ello no existe esfuerzos cortantes y la única aceleración que existe es la aceleración centrípeta dirigida hacia el eje de rotación.



**Figura 3.29** Variación de la presión para un fluido sometido a una velocidad angular uniforme  $\omega$ .

Del DCL de fluido, se observa que las variaciones de la presión en la dirección vertical es análoga al caso hidrostático, esto es

$$\begin{aligned} \sum F_z &= ma_z \\ dF_2 - dF_1 - dW &= 0 \\ (p_z)dA - \left(p_z + \frac{\partial p_z}{\partial z} dz\right) dA &= \rho g dV \end{aligned}$$

Simplificando la ecuación anterior se obtiene

$$\frac{\partial p_z}{\partial z} = -\rho g \tag{3.88}$$

Analizado el movimiento en dirección radial obtenemos

$$\sum F_r = ma_n$$

$$\begin{aligned}
 dF'_2 - dF'_1 &= (dm)(\omega^2 r) \\
 \left(p_r + \frac{\partial p_r}{\partial r} dr\right) dA' - p_r dA' &= \rho dV(\omega^2 r) \\
 \frac{\partial p_r}{\partial r} dr dA' &= \rho dr dA'(\omega^2 r) \\
 \frac{\partial p_r}{\partial r} dr &= \rho \omega^2 r
 \end{aligned} \tag{3.89}$$

Por otro lado, la variación de la presión puede escribirse en la forma

$$dp = \frac{\partial p_r}{\partial r} dr + \frac{\partial p_z}{\partial z} dz + \frac{\partial p_\phi}{\partial \phi} d\phi \tag{3.90}$$

Debido a que la variación de la presión en dirección acimutal es nula, esto es  $\frac{\partial p_\phi}{\partial \phi} = 0$ , entonces la ecuación (3.90) se escribe en la forma

$$dp = \frac{\partial p_r}{\partial r} dr + \frac{\partial p_z}{\partial z} dz \tag{3.91}$$

Reemplazando las ecuación (3-88) y (3.89) en (3.91), resulta

$$dp = \rho \omega^2 r dr - \rho g dz \tag{3.92}$$

Al integrar la ecuación (85), en forma indefinida, resulta

$$\begin{aligned}
 p &= \int \rho \omega^2 r dr - \int \rho g dz \\
 p &= \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 - \rho g z + C
 \end{aligned} \tag{3.93}$$

La constante de integración C, se determina teniendo en cuenta que cuando  $r = 0$ ,  $z = z_0$  y  $p = p_0$ , entonces se tiene que

$$\begin{aligned}
 p_0 &= -\rho g z_0 + C \\
 C &= p_0 + \rho g z_0
 \end{aligned} \tag{3.94}$$

Al sustituir la ecuación (3.94) en la ecuación (3.93) resulta

$$p = p_0 + \rho g(z_0 - z) + \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 \tag{3.95}$$

La forma que adopta la superficie libre del fluido se obtiene haciendo  $p = p_0$  debido a que en la superficie libre la presión es  $p_0$ , entonces tenemos

$$\begin{aligned}
 p_0 &= p_0 + \rho g(z_0 - z) + \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 \\
 z &= z_0 + \frac{\omega^2 r^2}{2g}
 \end{aligned} \tag{3.96}$$

La ecuación (3.96) indica que las superficies de igual presión son paraboloides de revolución.

Cuando existe una superficie libre en el recipiente que está girando el volumen que ocupa el fluido que está debajo de la superficie libre del paraboloide de revolución tiene que ser igual al volumen de fluido que tenía cuando estaba en reposo.

En el caso de un cilindro circular que gira alrededor de su eje, la elevación del líquido desde el vértice hasta la pared del cilindro es según la ecuación (3.96)

$$h_0 = \frac{\omega^2 r_0^2}{2g} \quad (3.97)$$

Por otro lado, debido a que el volumen del paraboloides de revolución es igual a la mitad del volumen del cilindro circunscrito, el volumen del líquido por encima del plano horizontal es,

$$V = \frac{1}{2} (\pi r_0^2) h_0 = \frac{1}{2} (\pi r_0^2) \left( \frac{\omega^2 r_0^2}{2g} \right)$$
$$V = \frac{\pi r_0^4 \omega^2}{4g} \quad (3.98)$$

Cuando el líquido está en reposo, este líquido está también por encima del plano a través del vértice a una profundidad,  $h$  dada por

$$h = \frac{1}{2} \left( \frac{\omega^2 r_0^2}{2g} \right) \quad (3.99)$$

Por tanto, el líquido se eleva a lo largo de las paredes la misma altura que el centro desciende en el eje de rotación.



**PROBLEMAS RESUELTOS**

**Problema 01**

Calcular la presión en un tanque abierto que contiene petróleo crudo, en un punto a 2,4 m debajo de la superficie libre del líquido cuya densidad relativa es 0,86

**Solución**

Datos e incógnitas

$$h = 2,4 \text{ m}; \rho_r = 0,86; p = ??$$

La presión manométrica en el fondo viene expresado por

$$p_{man} = \rho \cdot g \cdot h = \rho_r \cdot \rho_w \cdot g \cdot h$$

$$= 0,86(1000)(9,8)(2,4)$$

$$p_{man} = 20227 \text{ N} / \text{m}^2 \dots\dots\dots \text{Rta.}$$

**Problema 02**

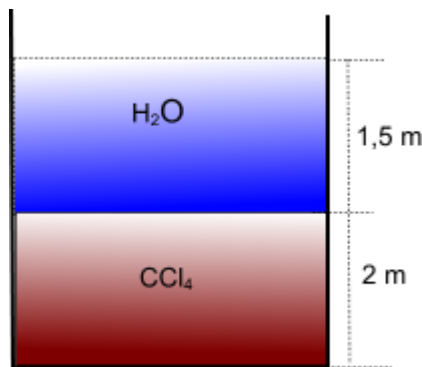
Un recipiente abierto contiene tetracloruro de carbono hasta una profundidad de 2 m, y agua sobre el tetracloruro de carbono hasta una profundidad de 1,5 m. ¿Cuál será la presión en el fondo de este tanque?. La densidad relativa del tetracloruro de carbono es 1,59

**Solución**

Datos e incógnitas

$$h_T = 2 \text{ m}; h_w = 1,5 \text{ m}; p = ??$$

En la figura se muestra la ubicación de los fluidos en el depósito



La presión manométrica debido a los fluidos en el fondo del depósito, será

$$p_B = p_w + p_{ccl_4}$$

$$= \rho_w g h_w + \rho_r \rho_w g h_T$$

$$= 1000(9,8)(1,5) + 1,59(1000)(9,8)(2)$$

$$p_B = 45864 \text{ N} / \text{m}^2 \dots\dots\dots \text{Rta.}$$

**Problema 03**

La presión barométrica a nivel del mar es 762 mmHg, cuando en la cima de una montaña es de 737 mmHg. Si se supone que el peso específico del aire es constante e igual a 11,8 N/m<sup>3</sup>. Determinar la elevación de la cima

**Solución**

Datos e incógnitas

$$p_0 = 762 \text{ mmHg}; \dots p = 737 \text{ mmHg}; \dots \gamma_a = 11,8 \text{ N} / \text{m}^3$$

$$h = ??$$

La ley fundamental de la hidrostática viene expresada por la ecuación

$$\frac{dp}{dz} = -\gamma$$

$$dp = -\gamma \cdot dz \dots\dots\dots (1)$$

Integrando la ecuación (1), resulta

$$\int_{p_0}^p dp = -\gamma_a \int_{z_0}^z dz$$

$$p - p_0 = -\gamma_a (z - z_0)$$

$$p - p_0 = -\gamma_a h \dots\dots\dots (2)$$

Remplazando valores se tiene

$$(737 - 762) \text{ mmHg} = -(11,8 \text{ N} / \text{m}^3) h$$

$$25(133,3 \text{ N} / \text{m}^2) = (11,8 \text{ N} / \text{m}^3) h$$

$$h = 282,42 \text{ m} \dots\dots\dots \text{Rta.}$$

**Problema 04**

Si en la superficie libre de un líquido su peso específico es  $\gamma_0$ , siendo z y p cero ambas, demostrar que, si E= modulo de compresibilidad = constante, el peso específico y la presión se dan por

$$\gamma = \frac{E}{\left(z + \frac{E}{\gamma_0}\right)} \quad \text{y} \quad p = -E \cdot \ln\left(1 + \frac{\gamma_0 z}{E}\right)$$

Calcular el peso específico y la presión a una profundidad de 2 km, suponga que  $\gamma_0 = 10 \text{ kN} / \text{m}^3$  y  $E = 2070 \text{ MN} / \text{m}^2$ .

**Solución**

El módulo de compresibilidad E está definido por la ecuación

$$E = -\frac{dp}{\frac{dV}{V}} = -\frac{Vdp}{dV}$$

$$dp = -E\left(\frac{dV}{V}\right) \dots\dots\dots(1)$$

De la ley fundamental de la hidrostática, se tiene

$$\frac{dp}{dz} = -\gamma$$

$$dp = -\gamma \cdot dz \dots\dots\dots(2)$$

Comparando las ec.(1) y (2), se tiene

$$-\gamma \cdot dz = -E\left(\frac{dV}{V}\right) \dots\dots\dots(3)$$

De la definición de peso específico, se tiene

$$\gamma = \frac{mg}{V} \Rightarrow V = mg\gamma^{-1}$$

$$dV = -mg\gamma^{-2}d\gamma \dots\dots\dots(4)$$

Reemplazando la ec. (4) en la ec(3), resulta

$$\gamma \cdot dz = E\left(\frac{-mg\gamma^{-2}d\gamma}{mg\gamma^{-1}}\right)$$

$$dz = -E\gamma^{-2}d\gamma \dots\dots\dots(5)$$

Integrando la ec. (5), se obtiene

$$\int_0^z dz = -E \int_{\gamma_0}^{\gamma} \gamma^{-2} d\gamma$$

$$z = -E\left(\frac{1}{\gamma_0} - \frac{1}{\gamma}\right)$$

$$\gamma = \frac{E}{\left(z + \frac{E}{\gamma_0}\right)} \dots\dots\dots(6)$$

Reemplazando la ec. (6) en (2), se tiene

$$dp = -\frac{E}{\left(z + \frac{E}{\gamma_0}\right)} \cdot dz$$

Integrando la ecuación anterior resulta

$$\int_0^p dp = -\int_0^z \frac{Edz}{\left(z + \frac{E}{\gamma_0}\right)}$$

$$p = -E \cdot \ln\left(1 + \frac{\gamma_0 z}{E}\right) \dots\dots\dots Rta.$$

Reemplazando los valores dados en el enunciado del problema en las ec, (6) y (7), se obtiene

$$\gamma = \frac{2070 \cdot 10^6}{\left(2000 + \frac{2070 \cdot 10^6}{10 \cdot 10^3}\right)} \Rightarrow \gamma = 9900 N / m^3 \dots\dots Rta.$$

$$p = -2070 \cdot 10^6 \ln\left(1 + \frac{10^4(2000)}{2070 \cdot 10^6}\right) \Rightarrow p = 19,9 MPa.$$

**Problema 05**

El peso específico del agua en el mar se puede calcular a partir de la relación empírica  $\gamma = \gamma_0 + k\sqrt{h}$  (en el cual h es la profundidad bajo la superficie del océano). Derivar una expresión para la presión en cualquier punto h, y calcular el peso específico así como la presión a una profundidad de 3,22 km. suponer que  $\gamma_0 = 10^4 N / m^3$ , h en metros y k= 7,08

**Solución**

Datos e incógnitas

$$\gamma = \gamma_0 + k\sqrt{h}; \quad p = ??$$

De la ley fundamental de la hidrostática se tiene

$$dp = \gamma \cdot dh$$

$$dp = (\gamma_0 + k\sqrt{h})dh \dots\dots\dots(1)$$

Integrando la ecuación (1) se tiene

$$\int_{p_0}^p dp = \int_0^h (\gamma_0 + kh^{1/2}) dh$$

$$p_{man} = \gamma_0 h + \frac{2}{3} kh^{3/2} \dots\dots\dots(2)$$

Cálculo de  $\gamma$  cuando h = 3,22km

$$\gamma_0 = 10^4 N / m^3; k = 7.08 N / m^{7/2}$$

$$\gamma = 10^4 + 7,08\sqrt{3220}$$

$$\gamma = 10402 N / m^3 \dots\dots\dots(3)$$

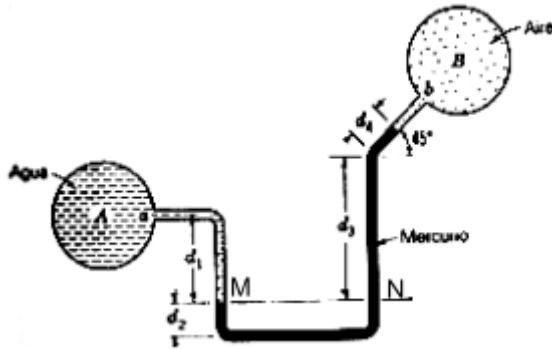
Cálculo de la presión

$$p_{man} = 10^4 (3220) + \frac{2}{3} (7,08) \sqrt{3220^3}$$

$$p_{man} = 33MPa \dots \dots \dots Rta$$

**Problema 06**

Encuentre la diferencia de presión entre los tanques A y B. Si  $d_1= 300$  mm;  $d_2=150$  mm;  $d_3=460$  mm;  $d_4=200$  mm.



**Solución**

Del diagrama puede observarse que los puntos M y N se encuentran a la misma presión

$$p_M = p_N \dots \dots \dots (1)$$

Evaluando la presión en la rama izquierda, se tiene

$$p_M = p_A + \rho_w g d_1 \dots \dots \dots (2)$$

Evaluando la presión en la rama derecha se tiene

$$p_N = p_B + \rho_{Hg} g (d_2 + d_4 \text{Sen}45^\circ) \dots \dots (3)$$

Reemplazando las ec.(2)y (3) en (1), resulta

$$p_{AA} + \rho_w g d_1 = p_B + \rho_{Hg} g (d_2 + d_4 \text{Sen}45^\circ)$$

$$p_A - p_B = \rho_{Hg} g (d_2 + d_4 \text{Sen}45^\circ) - \rho_w g d_1$$

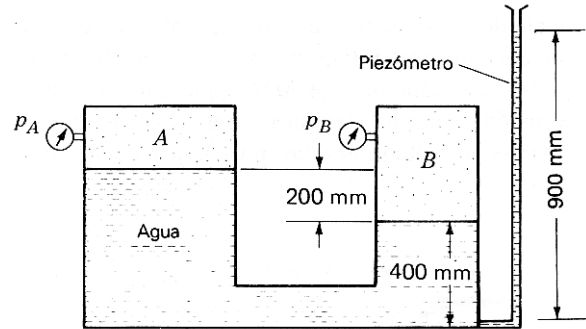
$$= 13600(9,8)(0,46 + 0,2 \frac{\sqrt{2}}{2}) - 9800(0,3)$$

$$p_A - p_B = 77217N / m^2 \dots \dots \dots Rta$$

**Problema 07**

Un tubo abierto se conecta a un tanque y el agua sube hasta una altura de 900 mm dentro del tubo. Un tubo utilizado en esta forma se conoce un piezómetro. ¿Cuáles son las presiones  $p_A$  y  $p_B$  del

aire por encima del agua?. Ignore los efectos capilares en el tubo.



**Solución**

En primer lugar se determina la presión del aire en B. De la figura puede observarse que la presión en M es la misma que en N, esto es

$$p_M = p_N$$

$$p_B + \rho_w g (0,4) = p_0 + \rho_w g (0,9)$$

$$p_B - p_0 = \rho_w g (0,5)$$

$$= 1000(9,8)(0,5)$$

$$p_{Bman} = 4900N / m^2 \dots \dots \dots Rta$$

Ahora se determina la presión del aire en A. De la gráfica se observa que los puntos C y D están a la misma presión

$$p_C = p_D$$

$$p_A + \rho_w g (0,2) = p_B$$

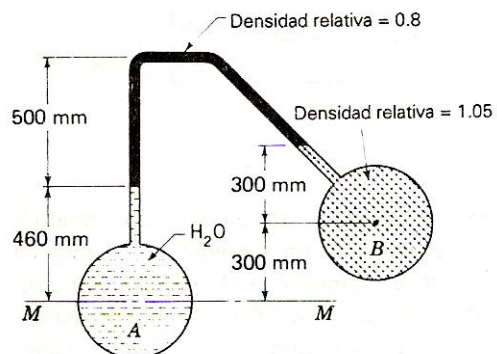
$$p_A = p_B - \rho_w g (0,2)$$

$$= [4900 - 9800(0,2)]$$

$$p_{Aman} = 2940N / m^2 \dots \dots \dots Rta$$

**Problema 08**

Calcule la diferencia de presiones entre los centros de los tanques A y B. Si el sistema completo se rota 180° alrededor del eje MM. ¿Qué cambios en la presión entre los tanques serán necesarios para mantener inalterables las posiciones de los fluidos?



**Solución**

a) En la posición mostrada

De la figura puede observarse que los puntos D y E están a la misma presión, esto es

$$p_D = p_E \dots\dots\dots(1)$$

La presión en el punto A, se obtiene de la rama izquierda en la forma

$$p_A = p_D + 800(9,8)(\overline{DC}) + 9800(\overline{CA})$$

$$p_A = p_D + 7840(0,14) + 9800(0,46)$$

$$p_A = p_D + 5605,6N / m^2$$

La presión en D, será

$$p_D = p_A - 5605,6N / m^2 \dots\dots\dots(2)$$

La presión en el punto B, será

$$p_B = p_E + 1,05(1000)(9,8)(0,3)$$

$$p_B = p_E + 3087N / m^2.$$

La presión en E, esta dado por

$$p_E = p_B - 3087N / m^2 \dots\dots\dots(3)$$

Reemplazando las ec. (2) y (3) en (1) resulta

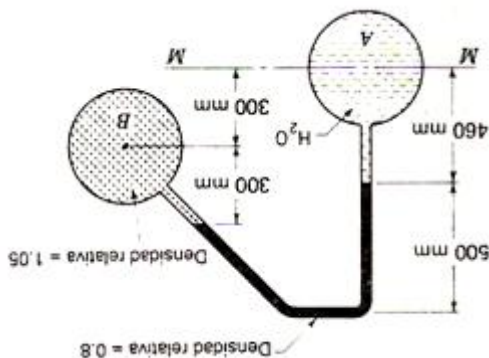
$$p_A - 5605,6N / m^2 = p_B - 3087N / m^2$$

$$p_A - p_B = (5605,6 - 3087)N / m^2$$

$$p_A - p_B = 2518,6N / m^2 \dots\dots\dots Rta$$

b) Cuando se rota el sistema 180° alrededor de MM

En la figura se muestra la nueva ubicación



En la disposición se cumple

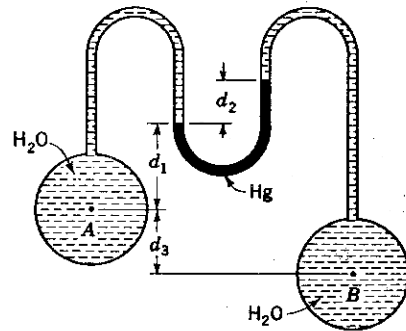
$$p_C = p_D$$

$$p_A + 9800(0,46) + 800(9,8)(0,14) = p_B + 1050(9,8)(0,3)$$

$$p_A - p_B = -2518,6N / m^2) Rta$$

**Problema 09**

¿Cuál es la diferencia de presión entre los puntos A y B de los tanques?



**Solución**

De la figura puede observarse que en la rama izquierda, se cumple que

$$p_A = p_C + \rho_w d_1 \dots\dots\dots(1)$$

$$p_C = p_A - \rho_w d_1 \dots\dots\dots(2)$$

Los puntos C y D, se encuentran a la misma presión, esto

$$p_C = p_D \dots\dots\dots(3)$$

entonces

$$p_D = p_A - \rho_w d_1 \dots\dots\dots(4)$$

De la figura puede verse además que los puntos D y E están a la misma presión, entonces

$$p_D = p_E = p_A - \rho_w d_1 \dots\dots\dots(5)$$

En la rama derecha que contiene mercurio se cumple

$$p_E = p_F + \rho_w d_2 \dots\dots\dots(6)$$

Comparando las ecuaciones (5) y (6), resulta

$$p_F + \rho_w d_2 = p_A - \rho_w d_1$$

$$p_F = p_A - \rho_w d_1 - \rho_w d_2 \dots\dots\dots(7)$$

Puesto que los puntos F y G están en un nivel horizontal y pertenecen al mismo fluido, entonces

$$p_F = p_G \dots\dots\dots(8)$$

Además en la rama derecha se cumple que

$$p_B = p_G + \rho_w(d_1 + d_2 + d_3)$$

$$p_G = p_B - \rho_w(d_1 + d_2 + d_3) \dots\dots\dots(9)$$

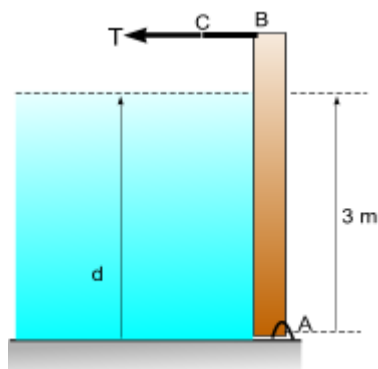
Reemplazando las ec. (7) y (9) en (8), resulta

$$p_A - \rho_w d_1 - \rho_w d_2 = p_B - \rho_w(d_1 + d_2 + d_3)$$

$$p_A - p_B = \rho_w d_2 - \rho_w(d_2 + d_3) \dots\dots\dots Rta$$

**Problema 10**

La placa AB de 3 m por 4 m de un depósito al aire es basculante en torno a su borde inferior y se mantiene en posición mediante una barra delgada BC. Sabiendo que va a llenarse de glicerina, cuya densidad es 1263 kg/m<sup>3</sup>. Determinar la fuerza T en la barra y las reacciones en la bisagra A cuando el depósito se llena hasta una profundidad d = 2,9 m.



**Solución**

Datos e incógnitas

$$\overline{AB} = 3m; .a = 4m; .\rho = 1263kg / m^3; .d = 2,9m$$

$$T = ??; .A_x = ??; .A_y = ??$$

La fuerza ejercida por el fluido sobre la compuerta, está dada por

$$F_R = \gamma h_{CG} A$$

$$= (1263)(9,8)\left(\frac{2,9}{2}\right)(4 \times 2,9)N$$

$$F_R = 208188N \dots\dots\dots(1)$$

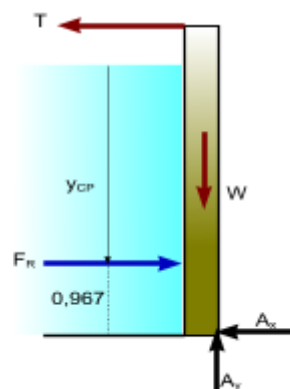
El punto de aplicación de F<sub>R</sub> será

$$y_{CP} - y_{CG} = \frac{\gamma \text{Sen} \theta_{GX}}{\rho_{CG} A}$$

$$= \frac{(1263)(9,8)(\text{Sen}90^\circ)\left(\frac{1}{12} \times 4 \times 2,9^3\right)}{1263(9,8)\left(\frac{2,9}{2}\right)(4 \times 2,9)}$$

$$y_{CP} - y_{CG} = 0,483m \dots\dots\dots(2)$$

En la figura se muestra el DCL de la compuerta



Aplicando las ecuaciones de equilibrio se tiene

$$\sum M_A = 0$$

$$T(3) - F_R(0,067) = 0$$

$$3T = 208188(0,067)$$

$$T = 67106N \dots\dots\dots Rta \dots(3)$$

$$\sum F_x = 0$$

$$F_R = A_x + T$$

$$A_x = F_{Rx} - T$$

$$= 208188 - 67106$$

$$A_x = 141082N \dots\dots\dots Rta \dots(4)$$

$$\sum F_y = 0$$

$$A_y = W$$

**Problema 11**

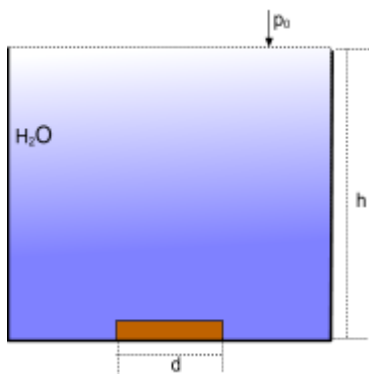
Calcular la magnitud de la fuerza sobre la ventanilla de observación de vidrio, de 1m de diámetro, de un batíscafo en el fondo de la fosa submarina de las Marianas en el Océano Pacífico cuya profundidad es 10,9 km.

**Solución**

Datos e incógnitas

$$\rho_w = 1030kg / m^3; d = 1m; h = 10900m; F_R = ??$$

En la figura se muestra el diagrama de la ventanilla de observación



La fuerza hidrostática sobre la ventanilla será

$$\begin{aligned}
 F_R &= p_C A \\
 &= \rho_w g h_{CG} A \\
 &= (1030)(9,8)(10900)(\pi 0,5^2) \\
 F_R &= 86,4MN \dots \dots \dots Rta
 \end{aligned}$$

**Problema 12**

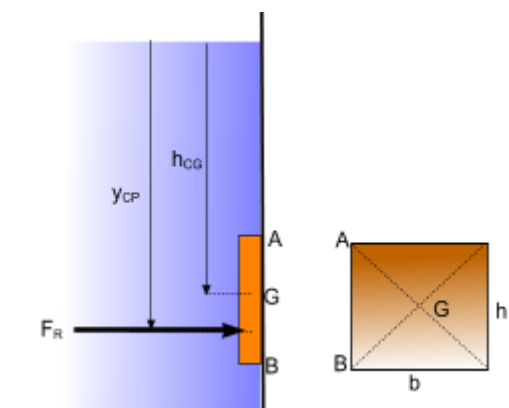
Una compuerta rectangular de 1,8 m de longitud y de 1,2 m de altura, está colocada verticalmente con el centro a 2,1 m debajo de la superficie del agua. Determine la magnitud, dirección y localización de la fuerza total sobre dicha superficie, debido al agua.

**Solución**

Datos e incógnitas

$$h = 1,2m; \quad b = 1,8m; \quad F_R = ??$$

En la figura se muestra la compuerta sumergida



La fuerza resultante debido al fluido líquido es

$$\begin{aligned}
 F_R &= p_C A \\
 &= \rho_w g h_{CG} A \\
 &= (1000)(9,8)(2,1)(1,2)(1,8) \\
 F_R &= 44452,8N \dots \dots \dots Rta
 \end{aligned}$$

Su localización se determina utilizando la ecuación

$$\begin{aligned}
 y_{CP} - y_{CG} &= \frac{\gamma \cdot \text{Sen} \theta \cdot I_{GX}}{p_{CG} A} \\
 &= \frac{(1000)(9,8)(\text{Sen} 90^\circ) \left( \frac{1}{12} \cdot 1,8 \cdot 1,2^3 \right)}{1000(9,8)(2,1)(1,8 \cdot 1,2)} \\
 y_{CP} - y_{CG} &= 0,057m \dots \dots \dots Rta
 \end{aligned}$$

**Problema 13**

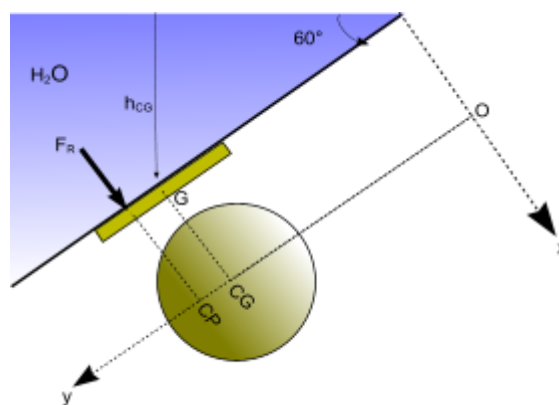
Una compuerta circular de 3 m de diámetro, tiene su centro a 2,5 m debajo de la superficie del agua, y descansa sobre un plano con pendiente de 60°. Determine la magnitud, dirección y localización de la fuerza total sobre la compuerta debido al agua.

**Solución**

Datos e incógnitas

$$d = 3m; \quad \theta = 60^\circ; \quad \rho = 1000kg/m^3; \quad h_{CG} = 2,5m; \quad F_R = ?$$

En la figura se muestra la ubicación de la compuerta.



La fuerza resultante debido al agua será

$$\begin{aligned}
 F_R &= p_C A \\
 &= \rho_w g h_{CG} \left( \frac{\pi \cdot d^2}{4} \right) \\
 &= (1000)(9,8)(2,5) \left( \frac{\pi \cdot (3)^2}{4} \right) \\
 F_R &= 173175N \dots \dots \dots Rta
 \end{aligned}$$

Su punto de aplicación se determina mediante la ecuación

$$y_{CP} - y_{CG} = \frac{\gamma \cdot \text{Sen} \theta \cdot I_{GX}}{\rho_{CG} A}$$

$$= \frac{(9800)(\text{Sen} 60^\circ) \left( \frac{\pi \cdot r^4}{4} \right)}{9800(2,5)(\pi \cdot r^2)}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \left( \frac{\pi(1,5)^2}{4} \right)}{2,5}$$

$$y_{CP} - y_{CG} = 0,31m \dots \dots \dots \text{Rta}$$

Coordenada Y

$$y_{CP} - y_{CG} = \frac{\gamma \cdot \text{Sen} \theta \cdot I_{GX}}{\rho_{CG} A}$$

$$= 2x \frac{(9800)(\text{Sen} 90^\circ) \left( \frac{a \cdot b^3}{36} \right)}{9800(2,4)(a \cdot b / 2)}$$

$$= 2 \left[ \frac{\frac{1}{36} (4,5)(3,6)^3}{2,4(4,5)(3,6) / 2} \right]$$

$$y_{CP} - y_{CG} = 0,3m \dots \dots \dots \text{Rta}$$

**Problema 14**

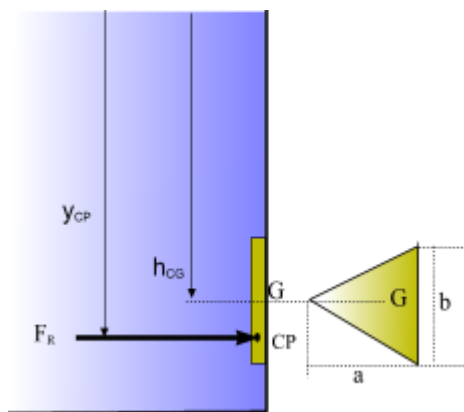
Un triángulo isósceles de 3,6 m de base y de 4,5 m de altura, está localizado en un plano vertical. Su base está vertical y su ápice está a 2,4 m debajo de la superficie del agua. Determine la magnitud y la localización de la fuerza del agua sobre el triángulo

**Solución**

Datos e incógnitas

$b = 3,6 \text{ m}; a = 4,5 \text{ m}; \rho = 1000 \text{ kg/m}^3; \dots F_R = ??$

En el gráfico se muestra la ubicación de la superficie triangular



La fuerza resultante ejercida por el agua será

$$F_R = \rho_C A$$

$$= \rho_w g h_{CG} \left( \frac{b \cdot a}{2} \right)$$

$$= (1000)(9,8)(2,4) \left( \frac{3,6(4,5)}{2} \right)$$

$$F_R = 190512N \dots \dots \dots \text{!}$$

El punto de aplicación tiene dos coordenadas

Coordenada X

$$x_{CP} = x_{CG} + \frac{I_{xy}}{y_{CG} A} \dots \dots \dots (3)$$

de la figura se observa que

$$y_{CG} = \frac{a}{3} = \frac{4,5}{3} \Rightarrow y_{CG} = 1,5m \dots \dots \dots (4)$$

El producto de inercia es cero por la simetría

$$x_{CP} = x_{CG} = 1,5m \dots \dots \dots \text{Rta.}$$

**Problema 15**

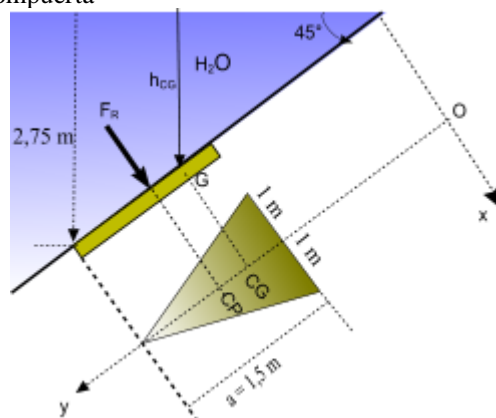
Un área triangular de 2 m de base y de 1,5 m de altura tiene su base horizontal y yace en un plano inclinado 45°, con su ápice debajo de la base y a 2,75 m debajo de la superficie libre del agua. Determine la magnitud, dirección y la localización de la fuerza resultante del agua sobre el área triangular.

