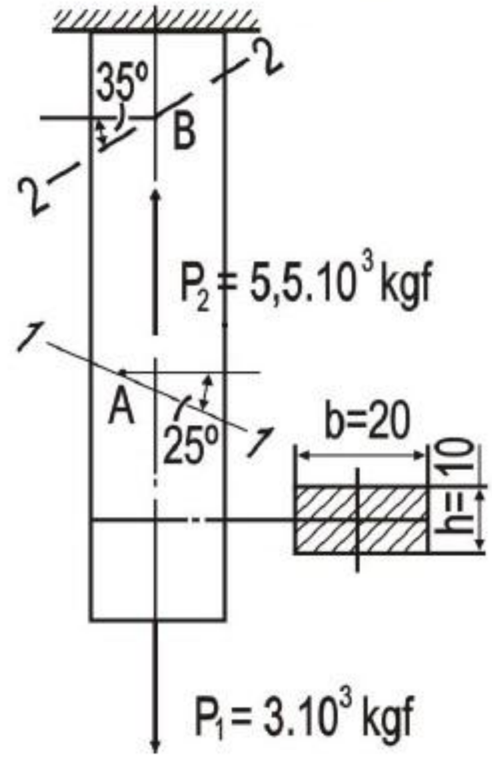
ESFUERZO
Y
DEFORMACION

Dr. GENNER VILLARREAL CASTRO
PROFESOR EXTRAORDINARIO UPAO
PROFESOR PRINCIPAL UPC, USMP
PREMIO NACIONAL ANR 2006, 2007, 2008

2.2 **ESFUERZO LINEAL**

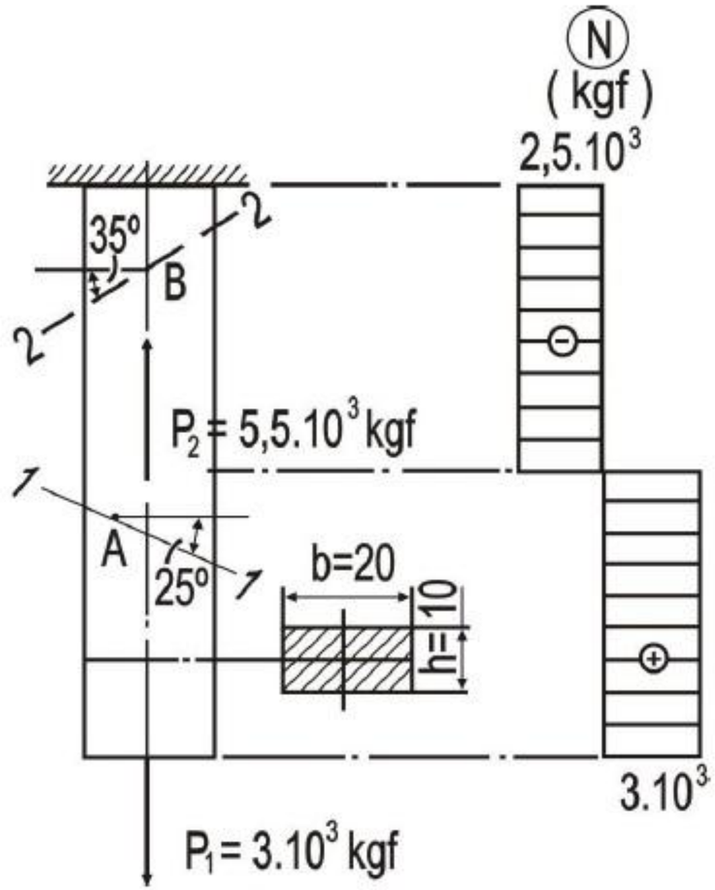
PROBLEMA 2.1 Determinar los esfuerzos normal y tangencial en el punto A de la sección 1-1 y en el punto B de la sección 2-2 de la barra, tanto en forma analítica, como en forma gráfica por medio del circulo de Mohr. Calcular el esfuerzo tangencial máximo que surgen en dichos puntos.



Solución:

En un inicio graficamos el diagrama de fuerza axial o normal, siendo para el punto A:

$$N_A = P_1 = 3.10^3 \, kgf$$



Correspondientemente, el esfuerzo normal en la sección transversal indicada es esfuerzo principal para el punto A.

$$(\sigma_x)_A = (\sigma_1)_A = \frac{N_A}{A} = \frac{3.10^3}{2.1} = 1500 kgf / cm^2$$

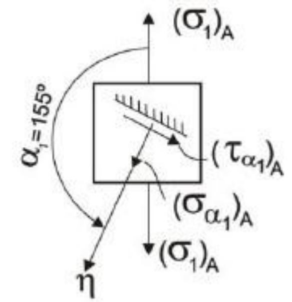
En forma análoga será para el punto B:

$$N_B = P_1 - P_2 = 3.10^3 - 5{,}5.10^3 = -2{,}5.10^3\,\text{kgf}$$

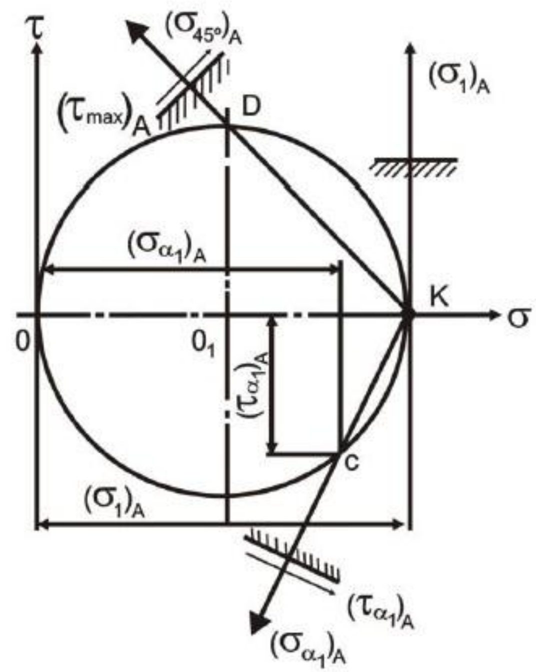
$$(\sigma_x)_B = (\sigma_3)_B = \frac{N_B}{A} = -\frac{2{,}5.10^3}{2.1} = -1250\,\text{kgf}/\text{cm}^2$$

En la figura a) se muestra el elemento del punto A, con sus secciones longitudinal y transversal y se muestra el plano paralelo a la sección 1-1, cuyos esfuerzos normal y tangencial se determinan por las fórmulas 2.6 y 2.7.

a)



b)



$$\left(\sigma_{\alpha_1}\right)_A = \left(\sigma_1\right)_A \cos^2\alpha_1 = 1500.\cos^2 155^0 = 1232{,}09\text{kgf}/\text{cm}^2$$

$$\left(\tau_{\alpha_1}\right)_A = \frac{1}{2}\left(\sigma_1\right)_A \operatorname{sen}2\alpha_1 = \frac{1}{2}.1500.\operatorname{sen}310^0 = -574{,}53\text{kgf}/\text{cm}^2$$

El esfuerzo tangencial máximo en el punto A es:

$$\left(\tau_{máx}\right)_A = \frac{\left(\sigma_1\right)_A}{2} = \frac{1500}{2} = 750\text{kgf}/\text{cm}^2$$

Graficamos el círculo de Mohr (figura b), siendo el segmento $OK = \left(\sigma_1\right)_A$. El punto O es el inicio y el punto K muestra la acción del esfuerzo principal $\left(\sigma_1\right)_A$. Luego, dividimos en dos partes iguales el segmento OK, obteniéndose el centro del círculo de Mohr, que es el punto O_1 y a partir de este centro, con radio O_1K graficamos el círculo de Mohr.

A partir del punto K, trazamos una paralela a la normal de la sección, la cual se intersecará con el círculo en el punto C, obteniéndose como proyección en los ejes horizontal y vertical, los valores de $\left(\sigma_{\alpha_1}\right)_A$ y $\left(\tau_{\alpha_1}\right)_A$.

Es notorio, que el esfuerzo tangencial máximo, se obtendrá trazando una línea de K al punto D, es decir con un ángulo de 45^0.

Respecto a los signos, se notará que concuerdan con los obtenidos por el cálculo numérico y respecto a la exactitud de los resultados, depende de la escala escogida.

