

RESISTENCIA DE MATERIALES

Dr. Genner Villarreal Castro

PREMIO NACIONAL ANR 2006, 2007, 2008

Lima – Perú

2010

La Resistencia de Materiales, es una ciencia sobre los métodos de cálculo a la resistencia, la rigidez y la estabilidad de los elementos estructurales. Se entiende por *resistencia* a la capacidad de oponerse a la rotura, *rigidez* a la capacidad de oponerse a la deformación y *estabilidad* a la capacidad de mantener su condición original de equilibrio.

Por lo general, los textos base de Resistencia de Materiales, son muy voluminosos y, principalmente, se centran en la descripción teórica, lo cual dificulta el proceso de aprendizaje a través de trabajos domiciliarios e investigación, conducentes a un mejor dominio de la materia.

El presente libro nació, después de comprobar las grandes dificultades mostradas por los alumnos en la realización de sus trabajos domiciliarios.

Es por ello, que tomé el reto de escribir un libro, que haga más didáctico el proceso de estudio individual, describiendo, para ello, la teoría en forma sucinta, seria y con el rigor científico, resolviendo en forma detallada 155 problemas tipo, propiciando de manera más amena la convivencia con la Resistencia de Materiales.

En el presente libro, se tratan temas que en la mayoría de programas de las universidades se analizan y que son muy importantes en la formación profesional de los ingenieros civiles.

Como base se tomó la experiencia adquirida en el dictado de los cursos de Mecánica de Materiales en la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas y Resistencia de Materiales en la Universidad de San Martín de Porres y Universidad Privada Antenor Orrego.

En mi modesta opinión, el presente libro es único en su género, tanto en la forma de su descripción teórica, como en la forma de resolución de problemas; así como en su contenido, que no es una repetición de otros textos, editados anteriormente.

El presente libro consta de 10 capítulos y bibliografía.

En el primer capítulo se analizan estructuras determinadas e indeterminadas, sometidas a tracción y compresión, efectos de temperatura y errores de fabricación o montaje estructural.

En el segundo capítulo se estudian los esfuerzos en los estados lineal, plano y espacial; así como la aplicación de la Ley de Hooke generalizada y las teorías o criterios de resistencia como forma de comprobación de destrucción de los materiales.

En el tercer capítulo se analiza el efecto de torsión para estructuras determinadas e indeterminadas de sección circular y no circular; así como resortes helicoidales de paso pequeño.

En el cuarto capítulo se analiza la flexión de vigas determinadas, calculando los esfuerzos normal y tangencial para vigas de uno y dos materiales, como es el caso de vigas de madera reforzadas con planchas de acero y vigas de concreto armado.

En el quinto capítulo se calcula la pendiente y deflexión para vigas determinadas e indeterminadas por el método de la doble integración, método de los parámetros iniciales, método del área de momentos y método de la viga conjugada.

En el sexto capítulo se estudian los métodos energéticos del trabajo virtual y teoremas de Castigliano, resolviendo armaduras, vigas, pórticos y arcos.

En el séptimo capítulo se resuelven estructuras indeterminadas por la ecuación de los tres momentos para vigas continuas y método de las fuerzas para vigas continuas, pórticos y armaduras.

En el octavo capítulo se analizan los efectos de flexión desviada; flexión y carga axial; carga axial excéntrica; flexión, torsión y carga axial, comprobando la resistencia de los elementos estructurales sometidos a los efectos combinados.

En el noveno capítulo se analiza la estabilidad de barras, sometidas a flexión longitudinal y el efecto combinado de flexión longitudinal y transversal.

En el décimo capítulo se calculan los esfuerzos y deformaciones para estructuras sometidas a las cargas dinámicas de impacto.

El presente texto está dirigido a estudiantes de ingeniería civil y docentes que imparten los cursos de Resistencia de Materiales; así como a ingenieros civiles, postgraduandos e investigadores en el área de estructuras.

Este libro se lo dedico a mis alumnos de Mecánica de Materiales de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas y Resistencia de Materiales de la Universidad de San Martín de Porres y Universidad Privada Antenor Orrego; quienes con sus consultas me motivaron a escribir el presente libro y con su energía renovada me permitieron culminar con éxito este trabajo.

De manera muy especial, dedico el presente libro a mi cuñada Susana, por haber sido un digno ejemplo de lucha diaria por alcanzar los ideales familiares y desde lo alto, le pido siempre me guíe por el camino del éxito, para seguir aportando al desarrollo integral de la sociedad.

Ph.D. Genner Villarreal Castro
genner_vc@rambler.ru

Lima, Agosto del 2010

CAPITULO 1

TRACCION Y COMPRESION

1.1 DEFINICIONES Y DEPENDENCIAS PRINCIPALES

En la figura 1.1 se muestra un caso sencillo de tracción y en la figura 1.2 el caso de compresión. En tracción y compresión, las fuerzas internas son elásticas y surgen en las secciones transversales de las barras. Las fuerzas internas son conocidas como *fuerzas axiales o normales* y se los denota por N_x o N .

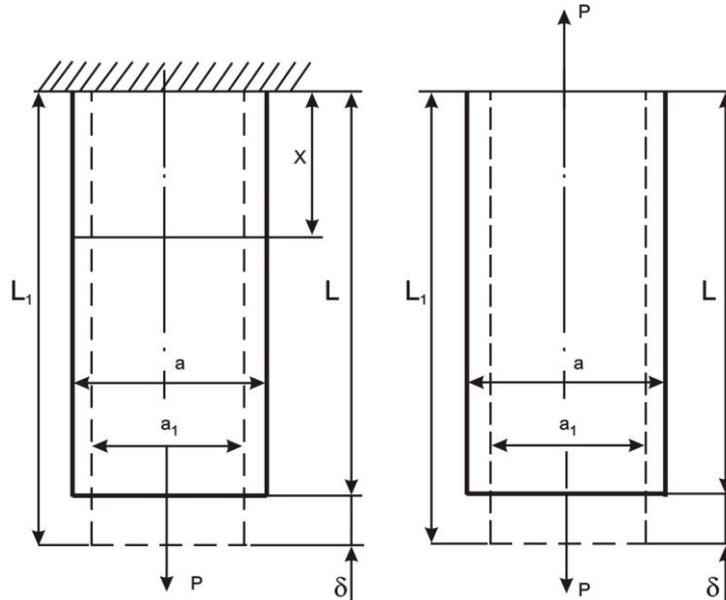


Fig. 1.1

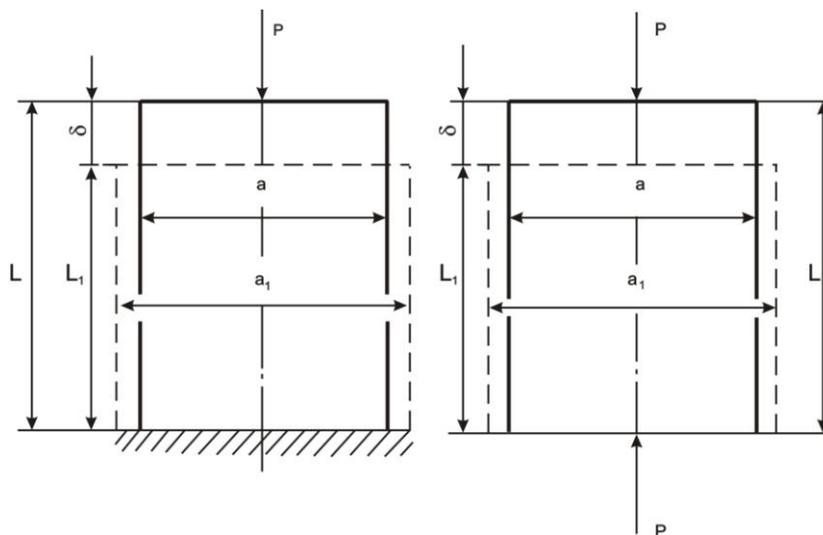


Fig. 1.2

La fuerza axial N_x se determina por medio del método de las secciones, por la cual numéricamente es igual a la suma algebraica de las proyecciones sobre el eje longitudinal (OX) de las fuerzas externas, ubicadas a un lado del corte (figura 1.3). Se considera que las fuerzas axiales son positivas en tracción y negativas en compresión.

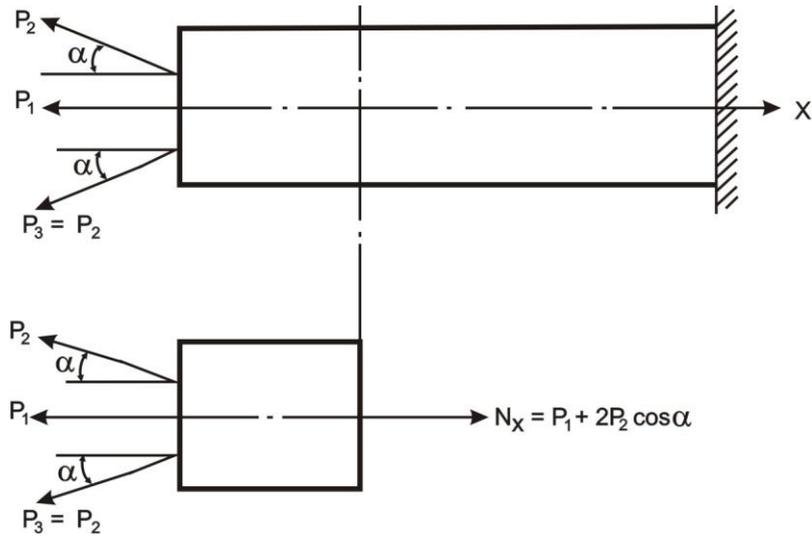


Fig. 1.3

En las secciones transversales de las barras cargadas en tracción o compresión, solo surgen *esfuerzos normales*, los cuales se determinan por la fórmula 1.1.

$$\sigma = \frac{N_x}{A} \quad (1.1)$$

Donde:

A - área de la sección transversal de la barra

Los signos para los esfuerzos normales son los mismos que para N_x y las unidades de medida son kgf/cm^2 , lb/plg^2 o N/m^2 .

Al alargamiento relativo en tracción (o acortamiento relativo en compresión) de la barra, se le conoce como *deformación longitudinal* y se determina por la fórmula 1.2.

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L} \quad (1.2)$$

Donde:

$\delta = (L_1 - L)$ - alargamiento o acortamiento absoluto de la barra

L - longitud inicial de la barra

L_1 - longitud final de la barra

A la deformación relativa de las dimensiones transversales de la barra, se le conoce como *deformación transversal* y se determina por la fórmula 1.3.

$$\varepsilon' = \frac{a_1 - a}{a} \quad (1.3)$$

Donde:

a - ancho inicial de la barra

a_1 - ancho final de la barra

En tracción se considera que $\varepsilon > 0$, en consecuencia $\varepsilon' < 0$ y en compresión sucede lo opuesto.

A las magnitudes ε y ε' también se les conoce como *deformaciones lineales*.

A la relación entre ε' y ε se le conoce como *coeficiente de deformación transversal* o *coeficiente de Poisson* y su valor es adimensional, calculándose por la fórmula 1.4.

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right| \quad (1.4)$$

El coeficiente de Poisson para materiales isótropos es $0 \leq \mu \leq 0,5$.

Entre el esfuerzo normal y la deformación, existe una dependencia lineal, llamada *Ley de Hooke* y se lo determina por la fórmula 1.5.

$$\sigma = E\varepsilon \quad (1.5)$$

Donde:

E - módulo de elasticidad longitudinal o módulo de elasticidad de primer género

La unidad de medida de E es la misma que para el esfuerzo normal.

El alargamiento o acortamiento absoluto, cuando $A = \text{const}$ y $N_x = \text{const}$, se determina por la fórmula 1.6.

$$\delta = \frac{N_x L}{EA} \quad (1.6)$$

Cuando N_x y A varían por la longitud de la barra o una de estas magnitudes, entonces el alargamiento o acortamiento absoluto se determina por la fórmula 1.7.

$$\delta = \int_L \frac{N_x dx}{EA_x} \quad (1.7)$$

Para el caso de barras escalonadas o cuando la fuerza axial es constante en cada tramo analizado, se recomienda utilizar la fórmula 1.8, para determinar el alargamiento o acortamiento absoluto.

$$\delta = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{N_{x,i} L_i}{E_i A_i} \quad (1.8)$$

Cuando A y N_x son constantes, la energía potencial de deformación se determina por la fórmula 1.9.

$$U = \frac{N_x^2 L}{2EA} \quad (1.9)$$

En el caso, que N_x y A varíen a lo largo de la barra, entonces la energía potencial de deformación se determinará por la fórmula 1.10.

$$U = \int_L \frac{N_x^2 dx}{2EA_x} \quad (1.10)$$

Para el caso de barras escalonadas o cuando la fuerza axial es constante en cada tramo analizado, se recomienda utilizar la fórmula 1.11, para determinar la energía potencial de deformación.

$$U = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{N_{x,i}^2 L_i}{2E_i A_i} \quad (1.11)$$

La condición de resistencia es:

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{N_{\text{máx}}}{A} \leq [\sigma] \quad (1.12)$$

Donde:

$\sigma_{\text{máx}}$ - esfuerzo normal máximo en la sección más peligrosa

$N_{\text{máx}}$ - fuerza axial máxima en la sección más peligrosa

A - área de la sección transversal más peligrosa

$[\sigma]$ - esfuerzo normal permisible o admisible

Cuando se trata de barras escalonadas, se recomienda analizar cada tramo, ya que el esfuerzo normal máximo puede surgir donde la fuerza axial no es máxima, pero el área la menor.

Para determinar la fuerza axial permisible $[N]$ o el área mínima requerida $A_{\text{mín}}$, se obtienen despejando dichos valores de la fórmula 1.12.

1.2 ESTRUCTURAS ESTATICAMENTE DETERMINADAS

PROBLEMA 1.1 Una varilla de acero de 100cm de longitud y 5mm de diámetro está sometida a tracción y se mide que su alargamiento es 0,3mm y el incremento de volumen $\Delta V = 2,28\text{mm}^3$.

Determinar el coeficiente de Poisson μ .

Solución:

Se sabe que para barras prismáticas se cumple:

$$\delta = \frac{N_x L}{EA} = \frac{PL}{EA}$$

Donde:

P - carga de tracción a la que está sometida la varilla

Reemplazamos valores y obtenemos:

$$\frac{P \cdot 1}{E \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 5^2 \cdot 10^{-6}} = 0,3 \cdot 10^{-3}$$

De donde:

$$\frac{P}{E} = 5,89 \cdot 10^{-9}$$

Luego, aplicamos la fórmula de variación de volumen:

$$\Delta V = V_o \frac{\sigma}{E} (1 - 2\mu)$$

Donde:

V_o - volumen inicial

Reemplazamos valores:

$$2,28 \cdot 10^{-9} = A \cdot L \cdot \frac{P}{EA} (1 - 2\mu)$$

$$2,28 \cdot 10^{-9} = 1,5,89 \cdot 10^{-9} \cdot (1 - 2\mu)$$

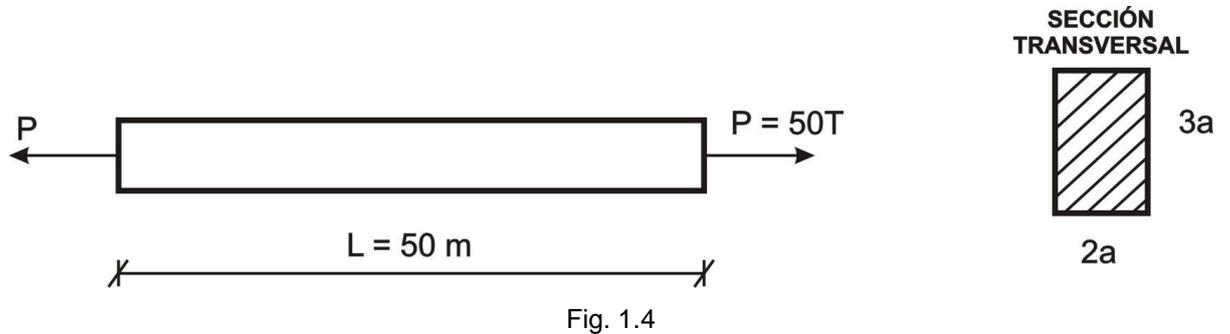
De donde:

$$\mu = 0,306$$

PROBLEMA 1.2 Se diseñará un tirante de acero para resistir una fuerza de tracción de 50 toneladas, siendo la longitud del tirante 50 metros y la sección transversal rectangular con proporción de lados en relación 2/3. Considerar que el esfuerzo de fluencia del acero es $\sigma_y = 4200 \text{ kgf / cm}^2$, el factor de seguridad $n = 2$, el módulo de elasticidad $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kgf / cm}^2$ y el coeficiente de Poisson $\mu = 0,25$. Determinar las deformaciones longitudinal y transversal.

Solución:

Esquemizamos al tirante sometido a la fuerza de tracción y su sección transversal.



Se sabe que:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_y}{n} = \frac{4200}{2} = 2100 \text{ kgf / cm}^2$$

Como, por condición de resistencia se debe de cumplir que:

$$\sigma \leq [\sigma]$$

$$\frac{50 \cdot 10^3}{6a^2} \leq 2100$$

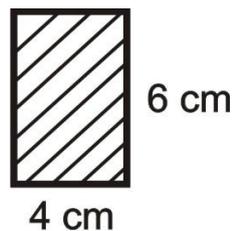
De donde.

$$a \geq 1,99 \text{ cm}$$

Asumimos:

$$a = 2 \text{ cm}$$

En consecuencia, la sección transversal será:



Calculamos el alargamiento:

$$\delta = \frac{PL}{EA} = \frac{50 \cdot 10^3 \cdot 50 \cdot 10^2}{2,1 \cdot 10^6 \cdot 24} = 4,96 \text{ cm}$$

La deformación longitudinal será

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L} = \frac{4,96}{50 \cdot 10^2} = 9,92 \cdot 10^{-4}$$

La deformación transversal lo obtenemos a través de Poisson:

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right|$$

$$|\varepsilon'| = \mu |\varepsilon| = 0,25 \cdot 9,92 \cdot 10^{-4} = 2,48 \cdot 10^{-4}$$

PROBLEMA 1.3 Se tiene la siguiente estructura, cuyo cimientó y sobrecimiento está construido con concreto ciclópeo, el muro de albañilería con ladrillo sólido macizo y la viga de concreto armado. Sabiendo que el peso de la estructura es de 9142kgf, determinar el radio "r" del agujero circular y la capacidad portante del terreno.

MATERIAL	PESO ESPECIFICO
Concreto ciclópeo	2300 kgf/m ³
Muro de albañilería sólido – macizo	1800 kgf/m ³
Concreto armado	2400 kgf/m ³

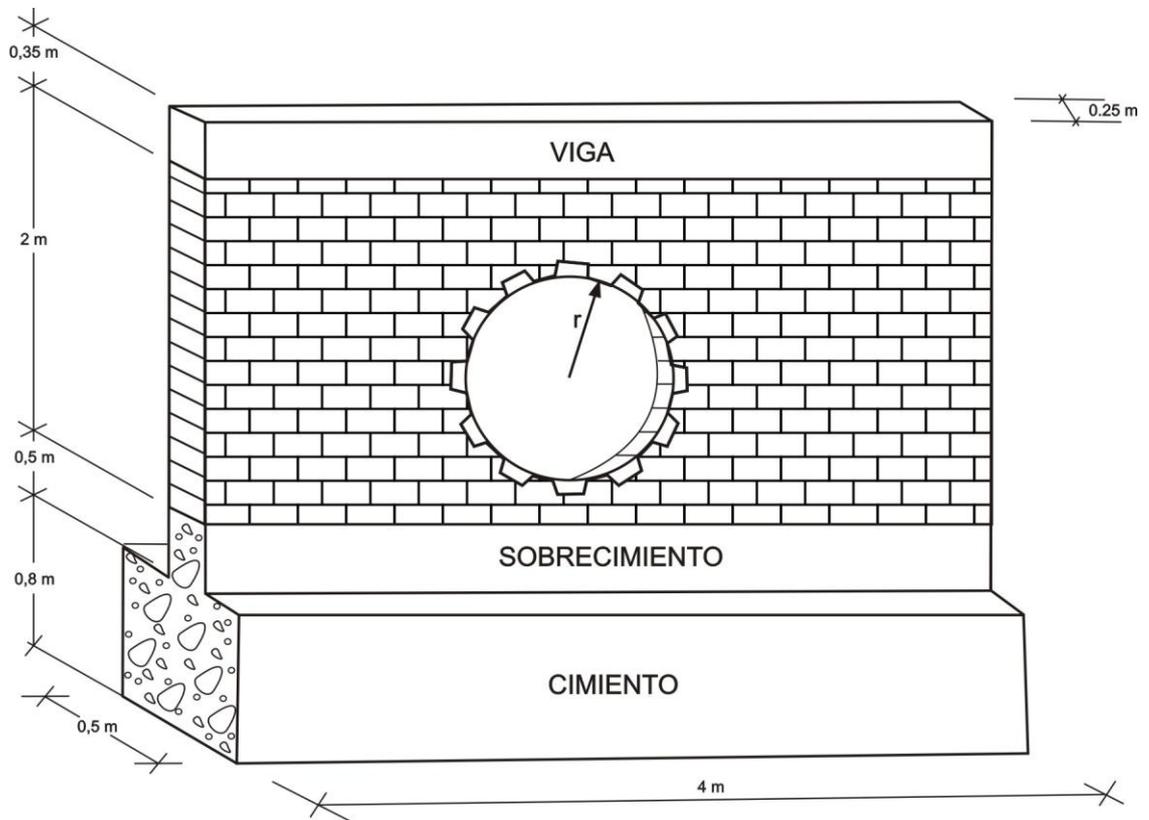


Fig. 1.6

Solución:

Calculamos los pesos de cada parte de la estructura, conocido como metrado de cargas. En este caso se trata de la carga muerta, es decir, el peso propio de la estructura.

$$P_{\text{cimiento}} = \gamma_c \cdot A_{\text{cimiento}} \cdot h_{\text{cimiento}} = 2300 \cdot 0,5 \cdot 4 \cdot 0,8 = 3680 \text{kgf}$$

$$P_{\text{sobrecimiento}} = 2300 \cdot 0,5 \cdot 4 \cdot 0,25 = 1150 \text{kgf}$$

$$P_{\text{muro}} = 1800 \cdot 0,25 \cdot (4,2 - \pi \cdot r^2) = 450 \cdot (8 - \pi \cdot r^2) \text{kgf}$$

$$P_{\text{viga}} = 2400 \cdot 0,25 \cdot 0,35 \cdot 4 = 840 \text{kgf}$$

Sumamos todos los pesos y obtenemos:

$$3680 + 1150 + 450 \cdot (8 - \pi \cdot r^2) + 840 = 9142$$

$$r = 0,3 \text{m}$$

Ahora, calculamos la capacidad portante del terreno, que viene a ser la resistencia mínima del suelo:

$$q_a = \frac{P}{A_{\text{contacto}}} = \frac{9142}{4 \cdot 0,5} = 4571 \text{kgf} / \text{m}^2 = 0,457 \text{kgf} / \text{cm}^2 \text{ (SUELO FLEXIBLE)}$$

PROBLEMA 1.4 Graficar los diagramas de fuerza axial o normal, esfuerzo normal y determinar el acortamiento de la barra mostrada, si $E = 2 \cdot 10^5 \text{MPa}$ y $A = 2 \text{cm}^2$.

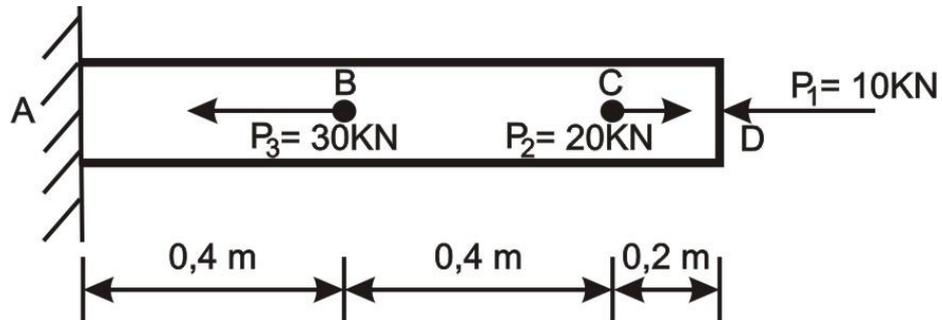


Fig. 1.7

Solución:

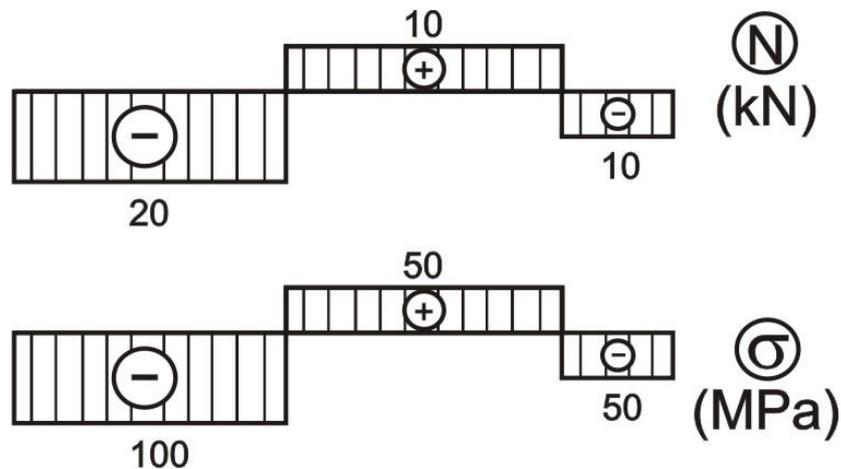


Fig. 1.8

Previamente graficamos el diagrama de fuerza axial o normal y determinamos los esfuerzos para cada tramo de la barra.

$$\sigma_{AB} = \frac{N_{AB}}{A_{AB}} = -\frac{20 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{-4}} = -100 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{BC} = \frac{N_{BC}}{A_{BC}} = \frac{10 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{-4}} = 50 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{CD} = \frac{N_{CD}}{A_{CD}} = -\frac{10 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{-4}} = -50 \text{ MPa}$$

Luego, calculamos el acortamiento de la barra como una sumatoria, ya que las fuerzas axiales varían a lo largo de la misma.

$$\delta = \sum_{i=1}^{i=3} \frac{N_i L_i}{EA} = -\frac{10 \cdot 10^3 \cdot 0,2}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^{-4}} + \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 0,4}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 10^{-4}} - \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 0,4}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 10^{-4}} = -1,5 \cdot 10^{-4} \text{ m} = -0,15 \text{ mm}$$

El signo (-) corrobora que se trata de un acortamiento total de la barra.

PROBLEMA 1.5 Graficar los diagramas de fuerza axial o normal, esfuerzo normal y determinar el alargamiento total. Considerar $E_{al} = 0,7 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, $E_c = 10^5 \text{ MPa}$, $E_a = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$.

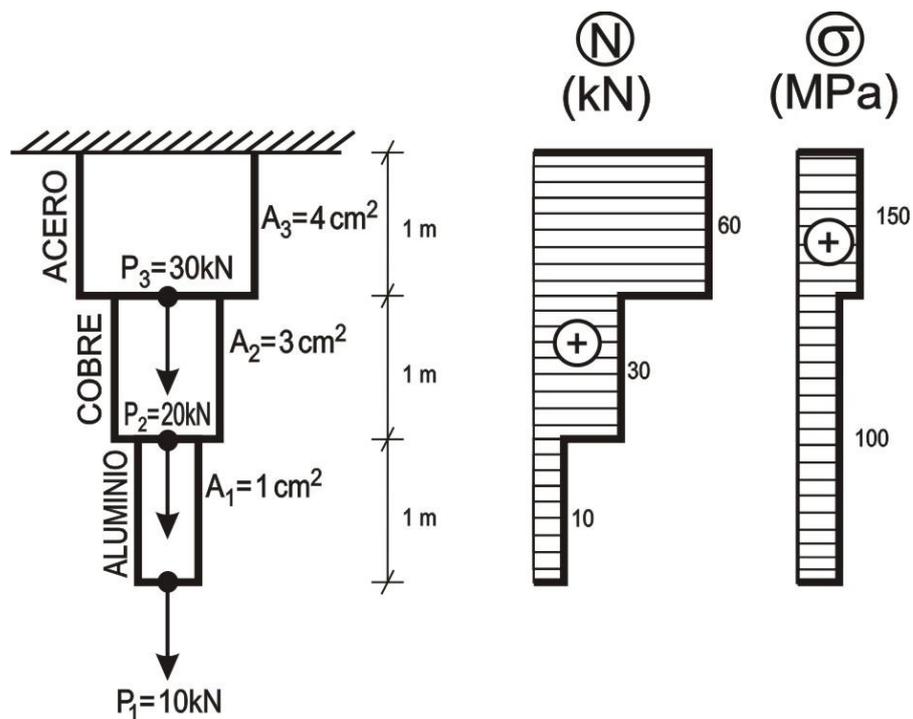


Fig. 1.9

Solución:

Graficamos el diagrama de fuerza axial o normal y determinamos los esfuerzos en cada parte de la barra escalonada, por ser de áreas diferentes.

$$\sigma_{al} = \frac{10 \cdot 10^3}{10^{-4}} = 100 \text{ MPa}$$

$$\sigma_c = \frac{30 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^{-4}} = 100 \text{ MPa}$$

$$\sigma_a = \frac{60 \cdot 10^3}{4 \cdot 10^{-4}} = 150 \text{MPa}$$

Luego, determinamos el alargamiento de la barra escalonada, analizando cada material por separado, en virtud de tener diferentes fuerzas axiales y material.

$$\delta = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 1}{0,7 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 10^{-4}} + \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 1}{10^5 \cdot 10^6 \cdot 3 \cdot 10^{-4}} + \frac{60 \cdot 10^3 \cdot 1}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 4 \cdot 10^{-4}} = 3,178 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 3,178 \text{ mm}$$

PROBLEMA 1.6 El cable de acero AB tiene un área $A = 5 \text{ cm}^2$ y sostiene a la viga CD. Determinar el esfuerzo normal en el cable, así como su alargamiento y graficar el diagrama de fuerza axial para la viga CD. Considerar $E = 2 \cdot 10^6 \text{ kgf / cm}^2$.

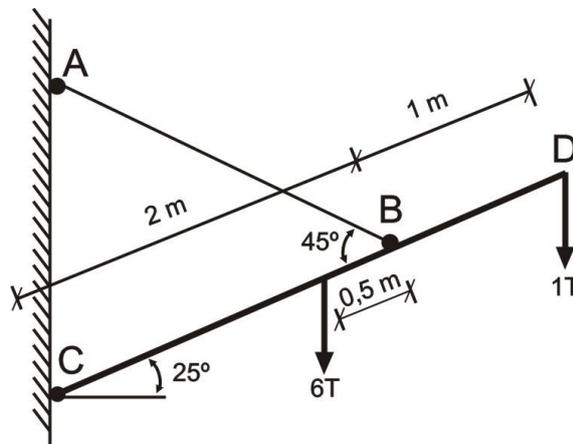


Fig. 1.10

Solución:

Hacemos un corte en el cable AB y determinamos el equilibrio en la viga CD.

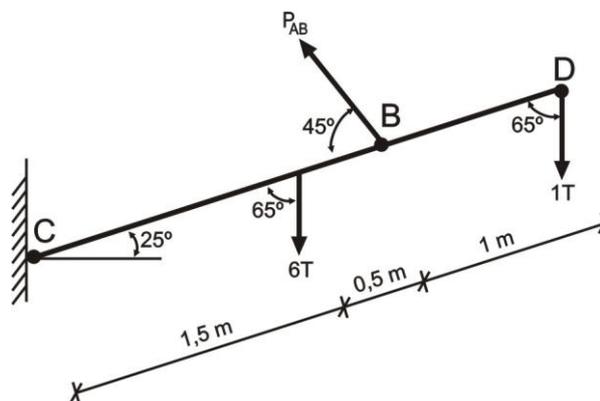


Fig. 1.11

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow (6 \cdot \text{sen} 65^\circ)(1,5) + (1 \cdot \text{sen} 65^\circ)(3) - (P_{AB} \text{sen} 45^\circ)(2) = 0$$

De donde:

$$P_{AB} = 7,69T \text{ (TRACCION)}$$

Luego, determinamos el esfuerzo en el cable:

$$\sigma_{AB} = \frac{7,69 \cdot 10^3}{5} = 1538 \text{ kgf / cm}^2 \text{ (TRACCION)}$$

Ahora calculamos el alargamiento, para ello, utilizamos la ley de senos para determinar la longitud del cable AB.

$$\frac{L_{AB}}{\text{sen}65^{\circ}} = \frac{2}{\text{sen}70^{\circ}} \quad \Rightarrow \quad L_{AB} = 1,929\text{m}$$

Luego:

$$\delta_{AB} = \frac{7,69 \cdot 10^3 \cdot 1,929 \cdot 100}{2 \cdot 10^6 \cdot 5} = 0,148\text{cm}$$

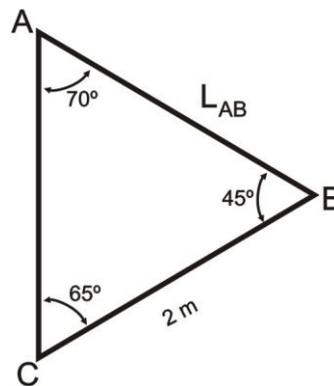


Fig. 1.12

Posteriormente, graficamos el diagrama de fuerza axial o normal en la viga CD.

$$N_{DB} = -1 \cdot \cos 65^{\circ} = -0,422T$$

$$N_{BE} = -1 \cdot \cos 65^{\circ} - 7,69 \cdot \cos 45^{\circ} = -5,86T$$

$$N_{EC} = -1 \cdot \cos 65^{\circ} - 7,69 \cdot \cos 45^{\circ} - 6 \cdot \cos 65^{\circ} = -8,396T$$

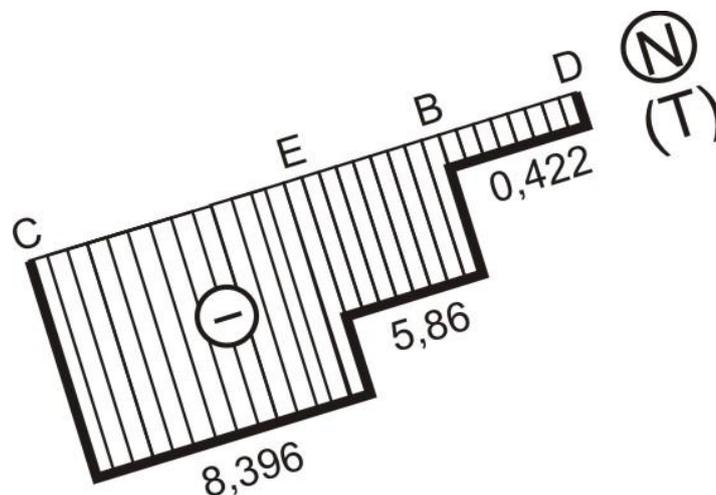


Fig. 1.13

PROBLEMA 1.7 La figura muestra un cartel publicitario rectangular de espesor constante, cuyo peso específico es " γ " y volumen " V ". Dicho cartel está sostenido por tres cables (1), (2) y (3) que tienen la misma área de sección transversal " A " y son del mismo material con módulo de elasticidad " E ".

De las siguientes afirmaciones, diga cuales son verdaderas y justifique su respuesta:

- a) El módulo de tracción en el cable (1) es $\frac{V\gamma}{3}$
- b) El módulo de tracción en el cable (3) es $\frac{2V\gamma \cos \alpha}{3(\cos \beta \sin \alpha + \cos \alpha \sin \beta)}$
- c) La deformación longitudinal en el cable (1) es $\frac{V\gamma L \operatorname{tg} \beta}{6EA}$

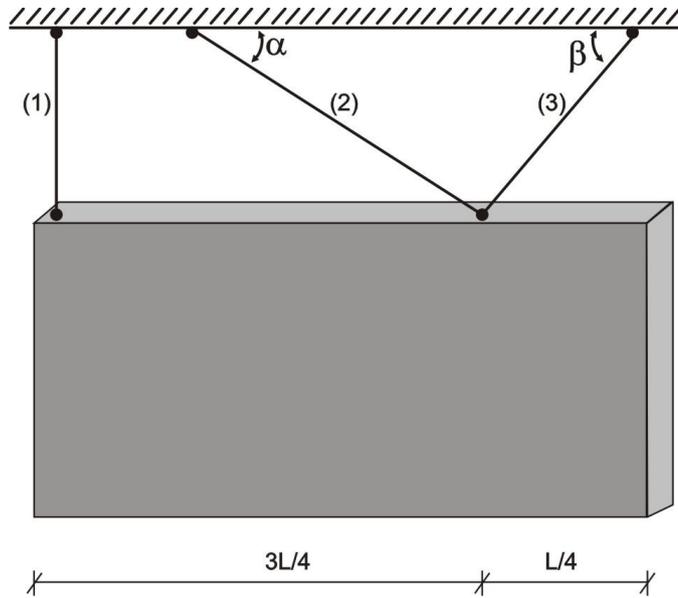


Fig. 1.14

Solución:

Efectuamos un corte y analizamos su equilibrio:

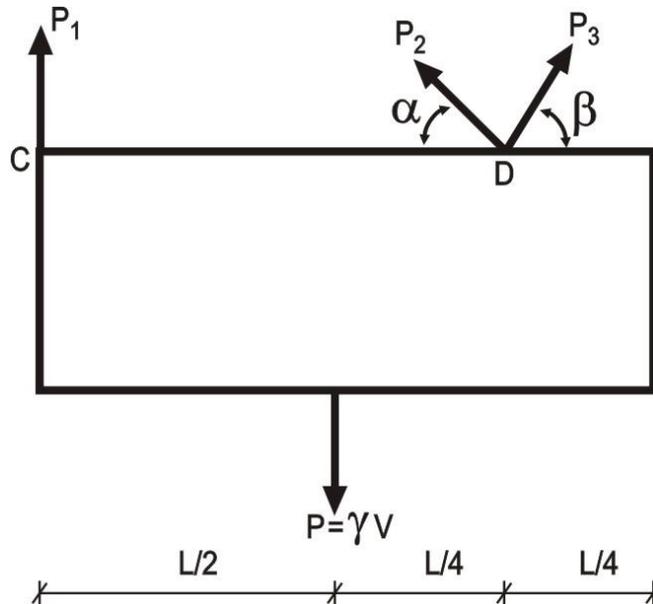


Fig. 1.15

$$a) \sum M_D = 0 \Rightarrow -P_1 \left(\frac{3L}{4} \right) + \gamma V \left(\frac{L}{4} \right) = 0$$

$$P_1 = \frac{V\gamma}{3} \text{ (VERDADERO)}$$

$$b) \sum F_x = 0 \Rightarrow P_3 \cos \beta = P_2 \cos \alpha$$

$$P_2 = P_3 \frac{\cos \beta}{\cos \alpha}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow P_1 + P_2 \sin \alpha + P_3 \sin \beta = V\gamma$$

$$\frac{V\gamma}{3} + \left(P_3 \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \right) \sin \alpha + P_3 \sin \beta = V\gamma$$

$$P_3 = \frac{2V\gamma \cos \alpha}{3(\cos \beta \sin \alpha + \cos \alpha \sin \beta)} \text{ (VERDADERO)}$$

c) Calculamos el alargamiento del cable (1):

$$\delta_1 = \frac{P_1 L_1}{EA} = \frac{\frac{V\gamma}{3} \cdot \frac{L_1 \operatorname{tg} \beta}{4}}{EA} = \frac{V\gamma L_1 \operatorname{tg} \beta}{12EA} \text{ (FALSO)}$$

Siendo:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{L_1}{L/4} \Rightarrow L_1 = \frac{L \operatorname{tg} \beta}{4}$$

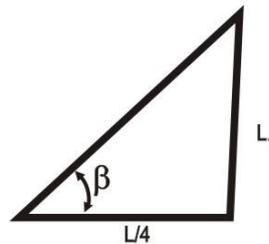


Fig. 1.16

PROBLEMA 1.8 Determinar el alargamiento de la barra, si es de espesor constante $t = 0,4\text{cm}$ y su ancho varía de 2cm en la parte inferior hasta 4cm en la parte superior. Considerar $E = 2 \cdot 10^6 \text{kgf/cm}^2$.

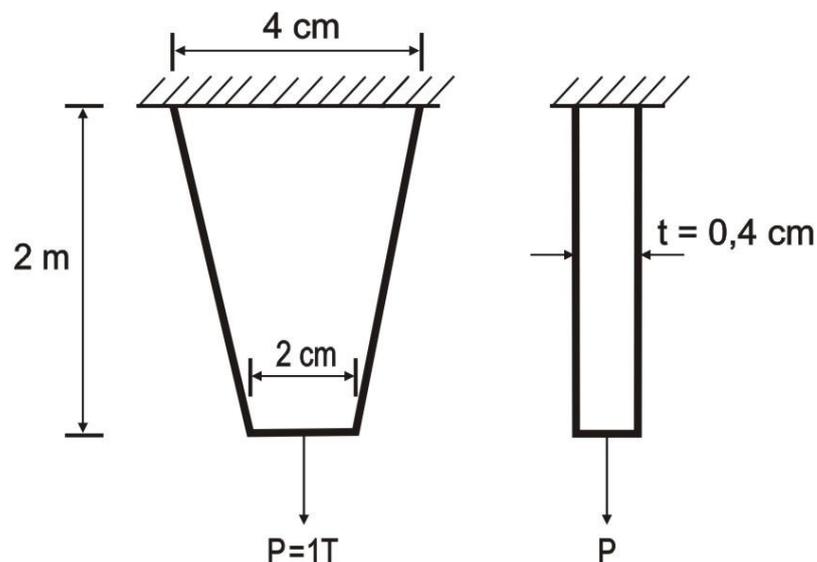


Fig. 1.17

Solución:

A una distancia x del extremo libre, se tendrá:

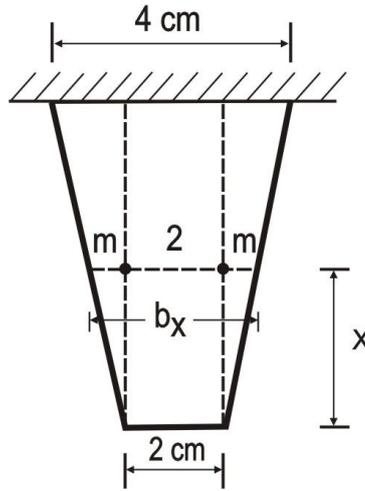


Fig. 1.18

$$b_x = 2 + 2m = 2 + 2\left(\frac{x}{200}\right) = 2 + \frac{x}{100}$$

Siendo:

$$\frac{m}{x} = \frac{1}{200} \quad \Rightarrow \quad m = \frac{x}{200}$$

Luego, su área de sección transversal será:

$$A_x = b_x t = \left(2 + \frac{x}{100}\right) \cdot (0,4) = 0,8 + \frac{x}{250} = 0,8 + 0,004x$$

De esta manera, el alargamiento se obtendrá como una integración:

$$\delta = \int_0^L \frac{N_x dx}{EA_x} = \int_0^{200} \frac{10^3 dx}{2 \cdot 10^6 (0,8 + 0,004x)} = \frac{\ln 2}{8} = 0,0866 \text{ cm} = 0,866 \text{ mm}$$

PROBLEMA 1.9 Determinar el desplazamiento del nudo D, si los módulos de elasticidad del acero y cobre son $E_a = 2 \cdot 10^6 \text{ kgf/cm}^2$, $E_c = 10^6 \text{ kgf/cm}^2$.

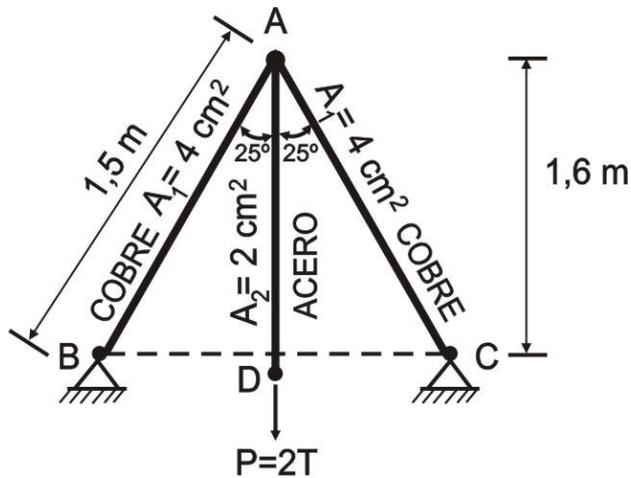


Fig. 1.19

Solución:

Por ser la estructura simétrica, las reacciones en B y C son iguales a 1T.

Analizamos el equilibrio del nudo B de la estructura:

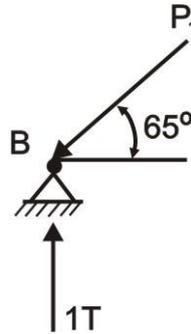


Fig. 1.20

$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad P_1 \text{sen} 65^\circ = 1$$

De donde:

$$P_1 = 1,103T \text{ (COMPRESION)}$$

Ahora, analizamos el diagrama de desplazamientos, sin considerar la barra AD.

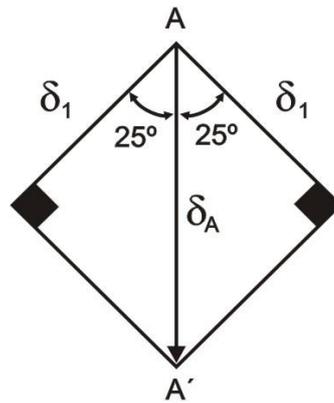


Fig. 1.21

$$\delta_1 = \frac{P_1 L_1}{E_c A_1} = \frac{-1,103 \cdot 10^3 \cdot 1,5 \cdot 100}{10^6 \cdot 4} = -0,0413 \text{cm (ACORTAMIENTO)}$$

De la relación de triángulos, se tendrá:

$$\delta_A \cos 25^\circ = \delta_1$$

$$\delta_A = 0,0455 \text{cm} \downarrow$$

Luego:

$$\delta_D = \delta_A + \delta_2 = 0,0455 + \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 1,6 \cdot 10^2}{2 \cdot 10^6 \cdot 2} = 0,1255 \text{cm} \approx 0,126 \text{cm} \downarrow$$

PROBLEMA 1.10 Una barra uniforme AB de longitud “L” se suspende en una posición horizontal, mediante dos cables verticales fijos a sus extremos. Ambos cables están hechos del mismo material y tienen la misma área de sección transversal, pero las longitudes son L₁ y L₂. Obtenga una fórmula para la distancia “x” (desde el extremo A) al punto sobre la barra donde debe de aplicarse una carga “P”, para que la barra permanezca horizontal.