**Solución**

Datos e incógnitas

$b = 2m; a = 1,5m; \theta = 45^\circ; \dots F_R = ??$

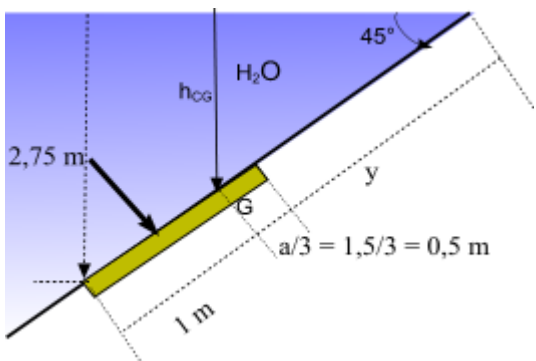
En la figura se muestra la ubicación de la compuerta



En primer lugar se determina la altura del centro de gravedad de la placa triangular. De la figura se observa que

$$\begin{aligned} \text{sen}45^\circ &= \frac{2,75}{y+1,5} \Rightarrow y = \frac{2,75}{\text{sen}45^\circ} - 1,5 \\ y &= 2,34\text{m} \dots \dots \dots (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{sen}45^\circ &= \frac{h_{CG}}{y+0,5} \Rightarrow h_{CG} = (y+0,5)\text{sen}45^\circ \\ h_{CG} &= 2,04\text{m} \dots \dots \dots (2) \end{aligned}$$



La fuerza resultante sobre la superficie triangular será

$$\begin{aligned} F_R &= p_c A \\ &= \rho_w g h_{CG} \left(\frac{b \cdot a}{2}\right) \\ &= (1000)(9,8)(2,04) \left(\frac{3(1,5)}{2}\right) \\ F_R &= 29988\text{N} \dots \dots \dots (6) \end{aligned}$$

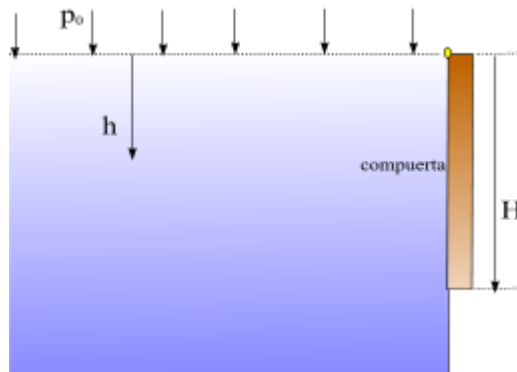
La localización del punto de aplicación de la fuerza resultante se determina por la ecuación

$$\begin{aligned} y_{CP} - y_{CG} &= \frac{\gamma \cdot \text{Sen}\theta \cdot I_{GX}}{p_{CG} A} \\ &= \frac{(9800)(\text{Sen}45^\circ) \left(\frac{a \cdot b^3}{36}\right)}{9800(2,4)(a \cdot b / 2)} \\ &= \left[ \frac{\frac{1}{36}(2)(1,5)^3}{2,04(2)(1,5) / 2} \right] \\ y_{CP} - y_{CG} &= 0,043\text{m} \dots \dots \dots \text{Rta} \end{aligned}$$

**Problema 16**

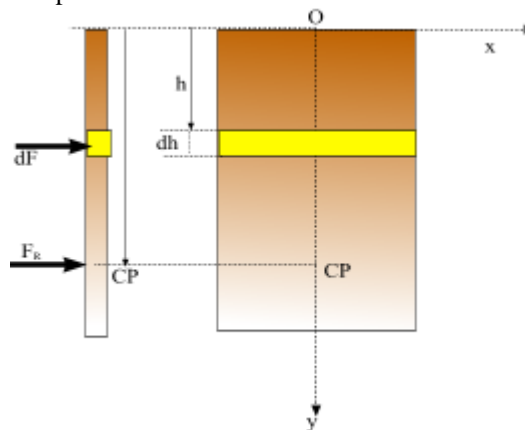
Si el peso específico de un líquido varía linealmente según la profundidad h de acuerdo con la ecuación  $\gamma = \gamma_0 + kh$ , Derivar expresiones para la fuerza

resultante por anchura unitaria sobre la compuerta y su punto de aplicación.



**Solución**

En la figura se muestra la vista en planta de la compuerta



Para determinar la fuerza resultante se divide el área en elementos diferenciales a una profundidad h y de espesor dh, como se muestra en la figura. Entonces la fuerza sobre el elemento diferencial será

$$\begin{aligned} dF &= p \cdot dA \\ &= \gamma \cdot h \cdot dA \\ &= \gamma \cdot h (L \cdot dh) \\ &= (\gamma_0 + k \cdot h)(h)(L \cdot dh) \\ dF &= \gamma_0 L \cdot h \cdot dh + k \cdot L \cdot h^2 \cdot dh \dots \dots \dots (1) \end{aligned}$$

La fuerza resultante por anchura unitaria (L = 1 m), se obtiene integrando la ecuación (1), esto es

$$\begin{aligned} F_R &= \int_0^H (\gamma_0 h + k \cdot h^2) dh \\ &= \left[ \gamma_0 \frac{h^2}{2} + \frac{k h^3}{3} \right]_0^H \\ F_R &= \frac{H^2}{6} (3\gamma_0 + 2kH) \dots \dots \dots (2) \end{aligned}$$

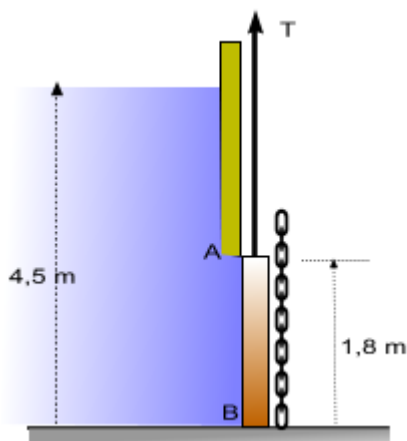


El punto de aplicación se determina aplicando el principio de momentos

$$\begin{aligned}
 y_R &= \frac{1}{F_R} \int h.dF \\
 &= \frac{1}{F_R} \int_0^H (\gamma_0 h^2 + k.h^3) dh \\
 &= \frac{1}{F_R} \left[ \frac{\gamma_0 h^3}{3} + \frac{k h^4}{4} \right]_0^H \\
 y_R &= \frac{\frac{\gamma_0 H^3}{3} + \frac{k H^4}{4}}{H^2 (3\gamma_0 + 2kH) / 6} \\
 y_R &= \frac{H(4\gamma_0 + 3kH)}{2(3\gamma_0 + 2kH)} \dots\dots\dots Rta.
 \end{aligned}$$

**Problema 17**

La fuerza de rozamiento entre una compuerta de esclusa AB cuadrada de 1,8 m de lado y sus guías es el 10% de la resultante de las fuerzas de presión que el agua ejerce contra la cara de la compuerta. Hallar la fuerza inicial necesaria para elevar la compuerta si ésta pesa 4,5 kN.



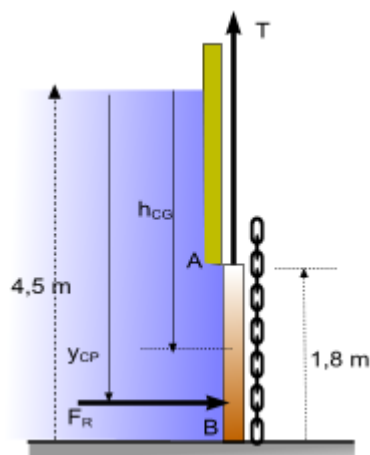
**Solución**

Datos e incógnitas

$$AB = 1,8m; a = 1,8m; W = 4,5KN; F_k = 0,1F_R; T = ?$$

La fuerza que ejerce el fluido sobre la compuerta está mostrada en la figura y su valor es

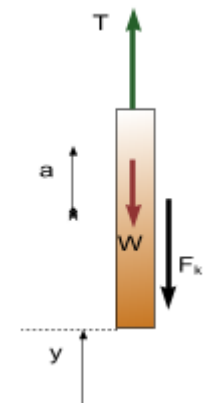
$$\begin{aligned}
 F_R &= p_c A \\
 &= \rho_w g h_{CG} (AB)(a) \\
 &= (1000)(9,8)(4,5 - 0,9)(1,8)(1,8) \\
 F_R &= 114307N \dots\dots\dots 4)
 \end{aligned}$$



Según el enunciado del problema, la fuerza de rozamiento entre las guías y la compuerta es el 10% de la fuerza debido al fluido, por tanto

$$\begin{aligned}
 F_k &= \frac{10}{100} F_R = 0,1(114307) \\
 F_k &= 11430,7N \dots\dots\dots 2)
 \end{aligned}$$

En la figura se muestra el DCL de la compuerta en una posición Y a partir de la posición de equilibrio



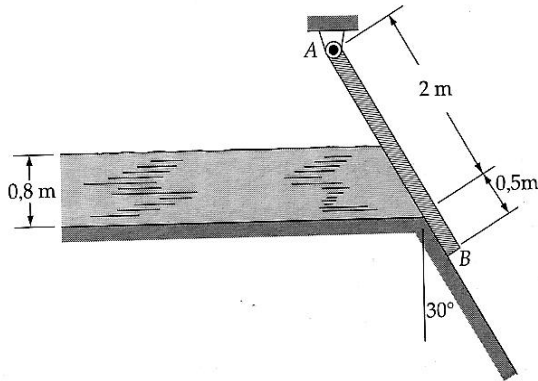
Aplicando la segunda ley de Newton según la dirección mostrada, se tiene

$$\begin{aligned}
 \sum F_y &= ma_y \\
 T - W - F_k &= \frac{W}{g}(0) \\
 T &= W + F_k \\
 T &= 4500N + 11430,7N \\
 T &= 15930,7N \dots\dots\dots Rta.
 \end{aligned}$$

**Problema 18**

El agua dulce canalizada es retenida por la placa de 2,5 engoznada en A. Si la compuerta está diseñada para abrirse cuando la altura del agua es 8,8 m, tal como se muestra. ¿Cuál debe ser el peso de W de la

placa (en newton por metro de longitud normal al papel)?.



**Solución**

Datos e incógnitas

$$L_{AB} = 2,5m; h_w = 0.8m; a = 1m; .W = ??$$

La fuerza ejercida por el agua sobre la placa será

$$\begin{aligned} F_R &= p_C A \\ &= \rho_w g h_{CG} A \\ &= (1000)(9,8) \left( \frac{0,8}{2} \right) \left( \frac{0,8(1)}{\text{sen}60^\circ} \right) \\ &= 9800(0,4)(0,924) N \\ F_R &= 3622 N \dots\dots\dots(1) \end{aligned}$$

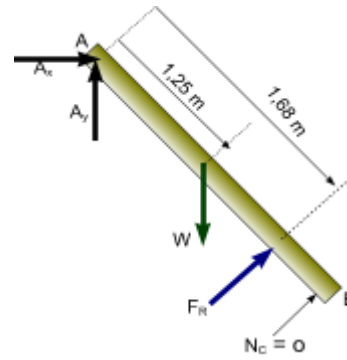
El punto de aplicación de la fuerza hidrostática se determina con la ecuación

$$\begin{aligned} y_{CP} - y_{CG} &= \frac{\gamma \cdot \text{Sen} \theta \cdot I_{GX}}{p_{CG} A} \\ &= \frac{9800 \text{Sen} 120^\circ \left( \frac{1(0,924^3)}{12} \right)}{9800(0,4)(0,924)(1)} \\ y_{CP} - y_{CG} &= 0,154 m \dots\dots\dots(2) \end{aligned}$$

La distancia desde el punto A al centro de presiones será

$$\begin{aligned} d &= (2 - 0,312) m \\ d &= 1,688 m \text{ desde A} \dots\dots\dots(3) \end{aligned}$$

En la figura se muestra el DCL de la placa

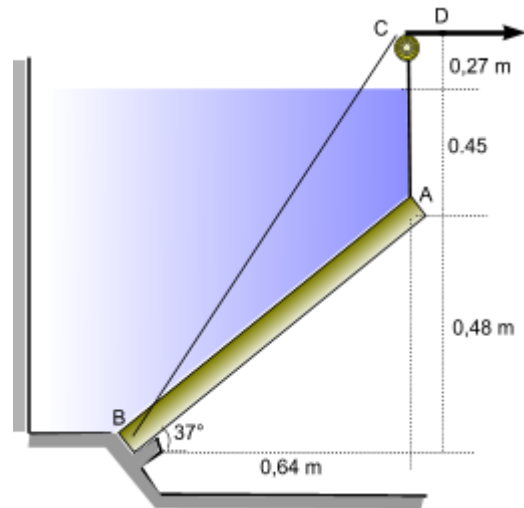


Tomando momentos con respecto al punto A, se tiene

$$\begin{aligned} \sum M_A &= 0 \\ W(1,25 \text{Cos} 60^\circ) &= F_R(1,688) \\ W(1,25)(0,5) &= 3622(1,688) \\ W &= 9783 N \dots\dots\dots Rta. \end{aligned}$$

**Problema 19**

En el fondo de un depósito lleno de agua hay una compuerta AB sin peso de 0,5m x 0,8m. La compuerta está articulada con bisagras a lo largo de su borde superior A y se apoya en un tope liso B. Determinar: (a) Las reacciones en A y B cuando la tensión del cable es nula. (b) La mínima tensión del cable BCD para que se abra la compuerta.



**Solución**

**Parte a. Cuando T = 0**

Datos e incógnitas

$$AB = 0,8m; .a = 0,5m; .R_A = ??; .N_B = ?; .T = ?$$

En primer lugar se determina la fuerza debido al agua

$$F_H = p_C A = \rho_w g h_{CG} A$$

$$= 9800 \left( 0,45 + \frac{0,48}{2} \right) ((0,8)(0,5))$$

$$F_R = 2704,8N \dots\dots\dots (1)$$

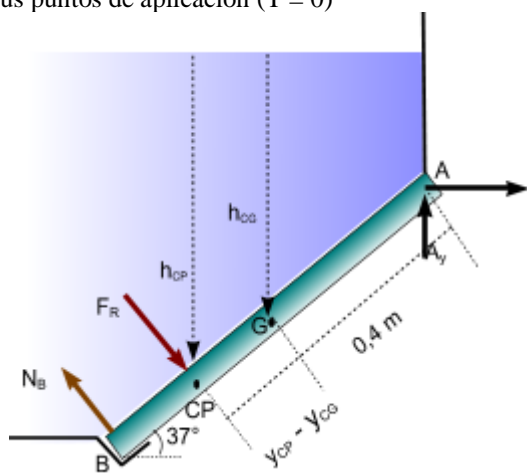
El punto de aplicación de la fuerza hidrostática se determina por la ecuación

$$y_{CP} - y_{CG} = \frac{\gamma \cdot \text{Sen} \theta \cdot I_{GX}}{\rho_{CG} A}$$

$$= \frac{9800 \text{Sen} 37^\circ \left( \frac{0,5(0,8^3)}{12} \right)}{9800 \left( 0,45 + \frac{0,48}{2} \right) (0,5)(0,8)}$$

$$y_{CP} - y_{CG} = 0,046m \dots\dots\dots (2)$$

En la figura se muestra el DCL de la compuerta, en donde se observa las fuerzas que actúan sobre ella y sus puntos de aplicación (T = 0)



Aplicando las ecuaciones de equilibrio, tenemos

$$\sum M_A = 0$$

$$F_H (d) = N_B (0,8)$$

$$0,8N_B = 22704,8(0,4 + 0,046)$$

$$N_B = 1507,9N \dots\dots\dots (3)$$

$$\sum F_x = 0$$

$$A_x + F_H \text{Sen} 37^\circ = N_B \text{Sen} 37^\circ$$

$$A_x = (N_B - F_H)(3/5)$$

$$= (1507,9 - 2704,8)(3/5)$$

$$A_x = 1197N \dots\dots\dots (4)$$

$$\sum F_y = 0$$

$$A_y - F_H \text{Cos} 37^\circ = -N_B \text{Cos} 37^\circ$$

$$A_y = (F_H - N_B)(3/5)$$

$$= (2704,8 - 1507,9)(3/5)$$

$$A_y = 957N \dots\dots\dots (5)$$

La fuerza de reacción en A será

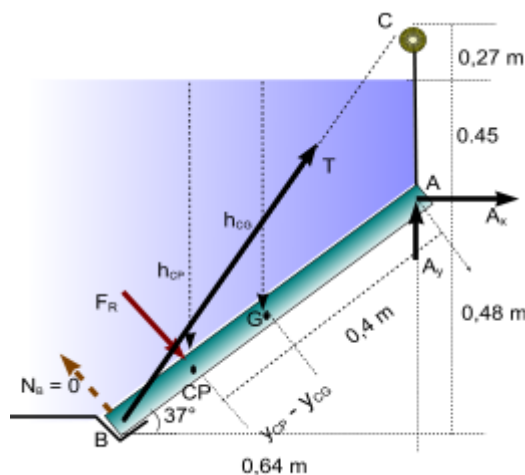
$$R_A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

$$= \sqrt{1197^2 + 975^2}$$

$$R_A = 1543,8N \dots\dots\dots \text{Rta.}$$

**Parte b.** La tensión mínima será aquella que hará que la reacción en B sea nula.

En la figura se muestra el DCL de la compuerta cuando la reacción en el punto B es N<sub>B</sub> = 0



En primer lugar se determina el ángulo φ que forma la dirección de la tensión y la línea que define la compuerta

$$\text{Tg}(\theta + \varphi) = \frac{0,48 + 0,45 + 0,27}{0,64}$$

$$\text{Tg}(37^\circ + \varphi) = 1,875$$

$$37^\circ + \varphi = \text{Tg}^{-1}(1,875)$$

$$\varphi = 25^\circ$$

Tomando momentos respecto al punto A se tiene

$$\sum M_A = 0$$

$$F_H [0,4 + (y_{CP} - y_{CG})] = T(0,8 \text{Sen} \varphi)$$

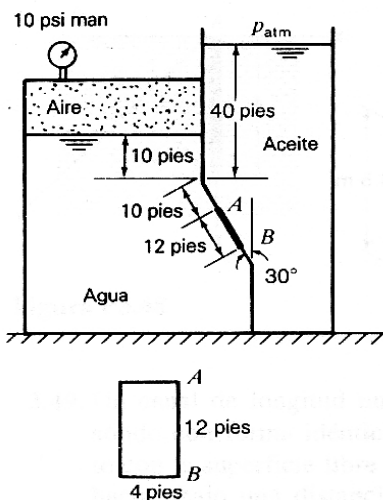
$$2704,8(0,4 + 0,046) = T(0,8 \text{Sen} 25^\circ)$$

$$T = 3568N \dots\dots\dots \text{Rta.}$$

**Problema 20**

Encuentre la fuerza total sobre la compuerta AB causada por los fluidos. Suponga que la densidad

relativa del aceite es 0,6. Encuentre además la posición de esta fuerza medida desde el fondo de la compuerta.



**Solución**

En primer lugar se determina la fuerza ejercida por aire y el agua del tanque (lado izquierdo)

$$F_1 = p_{CG} A = (p_{aire} + \gamma_w h_{CG}) A$$

$$= [1440 + 62,4(10 + 16 \cos 30^\circ)](12)(4)$$

$$F_1 = 140575 \text{ lbf} \dots \dots \dots (1)$$

El punto de aplicación de  $F_1$  será

$$y_{CP} - y_{CG} = \frac{\gamma_w \cdot \text{Sen} \theta \cdot I_{GX}}{p_{CG} A}$$

$$= \frac{62,4 \cdot \text{Sen} 120^\circ \left( \frac{4(12^3)}{12} \right)}{2928,6(4)(12)}$$

$$y_{CP} - y_{CG} = 0,22 \text{ pie} \dots \dots \dots (2)$$

Por lo tanto la distancia desde el punto B al punto de aplicación de  $F_1$  será

$$d_1 = 6 \text{ pie} - 0,22 \text{ pie}$$

$$d_1 = 5,78 \text{ pie} \dots \dots \dots (3)$$

Se determina ahora la fuerza ejercida por el aceite del depósito del lado derecho sobre la compuerta

$$F_2 = p_{CG} A = \gamma_{ac} h_{CG} A$$

$$= 0,6(62,4)(40 + 16 \text{ Sen} 60^\circ)(12)(4)$$

$$= (2016,4)(48)$$

$$F_2 = 96786,4 \text{ lbf} \dots \dots \dots (4)$$

El punto de aplicación de  $F_2$  será

$$y_{CP} - y_{CG} = \frac{\gamma_{ac} \cdot \text{Sen} \theta \cdot I_{GX}}{p_{CG} A}$$

$$= \frac{0,6(62,4) \text{ Sen} 60^\circ \left( \frac{4(12^3)}{12} \right)}{2016,4(4)(12)}$$

$$y_{CP} - y_{CG} = 0,19 \text{ pie} \dots \dots \dots (5)$$

La distancia desde el punto B al punto de aplicación de  $F_2$  será

$$d_2 = (6 - 0,19) \text{ pie}$$

$$d_2 = 5,81 \text{ pie} \dots \dots \dots (6)$$

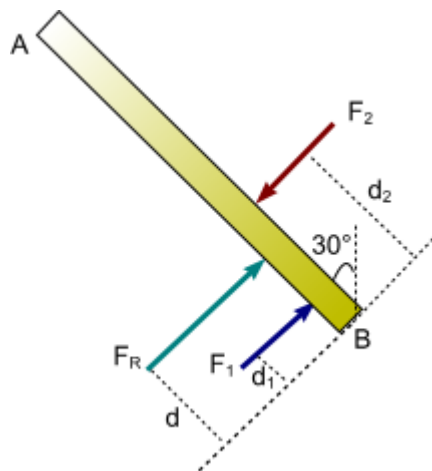
La fuerza resultante sobre la compuerta debido a todos los fluidos, es

$$F_R = F_1 - F_2$$

$$= (140575 - 96786,4) \text{ lbf}$$

$$F_R = 43789 \text{ lbf} \dots \dots \dots (7)$$

En la figura se muestra la compuerta AB conjuntamente con las fuerzas ejercidas por los fluidos.



La ubicación de  $F_R$  respecto a B, se determinó principio de momentos

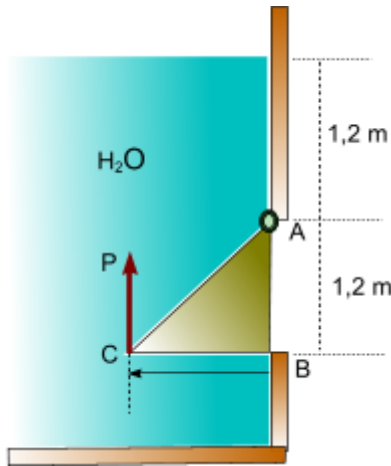
$$M_B^{F_R} = \sum M_B^{F_i}$$

$$43789(d) = 140575(5,78) - 96786(5,81)$$

$$d = 5,71 \text{ pies} \dots \dots \dots \text{Rta}$$

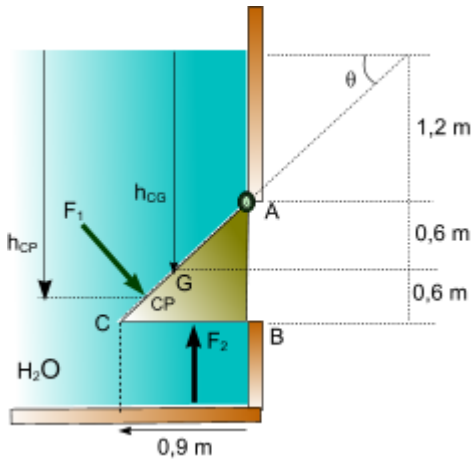
**Problema 21**

Una compuerta, cuya sección transversal se muestra en la figura, cierra una abertura de 0,6 m de ancho por 1,2m de alto. La compuerta es homogénea y su masa es de 600 kg. Calcular la fuerza P requerida para abrir la compuerta.



Solución

En primer lugar se determina la fuerza ejercida por el agua sobre la superficie inclinada



$$F_1 = \gamma_w h_{CG} A$$

$$= 9800(1,8)(1,5 \times 0,6)$$

$$F_1 = 15876N \dots \dots \dots (1)$$

Su punto de aplicación será

$$y_{CP} - y_{CG} = \frac{\gamma_w \text{Sen} \theta \text{I}_{GX}}{P_{CG} A}$$

$$= \frac{9800 \left( \frac{1,2}{1,5} \right) \left[ \frac{1}{12} (0,6)(1,5)^3 \right]}{9800(1,8)(0,6)(1,5)}$$

$$y_{CP} - y_{CG} = 0,083m \dots \dots \dots (2)$$

Se determina ahora la fuerza ejercida por el agua sobre la parte inferior de la compuerta

$$F_2 = \gamma_w h'_{CG} A'$$

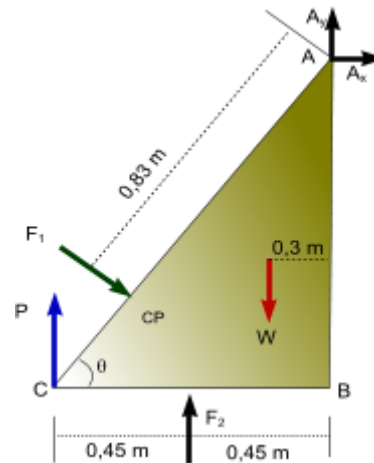
$$= 9800(2,4)(0,9 \times 0,6)$$

$$F_2 = 12701N \uparrow \dots \dots \dots (3)$$

Su punto de aplicación en la mitad del lado BC

$$x_v = 0,45m \text{ desde B}$$

Para determinar la fuerza P se traza el DCL de la compuerta



Aplicando la segunda condición de equilibrio

$$\sum M_A = 0$$

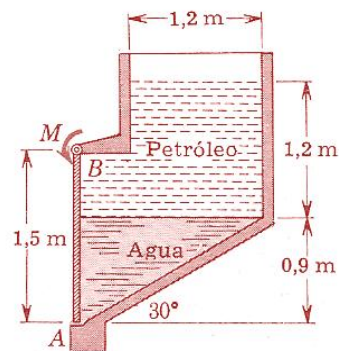
$$P(0,9) = F_1(0,83) + W(0,3) - F_2(0,45)$$

$$0,9P = 15876(0,83) + 600(9,8)(0,3) - 12700(0,45)$$

$$P = 10304N \dots \dots \dots Rta$$

**Problema 22**

La compuerta AB es una placa rectangular de 280 Kg que tiene 1,5 m de altura y 1,1 m de anchura y se utiliza para cerrar el canal de desagüe en la parte inferior de un depósito de petróleo. A consecuencia de la condensación en el depósito, se recoge agua dulce en la parte inferior del canal. Calcular el momento M respecto del eje del pasador en B necesario para cerrar la compuerta contra la acción de las fuerzas hidrostáticas del agua y del petróleo, la densidad relativa del petróleo es 0,85.



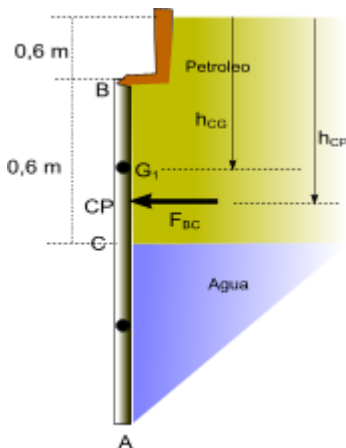
Solución

Datos e incógnitas

$$M_{AB} = 280 \text{Kgf}; L = 1,5\text{m}; a = 1,1\text{m};$$

$$\gamma_p = 850 \text{kgf/m}^3; \gamma_w = 1000 \text{kgf/m}^3; M_B = ??$$

En primer lugar se determina la fuerza ejercida por el petróleo sobre la compuerta en BC



$$F_{BC} = \gamma_p \cdot h_{CG} \cdot A$$

$$= (850) \left(0,6 + \frac{0,6}{2}\right) (0,6)(1,1)$$

$$F_{BC} = 504,9 \text{kgf} \dots \dots \dots (1)$$

El punto de aplicación de la fuerza debido al petróleo se determina mediante la ecuación

$$y_{CP} - y_{CG} = \frac{\gamma_p \text{Sen}\theta \cdot I_{GX}}{P_C A}$$

$$= \frac{850(\text{Sen}90^\circ) \left(\frac{1}{12}\right) (1,1)(0,6)^3}{850(0,9)(0,6)(1,1)}$$

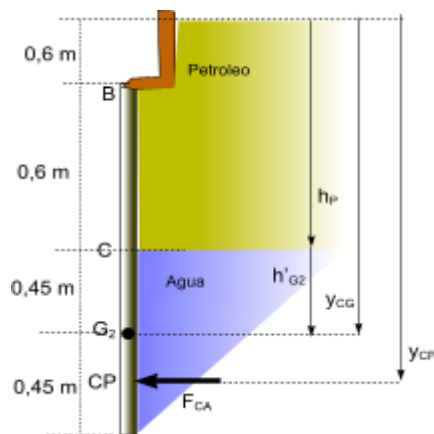
$$y_{CP} - y_{CG} = 0,033\text{m}$$

La distancia desde B hasta el centro de presiones será

$$d_1 = 0,3 + 0,033$$

$$d_1 = 0,333\text{m} \dots \dots \dots (2)$$

Se determina ahora la fuerza debido a los fluidos sobre la porción CA de la compuerta



$$F_{CA} = P_{CG} \cdot A = (P_s + p_p + p_w) A$$

$$= (\gamma_p h_p + \gamma_w h_{CG}) A$$

$$= \left[ 850(1,2) + 1000 \left(\frac{0,9}{2}\right) \right] (0,9)(1,1)$$

$$F_{CA} = 1455,3 \text{kgf} \dots \dots \dots (3)$$

El punto de aplicación de la F\_CA, será

$$y_{CP} - y_{CG} = \frac{\gamma_w \text{Sen}\theta \cdot I_{GX}}{P_C A}$$

$$= \frac{1000(\text{Sen}90^\circ) \left(\frac{1}{12}\right) (0,9)^3 (1,1)}{[850(1,2) + 1000(0,45)] (0,9)(1,1)}$$

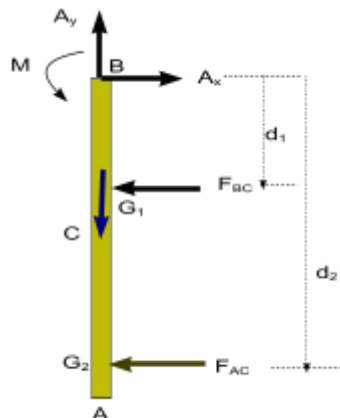
$$y_{CP} - y_{CG} = 0,046\text{m} \dots \dots \dots (4)$$

La distancia desde B hasta el centro de presiones será

$$d_2 = 0,6\text{m} + \frac{0,9}{2}\text{m} + 0,046\text{m}$$

$$d_2 = 1,096\text{m} \dots \dots \dots (5)$$

Para determinar el momento M aplicado en B se traza el DCL de AB y se aplica la ec. de equilibrio



$$\sum M_B = 0$$

$$M = F_{BC}(d_1) + F_{AC}(d_2)$$

$$M = (504,9)(0,333) + (1455,3)(1,096)$$

$$|M| = 1763,14 \text{ kgf} \dots \text{Rta}$$

$$F_R = (p_1 + \gamma_w h_{CG})A$$

$$= [69 \cdot 10^4 - 9800(1,5\text{m} + 1,5\text{Sen}60^\circ)](3)(2,5)$$

$$= (662569,4)(3)(2,5)$$

$$F_R = 4969,27 \text{ KN} \dots \text{Rta}$$

El punto de aplicación de  $F_R$  será

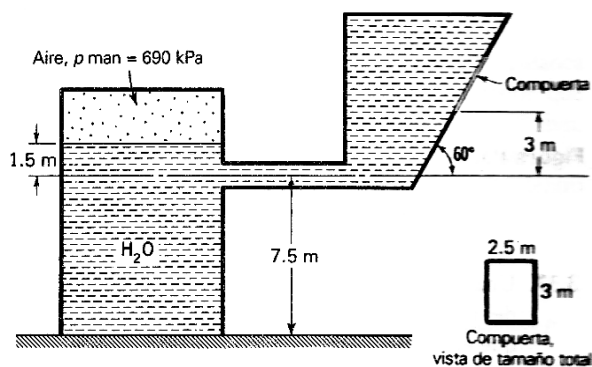
$$y_{CP} - y_{CG} = \frac{\gamma_w \text{Sen}\theta \cdot I_{GX}}{P_c A}$$

$$= \frac{(9800)(\text{Sen}60^\circ) \left(\frac{1}{12}\right)(3)^3(2,5)}{(662569,4)(3)(2,5)}$$

$$y_{CP} - y_{CG} = 0,096\text{m} \dots \text{Rta}$$

**Problema 23**

Determine la fuerza y su posición debido a los fluidos que actúan en la compuerta de la figura



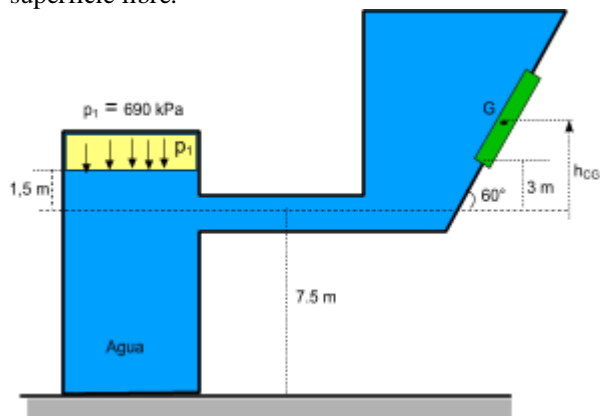
**Solución**

Datos e incógnitas

$$P_{aireman} = 690 \text{ kPa} \dots \gamma_w = 9800 \text{ N/m}^3$$

$$F_R = ??; \quad \text{Centro de presiones} = ??$$

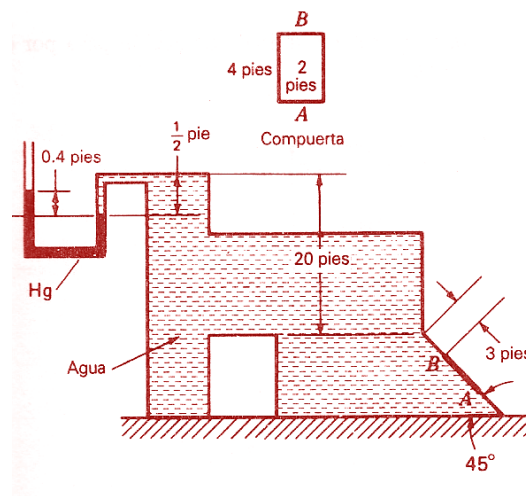
Se sabe que la presión  $p$ , y la distancia vertical desde la superficie libre hasta el centro de gravedad las que determinan la presión en cualquier lugar del líquido. En la figura se muestra los principales factores, es decir  $p$ , la superficie libre y la distancia vertical del centro de la compuerta con respecto a la superficie libre.



La fuerza debido a los fluidos será

**Problema 24**

Encuentre la fuerza resultante sobre la compuerta AB producida por los fluidos de adentro y de afuera. Determine la distancia  $d$  por debajo de B de la posición de  $F_R$ ,  $\gamma_w = 62,4 \text{ lbf/ pie}^3$ ;  $\rho_{\text{Hg}} = 13,6$



**Solución**

De la figura se observa en el manómetro que

$$p_A = p_B$$

$$p_0 + \gamma_{\text{Hg}}(0,4) = p_B$$

$$p_{B,m} = 13,6(62,4)(0,4)$$

$$p_B = 339,44 \text{ lbf/ pie}^3 \dots \text{1)}$$

Además se puede ver que

$$p_B = p_C$$

$$p_C = 339,46 \text{ lbf/ p}^3 \dots \text{2)}$$

Además se observa que

$$p_D = p_C + \gamma_w (20 - 0,5)$$

$$= 339,46 + 62,4(19,5)$$

$$p_D = 1556,26 \text{ lbf} / \text{p}^3$$

Calculo sobre la fuerza AB

$$F_{AB} = p_{CG} A = (p_C + \gamma_w h_G)(4,2)$$

$$F_{AB} = [1556,26 + 62,4(5)\text{Sen}45^\circ](8)$$

$$F_{AB} = 1776,88(8)$$

$$F_{AB} = 14215 \text{ lbf}$$

Punto de aplicación de F<sub>R</sub>

$$y_{CP} - y_{CG} = \frac{\gamma_w \text{Sen} \theta \cdot I_{GX}}{P_{CG} A} = \frac{62,4 \text{Sen} 135^\circ I_{GX}}{1776,88(8)}$$

$$= \frac{44,12 \cdot I_{GX}}{1776,88(8)} = 0,0031 \cdot I_{GX}$$

$$= 0,0031 \left(\frac{1}{12}\right) (2)(4)^3$$

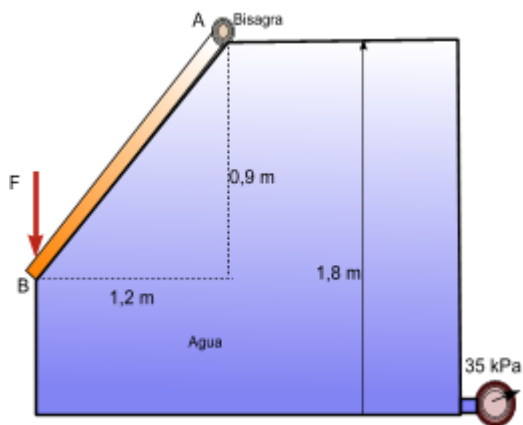
$$y_{CP} - y_{CG} = 0,033 \text{ pie}$$

$$D = 2 + 0,033$$

$$D = 2,033 \text{ pie} \dots \dots \dots \text{Rta}$$

**Problema 25**

Calcular la fuerza vertical mínima F, requerida para mantener cerrada la cubierta de esta caja. La cubierta tiene una anchura de 3m de perpendicular a plano del dibujo.