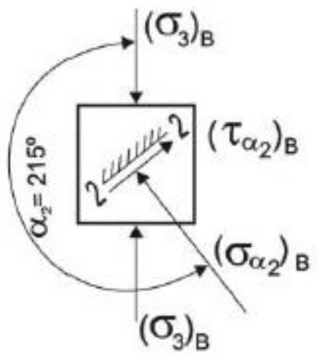
En forma análoga procedemos a calcular los esfuerzos para el punto B de la sección 2-2, tal como se muestra en la figura a)

$$\left(\sigma_{\alpha_1}\right)_B = \left(\sigma_3\right)_B \cos^2\alpha_2 = -1250.\cos^2 215^0 = -838{,}76\text{kgf}/\text{cm}^2$$

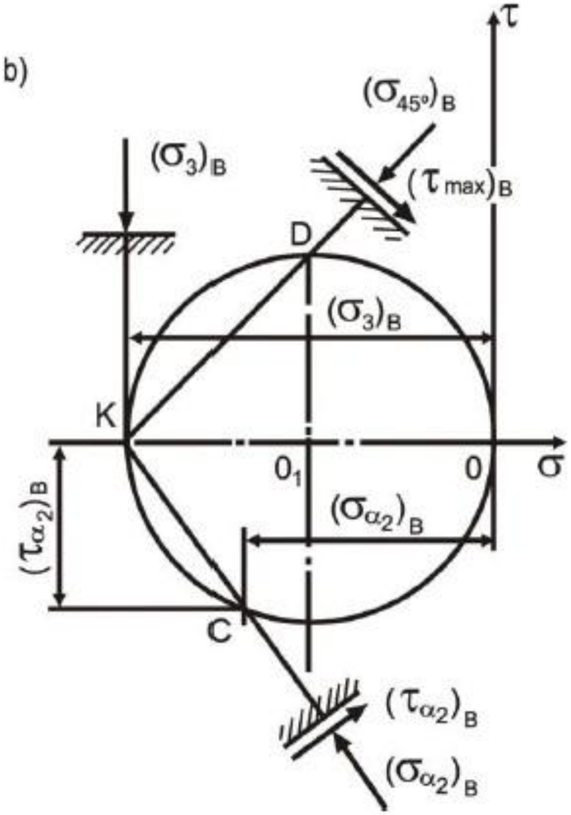
$$\left(\tau_{\alpha_2}\right)_B = \frac{1}{2}\left(\sigma_3\right)_B \text{sen}2\alpha_2 = 0{,}5.(-1250).\text{sen}430^0 = -587{,}31\text{kgf}/\text{cm}^2$$

$$\left(\tau_{\text{máx}}\right)_B = \frac{-\left(\sigma_3\right)_B}{2} = \frac{1250}{2} = 625\text{kgf}/\text{cm}^2$$

a)

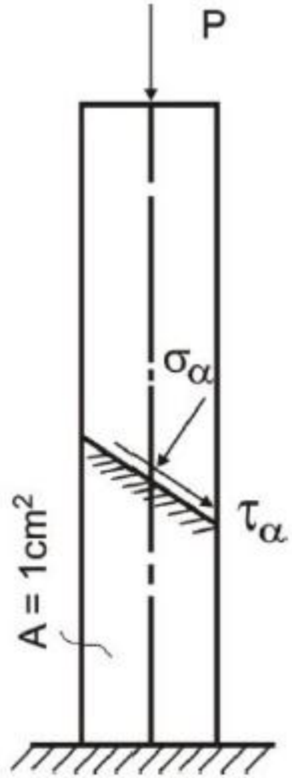


b)



El círculo de Mohr para el punto B, se muestra en la figura b) . Este caso es análogo al punto A, con la única diferencia que $\left(\sigma_3\right)_B < 0$, debiendo de ubicarse el punto K a la izquierda de O.

PROBLEMA 2.2 En la barra comprimida, el esfuerzo en uno de los planos es $\sigma_\alpha = 75\text{MPa}$ y $\tau_\alpha = 43\text{MPa}$. Determinar los esfuerzos normal y tangencial máximos, así como la carga P.



Solución:

Del gráfico se desprende que $\tau_\alpha > 0$ y $\sigma_\alpha < 0$, luego por las fórmulas 2.6 y 2.7 se tendrá:

$$\sigma_1 \cos^2 \alpha = -75 \qquad \text{(a)}$$

$$\frac{\sigma_1}{2} \mathrm{sen} 2\alpha = 43 \qquad \text{(b)}$$

Dividimos (b) entre (a) y obtenemos:

$$\mathrm{tg}\alpha = -0{,}573$$

$$\alpha = -29{,}83^0$$

Reemplazamos valores en la ecuación (a) y obtenemos:

$$\sigma_1 \cos^2(-29{,}83^0) = -75$$

$$\sigma_1 = \sigma_{máx} = -99{,}66\mathrm{MPa}$$

Además:

$$\sigma_1 = \frac{P}{A} \quad \Rightarrow \quad P = \sigma_1 A = -99{,}66.10^{-4}.10^6$$

De donde:

$$P = -9966\mathrm{N} = -9{,}966\mathrm{kN} \qquad \text{(COMPRESION)}$$

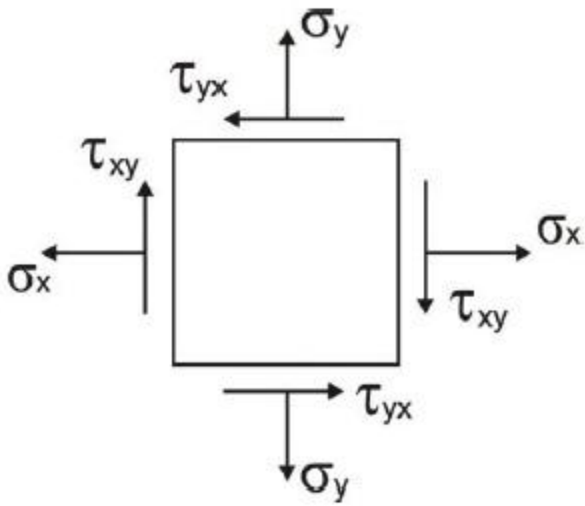
Asimismo:

$$\tau_{máx} = -\frac{\sigma_1}{2} = 49{,}83\mathrm{MPa}$$

El signo (-) indica, que el esfuerzo tangencial máximo se produce cuando $\mathrm{sen} 2\alpha = -1$.

2.3 ESFUERZO PLANO

PROBLEMA 2.3 Determinar la relación entre $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ para que el estado plano mostrado en la figura, resulte ser lineal.



Solución:

Sabemos que el estado de esfuerzos plano, posee dos esfuerzos principales σ_1 y σ_2, los cuales son diferentes de cero y cuyos valores se obtienen por la fórmula:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

Luego, para que dicho estado de esfuerzos plano, se convierta en lineal, debe de cumplirse que $\sigma_2 = 0$, esto es:

$$\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = 0$$

$$(\sigma_x + \sigma_y)^2 = (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2$$

Efectuando operaciones se obtiene:

$$\tau_{xy} = \sqrt{\sigma_x \sigma_y}$$

PROBLEMA 2.5 Para un punto en estado plano de esfuerzos, $\sigma_1 = 40\text{MPa}$, $\sigma_2 = -20\text{MPa}$ y $\alpha_0 = 30^\circ$. Determinar en forma analítica los esfuerzos $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$

Solución:

Por dato del problema y de acuerdo a la fórmula de esfuerzos principales, se sabe que:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = 40$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = -20$$

Sumamos ambas ecuaciones y obtenemos:

$$2\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right) = 20$$

$$\sigma_x + \sigma_y = 20 \qquad \text{(a)}$$

Luego:

$$\frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = 30$$

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 60^2 \qquad \text{(b)}$$

Además:

$$\mathrm{tg}2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

Por dato del problema $\alpha_0 = 30°$

$$\mathrm{tg}60° = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

$$\sigma_x - \sigma_y = -\frac{2\tau_{xy}}{\sqrt{3}} \qquad \text{(c)}$$

Reemplazamos (c) en (b):

$$\left(-\frac{2\tau_{xy}}{\sqrt{3}}\right)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 60^2$$

$$\tau_{xy} = \sqrt{675}$$

Como toda raíz cuadrada, tiene dos soluciones, las cuales son:

1ra solución: $\tau_{xy} = 26\text{MPa}$

2da solución: $\tau_{xy} = -26\text{MPa}$

Ahora, analizamos la 1ra solución, reemplazando en la ecuación (c):

$$\sigma_x - \sigma_y = -\frac{2(26)}{\sqrt{3}}$$

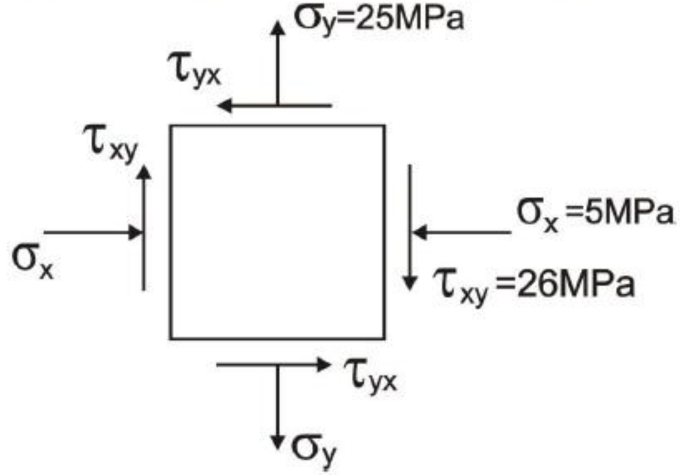
$$\sigma_x - \sigma_y = -30 \qquad \text{(d)}$$

Resolvemos (a) y (d), obteniendo:

$$\sigma_x = -5\text{MPa}$$

$$\sigma_y = 25\text{MPa}$$

Esquematizamos los esfuerzos, los cuales se muestran en la figura



Luego, analizamos la 2da solución en forma análoga al caso anterior:

$$\sigma_x - \sigma_y = -\frac{2(-26)}{\sqrt{3}}$$

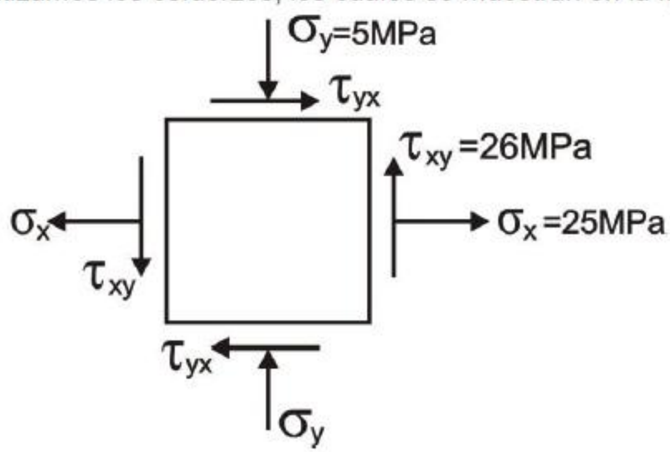
$$\sigma_x - \sigma_y = 30 \qquad \text{(e)}$$