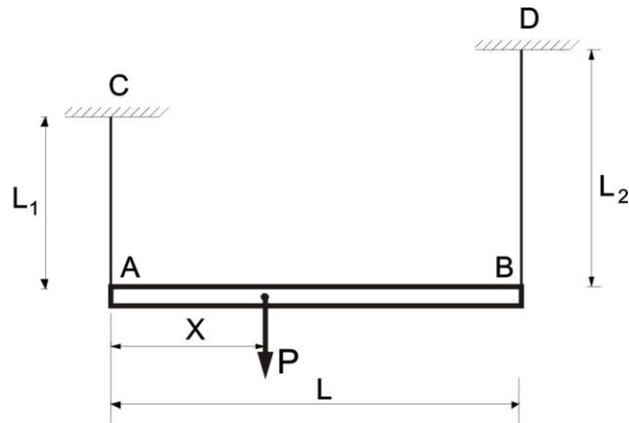


Fig. 1.22

Solución:

Ejecutamos un corte en las barras AC y BD y analizamos su equilibrio:

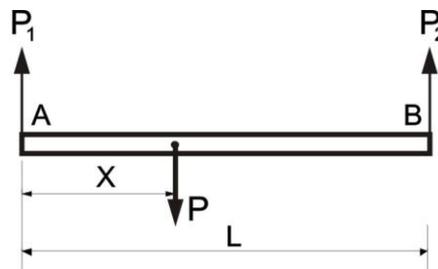


Fig. 1.23

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad P_1 + P_2 = P$$

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad Px = P_2L$$

$$x = \frac{P_2L}{P}$$

Por dato del problema $\delta_{AC} = \delta_{BD}$

De donde:

$$\frac{P_1L_1}{EA} = \frac{P_2L_2}{EA}$$

$$P_1 = \frac{P_2L_2}{L_1}$$

Reemplazamos en la primera ecuación de equilibrio:

$$\frac{P_2L_2}{L_1} + P_2 = P$$

De donde:

$$P_2 = \frac{PL_1}{L_1 + L_2}$$

Luego:

$$x = \frac{LL_1}{L_1 + L_2}$$

PROBLEMA 1.11 Determinar los desplazamientos horizontal y vertical del nudo B del sistema estructural mostrado en la figura, debido a la fuerza $P = 400\text{lb}$, si el miembro AB es una cable de acero ($E_a = 30 \cdot 10^6 \text{psi}$) de 0,125plg de diámetro y el miembro BC es un puntal de madera ($E_m = 1,5 \cdot 10^6 \text{psi}$) de sección transversal cuadrada de 1plg de lado.

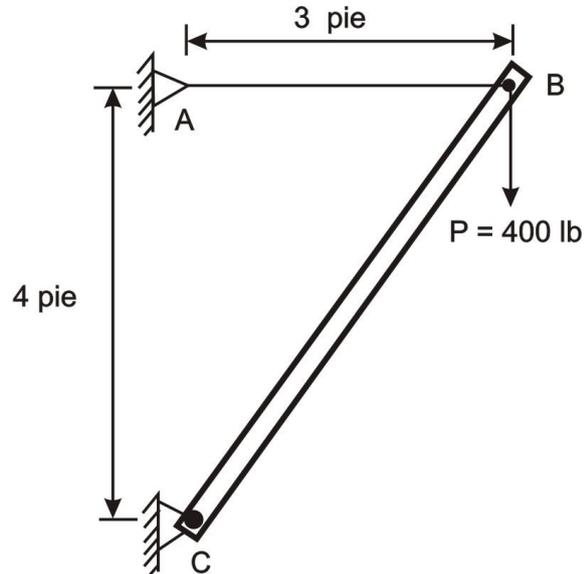


Fig. 1.24

Solución:

Analizamos el equilibrio del nudo B.

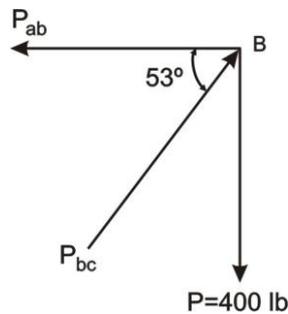


Fig. 1.25

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad P_{bc} \text{sen} 53^\circ = 400$$

$$P_{bc} = 500\text{lb (COMPRESION)}$$

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad P_{ab} = 500 \text{cos} 53^\circ$$

$$P_{ab} = 300\text{lb (TRACCION)}$$

En consecuencia:

$$\delta_{ab} = \frac{P_{ab} L_{ab}}{E_{ab} A_{ab}} = \frac{300 \cdot 3 \cdot 12}{30 \cdot 10^6 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 0,125^2} = 0,0293\text{plg (ALARGAMIENTO)}$$

$$\delta_{bc} = \frac{P_{bc} L_{bc}}{E_{bc} A_{bc}} = \frac{500 \cdot 5 \cdot 12}{1,5 \cdot 10^6 \cdot 1^2} = 0,02\text{plg (ACORTAMIENTO)}$$

Por lo tanto, el diagrama de desplazamiento del nudo B será:

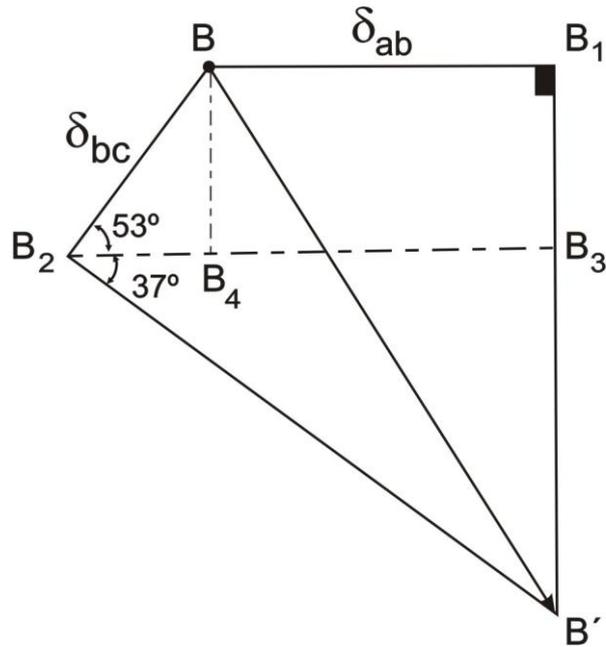


Fig. 1.26

$$\delta_H^B = \delta_{ab} = 0,0293plg \rightarrow$$

$$\delta_V^B = \delta_{bc} \cdot \sin 53^\circ + \frac{\delta_{bc} \cos 53^\circ + \delta_{ab}}{\operatorname{ctg} 37^\circ} = 0,02 \cdot 0,8 + \frac{0,02 \cdot 0,6 + 0,0293}{4/3} = 0,0470plg \downarrow$$

PROBLEMA 1.12 Dos barras AC y BC del mismo material se unen para formar un sistema estructural, como se muestra en la figura. La barra AC tiene una longitud L_1 y área de sección transversal A_1 ; la barra BC tiene una longitud L_2 y área de sección transversal A_2 . Las cargas P_1 y P_2 actúan en el nudo C en las direcciones de los miembros AC y BC, respectivamente. ¿Cuál debe ser la relación P_1/P_2 de las cargas para que el nudo C no presente deflexión vertical?

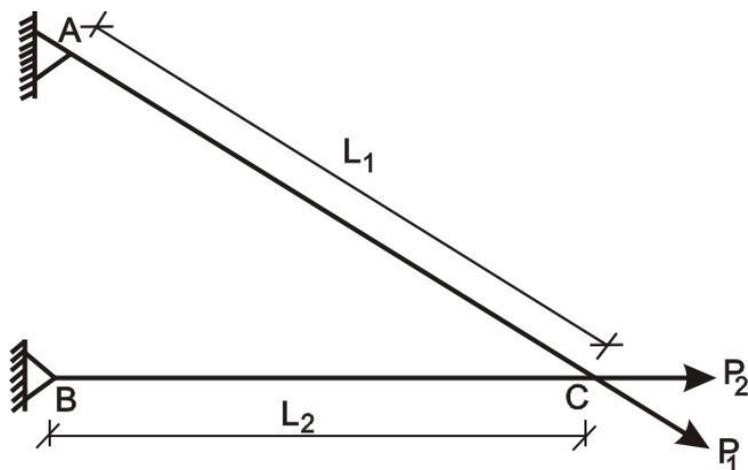


Fig. 1.27

Solución:

Si analizamos el equilibrio del nudo C obtenemos:

$$P_{ac} = P_1 \quad (\text{TRACCION})$$

$$P_{bc} = P_2 \quad (\text{TRACCION})$$

Luego:

$$\delta_{ac} = \frac{P_1 L_1}{EA_1} \quad (\text{ALARGAMIENTO})$$

$$\delta_{bc} = \frac{P_2 L_2}{EA_2} \quad (\text{ALARGAMIENTO})$$

En consecuencia, el diagrama ficticio de desplazamiento será:

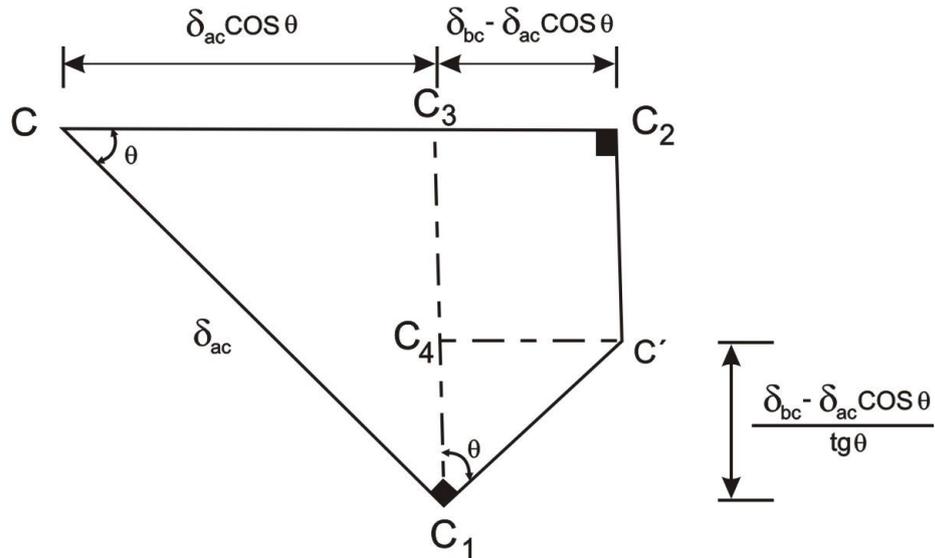


Fig. 1.28

Por dato del problema:

$$\delta_v^c = 0$$

$$\delta_{ac} \operatorname{sen} \theta - \frac{\delta_{bc} - \delta_{ac} \cos \theta}{\operatorname{tg} \theta} = 0$$

$$\delta_{ac} \operatorname{sen} \theta \operatorname{tg} \theta = \delta_{bc} - \delta_{ac} \cos \theta$$

$$\delta_{ac} (\operatorname{sen} \theta \operatorname{tg} \theta + \cos \theta) = \delta_{bc}$$

$$\frac{P_1 L_1}{EA_1} \left(\frac{\sqrt{L_1^2 - L_2^2}}{L_1} \frac{\sqrt{L_1^2 - L_2^2}}{L_2} + \frac{L_2}{L_1} \right) = \frac{P_2 L_2}{EA_2}$$

$$\frac{P_1 L_1}{A_1} \left(\frac{L_1^2 - L_2^2}{L_1 L_2} + \frac{L_2}{L_1} \right) = \frac{P_2 L_2}{A_2}$$

$$\frac{P_1 L_1}{A_1} \left(\frac{L_1^2 - L_2^2 + L_2^2}{L_1 L_2} \right) = \frac{P_2 L_2}{A_2}$$

De donde se obtiene:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{A_1 L_2^2}{A_2 L_1^2}$$

PROBLEMA 1.13 Determinar el espesor de la pared del tubo, si $[\sigma]_{\text{comp}} = 900 \text{ kgf} / \text{cm}^2$.

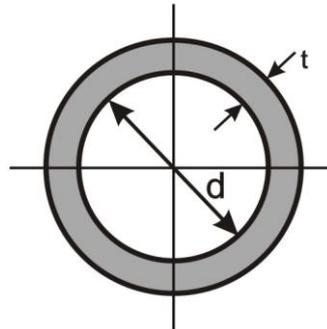
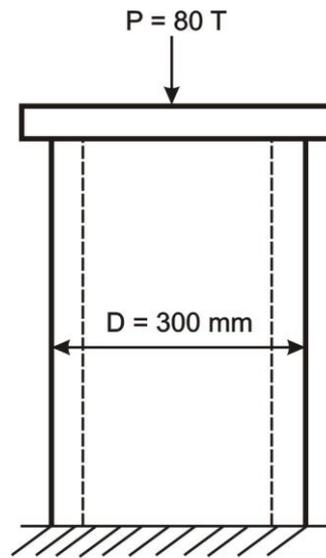


Fig. 1.29

Solución:

Se sabe que:

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma]_{\text{comp}}$$

Reemplazamos valores y obtenemos:

$$\frac{80 \cdot 10^3}{\frac{\pi}{4} [30^2 - d^2]} \leq 900$$

Efectuando cálculo tenemos:

$$d \leq 28,04 \text{ cm}$$

Luego:

$$d_{\text{máx}} = 28,04 \text{ cm}$$

Entonces, el espesor de pared del tubo será:

$$t = \frac{D - d}{2} = \frac{30 - 28,04}{2} = 0,98 \text{ cm}$$

PROBLEMA 1.14 Determinar el diámetro del cable, si el esfuerzo de fluencia es $\sigma_y = 30\text{kgf} / \text{mm}^2$ y el factor de seguridad $n = 2$.

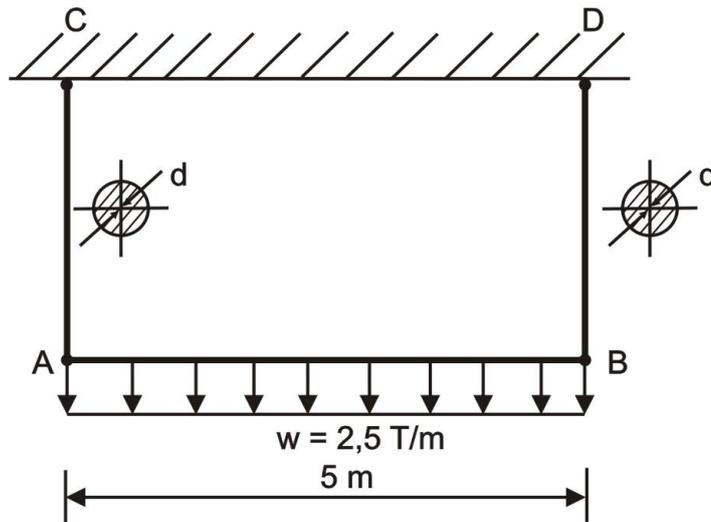


Fig. 1.30

Solución:

Hacemos un corte en ambos cables y analizamos el equilibrio de la parte cortada:

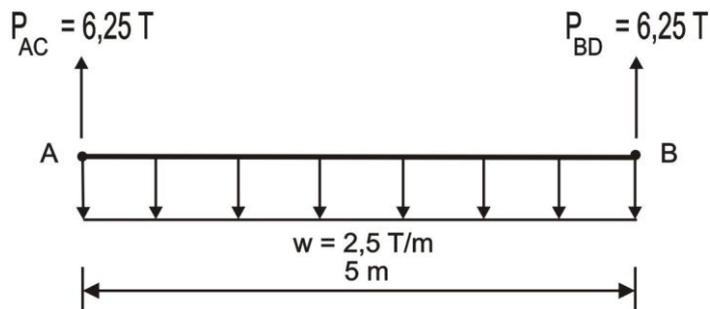


Fig. 1.31

Luego:

$$\sigma_y = 30\text{kgf} / \text{mm}^2 = 3000\text{kgf} / \text{cm}^2$$

Además:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_y}{n} = \frac{3000}{2} = 1500\text{kgf} / \text{cm}^2$$

Entonces, analizamos cada cable:

$$\frac{6,25 \cdot 10^3}{\frac{\pi}{4} d^2} \leq 1500$$

De donde:

$$d \geq 2,303\text{cm}$$

Por lo tanto, el diámetro requerido de cada cable será:

$$d = d_{\min} = 2,303\text{cm}$$

PROBLEMA 1.15 Determinar las dimensiones de las secciones transversales de la estructura mostrada en la figura, si los esfuerzos permisibles para el acero y la madera son $[\sigma]_a = 1400 \text{ kgf/cm}^2$ y $[\sigma]_m = 50 \text{ kgf/cm}^2$.

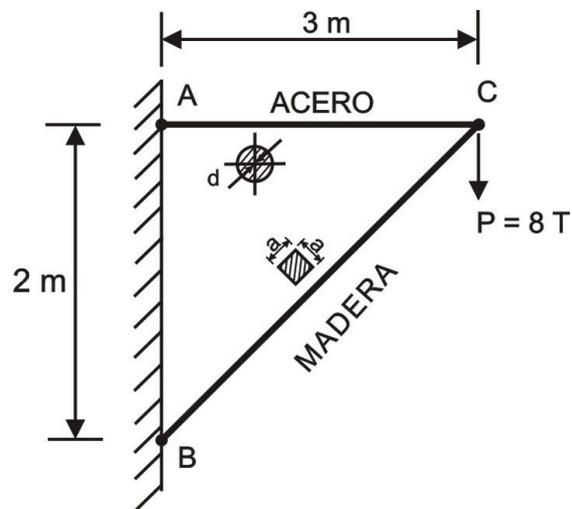


Fig. 1.32

Solución:

Determinamos el valor del ángulo ACB.

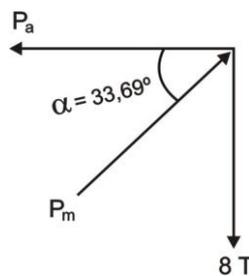


Fig. 1.33

$$\text{tg} \alpha = \frac{2}{3} \Rightarrow \alpha = \arctg\left(\frac{2}{3}\right) = 33,69^\circ$$

Ahora analizamos el equilibrio del nudo C.

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow P_m \cdot \text{sen} 33,69^\circ = 8$$

$$P_m = 14,42 \text{ T (COMPRESION)}$$

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow 14,42 \cdot \text{cos} 33,69^\circ = P_a$$

$$P_a = 12 \text{ T (TRACCION)}$$

Luego, determinamos las secciones para cada barra por separado:

ACERO

$$\frac{12 \cdot 10^3}{\frac{\pi}{4} d^2} \leq 1400 \Rightarrow d \geq 3,3 \text{ cm}$$

Asumimos:

$$d = d_{\text{min}} = 3,3 \text{ cm}$$

MADERA

$$\frac{14,42 \cdot 10^3}{a^2} \leq 50 \Rightarrow a \geq 16,98 \text{cm}$$

Asumimos:

$$a = a_{\min} = 16,98 \text{cm}$$

PROBLEMA 1.16 El cartel publicitario de la figura tiene un peso específico $\gamma = 650 \text{kg/m}^3$, se pide diseñar los cables 1, 2, 3 y calcular sus deformaciones, sabiendo que tienen un módulo de elasticidad $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{kg/cm}^2$, esfuerzo de fluencia $\sigma_y = 4200 \text{kg/cm}^2$. Considerar un factor de seguridad de 1,5 y un espesor del cartel de 45cm.

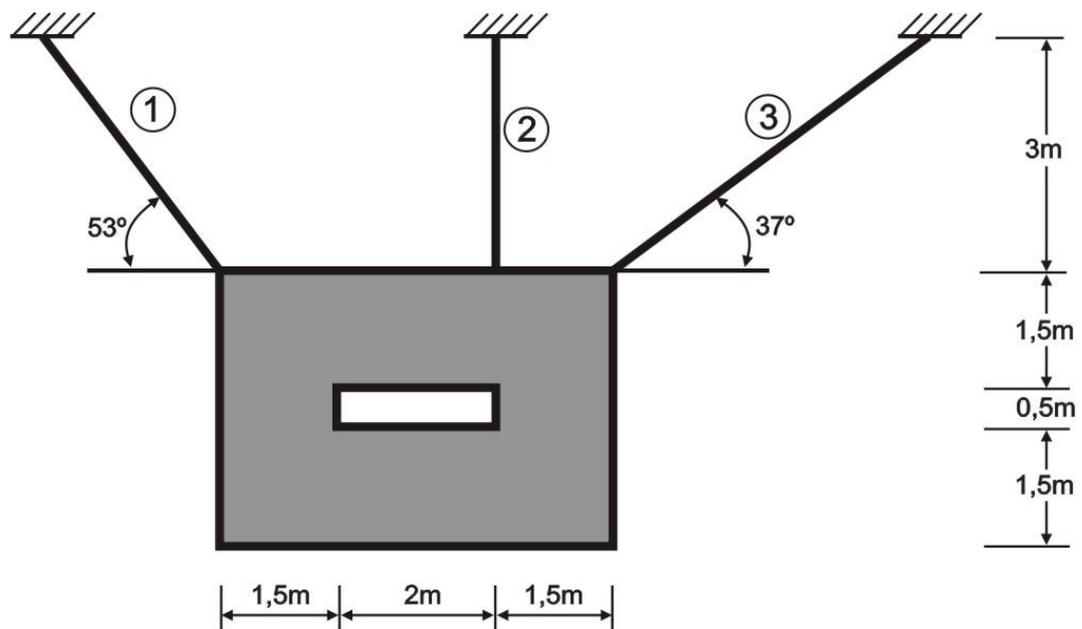


Fig.1.34

Solución:

Calculamos el peso del cartel:

$$P = \gamma V = \gamma A e = 650 \cdot [5 \cdot 3,5 - 2 \cdot 0,5] \cdot 0,45 = 4826,25 \text{kg}$$

Efectuamos un corte en las 3 barras y analizamos el equilibrio:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow P_3 \cos 37^\circ = P_1 \cos 53^\circ$$

$$P_3 = \frac{3P_1}{4} \quad (a)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow P_1 \sin 53^\circ + P_2 + P_3 \sin 37^\circ = 4826,25$$

$$P_1 \left(\frac{4}{5} \right) + P_2 + \left(\frac{3P_1}{4} \right) \left(\frac{3}{5} \right) = 4826,25$$

$$5P_1 + 4P_2 = 19305 \quad (b)$$

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow P_2 \cdot (3,5) + P_3 \cdot \sin 37^\circ \cdot (5) - 4826,25 \cdot (2,5) = 0$$

$$3,5P_2 + \left(\frac{3P_1}{4}\right) \cdot (3) - 12065,625 = 0$$

$$2,25P_1 + 3,5P_2 = 12065,625 \quad (c)$$

Resolvemos (b) y (c), luego, reemplazamos en (a) y obtenemos:

$$P_1 = 2271,18\text{kg}$$

$$P_2 = 1987,28\text{kg}$$

$$P_3 = 1703,38\text{kg}$$

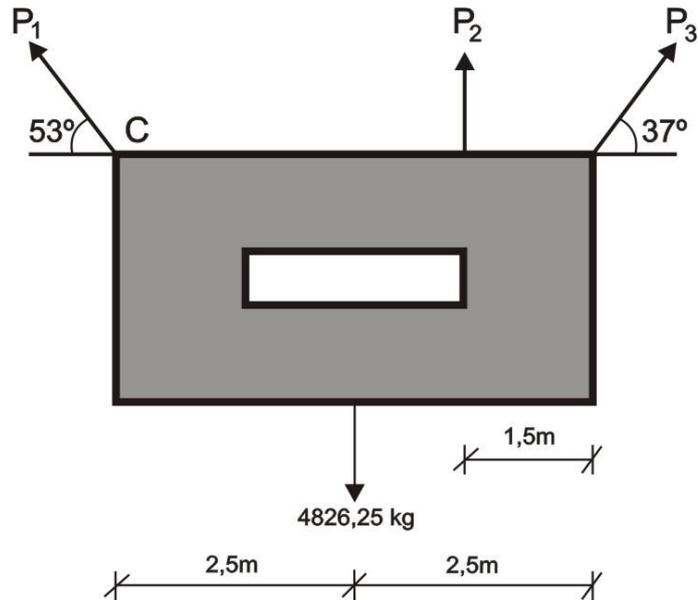


Fig. 1.35

Ahora, calculamos el esfuerzo admisible de las barras:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_y}{n} = \frac{4200}{1,5} = 2800\text{kg/cm}^2$$

Calculamos las áreas de los cables y sus respectivos alargamientos:

CABLE 1:

$$\sigma_1 \leq [\sigma]$$

$$\frac{P_1}{A_1} \leq [\sigma]$$

$$A_1 \geq \frac{P_1}{[\sigma]} = \frac{2271,18}{2800} = 0,81\text{cm}^2$$

Asumimos:

$$A_{1,\text{mín}} = 0,81\text{cm}^2$$

El alargamiento será:

$$\delta_1 = \frac{P_1 L_1}{EA_1} = \frac{2271,18 \cdot 375}{2,1 \cdot 10^6 \cdot 0,81} = 0,50\text{cm} = 5\text{mm}$$

CABLE 2:

$$A_2 \geq \frac{P_2}{[\sigma]} = \frac{1987,28}{2800} = 0,71 \text{cm}^2$$

$$A_{2,\text{mín}} = 0,71 \text{cm}^2$$

$$\delta_2 = \frac{P_2 L_2}{EA_2} = \frac{1987,28 \cdot 300}{2,1 \cdot 10^6 \cdot 0,71} = 0,40 \text{cm} = 4 \text{mm}$$

CABLE 3:

$$A_3 \geq \frac{P_3}{[\sigma]} = \frac{1703,38}{2800} = 0,61 \text{cm}^2$$

$$A_{3,\text{mín}} = 0,61 \text{cm}^2$$

$$\delta_3 = \frac{P_3 L_3}{EA_3} = \frac{1703,38 \cdot 500}{2,1 \cdot 10^6 \cdot 0,61} = 0,66 \text{cm} = 6,6 \text{mm}$$

PROBLEMA 1.17 Determinar los esfuerzos que surgen en las secciones I-I, II-II y III-III de la cimentación mostrada en la figura, si es de sección cuadrada. Considerar $\gamma = 2,4 \text{T/m}^3$. No considere la influencia del suelo alrededor de la cimentación.

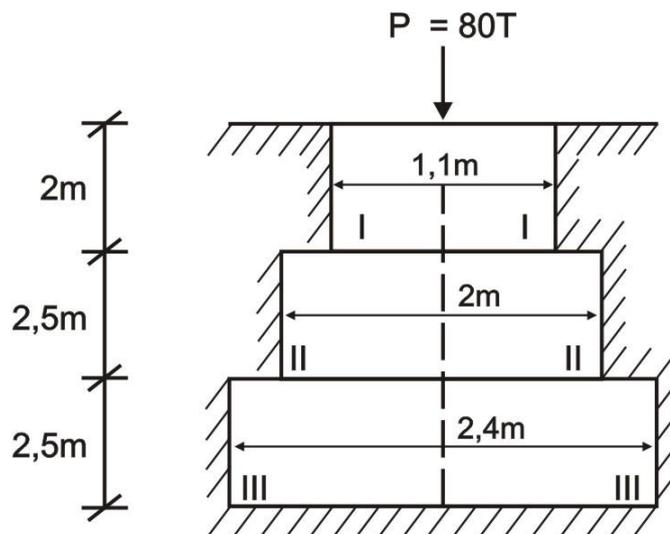


Fig. 1.36

Solución:

Consideramos el peso propio de la cimentación y calculamos las fuerzas axiales en cada tramo.

$$P_{\text{I-I}} = P + \gamma \cdot A \cdot h = 80 + 2,4 \cdot 1,1^2 \cdot 2 = 85,808 \text{T}$$

$$P_{\text{II-II}} = 85,808 + 2,4 \cdot 2^2 \cdot 2,5 = 109,808 \text{T}$$

$$P_{\text{III-III}} = 109,808 + 2,4 \cdot 2,4^2 \cdot 2,5 = 144,368 \text{T}$$

Luego, determinamos los esfuerzos normales en cada uno de los tramos anteriores.

$$\sigma_{\text{I-I}} = \frac{85,808 \cdot 10^3}{1,1^2 \cdot 10^4} = 7,092 \text{kgf/cm}^2$$

$$\sigma_{II-II} = \frac{109,808.10^3}{2^2.10^4} = 2,745 \text{kgf} / \text{cm}^2$$

$$\sigma_{III-III} = \frac{144,368.10^3}{2,4^2.10^4} = 2,506 \text{kgf} / \text{cm}^2$$

PROBLEMA 1.18 Un pilar de un puente consta de dos partes prismáticas, tal como se muestra en la figura y soporta una carga $P = 380T$. El peso específico del material es $\gamma = 2,2T/m^3$, el esfuerzo admisible por compresión es $[\sigma]_{\text{comp}} = 10\text{kg/cm}^2$ y el módulo de elasticidad $E = 24000\text{kg/cm}^2$. Determinar el acortamiento del pilar.

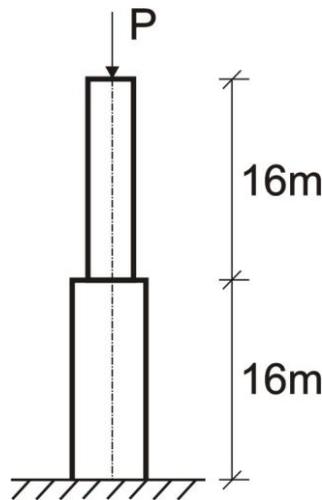


Fig. 1.37

Solución:

Analizamos la parte superior del pilar y calculamos su área A_I :

$$\frac{380 + 2,2.A_I.16}{A_I} \leq 100$$

$$A_I \geq 5,86\text{m}^2$$

Asumimos:

$$A_{I,\text{mín}} = 5,86\text{m}^2$$

Ahora, analizamos la parte inferior del pilar, calculando su área A_{II} :

$$\frac{380 + 2,2.5,86.16 + 2,2.A_{II}.16}{A_{II}} \leq 100$$

$$A_{II} \geq 9,05\text{m}^2$$

Asumimos:

$$A_{II,\text{mín}} = 9,05\text{m}^2$$

Para calcular el acortamiento total del pilar, aplicamos el Principio de Superposición de Cargas e integramos en el caso del peso propio por cada tramo, así como el efecto de que el peso propio de la parte superior después de su acción se convierte en carga puntual para el otro tramo.

$$\delta = \frac{380.16}{240000 \cdot 5,86} + \frac{380.16}{240000 \cdot 9,05} + \int_0^{16} \frac{2,2 \cdot 5,86 \cdot x dx}{240000 \cdot 5,86} + \frac{206,272 \cdot 16}{240000 \cdot 9,05} + \int_0^{16} \frac{2,2 \cdot 9,05 \cdot x dx}{240000 \cdot 9,05} = 13,33 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$\delta = 13,33 \text{ mm}$$

Nótese que el valor de 206,272kg es el resultado del peso propio total de la parte superior, que se ha convertido en puntual para el tramo inferior.

PROBLEMA 1.19 Determinar las áreas A_I , A_{II} , A_{III} en las bases y los volúmenes de las estructuras mostradas en la figura, si $[\sigma]_{\text{comp}} = 10 \text{ kgf/cm}^2$, $\gamma = 2,5 \text{ T/m}^3$.

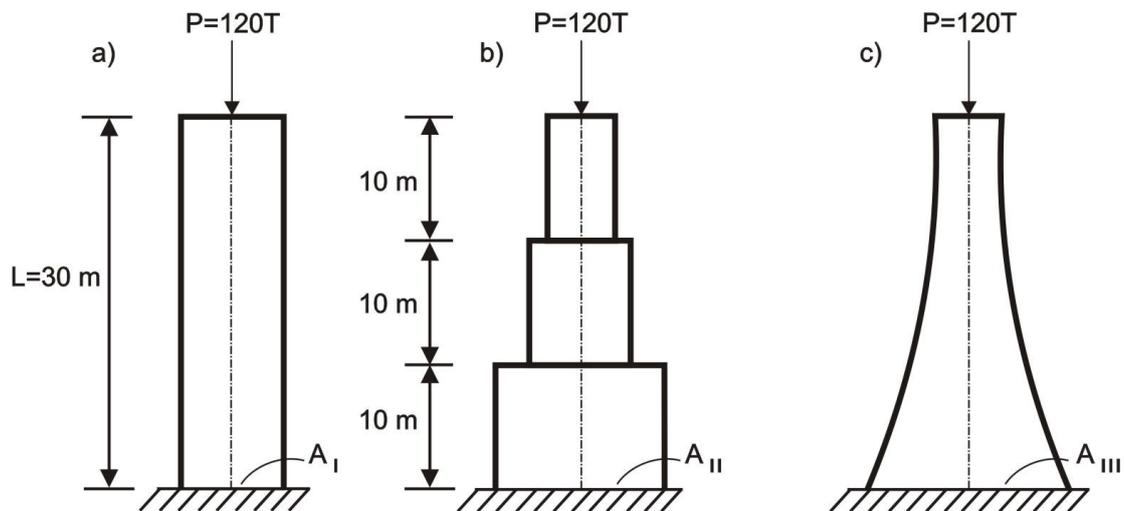


Fig. 1.38

Solución:

Analizamos cada caso en forma separada.

a) El esfuerzo permisible será:

$$[\sigma]_{\text{comp}} = 10 \text{ kgf/cm}^2 = 100 \text{ T/m}^2$$

Determinamos el área A_I de la barra prismática, en base a la condición de resistencia:

$$\frac{120 + 2,5 \cdot A_I \cdot 30}{A_I} \leq 100 \quad \Rightarrow \quad A_I \geq 4,8 \text{ m}^2$$

Asumimos el área como la mínima:

$$A_I = 4,8 \text{ m}^2$$

Su volumen será:

$$V_I = 4,8 \cdot 30 = 144 \text{ m}^3$$

b) Analizamos la parte superior de la barra escalonada y determinamos el área A_I :

$$\frac{120 + 2,5 \cdot A_I \cdot 10}{A_I} \leq 100 \quad \Rightarrow \quad A_I \geq 1,6 \text{ m}^2$$

Asumimos:

$$A_I = 1,6 \text{ m}^2$$

Análogamente, analizamos la parte intermedia de la barra escalonada:

$$\frac{120 + 2,5 \cdot 1,6 \cdot 10 + 2,5 \cdot A_2 \cdot 10}{A_2} \leq 100 \Rightarrow A_2 \geq 2,133 \text{m}^2$$

Asumimos:

$$A_2 = 2,133 \text{m}^2$$

Posteriormente, analizamos la parte inferior de la barra escalonada:

$$\frac{120 + 2,5 \cdot 1,6 \cdot 10 + 2,5 \cdot 2,133 \cdot 10 + 2,5 \cdot A_{II} \cdot 10}{A_{II}} \leq 100 \Rightarrow A_{II} \geq 2,844 \text{m}^2$$

Asumimos:

$$A_{II} = 2,844 \text{m}^2$$

Finalmente, calculamos el volumen de la barra escalonada:

$$V_{II} = 1,6 \cdot 10 + 2,133 \cdot 10 + 2,844 \cdot 10 = 65,77 \text{m}^3$$

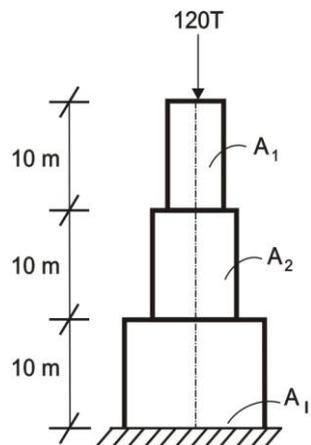


Fig. 1.39

c) Determinamos el área de la sección de la parte superior del pilar:

$$\frac{P}{A_0} \leq [\sigma]_{\text{comp}} \Rightarrow A_0 \geq \frac{120}{100} = 1,2 \text{m}^2$$

Luego, el área en la parte inferior será:

$$A_{III} = A_0 \cdot e^{\frac{\gamma \cdot L}{[\sigma]_{\text{comp}}}} = 1,2 \cdot e^{\frac{2,5 \cdot 30}{100}} = 2,54 \text{m}^2$$

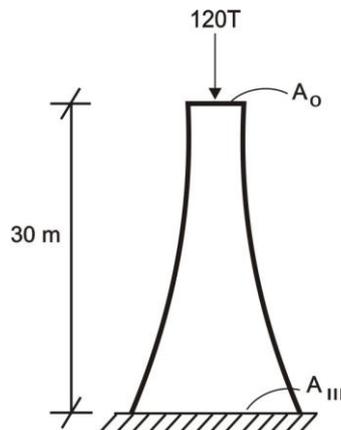


Fig. 1.40

El peso del pilar es:

$$Q = A_{III} \cdot [\sigma]_{\text{comp}} - P = 2,54 \cdot 100 - 120 = 134T$$

El volumen total será:

$$V = \frac{Q}{\gamma} = \frac{134}{2,5} = 53,6m^3$$

PROBLEMA 1.20 Obtener una fórmula para el alargamiento δ y la energía potencial de deformación U de una barra cónica de sección transversal circular bajo la acción de su propio peso, si la longitud de la barra es L , el peso específico por unidad de volumen es γ y el módulo de elasticidad es E .

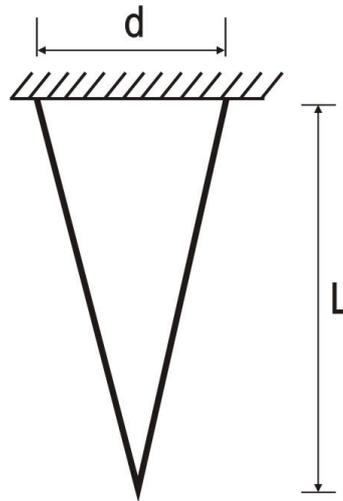


Fig. 1.41

Solución:

Analizamos el valor del diámetro a una distancia "x" del extremo libre:

$$d_x = \frac{dx}{L}$$

Luego:

$$V_x = \int_0^x A_x dx = \int_0^x \frac{\pi}{4} d_x^2 dx = \int_0^x \frac{\pi}{4} \left(\frac{dx}{L} \right)^2 dx = \frac{\pi d^2}{4L^2} \left(\frac{x^3}{3} \right) = \frac{\pi d^2 x^3}{12L^2}$$

Además:

$$P_x = \gamma V_x = \frac{\gamma \pi d^2 x^3}{12L^2}$$

En consecuencia, el alargamiento será:

$$\delta = \int_0^L \frac{P_x dx}{EA_x} = \int_0^L \frac{(\gamma \pi d^2 x^3 / 12L^2) dx}{E(\pi d^2 x^2 / 4L^2)} = \frac{\gamma}{E} \int_0^L \frac{x dx}{3} = \frac{\gamma L^2}{6E}$$

La energía potencial de deformación se obtendrá mediante la siguiente fórmula:

$$U = \int_0^L \frac{P_x^2 dx}{2EA_x} = \int_0^L \frac{(\gamma \pi d^2 x^3 / 12L^2)^2 dx}{2E(\pi d^2 x^2 / 4L^2)} = \frac{\gamma^2 \pi d^2}{72EL^2} \int_0^L x^4 dx = \frac{\gamma^2 \pi d^2 L^3}{360E}$$

1.3 ESTRUCTURAS ESTATICAMENTE INDETERMINADAS

PROBLEMA 1.21 Una columna cuadrada de concreto armado se comprime con una fuerza axial P . ¿Qué fracción de la carga soportará el concreto si el área de sección transversal total de las barras de acero es un décimo del área de sección transversal del concreto y el módulo de elasticidad del acero es diez veces el del concreto?

Solución:

Como se trata de una columna de concreto armado, esto implica, que ambos materiales forman una sola estructura y, en consecuencia, la carga total de compresión será soportada por ambos materiales, esto es:

$$P_a + P_c = P \quad (a)$$

Donde:

P_a - carga que soporta el acero

P_c - carga que soporta el concreto

Asimismo, como se trata de una sola estructura y su trabajo es conjunto, en consecuencia, el acortamiento de ambos materiales será el mismo. La longitud del acero y concreto también es la misma.

$$\delta_a = \delta_c$$

Luego:

$$\frac{P_a L}{E_a A_a} = \frac{P_c L}{E_c A_c}$$
$$P_a = \frac{E_a A_a}{E_c A_c} P_c \quad (b)$$

Reemplazamos (b) en (a), obteniendo:

$$P_c \left(1 + \frac{E_a A_a}{E_c A_c} \right) = P$$

Como, por dato del problema, se tiene:

$$\frac{E_a}{E_c} = 10$$

$$\frac{A_a}{A_c} = \frac{1}{10}$$

En consecuencia:

$$\frac{P_c}{P} = \frac{1}{2}$$

Esto implica, que el concreto soporta el 50% de la carga total y el otro 50% lo soporta el acero.

PROBLEMA 1.22 Una columna cuadrada se forma por una cubierta metálica de 25mm de espesor (dimensiones exteriores 250mm x 250mm y dimensiones interiores 200mm x 200mm) llena de concreto. La cubierta tiene un módulo elástico $E_1 = 84\text{GPa}$ y el relleno de concreto tiene un módulo de elasticidad $E_2 = 14\text{GPa}$. Determinar la máxima carga permisible P sobre la columna si los esfuerzos permisibles en el metal y en el concreto son 42MPa y $5,6\text{MPa}$, respectivamente. Considerar que los esfuerzos en el metal y en el concreto están uniformemente distribuidos.

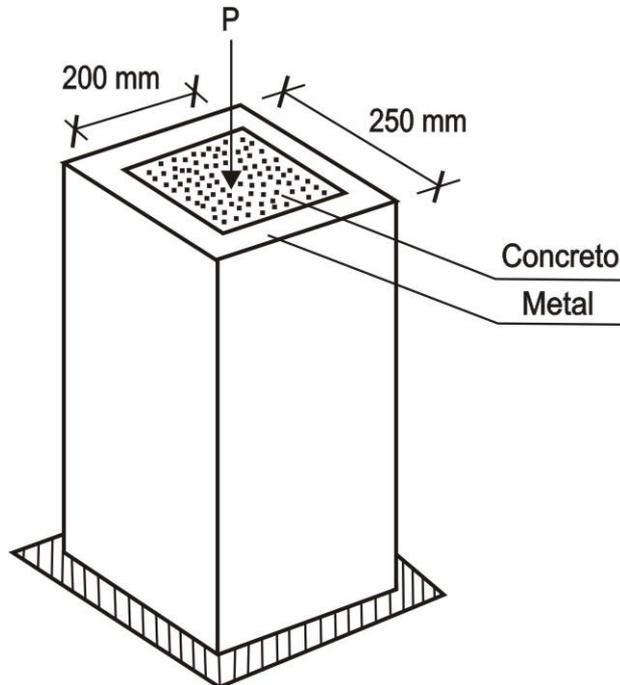


Fig. 1.42

Solución:

Resolvemos en forma análoga al problema anterior:

$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad P_1 + P_2 = P \quad (a)$$

Donde:

P_1 - carga que soporta el metal

P_2 - carga que soporta el concreto

Además:

$$\delta_1 = \delta_2$$

$$\frac{P_1 L}{E_1 A_1} = \frac{P_2 L}{E_2 A_2}$$

$$P_1 = \frac{E_1 A_1}{E_2 A_2} P_2 \quad (b)$$

Reemplazamos (b) en (a):

$$P_2 \left(1 + \frac{E_1 A_1}{E_2 A_2} \right) = P$$

$$P_2 = \frac{E_2 A_2 P}{E_1 A_1 + E_2 A_2}$$

En consecuencia:

$$P_1 = \frac{E_1 A_1 P}{E_1 A_1 + E_2 A_2}$$

Para el caso del metal, se tendrá:

$$\sigma_1 \leq [\sigma]_1$$

$$\frac{E_1 P}{E_1 A_1 + E_2 A_2} \leq [\sigma]_1$$

De donde:

$$P \leq [\sigma]_1 \left(\frac{E_1 A_1 + E_2 A_2}{E_1} \right)$$

$$P \leq 42 \cdot 10^6 \left(\frac{84 \cdot 10^9 \cdot 0,0225 + 14 \cdot 10^9 \cdot 0,04}{84 \cdot 10^9} \right) = 1225000 \text{ N}$$

$$P \leq 1225 \text{ kN}$$

Siendo:

$$A_1 = (250^2 - 200^2) \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 = 0,0225 \text{ m}^2$$

$$A_2 = 200^2 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 = 0,04 \text{ m}^2$$

Ahora analizamos el caso del concreto:

$$\sigma_2 \leq [\sigma]_2$$

$$\frac{E_2 P}{E_1 A_1 + E_2 A_2} \leq [\sigma]_2$$

$$P \leq [\sigma]_2 \left(\frac{E_1 A_1 + E_2 A_2}{E_2} \right)$$

$$P \leq 5,6 \cdot 10^6 \left(\frac{84 \cdot 10^9 \cdot 0,0225 + 14 \cdot 10^9 \cdot 0,04}{14 \cdot 10^9} \right) = 980000 \text{ N}$$

$$P \leq 980 \text{ kN}$$

Luego, como solo existe una carga, debemos de ver el rango en el cual se cumple para ambos casos y de ahí se determina el valor admisible de la carga, que es:

$$P_{\text{máx}} = 980 \text{ kN}$$

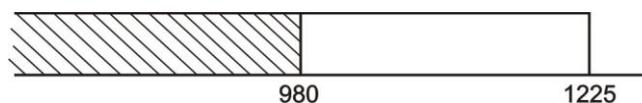


Fig. 1.43

PROBLEMA 1.23 Para el sistema mostrado en la figura, determinar las reacciones en los empotramientos, graficar el diagrama de fuerza axial o normal, diagrama de esfuerzos y calcular la deformación de la barra B, indicando en el punto de aplicación de la carga la orientación de su desplazamiento. Considerar que la barra B es de sección circular de radio "r" y la barra A también es de sección circular, variando sus radios desde "r/2" hasta "r" en el empotramiento. Considerar que las barras A y B tienen módulos de elasticidad E y E/3 respectivamente.

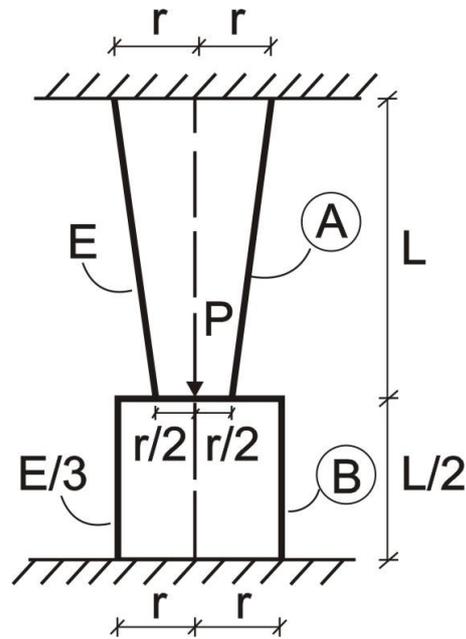


Fig. 1.44

Solución:

Eliminamos el empotramiento en la parte inferior y lo reemplazamos por su reacción R_1 .