**Solución**

Datos e incógnitas

$$a = 3\text{m}; \dots p_{man} = 35\text{kPa}; \dots F = ??$$

En primer lugar se determina la presión del agua a nivel del punto A, esto es

$$p_m = p_A + \gamma_w h_{Am}$$

$$p_A = 35000 \text{ N} / \text{m}^2 - 9800(1,8) \text{ N} / \text{m}^2$$

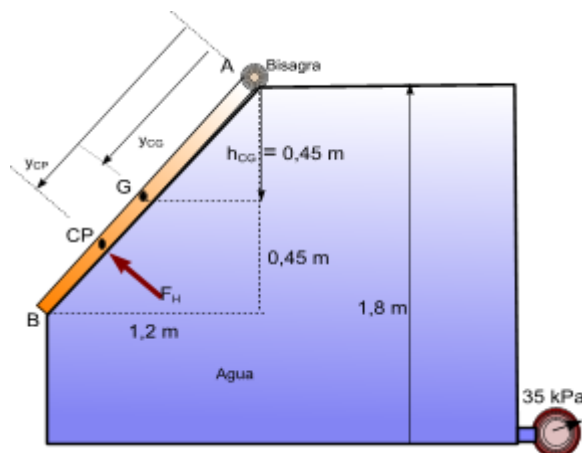
$$p_A = 17360 \text{ N} / \text{m}^2 \dots \dots \dots (1)$$

La fuerza hidrostática debido al agua será

$$F_H = p_{CG} A = (p_A + \gamma_w h_{CG}) A$$

$$F_H = [17360 + 9800(0,45)] [(1,5)(3)]$$

$$F_H = 97965 \text{ N} \dots \dots \dots (2)$$



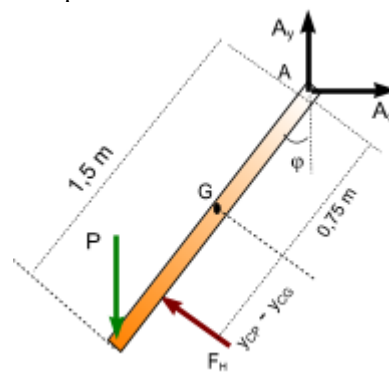
El punto de aplicación de F<sub>H</sub> se determina por la ecuación

$$y_{CP} - y_{CG} = \frac{\gamma_w \text{Sen} \theta \cdot I_{GX}}{P_C A}$$

$$= \frac{9800 \text{Sen} 143^\circ \left[\frac{1}{12} (3)(1,5^3)\right]}{97965}$$

$$y_{CP} - y_{CG} = 0,051 \text{ m} \dots \dots \dots \text{Rta}$$

En la figura se muestra el DCL de la compuerta en la que se observa las fuerzas que actúan y sus puntos de aplicación



Tomando momentos respecto al punto O, se tiene

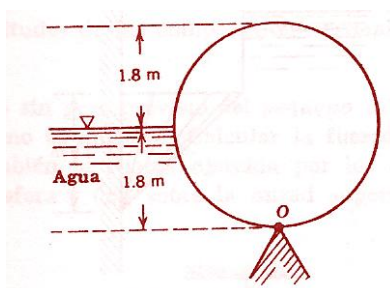


$$\begin{aligned} \sum M_A &= 0 \\ F(1,5 \text{sen } \varphi) &= F_H(0,75 + 0,051) \\ F(1,5 \text{Sen}53^\circ) &= 97965(0,8) \\ F &= 65310N \dots\dots\dots Rta. \end{aligned}$$

**Problemas de fuerzas sobre superficies curvas**

**Problema 26**

El cilindro mostrado en la figura tiene 2,4 m de longitud normal al plano del papel y está pivotado en O. Calcular el momento (respecto a O) que se requiere para mantenerlo en posición.

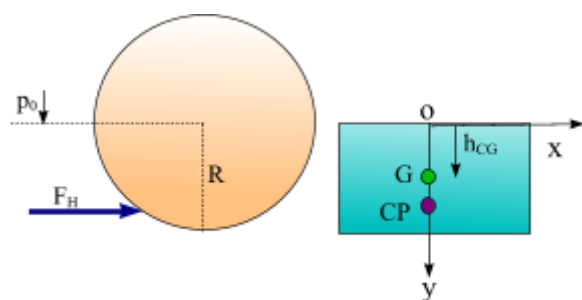


**Solución**

Datos e incógnitas

$$R = 1,8m; \dots L = 2,4m; \dots \rho_w = 1000kg/m^3; \dots M_O = ??$$

**Fuerza horizontal:** en la figura se muestra el área proyectada de la superficie curva en un plano perpendicular a la fuerza horizontal



El módulo de la fuerza horizontal está dado por

$$\begin{aligned} F_H &= p_{CG} A \\ F_H &= \gamma_w h_{CG} [(L)(R)] \\ F_H &= 9800(0,9)[2,4(1,8)] \\ F_H &= 38102,4N \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

El punto de aplicación de la fuerza horizontal será

$$\begin{aligned} y_{CP} - y_{CG} &= \frac{\gamma_w \text{Sen}\theta \cdot I_{GX}}{P_C A} \\ &= \frac{9800(\text{Sen}90^\circ) \left[ \frac{1}{12} (2,4)(1,8^3) \right]}{38102,4} \end{aligned}$$

$$y_{CP} - y_{CG} = 0,3m \dots\dots\dots (2)$$

**Fuerza vertical.** Está dada por el peso del fluido real o imaginario sobre la superficie curva, extendido desde la superficie curva hasta la superficie libre del fluido, es decir

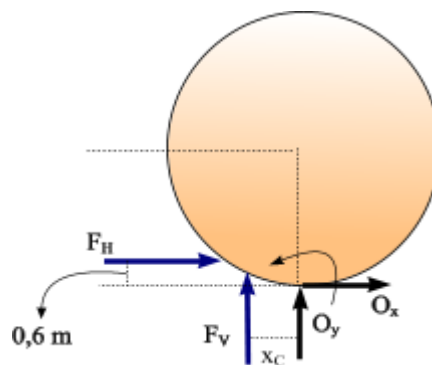
$$\begin{aligned} F_V &= \gamma_w V_{AOC} = 9800 \left( \frac{\pi \cdot R^2}{4} \right) L \\ &= 9800 \left( \frac{\pi}{4} \right) (1,8^2)(2,4) \end{aligned}$$

$$F_V = 59851N \dots\dots\dots (3)$$

**Punto de aplicación:** La fuerza vertical pasa por el centroide del volumen real o imaginario de fluido sobre la superficie, en este caso se tiene

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{4R}{3\pi} = \frac{4(1,8)}{3\pi} \\ x_C &= 0,76m \dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

En la figura se muestran las fuerzas y su punto de aplicación sobre el cilindro

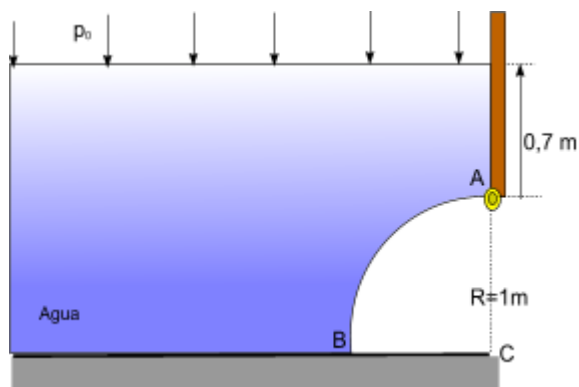


Tomando momentos respecto al punto O, se tiene

$$\begin{aligned} M_O &= \sum M_i = F_V(x) + F_H(0,6) \\ &= 59851(0,76) + 38102(0,6) \\ M_O &= 68348m.N \dots\dots\dots Rta. \end{aligned}$$

**Problema 27**

¿Cuál es la fuerza resultante producida por los fluidos que actúan sobre la compuerta AB cuya sección es un cuarto de círculo?. El ancho de la compuerta es 1,3 m.

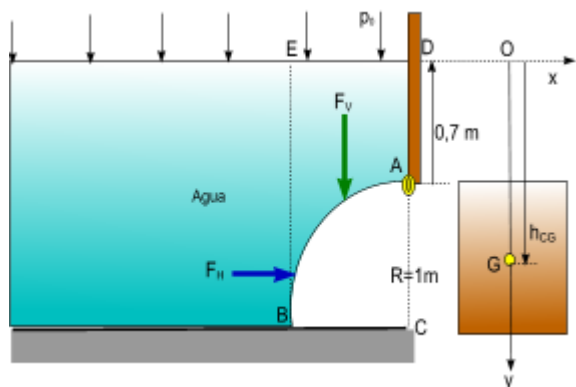


Solución

Datos e incógnitas

$$R = 1m; \dots L = 1,3m; \dots \rho_w = 1000kg / m^3; \dots F_R = ??$$

**Fuerza horizontal:** en la figura se muestra el área proyectada de la superficie curva en un plano perpendicular a la fuerza horizontal



El módulo de la fuerza horizontal está dado por

$$F_H = p_{CG} A = \gamma_w h_{CG} [(L)(R)]$$

$$= 9800(0,7 + 0,5)[1,3(1)]$$

$$F_H = 15288N \dots \dots \dots (1)$$

**Fuerza vertical.** Está dada por el peso del fluido real o imaginario sobre la superficie curva, extendido desde la superficie curva hasta la superficie libre del fluido, es decir

$$F_V = \gamma_w V_{ABDE} = \gamma_w [V_{ACBEDA} - V_{ACB}]$$

$$= \gamma_w [A_{ACBEDA} - A_{ACB}](L)$$

$$= 9800 \left[ 1(1,7) - \frac{\pi(1^2)}{4} \right] (1,3)$$

$$F_V = 11652N \dots \dots \dots (2)$$

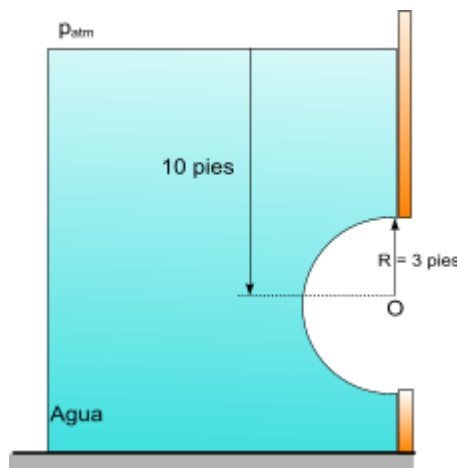
La fuerza resultante ejercida por el agua sobre la compuerta es

$$F_R = \sqrt{F_H^2 + F_V^2} = \sqrt{15288^2 + 11652^2}$$

$$F_R = 19222N \dots \dots \dots Rta.$$

**Problema 28**

Determine la magnitud de la fuerza resultante que actúa sobre la superficie semiesférica mostrada en la figura

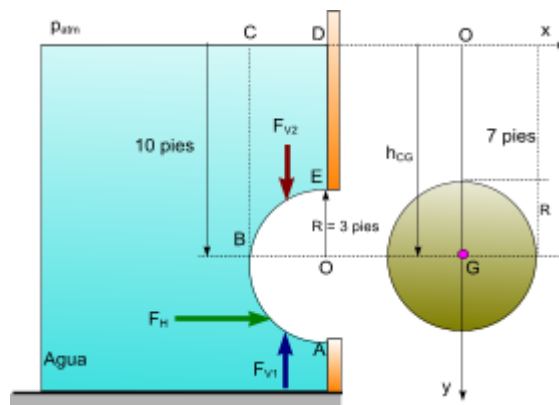


Solución

Datos e incógnitas

$$R = 3pie; \dots \gamma_w = 62,4lbf; F_R =$$

**Fuerza horizontal:** en la figura se muestra el área proyectada de la superficie curva en un plano perpendicular a la fuerza horizontal



El módulo de la fuerza horizontal está dado por

$$F_H = p_{CG} A = \gamma_w h_{CG} [\pi R^2]$$

$$= 62,4(10) [\pi(3^2)]$$

$$F_H = 17643 \text{ lbf} \dots\dots\dots(1)$$

**Solución**

Datos e incógnitas

$$R = 3 \text{ pie}; \gamma_w = 62,4 \text{ lbf}; F_R = ??; \rho_r = 0,8$$

$$p_{aire} = 30 \text{ lbf} / \text{pie}^2 = 4320 \text{ lbf} / \text{pie}^2$$

**Fuerza vertical.** En la figura se muestran las fuerzas verticales que actúan sobre las superficie curva

*Fuerza sobre AB*

$$F_{V1} = \gamma_w [V_{1/4esfera} + V_{1/2cilindro}] \dots\dots\dots(2)$$

*Fuerza sobre BC*

$$F_{V2} = \gamma_w [V_{1/2cilindro} - V_{1/esfera}] \dots\dots\dots(3)$$

La fuerza vertical neta será

$$F_V = F_{V1} - F_{V2}$$

$$= \gamma_w [(V_{1/4esf} + V_{1/2cil}) - (V_{1/2cil} + V_{1/2cil})]$$

$$= \gamma_w V_{1/2esf} = \gamma_w \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{4\pi R^3}{3} \right) \right]$$

$$= 62,4 \left( \frac{2\pi(3^3)}{3} \right)$$

$$F_V = 3528,6 \text{ lbf} \dots\dots\dots(4)$$

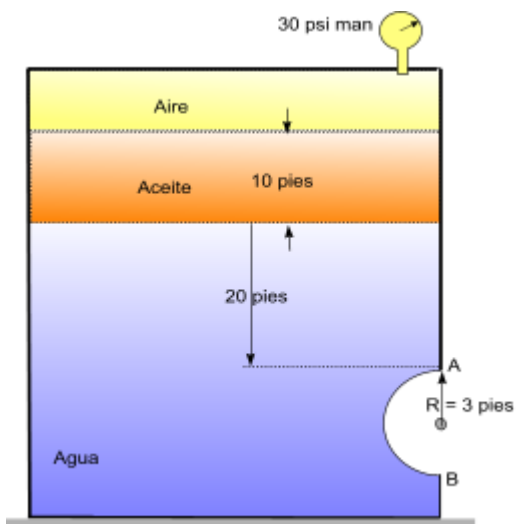
La fuerza resultante ejercida por el agua sobre la compuerta es

$$F_R = \sqrt{F_H^2 + F_V^2} = \sqrt{17643^2 + 3528,6^2}$$

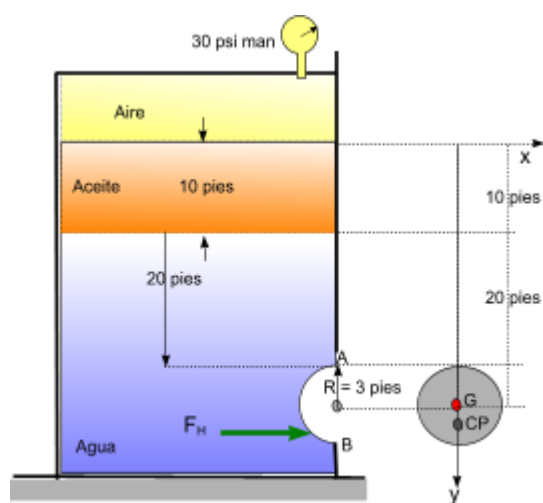
$$F_R = 17992 \text{ lbf} \dots\dots\dots Rta.$$

**Problema 29**

¿Cuál es la fuerza horizontal sobre la compuerta ejercido por todos los fluidos de adentro y de afuera?. La densidad relativa del aceite es 0,8.



**Fuerza horizontal:** en la figura se muestra el área proyectada de la superficie curva en un plano perpendicular a la fuerza horizontal



El módulo de la fuerza horizontal está dado por

$$F_H = p_{CG} A$$

$$= [p_a + \gamma_{aceite}(10) + \gamma_w(23)] (\pi R^2)$$

$$= [4320 + 0,8(62,4) + 62,4(23)] [\pi(3^2)]$$

$$F_H = 176839 \text{ lbf} \dots\dots\dots Rta$$

El punto de aplicación de la fuerza horizontal se determina a partir de la ecuación

$$y_{CP} - y_{CG} = \frac{\gamma_w \text{Sen} \theta \cdot I_{GX}}{P_C A_{proy}}$$

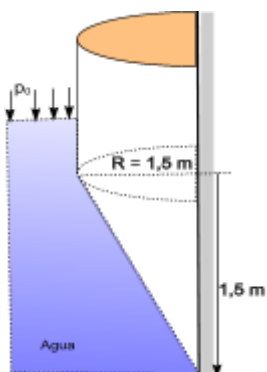
$$= \frac{62,4(\text{Sen} 90^\circ) \left[ \frac{\pi R^4}{4} \right]}{6254,4(\pi R^2)}$$

$$y_{CP} - y_{CG} = 0,089 \text{ pie} \dots\dots\dots Rta$$

**Problema 30**

El apoyo semicónico se usa para soportar una torre semicilíndrica sobre la cara de corriente arriba de un dique. Calcular la magnitud, dirección y sentido de las componentes vertical y horizontal de la

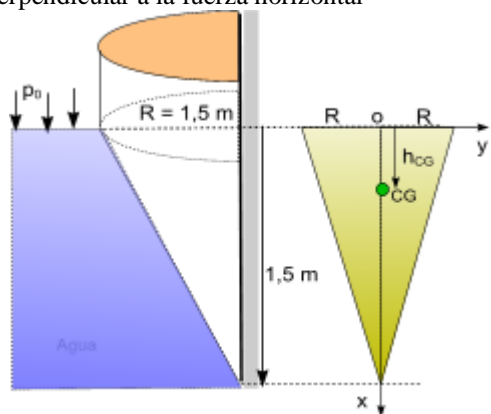
fuerza ejercida por el agua sobre el apoyo: (a) cuando la superficie del agua se encuentra en la base del semicilindro; (b) cuando la superficie del agua se encuentra a 1,2 m sobre este punto.



**Solución**

**Parte (a).** Calculo de las componentes de la fuerza ejercida por el agua cuando la superficie libre del agua está en la base del cilindro

*Fuerza horizontal.* En la figura se muestra el área proyectada de la superficie curva en un plano perpendicular a la fuerza horizontal



La magnitud de la fuerza horizontal está dada por

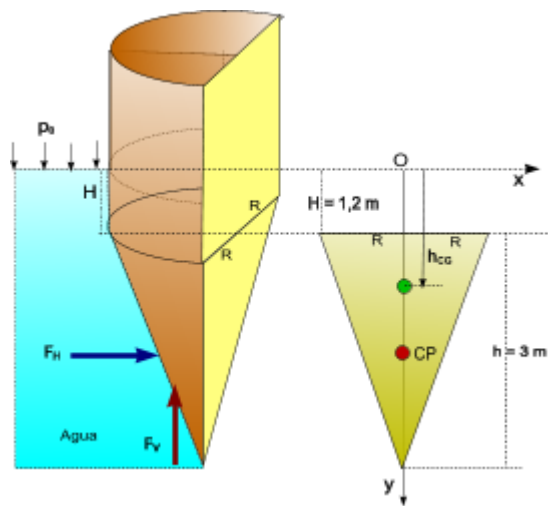
$$\begin{aligned}
 F_H &= p_{CG} A_{proy} = \gamma_w h_{CG} \left[ \frac{b \cdot h}{2} \right] \\
 &= 9800 \left( \frac{1,5}{3} \right) \left[ \frac{(3)(1,5)}{2} \right] \\
 F_H &= 11025 N \rightarrow \dots\dots\dots(1)
 \end{aligned}$$

*Fuerza vertical*

$$\begin{aligned}
 F_V &= \gamma_w V_{sobre\alpha sup} = \gamma_w \left[ \frac{1}{2} V_{cono} \right] \\
 &= \gamma_w \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\pi \cdot R^2 h}{3} \right) \right] \\
 &= 9800 \left( \frac{\pi(1,5^2)(1,5)}{6} \right) \\
 F_V &= 17318 N \uparrow \dots\dots\dots(2)
 \end{aligned}$$

**Parte(b).** Calculo de las componentes vertical y horizontal de la fuerza ejercida por el agua cuando la superficie libre está 1,2 m sobre la base del cilindro.

*Fuerza horizontal:* En la figura se muestra la superficie proyectada del apoyo semicónico en un plano perpendicular a la fuerza horizontal.



La magnitud de la fuerza horizontal será

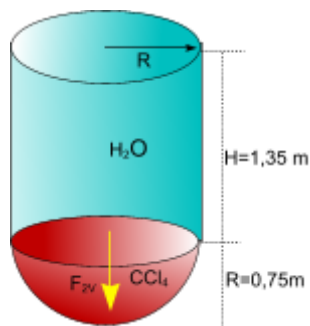
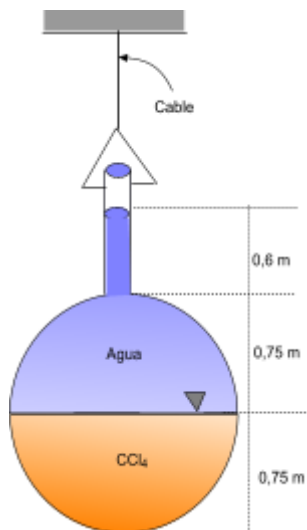
$$\begin{aligned}
 F_H &= p_{CG} A_{proy} = \gamma_w h_{CG} \left[ \frac{b \cdot h}{2} \right] \\
 &= 9800 \left( 1,2 + \frac{1,5}{3} \right) \left[ \frac{(3)(1,5)}{2} \right] \\
 F_H &= 37485 N \rightarrow \dots\dots\dots(3)
 \end{aligned}$$

*Fuerza Vertical.* La magnitud de la fuerza vertical será

$$\begin{aligned}
 F_V &= \gamma_w V_{sobre\alpha sup} = \gamma_w \left[ \frac{1}{2} V_{cono} + \frac{1}{2} V_{cilindra} \right] \\
 &= \gamma_w \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\pi \cdot R^2 h}{3} \right) + \frac{1}{2} (\pi \cdot R^2 H) \right] \\
 &= 9800 \left( \frac{\pi(1,5^2)(1,5)}{6} + \frac{\pi(1,5^2)(1,2)}{2} \right) \\
 F_V &= 58881 N \uparrow \dots\dots\dots(4)
 \end{aligned}$$

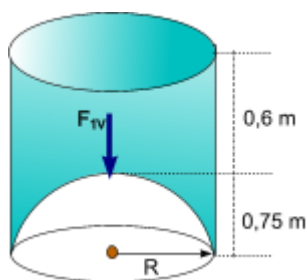
**Problema 31**

El casco esférico sin peso provisto del pequeño tubo piezométrico, se suspende de un cable. Determine: (a) la fuerza ejercida por los líquidos sobre la mitad inferior de la esfera y (b) la fuerza ejercida por los líquidos sobre la mitad superior de la esfera (c) La fuerza total de tensión en el cable



**Solución**

**Parte (a).** En primer lugar se determina la fuerza vertical sobre la mitad superior del casco, para ello se dibuja la superficie junto al fluido como se muestra en la figura



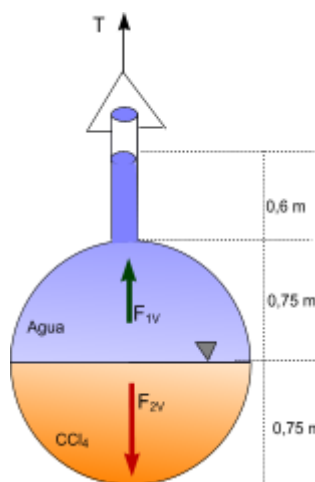
La fuerza vertical está dada por

$$\begin{aligned}
 F_{1V} &= \gamma_w V_{\text{sobre la sup}} = \gamma_w \left[ V_{\text{cilindro}} - \frac{1}{2} V_{\text{esfera}} \right] \\
 &= \gamma_w \left[ \pi R^2 H - \frac{1}{2} \left( \frac{4\pi R^3}{3} \right) \right] \\
 &= 9800 \left[ \pi (0,75^2) (1,35) - \left( \frac{2\pi (0,75^3)}{3} \right) \right] \\
 F_{1V} &= 14719,6N \uparrow \dots\dots\dots(1)
 \end{aligned}$$

**Parte (b).** Se calcula ahora la fuerza vertical ejercida por los fluidos sobre la mitad inferior del casco

$$\begin{aligned}
 F_{2V} &= \gamma_w V_{\text{cilindro}} + \gamma_{\text{ccl}_4} \left( \frac{1}{2} V_{\text{esfera}} \right) \\
 &= 9800(\pi R^2 H) + 1590(9,8) \left( \frac{2\pi R^3}{3} \right) \\
 &= 9800 \left[ \pi (0,75^2) (1,35) + 15582 \left( \frac{2\pi (0,75^3)}{3} \right) \right] \\
 F_{2V} &= 37147,2N \downarrow \dots\dots\dots(2)
 \end{aligned}$$

**Parte (c).** *Calculo de T.* En la figura se muestra el DCL del sistema; depreciando el peso del casco, las fuerzas que aparecen son la tensión en el cable (T), y las fuerzas debido a los fluidos

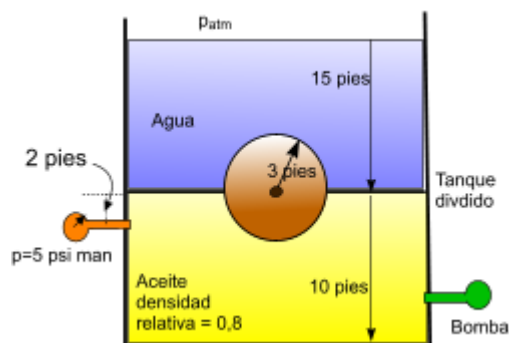


Aplicando las ecuaciones de equilibrio se tiene

$$\begin{aligned}
 \sum F_y &= 0 \\
 T + F_{1V} &= F_{2V} \\
 T &= 37147,2 - 14719,6 \\
 T &= 22427,6N \dots\dots\dots Rta.
 \end{aligned}$$

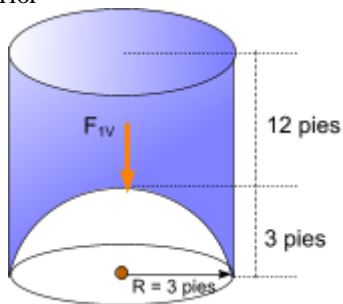
**Problema 32**

¿Cuál es la fuerza vertical sobre la esfera si las dos secciones del tanque están completamente aisladas una de la otra por el tabique AB?



**Solución**

En la figura se muestra la fuerza vertical ejercida por el agua sobre la semiesfera superior



La magnitud de la fuerza está dada por

$$\begin{aligned}
 F_{1V} &= \gamma_w V_{sobrela\ sup.} \\
 &= \gamma_w \left[ V_{cilindro} - \frac{1}{2} V_{esfera} \right] \\
 &= \gamma_w \left[ \pi \cdot R^2 H - \frac{1}{2} \left( \frac{4\pi \cdot R^3}{3} \right) \right] \\
 &= 62,40 \left[ \pi \cdot (3^2) (15) - \left( \frac{2\pi \cdot (3^3)}{3} \right) \right] \\
 F_{1V} &= 22936,14\ lb\ \downarrow \dots\dots\dots(1)
 \end{aligned}$$

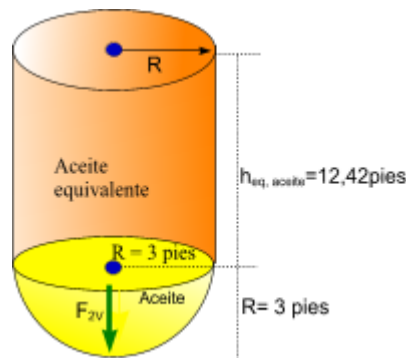
Para determinar la fuerza ejercida por el aceite, en primer lugar se determina la presión a nivel del tabique AB, esto es

$$\begin{aligned}
 p_{man.} &= p_1 + \gamma_{aceite} (2\ pie) \\
 p_1 &= 5(144) - 0,8(62,4)(2) \\
 p_1 &= 620,16\ lb / p^2 \dots\dots\dots(2)
 \end{aligned}$$

La presión anterior se convierte en altura equivalente de aceite

$$\begin{aligned}
 p_1 &= \gamma_{aceite} h_e \\
 620,16 &= 0,8(62,4)h_e \\
 h_e &= 12,42\ pie \dots\dots\dots(3)
 \end{aligned}$$

En la figura se muestra la superficie semiesférica con los fluidos respectivos



La magnitud de la fuerza resultante será

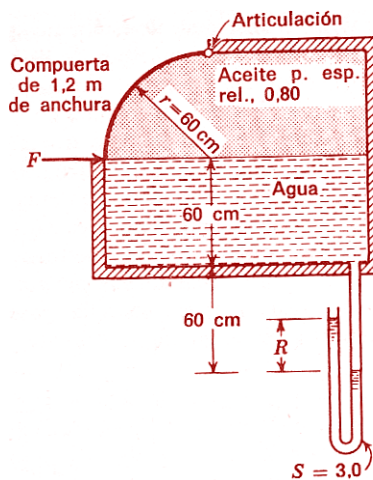
$$\begin{aligned}
 F_{2V} &= \gamma_{ace} V_{sobrela\ sup.} \\
 &= \gamma_{acei.} \left[ V_{cilindro} + \frac{1}{2} V_{esfera} \right] \\
 &= \gamma_{acei.} \left[ \pi \cdot R^2 H + \frac{1}{2} \left( \frac{4\pi \cdot R^3}{3} \right) \right] \\
 &= 0,8(62,40) \left[ \pi \cdot (3^2) (12,42) - \left( \frac{2\pi \cdot (3^3)}{3} \right) \right] \\
 F_{2V} &= 20357,4\ lb\ \uparrow \dots\dots\dots(4)
 \end{aligned}$$

La fuerza resultante sobre la esfera será

$$\begin{aligned}
 F &= F_{1V} - F_{2V} \\
 &= 22936,2 - 20357,4 \\
 F &= 2578,8\ \downarrow \dots\dots\dots Rta.
 \end{aligned}$$

**Problema 33**

Calcular la fuerza F necesaria para mantener la compuerta mostrada en la figura en la posición cerrada. Considere que R = 60 cm y que la compuerta tiene un ancho de 1,2 m

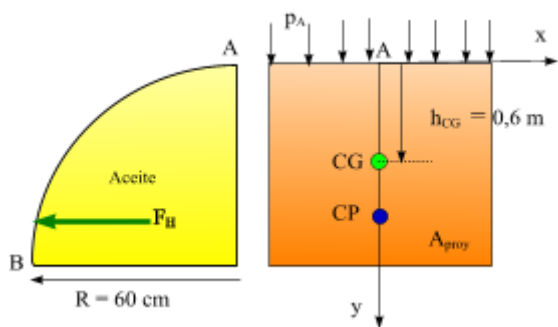


**Solución**

En primer lugar se determina la presión en el punto A del aceite. Del manómetro en U se puede observar que los puntos M y N tienen la misma presión, esto es

$$\begin{aligned}
 p_M &= p_N \\
 p_0 + \gamma_1 R &= p_A + \gamma_{ac.} h_{ac.} + \gamma_w h_w \\
 3000(0,6) &= (p_A - p_0) + 800(0,6) + 1000(1,2) \\
 p_{A,man} &= 120\ kg / m^2 \dots\dots\dots(1)
 \end{aligned}$$

**Fuerza horizontal.** En la figura se muestra el área proyectada de superficie curva AB en un plano perpendicular a la fuerza horizontal



La magnitud de la fuerza horizontal será

$$F_H = p_{CG} A_{proj} = (p_A + \gamma_{ac} h_{CG})(b.h)$$

$$= [120 + 800(0,3)] [1,2(0,6)]$$

$$F_H = 259,2 \text{ kg} \dots \dots \dots (2)$$

El punto de aplicación de la fuerza horizontal será

$$y_{CP} - y_{CG} = \frac{\gamma_{acel} \text{Sen}\theta \cdot I_{GX}}{P_{CG} A_{proj}}$$

$$= \frac{800(\text{Sen}90^\circ) \left[ \frac{1,2(0,6^3)}{12} \right]}{259,2}$$

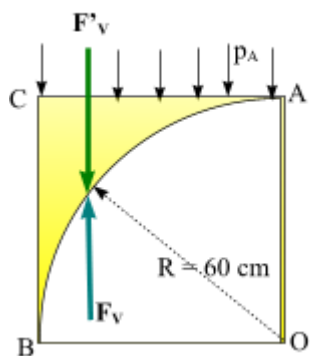
$$y_{CP} - y_{CG} = 0,067 \text{ m} \dots \dots \dots (3)$$

La fuerza vertical será

$$F_V = p_A A + \gamma_{acel} (A_{AOBC} - A_{AOB})(a)$$

$$= 120 [0,6(1,2)] + 800 \left[ 0,6^2 - \frac{\pi \cdot 0,6^2}{4} \right] (1,2)$$

$$F_V = 160,57 \text{ kg} \dots \dots \dots (4)$$



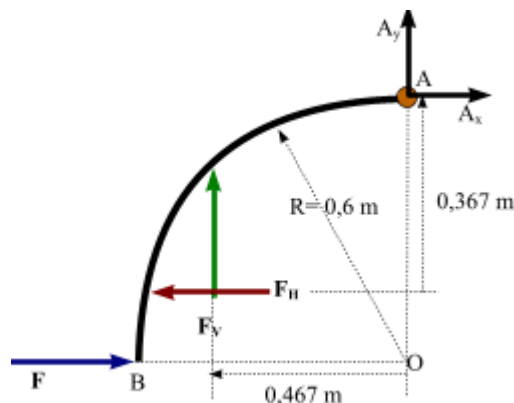
Punto de aplicación de la fuerza vertical. Pasa por el centroide del volumen imaginario sobre la superficie curva AB

$$x_c = \frac{\sum x_i A_i}{\sum A_i} = \frac{x_1 A_1 - x_2 A_2}{A_1 - A_2}$$

$$= \frac{0,3(0,6)(0,6) - \frac{4(0,6)}{3\pi} \left( \frac{\pi(0,6^2)}{4} \right)}{0,6^2 - \frac{\pi(0,6^2)}{4}}$$

$$x_c = 0,467 \text{ m} \dots \dots \dots (5)$$

En la figura se muestra el DCL de la compuerta



Aplicando las ecuaciones de equilibrio se tiene

$$\sum M_A = 0$$

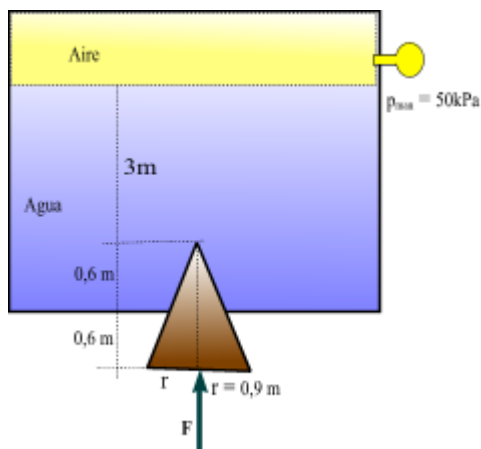
$$F(0,6) = F_H(0,367) + F_V(0,467)$$

$$0,6F = 259,2(0,367) + 160,57(0,467)$$

$$F = 283,52 \text{ kg} \dots \dots \dots \text{Rta.}$$

**Problema 34.**

El agujero que hay en el fondo del depósito de la figura, está cerrado con un tapón cónico cuya densidad es 400kg/m<sup>3</sup>. Determine la fuerza F necesaria para mantener cerrado el depósito.