Resolvemos (a) y (e), obteniendo:

$$\sigma_x = 25\text{MPa}$$

$$\sigma_y = -5\text{MPa}$$

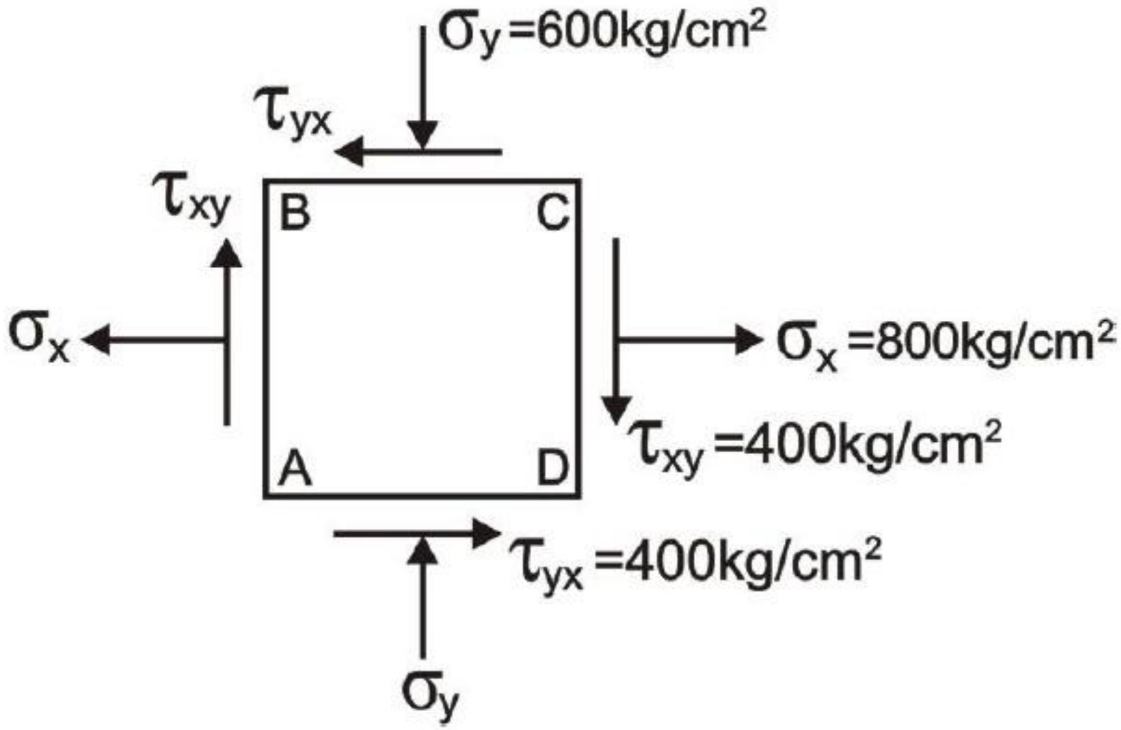
Esquematizamos los esfuerzos, los cuales se muestran en la figura



PROBLEMA 2.6 Los esfuerzos en un punto de un cuerpo elástico, en estado plano de esfuerzos, son $\sigma_x = 800 kg/cm^2$, $\sigma_y = -600 kg/cm^2$, $\tau_{xy} = 400 kg/cm^2$. Determinar la orientación de los planos que solo tienen esfuerzo cortante y el valor del esfuerzo cortante en cada uno de dichos planos.

Solución:

Esquematizamos en la figura los esfuerzos indicados en el problema:



Para el presente caso, se tendrá que analizar cuando $\sigma_\alpha = 0$

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\alpha - \tau_{xy}\text{sen}2\alpha = 0$$

$$\frac{800-600}{2} + \frac{800-(-600)}{2}\cos 2\alpha - 400\text{sen}2\alpha = 0$$

$$100 + 700\cos 2\alpha - 400\text{sen}2\alpha = 0$$

$$100(\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha) + 700(\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha) - 400(2\text{sen}\alpha\cos\alpha) = 0$$

$$4\cos^2\alpha - 4\text{sen}\alpha\cos\alpha - 3\text{sen}^2\alpha = 0$$

Factorizamos:

$$(2\cos\alpha - 3\text{sen}\alpha)(2\cos\alpha + \text{sen}\alpha) = 0$$

Como se comprenderá, tendremos dos soluciones, las cuales las analizaremos en forma separada.

1ra solución:

$$2\cos\alpha - 3\text{sen}\alpha = 0$$

$$\text{tg}\alpha = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 33{,}69^\circ$$

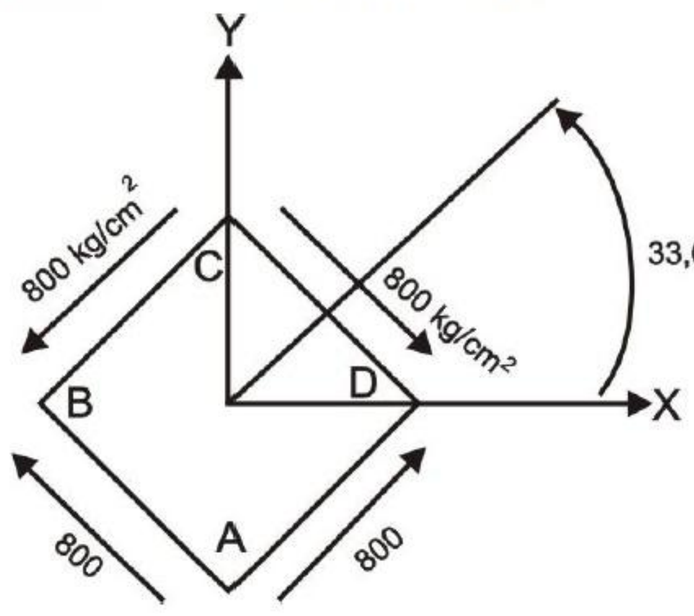
En consecuencia:

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\text{sen}2\alpha + \tau_{xy}\cos 2\alpha$$

$$\tau_{\alpha=33,69^0} = \frac{800-(-600)}{2}\text{sen}67{,}38^\circ + 400\cos 67{,}38^\circ$$

$$\tau_{\alpha=33,69^0} = 800\text{kg}/\text{cm}^2$$

Esquematizamos la respuesta, tal como se muestra en la figura



2da solución:

$$2\cos\alpha + \text{sen}\alpha = 0$$

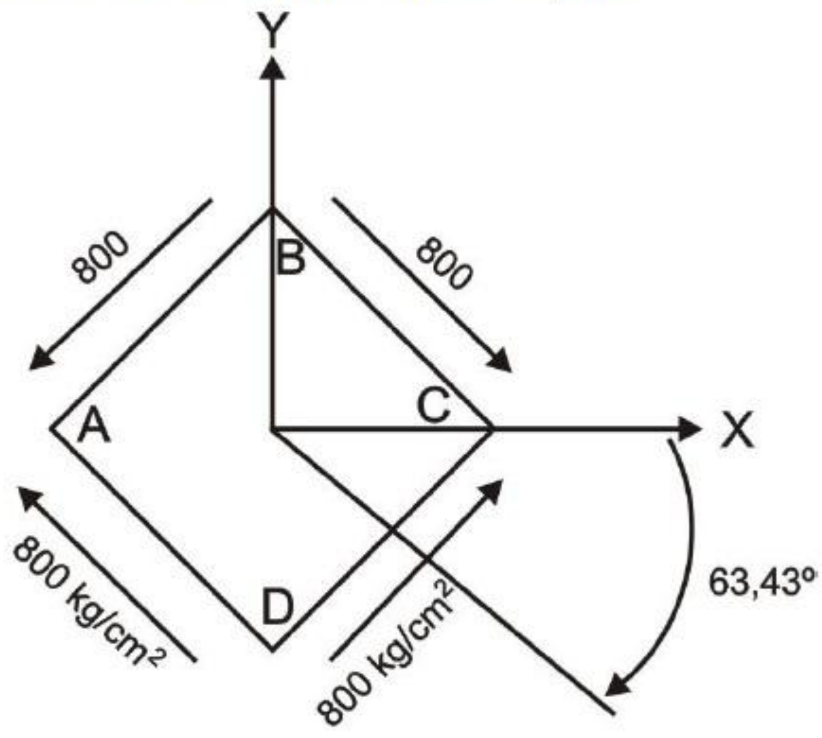
$$\text{tg}\alpha = -2 \quad \Rightarrow \qquad \alpha = -63{,}43^\circ$$