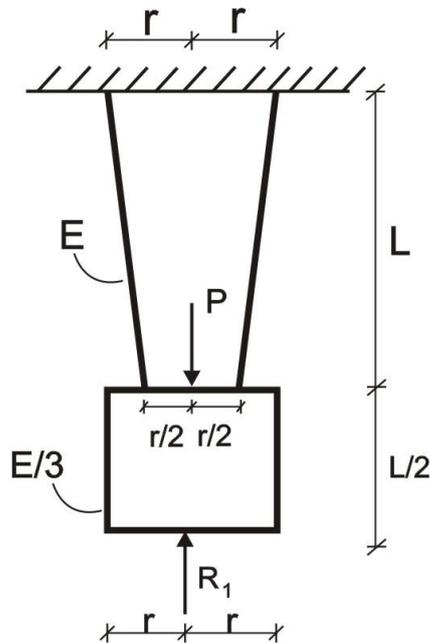


Fig. 1.45

Ahora, analizamos la variación del diámetro en la barra de la parte superior:

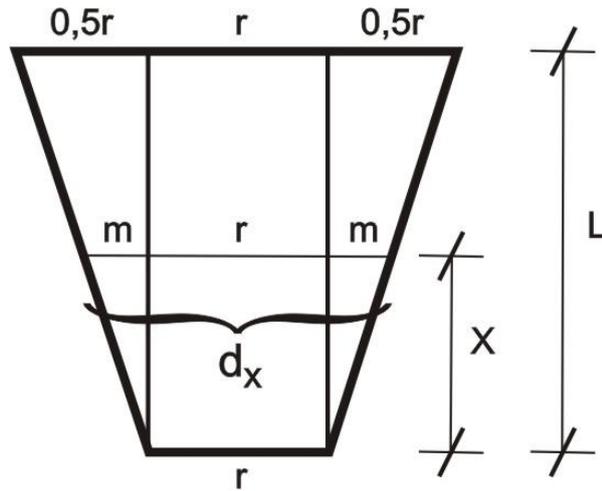


Fig. 1.46

$$\frac{m}{x} = \frac{0,5r}{L} \Rightarrow m = \frac{0,5rx}{L}$$

Luego:

$$d_x = r + 2m = r + \frac{rx}{L} = r \left(1 + \frac{x}{L} \right)$$

Como en el empotramiento analizado se debe de cumplir que $\delta_1 = 0$, se tendrá:

$$-\frac{R_1(L/2)}{(E/3)(\pi/4)(2r)^2} - \int_0^L \frac{R_1 dx}{E(\pi/4)r^2(1+x/L)^2} + \int_0^L \frac{P dx}{E(\pi/4)r^2(1+x/L)^2} = 0$$

Efectuando el proceso de integración obtenemos:

$$R_1 = \frac{4P}{7} \uparrow$$

$$R_2 = \frac{3P}{7} \uparrow$$

Con estos valores, graficamos el diagrama de fuerza axial o normal y el diagrama de esfuerzos en los puntos especiales.

$$\sigma_C = \frac{(-4P/7)}{\pi r^2} = -0,182 \frac{P}{r^2}$$

$$\sigma_D^{(-)} = \frac{(-4P/7)}{\pi r^2} = -0,182 \frac{P}{r^2}$$

$$\sigma_D^{(+)} = \frac{(3P/7)}{\pi(r/2)^2} = 0,545 \frac{P}{r^2}$$

$$\sigma_E = \frac{(3P/7)}{\pi(3r/4)^2} = 0,242 \frac{P}{r^2}$$

$$\sigma_F = \frac{(3P/7)}{\pi r^2} = 0,136 \frac{P}{r^2}$$

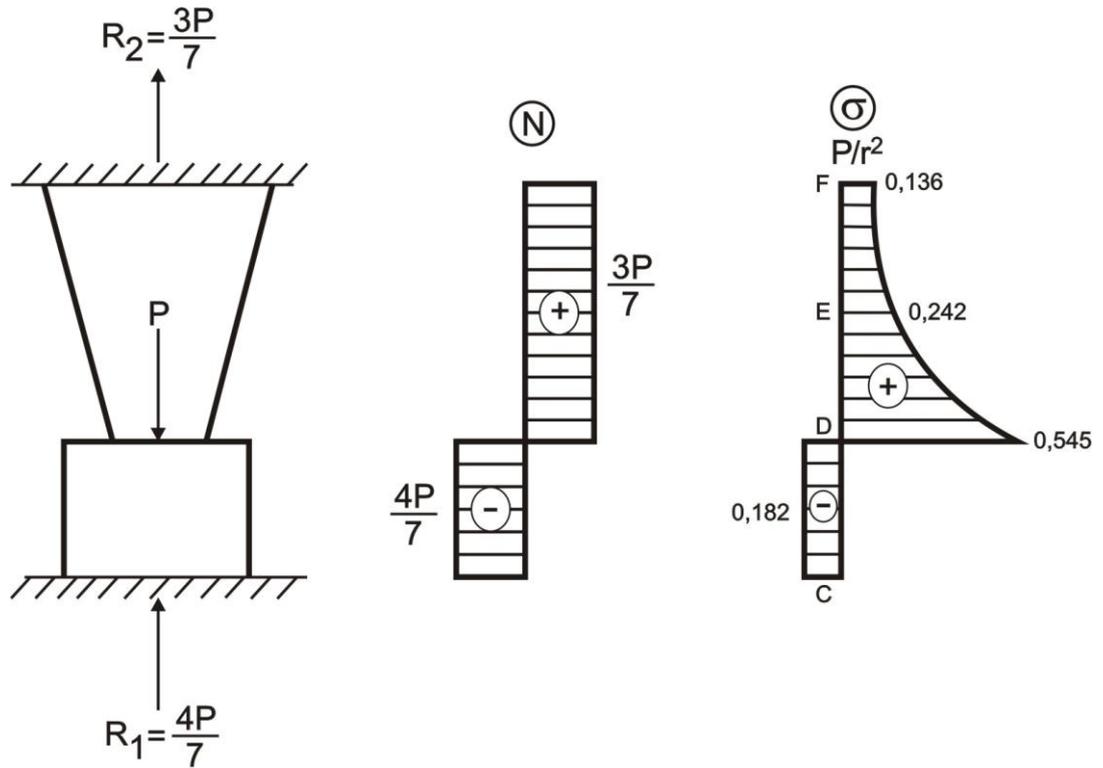


Fig. 1.47

Ahora, calculamos el acortamiento que se produce en la barra CD del diagrama σ , obteniendo la dirección de orientación del punto de aplicación D de la carga; avanzando del extremo libre al empotramiento.

$$\delta_D = \frac{(-4P/7)(L/2)}{(E/3)\pi r^2} = -0,273 \frac{PL}{Er^2} \downarrow$$

La dirección de la flecha indica el desplazamiento del punto de aplicación de la carga.

PROBLEMA 1.24 Determinar el área de las secciones transversales de los cables que sostienen a la viga, si son de un mismo material y tienen la misma sección. Considerar $[\sigma] = 1600 \text{ kgf/cm}^2$.

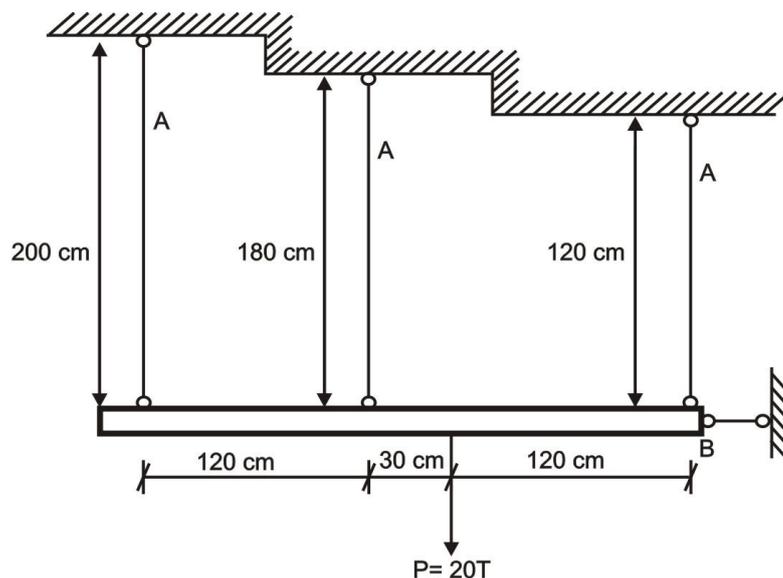


Fig. 1.48

Solución:

Hacemos un corte en todos los cables y analizamos el equilibrio de la parte cortada:

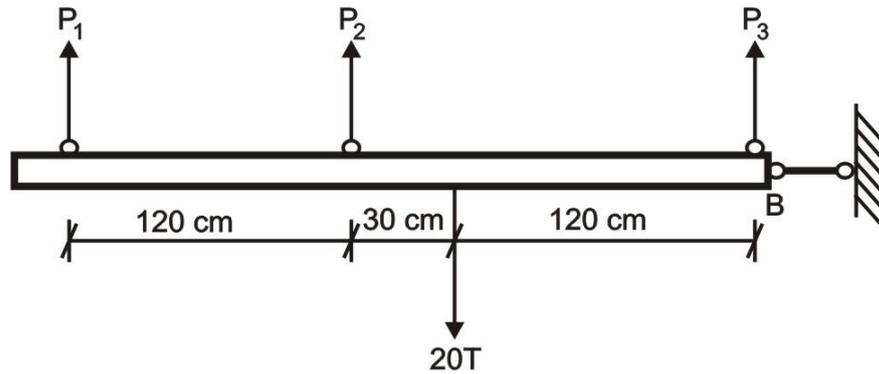


Fig. 1.49

$$\sum M_B = 0 \quad \Rightarrow \quad 2,7P_1 + 1,5P_2 - 20 \cdot 1,2 = 0$$

$$2,7P_1 + 1,5P_2 = 24 \quad (a)$$

$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad P_1 + P_2 + P_3 = 20 \quad (b)$$

Como podemos apreciar, tenemos tres incógnitas y solo dos ecuaciones, por ello, debemos de eliminar la indeterminación, a través del diagrama de desplazamientos de la estructura.

Por relación de triángulos, tendremos:

$$\frac{\delta_2 - \delta_3}{1,5} = \frac{\delta_1 - \delta_3}{2,7} \quad \Rightarrow \quad 1,5\delta_1 - 2,7\delta_2 + 1,2\delta_3 = 0$$

Reemplazamos valores y obtenemos:

$$1,5 \frac{P_1(2)}{EA} - 2,7 \frac{P_2(1,8)}{EA} + 1,2 \frac{P_3(1,2)}{EA} = 0$$

$$3P_1 - 4,86P_2 + 1,44P_3 = 0 \quad (c)$$

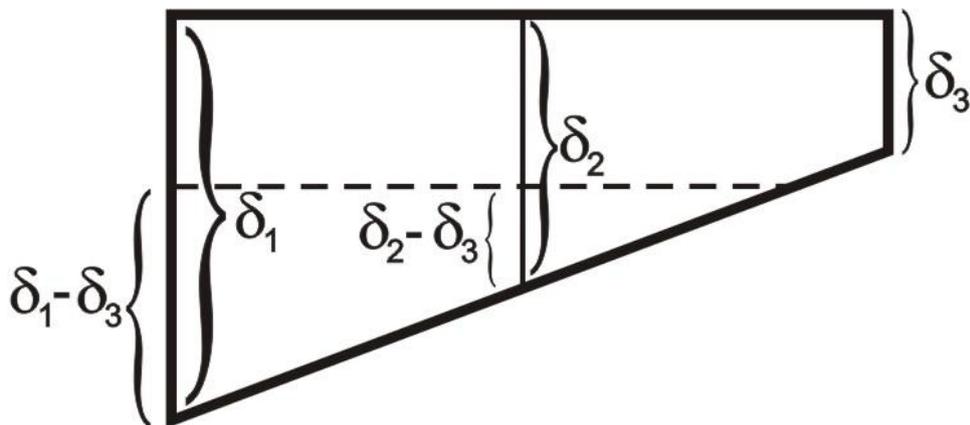


Fig. 1.50

Resolvemos las ecuaciones (a), (b), (c) y obtenemos:

$$P_1 = 5,58T$$

$$P_2 = 5,95T$$

$$P_3 = 8,47T$$

Ahora, analizamos cada cable en forma separada:

CABLE 1:

$$\frac{5,58 \cdot 10^3}{A} \leq 1600 \quad \Rightarrow \quad A \geq 3,49 \text{ cm}^2$$

CABLE 2:

$$\frac{5,95 \cdot 10^3}{A} \leq 1600 \quad \Rightarrow \quad A \geq 3,72 \text{ cm}^2$$

CABLE 3:

$$\frac{8,47 \cdot 10^3}{A} \leq 1600 \quad \Rightarrow \quad A \geq 5,29 \text{ cm}^2$$

Como el área es la misma para los tres cables, entonces veremos el valor que cumpla con los tres casos, de acuerdo al siguiente intervalo:



Fig. 1.51

De esta manera, asumimos que el área es:

$$A = 5,30 \text{ cm}^2$$

PROBLEMA 1.25 Determinar las áreas de las secciones transversales de la siguiente estructura, si $A_1 = A_2 = A$, $A_3 = 2A$ y $[\sigma] = 140 \text{ MPa}$. Considerar que las tres barras son del mismo material.

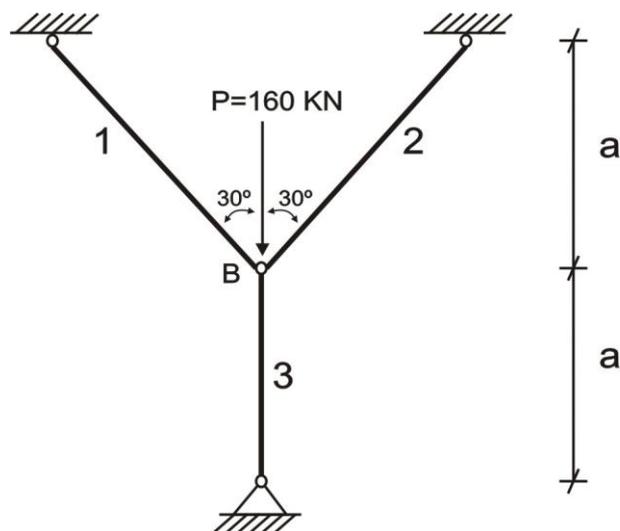


Fig. 1.52

Solución:

Analizamos el equilibrio del nudo B:

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad P_1 = P_2$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad (P_1 + P_2) \cos 30^\circ + P_3 = 160$$

$$\sqrt{3}P_1 + P_3 = 160 \quad (a)$$

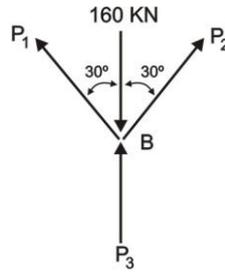


Fig. 1.53

Como existen dos incógnitas y una sola ecuación, porque la anterior igualdad $P_1 = P_2$ se utilizó en la obtención de la ecuación (a), debemos de analizar el diagrama de desplazamientos y resolver la indeterminación del sistema:

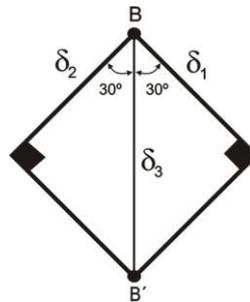


Fig. 1.54

$$\delta_3 \cos 30^\circ = \delta_1 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \left[\frac{P_3 \cdot a}{E \cdot 2A} \right] = \frac{P_1}{EA} \left(\frac{a}{\sqrt{3}/2} \right)$$

$$P_1 = \frac{3}{8} P_3 \quad (b)$$

Reemplazamos (b) en (a) y obtenemos:

$$P_1 = P_2 = 36,375 \text{ kN (TRACCION)}$$

$$P_3 = 97 \text{ kN (COMPRESION)}$$

Luego, analizamos en forma separada las barras 1, 2 y 3.

BARRAS 1 y 2:

$$\frac{36,375 \cdot 10^3}{A} \leq 140 \cdot 10^6 \Rightarrow A \geq 2,6 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$A \geq 2,6 \text{ cm}^2$$

BARRA 3:

$$\frac{97 \cdot 10^3}{2A} \leq 140 \cdot 10^6 \Rightarrow A \geq 3,46 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$A \geq 3,46 \text{ cm}^2$$

De donde:



Fig. 1.55

Asumimos:

$$A_1 = A_2 = A = 3,46\text{cm}^2$$

$$A_3 = 2A = 6,92\text{cm}^2$$

1.4 ESFUERZOS DE TEMPERATURA

PROBLEMA 1.26 Obtener una fórmula para el cambio unitario de volumen $e = \Delta V / V_0$ de un material sometido a un incremento uniforme de temperatura ΔT . Supóngase que el material tiene un coeficiente de dilatación térmica α y es capaz de expandirse libremente.

Solución:

Analicemos el caso específico de un paralelepípedo rectangular de dimensiones a, b y c.

$$V_0 = abc$$

$$V_f = [a + \alpha(\Delta T)a][b + \alpha(\Delta T)b][c + \alpha(\Delta T)c] = abc[1 + \alpha(\Delta T)]^3$$

$$V_f = abc[1 + 3\alpha(\Delta T) + 3\alpha^2(\Delta T)^2 + \alpha^3(\Delta T)^3] = abc[1 + 3\alpha(\Delta T)]$$

Nótese, que se desprecian los valores de los coeficientes de dilatación térmica elevada al cuadrado y cubo, debido a que son magnitudes muy pequeñas.

De esta manera, el cambio unitario de volumen es:

$$e = \frac{\Delta V}{V} = \frac{V_f - V_0}{V_0} = \frac{abc[1 + 3\alpha(\Delta T)] - abc}{abc} = 3\alpha(\Delta T)$$

PROBLEMA 1.27 Determinar los esfuerzos que surgen en las barras del sistema estructural, si después de haber sido montado, fueron calentados a $\Delta T = 40^\circ\text{C}$. Considerar que sus coeficientes de dilatación térmica y módulos de elasticidad para el acero y el cobre son respectivamente

$$\alpha_a = 125 \cdot 10^{-7} \left(\frac{1}{^\circ\text{C}} \right), \alpha_c = 165 \cdot 10^{-7} \left(\frac{1}{^\circ\text{C}} \right), E_a = 2 \cdot 10^6 \text{ kgf/cm}^2 \text{ y } E_c = 10^6 \text{ kgf/cm}^2.$$

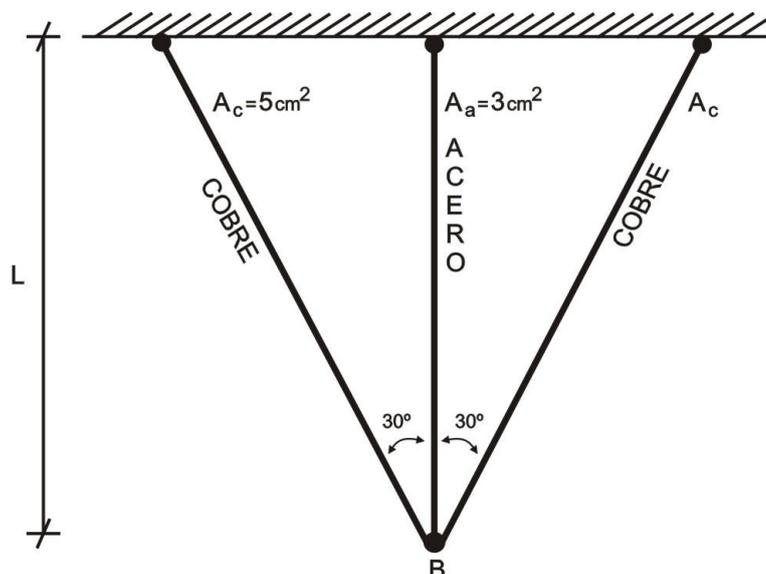


Fig. 1.56

Solución:

Hacemos un corte y analizamos el equilibrio del nudo B:

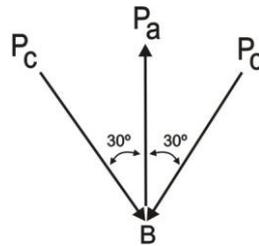


Fig. 1.57

$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad 2P_c \cdot \cos 30^\circ = P_a$$

$$P_a = \sqrt{3}P_c$$

Efectuamos el diagrama de desplazamientos, para resolver la indeterminación del sistema, pero basándonos en el cambio de temperatura.

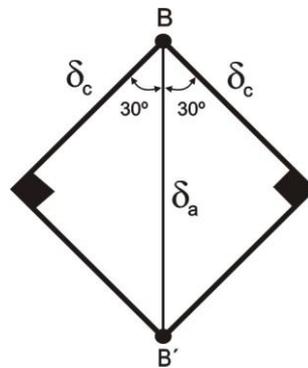


Fig. 1.58

$$\delta_a \cos 30^\circ = \delta_c$$

$$\left[\alpha_a \cdot (\Delta T) \cdot L_a + \frac{P_a L_a}{E_a A_a} \right] \cos 30^\circ = \alpha_c \cdot (\Delta T) \cdot L_c - \frac{P_c L_c}{E_c A_c}$$

$$\left[125 \cdot 10^{-7} \cdot 40 \cdot L + \frac{\sqrt{3} P_c \cdot L}{2 \cdot 10^6 \cdot 3} \right] \frac{\sqrt{3}}{2} = 165 \cdot 10^{-7} \cdot 40 \cdot \left(\frac{L}{\sqrt{3}/2} \right) - \frac{P_c}{10^6 \cdot 5} \cdot \left(\frac{L}{\sqrt{3}/2} \right)$$

De donde:

$$P_c = 684,27 \text{kgf (COMPRESION)}$$

$$P_a = 1185,19 \text{kgf (TRACCION)}$$

Luego:

$$\sigma_a = \frac{P_a}{A_a} = \frac{1185,19}{3} = 395,06 \text{kgf / cm}^2$$

$$\sigma_c = \frac{P_c}{A_c} = -\frac{684,27}{5} = -136,85 \text{kgf / cm}^2$$

PROBLEMA 1.28 Para la barra escalonada doblemente empotrada, determinar los esfuerzos σ_I y σ_{II} , debido al calentamiento en ΔT , si su módulo de elasticidad del material es E y el coeficiente de dilatación térmica es α .

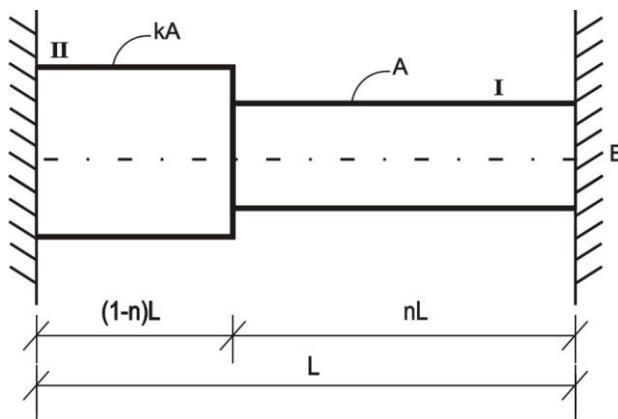


Fig. 1.59

Solución:

Eliminamos el empotramiento en B y lo reemplazamos por su reacción R_B .

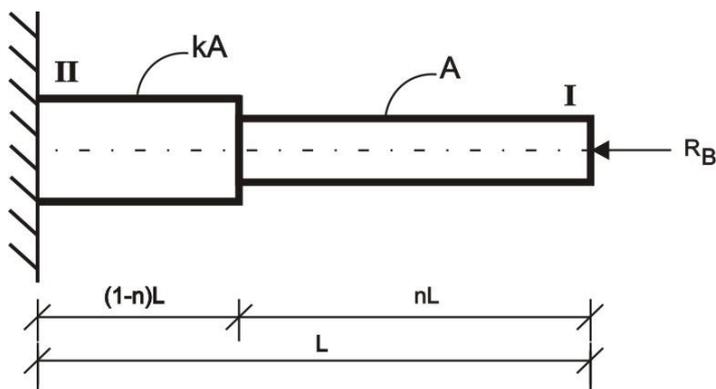


Fig. 1.60

Por ser un empotramiento, el desplazamiento en dicho punto es cero, luego:

$$\alpha \cdot (\Delta T) \cdot L - \frac{R_B \cdot (nL)}{EA} - \frac{R_B \cdot (1-n)L}{EkA} = 0$$

De donde:

$$R_B = \frac{\alpha \cdot (\Delta T) \cdot EA}{n + \frac{1-n}{k}} \quad (\text{COMPRESION})$$

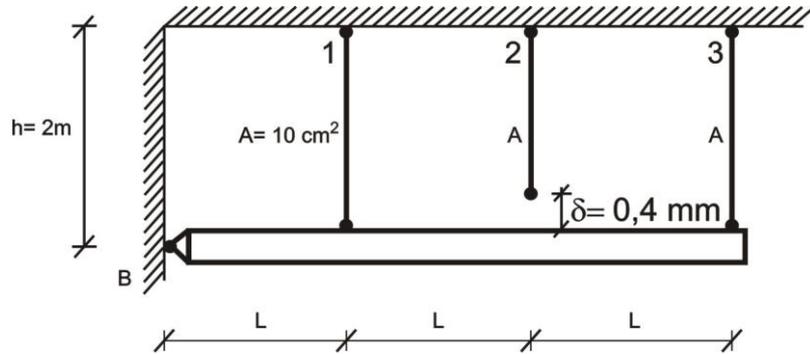
En consecuencia:

$$\sigma_I = -\frac{R_B}{A} = -\frac{\alpha \cdot (\Delta T) \cdot E}{n + \frac{1-n}{k}}$$

$$\sigma_{II} = -\frac{R_B}{kA} = -\frac{\alpha \cdot (\Delta T) \cdot E}{kn + 1 - n} = -\frac{\alpha \cdot (\Delta T) \cdot E}{n \cdot (k-1) + 1}$$

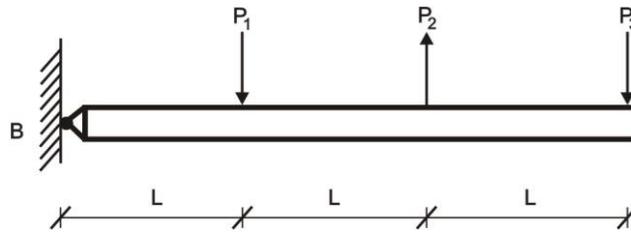
1.5 ESFUERZOS DE MONTAJE

PROBLEMA 1.29 Determinar los esfuerzos que surgen en las barras de acero, después de haberse efectuado el montaje del sistema estructural, si la barra 2 fue fabricada en $\delta = 0,4\text{mm}$ menor de lo proyectado. Considerar $E_a = 2.10^6 \text{ kgf/cm}^2$.



Solución:

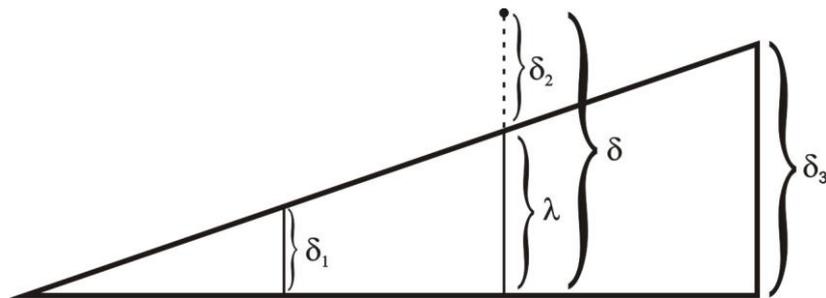
Efectuamos el montaje del sistema y hacemos un corte en todas las barras:



$$\sum M_B = 0 \quad \Rightarrow \quad P_1(L) + P_3(3L) - P_2(2L) = 0$$

$$P_1 - 2P_2 + 3P_3 = 0 \quad (a)$$

Analizamos el diagrama de desplazamientos:



Del gráfico:

$$\lambda + \delta_2 = \delta \quad (b)$$

Por relación de triángulos:

$$\frac{\delta_1}{L} = \frac{\lambda}{2L} \quad \Rightarrow \quad \lambda = 2\delta_1 \quad (c)$$

Reemplazamos (c) en (b) y obtenemos:

$$2\delta_1 + \delta_2 = \delta$$

$$2 \frac{P_1 h}{EA} + \frac{P_2 h}{EA} = \delta$$

$$2 \frac{P_1 \cdot (200)}{2 \cdot 10^6 \cdot 10} + \frac{P_2 \cdot (200)}{2 \cdot 10^6 \cdot 10} = 0,04$$

$$2P_1 + P_2 = 4000 \quad (d)$$

Además:

$$\frac{\delta_1}{L} = \frac{\delta_3}{3L} \quad \Rightarrow \quad 3\delta_1 = \delta_3$$

$$3 \frac{P_1 h}{EA} = \frac{P_3 h}{EA}$$

$$P_3 = 3P_1 \quad (e)$$

Reemplazamos (d) y (e) en la ecuación (a) y obtenemos:

$$P_1 = 571,43 \text{kgf} \quad (\text{COMPRESION})$$

$$P_2 = 2857,14 \text{kgf} \quad (\text{TRACCION})$$

$$P_3 = 1714,29 \text{kgf} \quad (\text{COMPRESION})$$

Luego:

$$\sigma_1 = -\frac{571,43}{10} = -57,143 \text{kgf} / \text{cm}^2$$

$$\sigma_2 = \frac{2857,14}{10} = 285,714 \text{kgf} / \text{cm}^2$$

$$\sigma_3 = -\frac{1714,29}{10} = -171,429 \text{kgf} / \text{cm}^2$$

PROBLEMA 1.30 En el sistema de barras de acero, la barra central fue fabricada mayor en $\delta = 7 \cdot 10^{-4} L$ que su longitud proyectada. Determinar los esfuerzos en las barras después de efectuar el montaje de la estructura en B, con la condición de que son de áreas iguales. Considerar $E_a = 2 \cdot 10^6 \text{kgf} / \text{cm}^2$.

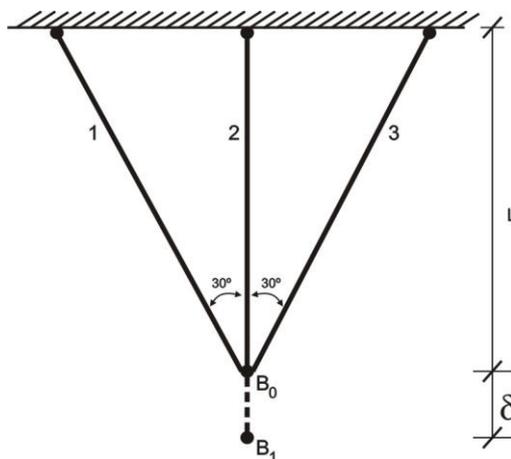


Fig. 1.64

Solución:

Se efectúa el montaje y analizamos el equilibrio del nudo B.

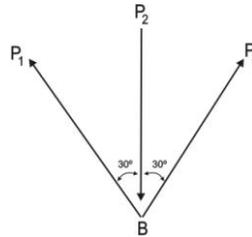


Fig. 1.65

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad P_1 = P_3$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad 2P_1 \cos 30^\circ = P_2$$

$$P_2 = \sqrt{3}P_1$$

Dividimos entre el área y obtenemos:

$$\sigma_2 = \sqrt{3}\sigma_1 \quad (a)$$

Ahora, analizamos el diagrama de desplazamientos:

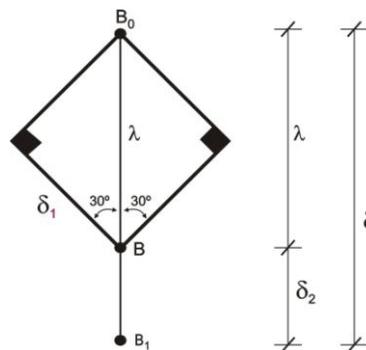


Fig. 1.66

Del gráfico tenemos:

$$\lambda = \frac{\delta_1}{\cos 30^\circ} \quad (b)$$

Asimismo:

$$\delta = \delta_2 + \lambda$$

Reemplazamos (b) y obtenemos:

$$\delta = \delta_2 + \frac{\delta_1}{\cos 30^\circ}$$

$$7 \cdot 10^{-4} \cdot L = \frac{P_2 L}{E_a A} + \frac{P_1 L}{E_a A \cos^2 30^\circ}$$

$$7 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 10^6 = \sigma_2 + \frac{\sigma_1}{\cos^2 30^\circ}$$

Reemplazamos (a) en la expresión, obteniendo:

$$1400 = \sqrt{3}\sigma_1 + \frac{\sigma_1}{0,75}$$

De donde:

$$\sigma_1 = \sigma_3 = 456,71 \text{kgf} / \text{cm}^2 \quad (\text{TRACCION})$$

$$\sigma_2 = \sqrt{3}\sigma_1 = -791,04 \text{kgf} / \text{cm}^2 \quad (\text{COMPRESION})$$

CAPITULO 2

ESFUERZO Y DEFORMACION

2.1 DEFINICIONES Y DEPENDENCIAS PRINCIPALES

Los esfuerzos, que surgen en diversos planos, que pasan por un punto determinado, no son iguales y caracterizan el estado de esfuerzos en dicho punto.

A través de este punto, se pueden trazar tres planos mutuamente perpendiculares, en los cuales no surgen los esfuerzos tangenciales. En ciertos casos, tales planos pueden ser muchos. Tales planos reciben el nombre de *planos principales* y los esfuerzos normales que surgen en dichos planos, se llaman *esfuerzos principales* y se los denota por σ_1 , σ_2 , σ_3 . Los índices indican que se debe de cumplir la relación $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

Cabe indicar que σ_1 es el esfuerzo máximo y σ_3 el esfuerzo mínimo. Los esfuerzos de compresión serán negativos.

Si los tres esfuerzos principales son diferentes de cero, entonces el estado de esfuerzos se llama espacial, volumétrico o triaxial (figura 2.1,a). Si solo dos esfuerzos principales no son iguales a cero, el estado de esfuerzos se llama plano o biaxial (figura 2.1,b). Si solo un esfuerzo es diferente de cero, el estado de esfuerzos es lineal o uniaxial (figura 2.1,c).

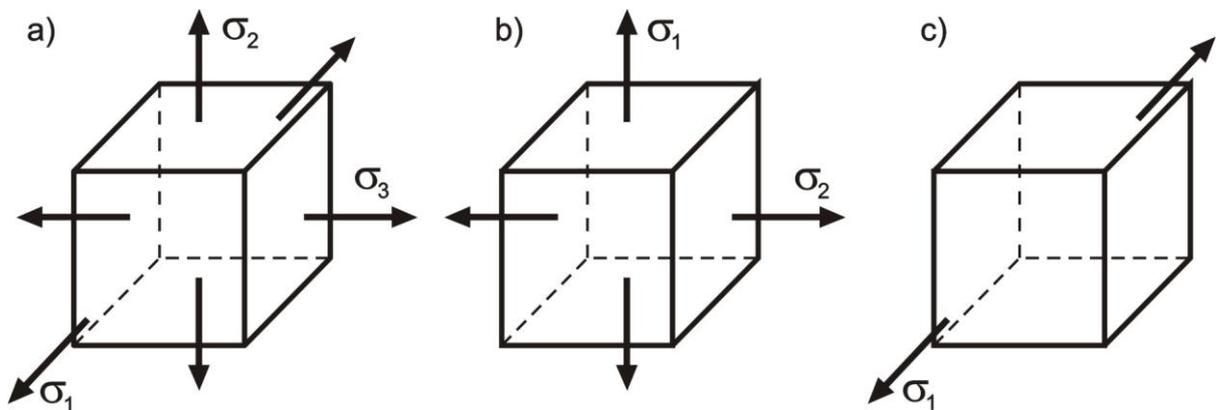


Fig. 2.1

Los esfuerzos en los planos, pertenecientes a la serie de planos, paralelos a un esfuerzo principal, no dependen de este. Por ejemplo, los esfuerzos normal y tangencial en el plano paralelo a σ_3 y ubicado de tal manera que su normal forma un ángulo α con la dirección de σ_1 (figura 2.2), se determinan por las fórmulas:

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha \quad (2.1)$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \operatorname{sen} 2\alpha \quad (2.2)$$

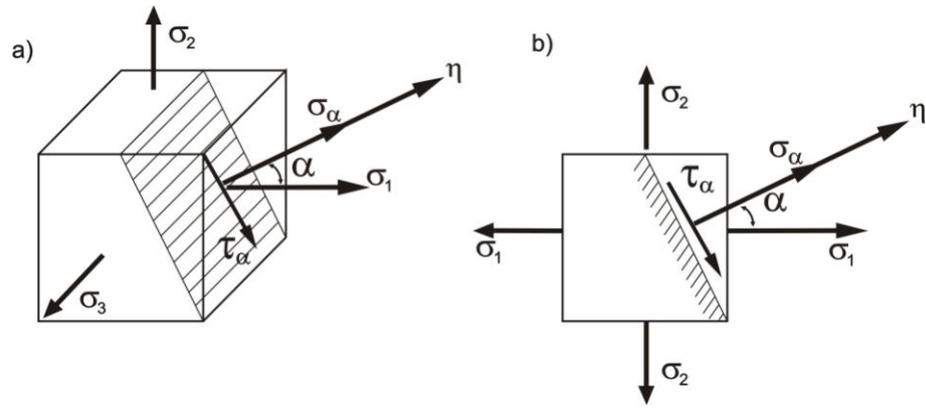


Fig. 2.2

Los esfuerzos tangenciales máximos para los estados de esfuerzo lineal, plano y espacial se determinan respectivamente por las fórmulas 2.3, 2.4 y 2.5.

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{\sigma_1}{2} \quad (2.3)$$

$$\tau_{\text{máx}} = \tau_{12} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad (2.4)$$

$$\tau_{\text{máx}} = \tau_{13} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (2.5)$$

Los esfuerzos σ_α y τ_α también se pueden determinar en forma gráfica, por medio del *círculo de Mohr*. El círculo de Mohr es un conjunto de puntos geométricos, cuyas abscisas y ordenadas son correspondientemente iguales a los esfuerzos normal y tangencial, que surgen en los planos.

De las fórmulas 2.1 y 2.2, como caso particular se obtienen las dependencias para la tracción lineal ($\sigma_1 > 0, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$).

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_1}{2} (1 + \cos 2\alpha) = \sigma_1 \cos^2 \alpha \quad (2.6)$$

$$\tau_\alpha = \frac{1}{2} \sigma_1 \sin 2\alpha \quad (2.7)$$

En el caso de compresión lineal ($\sigma_1 = \sigma_2 = 0, \sigma_3 < 0$), en las fórmulas 2.6 y 2.7, se reemplaza σ_1 por σ_3 y para los cálculos, habrá que considerar que σ_3 es negativo.

Para analizar el esfuerzo plano, se elige un paralelepípedo elemental, de tal manera que los dos planos opuestos son libres de esfuerzos (figura 2.3).

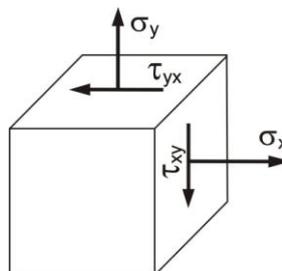


Fig. 2.3

Para la serie de planos perpendiculares al lado libre de esfuerzos (figura 2.4), se tienen las siguientes dependencias:

$$\sigma_{\alpha} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha \quad (2.8)$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \quad (2.9)$$

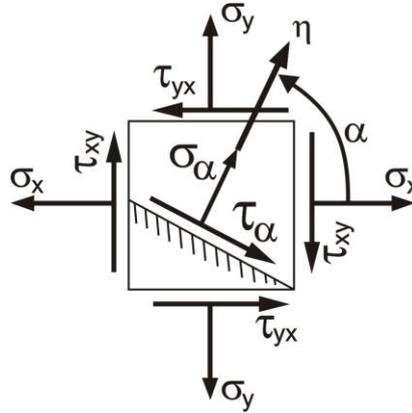


Fig. 2.4

La serie de planos analizados, tienen dos planos principales mutuamente perpendiculares, cuya posición se determina por los ángulos α_0' y α_0'' , cuyos valores se determinan por la fórmula 2.10.

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (2.10)$$

Los esfuerzos principales se determinan por la fórmula 2.11.

$$\sigma_{\text{princ}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad (2.11)$$

Los índices de los esfuerzos principales se colocan después de calcular dichos valores. En las fórmulas 2.8 – 2.10, el signo del esfuerzo tangencial se admite de acuerdo a la figura 2.5.

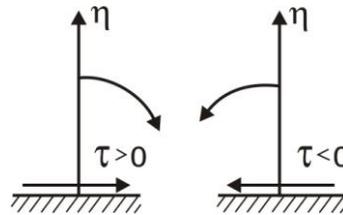


Fig. 2.5

Cuando se trata del estado de esfuerzos espacial o triaxial, los esfuerzos principales se determinan mediante la resolución de la ecuación cúbica:

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0 \quad (2.12)$$

Donde:

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$I_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2$$

$$I_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{xz} \tau_{yz} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{xz}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2$$

A través de un punto dado del cuerpo, se pueden trazar tres ejes mutuamente perpendiculares, cuyos ángulos formados entre sí quedarán perpendiculares después de la deformación y se los conoce como *ejes principales de deformación* y su dirección concuerda con la orientación de los esfuerzos principales. Las deformaciones lineales en las direcciones de los ejes principales se llaman *deformaciones principales* y su magnitud se relaciona correspondientemente con los esfuerzos principales de la *Ley de Hooke generalizada*:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)] \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)]\end{aligned}\quad (2.13)$$

Si se trata de los ejes x, y, z , las deformaciones lineales se pueden determinar por la fórmula 2.14.

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]\end{aligned}\quad (2.14)$$

El cambio unitario de volumen o deformación volumétrica, se determina por la fórmula 2.15.

$$e = \frac{\Delta V}{V_0} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1-2\mu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (2.15)$$

La densidad de energía de deformación está relacionada con los esfuerzos principales, por medio de la fórmula 2.16.

$$u = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)] \quad (2.16)$$

La densidad total de energía de deformación, puede ser dividida en densidad de la energía por variación de volumen y densidad de la energía por variación de la forma del elemento.

$$u_{vol} = \frac{1-2\mu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 \quad (2.17)$$

$$u_f = \frac{1+\mu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \quad (2.18)$$

Las teorías o criterios de resistencia se aplican para determinar el grado de destrucción de las estructuras, siendo las más conocidas las siguientes:

1. Teoría de los esfuerzos normales máximos.

$$\sigma_{e,I} = \sigma_1 \leq [\sigma]_{tr} \quad (2.19)$$

2. Teoría de los alargamientos relativos máximos.

$$\sigma_{e,II} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]_{tr} \quad (2.20)$$

3. Teoría de los esfuerzos tangenciales máximos (hipótesis de la plasticidad de Saint-Venant).

$$\sigma_{e,III} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]_{tr} \quad (2.21)$$

4. Teoría de la energía potencial de la variación de la forma o teoría de los esfuerzos tangenciales octaédricos (hipótesis de la plasticidad de Huber – Misses – Hencky).

$$\sigma_{e,IV} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \leq [\sigma]_{tr} \quad (2.22)$$

5. Teoría de Mohr (hipótesis de los estados límites).

$$\sigma_{e,V} = \sigma_1 - \frac{\sigma_{y,tr}}{|\sigma_{y,comp}|} \sigma_3 \leq [\sigma]_{tr} \quad (2.23)$$

Si los factores de seguridad en tracción y en compresión son iguales, entonces:

$$\sigma_{e,V} = \sigma_1 - \frac{[\sigma]_{tr}}{[\sigma]_{comp}} \sigma_3 \leq [\sigma]_{tr} \quad (2.24)$$

Para los materiales frágiles y semifrágiles:

$$\sigma_{e,V} = \sigma_1 - \frac{\sigma_{r,tr}}{|\sigma_{r,comp}|} \sigma_3 \leq [\sigma]_{tr} \quad (2.25)$$

2.2 ESFUERZO LINEAL

PROBLEMA 2.1 Determinar los esfuerzos normal y tangencial en el punto A de la sección 1-1 y en el punto B de la sección 2-2 de la barra (figura 2.6,a), tanto en forma analítica, como en forma gráfica por medio del círculo de Mohr. Calcular el esfuerzo tangencial máximo que surgen en dichos puntos.

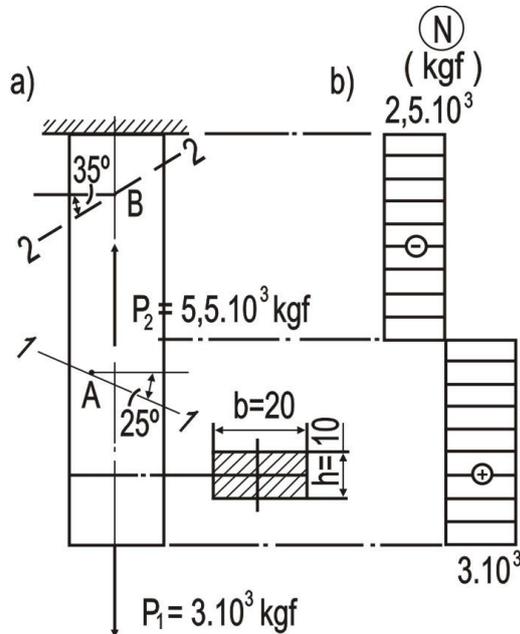


Fig. 2.6

Solución:

En un inicio graficamos el diagrama de fuerza axial o normal (figura 2.6,b), siendo para el punto A:

$$N_A = P_1 = 3.10^3 \text{ kgf}$$

Correspondientemente, el esfuerzo normal en la sección transversal indicada es esfuerzo principal para el punto A.

$$(\sigma_x)_A = (\sigma_1)_A = \frac{N_A}{A} = \frac{3 \cdot 10^3}{2.1} = 1500 \text{ kgf / cm}^2$$

En forma análoga será para el punto B:

$$N_B = P_1 - P_2 = 3 \cdot 10^3 - 5,5 \cdot 10^3 = -2,5 \cdot 10^3 \text{ kgf}$$

$$(\sigma_x)_B = (\sigma_3)_B = \frac{N_B}{A} = -\frac{2,5 \cdot 10^3}{2.1} = -1250 \text{ kgf / cm}^2$$

En la figura 2.7,a se muestra el elemento del punto A, con sus secciones longitudinal y transversal y se muestra el plano paralelo a la sección 1-1, cuyos esfuerzos normal y tangencial se determinan por las fórmulas 2.6 y 2.7.