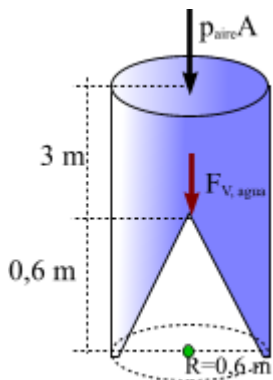
**Solución**

Datos e incógnitas

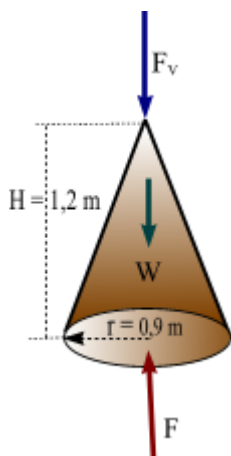
$$\rho_c = 400 \text{ kg} / \text{m}^3; \dots p_{aire} = 50 \text{ kPa}; \dots F = ??$$

La fuerza vertical debido al agua más la presión del aire es

$$\begin{aligned}
 F_V &= \gamma_w V_{\text{sobrela sup. er.}} = \gamma_w (V_{\text{cilindro}} - V_{\text{cono}}) \\
 &= 9800 \left[ \pi R^2 H - \frac{\pi R^2 h}{3} \right] \\
 &= 9800 \left[ \pi(0,45^2)(3) - \frac{\pi(0,45^2)(0,6)}{3} \right] \\
 F_V &= 17456,6 \text{ N} \quad (1)
 \end{aligned}$$



En la figura se muestra el DCL del tapón cónico, en el se observan aplicadas las fuerzas: peso del tapón(W), la fuerza vertical neta debido a los fluidos sobre superficie cónica( $F_V = p_a A + F_{\text{agua}}$ ), y la fuerza “F”.

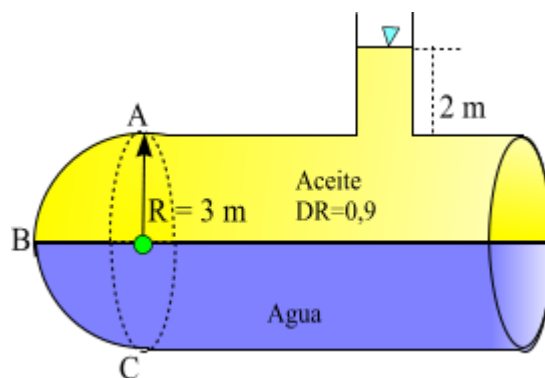


Aplicando las ecuaciones de equilibrio se tiene

$$\begin{aligned}
 \Sigma F_y &= 0 \\
 F &= W + F_V + p_a A \\
 &= \rho_c g \left( \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h_c}{3} \right) + F_V + p_a (\pi R^2) \\
 &= 3920\pi \left( \frac{1,2(0,9^2)}{3} \right) + 17456,6 + 5 \cdot 10^4 \pi(0,45^2) \\
 F &= 53254 \text{ N} \uparrow \quad \text{Rta.}
 \end{aligned}$$

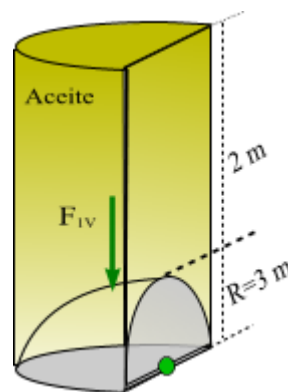
**Problema 35**

El depósito cilíndrico de la figura tiene un extremo semiesférico ABC, y contiene aceite (DR = 0,9) y agua. Determine: (a) La magnitud de la fuerza vertical resultante sobre el extremo semiesférico ABC, (b) La magnitud y dirección de la fuerza horizontal resultante ejercida por los fluidos sobre la superficie semiesférica ABC.



**Solución**

**Fuerza vertical sobre AB.** En la figura se observa la superficie curva con los fluidos

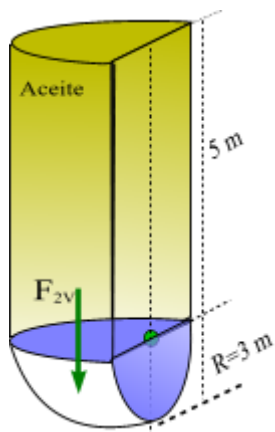


La magnitud de la fuerza vertical sobre AB

$$\begin{aligned}
 F_{1V} &= \gamma_{\text{ace}} V_{\text{sobrela sup.}} \\
 &= \gamma_{\text{acei.}} \left[ \frac{1}{2} V_{\text{cilindro}} - \frac{1}{4} V_{\text{esfera}} \right] \\
 &= \gamma_{\text{acei.}} \left[ \frac{1}{2} \pi \cdot R^2 H + \frac{1}{4} \left( \frac{4\pi \cdot R^3}{3} \right) \right] \\
 &= 900 \left[ \frac{\pi(3^2)(5)}{2} - \left( \frac{\pi \cdot (3^3)}{3} \right) \right] \\
 F_{2V} &= 38170,4 \text{ kgf} \uparrow \dots\dots\dots(1)
 \end{aligned}$$

**Fuerza vertical sobre BC.** En la figura se muestra la superficie con los fluidos





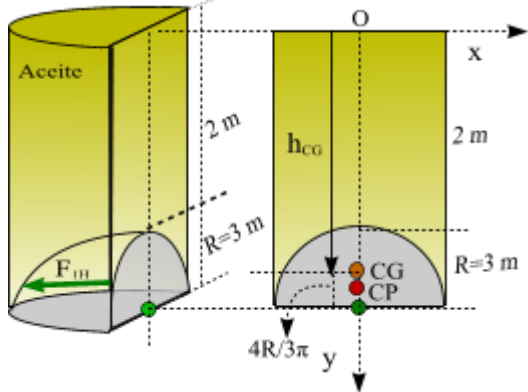
La magnitud de la fuerza sobre BC es

$$\begin{aligned}
 F_{2V} &= \gamma_{aceite} \left( \frac{1}{2} V_{cilindro} \right) + \gamma_w \left( \frac{1}{4} V_{esfera} \right) \\
 &= \gamma_{aceite} \left( \frac{\pi R^2 H}{2} \right) + \gamma_w \left( \frac{1}{4} \left( \frac{4\pi R^3}{3} \right) \right) \\
 &= 900 \left( \frac{\pi(3^2)(5)}{2} \right) + 1000 \left( \frac{\pi(3^3)}{3} \right) \\
 F_{2V} &= 91891,6 \text{ kgf} \downarrow \quad (2)
 \end{aligned}$$

La fuerza vertical neta actuando sobre la superficie curva ABC, es

$$\begin{aligned}
 F_V &= F_{2V} - F_{1V} = 91891,6 - 38170,4 \\
 F_V &= 53721,2 \text{ kgf} \downarrow \quad \text{Rta.}
 \end{aligned}$$

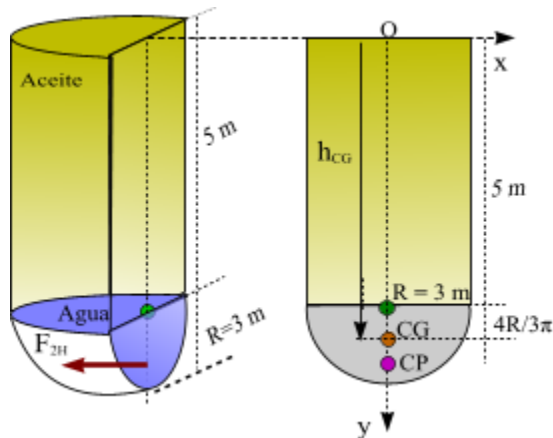
Fuerza horizontal sobre AB. En la figura se muestra la superficie proyectada en un plano perpendicular a la fuerza horizontal.



La magnitud de la fuerza horizontal será

$$\begin{aligned}
 F_{1H} &= p_{CG} A_{pro} \\
 &= \left( \gamma_{aceite} h_{CG} \right) \left( \frac{\pi R^2}{2} \right) \\
 &= 900 \left( 5 - \frac{4(3)}{3\pi} \right) \left( \frac{\pi(3^2)}{2} \right) \\
 F_{1H} &= 47417,3 \text{ kg} \leftarrow \dots\dots\dots(3)
 \end{aligned}$$

Fuerza horizontal sobre BC. En la figura se muestra el área proyectada de la superficie curva BC en un plano perpendicular a la fuerza horizontal



La magnitud de la fuerza horizontal sobre BC es

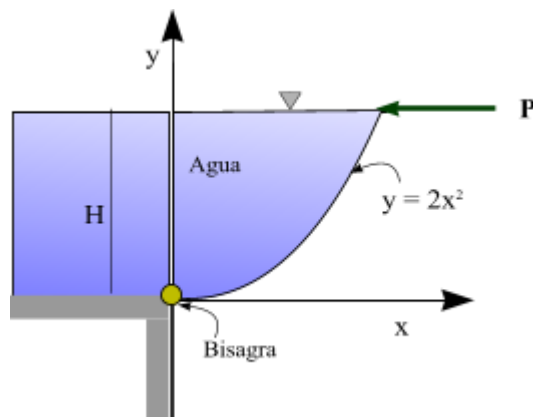
$$\begin{aligned}
 F_H &= p_{CG} A_{pro} \\
 &= \left( \gamma_{aceite} h_{aceite} + \gamma_w \left( \frac{4R}{3\pi} \right) \right) \left( \frac{\pi R^2}{2} \right) \\
 &= \left( 900(5) + 1000 \left( \frac{4 \times 3}{3\pi} \right) \right) \left( \frac{\pi(3^2)}{2} \right) \\
 F_H &= 81617,3 \text{ kg} \leftarrow \dots\dots\dots(4)
 \end{aligned}$$

La fuerza horizontal resultante será

$$\begin{aligned}
 F_H &= F_{1H} + F_{2H} = 47417,3 + 81617,3 \\
 F_H &= 129034,6 \text{ kgf} \leftarrow \quad \text{Rta.}
 \end{aligned}$$

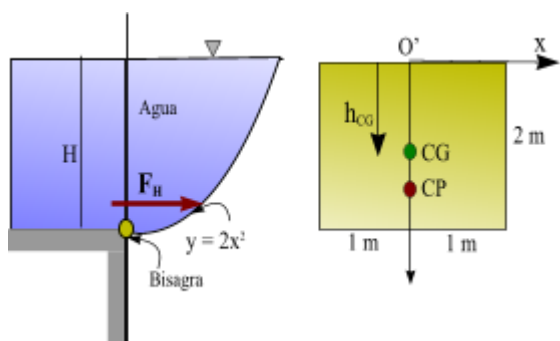
**Problema 36.**

Determine la fuerza P, necesaria para que la compuerta parabólica mostrada se encuentre en equilibrio. Considere que H = 2 m y el ancho de la compuerta es 2 m.



**Solución**

Fuerza horizontal sobre la compuerta. En la figura se muestra la superficie proyectada en un plano perpendicular a la fuerza horizontal.



La magnitud de la fuerza horizontal será

$$\begin{aligned}
 F_{1H} &= \rho_{CG} A_{proy} \\
 &= \gamma_w h_{CG} (H \cdot a) \\
 &= 9800 \text{ N/m}^3 (1\text{m})(2\text{m} \times 2\text{m}) \\
 F_H &= 39200 \text{ N} \rightarrow \dots\dots\dots(1)
 \end{aligned}$$

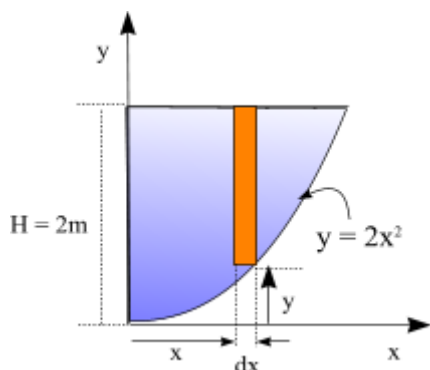
El punto de aplicación de la fuerza horizontal será

$$\begin{aligned}
 y_{CP} - y_{CG} &= \frac{\gamma_w \text{Sen}\theta \cdot I_{GX}}{\rho_{CG} A_{proy}} \\
 &= \frac{9800(\text{Sen}90^\circ) \left[ \frac{2(2^3)}{12} \right]}{39200} \\
 y_{CP} - y_{CG} &= 0,333 \text{ m} \dots\dots\dots(2)
 \end{aligned}$$

La magnitud de la fuerza resultante será

$$\begin{aligned}
 F_V &= \gamma_w V_{sobre la sup.} \\
 F_V &= \gamma_w (Area)(ancho) \quad (3)
 \end{aligned}$$

Se procede a determinar el área utilizando el elemento diferencial mostrado en la figura.



$$\begin{aligned}
 dA &= (H - y) dx = (2 - 2x^2) dx \\
 A &= \int_0^1 (2 - 2x^2) dx \\
 &= \left[ 2x - \frac{2}{3} x^3 \right]_0^1 = \left[ 2(1) - \frac{2}{3} 1^3 \right] = 4/3 \\
 A &= 1,33 \text{ m}^2 \quad (4)
 \end{aligned}$$

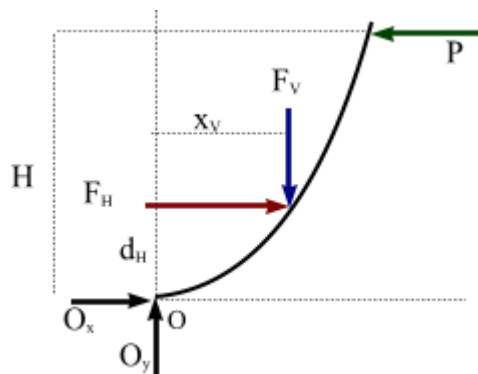
Remplazando la ec. (4) en (3), resulta

$$\begin{aligned}
 F_V &= 9800 \text{ N/m}^3 (1,333 \text{ m}^2)(2\text{m}) \\
 F_V &= 26127 \text{ N} \downarrow \quad (5)
 \end{aligned}$$

El punto de aplicación de la fuerza vertical será

$$\begin{aligned}
 \bar{x} &= \frac{\int x dA}{A} = \frac{\int x(2 - 2x^2) dx}{A} \\
 &= \frac{1}{A} \left[ 2 \int_0^1 x dx - 2 \int_0^1 x^3 dx \right] \\
 &= \frac{1}{A} \left[ \frac{2x^2}{2} - \frac{2x^4}{4} \right]_0^1 \\
 \bar{x} &= 0,375 \text{ m} \quad (6)
 \end{aligned}$$

Para determinar el valor de P se traza el DCL de la compuerta tal como se muestra en la figura.



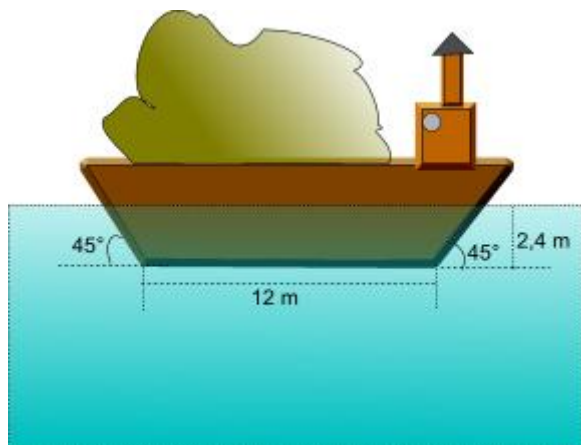
Tomando momentos respecto a la bisagra

$$\begin{aligned}
 \sum M_o &= 0 \\
 P(H) &= F_V(\bar{x}) + F_H(d_H) \\
 P(2\text{m}) &= 26127 \text{ N}(0,375\text{m}) + 39200 \text{ N}(0,667\text{m}) \\
 P &= 17972 \text{ N} \leftarrow \text{Rta.}
 \end{aligned}$$

**Problemas sobre la Ley de Arquímedes**

**Problema 36**

¿Cuál es el peso total de la barcaza y su carga?. La barcaza tiene 6 m de ancho.

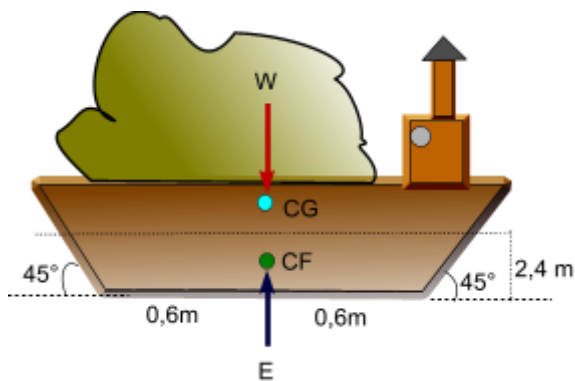


**Solución**

Datos e incógnitas

$$W_T = ??; \gamma_w = 1000 \text{ kgf} / \text{m}^3$$

En la figura se muestra el DCL de la barcaza más su carga, las fuerzas que actúan sobre ella son: su peso total (W) y la fuerza de flotación (E).



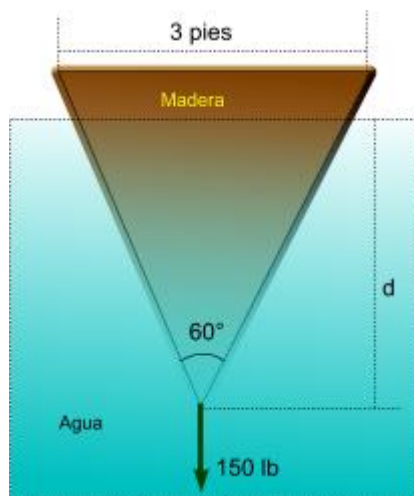
Aplicando las ecuaciones de equilibrio se tiene

$$\begin{aligned} \sum F_y &= 0 \\ W_T &= E = \gamma_w V_s \\ &= 1000 \left[ \frac{(12 + 16,8)(2,4)}{2} \right] (6) \\ W_T &= 207360 \text{ kgf} \quad \text{Rta.} \end{aligned}$$

**Problema 37**

Una cuña de madera con densidad relativa 0,6 es forzada dentro del agua mediante una fuerza de 150

lbf. El ancho de la cuña es de 2 pies. ¿Cuál es la profundidad *d*?

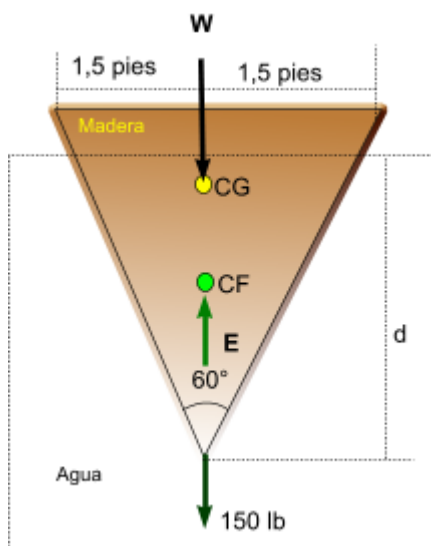


**Solución**

Datos e incógnitas

$$\begin{aligned} \gamma_c &= 37,44 \text{ lbf} / \text{p}^3; \therefore F = 150 \text{ lbf}; \therefore e = 2 \text{ pie}; \\ \gamma_w &= 62,4 \text{ lbf} / \text{p}^3; \therefore d = ?? \end{aligned}$$

En la figura se muestra el DCL de la cuña, en el se observa que las fuerzas que actúan son: El peso de la cuña (W), la fuerza externa (F) y el empuje hidrostático



Aplicando las ecuaciones de equilibrio se tiene

$$\begin{aligned} \sum F_y &= 0 \\ W + F &= E \\ \gamma_c V_C + F &= \gamma_w V_S \\ 37,44 \left[ \frac{3(6)}{2} \right] (2) + 150 &= 62,4 V_S \\ V_S &= 7,08 \text{ pie}^3 \dots\dots\dots(1) \end{aligned}$$

De la figura puede observarse que el volumen de la porción sumergida es

$$V_s = \frac{x(d)(e)}{2} = 7,08 \text{ pie}^3 \dots\dots\dots(2)$$

Por semejanza de triángulos se obtiene

$$\frac{x}{d} = \frac{3}{6} \Rightarrow x = 1,15 d \dots\dots\dots(3)$$

Remplazando la ec. (3) en (2)

$$\frac{1,15.d(d)(2)}{2} = 7,08 \text{ pie}^3$$

$$d = 2,48 \text{ pie} \dots\dots\dots \text{Rta.}$$

**Problema 38**

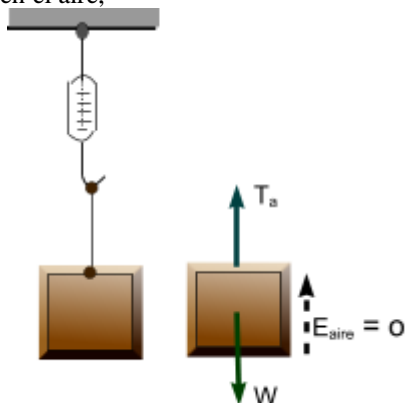
Una piedra pesa 267 N en el aire y 178 N en el agua. Calcular su volumen y su densidad relativa

**Solución**

Datos e incógnitas

$$W_{P,aire} = 267 N; \dots W_{P,agua} = 178 N; \dots V = ??; \dots \rho_r = ??$$

En la figura se muestra el DCL de la piedra cuando es pesado en el aire,

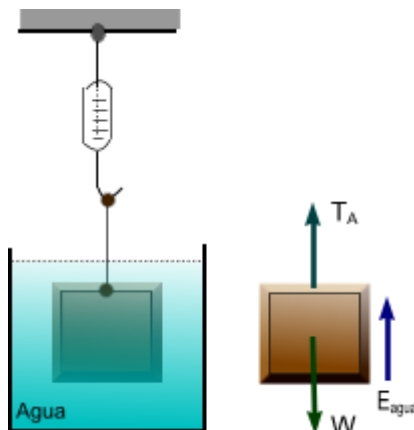


Aplicando las ecuaciones de equilibrio, resulta

$$\sum F_y = 0$$

$$T_a = W_{P,aire} = 267 N \dots\dots\dots(1)$$

En la figura se muestra el DCL de la piedra cuando está totalmente sumergida en el agua



Aplicando las ecuaciones de equilibrio se tiene

$$\sum F_y = 0$$

$$T + E_{agua} = W_p$$

$$178 + \gamma_w V_s = 267$$

$$9800 V_s = 89 N$$

$$V_s = 9,08 \cdot 10^{-3} m^3 \dots\dots\dots(2)$$

Enseguida se procede a determinar la densidad relativa, para esto en primer lugar se determina la densidad de la piedra

$$\rho_p = \frac{m}{V} = \frac{(267 N / 9,8 m / s^2)}{9,08 \cdot 10^{-3} m^3}$$

$$\rho_p = 3000 \text{ kg} / m^3 \dots\dots\dots(3)$$

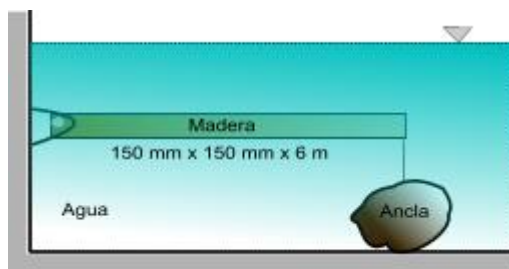
La densidad relativa de la piedra será

$$\rho_r = \frac{\rho_p}{\rho_w} = \frac{3000}{1000}$$

$$\rho_r = 3 \dots\dots\dots(4)$$

**Problema 39**

La viga de madera pesa 6,3 kN/m<sup>3</sup> y se mantiene en posición horizontal por el ancla de concreto (24 kN/m<sup>3</sup>). Calcular el peso total mínimo que puede tener el ancla de concreto.

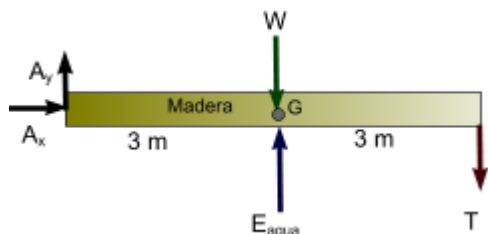


**Solución**

Datos e incógnitas

$$\gamma_m = 6,3kN/m^3; \gamma_c = 24kN/m^3; W = ??$$

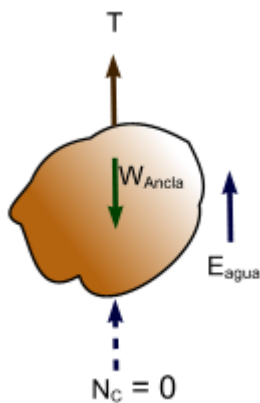
En la figura se muestra el DCL de la viga horizontal



Aplicando la ecuación de momentos respecto del punto A se tiene

$$\begin{aligned} \sum M_A &= 0 \\ E_1(3m) &= W_m(3m) + T(6m) \\ 3\gamma_w V_S &= 3\gamma_m V_m + 6T \\ 3(9800)(0,135) &= 3(6300)(0,135) + 6T \\ T &= 236,25N \dots\dots\dots (l) \end{aligned}$$

En la figura se muestra el DCL del ancla: en este diagrama puede observarse que para que el peso sea mínimo la fuerza de contacto entre el fondo y el concreto debe ser cero, por tanto

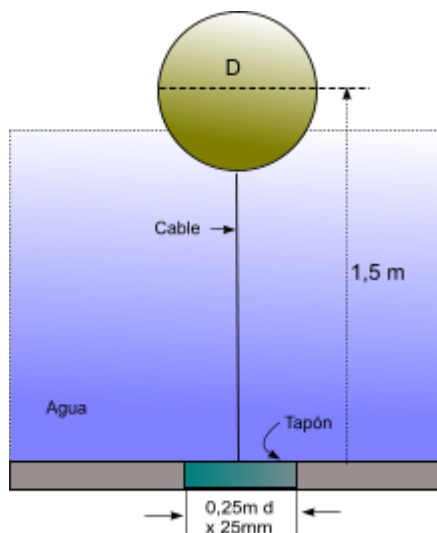


Aplicando la ecuación de momentos, resulta

$$\begin{aligned} \sum F_y &= 0 \\ T + N_c + E_2 &= W_{\min} \\ 236,25 + 0 + \gamma_w V_C &= W_{\min} \\ 236,25 + 0 + \gamma_w \left( \frac{W_C}{\gamma_c} \right) &= W_{\min} \\ W_C \left( 1 - \frac{\gamma_w}{\gamma_c} \right) &= 236,25N \\ W_C &= 399,3N \dots\dots\dots Rta. \end{aligned}$$

**Problema 40**

El tapón circular de 0,25 m de diámetro y 0,025 m de espesor tiene un peso específico de 76 kN/m<sup>3</sup>. Calcular el diámetro D de la esfera de peso despreciable para que la válvula se abra cuando el agua tenga 1,5 m de profundidad. Considere que el peso del cable es despreciable.

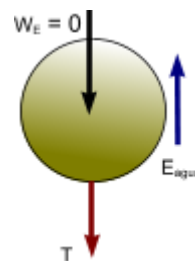


**Solución**

Datos e incógnitas

$$d_T = 0,25m; e_T = 0,025m; \gamma_T = 76kN/m^3; D = ?$$

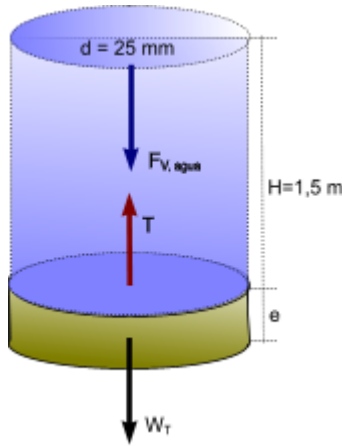
En la figura se muestra el DCL de la esfera de peso despreciable



Aplicando las ecuaciones de equilibrio resulta

$$\begin{aligned} \sum F_y &= 0 \\ T = E &= \rho_w g V_S \\ &= \rho_w g \left[ \frac{2\pi D^3}{24} \right] \\ T = 9800 \left[ \frac{\pi(D^3)}{12} \right] &\dots\dots\dots (l) \end{aligned}$$

En la figura se muestra el DCL del tapón, en el se observa que actúan las fuerzas: Tensión en el cable (T), el peso del tapón (W), y la fuerza debido al agua (F<sub>v</sub>)

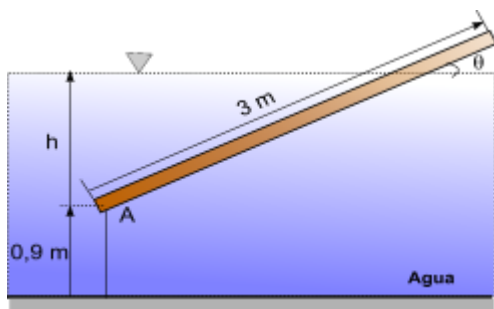


Aplicando las ecuaciones de equilibrio, resulta

$$\begin{aligned} \sum F_y &= 0 \\ T &= W_T + F_V \\ \frac{9800\pi D^3}{12} &= \gamma_T \left( \frac{\pi d_T^2}{4} \right) e_T + \gamma_w \left( \frac{\pi d_T^2}{4} \right) H \\ 9800D^3 &= 3(7,6 \cdot 10^4)(0,25^2)(0,025) + 3(9800)(0,25)(1,5) \\ D &= 0,68m \dots \dots \dots Rta. \end{aligned}$$

**Problema 41**

El listón de madera de 0,05 m por 0,05 m por 3 m cuya densidad es 400 kg/m<sup>3</sup> de la figura se mantiene en la posición mostrada por la acción de la cuerda fija en el punto A. Calcular: (a) El ángulo  $\theta$  cuando h = 0,9 m, (b) El valor mínimo de h para que  $\theta$  sea 90°.