En consecuencia:

$$\tau_{\alpha=-63,43^0} = \frac{800-(-600)}{2}\text{sen}(-126{,}86^\circ) + 400\cos(-126{,}86^\circ)$$

$$\tau_{\alpha=-63,43^0} = -800\text{kg}/\text{cm}^2$$

Esquematizamos la respuesta, tal como se muestra en la figura



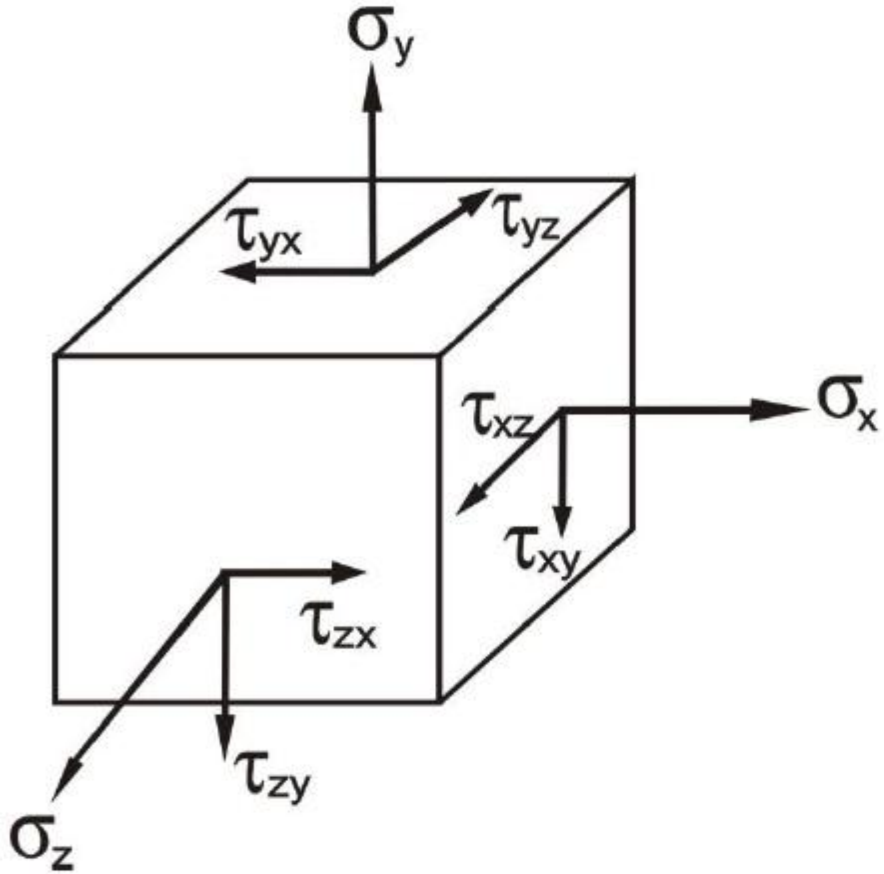
Nótese que α es positivo si va en sentido antihorario y negativo si va en sentido horario, lo que concuerda con la parte teórica.

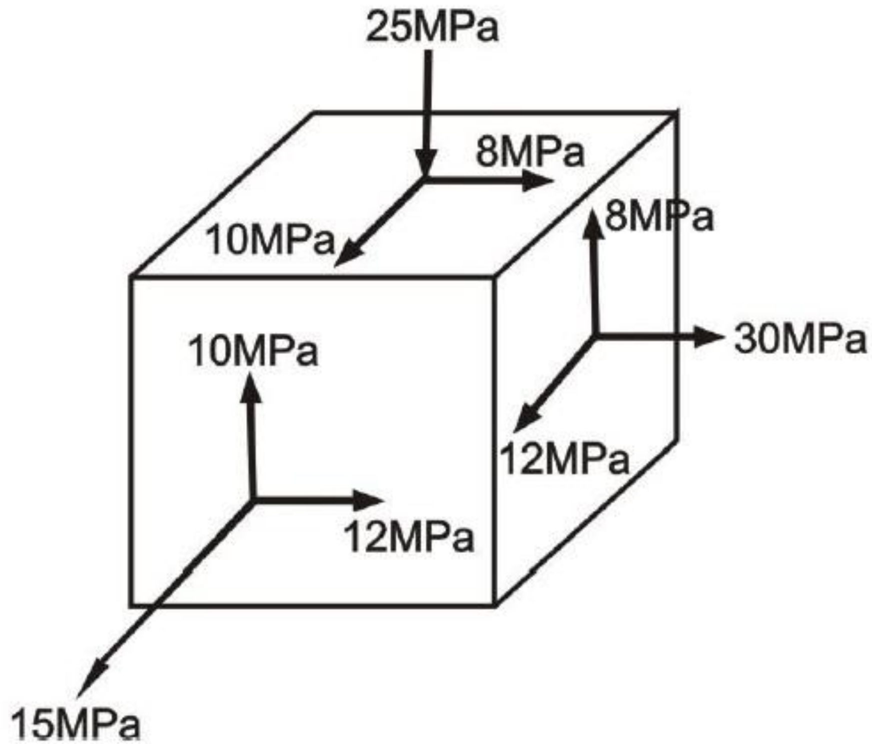
2.4 ESFUERZO ESPACIAL

PROBLEMA 2.9 Si $\sigma_x = 30\text{MPa}$, $\sigma_y = -25\text{MPa}$, $\sigma_z = 15\text{MPa}$, $\tau_{xy} = -8\text{MPa}$, $\tau_{xz} = 12\text{MPa}$, $\tau_{yz} = -10\text{MPa}$. Determinar los esfuerzos principales y los ángulos que forman cada uno de ellos con los ejes coordenados OX, OY, OZ.

Solución:

Antes de iniciar la solución del presente problema, debemos de tener bien en claro la orientación positiva de los esfuerzos normales y tangenciales en las tres caras principales, que en las otras caras del cubo, serán en sentido opuesto para el equilibrio de esfuerzos. Es por ello, que en la figura se muestra la orientación positiva de los esfuerzos.





En la figura se muestra la distribución de los esfuerzos del presente problema, esquematizados en las caras principales del cubo, que en las restantes serán opuestas.

Ahora, resolvemos la ecuación cúbica para determinar los esfuerzos principales.

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0$$

Donde:

$$I_1 = 30 - 25 + 15 = 20$$

$$I_2 = 30(-25) + 30(15) + (-25)(15) - (-8)^2 - (12)^2 - (-10)^2 = -983$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} 30 & -8 & 12 \\ -8 & -25 & -10 \\ 12 & -10 & 15 \end{vmatrix} = -9690$$

Reemplazamos valores, quedando la ecuación cúbica de la siguiente forma:

$$\sigma^3 - 20\sigma^2 - 983\sigma + 9690 = 0$$

Resolvemos la ecuación cúbica y ordenamos de mayor a menor:

$$\sigma_1 = 38{,}874\text{MPa}$$

$$\sigma_2 = 8{,}956\text{MPa}$$

$$\sigma_3 = -27{,}83\text{MPa}$$

Los ángulos que forman cada uno de los esfuerzos principales con los ejes coordenados OX, OY, OZ se denominan *ángulos directores* y los calculamos para cada esfuerzo principal en forma separada.

ÁNGULOS DIRECTORES PARA σ_1:

Se resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$(\sigma_1 - \sigma_x)k - \tau_{xy}m - \tau_{xz}n = 0$$

$$-\tau_{xy}k + (\sigma_1 - \sigma_y)m - \tau_{yz}n = 0$$

$$-\tau_{xz}k - \tau_{yz}m + (\sigma_1 - \sigma_z)n = 0$$

Donde k, m, n son los cosenos directores.

Reemplazamos valores y obtenemos:

$$8{,}874k + 8m - 12n = 0 \qquad \text{(a)}$$

$$8k + 63{,}874m + 10n = 0 \qquad \text{(b)}$$

$$-12k + 10m + 23{,}874n = 0 \qquad \text{(c)}$$

Resolvemos las ecuaciones (b) y (c), expresando "k" en función de "m":

$$k = -4{,}582m$$

Resolvemos (a) y (b), expresando "n" en función de "m":

$$n = -2{,}722m$$

Por el curso de Dinámica, sabemos que:

$$k^2 + m^2 + n^2 = 1$$

$$(-4{,}582m)^2 + m^2 + (-2{,}722m)^2 = 1$$

De donde:

$$m = 0{,}1844$$

$$k = -0{,}8449$$

$$n = -0{,}5019$$

Luego, determinamos los ángulos directores:

$$k = \cos\alpha_1 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \arccos(-0{,}8449) = 147{,}66°$$

$$m = \cos\beta_1 \quad \Rightarrow \quad \beta_1 = \arccos(0{,}1844) = 79{,}37°$$

$$n = \cos\gamma_1 \quad \Rightarrow \quad \gamma_1 = \arccos(-0{,}5019) = 120{,}12°$$

Siendo:

α_1 - ángulo que forma σ_1 con el eje OX

β_1 - ángulo que forma σ_1 con el eje OY

γ_1 - ángulo que forma σ_1 con el eje OZ

ÁNGULOS DIRECTORES PARA σ_2:

Efectuamos un proceso análogo al caso anterior.

$$(\sigma_2 - \sigma_x)k - \tau_{xy}m - \tau_{xz}n = 0$$

$$-\tau_{xy}k + (\sigma_2 - \sigma_y)m - \tau_{yz}n = 0$$

$$-\tau_{xz}k - \tau_{yz}m + (\sigma_2 - \sigma_z)n = 0$$

Reemplazamos valores y obtenemos:

$$-21{,}044k + 8m - 12n = 0 \quad \text{(d)}$$

$$8k + 33{,}956m + 10n = 0 \quad \text{(e)}$$

$$-12k + 10m - 6{,}044n = 0 \quad \text{(f)}$$

Resolvemos (e) y (f), expresando "k" en función de "m":

$$k = 4{,}260m$$

Resolvemos (d) y (e), expresando "n" en función de "m":

$$n = -6{,}803m$$

Luego:

$$k^2 + m^2 + n^2 = 1$$

$$(4{,}260m)^2 + m^2 + (-6{,}803m)^2 = 1$$

De donde:

$$m = 0{,}1236$$

$$k = 0{,}5265$$

$$n = -0{,}8408$$

Determinamos los ángulos directores:

$$k = \cos\alpha_2 \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = \arccos(0{,}5265) = 58{,}23^\circ$$

$$m = \cos\beta_2 \quad \Rightarrow \quad \beta_2 = \arccos(0{,}1236) = 82{,}90^\circ$$

$$n = \cos\gamma_2 \quad \Rightarrow \quad \gamma_2 = \arccos(-0{,}8408) = 147{,}22^\circ$$