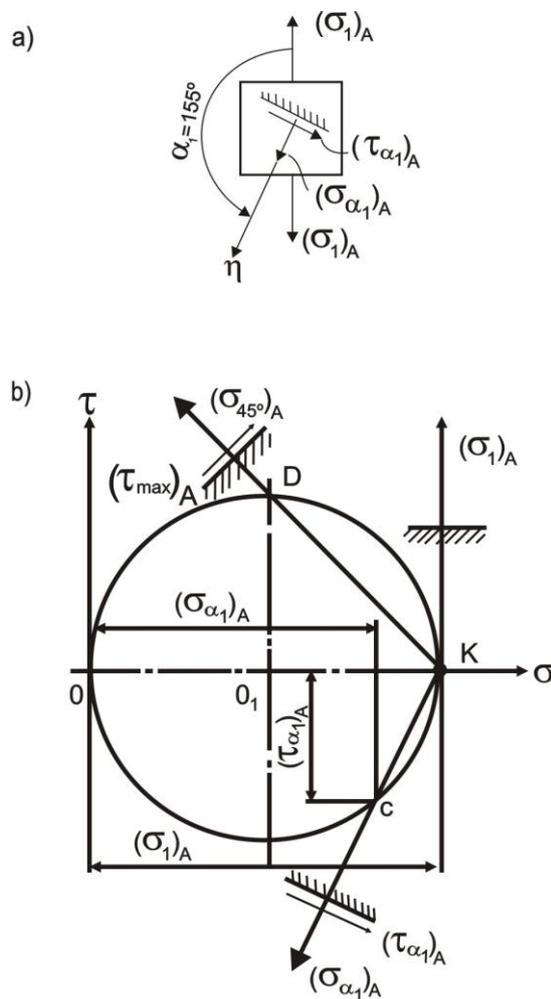


Fig. 2.7

$$(\sigma_{\alpha_1})_A = (\sigma_1)_A \cos^2 \alpha_1 = 1500 \cdot \cos^2 155^\circ = 1232,09 \text{ kgf / cm}^2$$

$$(\tau_{\alpha_1})_A = \frac{1}{2} (\sigma_1)_A \sin 2\alpha_1 = \frac{1}{2} \cdot 1500 \cdot \sin 310^\circ = -574,53 \text{ kgf / cm}^2$$

El esfuerzo tangencial máximo en el punto A es:

$$(\tau_{\text{máx}})_A = \frac{(\sigma_1)_A}{2} = \frac{1500}{2} = 750 \text{ kgf / cm}^2$$

Graficamos el círculo de Mohr (figura 2.7,b), siendo el segmento $OK = (\sigma_1)_A$. El punto O es el inicio y el punto K muestra la acción del esfuerzo principal $(\sigma_1)_A$. Luego, dividimos en dos partes iguales el segmento OK, obteniéndose el centro del círculo de Mohr, que es el punto O_1 y a partir de este centro, con radio O_1K graficamos el círculo de Mohr.

A partir del punto K, trazamos una paralela a la normal de la sección, la cual se intersecará con el círculo en el punto C, obteniéndose como proyección en los ejes horizontal y vertical, los valores de $(\sigma_{\alpha_1})_A$ y $(\tau_{\alpha_1})_A$.

Es notorio, que el esfuerzo tangencial máximo, se obtendrá trazando una línea de K al punto D, es decir con un ángulo de 45° .

Respecto a los signos, se notará que concuerdan con los obtenidos por el cálculo numérico y respecto a la exactitud de los resultados, depende de la escala escogida.

En forma análoga procedemos a calcular los esfuerzos para el punto B de la sección 2-2, tal como se muestra en la figura 2.8,a.

$$(\sigma_{\alpha_1})_B = (\sigma_3)_B \cos^2 \alpha_2 = -1250 \cdot \cos^2 215^\circ = -838,76 \text{ kgf / cm}^2$$

$$(\tau_{\alpha_2})_B = \frac{1}{2} (\sigma_3)_B \sin 2\alpha_2 = 0,5 \cdot (-1250) \cdot \sin 430^\circ = -587,31 \text{ kgf / cm}^2$$

$$(\tau_{\text{máx}})_B = \frac{-(\sigma_3)_B}{2} = \frac{1250}{2} = 625 \text{ kgf / cm}^2$$

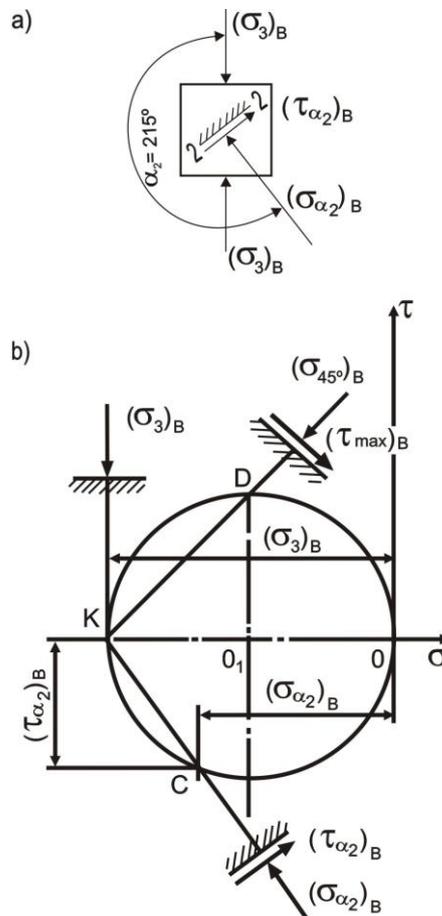


Fig. 2.8

El círculo de Mohr para el punto B, se muestra en la figura 2.8,b. Este caso es análogo al punto A, con la única diferencia que $(\sigma_3)_B < 0$, debiendo de ubicarse el punto K a la izquierda de O.

PROBLEMA 2.2 En la barra comprimida, el esfuerzo en uno de los planos es $\sigma_\alpha = 75\text{MPa}$ y $\tau_\alpha = 43\text{MPa}$. Determinar los esfuerzos normal y tangencial máximos, así como la carga P.

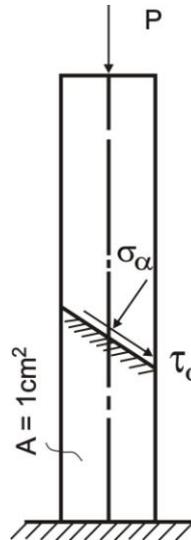


Fig. 2.9

Solución:

Del gráfico se desprende que $\tau_\alpha > 0$ y $\sigma_\alpha < 0$, luego por las fórmulas 2.6 y 2.7 se tendrá:

$$\sigma_1 \cos^2 \alpha = -75 \quad (a)$$

$$\frac{\sigma_1}{2} \operatorname{sen} 2\alpha = 43 \quad (b)$$

Dividimos (b) entre (a) y obtenemos:

$$\operatorname{tg} \alpha = -0,573$$

$$\alpha = -29,83^\circ$$

Reemplazamos valores en la ecuación (a) y obtenemos:

$$\sigma_1 \cos^2 (-29,83^\circ) = -75$$

$$\sigma_1 = \sigma_{\text{máx}} = -99,66\text{MPa}$$

Además:

$$\sigma_1 = \frac{P}{A} \Rightarrow P = \sigma_1 A = -99,66 \cdot 10^{-4} \cdot 10^6$$

De donde:

$$P = -9966\text{N} = -9,966\text{kN} \quad (\text{COMPRESION})$$

Asimismo:

$$\tau_{\text{máx}} = -\frac{\sigma_1}{2} = 49,83\text{MPa}$$

El signo (-) indica, que el esfuerzo tangencial máximo se produce cuando $\operatorname{sen} 2\alpha = -1$.

2.3 ESFUERZO PLANO

PROBLEMA 2.3 Determinar la relación entre σ_x , σ_y , τ_{xy} para que el estado plano mostrado en la figura, resulte ser lineal.

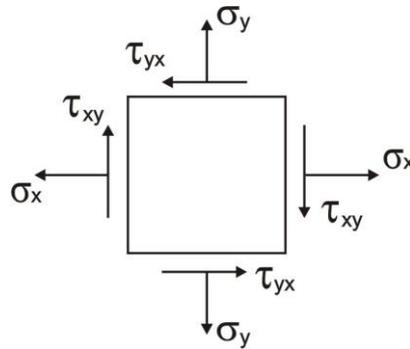


Fig. 2.10

Solución:

Sabemos que el estado de esfuerzos plano, posee dos esfuerzos principales σ_1 y σ_2 , los cuales son diferentes de cero y cuyos valores se obtienen por la fórmula:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

Luego, para que dicho estado de esfuerzos plano, se convierta en lineal, debe de cumplirse que $\sigma_2 = 0$, esto es:

$$\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = 0$$

$$(\sigma_x + \sigma_y)^2 = (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2$$

Efectuando operaciones se obtiene:

$$\tau_{xy} = \sqrt{\sigma_x \sigma_y}$$

PROBLEMA 2.4 Determinar los esfuerzos principales y el esfuerzo tangencial máximo, tanto en forma gráfica, como analítica, para el estado de esfuerzos plano mostrado en la figura 2.11,a.

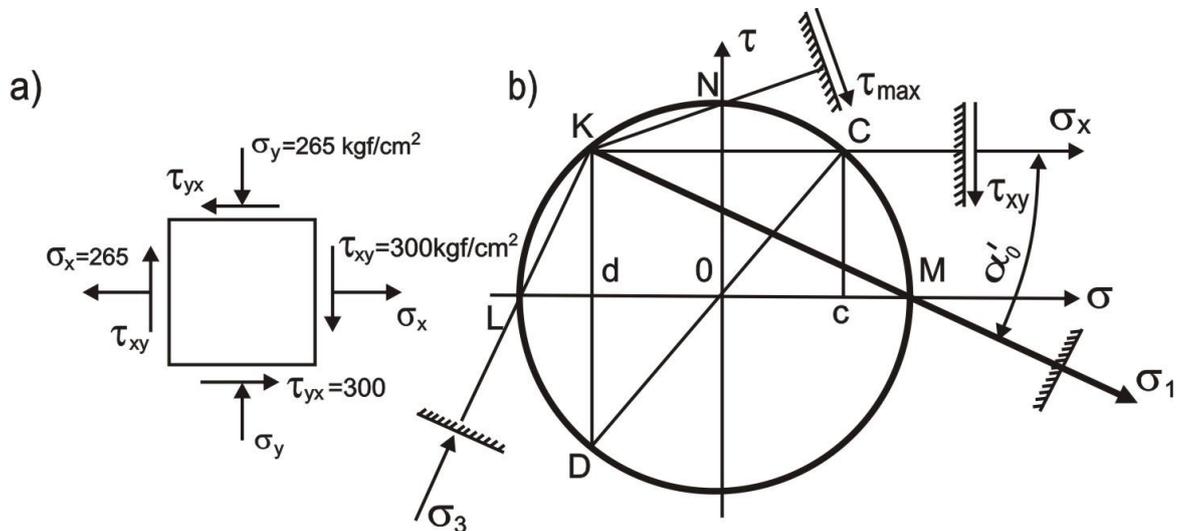


Fig. 2.11

Solución:

Uno de los planos está libre de esfuerzos, por ello el elemento dado se muestra no en su isometría, sino su proyección en el plano paralelo al plano anteriormente indicado. Esto implica que el estado de esfuerzos es plano.

El círculo de Mohr lo graficamos a escala a partir del centro de coordenados O, siendo el segmento $Oc = \sigma_x$, el cual es positivo (figura 2.11,a) y a partir del punto "c" trazamos una vertical, cuyo segmento $cC = \tau_{xy}$ (positivo), obteniéndose el punto C (figura 2.11,b). En forma análoga obtenemos el punto D, siendo el segmento $Od = \sigma_y$ (negativo) y $dD = \tau_{yx}$ (negativo). Luego, unimos los puntos C y D, intersecándose con el inicio del círculo de Mohr O.

En este caso, por casualidad el centro del círculo de Mohr concordó con el centro del eje de coordenadas O. A partir de este centro O trazamos el círculo de radio $OD = OC$, intersecándose con el eje $O\sigma$ en los puntos M y L y con el eje $O\tau$ en el punto N, siendo los esfuerzos principales $\sigma_1 = OM = 400\text{kgf} / \text{cm}^2$, $\sigma_3 = OL = -400\text{kgf} / \text{cm}^2$ y el esfuerzo tangencial máximo $\tau_{\text{máx}} = ON = 400\text{kgf} / \text{cm}^2$, cuyos valores numéricos se obtienen de acuerdo a la escala escogida.

A partir de C y D se trazan paralelas a los ejes de los esfuerzos normal y tangencial, obteniéndose el punto K, llamado *polo del círculo de Mohr*.

Es conocido, que este caso particular de esfuerzos en el plano, donde los esfuerzos principales son iguales en magnitud, de signos opuestos y diferentes de cero, se llama *cizallamiento puro*.

Hay que indicar que el esfuerzo principal igual a cero, será denotado en este caso como σ_2 , por encontrarse entre los esfuerzos principales σ_1 y σ_3 .

La ubicación de los planos principales y planos, en los cuales surge $\tau_{\text{máx}}$, se muestran en la figura 2.11,b.

Ahora, resolvemos el mismo problema, pero en forma analítica, determinando los esfuerzos principales a través de la fórmula 2.11, es decir:

$$\sigma_{\text{pínc}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \frac{265 - 265}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(265 + 265)^2 + 4.300^2}$$

De donde:

$$\sigma_1 = 400,28\text{kgf} / \text{cm}^2$$

$$\sigma_3 = -400,28\text{kgf} / \text{cm}^2$$

Ahora determinamos el ángulo de inclinación de los planos principales, con respecto al inicial, utilizando la fórmula 2.10.

$$\text{tg}2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = -\frac{2.300}{265 - (-265)} = -1,13$$

De este valor obtenemos dos ángulos: $\alpha_0' = -24^015'$ y $\alpha_0'' = -114^015'$. En la figura 2.11,b se muestra el ángulo α_0' , que forman σ_x y σ_1 . El ángulo α_0'' será el que forman σ_x con σ_3 .

El esfuerzo tangencial máximo será:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{400,28 - (-400,28)}{2} = 400,28 \text{kgf / cm}^2$$

PROBLEMA 2.5 Para un punto en estado plano de esfuerzos, $\sigma_1 = 40\text{MPa}$, $\sigma_2 = -20\text{MPa}$ y $\alpha_0 = 30^\circ$. Determinar en forma analítica y gráfica los esfuerzos $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$, esquematizándolos cada uno de ellos.

Solución:

FORMA ANALITICA:

Por dato del problema y de acuerdo a la fórmula de esfuerzos principales, se sabe que:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = 40$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = -20$$

Sumamos ambas ecuaciones y obtenemos:

$$2\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right) = 20$$

$$\sigma_x + \sigma_y = 20 \quad (\text{a})$$

Luego:

$$\frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = 30$$

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 60^2 \quad (\text{b})$$

Además:

$$\text{tg}2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

Por dato del problema $\alpha_0 = 30^\circ$

$$\text{tg}60^\circ = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

$$\sigma_x - \sigma_y = -\frac{2\tau_{xy}}{\sqrt{3}} \quad (\text{c})$$

Reemplazamos (c) en (b):

$$\left(-\frac{2\tau_{xy}}{\sqrt{3}}\right)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 60^2$$

$$\tau_{xy} = \sqrt{675}$$

Como toda raíz cuadrada, tiene dos soluciones, las cuales son:

1ra solución: $\tau_{xy} = 26\text{MPa}$

2da solución: $\tau_{xy} = -26\text{MPa}$

Ahora, analizamos la 1ra solución, reemplazando en la ecuación (c):

$$\sigma_x - \sigma_y = -\frac{2(26)}{\sqrt{3}}$$

$$\sigma_x - \sigma_y = -30 \quad (d)$$

Resolvemos (a) y (d), obteniendo:

$$\sigma_x = -5\text{MPa}$$

$$\sigma_y = 25\text{MPa}$$

Esquematizamos los esfuerzos, los cuales se muestran en la figura 2.12

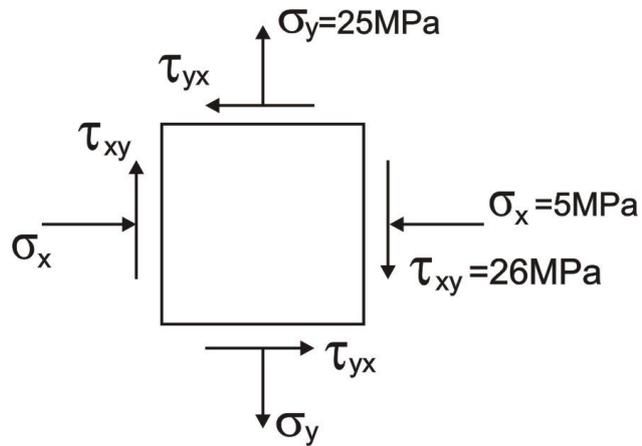


Fig. 2.12

Luego, analizamos la 2da solución en forma análoga al caso anterior:

$$\sigma_x - \sigma_y = -\frac{2(-26)}{\sqrt{3}}$$

$$\sigma_x - \sigma_y = 30 \quad (e)$$

Resolvemos (a) y (e), obteniendo:

$$\sigma_x = 25\text{MPa}$$

$$\sigma_y = -5\text{MPa}$$

Esquematizamos los esfuerzos, los cuales se muestran en la figura 2.13

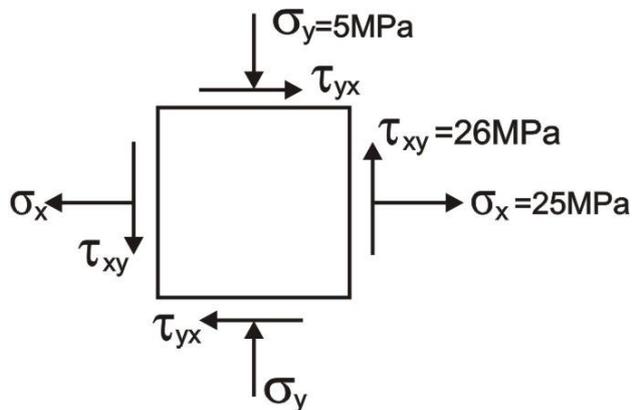


Fig. 2.13

FORMA GRAFICA:

Primero, analizamos la fórmula $\operatorname{tg}2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$, siendo por dato del problema $\alpha_0 = 30^\circ$, luego

$\operatorname{tg}2\alpha_0 = \operatorname{tg}60^\circ = \sqrt{3}$, es decir, es positivo, existiendo dos posibilidades:

1ra posibilidad: Si $\sigma_x < \sigma_y$, siendo $\sigma_x < 0$, entonces τ_{xy} debe ser positivo para que se cumpla dicho valor $\sqrt{3}$. Hay que indicar que α_0 es positivo si va en sentido horario, a partir del eje horizontal $O\sigma$ y será negativo si va en sentido antihorario.

Para graficar el círculo de Mohr, se ha seguido el siguiente proceso:

- A partir del punto O y de acuerdo a escala se traza el segmento $\overline{OA} = \sigma_1$
- Se hace lo mismo con σ_2 , es decir $\overline{OB} = \sigma_2$
- Se divide el segmento \overline{BA} en dos partes iguales, siendo C el punto medio y el radio del círculo de Mohr será $R = \overline{BC} = \overline{CA}$
- Se traza el círculo
- A partir del punto C se orienta el ángulo $2\alpha_0 = 60^\circ$ y se traza una línea que se interseca con el círculo en los puntos D y F
- A partir de los puntos D y F se proyectan líneas verticales que intersecan al eje $O\sigma$ en los puntos E y G
- Se obtienen los valores $\sigma_x = \overline{OE}$, $\sigma_y = \overline{OG}$ y $\tau_{xy} = \overline{ED}$, de acuerdo a la escala elegida

El diagrama del círculo de Mohr, para este caso, se muestra en la figura 2.14

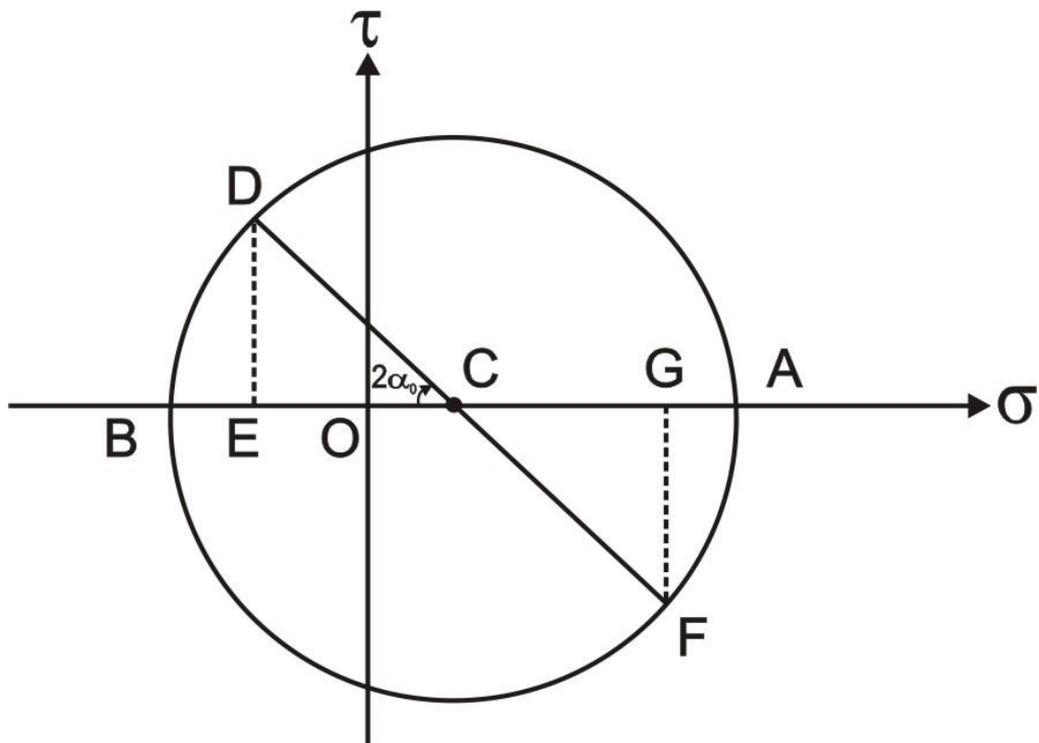


Fig. 2.14

2da posibilidad: Si $\sigma_x > \sigma_y$, siendo $\sigma_x > 0$, entonces τ_{xy} debe ser negativo para que se cumpla dicho valor $\sqrt{3}$

Para graficar el círculo de Mohr, se ha seguido el siguiente proceso:

- A partir del punto O y de acuerdo a escala se traza el segmento $\overline{OA} = \sigma_1$
- Se hace lo mismo con σ_2 , es decir $\overline{OB} = \sigma_2$
- Se divide el segmento \overline{BA} en dos partes iguales, siendo C el punto medio y el radio del círculo de Mohr será $R = \overline{BC} = \overline{CA}$
- Se traza el círculo
- A partir del punto C se orienta el ángulo $2\alpha_0 = 60^\circ$ y se traza una línea que se interseca con el círculo en los puntos D y F
- A partir de los puntos D y F se proyectan líneas verticales que intersecan al eje $O\sigma$ en los puntos E y G
- Se obtienen los valores $\sigma_x = \overline{OE}$, $\sigma_y = \overline{OG}$ y $\tau_{xy} = \overline{ED}$, de acuerdo a la escala elegida

El diagrama del círculo de Mohr, para este caso, se muestra en la figura 2.15

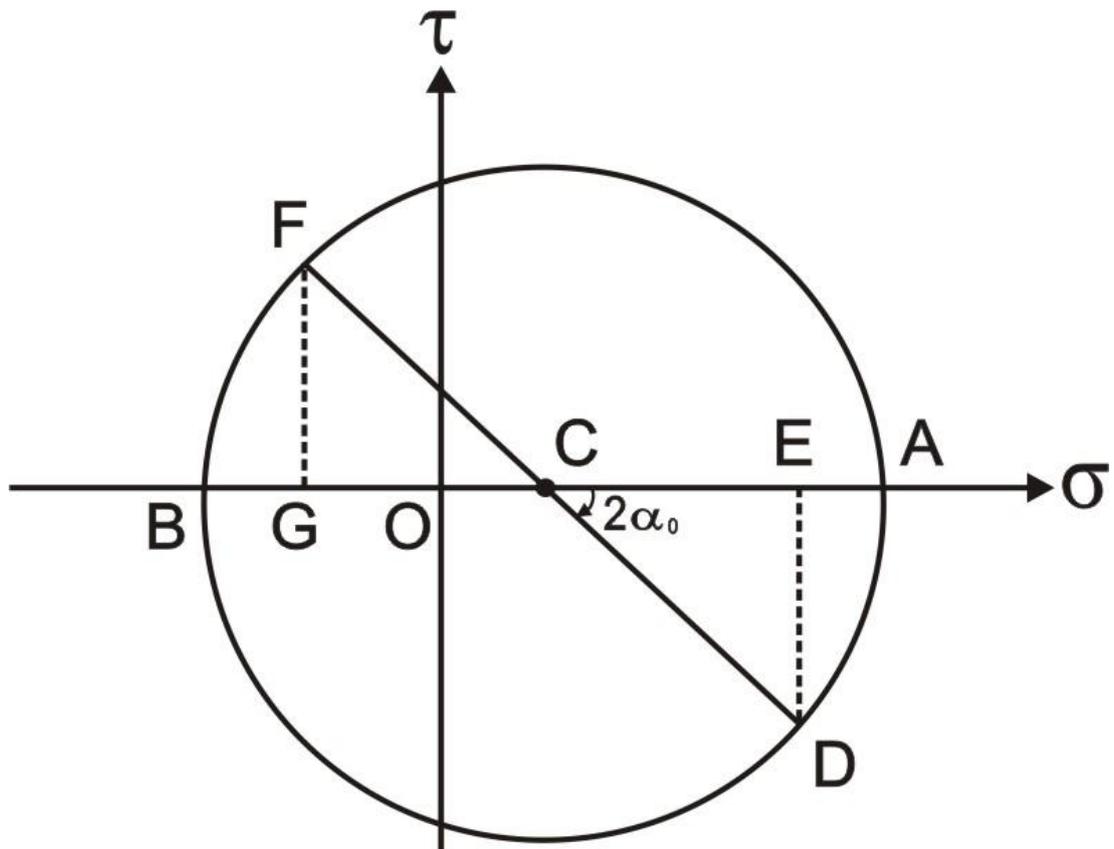


Fig. 2.15

Como se puede apreciar, los resultados obtenidos concuerdan con los del cálculo analítico.

PROBLEMA 2.6 Los esfuerzos en un punto de un cuerpo elástico, en estado plano de esfuerzos, son $\sigma_x = 800\text{kg/cm}^2$, $\sigma_y = -600\text{kg/cm}^2$, $\tau_{xy} = 400\text{kg/cm}^2$. Determinar la orientación de los planos que solo tienen esfuerzo cortante y el valor del esfuerzo cortante en cada uno de dichos planos.

Solución:

Esquematizamos en la figura 2.16 los esfuerzos indicados en el problema:

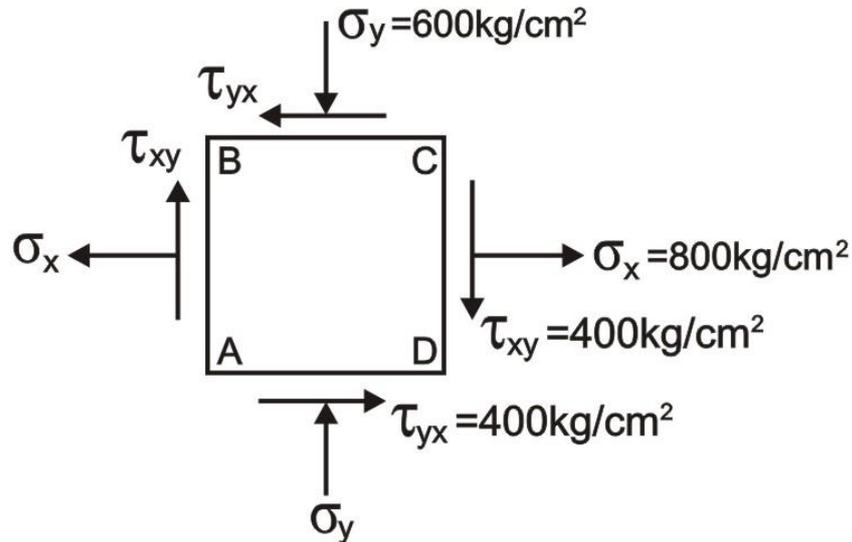


Fig. 2.16

Para el presente caso, se tendrá que analizar cuando $\sigma_\alpha = 0$

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha = 0$$

$$\frac{800 - 600}{2} + \frac{800 - (-600)}{2} \cos 2\alpha - 400 \sin 2\alpha = 0$$

$$100 + 700 \cos 2\alpha - 400 \sin 2\alpha = 0$$

$$100(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + 700(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) - 400(2 \sin \alpha \cos \alpha) = 0$$

$$4 \cos^2 \alpha - 4 \sin \alpha \cos \alpha - 3 \sin^2 \alpha = 0$$

Factorizamos:

$$(2 \cos \alpha - 3 \sin \alpha)(2 \cos \alpha + \sin \alpha) = 0$$

Como se comprenderá, tendremos dos soluciones, las cuales las analizaremos en forma separada.

1ra solución:

$$2 \cos \alpha - 3 \sin \alpha = 0$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3} \Rightarrow \alpha = 33,69^\circ$$

En consecuencia:

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha$$

$$\tau_{\alpha=33,69^{\circ}} = \frac{800 - (-600)}{2} \operatorname{sen} 67,38^{\circ} + 400 \cos 67,38^{\circ}$$

$$\tau_{\alpha=33,69^{\circ}} = 800 \text{ kg/cm}^2$$

Esquematzamos la respuesta, tal como se muestra en la figura 2.17

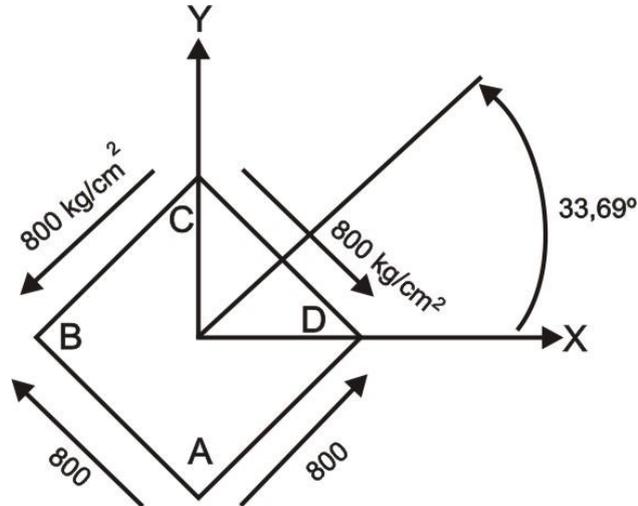


Fig. 2.17

2da solución:

$$2 \cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha = 0$$

$$\operatorname{tg} \alpha = -2 \Rightarrow \alpha = -63,43^{\circ}$$

En consecuencia:

$$\tau_{\alpha=-63,43^{\circ}} = \frac{800 - (-600)}{2} \operatorname{sen}(-126,86^{\circ}) + 400 \cos(-126,86^{\circ})$$

$$\tau_{\alpha=-63,43^{\circ}} = -800 \text{ kg/cm}^2$$

Esquematzamos la respuesta, tal como se muestra en la figura 2.18

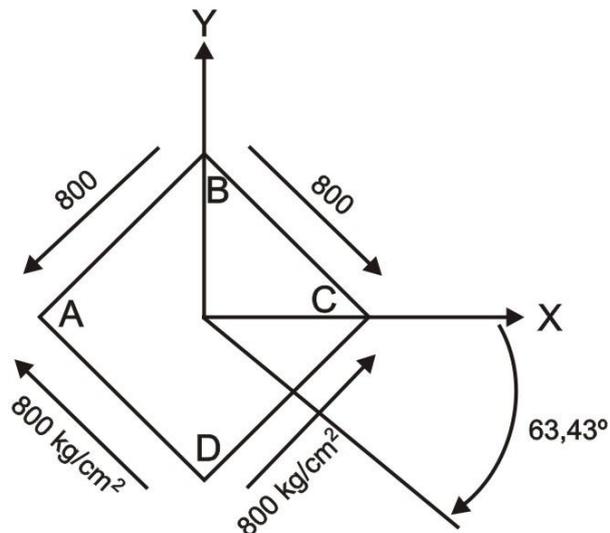


Fig. 2.18

Nótese que α es positivo si va en sentido antihorario y negativo si va en sentido horario, lo que concuerda con lo mostrado en la figura 2.4 de la parte teórica.

2.4 ESFUERZO ESPACIAL

PROBLEMA 2.7 Para el estado de esfuerzos de la figura 2.19, graficar el círculo de Mohr para la serie de planos paralelos a cada uno de los esfuerzos principales. Determinar el esfuerzo tangencial máximo, el esfuerzo normal y tangencial en el plano, cuya normal forma un ángulo $\alpha = 30^\circ$ con la dirección de σ_1 y es perpendicular al vector σ_3 .

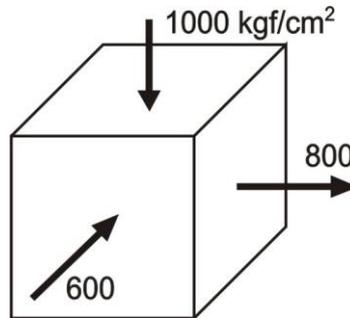


Fig. 2.19

Solución:

El estado de esfuerzos que se muestra en la figura 2.19 es espacial o triaxial, siendo todos los esfuerzos principales, cuyos valores son $\sigma_1 = 800 \text{ kgf/cm}^2$, $\sigma_2 = -600 \text{ kgf/cm}^2$ y $\sigma_3 = -1000 \text{ kgf/cm}^2$.

Para graficar los círculos de Mohr, trazamos a partir del inicio del sistema de coordenados (punto O), el segmento $OL = \sigma_1$ (hacia la derecha por ser positivo), $OK = \sigma_2$ (a la izquierda por ser negativo) y $OM = \sigma_3$ (izquierda), tal como se muestra en la figura 2.20. Luego dividimos en dos, los segmentos KL , ML y MK , obteniéndose los puntos O_1 , O_2 y O_3 , que son los centros de los círculos de Mohr. Trazamos cada uno de los círculos, para la serie de planos paralelos a cada uno de los esfuerzos principales (figura 2.20).

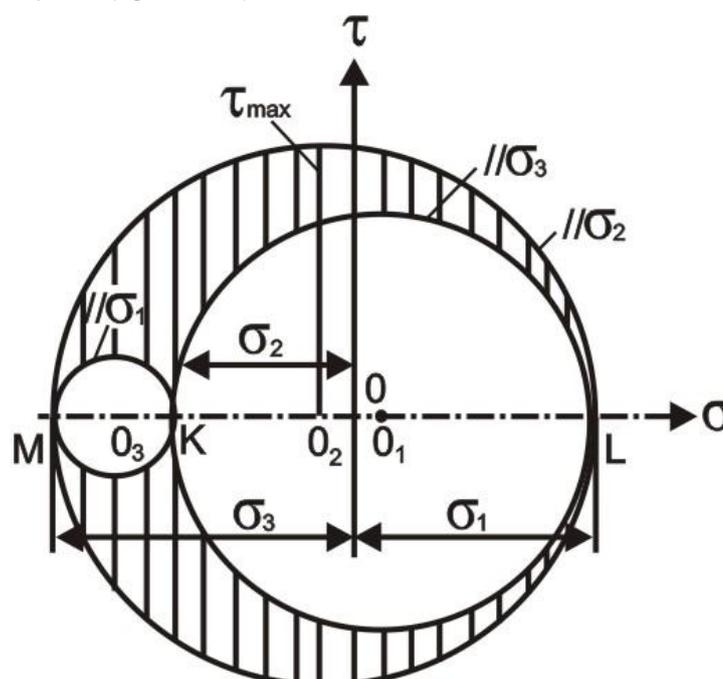


Fig. 2.20

El esfuerzo tangencial máximo, lo obtenemos como el radio mayor de todos los círculos de Mohr, esto es para el círculo de Mohr paralelo a σ_2 , siendo:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{800 - (-1000)}{2} = 900 \text{kgf / cm}^2$$

El plano, en el cual se pide determinar los esfuerzos normal y tangencial, cuya normal forma un ángulo $\alpha = 30^\circ$ con σ_1 y es perpendicular a σ_3 , se muestra en la figura 2.21,a. El círculo de Mohr, para tal estado de esfuerzos, se muestra en la figura 2.21,b. Para ello, a partir del punto L se trazará una paralela a σ_1 y del punto K una paralela a σ_2 , intersecándose en el mismo punto K, que viene a ser el polo del círculo de Mohr para el caso específico. A partir del punto K se trazará una paralela a la normal η , intersecándose con el círculo de Mohr de radio $O_1L = O_1K$ en el punto C, el cual de acuerdo a la escala requerida nos dará los valores de los esfuerzos normal $\sigma_{\alpha=30^\circ}$ y tangencial $\tau_{\alpha=30^\circ}$.

Efectuamos esta última parte del cálculo en forma analítica, utilizando las fórmulas 2.1 y 2.2, es decir:

$$\sigma_{\alpha=30^\circ} = \frac{800 + (-600)}{2} + \frac{800 - (-600)}{2} \cos 60^\circ = 450 \text{kgf / cm}^2$$

$$\tau_{\alpha=30^\circ} = \frac{800 - (-600)}{2} \sin 60^\circ = 606,22 \text{kgf / cm}^2$$

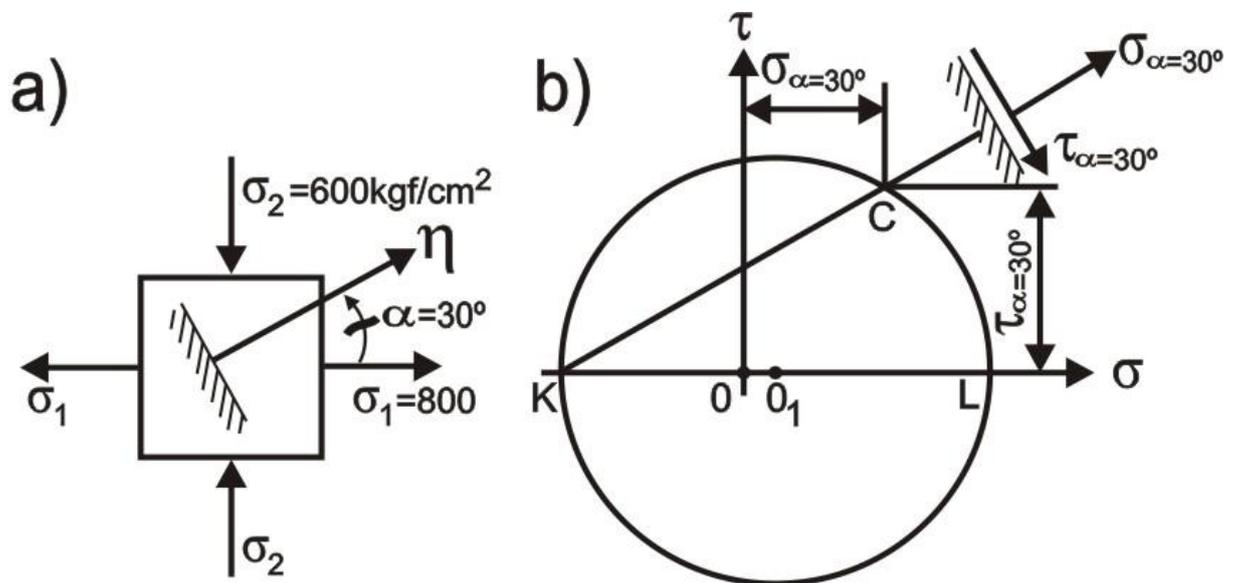


Fig. 2.21

PROBLEMA 2.8 Determinar los esfuerzos principales y el esfuerzo tangencial máximo para el estado de esfuerzos de la figura 2.22

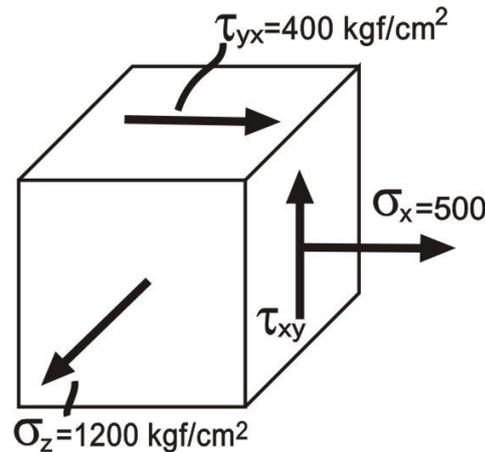


Fig. 2.22

Solución:

De acuerdo al gráfico podemos indicar que $\sigma_x = 500 \text{ kgf/cm}^2$, $\sigma_y = 0$, $\sigma_z = 1200 \text{ kgf/cm}^2$, $\tau_{xy} = -400 \text{ kgf/cm}^2$, $\tau_{xz} = 0$ y $\tau_{yz} = 0$.

Luego, aplicamos la fórmula 2.12 y obtenemos:

$$I_1 = 500 + 1200 = 1700$$

$$I_2 = 500 \cdot 1200 - (-400)^2 = 440000$$

$$I_3 = -1200 \cdot (-400)^2 = -192000000$$

De esta manera, la ecuación cúbica será:

$$\sigma^3 - 1700\sigma^2 + 440000\sigma + 192000000 = 0$$

De donde:

$$\sigma_1 = 1200 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\sigma_2 = 721,7 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\sigma_3 = -221,7 \text{ kgf/cm}^2$$

Ahora calculamos el esfuerzo tangencial máximo:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{1200 - (-221,7)}{2} = 710,85 \text{ kgf/cm}^2$$

PROBLEMA 2.9 Si $\sigma_x = 30 \text{ MPa}$, $\sigma_y = -25 \text{ MPa}$, $\sigma_z = 15 \text{ MPa}$, $\tau_{xy} = -8 \text{ MPa}$, $\tau_{xz} = 12 \text{ MPa}$, $\tau_{yz} = -10 \text{ MPa}$. Determinar los esfuerzos principales y los ángulos que forman cada uno de ellos con los ejes coordenados OX, OY, OZ.

Solución:

Antes de iniciar la solución del presente problema, debemos de tener bien en claro la orientación positiva de los esfuerzos normales y tangenciales en las tres caras principales, que en las otras caras del cubo, serán en sentido opuesto para el equilibrio de esfuerzos. Es por ello, que en la figura 2.23 se muestra la orientación positiva de los esfuerzos.

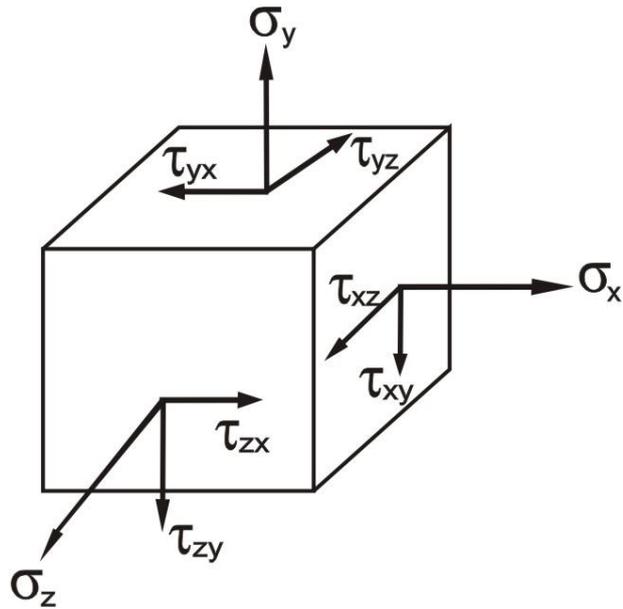


Fig. 2.23

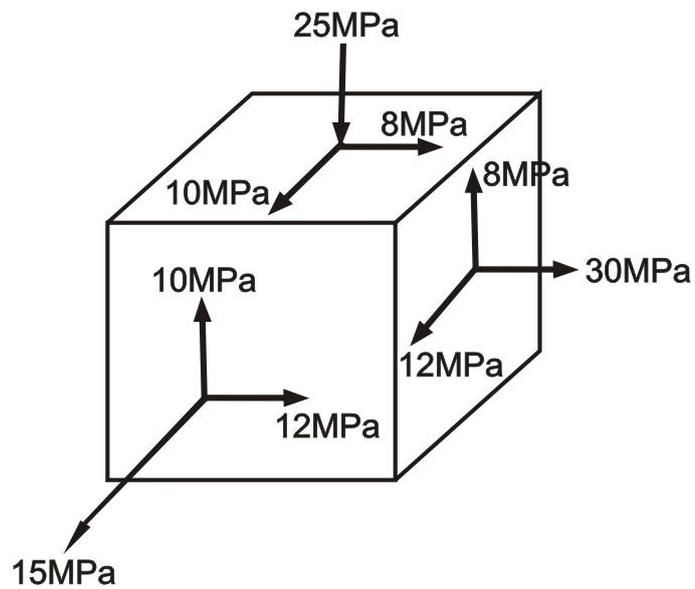


Fig. 2.24

En la figura 2.24 se muestra la distribución de los esfuerzos del presente problema, esquematizados en las caras principales del cubo, que en las restantes serán opuestas.

Ahora, resolvemos la ecuación cúbica para determinar los esfuerzos principales.

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0$$

Donde:

$$I_1 = 30 - 25 + 15 = 20$$

$$I_2 = 30(-25) + 30(15) + (-25)(15) - (-8)^2 - (12)^2 - (-10)^2 = -983$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} 30 & -8 & 12 \\ -8 & -25 & -10 \\ 12 & -10 & 15 \end{vmatrix} = -9690$$

Reemplazamos valores, quedando la ecuación cúbica de la siguiente forma:

$$\sigma^3 - 20\sigma^2 - 983\sigma + 9690 = 0$$

Resolvemos la ecuación cúbica y ordenamos de mayor a menor:

$$\sigma_1 = 38,874\text{MPa}$$

$$\sigma_2 = 8,956\text{MPa}$$

$$\sigma_3 = -27,83\text{MPa}$$

Los ángulos que forman cada uno de los esfuerzos principales con los ejes coordenados OX, OY, OZ se denominan *ángulos directores* y los calculamos para cada esfuerzo principal en forma separada.

ÁNGULOS DIRECTORES PARA σ_1 :

Se resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$(\sigma_1 - \sigma_x)k - \tau_{xy}m - \tau_{xz}n = 0$$

$$-\tau_{xy}k + (\sigma_1 - \sigma_y)m - \tau_{yz}n = 0$$

$$-\tau_{xz}k - \tau_{yz}m + (\sigma_1 - \sigma_z)n = 0$$

Donde k, m, n son los cosenos directores.