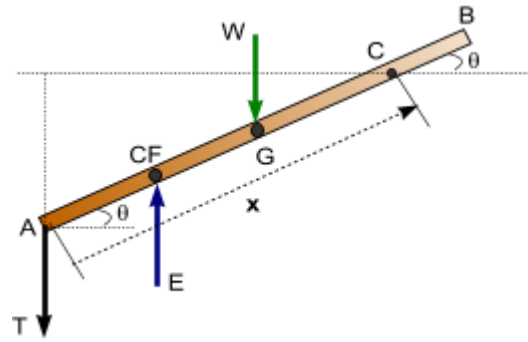


**Solución**

Datos e incógnitas

$$a = 0,05m; . b = 0,05m; . L = 3m; . \theta = ??; . h = 0,9$$

En la figura se muestra el DCL de la barra en el se observa que las fuerzas que actúan son el peso de la barra (W); la tensión en el cable(T) y el empuje hidrostático (E), actuando en la mitad de la porción sumergida



Aplicando la segunda condición de equilibrio se tiene

$$\begin{aligned} \sum M_A &= 0 \\ (\overline{ADC} \cos \theta) &= W_B (\overline{AG} \cos \theta) \\ E(\overline{AD}) &= W_B (\overline{AG}) \\ \rho_w g V_s (\overline{AD}) &= \rho_B g V_B (\overline{AG}) \\ \rho_w V_s \left( \frac{x}{2} \right) &= \rho_B V_B \left( \frac{L}{2} \right) \\ 1000(0,05)(0,05)(x) \left( \frac{x}{2} \right) &= 400(0,05)^2 (L) \left( \frac{L}{2} \right) \\ 1000x^2 &= 400(3^2) \\ x^2 &= 3,6m^2 \\ x &= 1,8974m \dots \dots \dots (1) \end{aligned}$$

El ángulo  $\theta$ , se determina a partir de la geometría

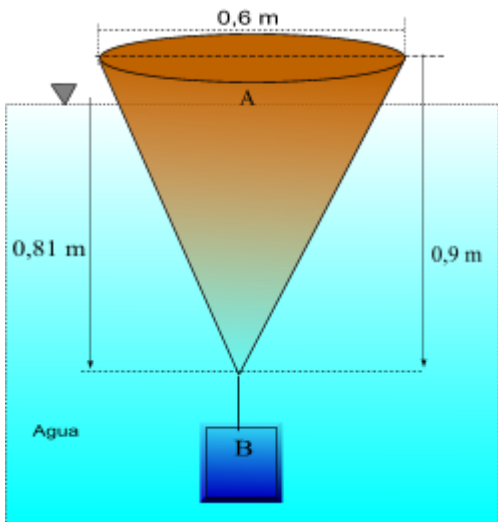
$$\begin{aligned} \text{sen } \theta &= \frac{h}{x} = \frac{0,9m}{1,8974m} \\ \theta &= 28,32^\circ \dots \dots \dots Rta \end{aligned}$$

El valor mínimo se h para que  $\theta$  sea 90°, se obtiene de la ecuación (2), esto es

$$\begin{aligned} \text{sen } 90^\circ &= \frac{h_{\min}}{x} \\ h_{\min} &= x \text{Sen } 90^\circ = 1,8974 \text{Sen } 90^\circ \\ h_{\min} &= 1,8974m \dots \dots \dots Rta \end{aligned}$$

**Problema 42**

El cuerpo homogéneo A de la figura es un cono circular recto ( $\rho = 640\text{kg/m}^3$ ). El cuerpo B ( $\rho = 2400\text{kg/m}^3$ ) se fija a A mediante un alambre. Si los cuerpos están en equilibrio en la posición mostrada. Determinar: (a) El volumen del bloque B, (b) La resultante de la fuerza que el fluido ejerce sobre la superficie lateral del cono

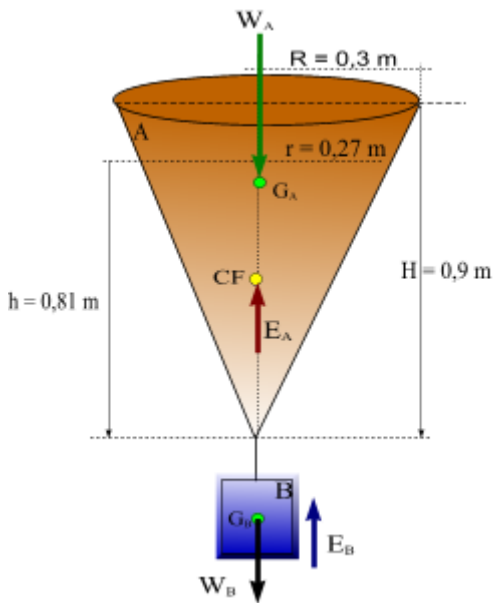


**Solución**

Datos e incógnitas

$$\rho_A = 640 \text{ kg/m}^3; \dots \rho_B = 2400 \text{ kg/m}^3; \\ V_B = ??; \dots F_V = ??$$

En la figura se muestra el DCL de A+B



Aplicando las ecuaciones de equilibrio, se tiene

$$\sum F_y = 0 \\ E_A + E_B = W_A + W_B \dots \dots \dots (1)$$

$$\rho_w g V_s + \rho_w g V_B = \rho_A g V_A + \rho_B g V_B \dots \dots \dots (2)$$

De la geometría de la figura, se tiene

$$\frac{r}{0,81} = \frac{0,3}{0,9} \\ r = 0,27 \text{ m} \dots \dots \dots (3)$$

Reemplazando la ecuación (3) en (2), resulta

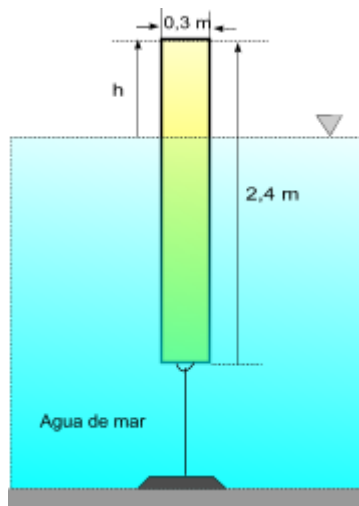
$$\rho_w \left( \frac{1}{3} r^2 h \right) + \rho_w V_B = \rho_A \left( \frac{1}{3} \pi R^2 H \right) + \rho_B V_B \\ 1000 \pi \left( \frac{0,27^2 (0,8)}{3} \right) + 1000 V_B = \frac{640 \pi (0,3^2) (0,9)}{3} + 2400 V_B \\ 61,84 + 1000 V_B = 54,29 + 2400 V_B \\ V_B = 5,39 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \dots \dots \dots \text{Rta} \dots (4)$$

La fuerza resultante ejercida por el fluido es el empuje hidrostático sobre el cono

$$E_A = \rho_w g \left( \frac{1}{3} \pi r^2 h \right) \\ = 9800 \left( \frac{1}{3} \right) (\pi) (0,27^2) (0,81) \\ E_A = 607 \text{ N} \dots \dots \dots \text{Rta}$$

**Problema 43**

Una baliza de canal consta de un cilindro de acero hueco de 300 mm de diámetro y 90 kg de masa, que se ancla en el fondo con un cable como se indica. Con la marea alta,  $h = 0,6 \text{ m}$ . Determine la tensión  $T$  en el cable. Hallar así mismo el valor de  $h$  cuando el cable se afloja al bajar la marea. La densidad del agua marina es de  $1030 \text{ kg/m}^3$ . Supóngase que la baliza está lastrada para que se mantenga en una posición vertical.

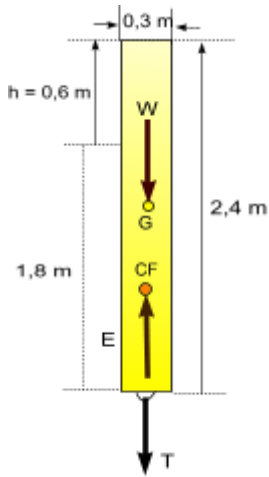


**Solución**

Datos e incógnitas

$$d = 300 \text{ mm}; \dots m = 90 \text{ kg}; \dots h = 0,6 \text{ m}; \dots \\ T = ??; \dots \rho_w = 1030 \text{ kg/m}^3$$

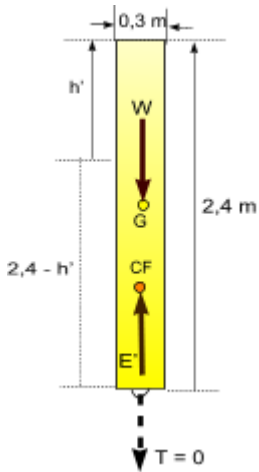
En la figura se muestra el DCL de la baliza cuando la marea es alta



Aplicando las ecuaciones de equilibrio se tiene

$$\begin{aligned} \sum F_y &= 0 \\ E - T - W &= 0 \\ T &= E - W \\ &= \rho_w g V_s - mg \\ &= 1030(9,8)(\pi r^2 H) - mg \\ &= 10094\pi(0,15^2)(1,8) - 90(9,8) \\ T &= 402,31N \dots \dots \dots Rta \end{aligned}$$

En la figura se muestra el DCL de la baliza al bajar la marea, entonces la tensión en el cable es nula

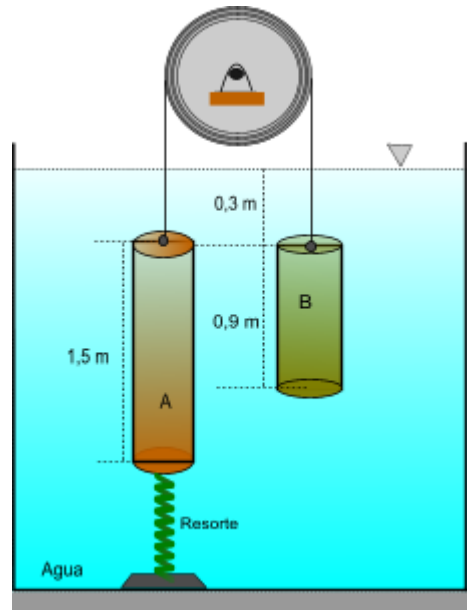


Aplicando las ecuaciones de equilibrio se tiene

$$\begin{aligned} \sum F_y &= 0 \\ E &= W \\ \rho_w g (\pi r^2) (2,4 - h') &= mg \\ 1030(9,8)(\pi)(0,15^2)(2,4 - h') &= 90(9,8) \\ h' &= 1,16m \dots \dots \dots Rta \end{aligned}$$

**Problema 44.**

Los cuerpos A y B de la figura son dos cilindros sólidos y homogéneos, la sección transversal de cada cilindro es  $0,09 \text{ m}^2$ . Las densidades de los cilindros A y B son de  $1800$  y  $2600 \text{ kg/m}^3$ , respectivamente. Un resorte de tensión (uno que sólo actúa a tensión) interconecta a A con el fondo del tanque. En la figura se representa al resorte sin deformar. Calcule la posición de la superficie del cilindro A con respecto a la superficie correspondiente del cilindro B cuando el módulo de elasticidad del resorte es  $900 \text{ N/m}$ .

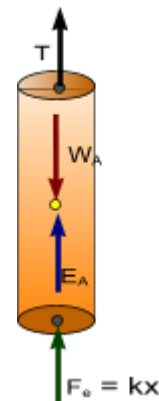


**Solución**

Datos e incógnitas

$$\begin{aligned} A_A &= 0,09 \text{ m}^2; \quad \rho_A = 1800 \text{ N/m}^3; \quad \rho_B = 2600 \text{ N/m}^3; \\ K &= 900 \text{ N/m}; \quad x = ?? \end{aligned}$$

En la figura se muestra el DCL del cilindro A, sobre el se observa que actúan las fuerzas: Tensión en el Cable (T), peso del cilindro ( $W_A$ ), la fuerza elástica ( $F_e$ ) y el empuje ( $E_A$ ).

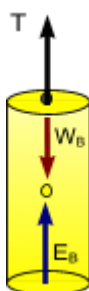




Aplicando las ecuaciones de equilibrio se tiene

$$\begin{aligned} \sum F_y &= 0 \\ T + E_A &= W_A + F_e \\ T &= k \cdot x + \rho_A g V_A - \rho_w g V_A \\ T &= k \cdot x + \rho_A g [A(1,5)] - \rho_w g [A(1,5)] \\ T &= k \cdot x + 17640 [0,09(1,5)] - 9800(0,135) \\ T &= k \cdot x + 1058,4 \dots \dots \dots (1) \end{aligned}$$

En la figura se muestra el DCL del cilindro B, en el se observa que actúan las fuerzas: La tensión en el cable (T), el peso del cilindro (W<sub>B</sub>) y el empuje hidrostático (E<sub>B</sub>).



Aplicando las ecuaciones de equilibrio se tiene

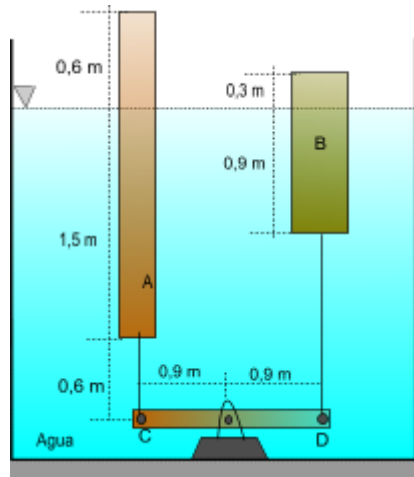
$$\begin{aligned} \sum F_y &= 0 \\ T &= W_B - E_B \\ T &= \rho_B g V_B - \rho_w g V_B \\ T &= g V_B (\rho_B - \rho_w) \\ T &= 9,8(0,09)(0,9)(2600 - 1000) \\ T &= 1270N \dots \dots \dots (2) \end{aligned}$$

De la ecuación (1) y (2), se obtiene

$$\begin{aligned} k \cdot x + 1058,4 &= 1270 \\ 900 \cdot x &= 211,68 \\ x &= 0,235m \dots \dots \dots Rta. \end{aligned}$$

**Problema 45.**

Los dos bloques prismáticos A y B de la figura son de madera ( $\rho_m = 600 \text{ kg/m}^3$ ). Las áreas de las secciones transversales son  $0,045 \text{ m}^2$  para A y  $0,108 \text{ m}^2$  para B. La barra CD se construyó con la misma madera y el área de su sección transversal es  $0,018 \text{ m}^2$ . Calcular la distancia que el bloque B debe subir o hundirse para que el sistema recobre su configuración de equilibrio.

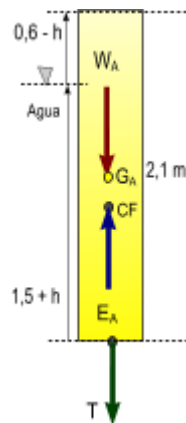


**Solución**

Datos e incógnitas.

$$A_A = 0,045 \text{ m}^2; A_B = 0,108 \text{ m}^2; \rho_A = \rho_B = 600 \text{ kg/m}^3; A_{CD} = 0,018 \text{ m}^2; h = ??$$

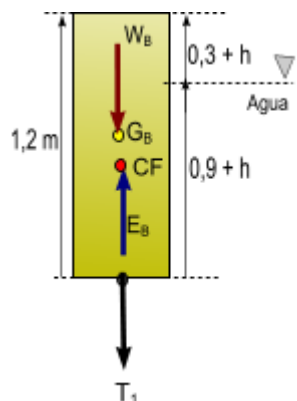
En la figura se muestra el DCL del bloque A cuando ha sido hundido, sobre él actúan las fuerzas: La tensión en el cable (T), el peso del bloque (W<sub>A</sub>) y la fuerza de flotación (E<sub>A</sub>).



Aplicando las ecuaciones de equilibrio resulta

$$\begin{aligned} \sum F_y &= 0 \\ E_A &= T + W_A \\ T &= E_A - W_A \\ &= \rho_w g V_A - \rho_A g V_s \\ &= 9800 [A_A (2,1 - 0,6 + h)] - 5880 (\pi A_A h_A) \\ &= 9800 [0,045(1,5 + h)] - 5880(0,045)(2,1) \\ T &= 441(1,5 + h) - 555,66 \dots \dots \dots (1) \end{aligned}$$

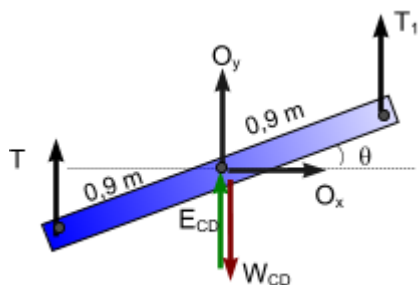
En la figura se muestra el DCL del bloque B cuando se ha desplazado una altura  $h$ , sobre el actúan las fuerzas: La tensión en el cable ( $T_1$ ), el peso del bloque ( $W_B$ ) y la fuerza de flotación ( $E_B$ ).



Aplicando las ecuaciones de equilibrio se tiene

$$\begin{aligned} \sum F_y &= 0 \\ T_1 &= E_B - W_B \\ &= \rho_w g V_s - \rho_B g V_B \\ &= 9800[1,2 - (0,3 + h)] - 58808(1,2)(0,108) \\ T_1 &= 1058,4(0,9 - h) - 762,05 \dots \dots \dots (2) \end{aligned}$$

En la figura se muestra el DCL de la varilla, sobre ella actúan las fuerzas: reacción en la articulación ( $R_o$ ); el peso de ella ( $W_v$ ); el la fuerza de flotación ( $E_v$ ), las tensiones en los cables  $T$  y  $T_1$ .



Aplicando la segunda condición de equilibrio resulta

$$\begin{aligned} \sum M_o &= 0 \\ T(0,9 \cos \theta) &= T_1(0,9 \cos \theta) \\ T &= T_1 \dots \dots \dots (3) \end{aligned}$$

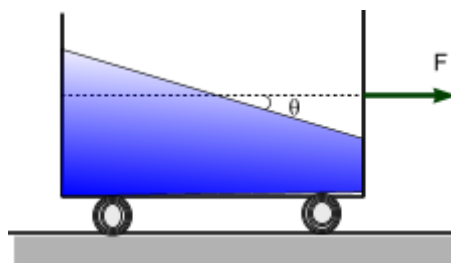
Remplazando las ec. (1) y (2) en (3), resulta

$$\begin{aligned} 441(1,5 + h) - 555,66 &= 1058,4(0,9 + h) - 762,05 \\ 1499,4h &= 84,67 \\ h &= 56mm \dots \dots \dots Rta. \end{aligned}$$

**Problemas sobre traslación y rotación de masas líquidas**

**Problema 46.**

Un tanque pesa 80 N y contiene 0,25 m<sup>3</sup> de agua. Sobre el tanque actúa una fuerza de 100 N en dirección horizontal tal como se muestra en la figura. ¿Cuál es el ángulo  $\theta$  cuando la superficie libre del agua alcanza una orientación fija con respecto al tanque?.



**Solución**

Datos e incógnitas.

$$W_{tanque} = 80N, \dots F = 100N; \dots V_w = 0,25m^3; \dots \theta = ??$$

En primer lugar se determina la masa de agua en el tanque.

$$\begin{aligned} m_w &= \rho_w V_w = 1000(0,25) \\ m_w &= 250kg \dots \dots \dots (1) \end{aligned}$$

Se determina ahora la masa del tanque vacío

$$\begin{aligned} W_T &= m_T g = 80N \\ m_T &= 8,16kg \dots \dots \dots (2) \end{aligned}$$

La mas total del sistema tanque + agua es

$$\begin{aligned} m_s &= m_w + m_T \\ &= 250 + 8,16 \\ m_s &= 258,16kg \dots \dots \dots (3) \end{aligned}$$

La aceleración que le produce la fuerza externa F se determina utilizando la segunda ley de Newton en dirección horizontal

$$\begin{aligned} \sum F_x &= ma_x \\ 100N &= 258,16kg(a_x) \\ a_x &= 0,387m/s^2 \dots\dots\dots(4) \end{aligned}$$

El ángulo  $\theta$  se determina a partir de la ecuación

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \theta &= \frac{a_x}{g} \\ \operatorname{tg} \theta &= \frac{0,387}{9,8} = 0,039 \\ \text{por tan to} \\ \theta &= 2,26^\circ \dots\dots\dots \text{Rta.} \end{aligned}$$

**Problema 47.**

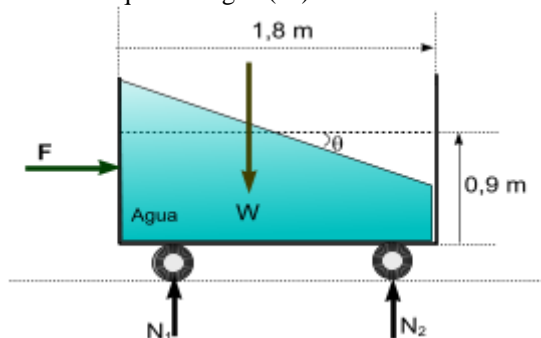
Un depósito abierto de sección cuadrada de 1,8 m de lado pesa 3500 N y contiene 90 cm de agua. Está sometido a la acción de una fuerza no equilibrada de 10600 N paralela a uno de sus lados. ¿Cuál debe ser la altura de las paredes del depósito para que no se derrame agua?. ¿Qué valor tiene la fuerza que actúa sobre la pared donde la profundidad es mayor?.

**Solución**

Datos e incógnitas

$$\begin{aligned} L = a &= 1,8m; W = 3500N; h_w = 0,9m; F = 10,6kN; \\ H &= ??; .F_w = ?? \end{aligned}$$

En la figura se muestra el DCL del tanque más el fluido en movimiento, las fuerzas que actúan son: la fuerza externa (F); la reacción normal ( $N_1$  y  $N_2$ ) y el peso del tanque + el agua (W).



Aplicando las ecuaciones de movimiento se tiene

$$\begin{aligned} \sum F_x &= m_s a_x \\ F &= \frac{W}{g} a_x \\ 10600 &= \frac{W}{g} a_x \dots\dots\dots(1) \end{aligned}$$

El peso total del sistema depósito + agua es

$$\begin{aligned} W &= W_D + W_w = W_D + \rho g V_w \\ &= 3500 + 9800(1,8^2)(0,9) \\ W &= 32076,8N \dots\dots\dots(2) \end{aligned}$$

Remplazando la ec (2) en (1), resulta

$$\begin{aligned} 10600 &= \frac{32076,8}{9,8} a_x \\ a_x &= 3,24m/s^2 \rightarrow \dots\dots\dots(3) \end{aligned}$$

Al moverse el depósito con una aceleración constante el agua forma una pendiente igual a

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \theta &= \frac{a_x}{g} = \frac{3,24}{9,8} = 0,33 \\ \text{por tan to} \\ \theta &= 18,28^\circ \dots\dots\dots(4) \end{aligned}$$

Se determina ahora la altura d

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \theta &= \frac{d}{l/2} = \frac{2d}{1,8} = 0,33 \\ \text{entonces} \\ d &= 0,297m \dots\dots\dots(5) \end{aligned}$$

La altura del depósito será

$$\begin{aligned} H &= 0,9 + d = 0,9 + 0,297 \\ H &= 1,197m \dots\dots\dots \text{Rta.} \end{aligned}$$

La fuerza hidrostática sobre la pared del depósito donde la profundidad es mayor será

$$\begin{aligned} F_w &= \rho g h_{CG} A \\ &= 9800 \left( \frac{1,197}{2} \right) (1,197)(1,8) \\ F_w &= 12637,4N \dots\dots\dots \text{Rta.} \end{aligned}$$

**Problema 48.**

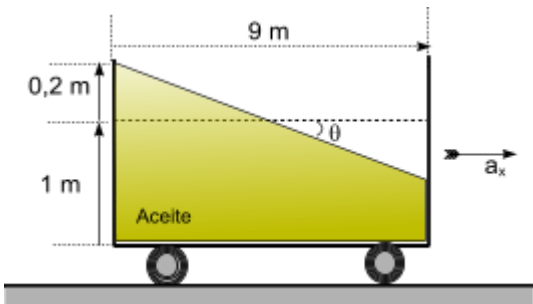
Un depósito abierto de 9 m de longitud, 1,2 m de ancho y 1,2 m de profundidad está lleno con 1 m de aceite de  $\rho_r = 0,82$ . Se acelera en la dirección de su longitud uniformemente desde el reposo hasta una velocidad de 14 m/s. ¿Cuál es el intervalo de tiempo mínimo para acelerar el depósito hasta dicha velocidad sin que se derrame el líquido?.

**Solución**

Datos e incógnitas

$L = 9m; a = 1,2m; h = 1,2m; \rho_{ac} = 822kg / m^3;$   
 $v_0 = 0; v_f = ??.$

En la figura se muestra el depósito de masa despreciable conteniendo aceite cuya superficie libre forma una pendiente cuando el depósito se desplaza hacia la derecha.



Del gráfico se determina la pendiente dando un valor de

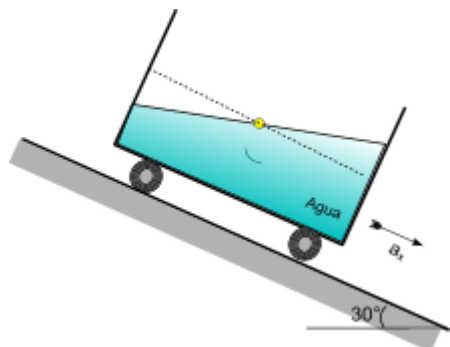
$$\begin{aligned} \text{tg } \theta &= \frac{0,2}{4,5} = \frac{a_x}{g} \\ a_x &= 9,8 \left( \frac{0,2}{4,5} \right) \\ a_x &= 0,436m / s^2 \end{aligned}$$

El tiempo requerido se determina a partir de la relación cinemática

$$\begin{aligned} v_f &= v_0 + a_x t \\ 14 &= 0 + 0,436(t) \\ t &= 32,14 \text{ s} \dots \dots \dots \text{Rta} \end{aligned}$$

**Problema 49**

Un recipiente rectangular que contiene agua experimenta una aceleración constante hacia abajo sobre el plano inclinado, como se muestra en la figura. Determine la pendiente de la superficie libre del agua.

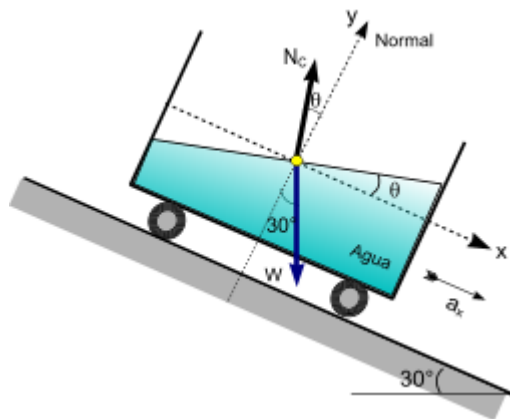


**Solución**

Datos e incógnitas

$\rho_w = 62,4lb / p^3; a_x = 10p / s^2; \theta = ??$

Para resolver el problema se traza el DCL de una partícula en la superficie libre del fluido, tal como se muestra en la figura.



Aplicando las ecuaciones de movimiento según las direcciones mostradas se tiene

$$\begin{aligned} \sum F_y &= ma_y \\ N_c \cos \theta - mg \cos 30^\circ &= m(0) \\ N_c &= \frac{mg \cos 30^\circ}{\cos \theta} \dots \dots \dots (1) \\ \sum F_x &= ma_x \\ mg \cdot \text{sen} 30^\circ - N_c \text{sen} \theta &= ma_x \dots \dots \dots (2) \end{aligned}$$

Remplazando la ec. (1) en (2), resulta

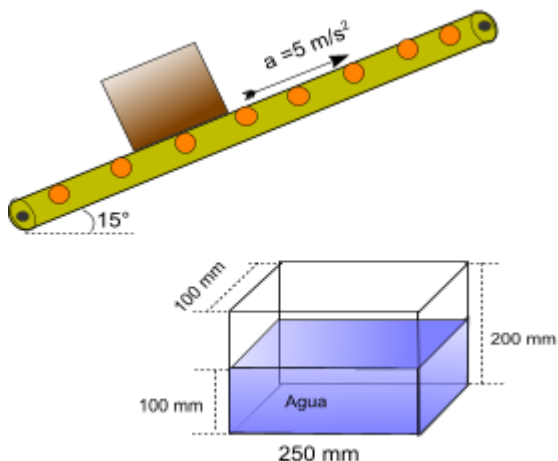
$$\begin{aligned} mg \cdot \text{sen} 30^\circ - \frac{mg \cos 30^\circ}{\cos \theta} \text{sen} \theta &= ma_x \\ 32,2 \left( \frac{1}{2} \right) - 32,2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \text{tg} \theta &= 10 \\ \text{tg} \theta &= 0,219 \end{aligned}$$

El ángulo  $\theta$  será

$\theta = 12,34^\circ \dots \dots \dots \text{Rta.}$

**Problema 50.**

Un pequeño recipiente rectangular que contiene agua y se encuentra abierto se localiza sobre una faja transportadora como se muestra en la figura la cual se acelera constantemente a  $5 \text{ m/s}^2$ . Un vez que se alcanza la configuración debe estado permanente (equilibrio relativo). ¿Se derramará el agua del recipiente?

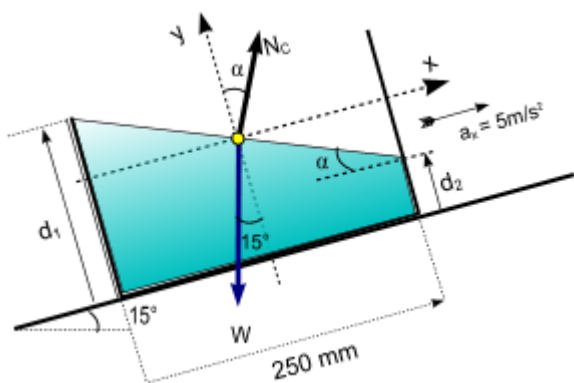


**Solución**

Datos e incógnitas.

$$a = 5 \text{ m/s}^2; \dots \rho_w = 1000 \text{ kg/m}^3; \dots$$

En la figura se muestra el DCL de una partícula de fluido en la superficie libre del líquido, las fuerzas que actúan son: su peso (W), la fuerza  $N_C$  debido a todas las partículas que la rodean y es perpendicular a la superficie libre.



Aplicando las ecuaciones de movimiento según las direcciones mostradas se tiene

Dirección y

$$\begin{aligned} \sum F_y &= ma_y \\ N_C \cos \alpha - mg \cos 15^\circ &= m(0) \\ N_C \cos \alpha &= mg \cos 15^\circ \\ N_C &= \frac{mg \cos 15^\circ}{\cos \alpha} \dots \dots \dots (1) \end{aligned}$$

Dirección x

$$\begin{aligned} \sum F_x &= ma_x \\ N_C \sin \alpha - mg \sin 15^\circ &= ma_x \dots \dots \dots (2) \end{aligned}$$

Remplazando la ec. (1) en (2), resulta

$$\begin{aligned} \frac{mg \cos 15^\circ}{\cos \alpha} \sin \alpha - mg \sin 15^\circ &= ma_x \\ g \cos 15^\circ \tan \alpha - g \sin 15^\circ &= a_x \\ \tan \alpha &= \frac{5 + 9,8 \sin 15^\circ}{9,8 \cos 15^\circ} \\ \tan \alpha &= 0,7956 \\ \theta &= 38,5^\circ \dots \dots \dots (3) \end{aligned}$$

De la gráfica se tiene

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{d_2 - d_1}{250} \\ d_2 &= d_1 + 250 \tan \alpha \\ &= d_1 + 250(0,7956) \\ d_2 &= d_1 + 198,9 \dots \dots \dots (4) \end{aligned}$$

Según el principio de conservación de masa

$$\begin{aligned} \rho(250)(100)(100) &= \rho(250)(100)\left(\frac{d_1 + d_2}{2}\right) \\ d_1 + d_2 &= 200 \dots \dots \dots (5) \end{aligned}$$

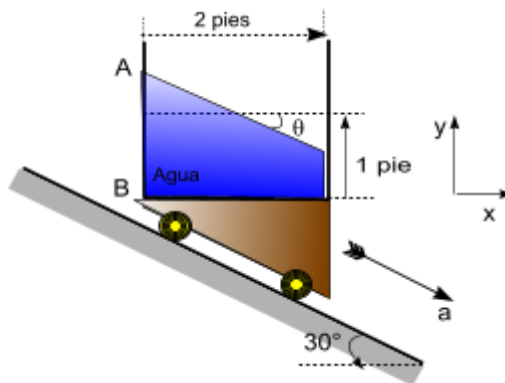
Resolviendo simultáneamente las ec. (4) y (5), se tiene

$$d_2 = 199,5 \text{ mm}$$

Analizando la ecuación anterior y la gráfica se infiere que no se derrama agua.

**Problema 51.**

Al tanque rectangular se le da una aceleración constante  $a$  de  $0,4g$ . ¿Cuál es la fuerza ejercida por los fluidos sobre la pared izquierda AB cuando se alcanza una configuración estable del agua con respecto al tanque?: El ancho del tanque es de 1,5 pies.

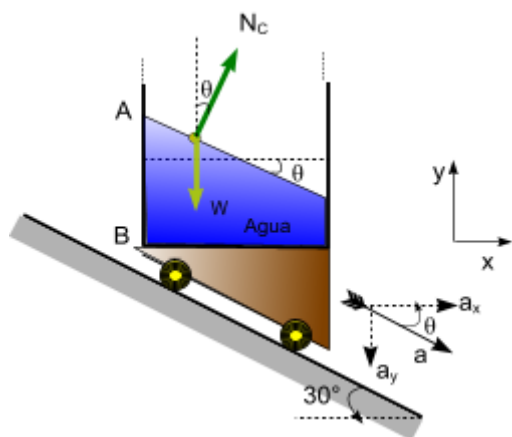


**Solución**

Datos e incógnitas

$$a = 0,4g; b = 1,5p; \gamma_w = 62,4 \text{ lb} / p^3; \therefore F_{AB} = ??.$$

En la figura se muestra el DCL de una partícula sobre la superficie libre del fluido, las fuerzas que actúan son: su peso (W) y las fuerzas que las demás partículas ejercen sobre la partícula en estudio (N<sub>C</sub>).



Aplicando las ecuaciones de movimiento según las direcciones mostradas resulta

Dirección x

$$\sum F_x = ma_x$$

$$N_C \sin \theta = m(a \cos 30^\circ) \dots \dots \dots (1)$$

Dirección y

$$\sum F_y = ma_y$$

$$N_C \cos \theta - mg = m(-a \sin 30^\circ)$$

$$N_C \cos \theta = m(g - a \sin 30^\circ) \dots \dots \dots (2)$$

Dividiendo las ec (1) y (2), resulta

$$\tan \theta = \frac{a \cos 30^\circ}{g - a \sin 30^\circ}$$

$$= \frac{0,4g(\frac{\sqrt{3}}{2})}{g - 0,4g(\frac{1}{2})}$$

$$\tan \theta = 0,433$$

$$\theta = 23,41^\circ \dots \dots \dots (3)$$

Se procede ahora a determinar la altura AB en la pared del depósito. De la geometría del problema se observa que

$$AB = 1 + 1 \tan \theta = 1 + 0,433$$

$$AB = 1,43 \text{ pie} \dots \dots \dots (\$)$$

Finalmente utilizando la hidrostática se determina la fuerza sobre la pared AB.

$$F_{AB} = p_{CG} A$$

$$= \gamma_w h_{CG} \left( 1 - \frac{a_y}{g} \right) A$$

$$= 62,4 \left( \frac{1,43}{2} \right) \left[ 1 - \frac{0,4g(\frac{1}{2})}{g} \right] A$$

$$= 62,4(0,715)(0,8) [1,43(1,5)]$$

$$F_{AB} = 76,56 \text{ lbf} \dots \dots \dots \text{Rta.}$$

**Problema 52**

Un depósito cilíndrico abierto de 1,2 m de diámetro y 1,8 m de profundidad se llena con agua y se le hace girar a 60 RPM. ¿Qué volumen de líquido se derrama y cuál es la profundidad en el eje?.

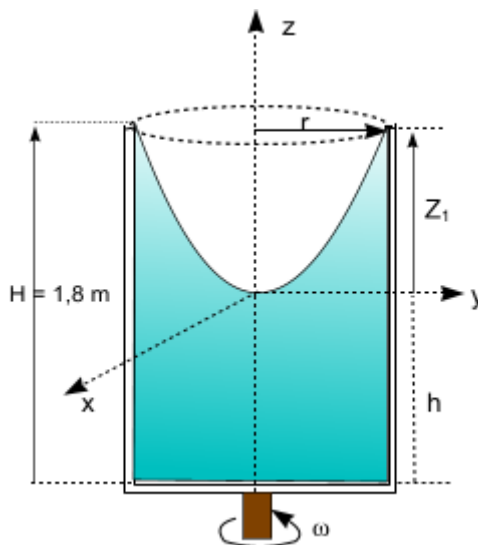
**Solución**

Datos e incógnitas

$$d = 1,2m; \therefore H = 1,8m; \therefore \omega = 60 \text{ RPM} = 2\pi \text{ rad} / s;$$

$$V_{derr.} = ??:$$

En la figura se muestra el cilindro girando alrededor de su eje geométrico.



La altura que ha descendido el fluido en el eje se determina mediante la ecuación

$$z_1 = \frac{\omega^2 r^2}{2g} = \frac{(2\pi)^2 (0,6^2)}{2(9,8)}$$

$$z_1 = 0,725m \dots \dots \dots (1)$$

El volumen de fluido derramado será igual al volumen del paraboloides de revolución, es decir.

$$V_{par.} = \frac{1}{2} V_{cilcirc.} = \frac{1}{2} [(\pi r^2) Z_1]$$

$$= \frac{1}{2} [(\pi(0,6^2)(0,725))]$$

$$V_{par.} = V_{derr.} = 0,41 m^3 \dots\dots\dots Rta.$$

La profundidad en el eje será

$$h = H - Z_1 = 1,8 - 0,725$$

$$h = 1,08 m \dots\dots\dots Rta.$$

**Problema 53.**

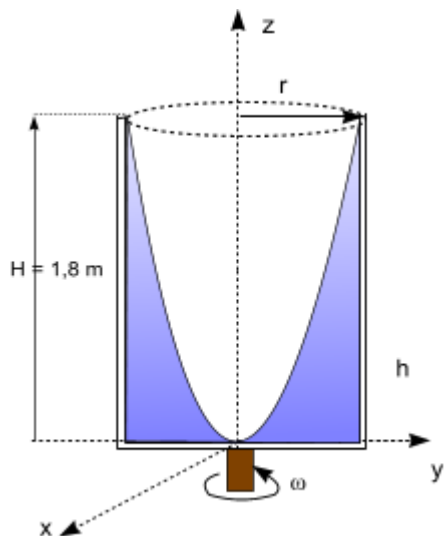
¿A qué profundidad debe girar el cilindro del problema anterior para que en el centro del fondo del depósito la profundidad del agua sea nula?.