Siendo:

α_2 - ángulo que forma σ_2 con el eje OX

β_2 - ángulo que forma σ_2 con el eje OY

γ_2 - ángulo que forma σ_2 con el eje OZ

ÁNGULOS DIRECTORES PARA σ_3:

$$(\sigma_3 - \sigma_x)k - \tau_{xy}m - \tau_{xz}n = 0$$

$$-\tau_{xy}k + (\sigma_3 - \sigma_y)m - \tau_{yz}n = 0$$

$$-\tau_{xz}k - \tau_{yz}m + (\sigma_3 - \sigma_z)n = 0$$

Reemplazamos valores y obtenemos:

$$-57{,}83k + 8m - 12n = 0 \qquad \text{(g)}$$

$$8k - 2{,}83m + 10n = 0 \qquad \text{(h)}$$

$$-12k + 10m - 42{,}83n = 0 \qquad \text{(i)}$$

Resolvemos (h) e (i), expresando "k" en función de "m":

$$k = 0{,}095m$$

Resolvemos (g) y (h), expresando "n" en función de "m":

$$n = 0{,}207m$$

Luego:

$$k^2 + m^2 + n^2 = 1$$

$$(0{,}095m)^2 + m^2 + (0{,}207m)^2 = 1$$

De donde:

$$m = 0{,}9750$$

$$k = 0{,}0926$$

$$n = 0{,}2018$$

Determinamos los ángulos directores:

$$k = \cos\alpha_3 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha_3 = \arccos(0{,}0926) = 84{,}69^\circ$$

$$m = \cos\beta_3 \qquad \Rightarrow \qquad \beta_3 = \arccos(0{,}9750) = 12{,}84^\circ$$

$$n = \cos\gamma_3 \qquad \Rightarrow \qquad \gamma_3 = \arccos(0{,}2018) = 78{,}36^\circ$$

Siendo:

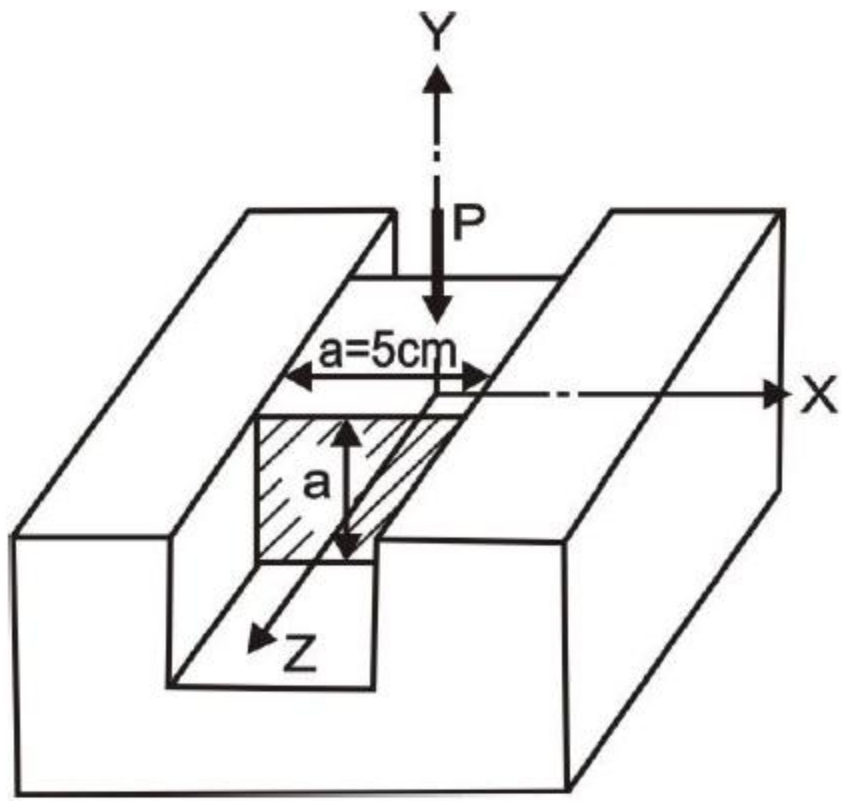
α_3 - ángulo que forma σ_3 con el eje OX

β_3 - ángulo que forma σ_3 con el eje OY

γ_3 - ángulo que forma σ_3 con el eje OZ

2.5 LEY DE HOOKE GENERALIZADA

PROBLEMA 2.10 Un cubo de aluminio de lado $a = 5cm$, se coloca libremente sin holguras en un cuerpo sólido indeformable, tal como se muestra en la figura y es comprimido por una fuerza $P = 180kN$. Determinar los esfuerzos principales y deformaciones principales para cualquier punto del cubo. Calcular la deformación volumétrica y la variación absoluta de volumen, así como la densidad total de energía de deformación, densidad de la energía por variación de volumen y densidad de la energía por variación de forma. Considere $E = 0{,}7.10^5 MPa$, $\mu = 0{,}36$.



Solución:

El cubo se encuentra en un estado de esfuerzo homogéneo (igual en todos sus puntos) y en consecuencia se puede aplicar la Ley de Hooke generalizada en su totalidad del elemento. El lado libre perpendicular al eje OZ está achurado y libre de esfuerzos, esto es $\sigma_z = 0$.

El esfuerzo en los lados superior e inferior del cubo será:

$$\sigma_y = -\frac{P}{a^2} = -\frac{180.10^3}{5^2.10^{-4}} = -7{,}2.10^7\,\text{Pa}$$

El esfuerzo σ_x se determina a partir de la condición que la deformación en el eje OX es cero $(\varepsilon_x = 0)$, debido a que por condición del problema el cuerpo donde se coloca el cubo, es sólido e indeformable.

A través de la Ley de Hooke generalizada, tenemos:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)\right] = 0$$

De donde:

$$\sigma_x = \mu\sigma_y = 0{,}36.(-7{,}2.10^7) = -259{,}2.10^5\,\text{Pa}$$

Finalmente, tenemos que:

$$\sigma_1 = \sigma_z = 0$$

$$\sigma_2 = \sigma_x = -259{,}2.10^5\,\text{Pa} = -25{,}92\text{MPa}$$

$$\sigma_3 = \sigma_y = -72\text{MPa}$$

Ahora determinamos las deformaciones principales:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)\right] = \frac{1}{0{,}7.10^5}\left[0 - 0{,}36(-25{,}92 - 72)\right] = 5{,}03.10^{-4}$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_x = 0$$

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)\right] = \frac{1}{0{,}7.10^5}\left[-72 - 0{,}36.(-25{,}92 + 0)\right] = -8{,}95.10^{-4}$$

La deformación volumétrica será:

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = -8{,}95.10^{-4} + 5{,}03.10^{-4} = -3{,}92.10^{-4}$$

De esta manera, la variación absoluta de volumen es:

$$\Delta V = e.V = e.a^3 = -3{,}92.10^{-4}.5^3 = -0{,}049\text{cm}^3 = -4{,}9.10^{-8}\text{m}^3$$

Ahora calculamos la densidad total de energía de deformación:

$$u = \frac{1}{2.0{,}7.10^5}\left[(-25{,}92)^2 + (-72)^2 - 2.0{,}36.\{(-25{,}92).(-72)\}\right] = 3222{,}97.10^{-5}\,\text{MNm}/\text{m}^3$$

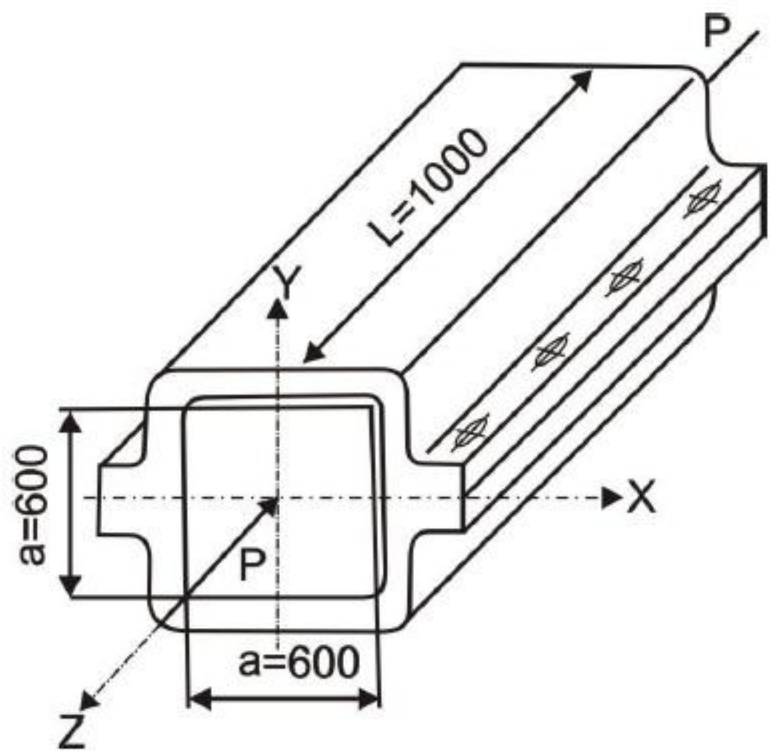
$$u = 32229{,}7\text{N.m}/\text{m}^3$$

Las densidades de la energía por variación de volumen y de forma serán:

$$u_{vol} = \frac{1 - 2.0{,}36}{6.0{,}7.10^5}(-25{,}92 - 72)^2 = 639{,}22.10^{-5}\,\text{MNm}/\text{m}^3 = 6392{,}2\text{N.m}/\text{m}^3$$

$$u_f = \frac{1 + 0{,}36}{6.0{,}7.10^5}\left[(25{,}92)^2 + (-25{,}92 + 72)^2 + (-72)^2\right] = 2583{,}75.10^{-5}\,\text{MNm}/\text{m}^3 = 25837{,}5\text{N.m}/\text{m}^3$$

PROBLEMA 2.11 Una abrazadera rígida está compuesta por dos mitades, unidas entre sí por ocho pernos, tal como se muestra en la figura. Ambas partes comprimen a un prisma plástico, con coeficiente de Poisson $\mu = 0{,}4$. La fuerza que comprime al prisma plástico por su longitud es $P = 10T$. Determinar el diámetro requerido de los pernos, menospreciando su deformación y el efecto de torsión al enroscarlo. Considere $[\sigma] = 1000 kgf/cm^2$ para los pernos.