Reemplazamos valores y obtenemos:

$$8,874k + 8m - 12n = 0 \quad (\text{a})$$

$$8k + 63,874m + 10n = 0 \quad (\text{b})$$

$$-12k + 10m + 23,874n = 0 \quad (\text{c})$$

Resolvemos las ecuaciones (b) y (c), expresando "k" en función de "m":

$$k = -4,582m$$

Resolvemos (a) y (b), expresando "n" en función de "m":

$$n = -2,722m$$

Por el curso de Dinámica, sabemos que:

$$k^2 + m^2 + n^2 = 1$$

$$(-4,582m)^2 + m^2 + (-2,722m)^2 = 1$$

De donde:

$$m = 0,1844$$

$$k = -0,8449$$

$$n = -0,5019$$

Luego, determinamos los ángulos directores:

$$k = \cos \alpha_1 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \arccos(-0,8449) = 147,66^\circ$$

$$m = \cos \beta_1 \quad \Rightarrow \quad \beta_1 = \arccos(0,1844) = 79,37^\circ$$

$$n = \cos \gamma_1 \quad \Rightarrow \quad \gamma_1 = \arccos(-0,5019) = 120,12^\circ$$

Siendo:

α_1 - ángulo que forma σ_1 con el eje OX

β_1 - ángulo que forma σ_1 con el eje OY

γ_1 - ángulo que forma σ_1 con el eje OZ

ÁNGULOS DIRECTORES PARA σ_2 :

Efectuamos un proceso análogo al caso anterior.

$$(\sigma_2 - \sigma_x)k - \tau_{xy}m - \tau_{xz}n = 0$$

$$- \tau_{xy}k + (\sigma_2 - \sigma_y)m - \tau_{yz}n = 0$$

$$- \tau_{xz}k - \tau_{yz}m + (\sigma_2 - \sigma_z)n = 0$$

Reemplazamos valores y obtenemos:

$$- 21,044k + 8m - 12n = 0 \quad (d)$$

$$8k + 33,956m + 10n = 0 \quad (e)$$

$$- 12k + 10m - 6,044n = 0 \quad (f)$$

Resolvemos (e) y (f), expresando "k" en función de "m":

$$k = 4,260m$$

Resolvemos (d) y (e), expresando "n" en función de "m":

$$n = -6,803m$$

Luego:

$$k^2 + m^2 + n^2 = 1$$

$$(4,260m)^2 + m^2 + (-6,803m)^2 = 1$$

De donde:

$$m = 0,1236$$

$$k = 0,5265$$

$$n = -0,8408$$

Determinamos los ángulos directores:

$$k = \cos \alpha_2 \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = \arccos(0,5265) = 58,23^\circ$$

$$m = \cos \beta_2 \quad \Rightarrow \quad \beta_2 = \arccos(0,1236) = 82,90^\circ$$

$$n = \cos \gamma_2 \quad \Rightarrow \quad \gamma_2 = \arccos(-0,8408) = 147,22^\circ$$

Siendo:

α_2 - ángulo que forma σ_2 con el eje OX

β_2 - ángulo que forma σ_2 con el eje OY

γ_2 - ángulo que forma σ_2 con el eje OZ

ÁNGULOS DIRECTORES PARA σ_3 :

$$(\sigma_3 - \sigma_x)k - \tau_{xy}m - \tau_{xz}n = 0$$

$$-\tau_{xy}k + (\sigma_3 - \sigma_y)m - \tau_{yz}n = 0$$

$$-\tau_{xz}k - \tau_{yz}m + (\sigma_3 - \sigma_z)n = 0$$

Reemplazamos valores y obtenemos:

$$-57,83k + 8m - 12n = 0 \quad (g)$$

$$8k - 2,83m + 10n = 0 \quad (h)$$

$$-12k + 10m - 42,83n = 0 \quad (i)$$

Resolvemos (h) e (i), expresando "k" en función de "m":

$$k = 0,095m$$

Resolvemos (g) y (h), expresando "n" en función de "m":

$$n = 0,207m$$

Luego:

$$k^2 + m^2 + n^2 = 1$$

$$(0,095m)^2 + m^2 + (0,207m)^2 = 1$$

De donde:

$$m = 0,9750$$

$$k = 0,0926$$

$$n = 0,2018$$

Determinamos los ángulos directores:

$$k = \cos \alpha_3 \quad \Rightarrow \quad \alpha_3 = \arccos(0,0926) = 84,69^\circ$$

$$m = \cos \beta_3 \quad \Rightarrow \quad \beta_3 = \arccos(0,9750) = 12,84^\circ$$

$$n = \cos \gamma_3 \quad \Rightarrow \quad \gamma_3 = \arccos(0,2018) = 78,36^\circ$$

Siendo:

α_3 - ángulo que forma σ_3 con el eje OX

β_3 - ángulo que forma σ_3 con el eje OY

γ_3 - ángulo que forma σ_3 con el eje OZ

2.5 LEY DE HOOKE GENERALIZADA

PROBLEMA 2.10 Un cubo de aluminio de lado $a = 5\text{cm}$, se coloca libremente sin holguras en un cuerpo sólido indeformable, tal como se muestra en la figura 2.25 y es comprimido por una fuerza $P = 180\text{kN}$. Determinar los esfuerzos principales y deformaciones principales para cualquier punto del cubo. Calcular la deformación volumétrica y la variación absoluta de volumen, así como la densidad total de energía de deformación, densidad de la energía por variación de volumen y densidad de la energía por variación de forma. Considere $E = 0,7 \cdot 10^5 \text{MPa}$, $\mu = 0,36$.

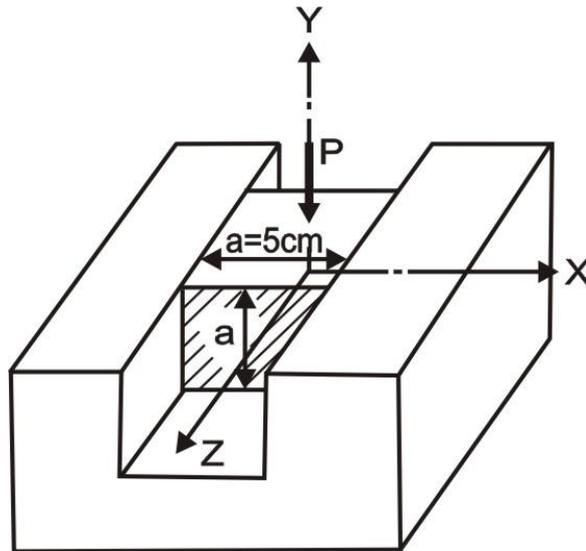


Fig. 2.25

Solución:

El cubo se encuentra en un estado de esfuerzo homogéneo (igual en todos sus puntos) y en consecuencia se puede aplicar la Ley de Hooke generalizada en su totalidad del elemento. El lado libre perpendicular al eje OZ está achurado y libre de esfuerzos, esto es $\sigma_z = 0$.

El esfuerzo en los lados superior e inferior del cubo será:

$$\sigma_y = -\frac{P}{a^2} = -\frac{180 \cdot 10^3}{5^2 \cdot 10^{-4}} = -7,2 \cdot 10^7 \text{ Pa}$$

El esfuerzo σ_x se determina a partir de la condición que la deformación en el eje OX es cero ($\varepsilon_x = 0$), debido a que por condición del problema el cuerpo donde se coloca el cubo, es sólido e indeformable.

A través de la Ley de Hooke generalizada, tenemos:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] = 0$$

De donde:

$$\sigma_x = \mu \sigma_y = 0,36 \cdot (-7,2 \cdot 10^7) = -259,2 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Finalmente, tenemos que:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_z = 0 \\ \sigma_2 &= \sigma_x = -259,2 \cdot 10^5 \text{ Pa} = -25,92 \text{MPa} \end{aligned}$$

$$\sigma_3 = \sigma_y = -72 \text{MPa}$$

Ahora determinamos las deformaciones principales:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] = \frac{1}{0,7 \cdot 10^5} [0 - 0,36(-25,92 - 72)] = 5,03 \cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_x = 0$$

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)] = \frac{1}{0,7 \cdot 10^5} [-72 - 0,36 \cdot (-25,92 + 0)] = -8,95 \cdot 10^{-4}$$

La deformación volumétrica será:

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = -8,95 \cdot 10^{-4} + 5,03 \cdot 10^{-4} = -3,92 \cdot 10^{-4}$$

De esta manera, la variación absoluta de volumen es:

$$\Delta V = e \cdot V = e \cdot a^3 = -3,92 \cdot 10^{-4} \cdot 5^3 = -0,049 \text{cm}^3 = -4,9 \cdot 10^{-8} \text{m}^3$$

Ahora calculamos la densidad total de energía de deformación:

$$u = \frac{1}{2 \cdot 0,7 \cdot 10^5} [(-25,92)^2 + (-72)^2 - 2 \cdot 0,36 \cdot \{(-25,92) \cdot (-72)\}] = 3222,97 \cdot 10^{-5} \text{MN.m/m}^3$$

$$u = 32229,7 \text{N.m/m}^3$$

Las densidades de la energía por variación de volumen y de forma serán:

$$u_{\text{vol}} = \frac{1 - 2 \cdot 0,36}{6 \cdot 0,7 \cdot 10^5} (-25,92 - 72)^2 = 639,22 \cdot 10^{-5} \text{MN.m/m}^3 = 6392,2 \text{N.m/m}^3$$

$$u_f = \frac{1 + 0,36}{6 \cdot 0,7 \cdot 10^5} [(25,92)^2 + (-25,92 + 72)^2 + (-72)^2] = 2583,75 \cdot 10^{-5} \text{MN.m/m}^3 = 25837,5 \text{N.m/m}^3$$

PROBLEMA 2.11 Una abrazadera rígida está compuesta por dos mitades, unidas entre sí por ocho pernos, tal como se muestra en la figura 2.26. Ambas partes comprimen a un prisma plástico, con coeficiente de Poisson $\mu = 0,4$. La fuerza que comprime al prisma plástico por su longitud es $P = 10 \text{T}$. Determinar el diámetro requerido de los pernos, menospreciando su deformación y el efecto de torsión al enroscarlo. Considere $[\sigma] = 1000 \text{kgf/cm}^2$ para los pernos.

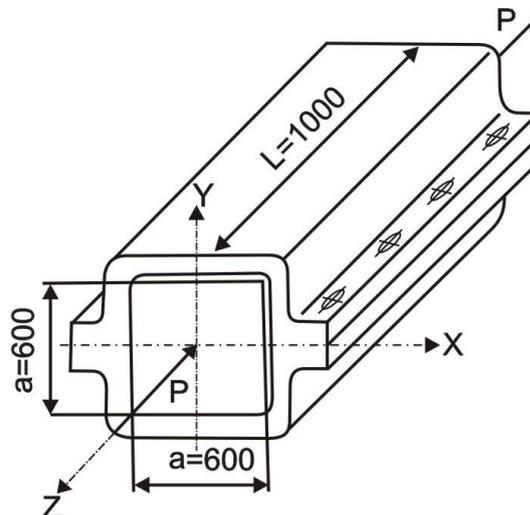


Fig. 2.26

Solución:

Debido a la compresión del prisma plástico, sus dimensiones de sección transversal deben de incrementarse, pero ante esta expansión se oponen las abrazaderas. Como resultado surgen las fuerzas de interacción entre las superficies del prisma y las abrazaderas. Se considera que el prisma es homogéneo.

Por condición del problema, las abrazaderas son absolutamente rígidas y la deformación de los pernos se desprecia, podemos indicar que las deformaciones del prisma en los ejes x e y son iguales a cero. Considerando además, que por simetría $\sigma_x = \sigma_y$ y aplicando la Ley de Hooke generalizada obtenemos:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] = 0$$

De donde:

$$\sigma_x (1 - \mu) = \mu \sigma_z$$

$$\sigma_x = \frac{\mu \sigma_z}{1 - \mu}$$

Siendo:

$$\sigma_z = -\frac{P}{a^2} = -\frac{10 \cdot 10^3}{60^2} = -2,78 \text{ kgf / cm}^2$$

Luego:

$$\sigma_x = -\frac{0,4 \cdot 2,78}{1 - 0,4} = -1,85 \text{ kgf / cm}^2$$

La fuerza total que actúa en los pernos será:

$$Q = a \cdot L \cdot |\sigma_x| = 60 \cdot 100 \cdot 1,85 = 11100 \text{ kgf}$$

Entonces, la fuerza que soportará un perno será:

$$Q_p = \frac{Q}{8} = \frac{11100}{8} = 1387,5 \text{ kgf}$$

De acuerdo a la condición de resistencia se tendrá:

$$\frac{Q_p}{A_p} \leq [\sigma]$$

A partir de esta condición, calculamos el diámetro requerido del perno:

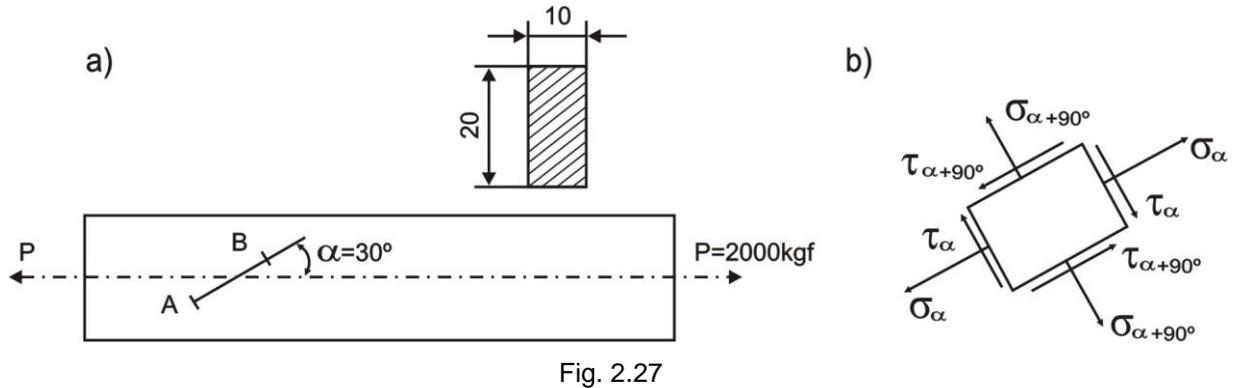
$$\frac{\pi \cdot d_p^2}{4} \geq \frac{Q_p}{[\sigma]}$$

$$d_p \geq \sqrt{\frac{4 \cdot Q_p}{\pi \cdot [\sigma]}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 1387,5}{\pi \cdot 1000}} = 1,33 \text{ cm}$$

Asumimos:

$$d_p = 1,33 \text{ cm}$$

PROBLEMA 2.12 En la figura 2.27,a se muestra una barra traccionada, en la cual se colocó un tensómetro AB. La base del tensómetro es $s = 20\text{mm}$, con coeficiente de aumento $k = 1000$, y muestra una medida $\delta_s = 6,5\text{mm}$. Determinar el coeficiente de Poisson del material de la barra, si $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kgf/cm}^2$.



Solución:

De la barra elegimos un elemento plano, paralelo a la base del tensómetro y perpendicular al mismo, tal como se muestra en la figura 2.27,b.

El esfuerzo en la sección transversal de la barra será:

$$\sigma_x = \sigma_1 = \frac{P}{A} = \frac{2000}{2.1} = 1000 \text{ kgf/cm}^2$$

Ahora determinamos los esfuerzos normales que surgen en los lados del elemento elegido, es decir:

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha = 1000 \cdot \cos^2 30^\circ = 750 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\sigma_{\alpha+90^\circ} = \sigma_1 \cos^2 (\alpha + 90^\circ) = \sigma_1 \sin^2 \alpha = 1000 \cdot \sin^2 30^\circ = 250 \text{ kgf/cm}^2$$

Escribimos la expresión que determina la deformación lineal en la dirección de la base del tensómetro:

$$\varepsilon_\alpha = \frac{1}{E} (\sigma_\alpha - \mu \sigma_{\alpha+90^\circ})$$

Por condición del problema, se puede determinar el valor numérico de la deformación indicada, esto es:

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\delta_s}{s \cdot k} = \frac{6,5}{20 \cdot 1000} = 3,25 \cdot 10^{-4}$$

De esta manera, igualamos ambas expresiones y obtenemos:

$$\frac{1}{2,1 \cdot 10^6} (750 - 250\mu) = 3,25 \cdot 10^{-4}$$

De donde:

$$\mu = \frac{750 - 682,5}{250} = 0,27$$

2.6 TEORIAS O CRITERIOS DE RESISTENCIA

PROBLEMA 2.13 Están dados los esfuerzos σ y τ uniformemente distribuidos por las aristas de una lámina triangular. Se pide equilibrar la lámina con esfuerzos en la tercera arista AC y comprobar la resistencia, teniendo en cuenta que el material de la lámina es frágil. Considerar $[\sigma] = 80\text{MPa}$, $\sigma = 2\tau = 20\text{MPa}$ y $\mu = 0,25$

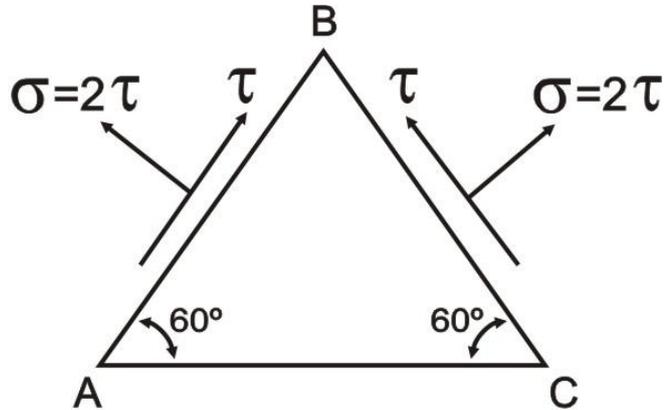


Fig. 2.28

Solución:

Analizamos el equilibrio en AC, proyectando todos los esfuerzos a un sistema de ejes coordenados y efectuando la suma en el eje vertical.

$$\sigma_1 = (2\tau \text{sen} 30^\circ) \cdot 2 + (\tau \text{sen} 60^\circ) \cdot 2 = 3,73\tau = 37,3\text{MPa}$$

Si proyectamos en el eje horizontal, veremos que el esfuerzo tangencial en dicha arista AC es cero, lo que implica que existe un único esfuerzo normal y, es por ello, que lo denotamos como σ_1 .

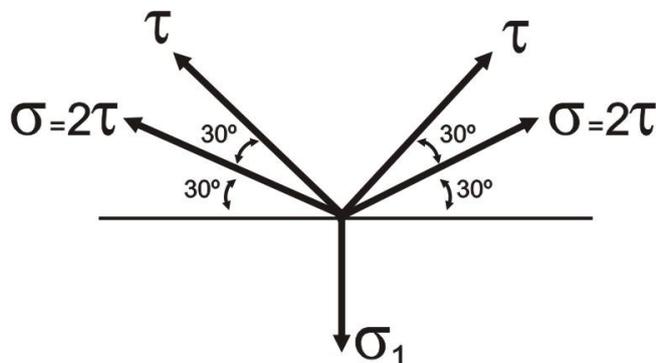


Fig. 2.29

Como se trata de un estado de esfuerzos plano, esto implica, que existe otro esfuerzo principal σ_2 , el cual lo calculamos por la fórmula 2.1, transformada de la siguiente forma:

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha$$

$$\sigma_\alpha = \frac{1}{2} [(\sigma_1 + \sigma_2)(\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha) + (\sigma_1 - \sigma_2)(\text{cos}^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha)]$$

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \text{cos}^2 \alpha + \sigma_2 \text{sen}^2 \alpha$$

Por dato del problema, se conocen los esfuerzos en las aristas AB y BC, cuyo ángulo $\alpha = 60^\circ$, entonces trabajamos con una de ellas.

Despejamos σ_2 de la fórmula transformada y obtenemos:

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_\alpha - \sigma_1 \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{2\tau - 3,73\tau(0,25)}{0,75} = 1,42\tau = 14,2\text{MPa}$$

Luego, comprobamos la condición de resistencia a través de la teoría de los alargamientos relativos máximos.

$$\sigma_{e,II} = \sigma_1 - \mu\sigma_2 = 37,3 - 0,25 \cdot 14,2 = 33,75\text{MPa} < [\sigma]$$

De esta manera, se comprueba que su comportamiento será óptimo, ya que se cumple con la condición de resistencia.

PROBLEMA 2.14 Con ayuda de la teoría de los esfuerzos tangenciales máximos, analizar cuál de los estados de esfuerzos representados en la figura es más peligroso desde el punto de vista de resistencia.

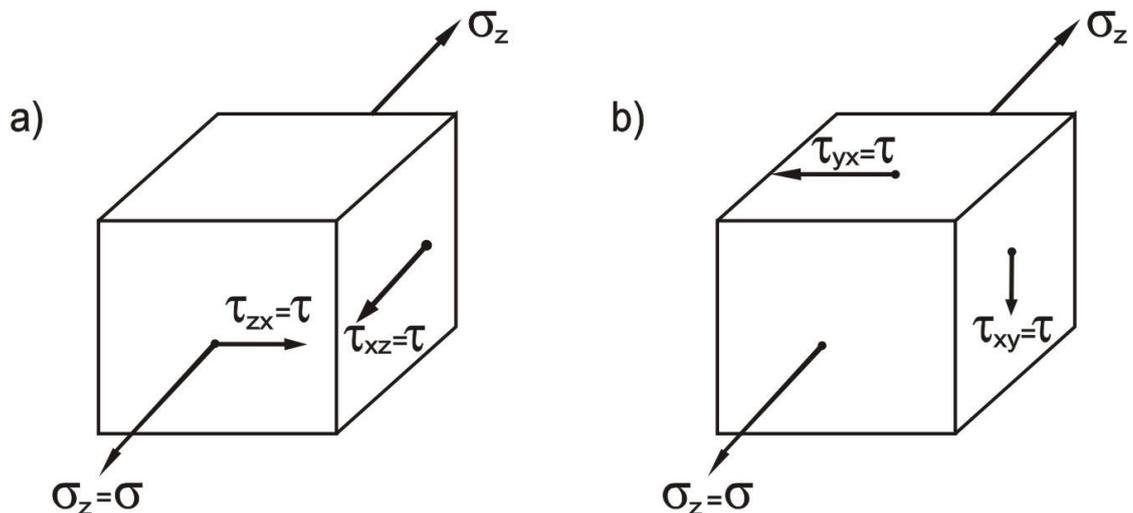


Fig. 2.30

Solución:

Analizamos cada uno de los casos, sabiendo que se cumple la Ley de reciprocidad de esfuerzos tangenciales, esto implica que $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ y $\tau_{yz} = \tau_{zy}$.

CASO "a":

Resolvemos la ecuación cúbica, con la finalidad de calcular los esfuerzos, pero lo expresamos de otra forma, con la finalidad de no confundir los valores dados de σ , quedando la ecuación de la siguiente manera:

$$S^3 - I_1 S^2 + I_2 S - I_3 = 0$$

Donde:

$$I_1 = \sigma_z = \sigma$$

$$I_2 = -\tau_{xz}^2 = -\tau^2$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \tau \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau & 0 & \sigma \end{vmatrix} = 0$$

Reemplazamos valores y obtenemos:

$$S^3 - \sigma S^2 - \tau^2 S = 0$$

$$S(S^2 - \sigma S - \tau^2) = 0$$

Por lo tanto, los esfuerzos principales son:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

$$\sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

En consecuencia:

$$\sigma_{e,III} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

CASO "b":

Efectuamos todo el proceso en forma análoga.

$$I_1 = \sigma_z = \sigma$$

$$I_2 = -\tau_{xy}^2 = -\tau^2$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{vmatrix} = -\sigma\tau^2$$

Reemplazamos valores y obtenemos:

$$S^3 - \sigma S^2 - \tau^2 S + \sigma\tau^2 = 0$$

$$(S - \sigma)(S + \tau)(S - \tau) = 0$$

De donde las raíces serán σ , τ y $-\tau$; motivo por el cual lo ordenamos teniendo en cuenta las dos formas siguientes:

$$1ra \text{ FORMA:} \quad \text{Si } \sigma > \tau \quad \Rightarrow \quad \sigma_1 = \sigma$$

$$\sigma_2 = \tau$$

$$\sigma_3 = -\tau$$

Luego:

$$\sigma_{e,III} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma + \tau$$

$$2da \text{ FORMA:} \quad \text{Si } \sigma < \tau \quad \Rightarrow \quad \sigma_1 = \tau$$

$$\sigma_2 = \sigma$$

$$\sigma_3 = -\tau$$

Luego:

$$\sigma_{e,III} = \sigma_1 - \sigma_3 = 2\tau$$

Ahora, analizamos la relación entre σ y τ , asumiendo, para ello, que $\sigma = k\tau$, siendo "k" una constante por determinar e igualamos el caso "a" con el caso "b" (1ra forma), obteniendo:

$$\sqrt{k^2\tau^2 + 4\tau^2} = (k+1)\tau$$

De donde:

$$k = 1,5$$

La 2da forma del caso "b" no cumple con la relación entre σ y τ , ya que el esfuerzo equivalente de la 3ra teoría depende únicamente de τ y no de σ , siendo su valor igual a cero, lo que es ilógico, debido a que por condiciones del problema si existe y es diferente de cero.

Finalmente, llegamos a las siguientes conclusiones:

1. Si $0 < \sigma < 1,5\tau$ el caso "a" es el más peligroso, por alcanzar el mayor esfuerzo equivalente
2. Si $\sigma = 1,5\tau$ ambos casos son iguales
3. Si $\sigma > 1,5\tau$ el caso "b" es el más peligroso, debido a que alcanza el mayor esfuerzo equivalente

PROBLEMA 2.15 La figura muestra el estado de esfuerzos en el punto más peligroso de una pieza fabricada de material frágil. El límite de resistencia mecánica del material en compresión es dos veces mayor que en tracción. Determinar cómo varía la resistencia de la pieza, al cambiar el esfuerzo de compresión $\sigma_y = -k\sigma_x$.

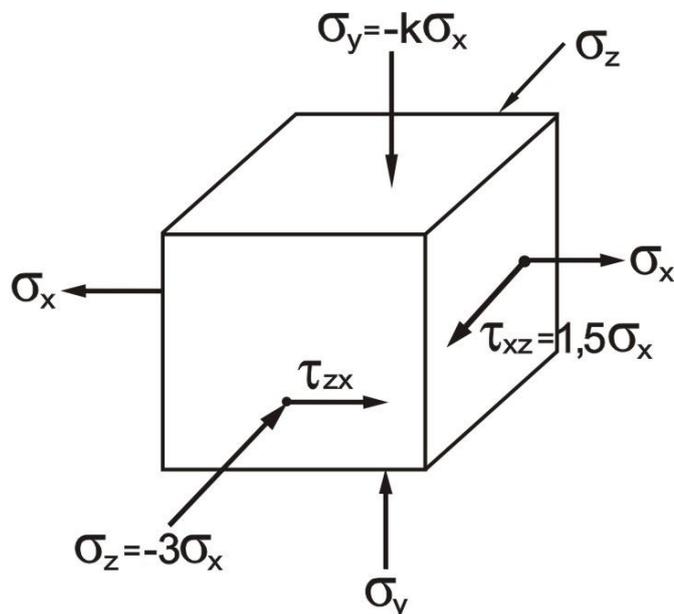


Fig. 2.31

Solución:

Resolvemos la ecuación cúbica:

$$S^3 - I_1 S^2 + I_2 S - I_3 = 0$$

Donde:

$$I_1 = \sigma_x - k\sigma_x - 3\sigma_x = -(2+k)\sigma_x$$

$$I_2 = \sigma_x(-k\sigma_x) + \sigma_x(-3\sigma_x) + (-k\sigma_x)(-3\sigma_x) - (1,5\sigma_x)^2 = (2k - 5,25)\sigma_x^2$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & 0 & 1,5\sigma_x \\ 0 & -k\sigma_x & 0 \\ 1,5\sigma_x & 0 & -3\sigma_x \end{vmatrix} = 5,25k\sigma_x^3$$

Reemplazamos valores y obtenemos:

$$S^3 + (2+k)\sigma_x S^2 + (2k - 5,25)\sigma_x^2 S - 5,25k\sigma_x^3 = 0$$

Luego, las raíces de la ecuación cúbica son:

$$S_1 = 1,5\sigma_x$$

$$S_2 = -k\sigma_x$$

$$S_3 = -3,5\sigma_x$$

Analizamos los siguientes casos:

1er CASO: Si $0 < k \leq 3,5 \Rightarrow \sigma_1 = 1,5\sigma_x$

$$\sigma_2 = -k\sigma_x$$

$$\sigma_3 = -3,5\sigma_x$$

Luego, aplicamos la teoría de Mohr:

$$\sigma_{e,v} = \sigma_1 - \frac{[\sigma]_{tr}}{[\sigma]_{comp}} \sigma_3 = 1,5\sigma_x - 0,5 \cdot (-3,5\sigma_x) = 3,25\sigma_x$$

Esto quiere decir, que la resistencia para este caso es constante.

2do CASO: Si $k > 3,5 \Rightarrow \sigma_1 = 1,5\sigma_x$

$$\sigma_2 = -3,5\sigma_x$$

$$\sigma_3 = -k\sigma_x$$

Luego:

$$\sigma_{e,v} = \sigma_1 - \frac{[\sigma]_{tr}}{[\sigma]_{comp}} \sigma_3 = 1,5\sigma_x - 0,5 \cdot (-k\sigma_x) = \left(\frac{3+k}{2} \right) \sigma_x$$

La resistencia depende de la constante "k" y es mayor que para el caso "a" en

una relación $\frac{3+k}{6,5}$

CAPITULO 3

TORSION

3.1 DEFINICIONES Y DEPENDENCIAS PRINCIPALES

En las secciones transversales de barras sometidas a torsión, solo surge una fuerza interna llamado *momento torsor* (T).

En cualquier parte de la sección transversal de la barra, el momento torsor es igual a la suma algebraica de los momentos torsores externos, actuantes a un lado de la sección analizada.

Para graficar el diagrama de momento torsor, hay que tener en cuenta, que no existe una convención internacional de signos, es por ello, la importancia de conservar la orientación del momento torsor hasta el final del problema y lo que nos indica la orientación de su resultante, es el giro que se produce en la sección transversal de la parte analizada de la estructura.

De ello, se desprende, que en los diagramas de momento torsor, no se colocan signo positivo, ni signo negativo, debido a la inexistencia de una convención internacional de signos.

La condición de resistencia de barras de sección circular o tubular, tiene la siguiente forma:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{T}{W_p} \leq [\tau] \quad (3.1)$$

Donde:

$\tau_{\text{máx}}$ - esfuerzo tangencial máximo, que surge en la sección transversal más peligrosa de la barra

T - momento torsor en la sección más peligrosa de la barra

$[\tau]$ - esfuerzo tangencial permisible en torsión

W_p - momento de resistencia polar de la sección

Asimismo, el momento de resistencia polar para secciones circulares y tubulares es:

SECCION CIRCULAR:

$$W_p = \frac{\pi \cdot d^3}{16} \approx 0,2d^3 \quad (3.2)$$

Donde:

d - diámetro de la sección circular.

SECCION TUBULAR:

$$W_p = \frac{\pi \cdot D^3}{16} (1 - c^4) \approx 0,2D^3 (1 - c^4) \quad (3.3)$$

Siendo:

$$c = \frac{d_0}{D}$$

Donde:

D - diámetro exterior del tubo

d_0 - diámetro interior del tubo

El ángulo de giro de una sección respecto a otra, se denomina *ángulo de torsión* del tramo de la barra entre ambas secciones.

El ángulo de giro en torsión de la barra o de un tramo específico de la misma, se determina por la fórmula 3.4 y su unidad es radian.

$$\phi = \int_0^L \frac{T dx}{GI_p} \quad (3.4)$$

Donde:

GI_p - rigidez de la sección en torsión

G - módulo de corte o cizallamiento

I_p - momento de inercia polar

El momento de inercia polar para secciones circulares y tubulares es:

SECCION CIRCULAR:

$$I_p = \frac{\pi.d^4}{32} \approx 0,1d^4 \quad (3.5)$$

SECCION TUBULAR:

$$I_p = \frac{\pi.D^4}{32}(1-c^4) \approx 0,1D^4(1-c^4) \quad (3.6)$$

Cuando el momento torsor T y el momento de inercia polar I_p son constantes, el ángulo de torsión se determina por la fórmula 3.7.

$$\phi = \frac{T.L}{GI_p} \quad (3.7)$$

La condición de rigidez en torsión tiene la forma:

$$\phi_0^{\text{máx}} = \frac{T}{GI_p} \leq [\phi_0] \quad (3.8)$$

Donde:

$\phi_0^{\text{máx}}$ - ángulo de torsión relativo máximo o ángulo de torsión máximo por metro lineal (rad/m)

$[\phi_0]$ - ángulo de torsión permisible por metro lineal (rad/m)

Las unidades de medida de la fórmula 3.8, para el momento torsor T es N.m, para el módulo de corte G en Pa y para el momento de inercia polar I_p en m^4 .

Si el momento torsor T está dado en kgf.cm, el módulo de corte G en kgf/cm^2 y el momento de inercia I_p en cm^4 , entonces el ángulo de torsión máximo por metro lineal estará dado en grad/m y se determinará por la fórmula 3.9.

$$\phi_0^{\text{máx}} = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{T.100}{GI_p} \leq [\phi_0] \quad (3.9)$$

3.2 TORSION DE BARRAS DE SECCION CIRCULAR

PROBLEMA 3.1 Graficar los diagramas de momento torsor y ángulo de giro en torsión para las barras de la figura 3.1, sometidas a momentos torsores distribuidos.

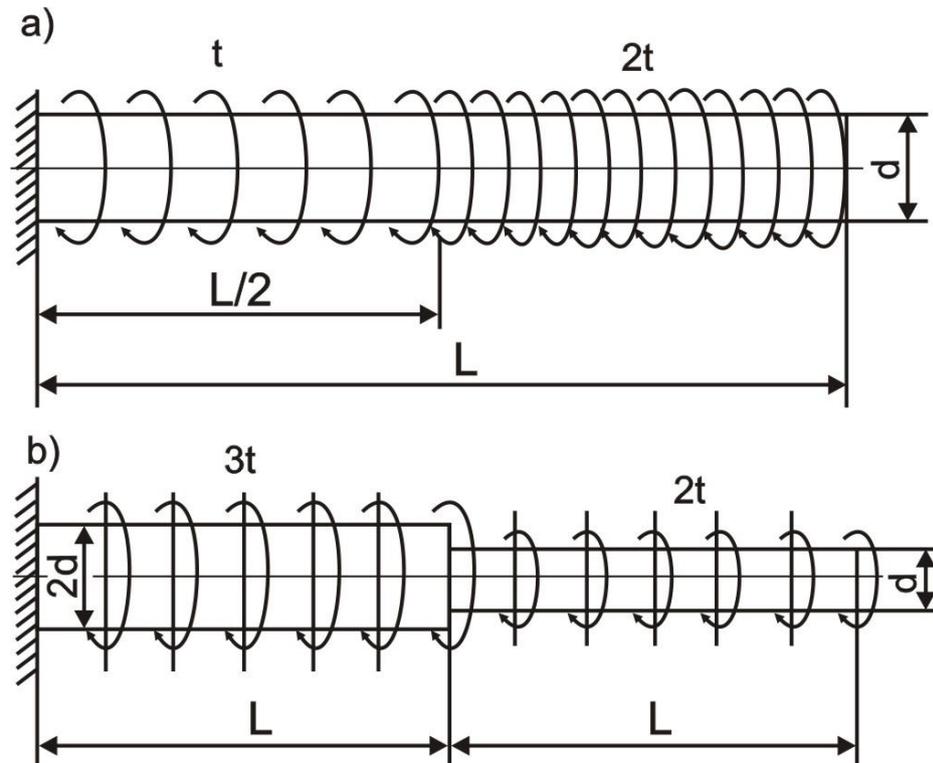


Fig. 3.1

Solución:

Graficamos el diagrama de momento torsor, tan igual que para cargas distribuidas en flexión, iniciando del extremo libre hacia el empotramiento, tal como se muestra en el diagrama T de la figura 3.2, correspondiente al caso a) del presente problema.

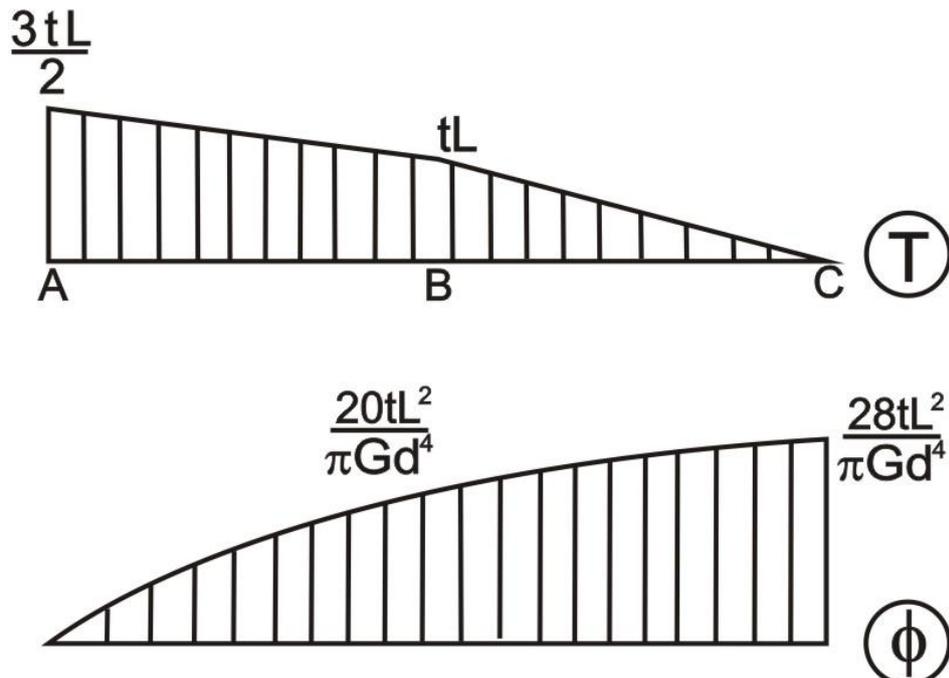


Fig. 3.2

Ahora, efectuamos el diagrama de ángulo de giro en torsión por dos metodologías: método de las áreas y proceso de integración, iniciando del extremo empotrado hacia el extremo libre, porque es conocido que en el empotramiento el ángulo de giro es cero.

METODO DE LAS AREAS:

$$\phi_A = 0$$

$$\phi_B = \frac{\left(\frac{3tL}{2} + tL\right)\frac{L}{2}}{2GI_p} = \frac{5tL^2}{8GI_p} = \frac{5tL^2}{8G\frac{\pi}{32}d^4} = \frac{20tL^2}{\pi Gd^4}$$

$$\phi_C = \phi_B + \frac{1}{2} \frac{tL\left(\frac{L}{2}\right)}{GI_p} = \frac{20tL^2}{\pi Gd^4} + \frac{tL^2}{4GI_p} = \frac{20tL^2}{\pi Gd^4} + \frac{tL^2}{4G\frac{\pi}{32}d^4} = \frac{28tL^2}{\pi Gd^4}$$

PROCESO DE INTEGRACION:

$$\phi_A = 0$$

$$\phi_B = \int_0^{L/2} \frac{(3tL/2 - tx)dx}{GI_p} = \frac{\frac{3tL^2}{4} - \frac{tL^2}{8}}{G\frac{\pi}{32}d^4} = \frac{20tL^2}{\pi Gd^4}$$

$$\phi_C = \frac{20tL^2}{\pi Gd^4} + \int_0^{L/2} \frac{2txdx}{GI_p} = \frac{20tL^2}{\pi Gd^4} + \frac{tL^2}{4G\frac{\pi}{32}d^4} = \frac{28tL^2}{\pi Gd^4}$$

Una vez calculados los valores, graficamos el diagrama, tal como se muestra en el diagrama ϕ de la figura 3.2.

En forma análoga efectuamos el caso b) del presente problema, graficando el diagrama de momento torsor, tal como se muestra en el diagrama T de la figura 3.3.

Una vez más, graficamos el diagrama de ángulo de giro en torsión por el método de las áreas y el proceso de integración, tal como se muestra en el diagrama ϕ de la figura 3.3.

METODO DE LAS AREAS:

$$\phi_A = 0$$

$$\phi_B = \frac{(5tL + 2tL)L}{2GI_{p(2d)}} = \frac{7tL^2}{2G\frac{\pi}{32}(2d)^4} = \frac{7tL^2}{\pi Gd^4}$$

$$\phi_C = \frac{7tL^2}{\pi Gd^4} + \frac{1}{2} \frac{(2tL)L}{GI_p} = \frac{7tL^2}{\pi Gd^4} + \frac{tL^2}{G\frac{\pi}{32}d^4} = \frac{39tL^2}{\pi Gd^4}$$

PROCESO DE INTEGRACION:

$$\phi_A = 0$$

$$\phi_B = \int_0^L \frac{(5tL - 3tx)dx}{GI_p(2d)} = \frac{5tL^2 - \frac{3tL^2}{2}}{G \frac{\pi}{32} (2d)^4} = \frac{7tL^2}{\pi Gd^4}$$

$$\phi_C = \frac{7tL^2}{\pi Gd^4} + \int_0^L \frac{2txdx}{GI_p} = \frac{7tL^2}{\pi Gd^4} + \frac{tL^2}{G \frac{\pi}{32} d^4} = \frac{39tL^2}{\pi Gd^4}$$

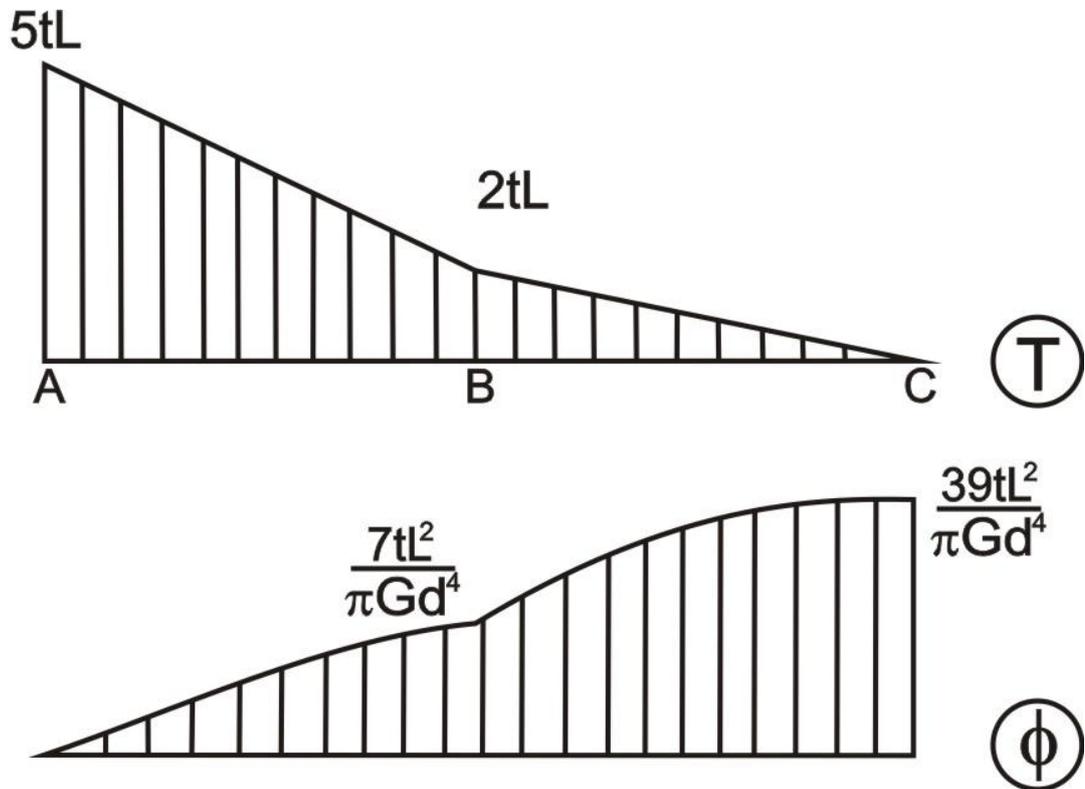


Fig. 3.3

PROBLEMA 3.2 Una barra sólida de diámetro 90mm es cambiada por una barra tubular, cuyo diámetro interior es 10% menor que el exterior. Determinar el diámetro exterior D y diámetro interior d_0 del tubo, si se debe de conservar su coeficiente de seguridad en resistencia. Compare los pesos de la barra sólida con la tubular.

Solución:

Para conservar el coeficiente de seguridad en resistencia, se debe de cumplir la condición de resistencia, es decir que W_p debe ser el mismo, ya que el momento torsor es el mismo por condición del problema.

$$W_{p(\text{sólida})} = W_{p(\text{tubular})}$$

$$\frac{\pi(90)^3}{16} = \frac{\pi D^3}{16} (1 - 0,9^4)$$

De donde:

$$D = 128,4\text{mm}$$

$$d_0 = 0,9.128,4 = 115,5\text{mm}$$

Ahora, comparamos los pesos en el cual se debe de entender que se trata de un mismo material, por lo tanto el peso específico es el mismo y la longitud de la barra también.

$$\frac{P_{(sólida)}}{P_{(tubular)}} = \frac{\gamma \cdot A_{(sólida)} \cdot L}{\gamma \cdot A_{(tubular)} \cdot L} = \frac{\frac{\pi}{4}(90)^2}{\frac{\pi}{4}(128,4^2 - 115,5^2)} = 2,57$$

PROBLEMA 3.3 Tres barras I, II y III tienen la misma área de sección transversal, siendo sometidas a momentos torsores T_1 , T_2 y T_3 . Determinar T_1 , T_2 y T_3 , si los esfuerzos tangenciales máximos que surgen en las barras son iguales y $[\tau] = \tau$.

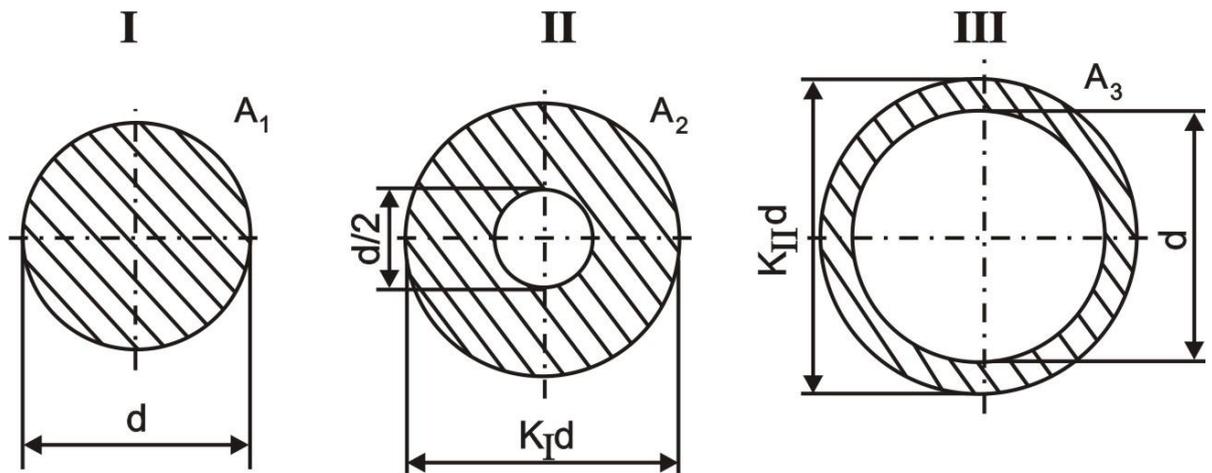


Fig. 3.4

Solución:

Analizamos las áreas, las cuales son las mismas para los tres casos, luego el momento de resistencia polar y a partir de ello determinamos los momentos torsores requeridos.