**Solución**

Datos e incógnitas

$$\omega = ??; r = 0,6 m; H = 1,8 m.$$

En la figura se muestra la ubicación del fluido según la condición del problema



De la ecuación del paraboloides de revolución se tiene

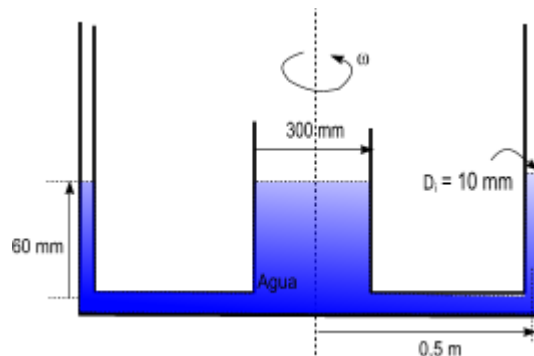
$$Z_1 = \frac{\omega^2 r^2}{2g} = \frac{\omega^2 (0,6^2)}{2(9,8)}$$

$$H = 1,8 = \frac{\omega^2 (0,6^2)}{2(9,8)}$$

$$\omega = 9,9 \text{ rad / s.} \dots\dots\dots Rta.$$

**Problema 54.**

Si el sistema mostrado gira con una velocidad angular de  $\omega = 30 \text{ RPM}$ . ¿Cuál será la altura  $h$  del agua en los tubos capilares después de alcanzar el estado permanente?.

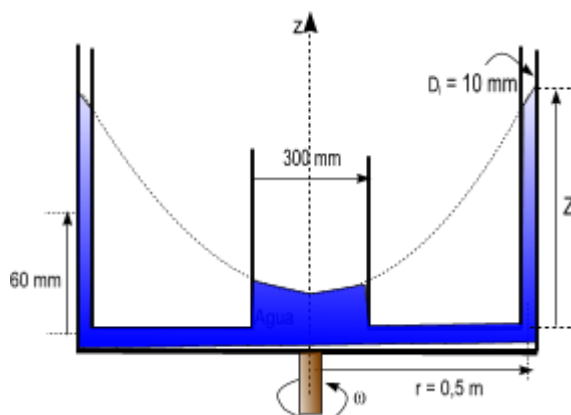


**Solución**

Datos e incógnitas

$$\omega = 30 \text{ RPM}; Z_1 = ??$$

En la figura se muestra la configuración de estado permanente cuando el depósito gira alrededor de su eje geométrico.



Para determinar la altura del fluido en los tubos capilares se usa la ecuación del paraboloides de revolución, esto es

$$Z_1 = \frac{\omega^2 r^2}{2g} = \frac{\pi^2 (0,5^2)}{2(9,8)}$$

$$Z_1 = 0,126 m = 126 mm \dots\dots\dots (1)$$

**Problema 55.**

En el problema anterior. ¿Cuál será la presión en un punto del eje de rotación situado en el fondo del depósito?.

**Solución**

Como el depósito está abierto el centro del mismo descendiende una altura

$$h = \frac{Z_1}{2} = \frac{126\text{mm}}{2}$$

$$h = 63\text{mm} \dots \dots \dots (1)$$

Del gráfico se observa que la altura del punto O medido desde el fondo es

$$H = 60\text{mm} + 10\text{mm} - 63\text{mm}$$

$$H = 7\text{mm} \dots \dots \dots (2)$$

La presión manométrica en el fondo del depósito será

$$p = \gamma_w h_{CG} = 9800(7 \cdot 10^{-3})$$

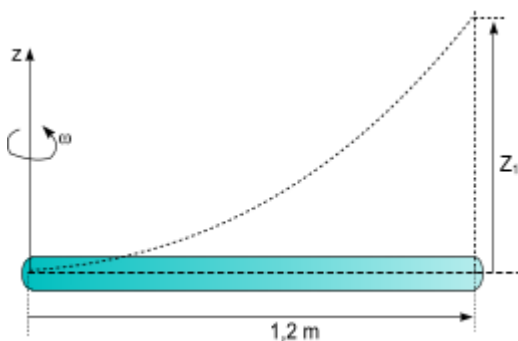
$$p = 68,6\text{N} / \text{m}^2 \dots \dots \dots \text{Rta.}$$

**Problema 56.**

Se llena con agua un tubo de 50 mm de diámetro y 1,2 m de largo, y se cierra. Se hace girar entonces a 150 RPM en un plano horizontal alrededor de un extremo como eje. Calcular la presión sobre el extremo exterior del tubo.

**Solución**

En la figura se muestra el diagrama del tubo y la parábola que aparecería debido a la rotación del mismo.



Para determinar la altura hipotética  $Z_2$  se aplica la ecuación

$$Z_1 = \frac{\omega^2 r^2}{2g} = \frac{(5\pi)^2 (1,2^2)}{2(9,8)}$$

$$Z_1 = 18,13\text{m} \dots \dots \dots (1)$$

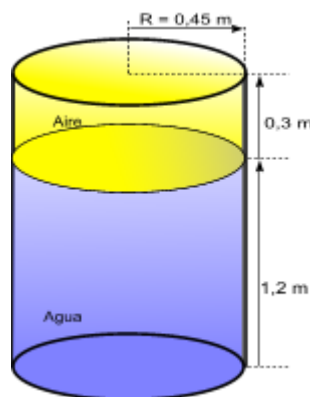
La presión en el extremo exterior del tubo será

$$p_Z = \gamma_w Z_2 = 9800(18,13)$$

$$p_2 = 177674\text{N} / \text{m}^2 \dots \dots \dots \text{Rta.}$$

**Problema 57.**

Un tanque vertical cilíndrico de 1,5 m de altura y de 0,9 m de diámetro se llena con agua hasta una profundidad de 1,2 m. Se cierra entonces el tanque y se eleva la presión en el espacio sobre el agua hasta 69 kPa. Calcular la presión en la intersección de la pared y el fondo del tanque cuando este se hace girar alrededor de su eje central vertical a 150 RPM.



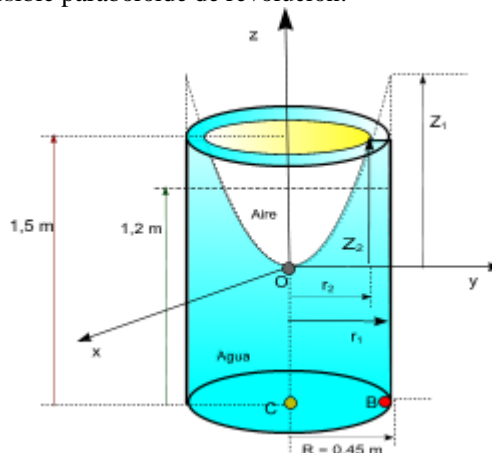
**Solución**

Datos e incógnitas

$$h = 1,5\text{m}; \dots r = 0,45\text{m}; \dots h_w = 1,2\text{m}; \dots p_{aire} = 69\text{kPa}$$

$$\omega = 150\text{RPM} = 5\pi\text{rad} / \text{s}; \dots p_B = ??.$$

En la figura se muestra el cilindro en rotación y el posible paraboloides de revolución.



Como no existe variación en el volumen de aire en el interior del tanque, se tiene



$$V_{sobreAA} = V_{paraboloide}$$

$$\pi r_0^2 (h - h_w) = \frac{1}{2} \pi r_2^2 Z_2$$

$$0,45^2 (1,5 - 1,2) = \frac{1}{2} \pi r_2^2 Z_2 \dots \dots \dots (1)$$

Por otro lado de la ecuación del paraboloide de revolución se tiene.

$$Z_1 = \frac{\omega^2 r_2^2}{2g} = \frac{(5\pi)^2 (r_2^2)}{2(9,8)}$$

$$Z_1 = 12,59 r_2^2 \dots \dots \dots (2)$$

Resolviendo simultáneamente las ecuaciones (1) y (2), resulta

$$r_2 = 0,3134m \dots \dots \dots (3)$$

$$Z_2 = 1,24m \dots \dots \dots (4)$$

Por otro lado se puede calcular la altura  $Z_1$  medida a partir de S en la pared lateral del cilindro, esto es

$$Z_1 = \frac{\omega^2 r_1^2}{2g} = \frac{(5\pi)^2 (0,45^2)}{2(9,8)}$$

$$Z_1 = 2,55m \dots \dots \dots (5)$$

Finalmente la presión en el punto B esta dado por

$$p_B = p_{aire} + \gamma_w (0,26 + 2,55)$$

$$= 69000 + 9800(2,81)$$

$$p_B = 96538 N / m^2 \dots \dots \dots Rta.$$

**Problema 58**

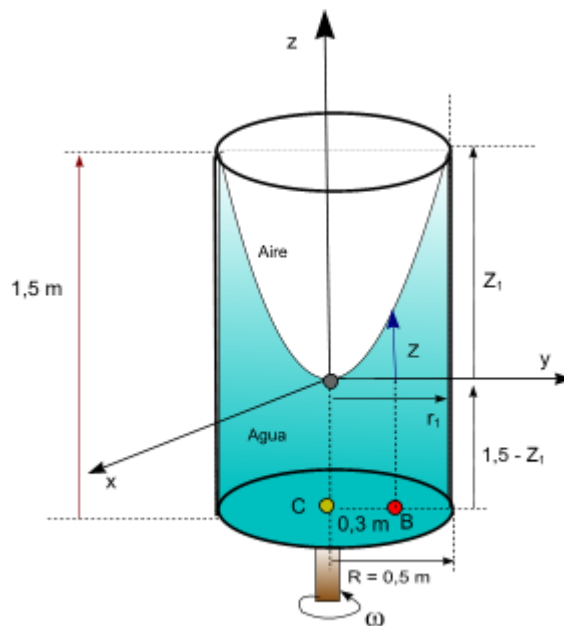
Se llena con agua un tanque cilíndrico abierto de 1 m de diámetro y de 1,5 m de altura, y se le hace girar alrededor de su eje geométrico a 100 RPM. ¿Cuánto líquido se derrama?: ¿Cuáles son las presiones en el centro del fondo del tanque y en un punto en el fondo a 0,3 m del centro?. ¿Cuál es la fuerza resultante ejercida por el agua sobre el fondo del tanque?.

**Solución**

Datos e incógnitas.

$$d = 1m; .h = 1,5m; .V_{derr.} = ??; .p = ??; .F = ??.$$

En la figura se muestra la ubicación del fluido dentro del depósito cuando este está girando alrededor de su eje.



El volumen de fluido derramado será igual al volumen del paraboloide de revolución, es decir

$$V_{par.} = \frac{1}{2} V_{cil.circuns}$$

$$= \frac{1}{2} (\pi R^2) (Z)$$

$$V_{par.} = \frac{1}{2} (\pi 0,5^2) Z \dots \dots \dots (1)$$

La altura Z se determina a partir de la ecuación del paraboloide de revolución  $\omega$

$$Z_1 = \frac{\omega^2 R^2}{2g} = \frac{\left(\frac{10\pi}{3}\right)^2 (0,5^2)}{2(9,8)}$$

$$Z_1 = 1,3987m \dots \dots \dots (2)$$

Reemplazando la ec. (2) en (1)

$$V_{derr.} = \frac{1}{2} \pi (0,5^2) (1,3987)$$

$$V_{derr.} = 0,55m^3 \dots \dots \dots Rta.$$

La presión manométrica en el punto C será

$$p_C = \gamma_w (1,5 - Z)$$

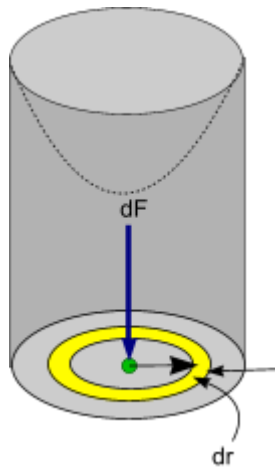
$$= 9800(1,5 - 1,3987)$$

$$p_C = 992,74 N / m \dots \dots \dots Rta.$$

La presión manométrica en el punto D 0,3 m sobre el fondo será

$$\begin{aligned}
 p_B &= \gamma_w (1,5 - Z_1 + z) \\
 &= \gamma_w \left( 1,5 - 1,3987 + \frac{\omega^2 r_B^2}{2g} \right) \\
 &= 9800 \left( 0,1013 + \frac{10,47^2 \times 0,3^2}{19,6} \right) \\
 p_B &= 5928 \text{ N/m}^2
 \end{aligned}$$

Para determinar la fuerza sobre el fondo del depósito debido al fluido, se divide al área en elementos diferenciales de radio  $r$  y espesor  $dr$  tal como se muestra en la figura y se determina la fuerza sobre dicho elemento



La fuerza  $dF$  será

$$\begin{aligned}
 dF &= p dA \\
 &= \gamma_w Z (2\pi \cdot r \cdot dr) \\
 dF &= \rho_w g (\omega^2 r^2 / 2g) (2\pi \cdot r \cdot dr) \dots \dots \dots (3)
 \end{aligned}$$

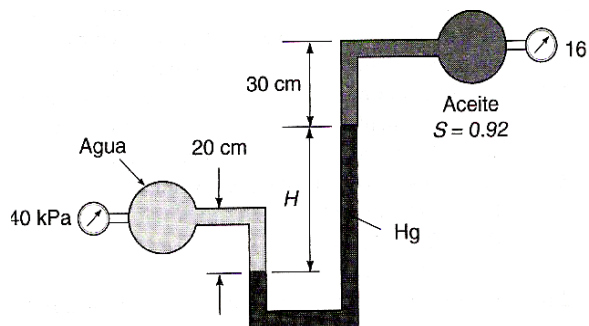
La fuerza resultante sobre la base se obtiene integrando la ecuación (3), esto es

$$\begin{aligned}
 F &= \pi \rho \omega^2 \int_0^R r^3 dr \\
 &= \pi (1000) \left( \frac{10\pi}{3} \right)^2 \left[ \frac{R^4}{4} \right] \\
 F &= 5383 \text{ N} \dots \dots \dots \text{Rta.}
 \end{aligned}$$

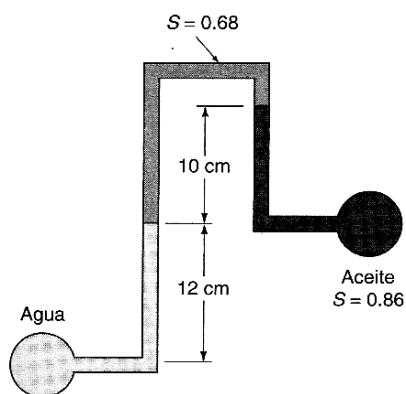
**PROBLEMAS PROPUESTOS**

**A) MANOMETRIA**

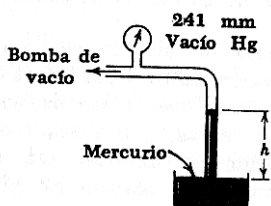
1. Para el tanque que se muestra en la figura, determine la lectura  $H$  del manómetro.



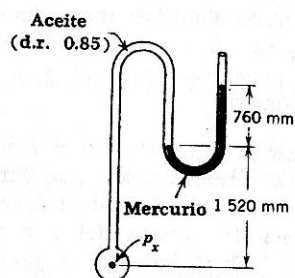
2. Determine la diferencia de presión entre la tubería de agua y la tubería aceite que se muestra en la figura.



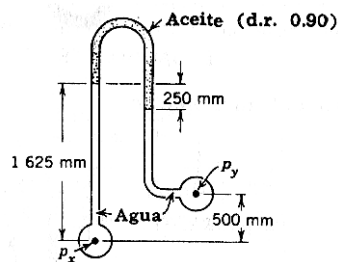
3. La presión barométrica es de 758 mm de mercurio. Determine el valor de  $h$ .



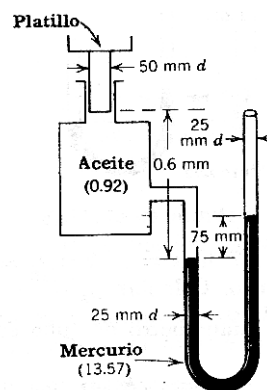
4. Si el manómetro indica lo mostrado, determine  $P_x$ .



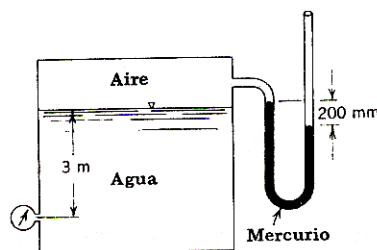
5. Calcular  $p_x - p_y$  para el manómetro de tubo en U invertido mostrado en la figura.



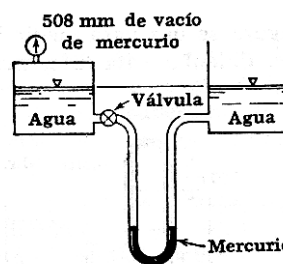
6. Predecir la lectura del manómetro después de que se haya colocado sobre el platillo un peso de 1 N. Suponer que no hay fuerza de fricción ni fuga entre el émbolo y el cilindro.



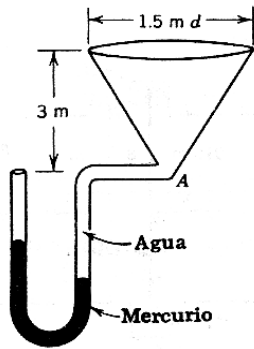
7. Calcular la lectura del manómetro



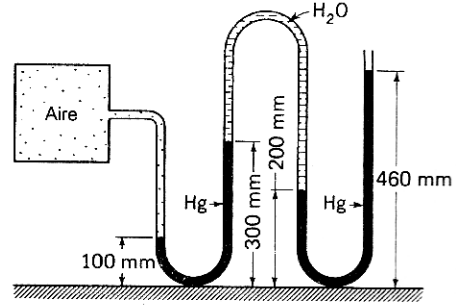
8. Calcular la magnitud y la dirección de la lectura del manómetro cuando la válvula está abierta, los tanques son muy grandes en comparación con los tubos del manómetro.



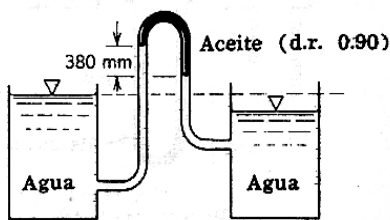
9. La indicación del manómetro es de 150 mm cuando el tanque está vacío (superficie del agua en A). Determine la lectura del manómetro cuando el tanque se llene con agua.



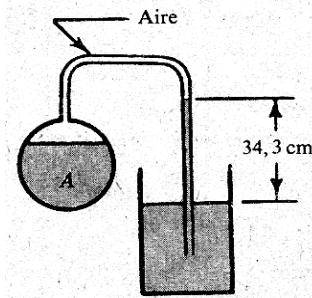
10. El manómetro de la figura se usa para medir la diferencia de los niveles de agua en los dos tanques. Calcule esta diferencia.



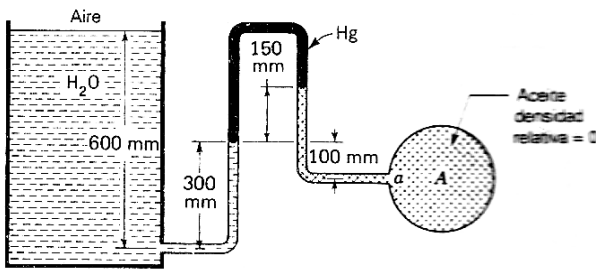
14. Con referencia a la figura, el punto A está 53 cm por debajo de la superficie libre del líquido, de densidad relativa 1,25, en el recipiente. ¿Cuál es la presión manométrica en A si el mercurio asciende 34,30 cm en el tubo?



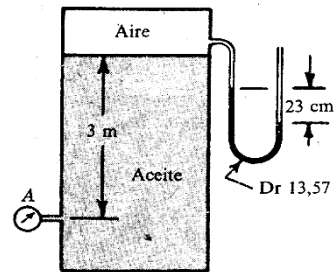
11. ¿Cuál es la presión manométrica dentro del tanque A en la posición a?



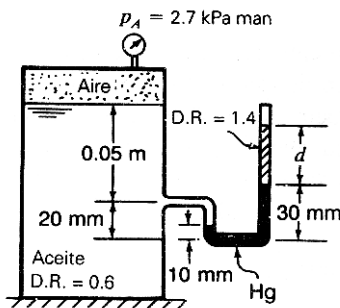
15. El depósito mostrado en la figura contiene aceite de densidad relativa 0,75. Determine la lectura del manómetro.



12. Encuentre la distancia  $d$  para el tubo en U.



16. Los compartimentos B y C de la figura están cerrados y llenos de aire. La lectura barométrica es  $1,020 \text{ kg/cm}^2$  cuando los manómetros A y D marcan las lecturas indicadas. ¿Qué valor tendrá  $x$  en el manómetro E de mercurio?



13. ¿Cuál es la presión manométrica dentro del tanque?

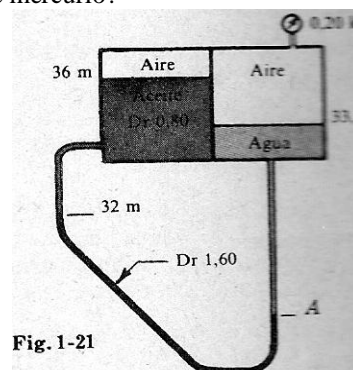
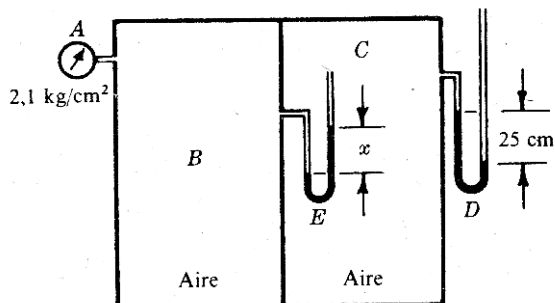
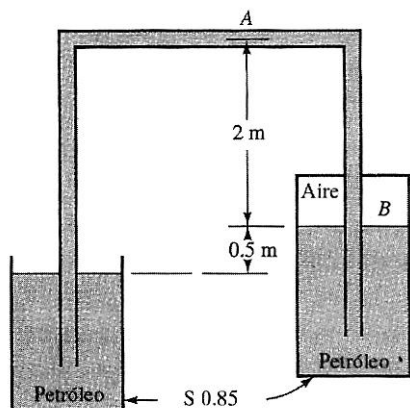


Fig. 1-21

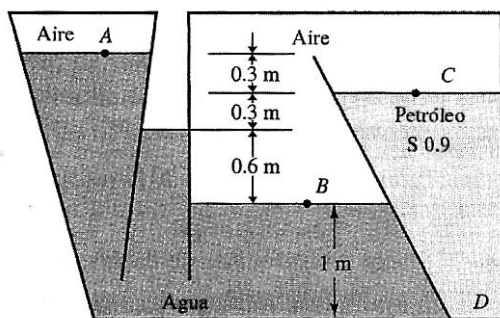
17. El aire del recipiente de la izquierda que contiene aceite ( $DR = 0,80$ ) está a una presión de  $-23$  cm de mercurio. Determine la cota del líquido manométrico en la parte derecha, en A.



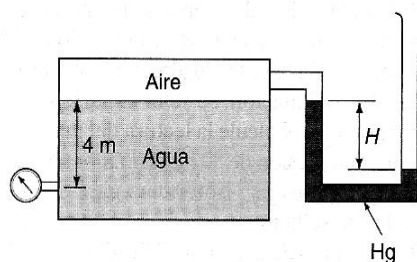
18. El tubo mostrado en la figura se llena con petróleo ( $DR = 0,85$ ). Determine la presión: (a) en A y (b) en B.



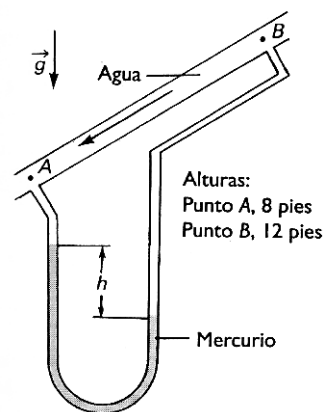
19. Para el dispositivo mostrado en la figura determine las presiones en los puntos A, B, C, y D de la figura en el sistema internacional de unidades.



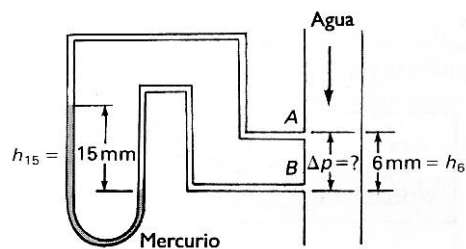
20. Para el tanque que se muestra en la figura, si  $H = 20$  cm. Determine la lectura del medidor de presión.



21. Determine la diferencia de presión entre los puntos A y B de la figura, si  $h = 20,3$  pulg y el agua y el mercurio están a  $50^{\circ}F$ .

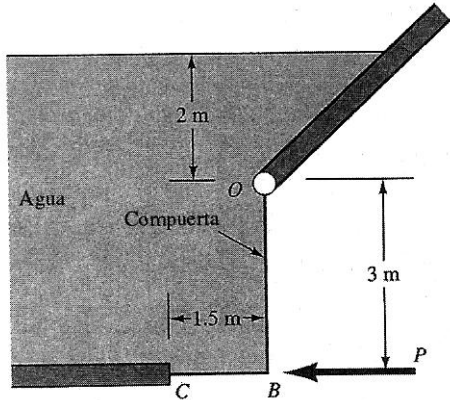


22. La diferencia en los niveles del manómetro de mercurio que se muestra en la figura, es de 15 mm. Determine la diferencia de presión entre los puntos A y B, a los cuales se le conecta el manómetro en la columna de agua. Los fluidos se encuentran a  $10^{\circ}C$ .

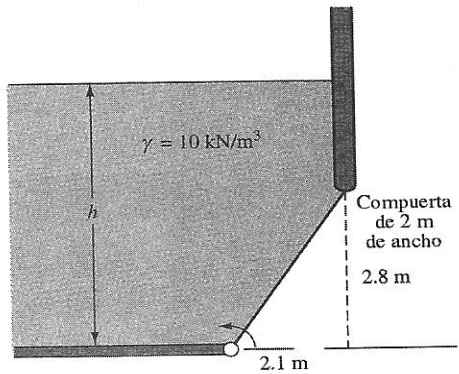


**B) SUPERFICIES PLANAS SUMERGIDAS.**

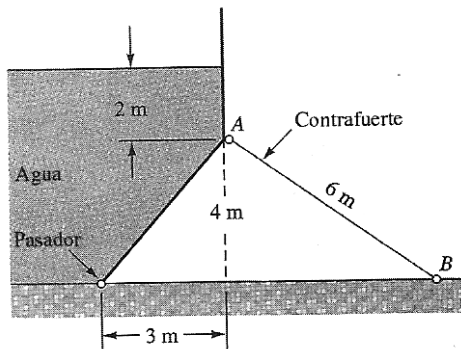
1. La compuerta rígida OBC, tiene 5 m de ancho normal al plano del dibujo. Despreciando el peso de la compuerta, y suponiendo que el peso de la bisagra es despreciable. Determine la magnitud de la fuerza P necesaria para mantener cerrada la compuerta.



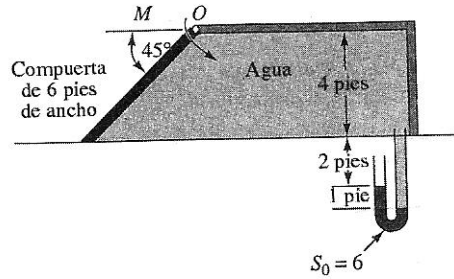
2. El eje de la compuerta de 2 m de ancho normal plano del papel fallará con un momento de 160 kN.m. Determine el máximo valor de la profundidad del líquido h. El peso específico del líquido es  $10 \text{ kN/m}^3$ .



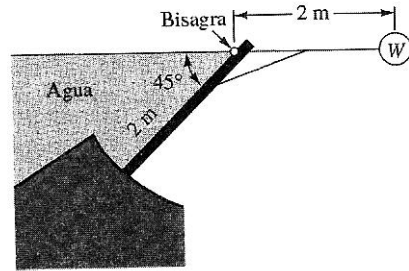
3. La presa mostrada en la figura tiene un contrafuerte AB cada 6 m. Determine la fuerza de compresión en el contrafuerte, despreciando el peso de la presa.



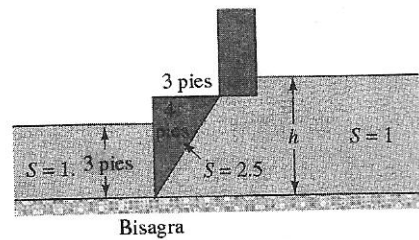
4. La compuerta de 6 pies de ancho se mantiene en la posición mostrada en la figura mediante el par M. ¿Cuál es el valor de dicho par en O para mantener cerrada la compuerta?.



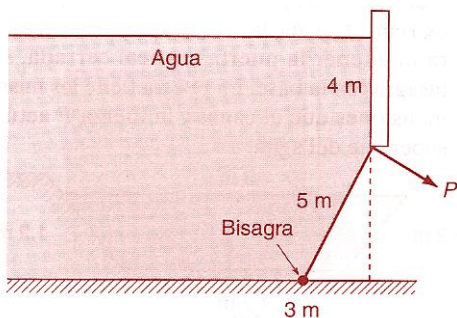
5. La compuerta de masa despreciable mostrada en la figura se encuentra en equilibrio gracias al contrapeso W. Determine el valor de W si el ancho de la compuerta es de 1m.



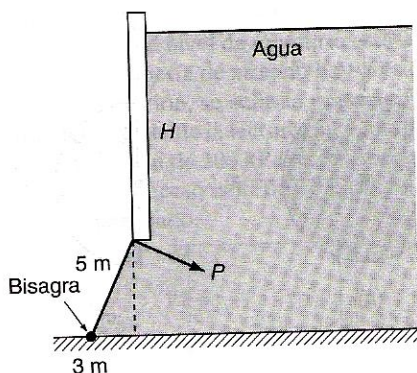
6. ¿Hasta qué altura h tendrá que subir el agua, en el lado derecho, para abrir la compuerta mostrada en la figura? La compuerta tiene una sección triangular de 3 pies por 4 pies y un ancho de 5 pies y está hecha de un material de  $DR = 2,50$ .



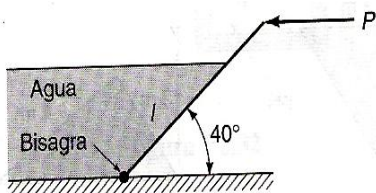
7. Un túnel horizontal de 3m de diámetro se cierra por medio de una compuerta vertical. Determine la magnitud, dirección y localización de la fuerza total del agua sobre la compuerta, cuando el túnel está: (a) lleno hasta la mitad; (b) lleno hasta una cuarta parte y (c) lleno tres cuartas partes.
8. Determine la fuerza P necesaria para mantener la puerta de 4 m de anchura en la posición que se muestra en la figura.



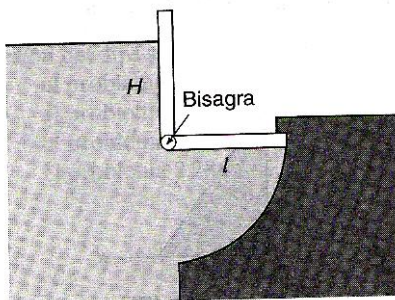
9. Calcule la fuerza  $P$  necesaria para mantener la compuerta de 4 m de anchura en la posición que se muestra en la figura. Si se tiene que: (a)  $H = 6$  m y (b)  $H = 10$  m



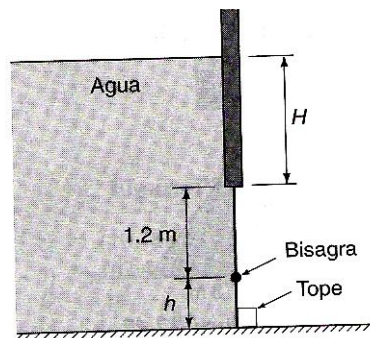
10. Calcule la fuerza  $P$  necesaria para mantener la compuerta rectangular de 3 m de anchura en la posición que se muestra en la figura si: (a)  $l = 2$  m, (b)  $l = 5$  m.



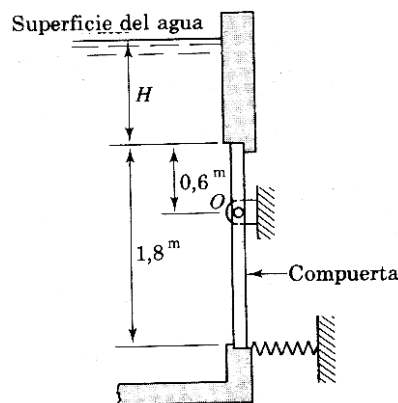
11. Para la compuerta que se muestra en la figura. Despreciando el peso de la compuerta. Calcule la altura  $H$  que hará que la compuerta se abra si: (a)  $l = 2$  m; (b)  $l = 1$  m.



12. A que altura  $H$  se abrirá la compuerta rígida, con una bisagra en su punto central, como se muestra en la figura, si  $h = 0,6$  m



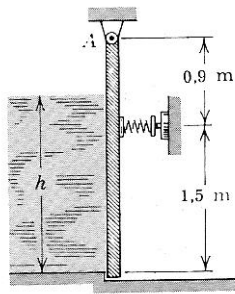
13. La compuerta rectangular mostrada en la figura tiene 1,2 m de ancho y un resorte se encarga de mantenerla cerrada. Cuando la compuerta está cerrada la fuerza de compresión sobre el resorte vale 15 kN. Determine el valor de  $H$  para el que la compuerta empieza a abrirse.



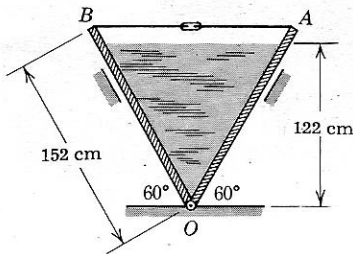
14. Resuelva el problema (7) si el tanque contiene agua y aceite sin mezclar. El agua ocupa el volumen comprendido, entre el fondo del tanque y el punto medio de la compuerta, y el aceite ( $DR = 0,8$ ) se extiende desde el agua hasta la superficie libre.