Solución:

Debido a la compresión del prisma plástico, sus dimensiones de sección transversal deben de incrementarse, pero ante esta expansión se oponen las abrazaderas. Como resultado surgen las fuerzas de interacción entre las superficies del prisma y las abrazaderas. Se considera que el prisma es homogéneo.

Por condición del problema, las abrazaderas son absolutamente rígidas y la deformación de los pernos se desprecia, podemos indicar que las deformaciones del prisma en los ejes x e y son iguales a cero. Considerando además, que por simetría $\sigma_x = \sigma_y$ y aplicando la Ley de Hooke generalizada obtenemos:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)\right] = 0$$

De donde:

$$\sigma_x(1-\mu) = \mu\sigma_z$$

$$\sigma_x = \frac{\mu\sigma_z}{1-\mu}$$

Siendo:

$$\sigma_z = -\frac{P}{a^2} = -\frac{10.10^3}{60^2} = -2{,}78\text{kgf}/\text{cm}^2$$

Luego:

$$\sigma_x = -\frac{0{,}4.2{,}78}{1-0{,}4} = -1{,}85\text{kgf}/\text{cm}^2$$

La fuerza total que actúa en los pernos será:

$$Q = a.L.|\sigma_x| = 60.100.1{,}85 = 11100\text{kgf}$$

Entonces, la fuerza que soportará un perno será:

$$Q_p = \frac{Q}{8} = \frac{11100}{8} = 1387{,}5\text{kgf}$$

De acuerdo a la condición de resistencia se tendrá:

$$\frac{Q_p}{A_p} \leq [\sigma]$$

A partir de esta condición, calculamos el diámetro requerido del perno:

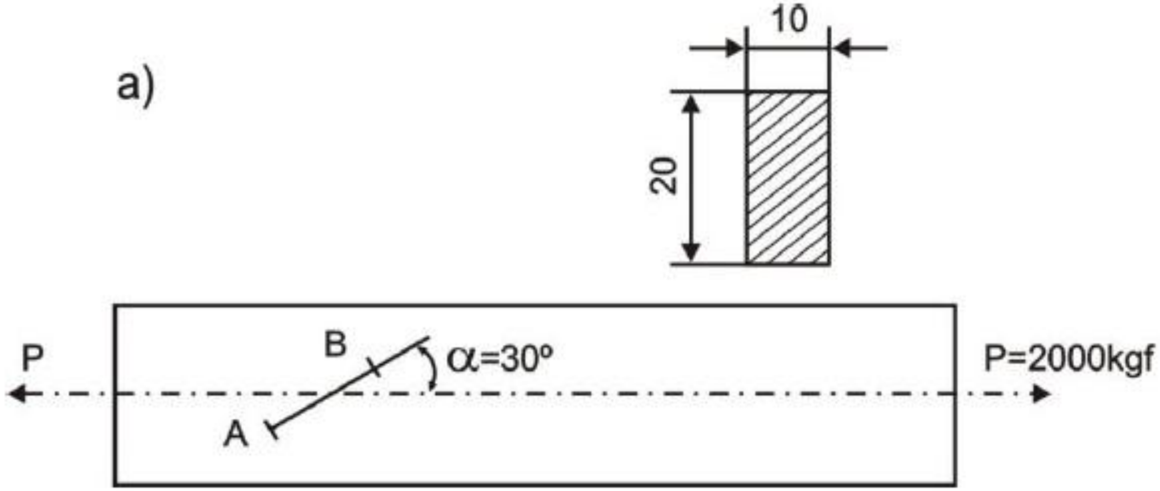
$$\frac{\pi.d_p^2}{4} \geq \frac{Q_p}{[\sigma]}$$

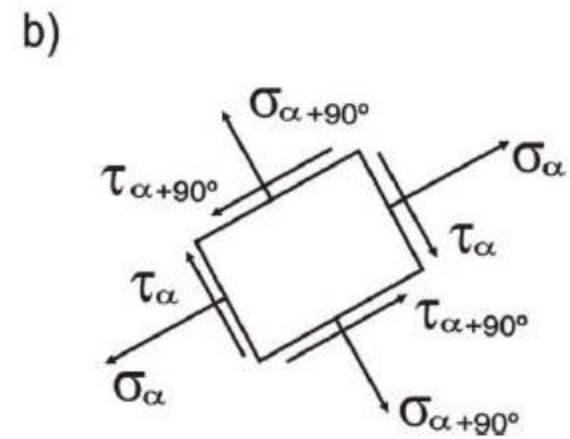
$$d_p \geq \sqrt{\frac{4.Q_p}{\pi.[\sigma]}} = \sqrt{\frac{4.1387{,}5}{\pi.1000}} = 1{,}33\text{cm}$$

Asumimos:

$$d_p = 1{,}33\text{cm}$$

PROBLEMA 2.12 En la figura a) se muestra una barra traccionada, en la cual se colocó un tensómetro AB. La base del tensómetro es $s = 20\text{mm}$, con coeficiente de aumento $k = 1000$, y muestra una medida $\delta_s = 6{,}5\text{mm}$. Determinar el coeficiente de Poisson del material de la barra, si $E = 2{,}1.10^6 \text{kgf}/\text{cm}^2$.





Solución:

De la barra elegimos un elemento plano, paralelo a la base del tensómetro y perpendicular al mismo, tal como se muestra en la figura b)

El esfuerzo en la sección transversal de la barra será:

$$\sigma_x = \sigma_1 = \frac{P}{A} = \frac{2000}{2.1} = 1000 kgf / cm^2$$

Ahora determinamos los esfuerzos normales que surgen en los lados del elemento elegido, es decir:

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha = 1000.\cos^2 30° = 750 kgf / cm^2$$

$$\sigma_{\alpha+90^0} = \sigma_1 \cos^2(\alpha + 90°) = \sigma_1 sen^2\alpha = 1000.sen^2 30° = 250 kgf / cm^2$$

Escribimos la expresión que determina la deformación lineal en la dirección de la base del tensómetro:

$$\varepsilon_\alpha = \frac{1}{E}(\sigma_\alpha - \mu\sigma_{\alpha+90^0})$$

Por condición del problema, se puede determinar el valor numérico de la deformación indicada, esto es:

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\delta_s}{s.k} = \frac{6,5}{20.1000} = 3,25.10^{-4}$$

De esta manera, igualamos ambas expresiones y obtenemos:

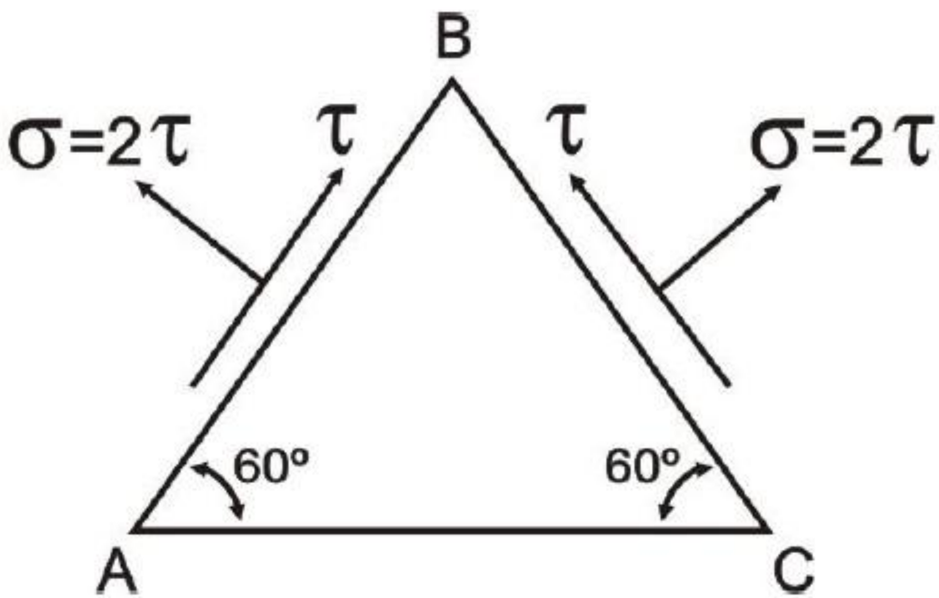
$$\frac{1}{2,1.10^6}(750 - 250\mu) = 3,25.10^{-4}$$

De donde:

$$\mu = \frac{750 - 682,5}{250} = 0,27$$

2.6 TEORIAS O CRITERIOS DE RESISTENCIA

PROBLEMA 2.13 Están dados los esfuerzos σ y τ uniformemente distribuidos por las aristas de una lámina triangular. Se pide equilibrar la lámina con esfuerzos en la tercera arista AC y comprobar la resistencia, teniendo en cuenta que el material de la lámina es frágil. Considerar $[\sigma] = 80\text{MPa}$, $\sigma = 2\tau = 20\text{MPa}$ y $\mu = 0{,}25$