AREAS:

Por condición del problema:

$$A_1 = A_2 \Rightarrow \frac{\pi}{4}d^2 = \frac{\pi}{4}\left(k_I^2 d^2 - \frac{d^2}{4}\right) \quad \therefore \quad k_I = 1,12$$

$$A_1 = A_3 \Rightarrow \frac{\pi}{4}d^2 = \frac{\pi}{4}\left(k_{II}^2 d^2 - d^2\right) \quad \therefore \quad k_{II} = 1,41$$

MOMENTO POLAR:

$$W_{p1} = 0,2d^3$$

Para calcular W_{p2} , previamente calculamos la relación de los diámetros interior y exterior de la

sección tubular II, es decir $c_{II} = \frac{d/2}{1,12d} = 0,446$, luego:

$$W_{p2} = 0,2(1,12d)^3(1 - 0,446^4) = 0,27d^3$$

En forma análoga procedemos con la sección tubular III, siendo $c_{III} = \frac{d}{1,41d} = 0,709$

$$W_{p3} = 0,2(1,41d)^3(1 - 0,709^4) = 0,42d^3$$

MOMENTO TORSOR:

El momento torsor lo determinamos a partir de la condición de resistencia (fórmula 3.1).

$$T_1 = 0,2d^3\tau$$

$$T_2 = 0,27d^3\tau$$

$$T_3 = 0,42d^3\tau$$

PROBLEMA 3.4 Determinar los valores de los momentos torsores T_1 y T_2 , si $\phi_B = 1^\circ$, $\phi_C = 2^\circ$,

$$G = 8 \cdot 10^4 \text{ MPa}$$

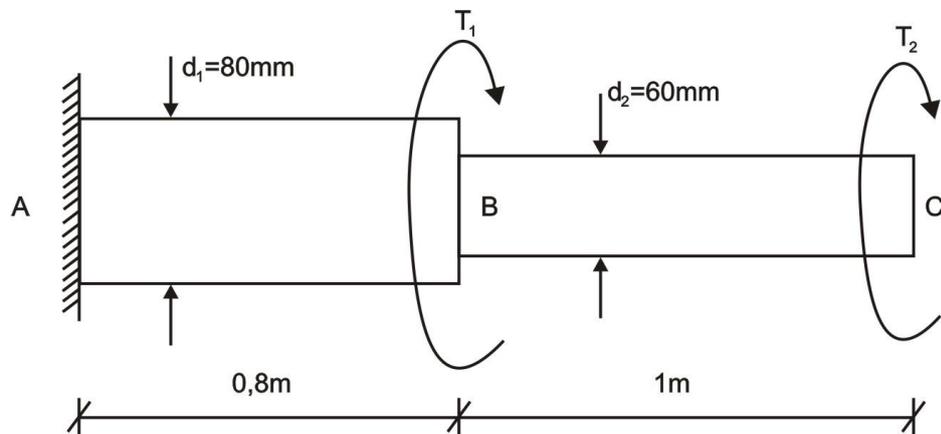


Fig. 3.5

Solución:

Graficamos el diagrama de momento torsor, el cual se muestra en la figura 3.6

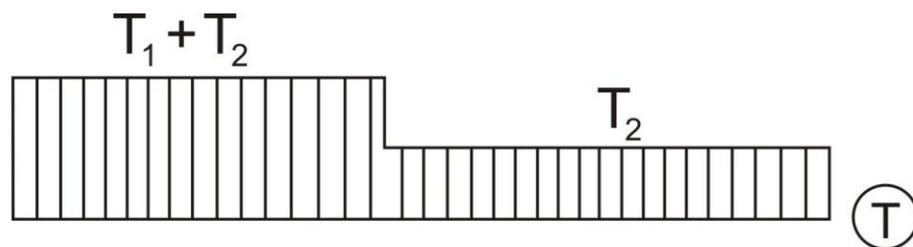


Fig. 3.6

Por dato del problema:

$$\phi_B = 1^\circ = \frac{\pi}{180}$$

$$\phi_C = 2^\circ = \frac{\pi}{90}$$

Luego:

$$\phi_B = \frac{(T_1 + T_2) \cdot 0,8}{8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \cdot \frac{\pi}{32} \cdot 80^4 \cdot 10^{-12}} = \frac{\pi}{180}$$

$$T_1 + T_2 = 7018,38 \quad (a)$$

$$\phi_c = \frac{(T_1 + T_2) \cdot 0,8}{8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \cdot \frac{\pi}{32} \cdot 80^4 \cdot 10^{-12}} + \frac{T_2 \cdot 1}{8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \cdot \frac{\pi}{32} \cdot 60^4 \cdot 10^{-12}} = \frac{\pi}{90} \quad (b)$$

Reemplazamos (a) en (b) y obtenemos:

$$\frac{\pi}{180} + \frac{T_2 \cdot 1}{8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \cdot \frac{\pi}{32} \cdot 60^4 \cdot 10^{-12}} = \frac{\pi}{90}$$

$$T_2 = 1776,53 \text{ N.m}$$

Reemplazamos este valor en la ecuación (a) y obtenemos:

$$T_1 = 5241,85 \text{ N.m}$$

3.3 ESTRUCTURAS ESTATICAMENTE INDETERMINADAS

PROBLEMA 3.5 Determinar la energía potencial de deformación de la barra escalonada doblemente empotrada, mostrada en la figura 3.7

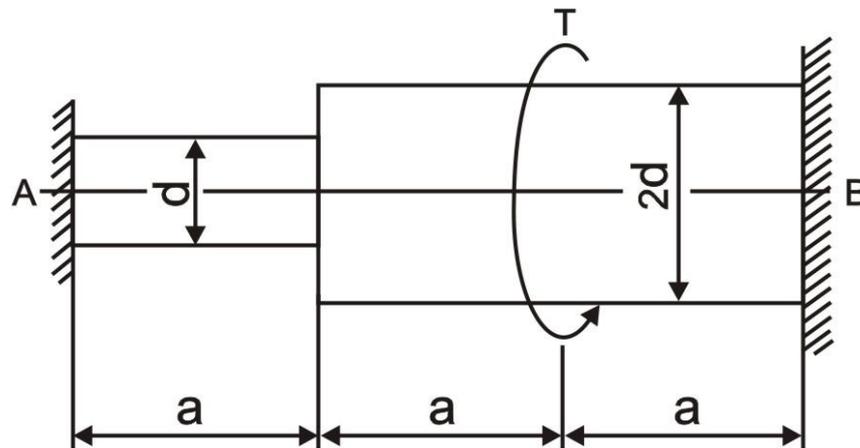


Fig. 3.7

Solución:

Eliminamos el empotramiento en B y lo reemplazamos por su momento torsor T_B , tal como se muestra en la figura 3.8

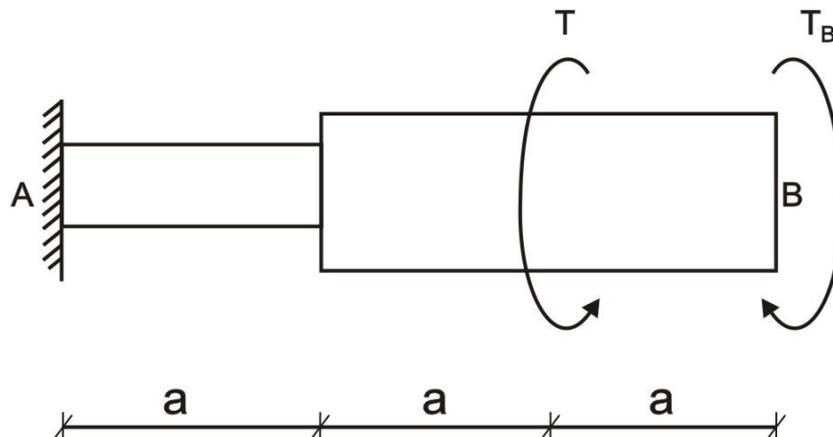


Fig. 3.8

Como en el empotramiento, el ángulo de giro en torsión es cero, se tendrá:

$$\phi_B = 0$$

$$\frac{T_B(2a)}{GI_{p(2d)}} + \frac{T_B(a)}{GI_{p(d)}} - \frac{T(a)}{GI_{p(2d)}} - \frac{T(a)}{GI_{p(d)}} = 0$$

$$\frac{2T_B}{0,1(16d^4)} + \frac{T_B}{0,1d^4} - \frac{T}{0,1(16d^4)} - \frac{T}{0,1d^4} = 0$$

$$T_B = 0,944T$$

En consecuencia, el diagrama de momento torsor será el mostrado en la figura 3.9

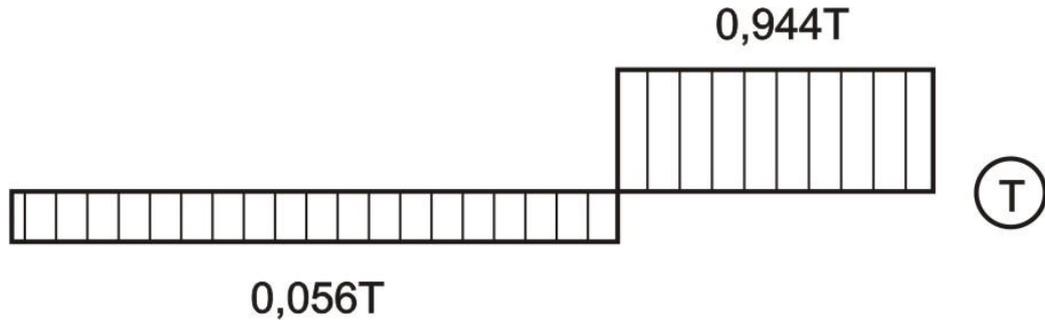


Fig. 3.9

De esta manera, calculamos la energía potencial de deformación:

$$U = \sum_1^3 \frac{T_i^2 L_i}{2G_i I_{p(i)}} = \frac{(0,056T)^2 a}{2GI_{p(d)}} + \frac{(0,056T)^2 a}{2GI_{p(2d)}} + \frac{(0,944T)^2 a}{2GI_{p(2d)}} = 0,295 \frac{T^2 a}{Gd^4}$$

PROBLEMA 3.6 Determinar el momento torsor permisible que actúa en la sección B de la barra, si $[\tau] = 900 \text{ kgf/cm}^2$.

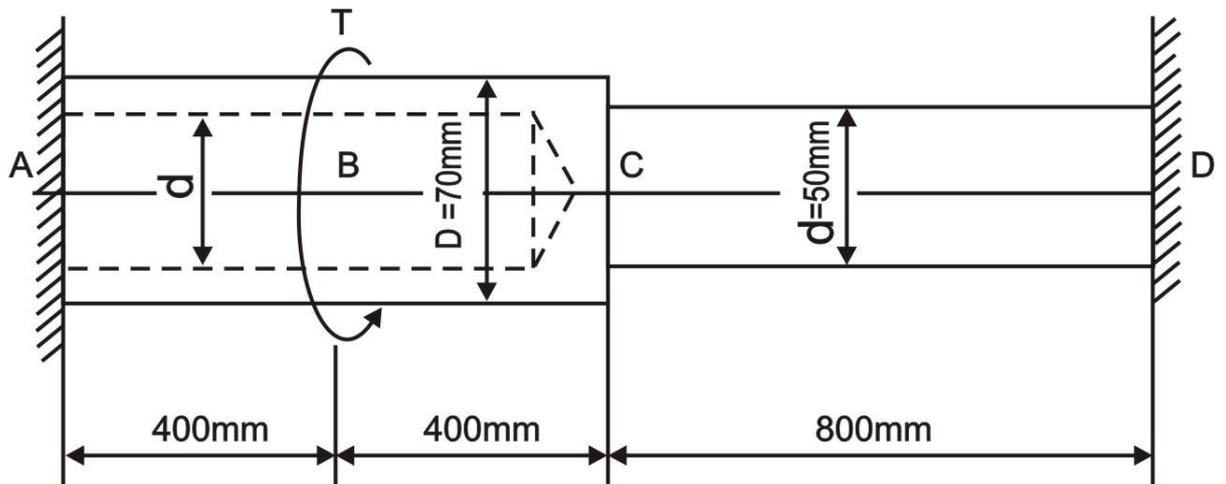


Fig. 3.10

Solución:

Una vez más eliminamos el empotramiento en D y lo reemplazamos por T_D , tal como se muestra en la figura 3.11

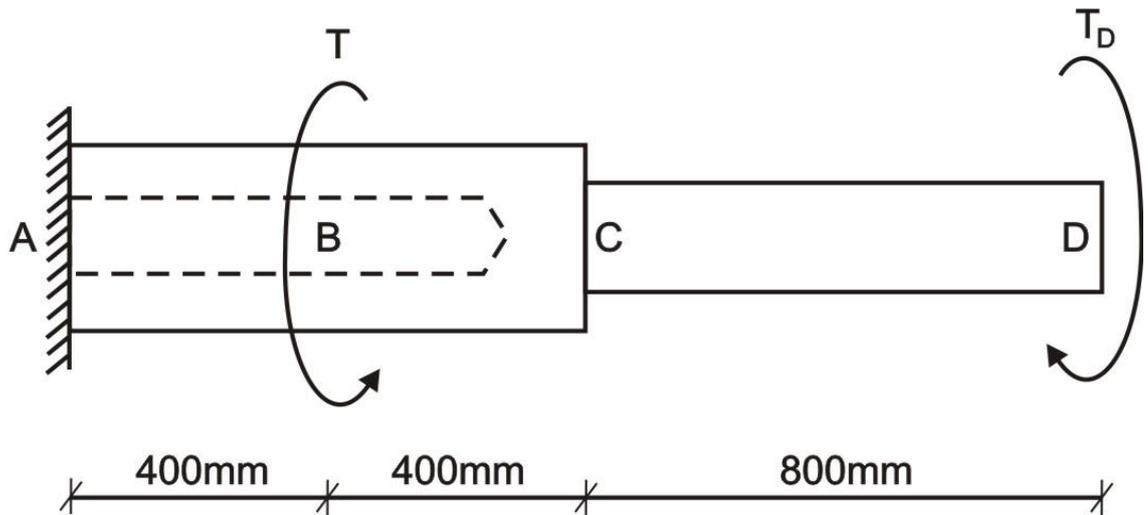


Fig. 3.11

Como el ángulo de giro en torsión en dicho punto es cero, se tendrá:

$$\phi_D = 0$$

$$\frac{T_D(80)}{GI_{p(d)}} + \frac{T_D(80)}{GI_{p(D,d)}} - \frac{T(40)}{GI_{p(D,d)}} = 0$$

$$\frac{2T_D}{0,1(5)^4} + \frac{2T_D}{0,1(7)^4(1-0,714^4)} - \frac{T}{0,1(7)^4(1-0,714^4)} = 0$$

$$T_D = 0,13T$$

Luego, graficamos el diagrama de momento torsor, tal como se muestra en la figura 3.12

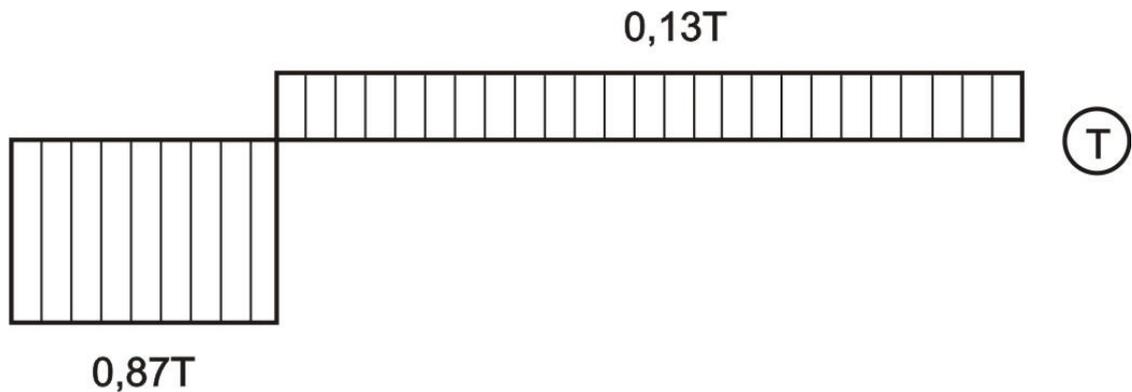


Fig. 3.12

Ahora, determinamos los esfuerzos tangenciales para cada tramo y a partir de la condición de resistencia, calculamos el momento torsor.

$$\tau_{AB} = \frac{0,87T}{0,2(7)^3(1-0,714^4)} \leq 900 \quad \Rightarrow \quad T \leq 52522 \text{kgf.cm}$$

$$\tau_{BC} = \frac{0,13T}{0,2(7)^3(1-0,714^4)} \leq 900 \quad \Rightarrow \quad T \leq 351494 \text{kgf.cm}$$

$$\tau_{CD} = \frac{0,13T}{0,2(5)^3} \leq 900 \quad \Rightarrow \quad T \leq 173077 \text{kgf.cm}$$

Como el momento torsor es único, analizamos el rango que cumpla con los tres casos, tal como se muestra en la figura 3.13.

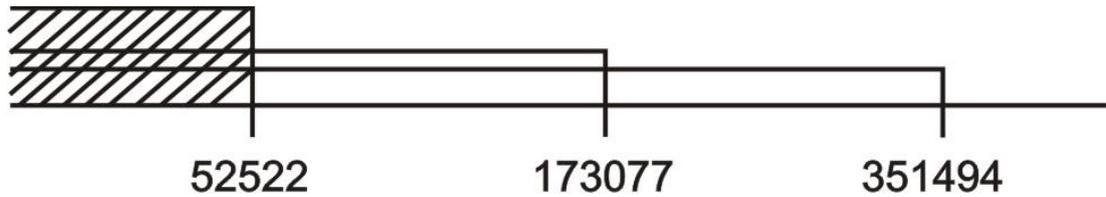


Fig. 3.13

De esta manera, se tiene que el momento torsor permisible es:

$$T_{\text{máx}} = 52522 \text{kgf} \cdot \text{cm}$$

PROBLEMA 3.7 Determinar los valores de los momentos torsores T_A y T_B para la barra ahusada de sección circular, cuyo diámetro varía desde $d_A = d$ hasta $d_B = 2d$ y está sometida a la acción del momento torsor distribuido linealmente variable desde $t_{x=0} = t$ hasta $t_{x=L} = 3t$

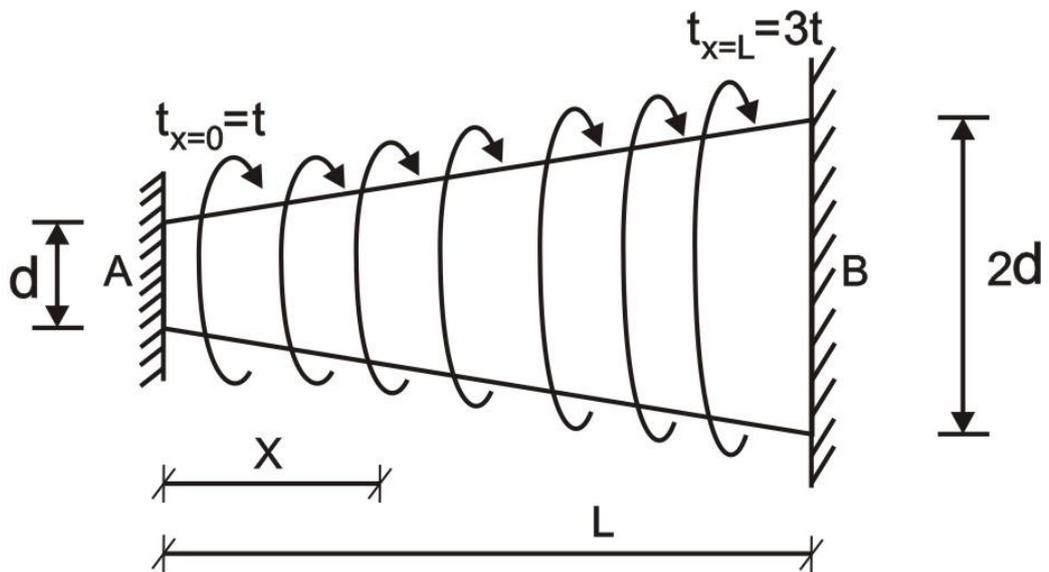


Fig. 3.14

Solución:

Analizamos como varía el diámetro en toda la longitud de la barra.

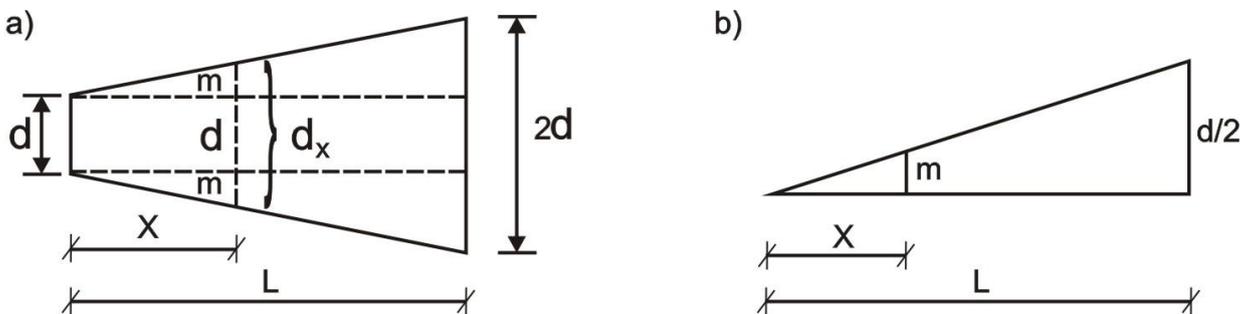


Fig. 3.15

De la figura 3.15,b se tiene:

$$\frac{m}{x} = \frac{d/2}{L} \quad \Rightarrow \quad m = \frac{dx}{2L}$$

De la figura, 3.15,a se tiene:

$$d_x = d + 2m = d + 2\left(\frac{dx}{2L}\right) = d + \frac{dx}{L} = d\left(1 + \frac{x}{L}\right)$$

Ahora, analizamos como varía el momento torsor:

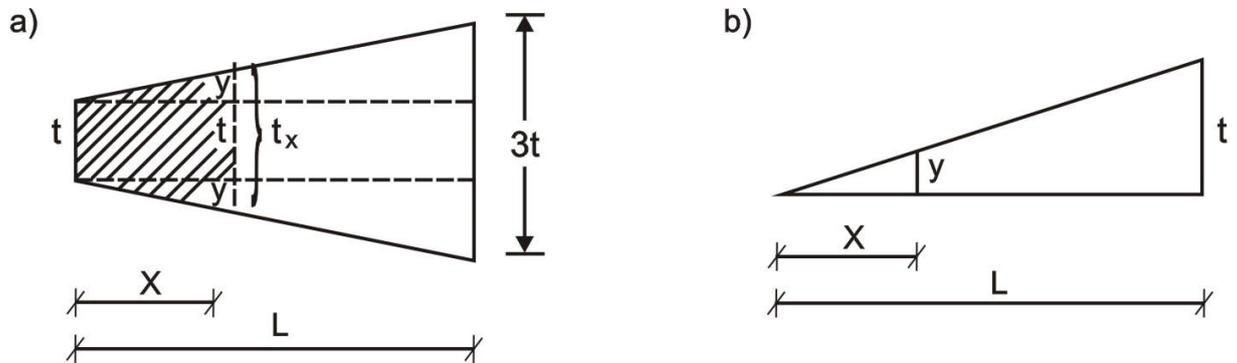


Fig. 3.16

Efectuamos, en forma análoga al caso anterior:

$$\frac{y}{x} = \frac{t}{L} \Rightarrow y = \frac{tx}{L}$$

$$t_x = t + 2y = t + 2\left(\frac{tx}{L}\right) = t\left(1 + \frac{2x}{L}\right)$$

Eliminamos el empotramiento en A y lo reemplazamos por T_A en sentido antihorario.

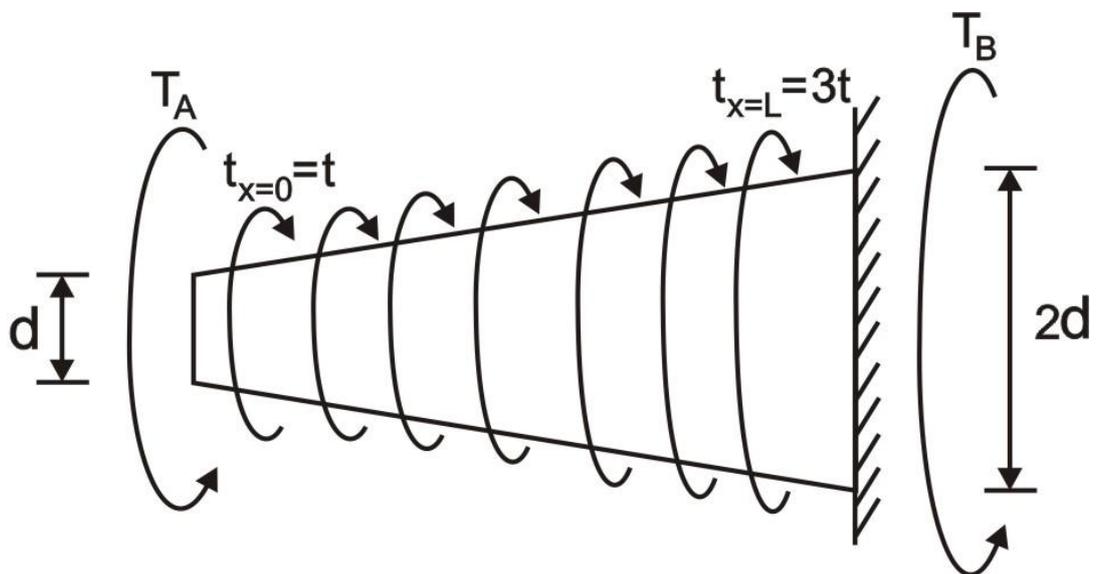


Fig. 3.17

$$\int_0^L \frac{T_A dx}{GI_{px}} - \int_0^L \frac{AREA_{\text{trapecio}} dx}{GI_{px}} = 0$$

Donde:

$AREA_{\text{trapecio}}$ - área del trapecio achurado, mostrado en la figura 3.16,a

$$\text{AREA}_{\text{trapecio}} = \frac{(t_x + t)x}{2} = \frac{\left[t \left(1 + \frac{2x}{L} \right) + t \right] x}{2} = tx \left(1 + \frac{x}{L} \right)$$

De esta manera, se tendrá:

$$\frac{32T_A}{\pi G} \int_0^L \frac{dx}{d^4 (1 + x/L)^4} = \frac{32}{\pi G} \int_0^L \frac{tx(1 + x/L)dx}{d^4 (1 + x/L)^4}$$

$$T_A = \frac{3tL}{7}$$

Como salió positivo, implica que su orientación es la misma que la mostrada en la figura 3.17

Luego:

$$\sum T_{\text{eje}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{3tL}{7} - \frac{(t + 3t)L}{2} + T_B = 0$$

$$T_B = \frac{11tL}{7}$$

La orientación es la misma que la mostrada en la figura 3.17

3.4 TORSION DE BARRAS DE SECCION NO CIRCULAR

SECCION RECTANGULAR. El ángulo de giro y el esfuerzo tangencial máximo se determinan por las fórmulas 3.10 – 3.11

$$\phi = \frac{TL}{GI_t} \quad (3.10)$$

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{T}{W_t} \quad (3.11)$$

Donde:

$\tau_{\text{máx}}$ - esfuerzo en la mitad del lado mayor del rectángulo

I_t - momento de inercia torsor

W_t - momento de resistencia torsor

Los valores de I_t y W_t se determinan por las fórmulas 3.12 – 3.13

$$I_t = \beta.bh^3 \quad (3.12)$$

$$W_t = \alpha.bh^2 \quad (3.13)$$

Donde:

b - lado mayor del rectángulo

h - lado menor del rectángulo

El esfuerzo tangencial máximo τ_1 , en la mitad del lado menor del rectángulo se determina por la fórmula 3.14

$$\tau_1 = \gamma\tau_{\text{máx}} \quad (3.14)$$

Los coeficientes α , β y γ dependen de la relación de los lados del rectángulo y se obtienen por la tabla 3.1

Tabla 3.1

b/h	1	1,5	2	3	4	5	8	10	∞
α	0,208	0,231	0,246	0,267	0,282	0,291	0,307	0,313	0,333
β	0,141	0,196	0,229	0,263	0,281	0,291	0,307	0,313	0,333
γ	1,000	0,859	0,795	0,753	0,745	0,743	0,742	0,742	0,740

SECCION TIPO PERFIL METALICO. Las barras que tienen secciones transversales en la forma de perfiles metálicos, el ángulo de giro en torsión y el esfuerzo tangencial máximo se determinan por las mismas fórmulas que para la sección rectangular, con la diferencia que I_t y W_t se calculan por las fórmulas 3.15 – 3.16

$$I_t = \eta \frac{1}{3} \sum b\delta^3 \quad (3.15)$$

$$W_t = \frac{\frac{1}{3} \sum b\delta^3}{\delta_{\text{máx}}} = \frac{I_t}{\eta \delta_{\text{máx}}} \quad (3.16)$$

Donde:

b - lado mayor de cada rectángulo pequeño, que se divide la sección transversal de la barra

δ - lado menor de cada rectángulo pequeño, que se divide la sección transversal de la barra

$\delta_{\text{máx}}$ - mayor espesor de todos los rectángulos pequeños, que se divide la sección transversal

η - coeficiente de forma de la sección transversal de la barra, cuyos valores son:

Sección tipo ángulo (L) $\eta = 1$

Sección tipo I $\eta = 1,2$

Sección tipo T $\eta = 1,15$

Sección tipo canal (C) $\eta = 1,12$

SECCION CERRADA DE PAREDES DELGADAS. El esfuerzo tangencial está distribuido uniformemente por todo el espesor de las paredes.

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{T}{2A_0\delta_{\text{mín}}} \quad (3.17)$$

Donde:

A_0 - área conformada por la línea central de la sección

$\delta_{\text{mín}}$ - espesor mínimo de la pared

Cuando el diagrama de momento torsor es constante por toda la longitud de la barra, es decir, actúa un solo momento torsor en el extremo libre de la barra; el ángulo de giro en torsión se determina por la fórmula 3.18

$$\phi = \frac{TL}{4GA_0^2} \int_s \frac{ds}{\delta} \quad (3.18)$$

Donde:

ds - elemento diferencial de la línea central de la sección

La integración se efectúa por toda la longitud de la línea central de la sección.

Cuando la barra es de espesor constante en toda su sección transversal, el ángulo de giro en torsión se calculará por la fórmula 3.19

$$\phi = \frac{TLs}{4GA_0^2\delta} \quad (3.19)$$

Donde:

s - longitud de la línea central de la sección

Para el caso de sección tubular, cuando la relación entre el espesor de pared δ y el diámetro medio

D_m del tubo es $\frac{\delta}{D_m} \leq 0,1$, se tendrá:

$$A_0 = \frac{\pi D_m^2}{4} \quad (3.20)$$

$$s = \pi D_m \quad (3.21)$$

Por los métodos de la resistencia de materiales, sólo se pueden calcular barras de sección transversal circular o tubular y por los métodos de la teoría de elasticidad los otros tipos de sección más complicada.

En la actualidad, con la ayuda de la informática, se puede analizar cualquier tipo de sección transversal.

PROBLEMA 3.8 El extremo libre de una barra tiene sección transversal cuadrada. ¿En qué porcentaje la resistencia de esta parte de la barra es menor que la izquierda, la cual es de sección transversal circular?

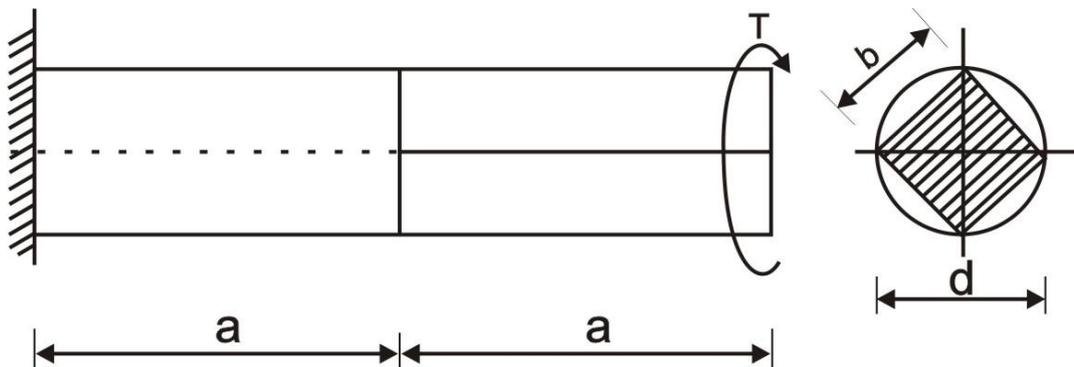


Fig. 3.18

Solución:

En este caso se necesita comparar resistencias, es decir, debemos de comparar W_p para la sección circular y W_t para la sección cuadrada, cuyo lado es $b = \sqrt{(0,5d)^2 + (0,5d)^2} = 0,707d$

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} = 0,1963d^3$$

$$W_t = 0,208 \cdot (0,707d)^3 = 0,0735d^3$$

Luego, aplicamos la regla de tres simple y obtenemos que $W_t = 0,3744W_p$, lo que en porcentaje es 37,44%.

Esto quiere decir, que la sección cuadrada es $(100 - 37,34)\% = 62,56\%$ menos resistente que la sección circular, cuando la barra está sometida al momento torsor T.

PROBLEMA 3.9 A partir de las condiciones de resistencia y de rigidez, determinar la dimensión del lado de la sección transversal cuadrada de una barra sometida a torsión, si $T = 120 \text{kgf} \cdot \text{m}$, $[\tau] = 600 \text{kgf} / \text{cm}^2$, $[\phi_0] = 1,0 \text{grado} / \text{m}$, $G = 8 \cdot 10^5 \text{kgf} / \text{cm}^2$.

Solución:

Aplicamos la condición de resistencia, es decir:

$$\tau_{\text{máx}} \leq [\tau]$$

$$\frac{T}{W_t} \leq [\tau]$$

$$\frac{120}{0,208b^3} \leq 600 \cdot 10^4$$

$$b \geq 4,58 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$b \geq 45,8 \text{ mm}$$

Ahora, aplicamos la condición de rigidez de la sección:

$$\phi_0^{\text{máx}} \leq [\phi_0]$$

$$\frac{T}{GI_t} \leq [\phi_0]$$

$$\frac{120}{8 \cdot 10^9 \cdot 0,141b^4} \leq \frac{\pi}{180}$$

$$b \geq 4,97 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$b \geq 49,7 \text{ mm}$$

Como la dimensión de la sección transversal es única, analizamos el rango que cumpla con los dos, tal como se muestra en la figura 3.19



Fig. 3.19

De esta manera, se tiene que la dimensión mínima del lado es $b_{\min} = 49,7\text{mm}$

Como su unidad de medida está en milímetros, asumimos $b = 50\text{mm}$

PROBLEMA 3.10 Determinar el esfuerzo tangencial máximo y su ángulo de giro en torsión por unidad de longitud de una barra sometida a torsión, si sus dimensiones de sección transversal son las mostradas en la figura 3.20 y están dadas en milímetros. Considerar $T = 11\text{kgf.m}$, $G = 2,7 \cdot 10^5 \text{kgf/cm}^2$ y $\eta = 1$.

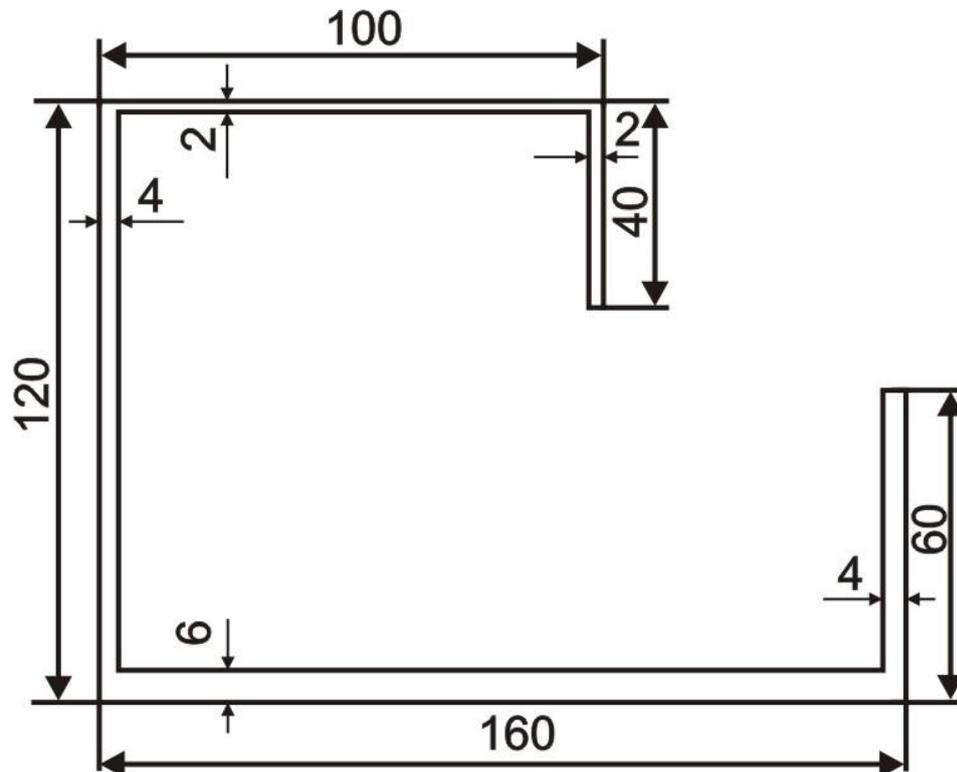


Fig. 3.20

Solución:

Dividimos la sección en rectángulos pequeños, tal como se muestra en la figura 3.21 y calculamos I_t y W_t , aplicando las fórmulas 3.15 y 3.16

$$I_t = 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot [40 \cdot 2^3 + 94 \cdot 2^3 + 120 \cdot 4^3 + 152 \cdot 6^3 + 60 \cdot 4^3] = 15141,33 \text{mm}^4$$

$$W_t = \frac{15141,33}{1.6} = 2523,55 \text{mm}^3$$

Luego, se tendrá:

$$\tau_{\max} = \frac{11 \cdot 100}{2523,55 \cdot 10^{-3}} = 435,9 \text{kgf/cm}^2$$

$$\phi_0 = \frac{11 \cdot 100}{2,7 \cdot 10^5 \cdot 15141,33 \cdot 10^{-4}} = 2,69 \cdot 10^{-3} \text{rad/cm}$$

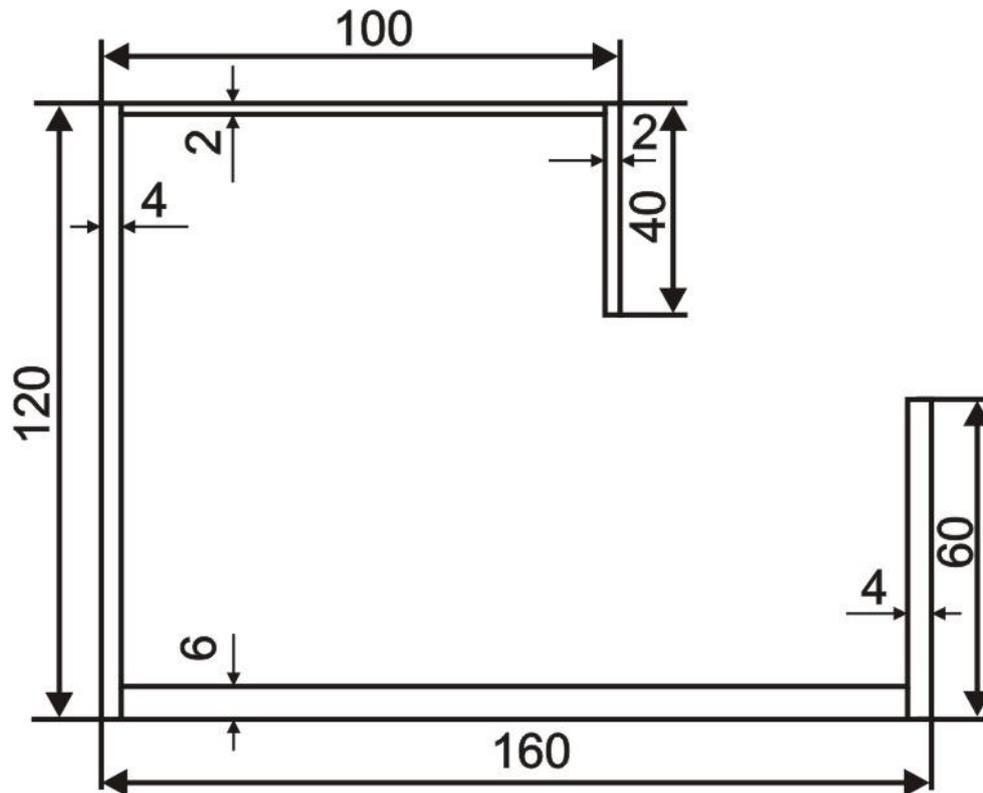


Fig. 3.21

PROBLEMA 3.11 Una barra doblemente empotrada tiene la mitad de su longitud de sección cuadrada y la otra mitad circular. Determinar la distancia x_0 , a partir de la condición, que los momentos torsores en los empotramientos debe ser igual.

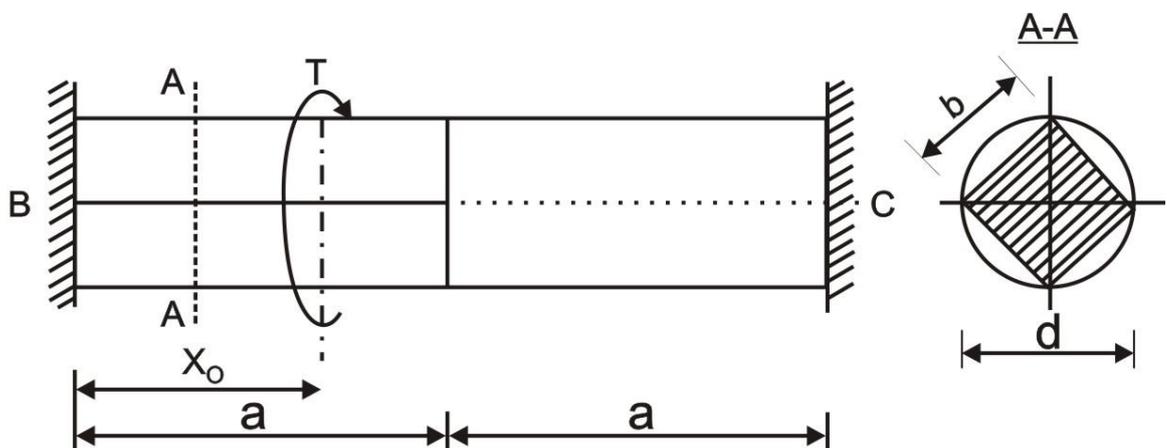


Fig. 3.22

Solución:

Eliminamos el empotramiento en C y lo reemplazamos por su momento torsor, el cual debe ser igual a $T/2$ y orientado en el sentido opuesto, tal como se muestra en la figura 3.23, graficando su diagrama de momento torsor.