15. La compuerta vertical accionada por resortes engoznada por su borde superior A según un eje horizontal y cierra el extremo de un canal rectangular de agua dulce de 1,2 m de anchura (normal al plano del papel) Determine la fuerza  $F$  que debe ejercer el resorte para limitar la profundidad del agua a 1,8 m

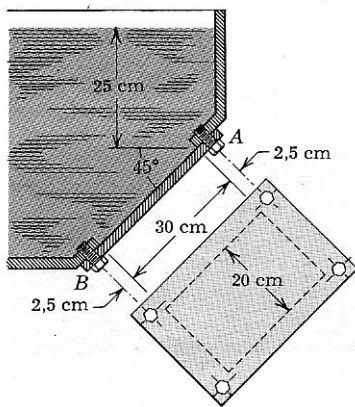




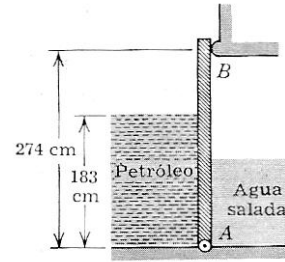
16. Las caras de un canchilón en forma de V para agua dulce, representado en sección, están articuladas por su intersección común que pasa por O y unidas por un cable y un torniquete colocados cada 183 cm a lo largo del canchilón. Determine la tensión T que soporta cada torniquete.



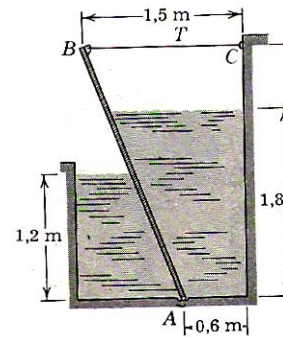
17. La tapa de la abertura de 20 por 30 cm del depósito está roblonada, siendo despreciables las tensiones iniciales en los roblones. Si el depósito se llena con mercurio ( $DR = 13,6$ ) hasta el nivel que se indica. Determine: (a) La fuerza ejercida por el mercurio sobre la tapa de la abertura y (b) la tensión inducida en cada uno de los roblones A y B.



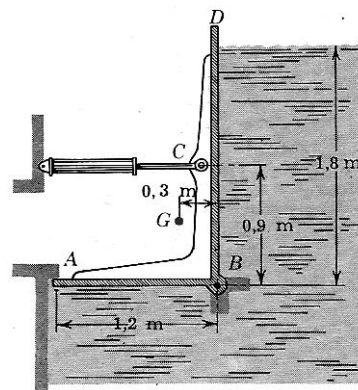
18. Una placa rectangular, mostrada de perfil en la figura, tiene una altura de 274 cm y una anchura de 244 cm (normal al papel) y separa depósitos de agua dulce y petróleo. El petróleo tiene una densidad relativa de 0,85. determine la altura h que ha de alcanzar el agua para que sea nula la reacción en B.



19. Una placa rectangular uniforme AB, representada en sección, tiene una masa de 1600 kg y separa los dos cuerpos de agua dulce en un depósito que tiene una anchura de 3 m (normal al plano de la figura). Determine la tensión T del cable soportante.



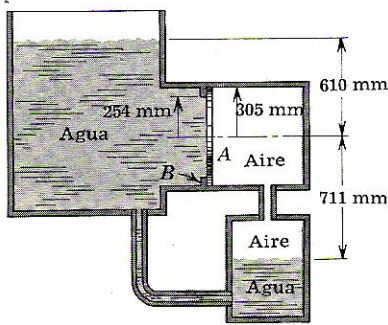
20. En la figura puede verse la sección de una compuerta ABD que cierra una abertura de 1,5 m de anchura en un canal de agua salada. Para el nivel del agua indicado. Determine la fuerza de compresión F del vástago del cilindro hidráulico que mantenga una fuerza de contacto de 3 kN por metro de anchura de compuerta a lo largo de la línea de contacto que pasa por A. La compuerta pesa 17 kN y su centro de gravedad está en G.



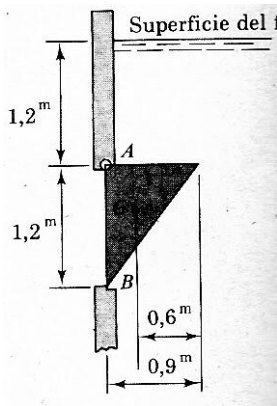
21. Un disco circular A oprime una empaquetadura situada alrededor de la pestaña B y separa herméticamente el espacio de aire del espacio de agua en el paso circular de la conexión. Determine para los niveles de superficie del agua que se indican, la presión media p que ejerce sobre la empaquetadura cuyos diámetros



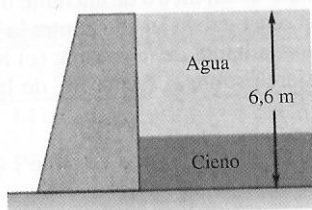
exterior e interior son 61 cm y 51 cm, respectivamente. La parte alta del depósito se encuentra abierto a la atmósfera.



22. En la figura se representa la sección transversal de una compuerta hidráulica. La masa de la compuerta es de 300 kg, y su centro de gravedad está ubicado en el punto G. La compuerta cierra una abertura de 0,9 m de ancho y de 1,2 m de altura, y la densidad relativa del líquido de 0,88. Determine las reacciones en los puntos A y B de la compuerta.

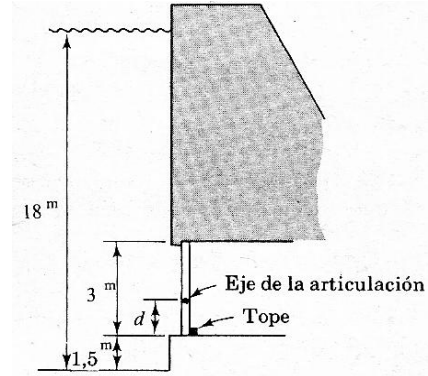


23. Una presa lacustre está diseñada para soportar la fuerza adicional debida al cieno sedimentado en le fondo. Suponiendo que el cieno sea equivalente a un líquido de DR = 1,16 y considerando un tramo de la presa de un metro de anchura. Determine el incremento porcentual en la fuerza actuante sobre el frente de la presa para una acumulación de cieno de 2 m de profundidad.

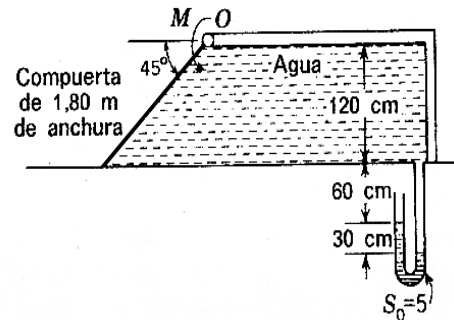


24. La compuerta de prevención de inundaciones de una represa se instala de tal forma que abre

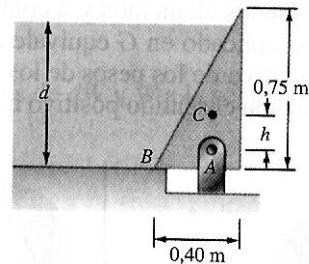
automáticamente cuando el nivel del agua llega a 18 m a partir del fondo como se ve en la figura. El fondo del canal de desagüe se encuentra a 1,5 m sobre el fondo de la represa. Calcule la distancia  $d$  que localiza el eje de rotación de la articulación de la compuerta de seguridad.



25. Determinar el momento  $M$  que hay que aplicar a O para mantener la compuerta de 1,8 m de anchura normal al papel. Considere que el líquido en el manómetro tiene una densidad relativa ( $S=5$ ).

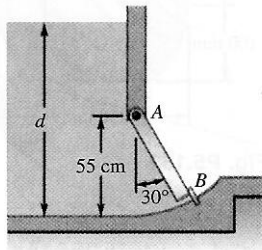


26. Una compuerta de forma prismática instalada al final de un canal de agua dulce está sujeta a una articulación A y descansa sobre un soporte liso B. El pasador de la articulación está situado a una distancia  $h = 0,10$  m por debajo del centro de gravedad de C de la compuerta. Determine para que altura del agua se abrirá la compuerta.

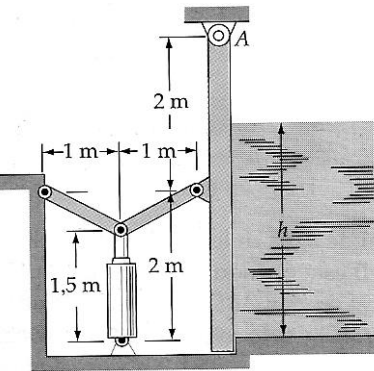


27. La compuerta cuadrada AB se mantiene en la posición indicada mediante bisagras a lo largo de su borde superior A y un pasador de

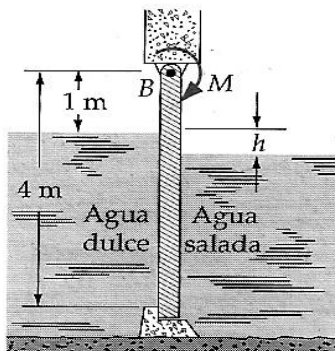
seguridad en B. Para una altura de agua  $d = 1,05$  m. Determine la fuerza que el pasador ejerce sobre la compuerta.



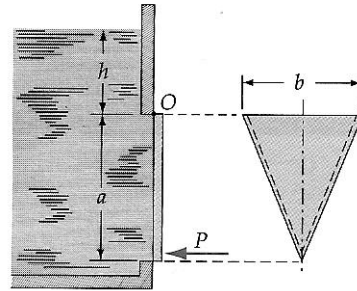
28. Un cilindro hidráulico acciona la palanca articulada que cierra la compuerta vertical venciendo la presión del agua dulce represada al otro lado. La compuerta es rectangular con una anchura de 2 m perpendicular al plano del papel. Para una altura de agua  $h = 3$  m, calcule la presión  $p$  del aceite actuante sobre el pistón de 150 mm del cilindro hidráulico.



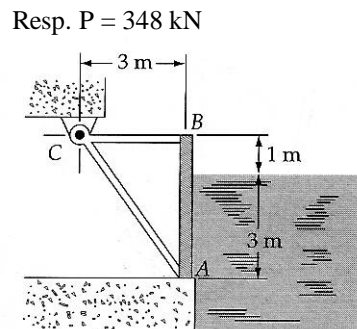
29. La compuerta rectangular de a figura tiene 3 m de ancho normal al plano del papel y está engoznada en su borde superior B. compuerta divide en dos un canal que conduce a un lago de agua dulce por la izquierda y a un dique de marea de agua de mar por la derecha. Determine el momento  $M$  que es necesario aplicar en el punto B de la compuerta para que esta se abra cuando el nivel del agua salada descienda a  $H = 1$  m. La densidad relativa del agua de mar es 1,25.



30. Una placa plana cierra una abertura triangular existente en la pared vertical del depósito que contiene un líquido de densidad  $\rho$ . La placa está articulada en el borde superior O del triángulo. Determine la fuerza  $P$  requerida para cerrar la compuerta venciendo la presión del líquido.

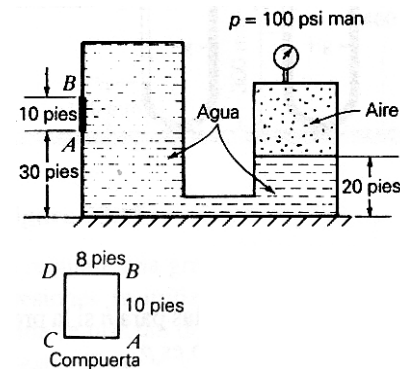


31. En la figura se representa la sección normal de una compuerta rectangular de dimensiones 4m x 6m que cierra el paso de un canal de agua dulce. La masa de la compuerta es de 8,5 Mg y está engoznada en un eje horizontal que pasa por C. Determine la fuerza vertical  $P$  ejercida por la cimentación sobre el borde inferior A de la compuerta.



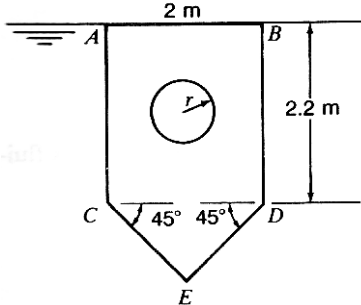
Resp.  $P = 348$  kN

32. Halle la fuerza total sobre la compuerta AB y el momento de esta fuerza respecto del fondo de la compuerta.

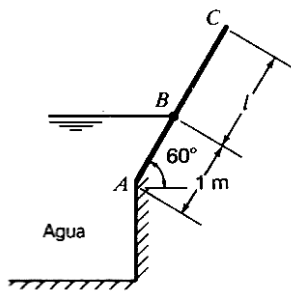


33. Una placa se sumerge verticalmente en agua. ¿Cuál es el radio  $r$  de un orificio que debe cortarse del centro de ABCD para que la fuerza

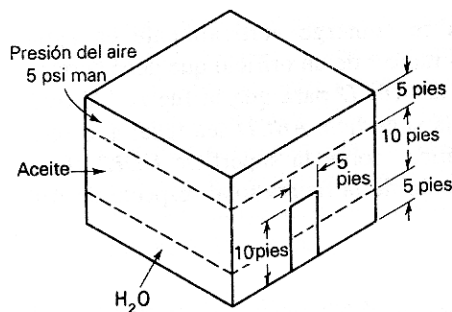
hidrostática sobre la superficie ABCD sea igual a la fuerza hidrostática sobre la superficie CDE?. ¿Cuál es el momento de la fuerza total respecto de AB?. Desprecie la presión atmosférica.



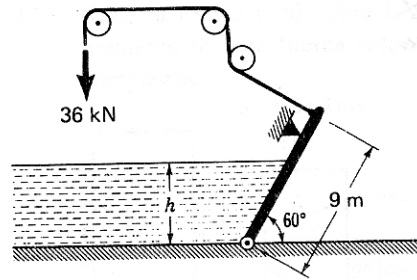
34. Una placa rectangular ABC puede rotar alrededor del pasador B. ¿Qué longitud  $l$  debe tener BC, para que el momento respecto de B causado por el agua y por el peso de la placa sea nula?. Suponga que el peso es de 1000 N/m por unidad de longitud. El ancho de la compuerta es de 1 m.



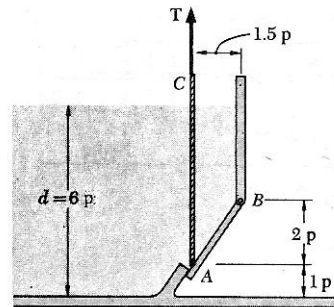
35. Encuentre la fuerza resultante causada por todos los fluidos que actúan sobre la compuerta. La densidad relativa del aceite es 0,80.



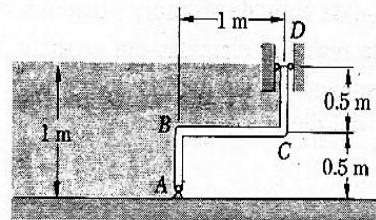
36. ¿Qué altura  $h$  del agua hará que gire la compuerta en sentido horario?. La compuerta tiene 3 m de ancho. Desprecie la fricción y el peso de la compuerta.



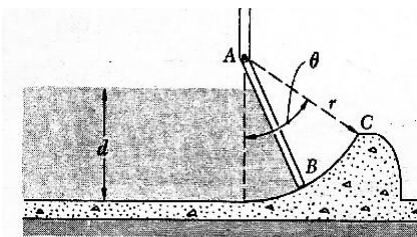
37. La compuerta AB de 1,75 pies de anchura se mantiene en la posición cerrada mediante un cable vertical y una bisagra localizada a lo largo del extremo superior B. Para una profundidad de agua  $d = 6$  pies. Determine la tensión mínima requerida en el cable AC para prevenir la apertura de la compuerta.



38. La placa ABCD tiene 2 m de anchura y está sujeta por goznes en A : Determine las reacciones en A y D para el nivel del agua mostrado en la figura.

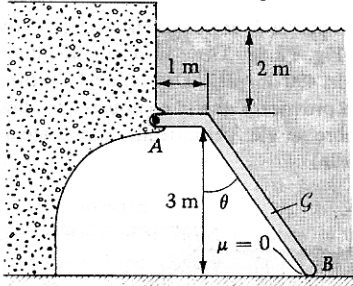


39. Una compuerta rectangular uniforme de peso  $W$ , altura  $r$  y longitud  $b$  es sostenida por goznes en A. Si el peso específico del fluido es  $\gamma$ , determine el ángulo  $\theta$  requerido si la compuerta debe permitir flujo cuando  $d = r$

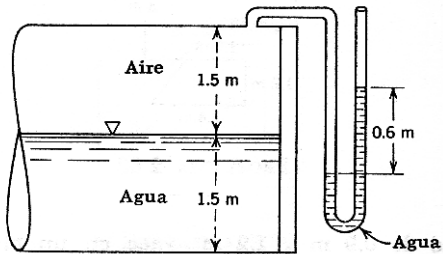


40. En la figura mostrada. (a) Determine la fuerza única resultante que actúa sobre la compuerta

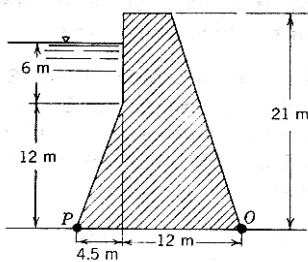
que provocada por la presión hidrostática para el caso en el que  $\theta = 53^\circ$ . El ancho de la compuerta es 5 m y la densidad del agua es  $1 \text{ g/cm}^3$ , (b) Calcule las reacciones en el perno A y el piso B.



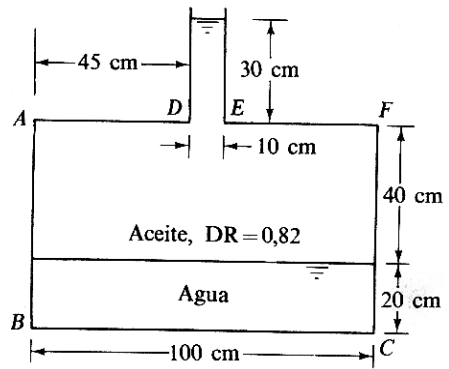
41. Calcular la magnitud, dirección y localización de la fuerza resultante ejercida por los fluidos sobre el extremo del tanque cilíndrico de la figura.



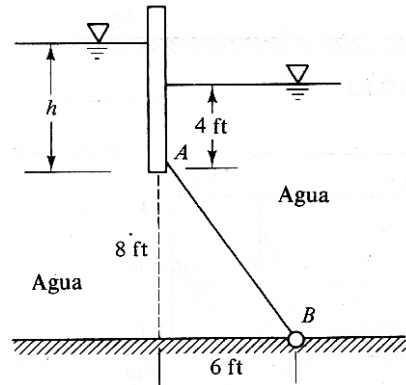
42. Usando el método de las componentes. Determine la magnitud, dirección y localización de la fuerza total sobre la cara de corriente arriba de una sección de este dique de 1 m de ancho. ¿Cuál es el momento de esta fuerza con respecto al punto O?



43. EL depósito de la figura mide 50 cm en dirección perpendicular al plano del papel. Determine: (a) la fuerza y el centro de presiones en la pared del fondo BC y (b) la fuerza y el centro de presiones en la pared lateral AB. Desprecie la presión atmosférica.

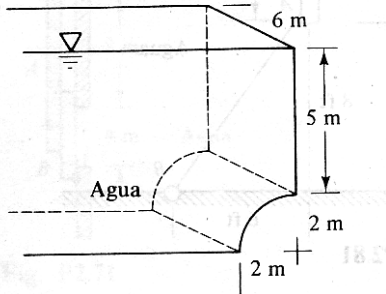


44. La compuerta AB mide 7 pies en dirección perpendicular al papel y pesa 3000 lb cuando está sumergida. Está abisagrada en B y apoyada en A sobre una pared lisa. Determine el nivel  $h$  de agua a la izquierda para que la compuerta comience a abrirse.

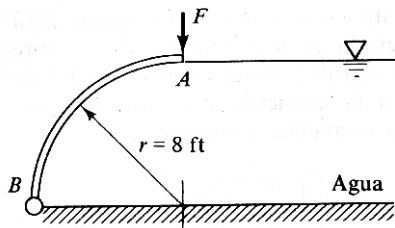


C) SUPERFICIES CURVAS.

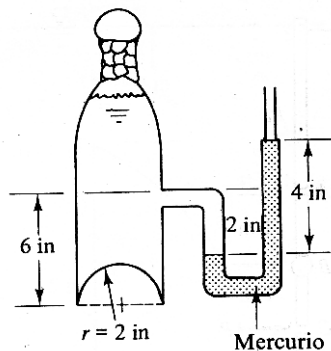
1. Calcular las componentes horizontal y vertical de la fuerza hidrostática que se ejerce sobre la pared semicilíndrica del fondo del depósito de agua mostrado en la figura.



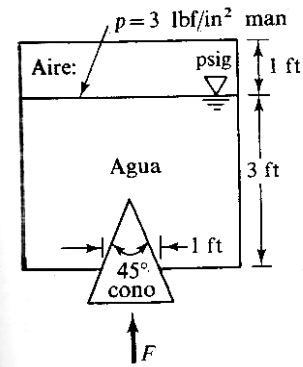
2. La compuerta AB tiene la forma de cuarto de circunferencia, mide 10 pies de anchura y está abisagrada en B. Determine la fuerza F necesaria para impedir su apertura. Desprecie el peso de la compuerta.



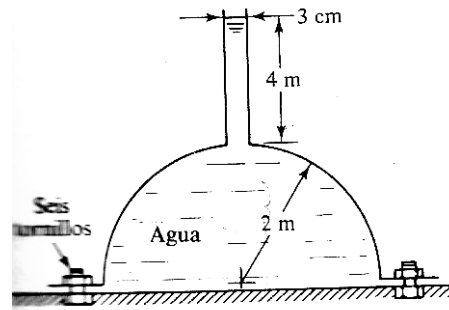
3. La botella de champaña (DR = 0,96) mostrado en la figura está bajo presión como muestra el manómetro de mercurio. Determine la fuerza total que se ejerce sobre el fondo semiesférico de la botella.



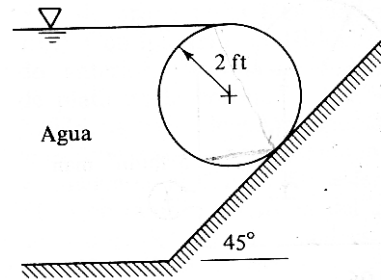
4. El agujero de 1 pie de diámetro que hay en el fondo del depósito de la figura está cerrado con un tapón cónico de 45°. Despreciando el peso del tapón. Determine la fuerza F necesaria para mantener cerrado el depósito.



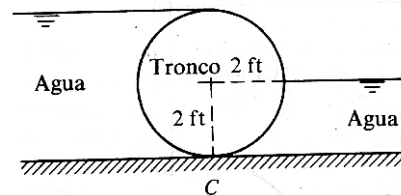
5. La cúpula semiesférica mostrada en la figura pesa 30 kN, está llena de agua y sujeta al suelo por medio de seis tornillos igualmente espaciados. Determine la fuerza que soporta cada tornillo.



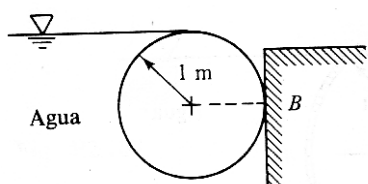
6. El cilindro de 2 pies de radio mostrado en la figura tiene una longitud de 8 pies. Determine las componentes horizontal y vertical de la fuerza que ejerce el agua sobre el cilindro.



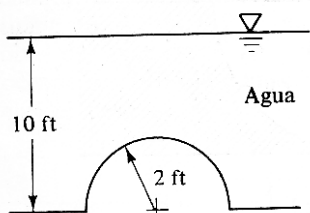
7. El tronco de madera (DR = 0,65), tiene 10 pies de largo, represa el agua en la forma en que indica la figura. Determine las reacciones vertical y horizontal en el punto C.



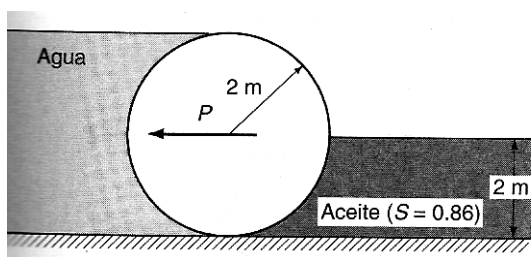
8. El cilindro de 1 m de radio mostrado en la figura tiene una longitud de 5 m y descansa en equilibrio estático contra una pared lisa en el punto B. Determine: (a) el peso del cilindro, (b) la densidad del cilindro. Desprecie el rozamiento en la pared.



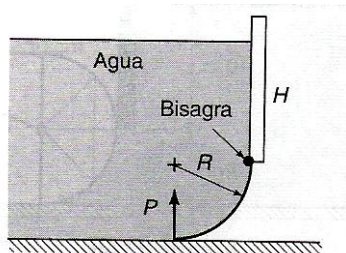
9. Calcule las componentes horizontal y vertical de la fuerza hidrostática sobre la pared semiesférica del fondo del depósito mostrado en la figura.



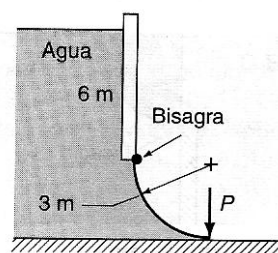
10. Calcular la fuerza P necesaria para mantener el cuerpo cilíndrico de 10 m de largo en la posición que se muestra en la figura.



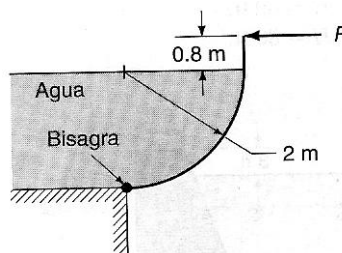
11. Calcular la fuerza P necesaria para abrir apenas la compuerta cuarto circular de 4 m de anchura normal al plano del papel, si  $H = 6$  m y  $R = 2$  m.



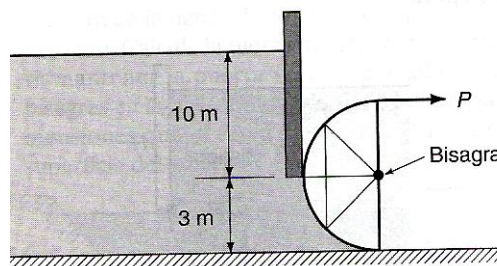
12. ¿Qué fuerza P se requiere para mantener cerrada la compuerta de 4 m de anchura normal al plano que se muestra en la figura?



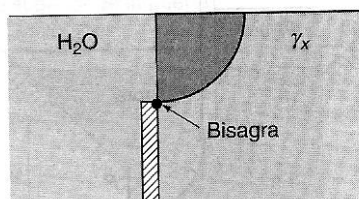
13. Calcular la fuerza P necesaria para sostener la compuerta en la posición que se muestra en la figura. La compuerta tiene 3 m de anchura.



14. La compuerta de 3 m de anchura que se muestra en la figura pesa 400 N y su centro de gravedad está a 0,9 m a la izquierda de la bisagra. Estime la fuerza P necesaria para abrir la compuerta.



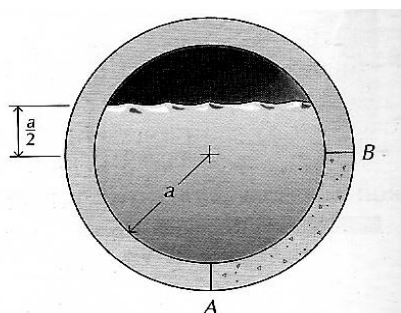
15. La compuerta cilíndrica de cuarto de círculo ( $DR = 2$ ) de la figura esta en equilibrio como se muestra. Calcule el valor del peso específico del fluido que se encuentra en el lado derecho  $\gamma_x$ .



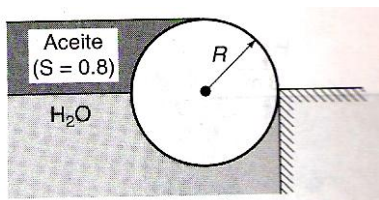
16. Una tubería de conducción de agua de 4 m de diámetro se llena hasta el nivel que se indica en la figura. Determine el módulo de la fuerza resultante **R** que ejerce e agua sobre una longitud de 2 m de la sección curva AB de la



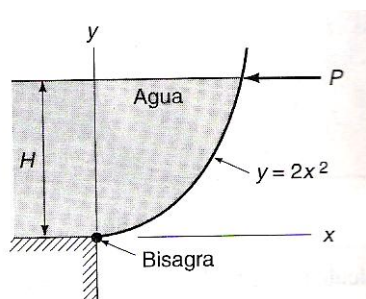
tubería y localizar la recta soporte de la resultante.



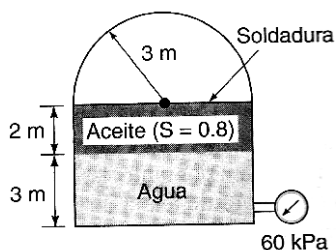
17. Un tronco está en equilibrio como se muestra en la figura. Calcule la fuerza que lo empuja contra la represa y el peso específico relativo del tronco si su longitud es de 6 m y  $R = 0,6$  m.



18. Calcular la fuerza  $P$  si la compuerta parabólica mostrada en la figura tiene 4 m de ancho y  $H = 4$  m

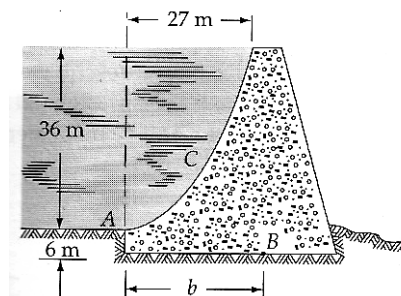


19. Calcular la fuerza sobre la soldadura que se muestra en la figura si: (a) El hemisferio está lleno de aire, (b) El hemisferio está lleno de aceite.



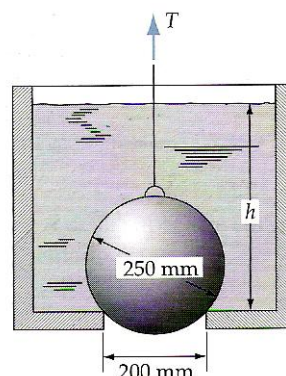
20. El costado correspondiente al agua de una presa de hormigón tiene forma parabólica de vértice en A. Determinar la posición  $b$  del

punto B de la base en que actúa la fuerza resultante del agua contra el frente C de la presa.

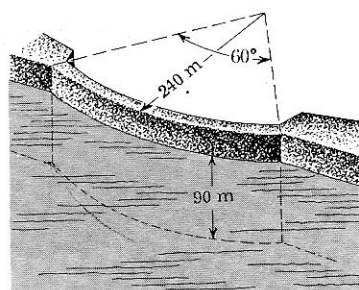


21. La esfera se emplea como válvula para cerrar el orificio del tanque de agua dulce. A medida que  $h$  disminuye, decrece la tracción  $T$  requerida para abrir la válvula puesto que la fuerza descendente de la esfera decrece al disminuir la presión. Determine la altura  $h$  para la cual son iguales  $T$  y el peso de la esfera.

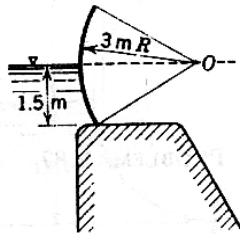
Resp.  $h = 0,233$  m



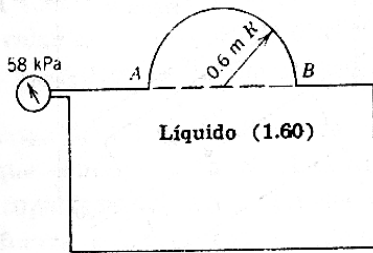
22. Una presa arqueada tiene la cara que recibe el agua de forma cilíndrica de 240 m de radio y subtiene un ángulo de  $60^\circ$ . Si el agua tiene una profundidad de 90 m. determine la fuerza total ejercida por el agua sobre la presa.



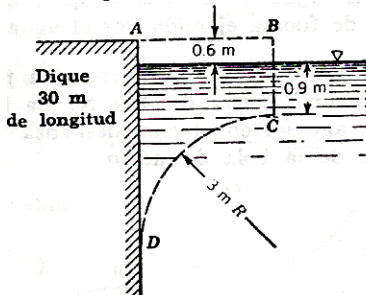
23. Esta compuerta segmental está pivotada en O y tiene 10 m de longitud. Determine la magnitud de las componentes de la fuerza horizontal y vertical sobre la compuerta. El pivote se encuentra al mismo nivel que el de la superficie del agua.



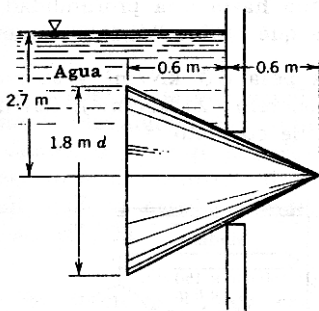
24. Calcular la fuerza vertical ejercida por el líquido sobre esta cúpula semicircular, que tiene una longitud de 1,5 m.



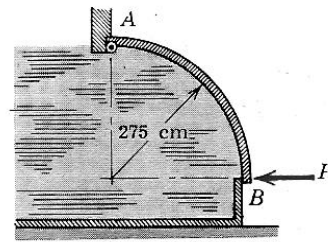
25. Si se añade el voladizo ABCD de concreto sólido ( $24 \text{ kN/m}^3$ ) al dique. ¿Qué fuerza adicional en magnitud y dirección se ejercerá sobre este dique?.



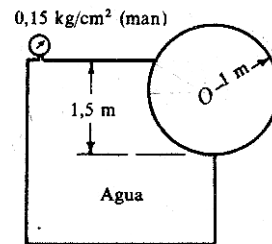
26. Calcular la magnitud y la dirección de la fuerza resultante del agua sobre el tapón cónico sólido mostrado en la figura.



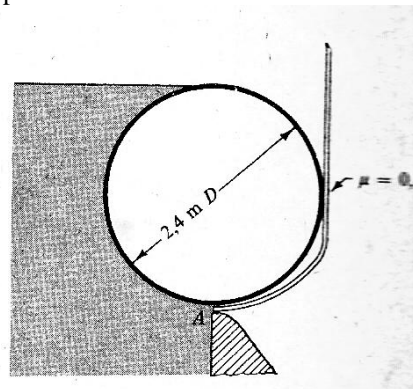
27. La compuerta cuartocircular AB mostrada en sección, tiene una anchura horizontal de 183 cm (normal al plano del papel) y regula la circulación de agua dulce sobre el borde B. La compuerta tiene un peso total de 30840 N y está articulada por su borde superior A. Determine la fuerza mínima P necesaria para mantener cerrada la compuerta. Desprecie el grosor frente a su radio de 275 cm.