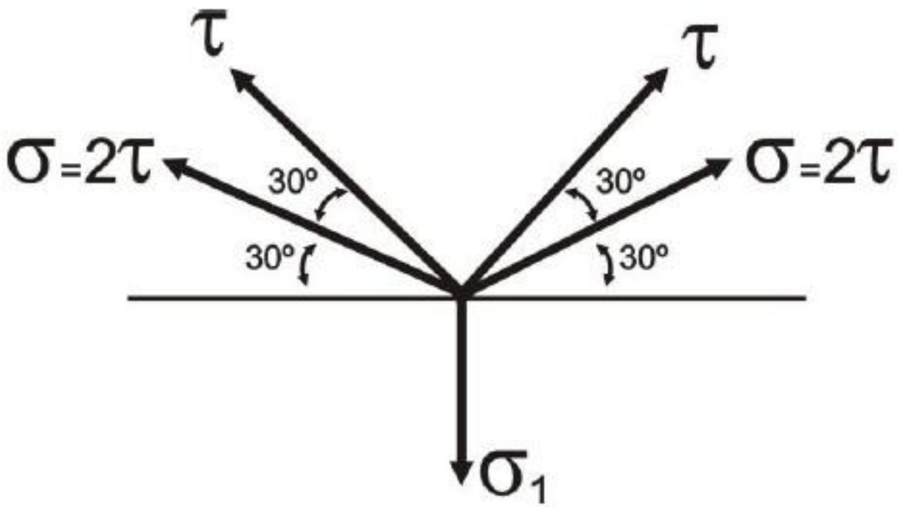


Solución:

Analizamos el equilibrio en AC, proyectando todos los esfuerzos a un sistema de ejes coordenados y efectuando la suma en el eje vertical.

$$\sigma_1 = (2\tau \text{sen} 30°).2 + (\tau \text{sen} 60°).2 = 3{,}73\tau = 37{,}3\text{MPa}$$

Si proyectamos en el eje horizontal, veremos que el esfuerzo tangencial en dicha arista AC es cero, lo que implica que existe un único esfuerzo normal y, es por ello, que lo denotamos como σ_1.



Como se trata de un estado de esfuerzos plano, esto implica, que existe otro esfuerzo principal σ_2, el cual lo calculamos por la fórmula 2.1, transformada de la siguiente forma:

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\cos 2\alpha$$

$$\sigma_\alpha = \frac{1}{2}\left[(\sigma_1 + \sigma_2)(\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha) + (\sigma_1 - \sigma_2)(\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha)\right]$$

$$\sigma_\alpha = \sigma_1\cos^2\alpha + \sigma_2\text{sen}^2\alpha$$

Por dato del problema, se conocen los esfuerzos en las aristas AB y BC, cuyo ángulo $\alpha = 60^\circ$, entonces trabajamos con una de ellas.

Despejamos σ_2 de la fórmula transformada y obtenemos:

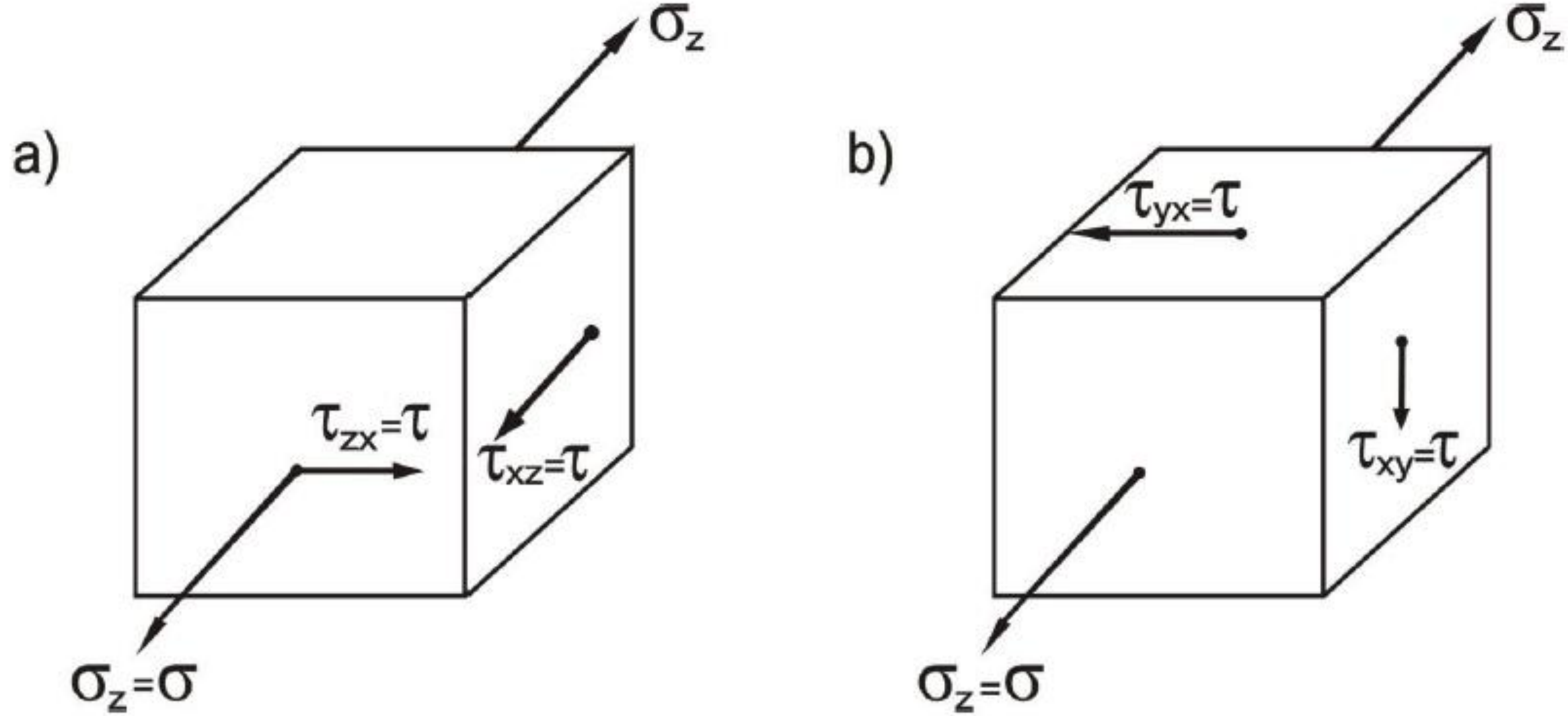
$$\sigma_2 = \frac{\sigma_\alpha - \sigma_1 \cos^2 \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha} = \frac{2\tau - 3{,}73\tau.(0{,}25)}{0{,}75} = 1{,}42\tau = 14{,}2\mathrm{MPa}$$

Luego, comprobamos la condición de resistencia a través de la teoría de los alargamientos relativos máximos.

$$\sigma_{e,II} = \sigma_1 - \mu\sigma_2 = 37{,}3 - 0{,}25.14{,}2 = 33{,}75\mathrm{MPa} < [\sigma]$$

De esta manera, se comprueba que su comportamiento será óptimo, ya que se cumple con la condición de resistencia.

PROBLEMA 2.14 Con ayuda de la teoría de los esfuerzos tangenciales máximos, analizar cuál de los estados de esfuerzos representados en la figura es más peligroso desde el punto de vista de resistencia.



Solución:

Analizamos cada uno de los casos, sabiendo que se cumple la Ley de reciprocidad de esfuerzos tangenciales, esto implica que $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ y $\tau_{yz} = \tau_{zy}$.

CASO "a":

Resolvemos la ecuación cúbica, con la finalidad de calcular los esfuerzos, pero lo expresamos de otra forma, con la finalidad de no confundir los valores dados de σ, quedando la ecuación de la siguiente manera:

$$S^3 - I_1 S^2 + I_2 S - I_3 = 0$$

Donde:

$$I_1 = \sigma_z = \sigma$$

$$I_2 = -\tau_{xz}^2 = -\tau^2$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \tau \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau & 0 & \sigma \end{vmatrix} = 0$$

Reemplazamos valores y obtenemos:

$$S^3 - \sigma S^2 - \tau^2 S = 0$$

$$S(S^2 - \sigma S - \tau^2) = 0$$

Por lo tanto, los esfuerzos principales son:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

$$\sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

En consecuencia:

$$\sigma_{e,III} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

CASO "b":

Efectuamos todo el proceso en forma análoga.

$$I_1 = \sigma_z = \sigma$$

$$I_2 = -\tau_{xy}^2 = -\tau^2$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{vmatrix} = -\sigma\tau^2$$

Reemplazamos valores y obtenemos:

$$S^3 - \sigma S^2 - \tau^2 S + \sigma\tau^2 = 0$$

$$(S - \sigma)(S + \tau)(S - \tau) = 0$$

De donde las raíces serán σ, τ y $-\tau$; motivo por el cual lo ordenamos teniendo en cuenta las dos formas siguientes:

1ra FORMA: Si $\sigma > \tau$ $\Rightarrow$ $\sigma_1 = \sigma$

$$\sigma_2 = \tau$$

$$\sigma_3 = -\tau$$

Luego:

$$\sigma_{e,III} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma + \tau$$

2da FORMA: Si $\sigma < \tau$ $\Rightarrow$ $\sigma_1 = \tau$

$$\sigma_2 = \sigma$$

$$\sigma_3 = -\tau$$

Luego:

$$\sigma_{e,III} = \sigma_1 - \sigma_3 = 2\tau$$

Ahora, analizamos la relación entre σ y τ, asumiendo, para ello, que $\sigma = k\tau$, siendo "k" una constante por determinar e igualamos el caso "a" con el caso "b" (1ra forma), obteniendo:

$$\sqrt{k^2\tau^2 + 4\tau^2} = (k+1)\tau$$

De donde:

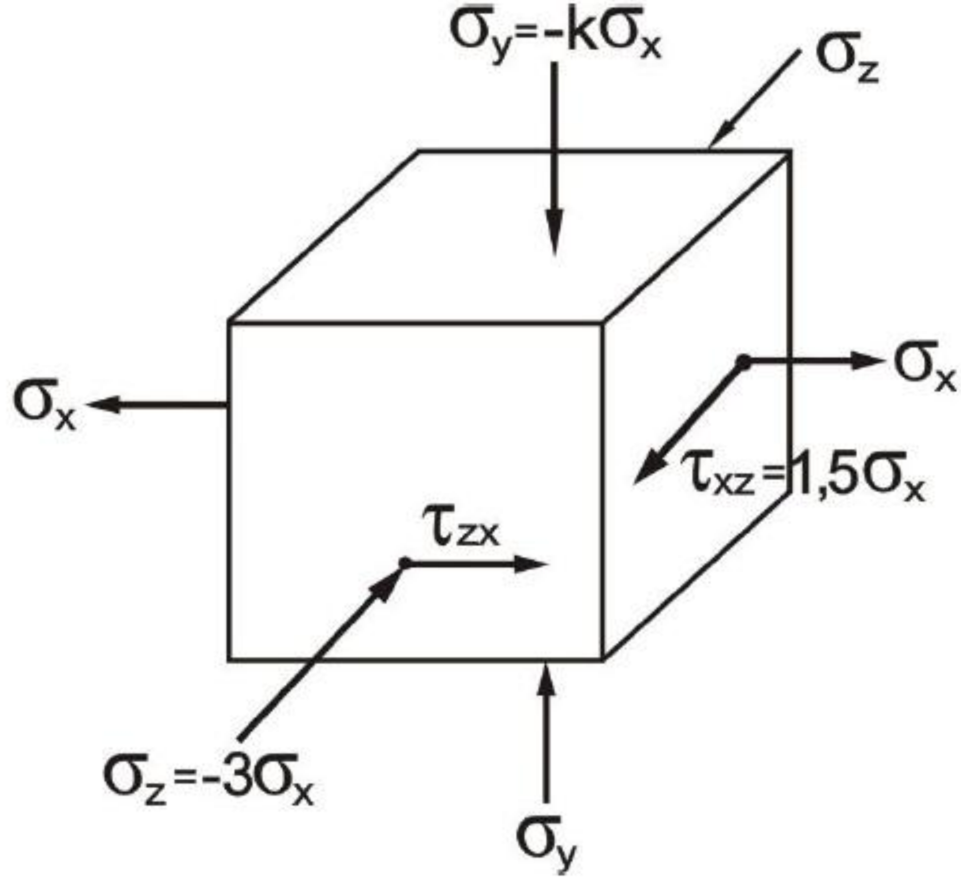
$$k = 1{,}5$$

La 2da forma del caso "b" no cumple con la relación entre σ y τ, ya que el esfuerzo equivalente de la 3ra teoría depende únicamente de τ y no de σ, siendo su valor igual a cero, lo que es ilógico, debido a que por condiciones del problema si existe y es diferente de cero.

Finalmente, llegamos a las siguientes conclusiones:

1. Si $0 < \sigma < 1{,}5\tau$ el caso "a" es el más peligroso, por alcanzar el mayor esfuerzo equivalente
2. Si $\sigma = 1{,}5\tau$ ambos casos son iguales
3. Si $\sigma > 1{,}5\tau$ el caso "b" es el más peligroso, debido a que alcanza el mayor esfuerzo equivalente

PROBLEMA 2.15 La figura muestra el estado de esfuerzos en el punto más peligroso de una pieza fabricada de material frágil. El límite de resistencia mecánica del material en compresión es dos veces mayor que en tracción. Determinar cómo varía la resistencia de la pieza, al cambiar el esfuerzo de compresión $\sigma_y = -k\sigma_x$.



Solución:

Resolvemos la ecuación cúbica:

$$S^3 - I_1 S^2 + I_2 S - I_3 = 0$$

Donde:

$$I_1 = \sigma_x - k\sigma_x - 3\sigma_x = -(2+k)\sigma_x$$

$$I_2 = \sigma_x(-k\sigma_x) + \sigma_x(-3\sigma_x) + (-k\sigma_x)(-3\sigma_x) - (1{,}5\sigma_x)^2 = (2k - 5{,}25)\sigma_x^2$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & 0 & 1{,}5\sigma_x \\ 0 & -k\sigma_x & 0 \\ 1{,}5\sigma_x & 0 & -3\sigma_x \end{vmatrix} = 5{,}25k\sigma_x^3$$

Reemplazamos valores y obtenemos:

$$S^3 + (2+k)\sigma_x S^2 + (2k - 5{,}25)\sigma_x^2 S - 5{,}25k\sigma_x^3 = 0$$

Luego, las raíces de la ecuación cúbica son:

$$S_1 = 1{,}5\sigma_x$$

$$S_2 = -k\sigma_x$$

$$S_3 = -3{,}5\sigma_x$$

Analizamos los siguientes casos:

1er CASO: Si $0 < k \leq 3{,}5 \quad \Rightarrow \quad \sigma_1 = 1{,}5\sigma_x$

$$\sigma_2 = -k\sigma_x$$

$$\sigma_3 = -3{,}5\sigma_x$$

Luego, aplicamos la teoría de Mohr:

$$\sigma_{e,V} = \sigma_1 - \frac{[\sigma]_{tr}}{[\sigma]_{comp}}\sigma_3 = 1{,}5\sigma_x - 0{,}5.(-3{,}5\sigma_x) = 3{,}25\sigma_x$$

Esto quiere decir, que la resistencia para este caso es constante.

2do CASO: Si $k > 3{,}5 \quad \Rightarrow \quad \sigma_1 = 1{,}5\sigma_x$

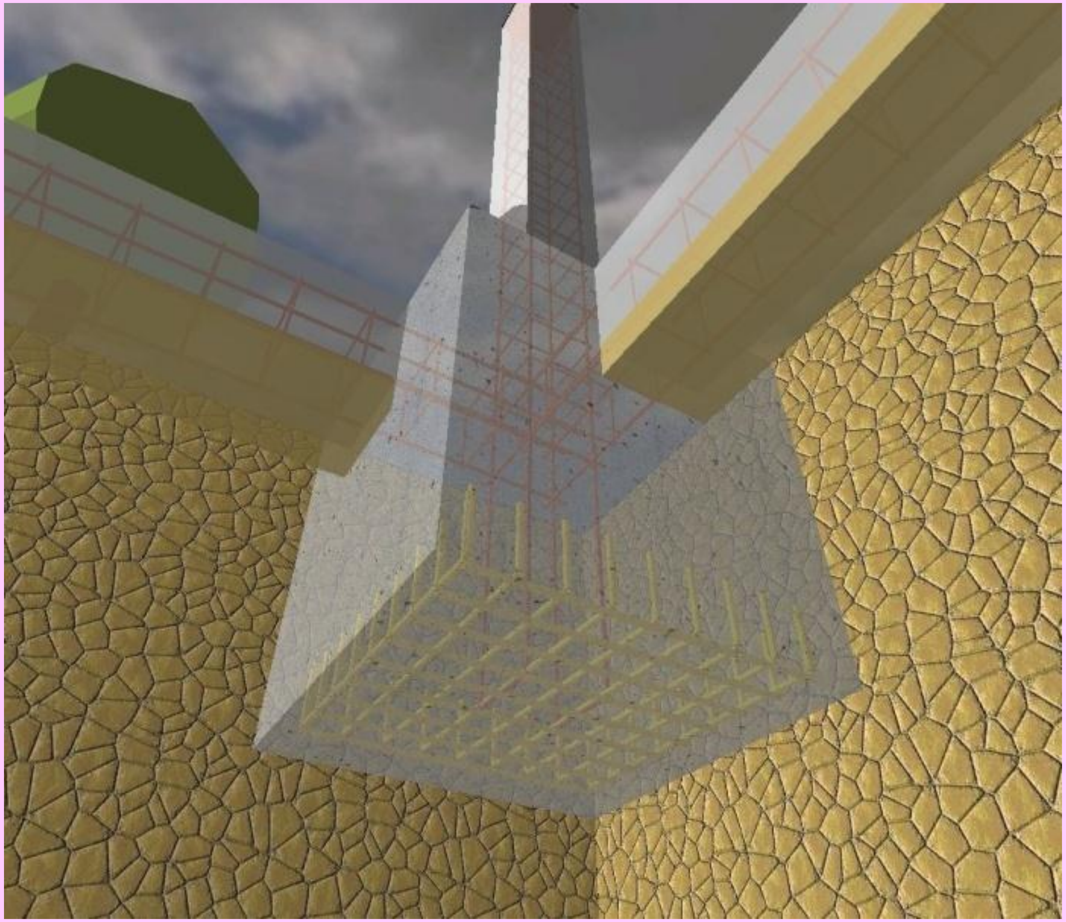
$$\sigma_2 = -3{,}5\sigma_x$$

$$\sigma_3 = -k\sigma_x$$

Luego:

$$\sigma_{e,V} = \sigma_1 - \frac{[\sigma]_{tr}}{[\sigma]_{comp}}\sigma_3 = 1{,}5\sigma_x - 0{,}5.(-k\sigma_x) = \left(\frac{3+k}{2}\right)\sigma_x$$

La resistencia depende de la constante "k" y es mayor que para el caso "a" en una relación $\dfrac{3+k}{6{,}5}$



¡MUCHAS GRACIAS!

genner_vc@hotmail.com