Se sabe que, el ángulo de giro en torsión en el empotramiento C será cero, por ello se tendrá:

$$\phi_C = 0$$

$$-\frac{(T/2)(a)}{GI_p} - \frac{(T/2)(a - x_0)}{GI_t} + \frac{(T/2)(x_0)}{GI_t} = 0$$

$$-\frac{a}{0,098d^4} - \frac{a - x_0}{0,141(0,707d)^4} + \frac{x_0}{0,141(0,707d)^4} = 0$$

De donde:

$$x_0 = 0,68a$$

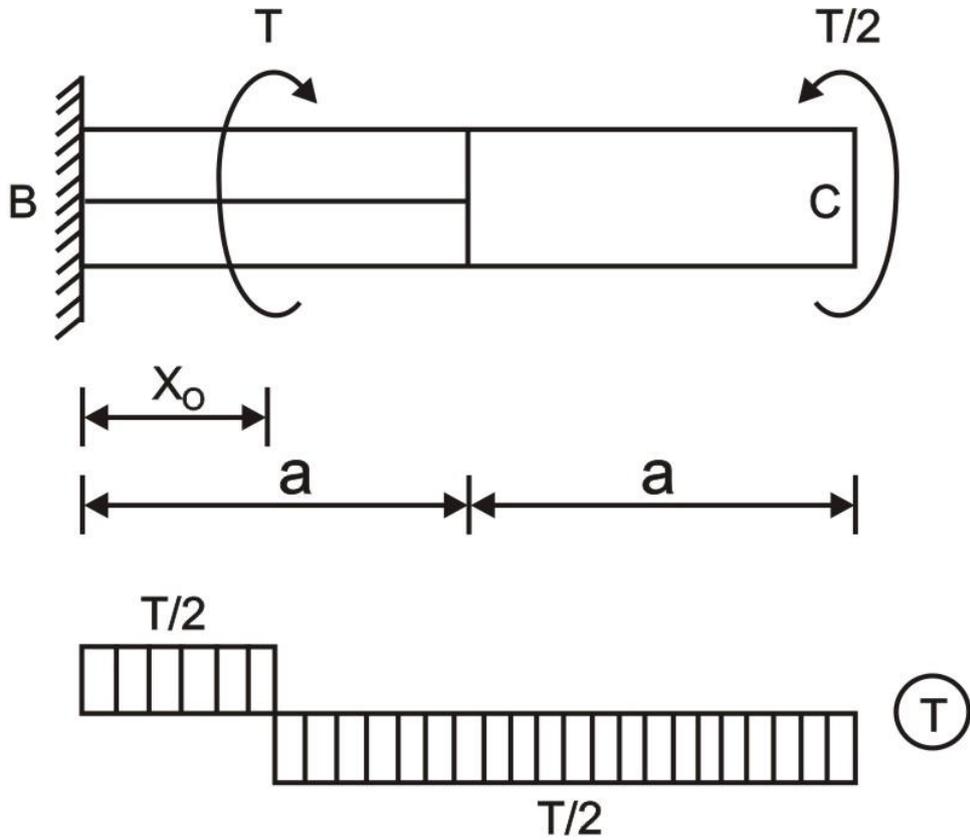


Fig. 3.23

PROBLEMA 3.12 Graficar el diagrama de momento torsor y determinar el ángulo de giro en torsión en C, si $G = 8 \cdot 10^4 \text{ MPa}$

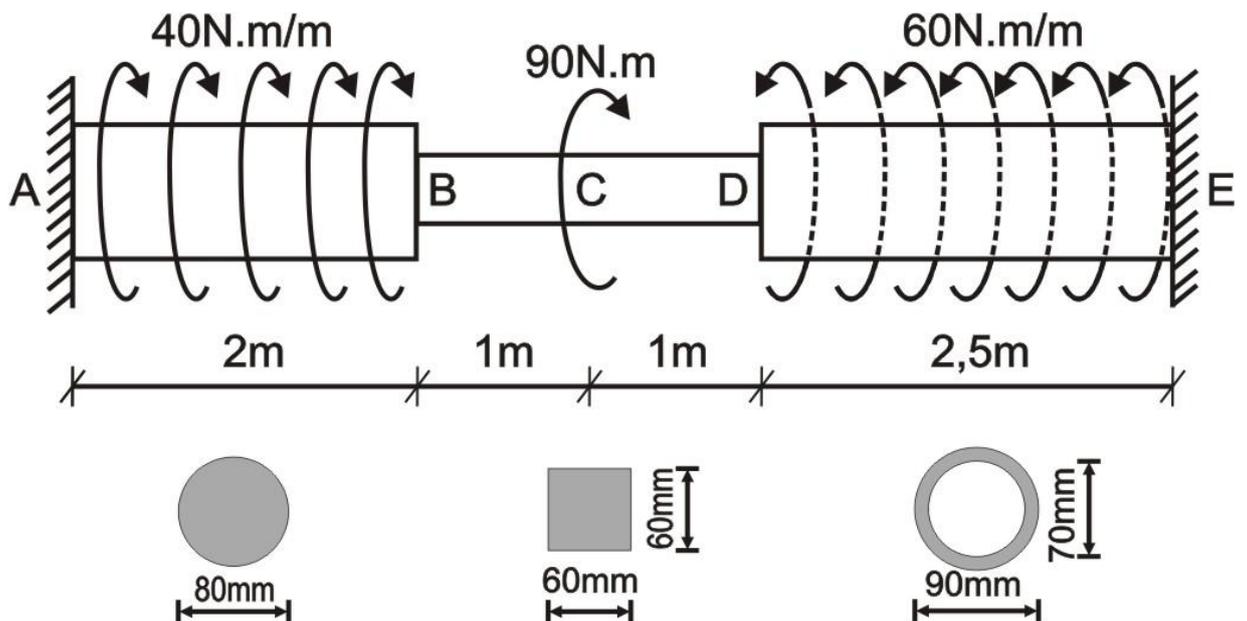


Fig. 3.24

Solución:

Eliminamos el empotramiento en A y lo reemplazamos por su momento torsor T_A , eligiendo su orientación como positivo y la del momento torsor T_E como negativo, lo cual es arbitrario, debido a que no existe una convención internacional de signos y se puede cambiar la convención personal de un problema a otro, lo importante es conservar dicha convención desde el inicio del problema hasta el final.

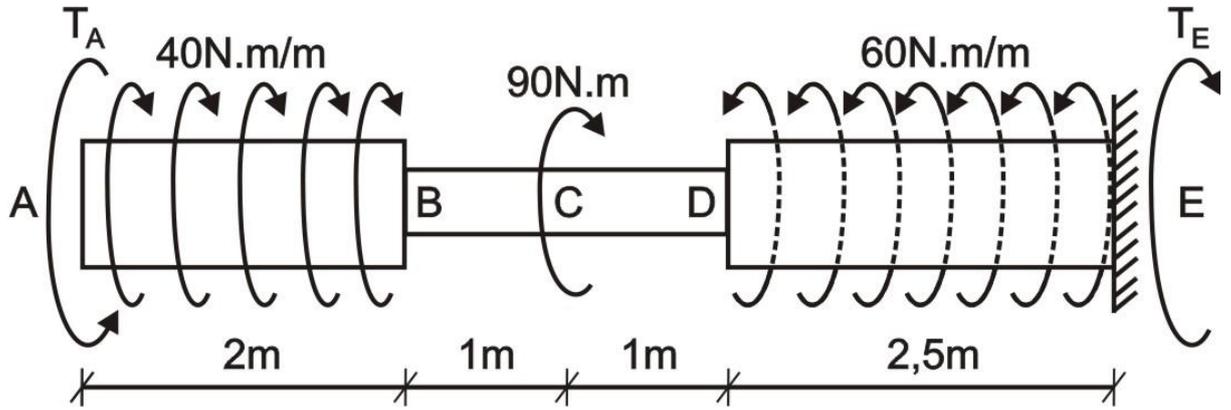


Fig. 3.25

$$\phi_A = 0$$

$$\begin{aligned} & \frac{T_A \cdot 2}{G \cdot (\pi/32) \cdot 80^4 \cdot 10^{-12}} + \frac{T_A \cdot 2}{G \cdot 0,141 \cdot 60^4 \cdot 10^{-12}} + \frac{T_A \cdot 2,5}{G \cdot (\pi/32) \cdot 90^4 \cdot 10^{-12} \cdot [1 - (70/90)^4]} - \\ & - \int_0^2 \frac{40x dx}{G \cdot (\pi/32) \cdot 80^4 \cdot 10^{-12}} - \frac{80 \cdot 2}{G \cdot 0,141 \cdot 60^4 \cdot 10^{-12}} - \frac{80 \cdot 2,5}{G \cdot (\pi/32) \cdot 90^4 \cdot 10^{-12} \cdot [1 - (70/90)^4]} - \\ & - \frac{90 \cdot 1}{G \cdot 0,141 \cdot 60^4 \cdot 10^{-12}} - \frac{90 \cdot 2,5}{G \cdot (\pi/32) \cdot 90^4 \cdot 10^{-12} \cdot [1 - (70/90)^4]} + \int_0^{2,5} \frac{60x dx}{G \cdot (\pi/32) \cdot 90^4 \cdot 10^{-12} \cdot [1 - (70/90)^4]} = 0 \end{aligned}$$

De donde:

$$T_A = 97,486 \text{ N.m}$$

El sentido del momento torsor T_A , es el mismo que el mostrado en la figura 3.25

$$\sum T_{eje} = 0 \quad \Rightarrow \quad 97,486 - 80 - 90 + 60 \cdot 2,5 - T_E = 0$$

$$T_E = 77,486 \text{ N.m}$$

El sentido del momento torsor T_E , es el mismo que el mostrado en la figura 3.25

Con los valores obtenidos, graficamos el diagrama de momento torsor, el cual se muestra en la figura 3.26

Luego, determinamos el ángulo de giro en torsión en el punto C de la barra.

$$\phi_C = \frac{(17,486 + 97,486) \cdot 2}{2,8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \cdot (\pi/32) \cdot 80^4 \cdot 10^{-12}} + \frac{17,486 \cdot 1}{8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \cdot 0,141 \cdot 60^4 \cdot 10^{-12}} = 4,77 \cdot 10^{-4} \text{ rad} = 0,027^\circ$$

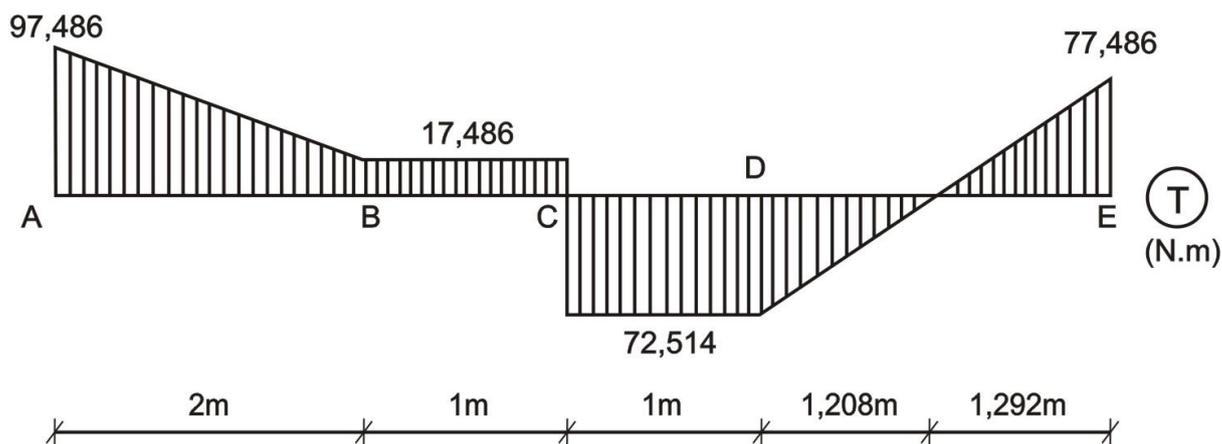


Fig. 3.26

3.5 RESORTES HELICOIDALES DE PASO PEQUEÑO

La condición de resistencia de los resortes de sección transversal circular, sometidos a tracción o compresión, tiene la forma:

$$\tau_{\text{máx}} = k \frac{8PD}{\pi \cdot d^3} \leq [\tau] \quad (3.22)$$

Donde:

P - carga actuante en el eje del resorte

D - diámetro medio del resorte

d - diámetro de la espira del resorte

k - coeficiente de corrección, que refleja la influencia de la curvatura de las espiras y la fuerza de corte. Su magnitud depende fundamentalmente del subíndice del resorte $c_r = \frac{D}{d}$ y se puede obtener por la tabla 3.2.

Tabla 3.2

c_r	4	5	6	8	10	12
k	1,37	1,29	1,24	1,17	1,14	1,11

La variación de la altura del resorte λ (alargamiento en tracción y asentamiento en compresión), se determina por la fórmula 3.23

$$\lambda = \frac{8PD^3n}{Gd^4} \quad (3.23)$$

Donde:

n - número de espiras del resorte

G - módulo de corte

La condición de resistencia de los resortes de sección transversal cuadrada es:

$$\tau_{\text{máx}} = k_1 \frac{PD}{2\alpha \cdot b^3} \leq [\tau] \quad (3.24)$$

Donde:

k_1 - coeficiente de corrección del resorte, que depende de la relación entre el diámetro medio (D) del resorte y el lado (b) de la sección de la espira, el cual se puede obtener por la tabla 3.3

Tabla 3.3

D/b	4	5	6	8	10	12
k_1	1,33	1,26	1,21	1,16	1,13	1,10

$\alpha = 0,208$ (Tabla 3.1)

La variación de la altura del resorte se calculará por la fórmula 3.25

$$\lambda = \frac{PD^3 \pi \cdot n}{4G\beta b^4} \quad (3.25)$$

Donde:

$\beta = 0,141$ (Tabla 3.1)

PROBLEMA 3.13 Dos resortes cilíndricos, tienen igual diámetro medio D y se diferencian el uno del otro, en que el primero está fabricado de espiras de sección circular y el segundo de sección cuadrada. Los esfuerzos tangenciales máximos que surgen en ambos resortes son iguales. Comparar los pesos de ambos resortes y sus alargamientos, considerando que el coeficiente k es el mismo para ambos casos.

Solución:

El peso de ambos resortes será proporcional a sus áreas de sección transversal de las espiras.

Por condición del problema, los esfuerzos tangenciales serán los mismos, razón por la cual igualamos las ecuaciones 3.22 y 3.24

$$k \frac{8PD}{\pi \cdot d^3} = k \frac{PD}{2.0,208 \cdot b^3}$$

$$\frac{\pi \cdot d^3}{8} = 2.0,208 b^3$$

$$b = 0,981d$$

Ahora, analizamos la relación de las áreas de sección transversal.

$$\frac{A_{\text{circular}}}{A_{\text{cuadrada}}} = \frac{\pi \cdot d^2 / 4}{b^2} = \frac{\pi \cdot d^2 / 4}{(0,981d)^2} = 0,816$$

Esto quiere decir, que el resorte con sección transversal circular es menos pesado que el de sección transversal cuadrada en 18,4%

Ahora, comparamos los alargamientos de ambos resortes, utilizando para ello las fórmulas 3.23 y 3.25

$$\frac{\lambda_{\text{circular}}}{\lambda_{\text{cuadrada}}} = \frac{\frac{8PD^3 n}{Gd^4}}{\frac{PD^3 \pi \cdot n}{4G(0,141)b^4}} = \frac{32.0,141 \cdot b^4}{\pi \cdot d^4} = \frac{32.0141 \cdot (0,981d)^4}{\pi \cdot d^4} = 1,33$$

PROBLEMA 3.14 Una viga sólida AD se sostiene por tres resortes de igual número de espiras y se carga por una fuerza $P = 400\text{kgf}$ (figura 3.27). Determinar el diámetro de la sección transversal de cada espira, de tal manera que el esfuerzo tangencial de cada resorte sea el mismo e igual a $[\tau] = 5000\text{kgf/cm}^2$. Los diámetros medios de los resortes son $D_1 = 6\text{cm}$, $D_2 = 8\text{cm}$ y $D_3 = 10\text{cm}$. Considerar $k = 1$ para todos los resortes.

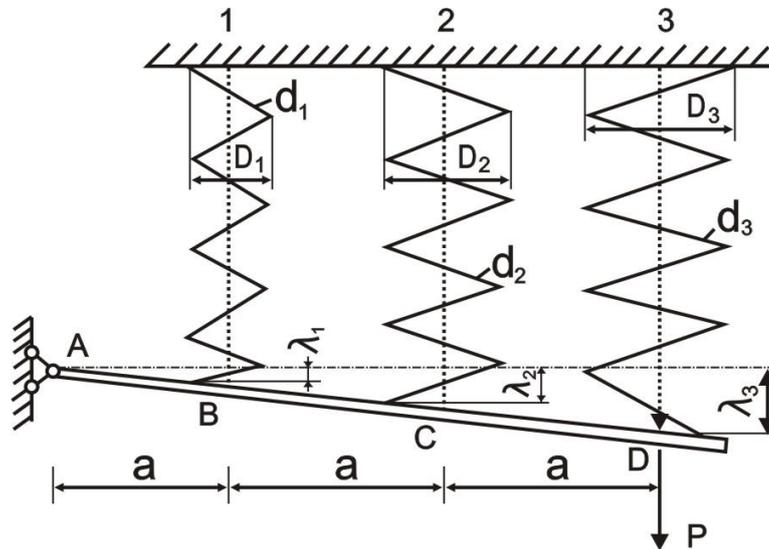


Fig. 3.27

Solución:

El problema es dos veces estáticamente indeterminado, porque en el apoyo A solamente habrá una reacción vertical y en la viga existen tres fuerzas de reacción por parte de los resortes, esto es, el número de incógnitas es cuatro y para el sistema plano de fuerzas paralelas por la estática solamente se tienen dos ecuaciones.

Utilizamos una sola ecuación, ya que no es necesario determinar la reacción en el apoyo A, por ello se tendrá:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow P_1 \cdot a + P_2 \cdot 2a + P_3 \cdot 3a = P \cdot 3a$$

$$P_1 + 2P_2 + 3P_3 = 1200 \quad (a)$$

Las ecuaciones de desplazamiento las escribimos en la forma más adecuada para el cálculo, es decir:

$$\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 = a : 2a : 3a = 1 : 2 : 3$$

También se puede expresar de la siguiente forma:

$$\frac{8P_1 D_1^3 n}{G d_1^4} : \frac{8P_2 D_2^3 n}{G d_2^4} : \frac{8P_3 D_3^3 n}{G d_3^4} = 1 : 2 : 3$$

De donde:

$$\frac{27P_1}{d_1^4} = \frac{64P_2}{2d_2^4} = \frac{125P_3}{3d_3^4} \quad (b)$$

Ahora, aplicamos la condición que los esfuerzos son iguales en todos los resortes, es decir:

$$\tau_1^{\text{máx}} = \tau_2^{\text{máx}} = \tau_3^{\text{máx}} = [\tau]$$

Como $k = 1$ para todos los resortes, tendremos:

$$\frac{8P_1D_1}{\pi.d_1^3} = \frac{8P_2D_2}{\pi.d_2^3} = \frac{8P_3D_3}{\pi.d_3^3}$$

De donde:

$$\frac{3P_1}{d_1^3} = \frac{4P_2}{d_2^3} = \frac{5P_3}{d_3^3} \quad (c)$$

Resolvemos las ecuaciones (a), (b) y (c), obteniendo:

$$P_1 = 1,9P_2 = 2,1P_3$$

$$P_1 = 344,71\text{kgf}$$

$$P_2 = 181,43\text{kgf}$$

$$P_3 = 164,15\text{kgf}$$

Entonces, los diámetros serán:

$$d_1 = \sqrt[3]{\frac{8P_1D_1}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{8.344,71.6}{\pi.5000}} = 1,02\text{cm}$$

$$d_2 = \frac{8}{9}d_1 = 0,907\text{cm}$$

$$d_3 = \frac{25}{27}d_1 = 0,944\text{cm}$$

PROBLEMA 3.15 Un resorte cilíndrico está empotrado en ambos extremos (figura 3.28,a), siendo su diámetro medio $D = 200\text{mm}$ y las espiras son de sección transversal circular de diámetro $d = 20\text{mm}$. El resorte está sometido a la acción de una carga $P = 400\text{kgf}$, actuante en el punto C. Determinar el esfuerzo tangencial máximo en el resorte y el desplazamiento del punto C, si $G = 8.10^5 \text{kgf/cm}^2$.

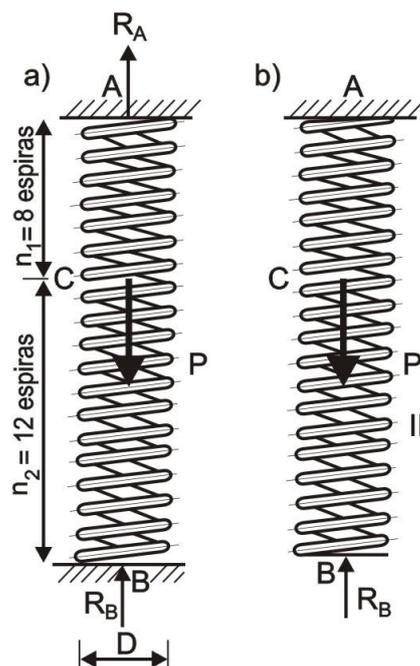


Fig. 3.28

Solución:

Para resolver el problema, será necesario determinar las fuerzas de reacción que surgen en los empotramientos A y B.

Por la estática, solo podemos plantear una ecuación de equilibrio:

$$R_A + R_B = P$$

De esta manera, el problema es una vez estáticamente indeterminado.

Para plantear la segunda ecuación, analizamos la condición de deformación del sistema. Para ello, eliminamos un empotramiento, por ejemplo en el extremo inferior y lo reemplazamos por la fuerza R_B , tal como se muestra en la figura 3.28,b.

El extremo inferior del resorte por acción de la fuerza P debe de desplazarse hacia abajo en una magnitud λ_P y por medio de la acción de la reacción R_B se desplazará hacia arriba en una magnitud λ_{R_B} . En la realidad, por ser B un empotramiento, no debe de desplazarse hacia ningún lado, por ello se deduce que la ecuación de desplazamientos será:

$$|\lambda_P| = |\lambda_{R_B}|$$

Donde:

$$\lambda_P = \frac{8PD^3n_1}{Gd^4}$$

$$\lambda_{R_B} = \frac{8R_B D^3(n_1 + n_2)}{Gd^4}$$

Reemplazamos estos valores en la ecuación de desplazamientos y obtenemos:

$$\frac{8PD^3n_1}{Gd^4} = \frac{8R_B D^3(n_1 + n_2)}{Gd^4}$$

De donde:

$$R_B = \frac{n_1}{n_1 + n_2} P = \frac{8}{8 + 12} \cdot 400 = 160 \text{kgf}$$

Luego:

$$R_A = P - R_B = 400 - 160 = 240 \text{kgf}$$

De esta manera, el resorte en el tramo CA es traccionado por la fuerza $R_A = 240 \text{kgf}$ y en el tramo CB es comprimido por la fuerza $R_B = 160 \text{kgf}$.

En consecuencia, el esfuerzo máximo se encontrará en las secciones transversales del resorte en el tramo CA, siendo su valor:

$$\tau_{\text{máx}} = k \frac{8R_A D}{\pi d^3} = 1,14 \cdot \frac{8 \cdot 240 \cdot 20}{\pi \cdot 2^3} = 1741,79 \text{kgf} / \text{cm}^2$$

Siendo $k = 1,14$ (tabla 3.2), debido a que $c_r = \frac{D}{d} = \frac{20}{2} = 10$

El desplazamiento λ_C del punto C del resorte, será hacia abajo e igual al alargamiento de la parte superior CA del resorte:

$$\lambda_C = \frac{8R_A D^3 n_1}{Gd^4} = \frac{8.240.20^3.8}{8.10^5.2^4} = 9,6\text{cm}$$

Es obvio que, dicho resultado también se puede obtener, si consideramos que el desplazamiento λ_C es igual al acortamiento de la parte inferior CB del resorte.

CAPITULO 4

FLEXION

4.1 ESFUERZOS NORMALES

En las secciones transversales de vigas sometidas a *flexión pura*, surgen esfuerzos normales, los cuales dependen de su momento flector en la sección correspondiente. En *flexión transversal*, también surgen esfuerzos tangenciales, los cuales están relacionados con las fuerzas cortantes. Los esfuerzos normales en cualquier punto de la sección transversal, se determinan por la fórmula 4.1

$$\sigma_x = \frac{M}{I_z} y \quad (4.1)$$

Donde:

M - momento flector en la sección determinada

I_z - momento de inercia de la sección, respecto al eje central (neutro)

y - distancia desde el eje central, hasta el punto donde se determina el esfuerzo

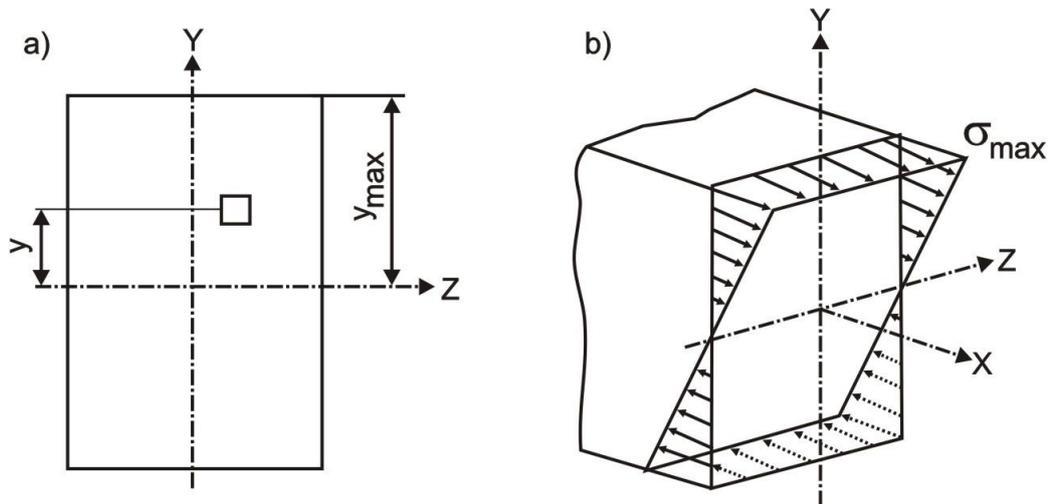


Fig. 4.1

Los esfuerzos normales máximos surgen en los puntos más alejados al eje central (figura 4.1), esto es:

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{M}{I_z} y_{\text{máx}} \quad (4.2)$$

También, puede ser expresado a través del módulo de resistencia $W_z = \frac{I_z}{y_{\text{máx}}}$, obteniéndose:

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{M}{W_z} \quad (4.3)$$

De esta manera, pueden existir dos casos:

- a) Sección simétrica respecto al eje central (figura 4.2). En este caso las distancias de los extremos de las zonas de tracción y compresión hasta el eje central son iguales y los esfuerzos normales se determinarán por la fórmula 4.3

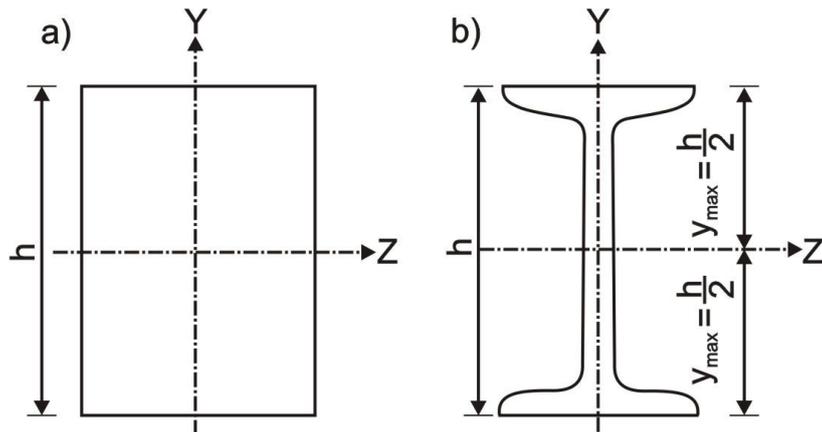


Fig. 4.2

- b) Sección no simétrica respecto al eje central. En este caso los esfuerzos normales para los puntos más alejados en las zonas de tracción y compresión (figura 4.3), serán diferentes y se determinarán por las fórmulas 4.4 y 4.5

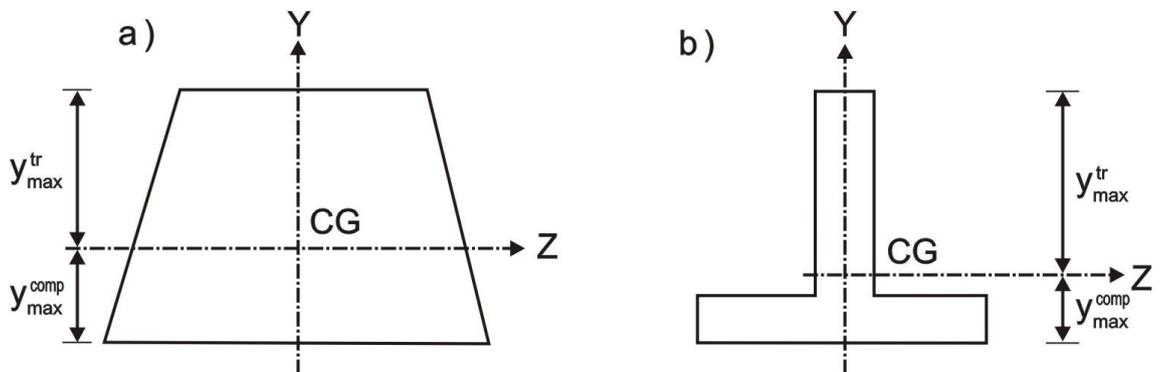


Fig. 4.3

$$\sigma_{\text{máx}}^{\text{tr}} = \frac{M}{I_z} y_{\text{máx}}^{\text{tr}} \quad (4.4)$$

$$\sigma_{\text{máx}}^{\text{comp}} = \frac{M}{I_z} y_{\text{máx}}^{\text{comp}} \quad (4.5)$$

Siendo:

$y_{\text{máx}}^{\text{tr}}$ - distancia desde el eje central hasta el punto más alejado en la zona de tracción

$y_{\text{máx}}^{\text{comp}}$ - distancia desde el eje central hasta el punto más alejado en la zona de compresión

En el caso que el material de la viga tenga diferentes resistencias en tracción y compresión, se recomienda elegir una sección no simétrica respecto al eje central. Por ejemplo, para el caso del hierro fundido se podría elegir una sección tipo T (figura 4.3), debiendo ubicarse la mayor cantidad de material en la zona de tracción, debido a que el hierro fundido se comporta mejor en compresión, que en tracción.

Esto quiere decir, para vigas de material frágil, el área mayor de la sección transversal corresponderá a la zona de tracción y el área menor a la zona de compresión.

Si el diagrama de momento flector M para tal tipo de vigas, tiene tramos de diferentes signos, entonces lo indicado anteriormente acerca de la posición racional de la sección de la viga, se analizará en la sección donde el momento flector es máximo en valor absoluto.

Como se sabe, si el momento es positivo, la zona de tracción está ubicada en la parte inferior y la zona de compresión en la parte superior y para el caso de momento negativo, sucede lo opuesto.

De esta manera, las zonas de tracción y compresión deben de concordar, tanto por momento flector, como por áreas. En caso contrario, se recomendará invertir la sección, de tal manera que se cumpla con ambas exigencias.

En forma adicional, se recomienda efectuar la comprobación de la condición de resistencia para la sección, donde el momento flector es de signo opuesto.

Otra de las formas como determinar la zona más peligrosa es a través de la fórmula 4.6, en la cual, si se cumple dicha condición, entonces la zona más peligrosa es la de tracción.

$$\frac{y_{\text{máx}}^{\text{tr}}}{y_{\text{máx}}^{\text{comp}}} > \frac{[\sigma]_{\text{tr}}}{[\sigma]_{\text{comp}}} \quad (4.6)$$

La *condición de resistencia* en flexión pura, se analizará por la fórmula 4.7

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{M_{\text{máx}}}{W_z} \leq [\sigma] \quad (4.7)$$

Donde:

$M_{\text{máx}}$ - momento flector máximo en la viga

$[\sigma]$ - esfuerzo normal permisible

Para el caso de secciones simétricas respecto al eje central, la comprobación de resistencia se realizará respecto al esfuerzo permisible en tracción o compresión, analizando el caso cuyo valor es menor.

Para secciones no simétricas respecto al eje central, cuando el material tiene diferentes resistencias en tracción y compresión (material frágil), hace falta efectuar la comprobación para las zonas de tracción y compresión, utilizando, para ello, las fórmulas 4.8 y 4.9

$$\sigma_{\text{máx}}^{\text{tr}} = \frac{M_{\text{máx}}}{I_z} y_{\text{máx}}^{\text{tr}} \leq [\sigma]_{\text{tr}} \quad (4.8)$$

$$\sigma_{\text{máx}}^{\text{comp}} = \frac{M_{\text{máx}}}{I_z} y_{\text{máx}}^{\text{comp}} \leq [\sigma]_{\text{comp}} \quad (4.9)$$

Siendo:

$[\sigma]_{\text{tr}}$ - esfuerzo permisible en tracción

$[\sigma]_{\text{comp}}$ - esfuerzo permisible en compresión

Para secciones no simétricas respecto al eje central, cuando el material tiene igual resistencia en tracción y compresión, por ejemplo el acero, la condición de resistencia se aplicará para el caso donde el esfuerzo normal es máximo en valor absoluto.

Para elegir la sección transversal, se aplicará la fórmula 4.10

$$W_z \geq \frac{M_{\text{máx}}}{[\sigma]} \quad (4.10)$$

En el caso que la sección sea un perfil metálico, se elegirá el que tenga el menor valor W_z , pero que cumpla con la condición de la fórmula 4.10

Para el caso de secciones circulares, tubulares y rectangulares se elegirán las dimensiones de las secciones, utilizando las fórmulas 4.11 – 4.13

SECCION CIRCULAR:

$$W_z = \frac{\pi}{32} d^3 \quad (4.11)$$

Donde:

d - diámetro de la sección circular

SECCION TUBULAR:

$$W_z = \frac{\pi}{32} D^3 (1 - c^4) \quad (4.12)$$

Siendo:

$$c = \frac{d_0}{D}$$

D - diámetro exterior del tubo

d_0 - diámetro interior del tubo

SECCION RECTANGULAR:

$$W_z = \frac{bh^2}{6} \quad (4.13)$$

Donde:

b - base de la sección rectangular

h - altura de la sección rectangular

En el caso, que se desee determinar las dimensiones de la sección transversal de una viga no simétrica, se tendrá que efectuar a través de las fórmulas 4.8 y 4.9 despejando, para ello, los valores requeridos.

PROBLEMA 4.1 Determinar el valor de "a" en función de "L", si los esfuerzos normales son los mismos en los puntos A, B y C de la viga metálica mostrada en la figura 4.4 e iguales a $\sigma_{\text{máx}}$, sometida a la acción de su peso propio. Considerar que la viga es de sección constante.

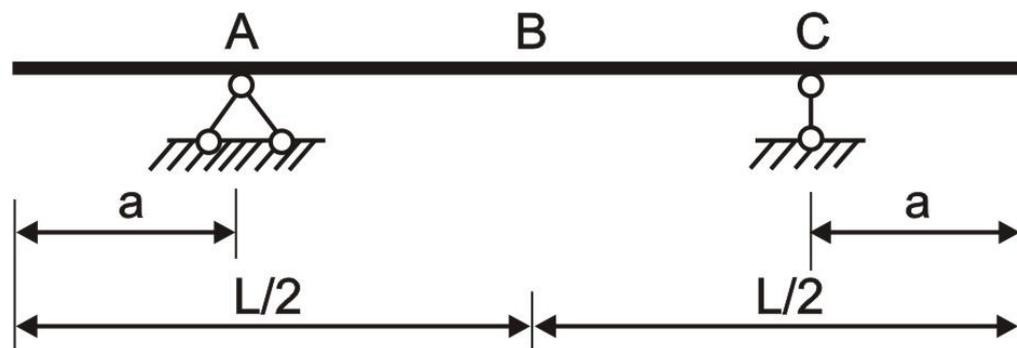


Fig. 4.4

Solución:

Cargamos la viga por su peso propio y graficamos sus diagramas de cortante y momento flector (figura 4.5).

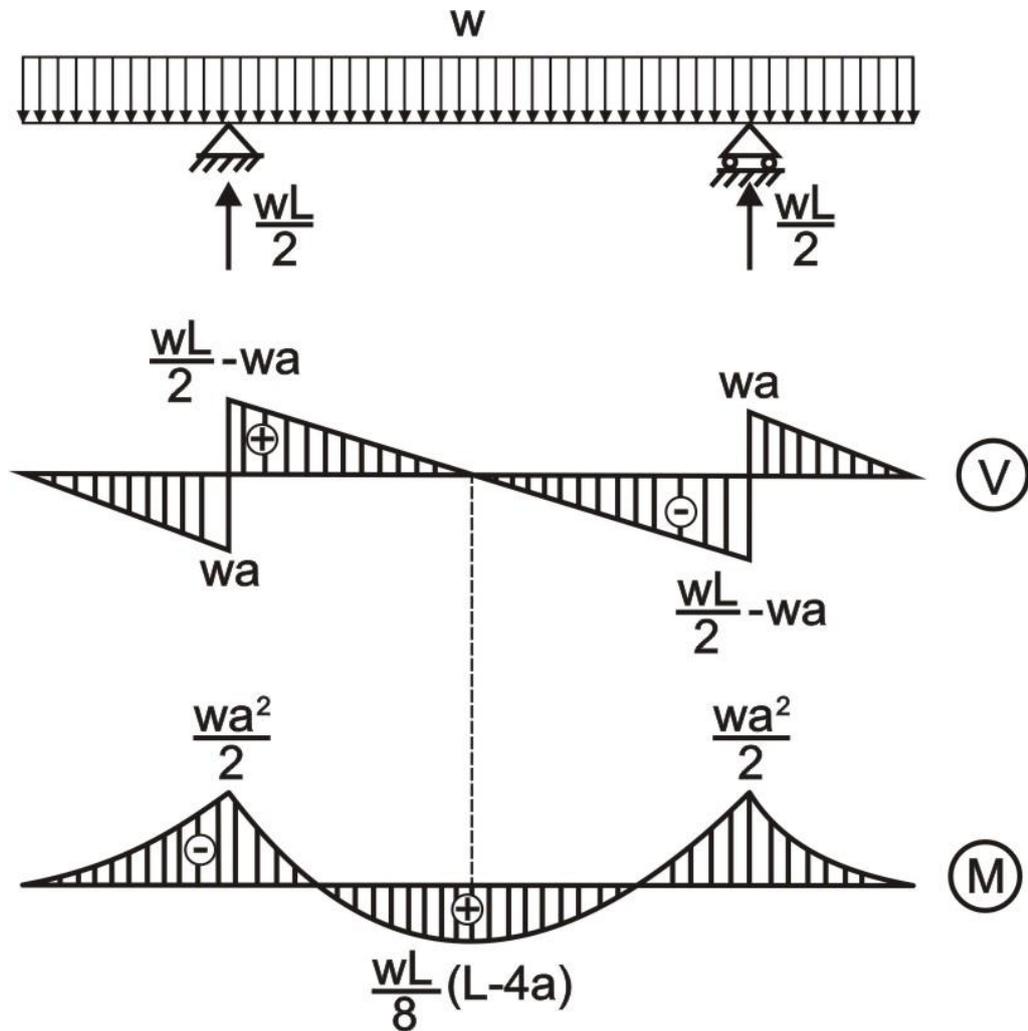


Fig. 4.5

Por condición del problema tenemos que:

$$\sigma_A = \sigma_B = \sigma_C = \sigma_{\text{máx}}$$

Como la viga es de sección constante, entonces se debe de cumplir que los momentos flectores deben de ser iguales en valor absoluto, es decir:

$$|M_A| = |M_B|$$

$$\frac{wa^2}{2} = \frac{wL}{8}(L-4a)$$

$$4a^2 + 4aL - L^2 = 0$$

Resolvemos la ecuación cuadrática, con la condición que su valor es menor que \$0,5L\$, como se muestra en la figura 4.4 y, de esta manera, obtenemos:

$$a = 0,207L$$

PROBLEMA 4.2 Graficar los diagramas V, M y determinar el esfuerzo normal en el punto B de la sección más peligrosa de la viga mostrada en la figura 4.6

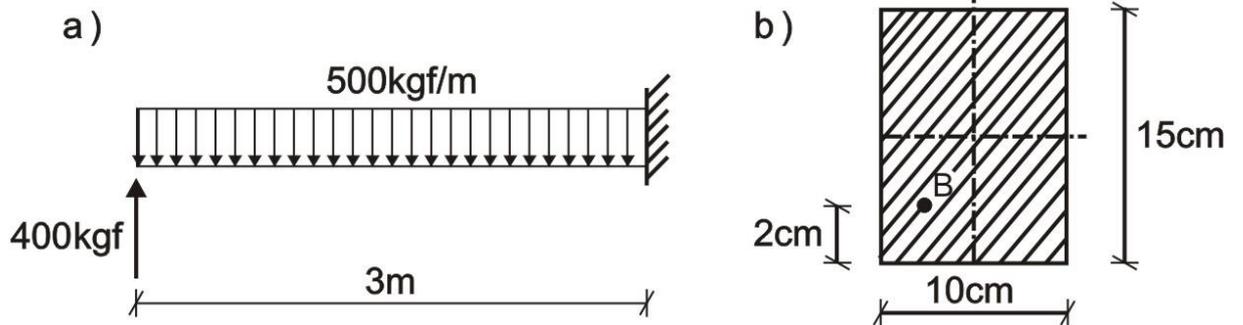


Fig. 4.6

Solución:

En un inicio, graficamos los diagramas de fuerza cortante y momento flector, los cuales se muestran en la figura 4.7

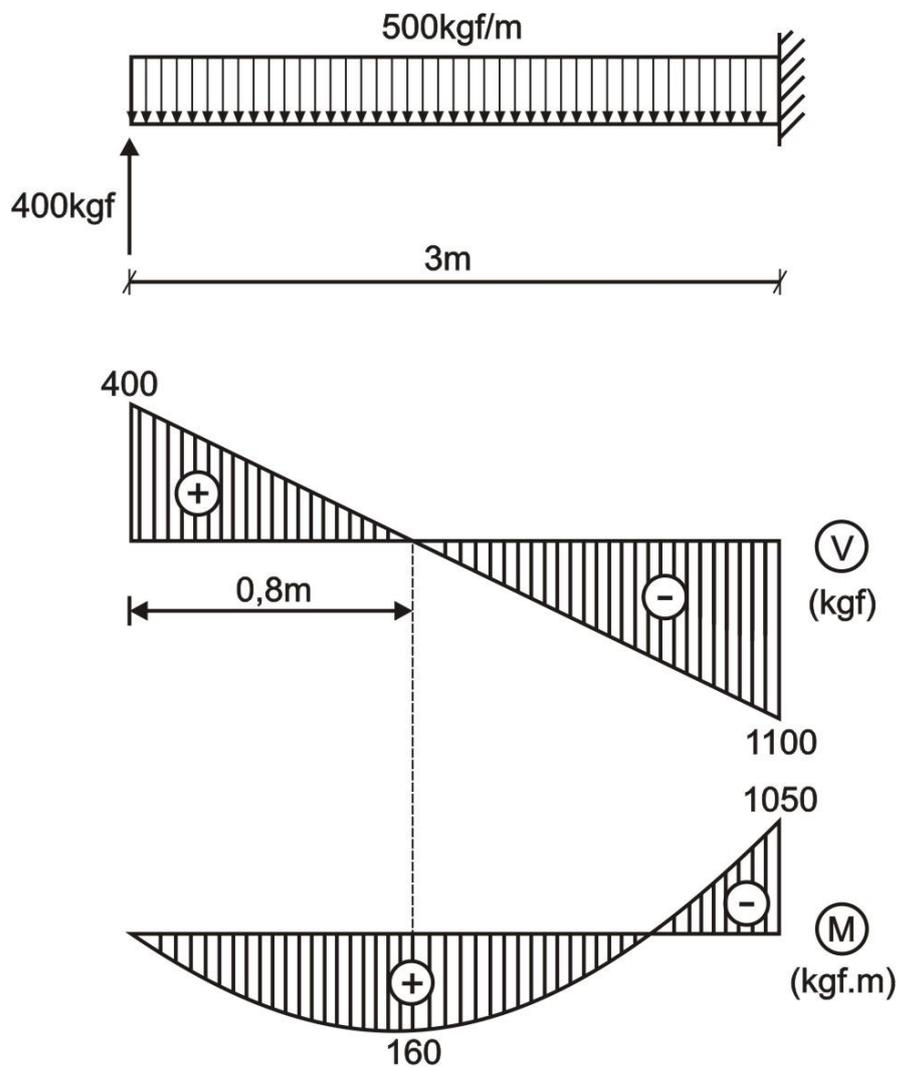


Fig. 4.7

Posteriormente, aplicamos la fórmula 4.1, para ello, debemos de considerar el valor del momento flector máximo, debido a que nos piden en la sección más peligrosa de la viga y ese es el empotramiento. Asimismo, la distancia del eje central hasta el punto B es de 5,5cm

En base a estas condiciones, aplicamos la mencionada fórmula y obtenemos:

$$\sigma_B = \frac{1050 \cdot 100}{10 \cdot 15^3} \cdot 5,5 = 205,3 \text{ kgf / cm}^2$$

PROBLEMA 4.3 Determinar las dimensiones de las secciones transversales de la viga mostrada en la figura 4.8, para las tres variantes dadas. Considerar $[\sigma] = 1600 \text{ kgf / cm}^2$

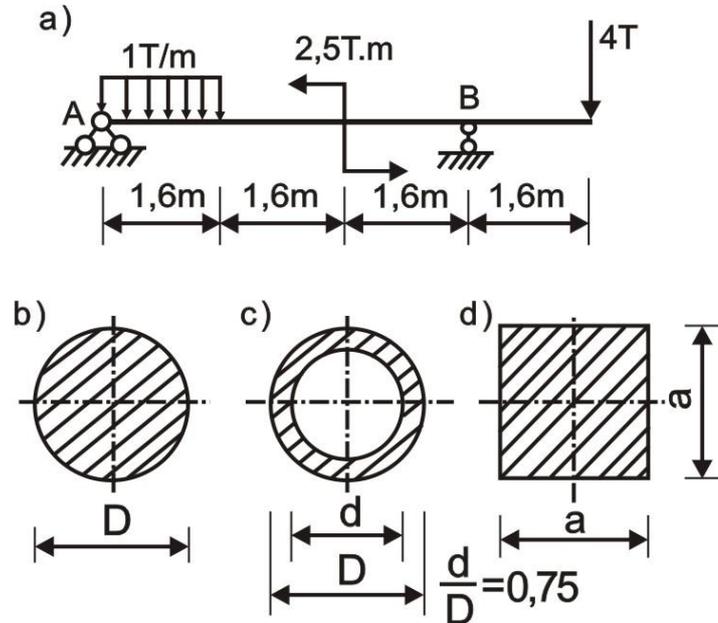


Fig. 4.8

Solución:

Calculamos las reacciones en los apoyos A, B y graficamos los diagramas de fuerza cortante y momento flector, tal como se muestra en la figura 4.9

Luego, aplicamos la condición de resistencia, es decir la fórmula 4.7 para los tres casos de tipos de sección transversal de la viga, considerando sus características geométricas (fórmulas 4.11 – 4.13) y como momento flector el de mayor valor absoluto.