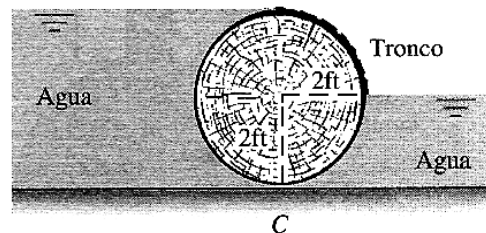
28. El depósito cuya sección recta se muestra en la figura, tiene 2 m de anchura y está lleno de agua a presión. Determine las componentes de la fuerza requerida para mantener el cilindro en su posición, despreciando el peso del mismo.



29. El cilindro mostrado en la figura tiene 3 m de longitud. Si se supone que en A el ajuste no deja pasar el agua y que el cilindro no puede girar. ¿Qué peso debe de tener el cilindro para impedir su movimiento hacia arriba?.



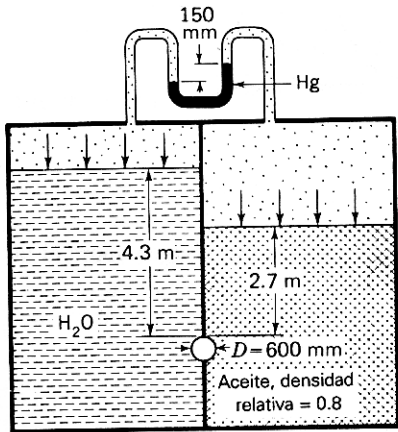
30. El tronco mostrado en la figura tiene una densidad relativa de 0,80; un radio de 2 pies y una anchura de 8 pies perpendicular al plano del papel y se encuentra reteniendo agua según se indica. Determine las reacciones vertical y horizontal netas en el punto C.



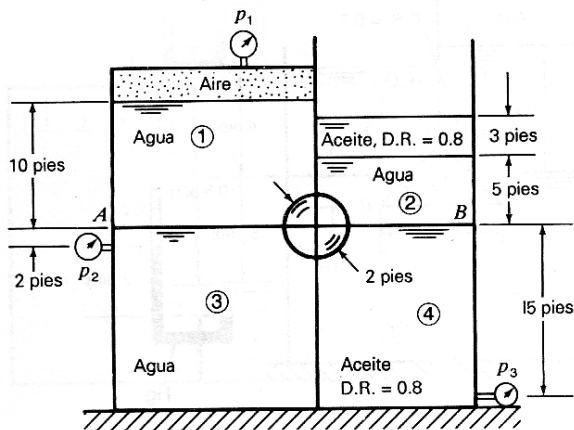
31. Un taque se encuentra dividido en dos cámaras independientes. La presión del aire actúa en ambas secciones. Un manómetro mide la diferencia entre éstas presiones. Una esfera de



madera (DR = 0,60) se coloca en la pared tal como se muestra. Determine: (a) La fuerza vertical sobre la esfera, (b) la magnitud (solamente) de la fuerza horizontal resultante causada por los fluidos.

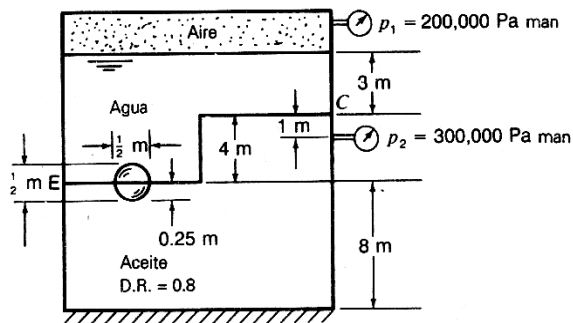


32. Existen cuatro compartimentos completamente separados unos de otros. Un cuarto de esfera reside en cada uno de éstos compartimientos tal como se muestra. Encuentre: (a) La fuerza vertical total causada por los fluidos, (b) La fuerza horizontal total causada por los fluidos.

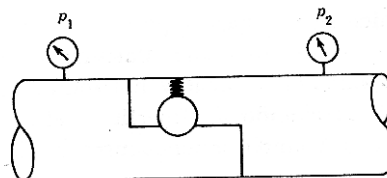


$$\begin{cases} \gamma = 62.4 \text{ lb / pie}^3 \\ p_1 = 5 \text{ psi man} \\ p_2 = 10 \text{ psi man} \\ p_3 = 13 \text{ psi man} \end{cases}$$

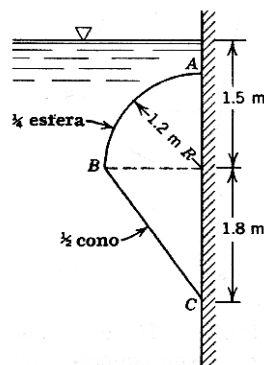
33. En la figura se muestra un tanque que se encuentra herméticamente dividido en dos partes que contienen agua y aire encima y aceite debajo. Una esfera cerrada D se encuentra soldada a la placa delgada reforzada que actúa como partición EC y se extiende por igual en el agua por encima y en el aceite por debajo, como se muestra en el diagrama. ¿Cuál es la fuerza vertical causada por los fluidos sobre la esfera?.



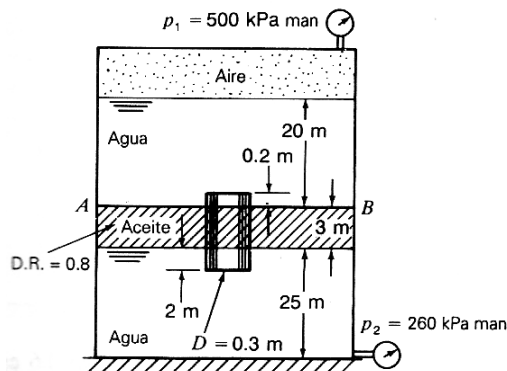
34. Qué diferencia de presión  $p_1 - p_2$  se requiere para abrir la válvula de bola si el resorte ejerce una fuerza de 400 N? La bola tiene 50 mm de diámetro, en tanto que el agujero en el cual descansa tiene 30 mm. Desprecie el peso de la bola de acero.



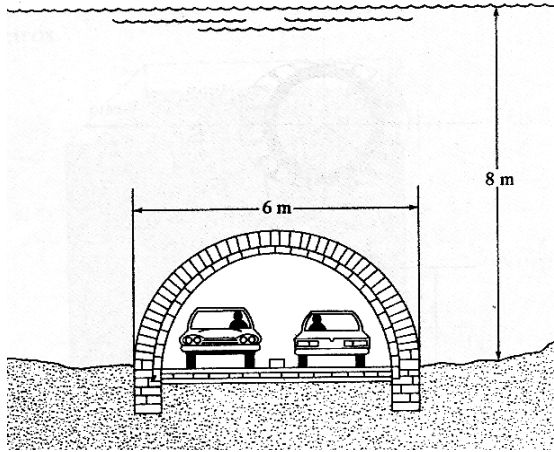
35. Calcular la magnitud y la localización de las componentes horizontal y vertical de la fuerza ejercida por el agua sobre la superficie curva ABC



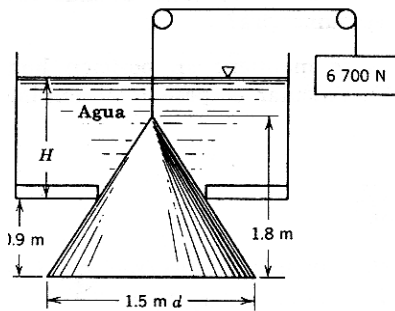
36. Un tanque se encuentra herméticamente dividido por la placa AB en dos compartimientos. Un cilindro de 0,3 m de diámetro sobresale por encima y por debajo del sello AB y se encuentra soldado a éste. ¿Cuál es la fuerza vertical sobre el cilindro?.



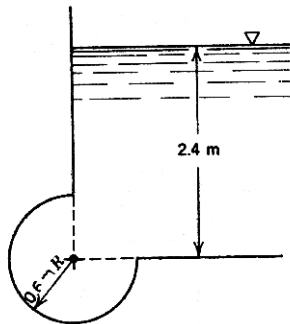
37. Un túnel semicircular pasa por debajo de un río que tiene 8 m de profundidad. Determine la fuerza hidrostática resultante que actúa por metro de longitud a lo largo de la longitud del túnel. El túnel tiene 6 m de ancho



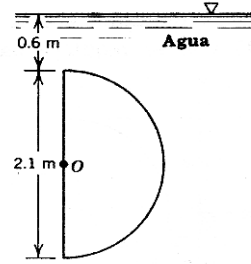
38. Calcular la magnitud y dirección de la fuerza resultante del agua sobre el tapón cónico sólido



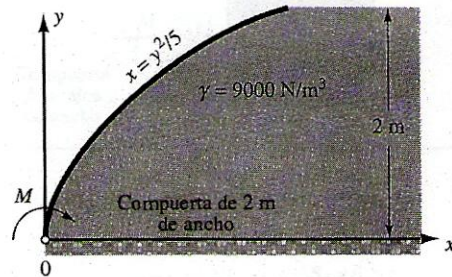
39. Calcular la magnitud, dirección y localización de la fuerza resultante ejercida por el agua sobre las tres cuartas partes del cilindro de 0,6 m de radio y de 3 m de longitud normal al plano del papel.



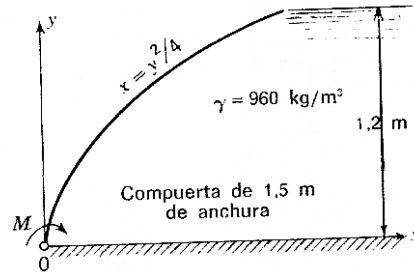
40. Calcular el momento con respecto al punto O de la fuerza resultante ejercida por el agua sobre el medio cilindro, que tiene 3 m de largo.



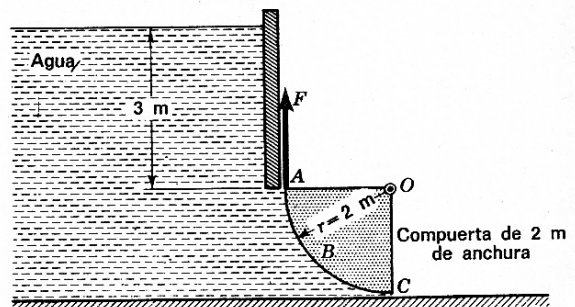
41. La compuerta de 2 m de ancho normal al plano del papel retiene un líquido cuyo peso específico es  $\gamma = 9000 \text{ N/m}^3$  tal como se muestra en la figura. Determine: (a) la fuerza horizontal así como su punto de aplicación; (b) la fuerza vertical ejercida por el fluido si como su punto de aplicación y (c) el momento M requerido para mantenerla compuerta en dicha posición. Desprecie el peso de la compuerta.



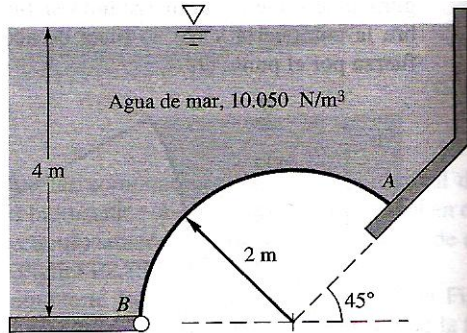
42. Determine el momento M para mantener la compuerta de peso despreciable cerrada si esta tiene 1,5 m de ancho.



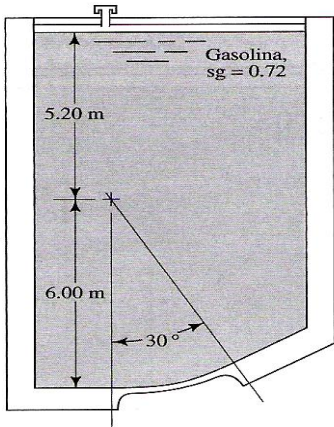
43. La compuerta cuarto circular de 2 m de radio y 500 N de peso se encuentra articulada en O. Determine: (a) la fuerza horizontal ejercida por el agua; (b) la fuerza vertical ejercida por el agua sobre la compuerta y (c) La fuerza F requerida para abrir la compuerta.



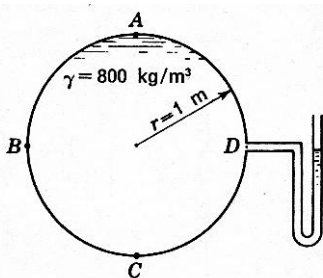
44. La compuerta AB mostrada en la figura es utilizada para retener agua de mar ( $\gamma = 10050 \text{ N/m}^3$ ) tiene la forma de tres octavos de círculo, una anchura de 3 m, está articulada en B y se apoya en A. Determine las fuerza de reacción en A y B.



45. En la figura se muestra un depósito abierto de gasolina cuya densidad relativa es 0,72 que tiene una anchura de 4 m normal al plano del dibujo. Determine: (a) la magnitud de las componentes horizontal y vertical de la fuerza que la gasolina ejerce sobre la superficie curva; (b) la magnitud y dirección de la fuerza resultante ejercida por el fluido sobre la superficie curva

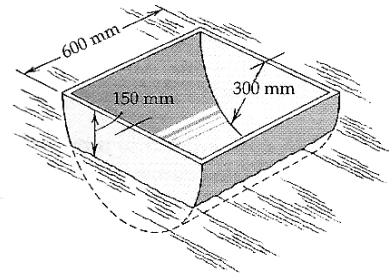


46. El cilindro está lleno de un líquido, tal como se muestra en la figura. Determine: (a) la componente horizontal de la fuerza sobre AB por metro de longitud así como su línea de acción, y (b) la componente vertical de la fuerza sobre AB por metro de longitud, y su línea de acción.

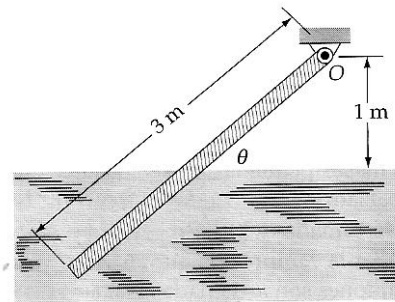


D) FLOTACIÓN

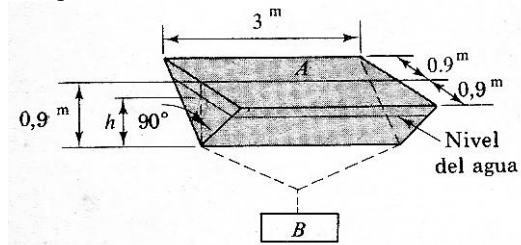
1. El cilindro de hormigón macizo de 2,4 m de longitud y 1,6 m de diámetro cuelga del cable que pasa por la polea fija A en posición semisumergida en agua dulce. Determine la tensión T del cable. El cilindro está impermeabilizado por un recubrimiento plástico.



2. El tablón de 3 m, cuya sección se representa en la figura, tiene una densidad relativa de 0,8 y está engoznada al torno por el eje horizontal a lo largo de su borde superior O. Determine el ángulo que forma con la horizontal para el nivel del agua indicado.

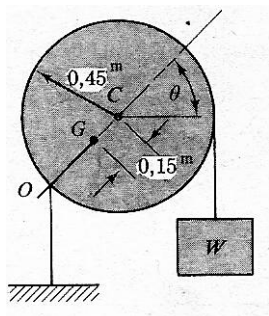


3. El cuerpo A de la figura es un prisma triangular homogéneo de densidad relativa 0,64. El cuerpo B de  $0,108 \text{ m}^3$  y densidad relativa 2,4 se suspende de A como se muestra en la figura. Determine la profundidad de inmersión h del cuerpo A después que se alcanza la posición de equilibrio.

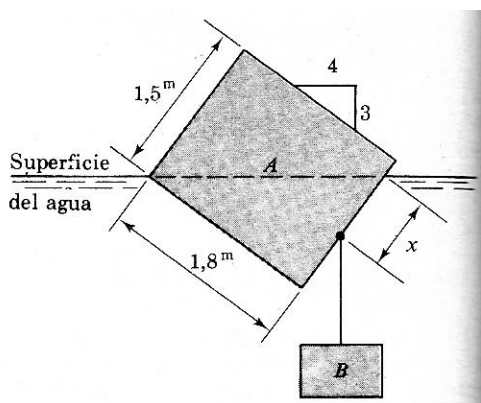


4. El cilindro flotante de la figura tiene una longitud de 1,2 m y su masa es de 530 kg. El centro de masa del cilindro está ubicado en el punto G y el cable fijo en O mantiene al cilindro sumergido completamente. El cuerpo W tiene una masa de 225 kg y su volumen es  $0,027 \text{ m}^3$ , y lo sostiene un cable enrollado en el cilindro.

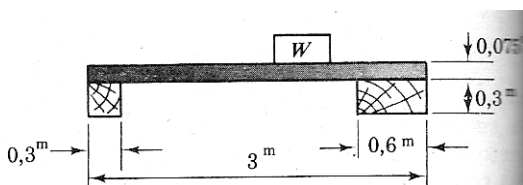
Determine el valor de ángulo  $\theta$  cuando el sistema se encuentra en equilibrio.



5. Las dimensiones del bloque homogéneo A de a figura son 1,5 m por 1,8 m por 3 m de longitud y tiene una densidad relativa de 0,4. El bloque B es de concreto con una densidad relativa de 2,4 y se fija al cuerpo A en una posición tal que el sistema está en equilibrio en la configuración mostrada. Determine: (a) El volumen del bloque B y (b) la distancia x.

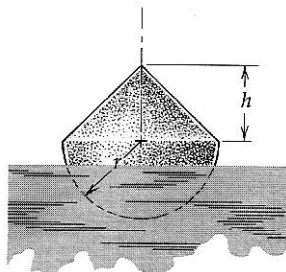


6. Una balsa cuadrada de 3 m está compuesta por tablones de 0,075 m fijos a un madero de 3 m de longitud y 0,3 m por 0,3 m en un extremo y a otro madero de 3 m de longitud y 0,3 m por 0,6 m en el otro extremo como se muestra en la figura. La densidad relativa de la madera es 0,4. La balsa flota en agua. Sobre la balsa debe colocarse un cuerpo W de 150 kg. Determine: (a) La ubicación de W para que la balsa flote nivelada; (b) La distancia entre la parte superior de la balsa y la superficie del agua.

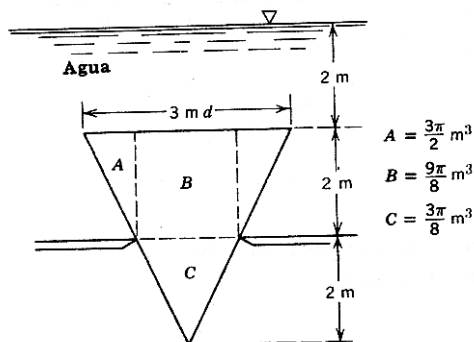


7. El objeto macizo flotante se compone de un hemisferio y un cono de igual radio r hecho del mismo material homogéneo. Si el objeto flota

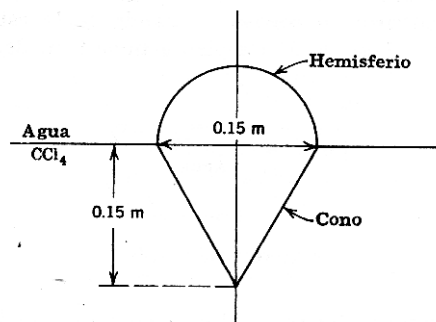
con el centro del hemisferio por encima de la superficie libre del agua, determine la máxima altura que puede tener el cono antes de que el objeto deje de flotar en la posición erecta ilustrada.



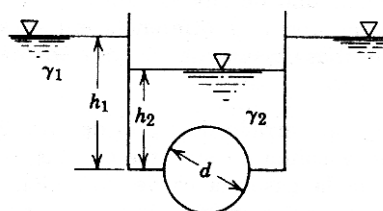
8. ¿Cuál es el peso mínimo requerido para que este cono sólido permanezca en la posición mostrada en la figura.



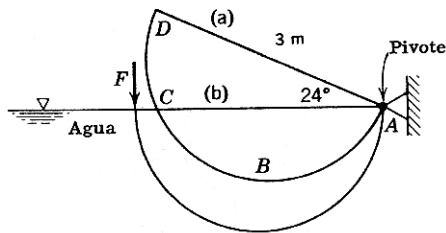
9. Calcular el peso requerido en este objeto para que el mismo flote en la interfaz agua y tetracloruro de carbono como se muestra en la figura.



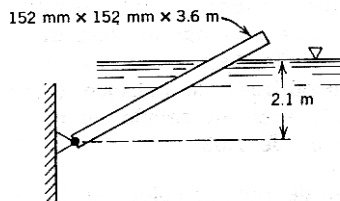
10. La esfera mostrada en la figura tiene un diámetro d y peso despreciable y se encuentra en equilibrio en la posición observada. Determine el valor de d en función de las cantidades que se indican



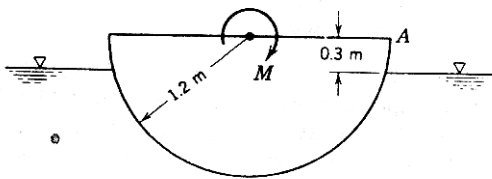
11. Se construye un objeto de un material más ligero que el agua; pesa 50 N en el aire y se requiere una fuerza de 10 N para mantenerlo debajo del agua. Determine la densidad y el peso específico del objeto.
12. El cilindro homogéneo descansa en la posición (a) indicada, siendo las áreas ABC y ADC exactamente iguales. Determine la fuerza requerida para mantenerlo en la posición (b).



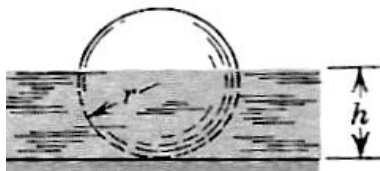
13. La viga pesa 670 N, determine el ángulo de inclinación cuando la superficie del agua se encuentra a 2,1 m sobre el pivote. ¿Arriba de que profundidad permanecerá la viga verticalmente?



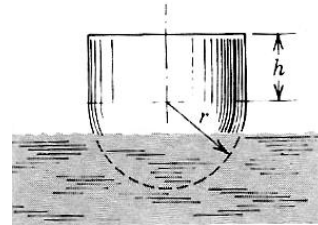
14. El objeto de madera mostrado en la figura tiene la forma de un semicilindro homogéneo y tiene 3, 6 m de largo y flota en una superficie de agua. ¿ Que momento M se requiere para mover el punto A de manera que coincida con la superficie del agua.



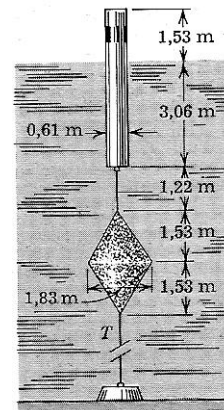
15. Una esfera maciza homogénea de densidad  $\rho_e$  se apoya sobre el fondo de un depósito que contiene un líquido de densidad  $\rho_l$  que es mayor que  $\rho_e$ . Al llenar el depósito, se alcanza una altura de líquido  $h$  a la cual la esfera empieza a flotar. Determine la razón entre las densidades de la esfera y el líquido.



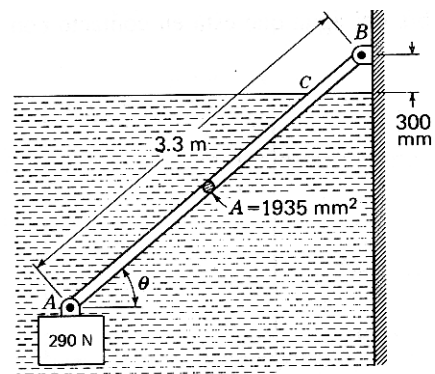
16. El cuerpo flotante macizo está compuesto de una semiesfera y un cilindro de revolución de radios iguales a  $r$ . Si el objeto flota con el centro del hemisferio por encima de la superficie del agua. Determine la altura máxima  $h$  que puede tener el cilindro para flotar en la posición representada en la figura.



17. La baliza consiste en un cilindro cerrado de acero que pesa 8160 N. está sujeta a una boya estabilizadora sumergida constituida por dos cáscaras cónicas soldadas que forman una unidad cerrada que pesa 9980 N. determine la tensión T del cable inferior que mantiene las dos boyas en agua dulce en las posiciones indicadas.

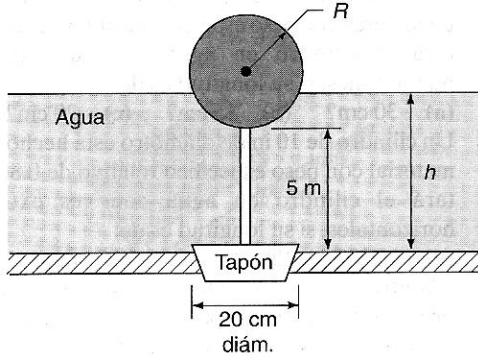


18. Un bloque de material con volumen de  $0,028 \text{ m}^3$  y con un peso de 290 N se sumerge en agua. Una barra de madera de 3,3 m de longitud y sección transversal de  $1935 \text{ mm}^2$  se une al bloque y a la pared. Si la barra pesa 13 N. ¿Cuál será el ángulo  $\theta$  para el equilibrio?.

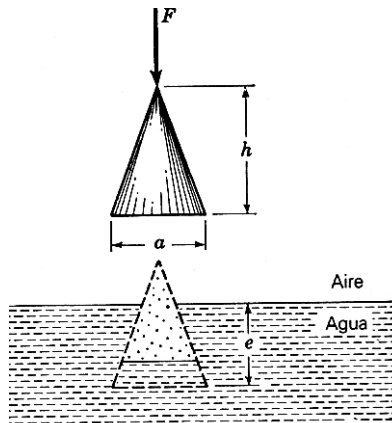




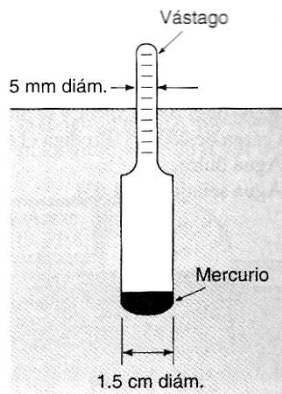
19. El tapón y el cilindro vacío que se muestra en la figura pesan 6 kN. Determine la altura  $h$  necesaria para levantar el tapón, si el radio del cilindro es 30 cm y su longitud es 4 m.



20. Un cono hueco es forzado dentro del agua mediante la fuerza  $F$ . Deduzca las ecuaciones mediante las cuales puede determinarse  $e$ . No tenga en cuenta el peso del cono y el espesor de la pared. Asegúrese de enunciar cualquier suposición que haga.

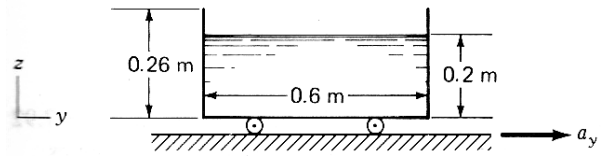


21. El hidrómetro mostrado en la figura tiene una masa de 0,01 kg sin mercurio y está diseñado para flotar en agua pura con el nivel del agua en el punto medio del vástago de 12 cm de largo. Determine la masa del mercurio requerida.

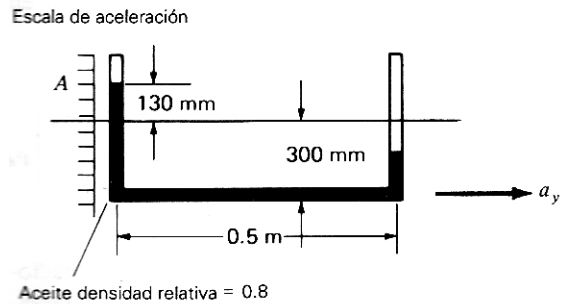


E) TRASLACIÓN Y ROTACIÓN DE MASAS LÍQUIDAS.

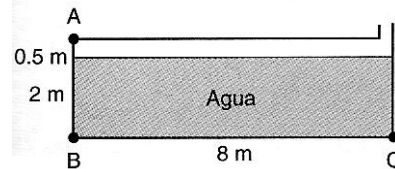
1. Al tanque de agua que se muestra en la figura se le aplica una aceleración  $a_y$ . Si se desea que el agua no se derrame cuando se alcanza una configuración fija con respecto al tanque. ¿Cuál es la mayor aceleración permisible?.



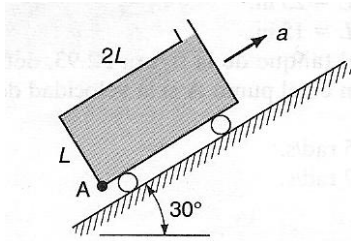
2. Para construir un aparato sencillo que mida aceleraciones, utilice un tubo capilar en forma de U y coloque aceite dentro de éste hasta el nivel de 300 mm, como se muestra. Si el vehículo e el cual se encuentra este tubo en U se acelera de manera que el aceite alcanza la orientación mostrada, ¿Cuál es la aceleración que debe marcarse en la escala en la posición A?.



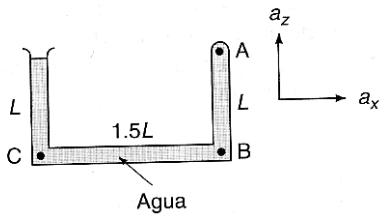
3. El tanque de 4 m de ancho mostrado en la figura se acelera a la derecha a  $10 \text{ m/s}^2$ . Determine: (a) las presiones en los puntos A, B y C; (b) La fuerza sobre el extremo AB; (c) la fuerza sobre el fondo y (d) la fuerza sobre la tapa.



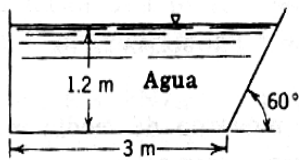
4. El tanque que se muestra en la figura tiene 4 m de anchura contiene agua y se acelera con una aceleración de  $20 \text{ m/s}$ . Determine: (a) la presión en A si  $L = 1 \text{ m}$ ; (b) la fuerza sobre el extremo izquierdo y (c) la fuerza sobre el fondo.



5. Para el tanque mostrado en la figura determine la presión en los puntos A, B y C si  $a_x = 0$ ,  $a_z = 10 \text{ m/s}^2$  y  $L = 60 \text{ cm}$ .

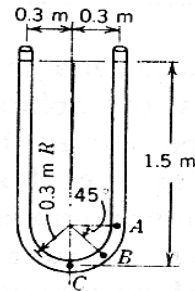


6. Una caja cúbica de 1 m de lado, abierta en la parte superior y llena de agua hasta la mitad, se coloca en un plano inclinado que hace  $30^\circ$  con respecto a la horizontal. La caja vacía pesa 500 N y tiene un coeficiente de fricción de 0,30 con el plano. Determine la aceleración de la caja y el ángulo que la superficie libre del agua hace con respecto a la horizontal.
7. Calcular las fuerzas totales sobre los extremos y el fondo de este tanque de 2 m de anchura cuando se encuentra en reposo y cuando se acelera hacia arriba a  $3 \text{ m/s}^2$ .

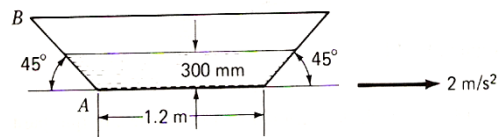


8. Un tanque rectangular cerrado de 1,2 m de alto, 2,4 m de largo y 1,5 m de ancho, está lleno con gasolina en sus tres cuartas partes y la presión en el espacio de aire arriba de la gasolina es de 140 kPa. Calcular las presiones en las esquinas de éste tanque cuando se le acelera horizontalmente según la dirección de su longitud, a  $4,5 \text{ m/s}^2$ .
9. Un tanque abierto, con líquido, se acelera hacia abajo por un plano inclinado a  $30^\circ$ , a  $5 \text{ m/s}^2$ . ¿Cuál es la pendiente de la superficie libre del líquido?. ¿Cuál es la pendiente para la misma aceleración si asciende por el plano?.
10. Este tubo en U que contiene agua hasta una altura de 1,5 m se acelera horizontalmente hacia la derecha a  $3 \text{ m/s}^2$ . ¿Cuáles son las presiones en A, B y C?. Suponga que los tubos

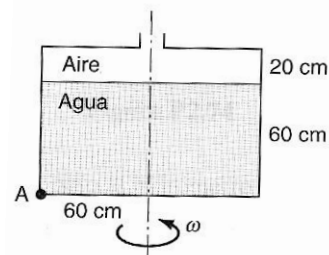
son bastante largos para que no se derrame agua.



11. Un recipiente tiene un ancho constante de 500 mm y contiene agua, como se muestra en la figura. El tanque se acelera uniformemente hacia la derecha a una rapidez de  $2 \text{ m/s}^2$ . Determine la fuerza total sobre el lado AB cuando el agua alcance la condición de equilibrio relativo con respecto al recipiente.

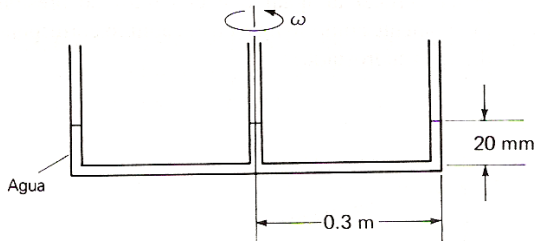


12. Se llena con agua un cilindro abierto de 1 m de diámetro y de 1,5 m de altura, y se le hace girar alrededor de su eje a 100 RPM. ¿Cuánto líquido se derrama?. ¿Cuáles son las presiones en el centro del fondo del tanque y en un punto sobre el fondo a 0,3 m del centro?. ¿Cuál es la fuerza resultante ejercida por el agua sobre el fondo del tanque?.
13. El tanque del problema anterior contiene agua hasta una profundidad de 0,9 m. ¿Cuál será la profundidad del agua en la pared del tanque cuando éste se hace girar a 60 RPM?.
14. Para el tanque de la figura mostrada, determine la presión en el punto A si la velocidad de rotación es: (a)  $5 \text{ rad/s}$  y (b)  $10 \text{ rad/s}$ .



15. El tubo en U del problema 5 gira alrededor de la rama izquierda a 50 rpm calcular la presión en A, B y C cuando (a)  $L = 60 \text{ cm}$ ; (b)  $L = 25 \text{ pulgadas}$ .

16. El tubo en U del problema 5 gira alrededor del centro de la rama horizontal de modo que la presión en el centro es cero. Determine la rapidez angular  $\omega$  a la que debe girar el depósito si (a)  $L = 40$  cm; (b)  $L = 15$  pulgadas.
17. El agujero del tanque del depósito cilíndrico del problema 13 se cierra y el aire se presuriza a 25 kPa. Calcule la presión en el punto A, si la velocidad de rotación es: (a) 5 rad/s y (b) 7 rad/s
18. El sistema en reposo mostrado en la figura se rota con una velocidad de 24 rpm. Una vez que se alcance el estado permanente, ¿Cuál será la altura  $h$  del fluido en cada uno de los tubos capilares exteriores?. Desprecie los efectos de capilaridad.



19. Un tanque de agua debe rotar con una velocidad angular  $\omega$ . ¿A qué velocidad a derramarse el agua cuando se alcance el estado permanente con respecto al tanque?.