SECCION CIRCULAR:

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{6,4 \cdot 10^5}{\frac{\pi}{32} D^3} \leq 1600 \Rightarrow D \geq 15,97 \text{ cm}$$

Asumimos:

$$D = 16 \text{ cm}$$

SECCION TUBULAR:

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{6,4 \cdot 10^5}{\frac{\pi}{32} D^3 (1 - 0,75^4)} \leq 1600 \Rightarrow D \geq 18,13 \text{ cm}$$

Asumimos:

$$D = 18,2 \text{ cm}$$

$$d = 0,75 \cdot 18,2 = 13,65 \text{ cm}$$

SECCION CUADRADA:

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{6,4 \cdot 10^5}{\frac{a^3}{6}} \leq 1600 \Rightarrow a \geq 13,39 \text{ cm}$$

Asumimos:

$$a = 13,4 \text{ cm}$$

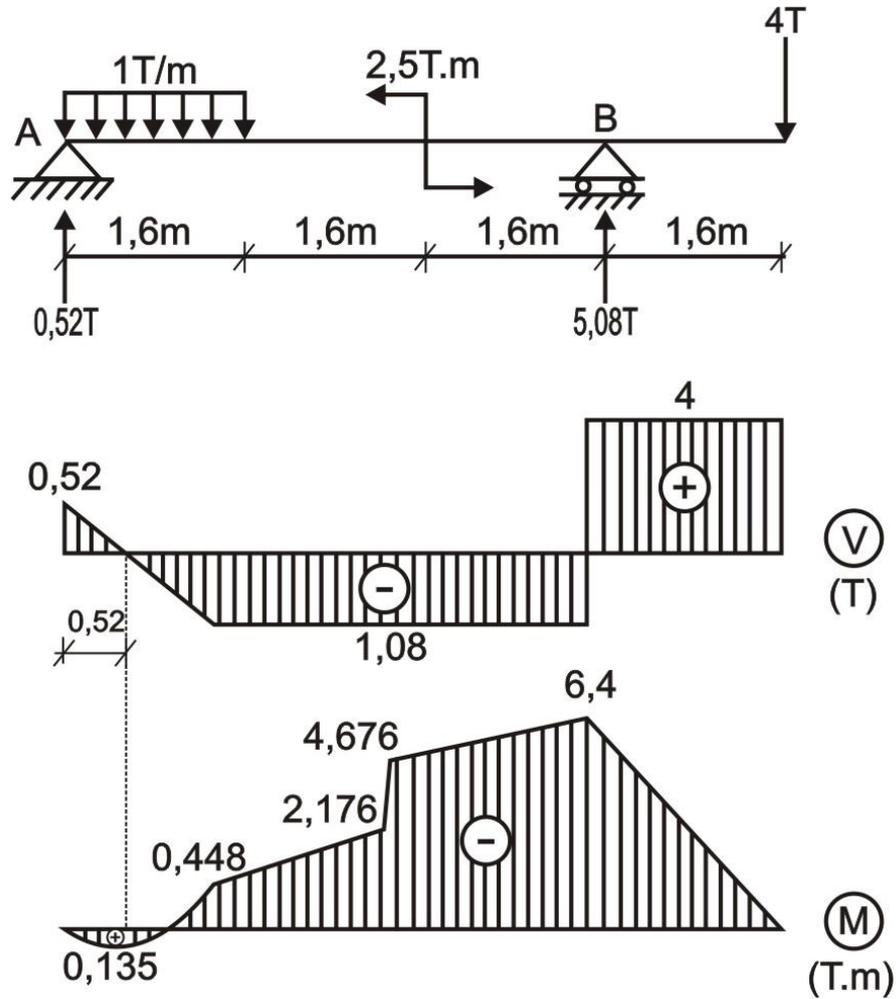


Fig. 4.9

PROBLEMA 4.4 Determinar el valor del esfuerzo normal máximo para la siguiente viga

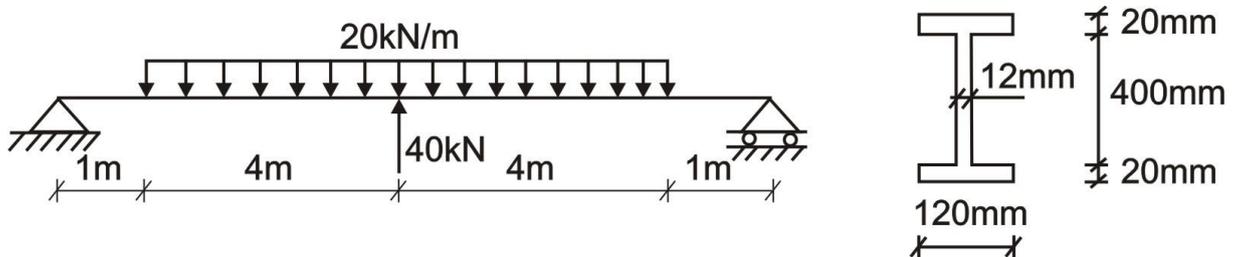


Fig. 4.10

Solución:

Graficamos los diagramas de fuerza cortante y momento flector, los cuales se muestran en la figura 4.11

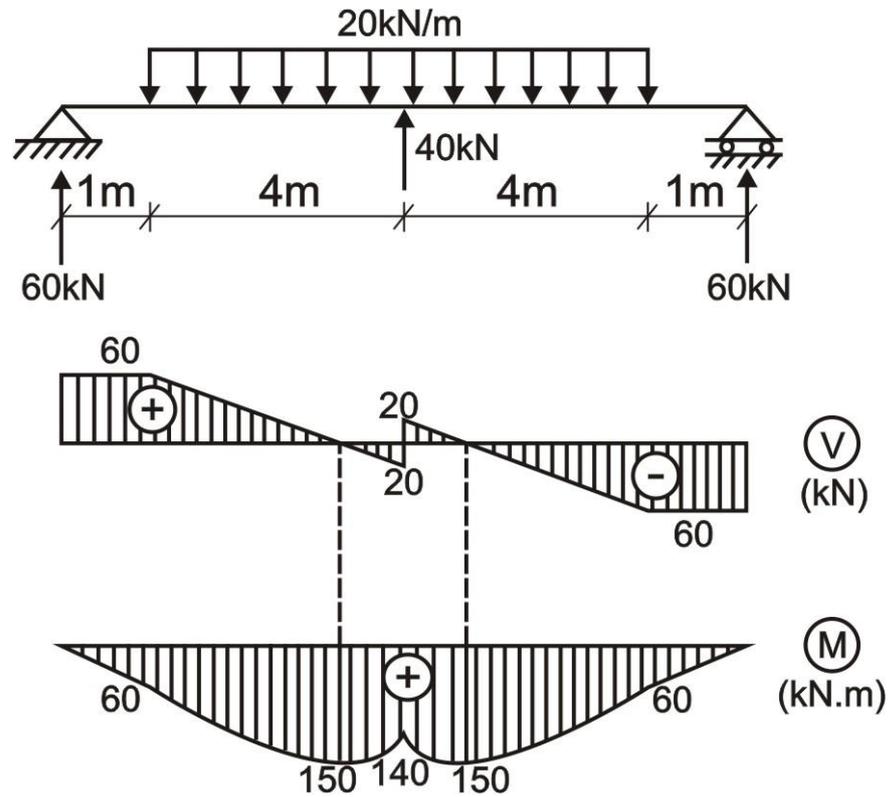


Fig. 4.11

Calculamos el momento de inercia respecto al eje neutro, que es la mitad de 440mm (altura de la sección transversal), debido a su simetría y lo denotamos por I_z

$$I_z = \left[\frac{12 \cdot 2^3}{12} + 12 \cdot 2 \cdot 21^2 \right] \cdot 2 + \frac{1,2 \cdot 40^3}{12} = 27584 \text{ cm}^4$$

Luego:

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{M_{\text{máx}}}{I_z} y_{\text{máx}} = \frac{150 \cdot 10^3}{27584 \cdot 10^{-8}} \cdot (22 \cdot 10^{-2}) = 119,63 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 119,63 \text{ MPa}$$

PROBLEMA 4.5 Determinar el valor de δ de la dimensión transversal de la viga de hierro fundido mostrado en la figura 4.12, eligiendo previamente su posición racional. Considerar $[\sigma]_{\text{tr}} = 300 \text{ kgf/cm}^2$ y $[\sigma]_{\text{comp}} = 900 \text{ kgf/cm}^2$

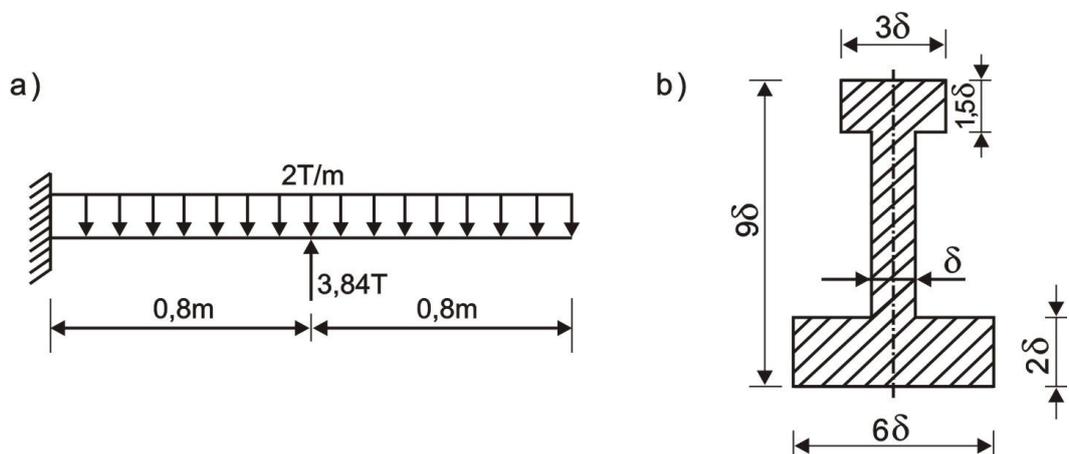


Fig. 4.12

Solución:

Calculamos las reacciones y graficamos los diagramas de fuerza cortante y momento flector, tal como se muestra en la figura 4.13

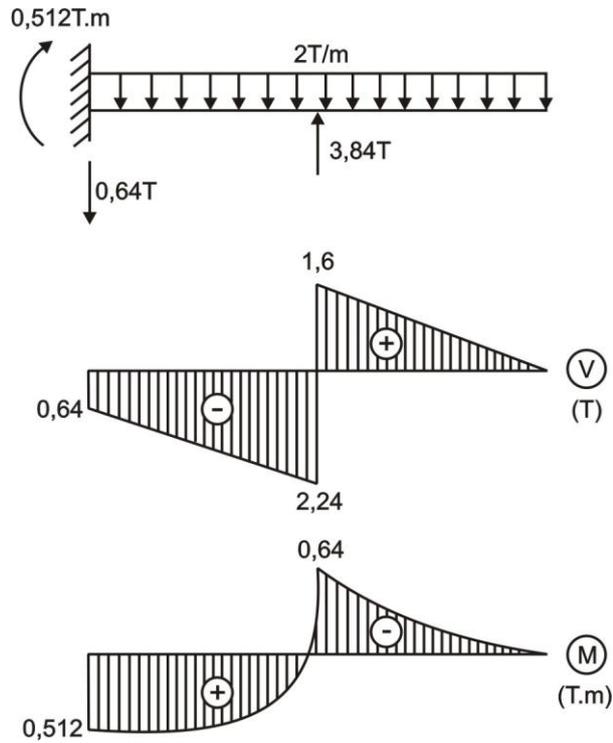


Fig. 4.13

Ahora, determinamos la posición del eje central o neutro, el cual pasa por el centro de gravedad de la sección (figura 4.14), calculando su valor respecto al eje Z_1

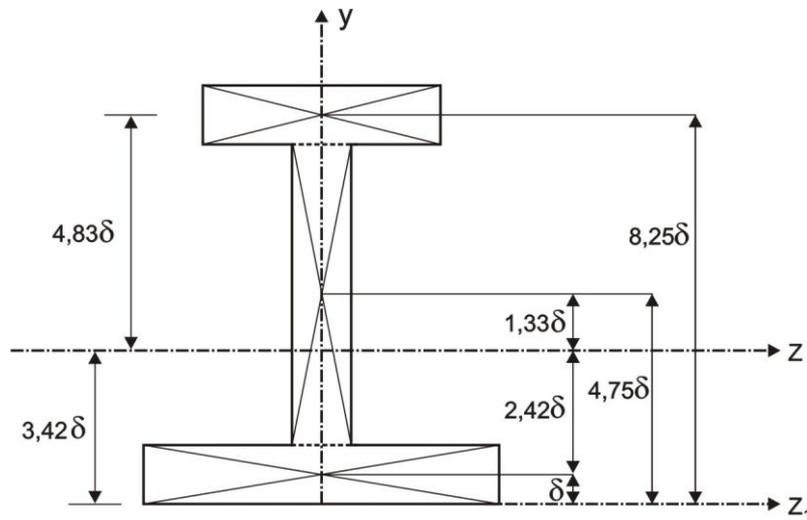


Fig. 4.14

$$Y_{CG} = \frac{(6\delta)(2\delta)(\delta) + (\delta)(5,5\delta)(4,75\delta) + (3\delta)(1,5\delta)((8,25\delta))}{(6\delta)(2\delta) + (\delta)(5,5\delta) + (3\delta)(1,5\delta)} = 3,42\delta$$

Posteriormente, determinamos el momento de inercia respecto a dicho eje, es decir Z

$$I_z = \frac{(6\delta)(2\delta)^3}{12} + (6\delta)(2\delta)(2,42\delta)^2 + \frac{(\delta)(5,5\delta)^3}{12} + (\delta)(5,5\delta)(1,33\delta)^2 + \frac{(3\delta)(1,5\delta)^3}{12} + (3\delta)(1,5\delta)(4,83\delta)^2 = 203,69\delta^4$$

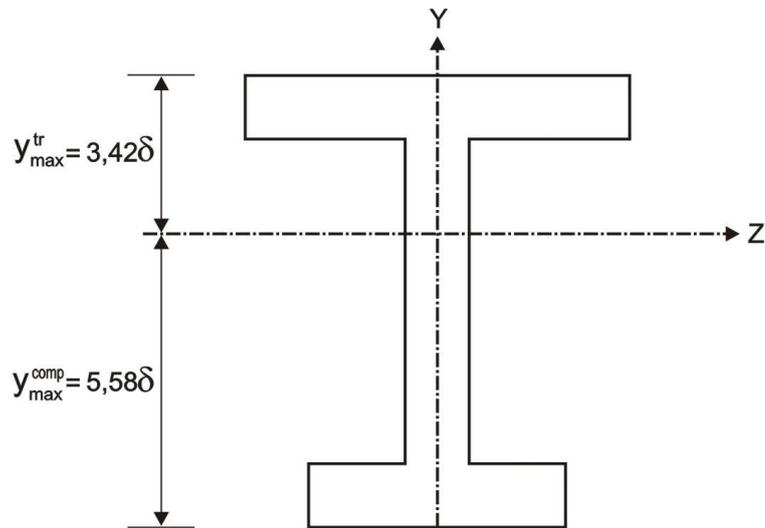


Fig. 4.15

Luego, determinamos la posición racional de la sección:

- Como el momento flector máximo es $M_{\text{máx}} = -0,64T.m$, en consecuencia la zona de tracción será la parte superior y la de compresión la parte inferior al eje neutro.
- Por áreas de la sección transversal dividida por la línea central o eje neutro.

$$A_{\text{sup}}^Z = (3\delta)(1,5\delta) + (\delta)(4,08\delta) = 8,58\delta^2$$

$$A_{\text{inf}}^Z = (6\delta)(2\delta) + (\delta)(1,42\delta) = 13,42\delta^2$$

Como podemos apreciar, en función de las áreas, la zona de tracción es la que se ubica en la parte inferior y la de compresión en la parte superior.

En este caso, la ubicación de las zonas de tracción y compresión, no concuerdan por momento flector máximo y áreas, entonces se propone una nueva posición de la sección transversal de la viga, denominada posición racional y será la mostrada en la figura 4.15

Luego, determinamos el valor de δ , de acuerdo a las condiciones de resistencia en tracción y compresión (fórmulas 4.8 y 4.9)

TRACCION:

$$\sigma_{\text{máx}}^{\text{tr}} = \frac{M_{\text{máx}}}{I_z} y_{\text{máx}}^{\text{tr}} \leq [\sigma]_{\text{tr}}$$

$$\frac{0,64 \cdot 10^5}{203,69\delta^4} \cdot 3,42\delta \leq 300 \Rightarrow \delta \geq 1,53\text{cm}$$

COMPRESION:

$$\sigma_{\text{máx}}^{\text{comp}} = \frac{M_{\text{máx}}}{I_z} y_{\text{máx}}^{\text{comp}} \leq [\sigma]_{\text{comp}}$$

$$\frac{0,64 \cdot 10^5}{203,69\delta^4} \cdot 5,58\delta \leq 900 \Rightarrow \delta \geq 1,25\text{cm}$$

Ahora determinamos el valor de δ , en función del intervalo que cumpla con ambas condiciones y las medidas mostradas en la figura 4.16, que están en milímetros.

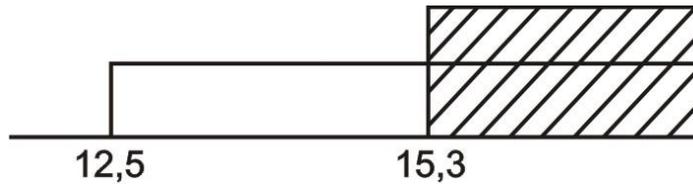


Fig. 4.16

Asumimos:

$$\delta_{\min} = 15,3\text{mm}$$

Comprobamos, que la zona más peligrosa es la de tracción, utilizando la fórmula 4.6:

$$\frac{3,42 \cdot 15,3}{5,58 \cdot 15,3} > \frac{300}{900}$$

$$0,613 > 0,333$$

De esta manera, no es necesario comprobar a través del momento positivo máximo.

4.2 ESFUERZOS TANGENCIALES

Aparte de realizar la comprobación de resistencia de las vigas en flexión por los esfuerzos normales, en ciertos casos es necesario e importante realizar la comprobación por los esfuerzos tangenciales, a través de la fórmula 4.14, conocida como fórmula de D.I. Zhuravski.

$$\tau = \frac{VS_z}{I_z b} \quad (4.14)$$

Donde:

τ - esfuerzo tangencial en cualquier punto de la sección transversal

V - fuerza cortante en la sección dada de la viga

S_z - momento estático respecto al eje central, de la parte de la sección transversal desde su extremo superior hasta el punto requerido

I_z - momento de inercia de la sección transversal de la viga, respecto al eje central o neutro

b - ancho de la sección en dicho punto, donde se determina τ

El esfuerzo tangencial máximo para las secciones circulares, rectangulares y tipo I, suceden en el eje neutro.

En estos casos, la condición de resistencia es:

$$\tau_{\max} = \frac{V_{\max} S_{z,\max}}{I_z b} \leq [\tau] \quad (4.15)$$

Donde:

$S_{z,\max}$ - momento estático de la mitad de la sección transversal, respecto al eje central

SECCION CIRCULAR. El esfuerzo tangencial máximo surge en los puntos del eje central ($y = 0$) (figura 4.17) y se calcula por la fórmula 4.16

$$\tau_{\max} = \frac{4V_{\max}}{3A} \quad (4.16)$$

Donde:

$V_{\text{máx}}$ - fuerza cortante máxima en la viga

A - área de la sección transversal de la viga

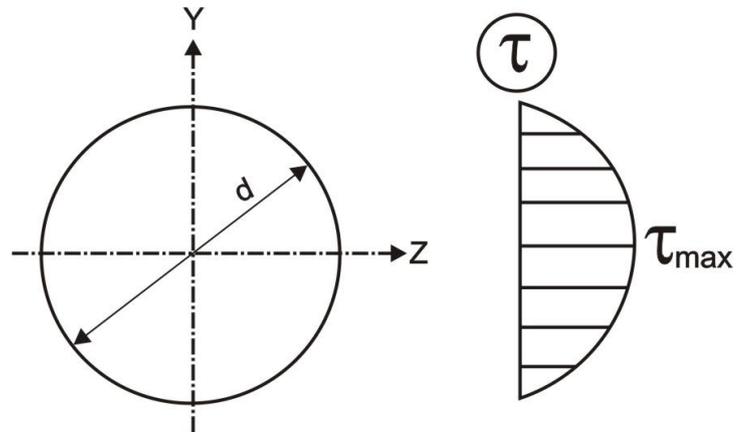


Fig. 4.17

SECCION RECTANGULAR. El esfuerzo tangencial a una distancia "y" del eje central, se calcula por la fórmula 4.17

$$\tau = \frac{6V}{bh^3} \left[\frac{h^2}{4} - y^2 \right] = \frac{3V}{2bh} \left[1 - 4 \left(\frac{y}{h} \right)^2 \right] \quad (4.17)$$

El esfuerzo tangencial máximo surge en los puntos del eje central ($y = 0$), calculándose por la fórmula 4.18

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{3V_{\text{máx}}}{2bh} = \frac{3V_{\text{máx}}}{2A} \quad (4.18)$$

En la figura 4.18 se muestra el diagrama de esfuerzo tangencial para la sección rectangular. El esfuerzo tangencial en cualquier punto es paralelo al plano de la carga.

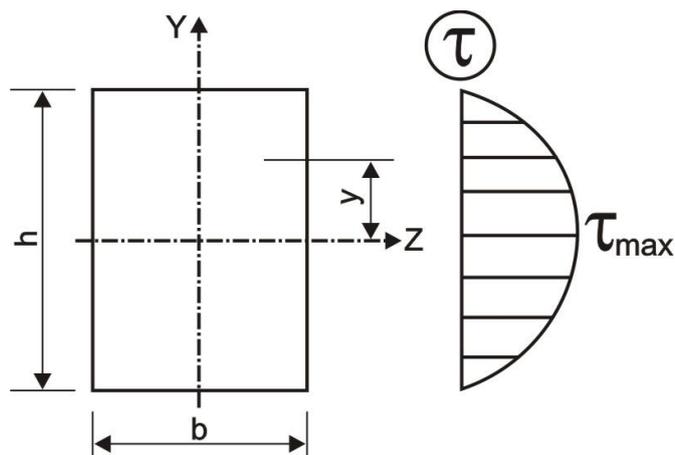


Fig. 4.18

SECCION I. El esfuerzo tangencial máximo surge en los puntos del eje central (figura 4.19) y se calcula por la fórmula 4.19

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{V_{\text{máx}} S_{z,\text{máx}}}{I_z b_{\text{alma}}} \quad (4.19)$$

Donde:

b_{alma} - ancho del alma de la sección

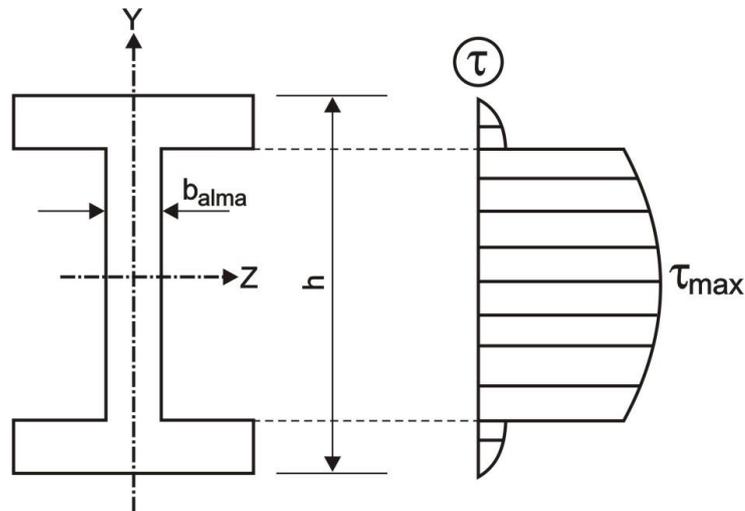


Fig. 4.19

Es importante indicar, que la fórmula de D.I. Zhuravski es aproximada, cuyos resultados exactos se pueden obtener solo por los métodos de la teoría de elasticidad.

PROBLEMA 4.6 Graficar el diagrama de esfuerzos tangenciales para la sección mostrada (figura 4.20, a) de una viga, determinando adicionalmente τ_D , si $V = 7T$

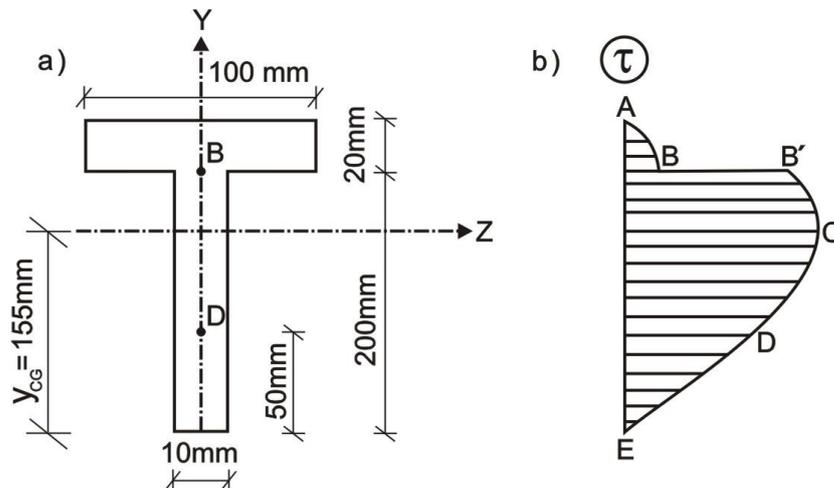


Fig. 4.20

Solución:

Determinamos la ubicación del eje neutro (eje Z), calculando Y_{CG} en relación al eje de la base.

$$Y_{CG} = \frac{10 \cdot 200 \cdot 100 + 100 \cdot 20 \cdot 210}{10 \cdot 200 + 100 \cdot 20} = 155 \text{ mm}$$

Ahora, en base a la fórmula 4.14, calculamos los valores de τ para cada punto de la sección transversal por el eje vertical.

$$\tau_A = 0, \text{ porque } S_z^A = 0$$

$$\tau_B = \frac{7 \cdot 10^3 \cdot 110}{1883,33 \cdot 10} = 40,88 \text{ kgf / cm}^2$$

Siendo:

$$S_z^B = 10 \cdot 2,5 \cdot 5 = 110 \text{ cm}^3$$

$$I_z = \frac{1 \cdot 20^3}{12} + 1 \cdot 20 \cdot 5,5^2 + \frac{10 \cdot 2^3}{12} + 10 \cdot 2,5 \cdot 5^2 = 1883,33 \text{ cm}^4$$

$$\tau_B = \frac{7 \cdot 10^3 \cdot 110}{1883,33 \cdot 1} = 408,85 \text{ kgf / cm}^2$$

$$\tau_C = \tau_{\text{máx}} = \frac{7 \cdot 10^3 \cdot 120,13}{1883,33 \cdot 1} = 446,50 \text{ kgf / cm}^2$$

$$S_z^C = 110 + 1,4 \cdot 5 \cdot 2,25 = 120,13 \text{ cm}^3$$

$$\tau_D = \frac{7 \cdot 10^3 \cdot 65}{1883,33 \cdot 1} = 241,59 \text{ kgf / cm}^2$$

$$S_z^D = 120,13 - 1 \cdot 10 \cdot 5,5 \cdot 2,25 = 65 \text{ cm}^3$$

$$\tau_E = 0, \text{ porque } S_z^E = 0$$

PROBLEMA 4.7 Determinar el esfuerzo tangencial máximo que surge en la sección transversal de la viga (figura 4.21)

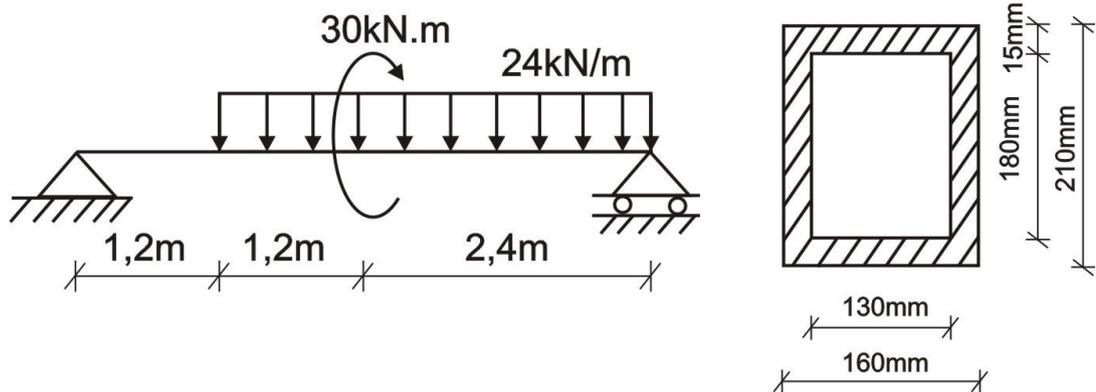


Fig. 4.21

Solución:

Calculamos las reacciones en la viga y graficamos los diagramas de fuerza cortante y momento flector (figura 4.22), aunque este último no se utilizará, pero es importante graficar todos los diagramas correspondientes.

Posteriormente, calculamos el momento de inercia respecto al eje central o neutro, que pasa por la mitad de la altura de la sección transversal, debido a su simetría.

$$I_z = \frac{0,16 \cdot 0,21^3}{12} - \frac{0,13 \cdot 0,18^3}{12} = 6,03 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$$

Luego, determinamos el momento estático de la parte superior al eje neutro y su ancho de la sección en dicho eje.

$$S_{z,\text{máx}} = 0,16 \cdot 0,105 \cdot 0,0525 - 0,13 \cdot 0,09 \cdot 0,045 = 3,555 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$$

$$b = 0,16 - 0,13 = 0,03 \text{ m}$$

En consecuencia, el esfuerzo tangencial máximo será:

$$\tau_{\max} = \frac{60,25 \cdot 10^3 \cdot 3,555 \cdot 10^{-4}}{6,03 \cdot 10^{-5} \cdot 0,03} = 11,84 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 11,84 \text{MPa}$$

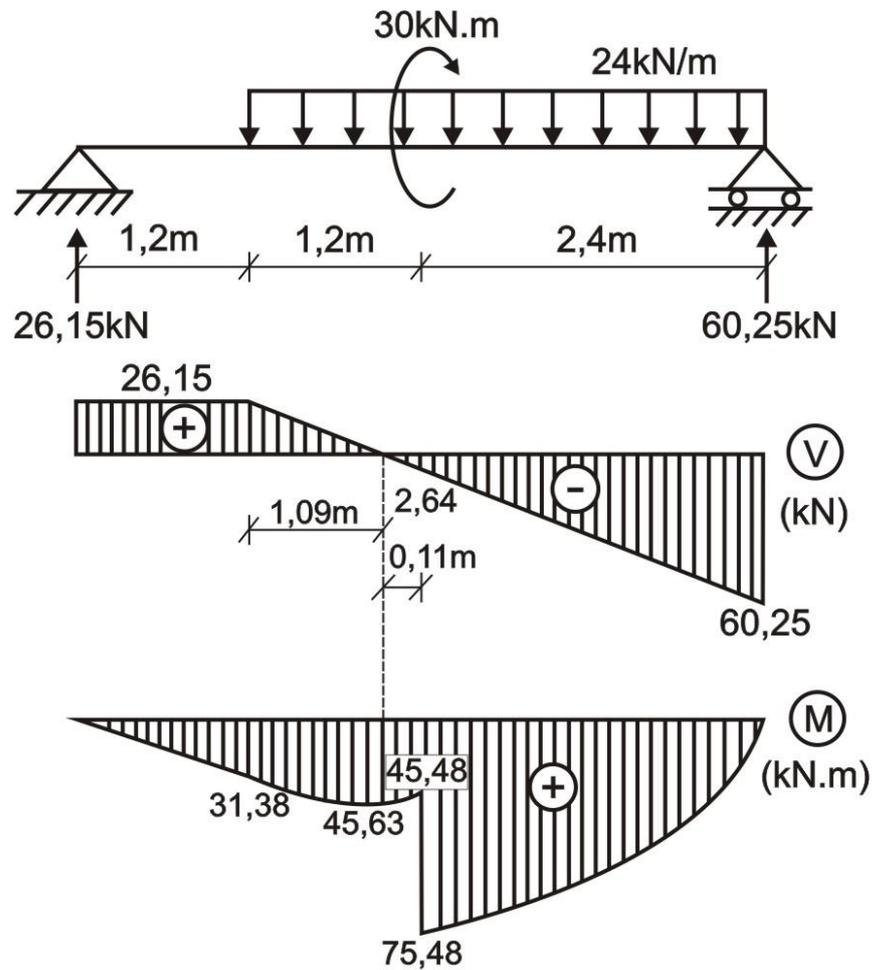


Fig. 4.22

PROBLEMA 4.8 Para la viga mostrada en la figura, determinar el valor de “w” (kg/m), si los esfuerzos admisibles son $[\sigma]=130\text{kg}/\text{cm}^2$ en tracción y compresión y $[\tau]=14\text{kg}/\text{cm}^2$ en cortante.

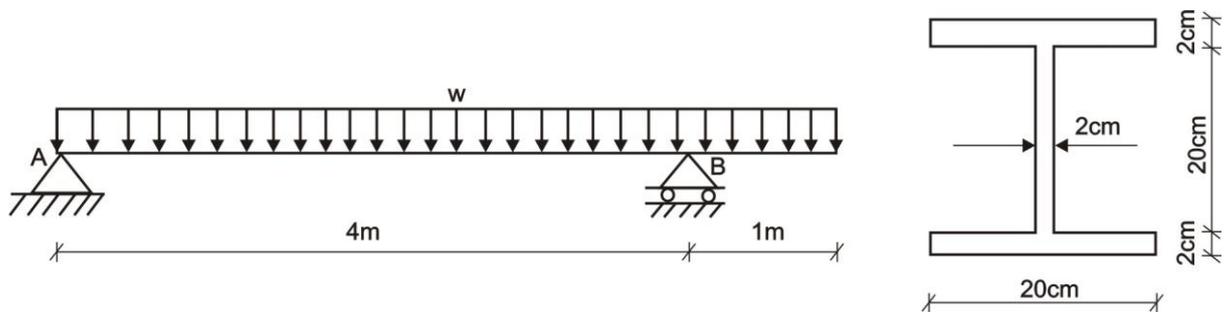


Fig. 4.23

Solución:

Como nos piden el valor de “w” en kg/m, graficamos los diagramas de fuerza cortante y momento flector en estas unidades, calculando previamente las reacciones en los apoyos A y B, los cuales se muestran en la figura 4.24

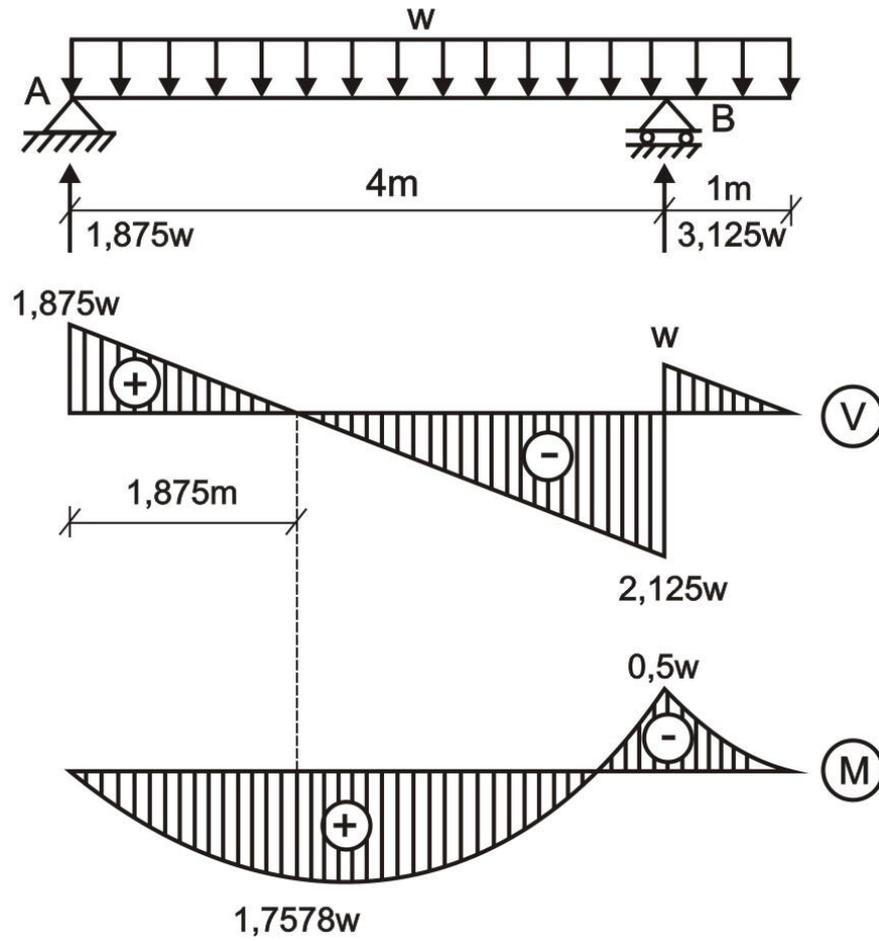


Fig. 4.24

Calculamos el momento estático y momento de inercia respecto al eje neutro, que pasa por el centro de la sección transversal (a 12cm de la base), debido a su simetría.

$$S_z = 20 \cdot 2 \cdot 11 + 2 \cdot 10 \cdot 5 = 540 \text{ cm}^3$$

$$I_z = \left[\frac{20 \cdot 2^3}{12} + 20 \cdot 2 \cdot 11^2 \right] \cdot 2 + \frac{2 \cdot 20^3}{12} = 11040 \text{ cm}^4$$

Ahora, aplicamos la condición de resistencia para los esfuerzos normal y tangencial.

ESFUERZO NORMAL:

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{M_{\text{máx}}}{I_z} y_{\text{máx}} \leq [\sigma]$$

$$\frac{1,7578w}{11040 \cdot 10^{-8}} \cdot (12 \cdot 10^{-2}) \leq 130 \cdot 10^4$$

$$w \leq 680,39 \text{ kg/m}$$

ESFUERZO TANGENCIAL:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{V_{\text{máx}} S_{z,\text{máx}}}{I_z b_{\text{alma}}} \leq [\tau]$$

$$\frac{2,125w \cdot 540 \cdot 10^{-6}}{11040 \cdot 10^{-8} \cdot 2 \cdot 10^{-2}} \leq 14 \cdot 10^4$$

$$w \leq 269,38 \text{ kg/m}$$

Como el valor de “w” debe de cumplir con ambas condiciones de resistencia, entonces analizamos el intervalo en el cual cumpla (figura 4.25)

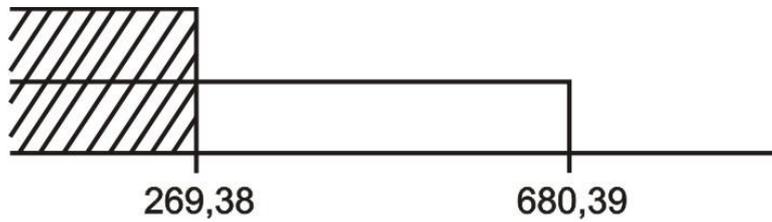


Fig. 4.25

De donde:

$$w_{\text{máx}} = 269,38 \text{ kg/m}$$

PROBLEMA 4.9 Una viga simplemente apoyada de longitud “L” en metros, soporta una carga uniformemente distribuida de 16kN/m en toda su longitud y tiene la sección mostrada en la figura. Determinar el valor de “L” que ocasione un esfuerzo máximo por flexión $\sigma_{\text{máx}} = 40 \text{ MPa}$, eligiendo previamente la posición racional de la viga y grafique el diagrama de esfuerzos tangenciales.

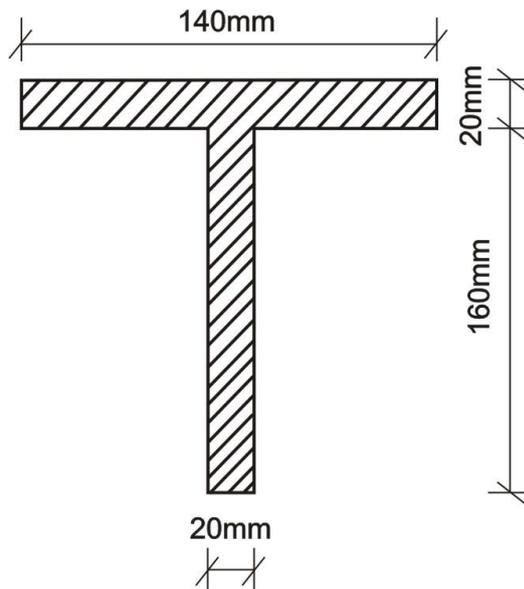


Fig. 4.26

Solución:

Esquematizamos la viga con la carga distribuida y graficamos sus diagramas de fuerza cortante y momento flector (figura 4.27)

Determinamos la ubicación del eje neutro (eje Z), calculando Y_{CG} en relación al eje de la base.

$$Y_{\text{CG}} = \frac{20 \cdot 160 \cdot 80 + 140 \cdot 20 \cdot 170}{20 \cdot 160 + 140 \cdot 20} = 122 \text{ mm}$$

La ubicación del eje neutro se muestra en la figura 4.28 y calculamos el momento de inercia respecto a dicho eje.

$$I_z = \frac{20 \cdot 160^3}{12} + 20 \cdot 160 \cdot 42^2 + \frac{140 \cdot 20^3}{12} + 140 \cdot 20 \cdot 48^2 = 19016000 \text{ mm}^4$$

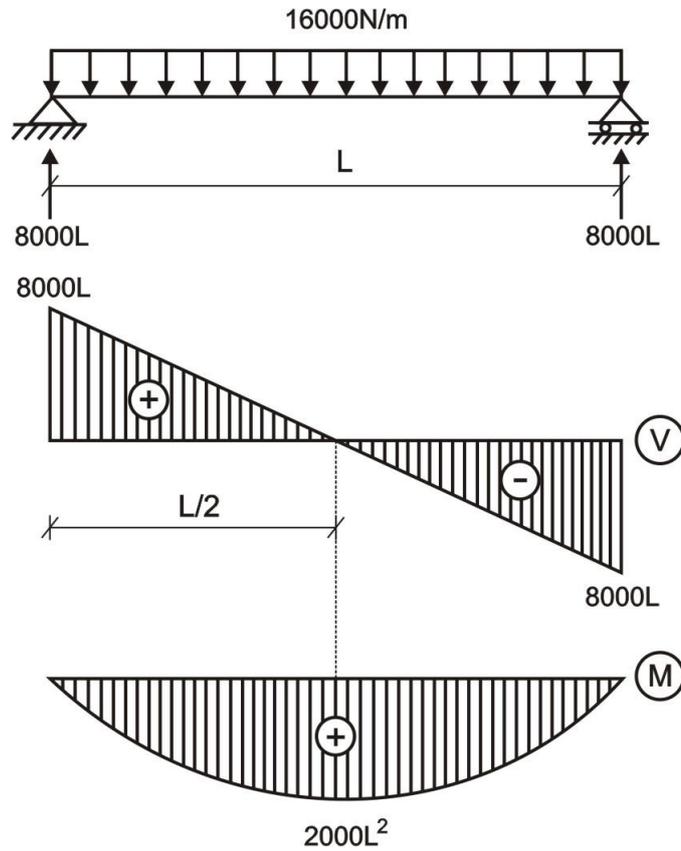


Fig. 4.27

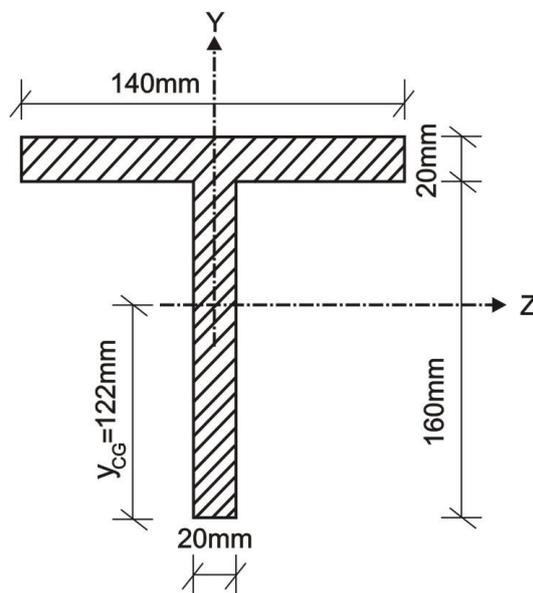


Fig. 4.28

Luego, determinamos la posición racional de la sección:

- Como el momento flector máximo es $M_{\text{máx}} = 2000L^2$, en consecuencia la zona de tracción será la parte inferior y la de compresión la parte superior al eje neutro.
- Por áreas de la sección transversal dividida por la línea central o eje neutro.

$$A_{\text{sup}}^Z = 140 \cdot 20 + 20 \cdot 38 = 3560\text{mm}^2$$

$$A_{\text{inf}}^Z = 20.122 = 2440\text{mm}^2$$

Como podemos apreciar, en función de las áreas, la zona de tracción es la que se ubica en la parte superior y la de compresión en la parte inferior.

En este caso, la ubicación de las zonas de tracción y compresión, no concuerdan por momento flector máximo y áreas, entonces se propone una nueva posición de la sección transversal de la viga, denominada posición racional y será la mostrada en la figura 4.29,a

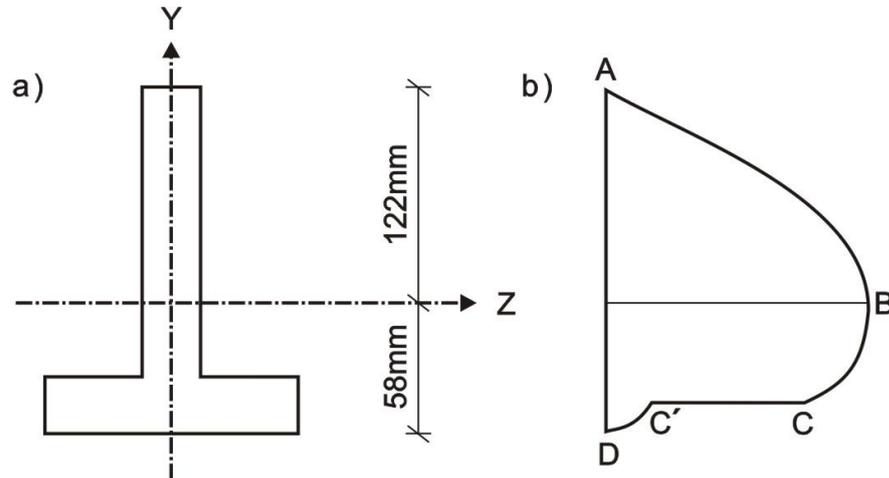


Fig. 4.29

Ahora, aplicamos la condición de resistencia por esfuerzo normal máximo.

$$\sigma_{\text{máx}} \leq [\sigma]$$

$$\frac{2000L^2}{19016000 \cdot 10^{-12}} \cdot (122 \cdot 10^{-3}) \leq 40 \cdot 10^6$$

$$L \leq 1,76\text{m}$$

Asumimos:

$$L = 1,76\text{m}$$

Calculamos los valores de los esfuerzos tangenciales correspondientes a los puntos mostrados en la figura 4.29,b

$$\tau_A = 0$$

$$\tau_B = \tau_{\text{máx}} = \frac{8000 \cdot 1,76 \cdot 148840 \cdot 10^{-9}}{19016000 \cdot 10^{-12} \cdot 20 \cdot 10^{-3}} = 5,51 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 5,51 \text{ MPa}$$

$$S_z^B = 20 \cdot 122 \cdot 61 = 148840 \text{ mm}^3$$

$$\tau_C = \frac{8000 \cdot 1,76 \cdot 134400 \cdot 10^{-9}}{19016000 \cdot 10^{-12} \cdot 20 \cdot 10^{-3}} = 4,97 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 4,97 \text{ MPa}$$

$$S_z^C = 148840 - 20 \cdot 38 \cdot 19 = 134400 \text{ mm}^3$$

$$\tau_{C'} = \frac{8000 \cdot 1,76 \cdot 134400 \cdot 10^{-9}}{19016000 \cdot 10^{-12} \cdot 140 \cdot 10^{-3}} = 0,71 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 0,71 \text{ MPa}$$

$$\tau_D = 0$$

Con los valores obtenidos, graficamos el diagrama de esfuerzos tangenciales (figura 4.29,b)

4.3 VIGAS DE DOS MATERIALES

El Ingeniero Civil en su vida profesional, diseña y construye vigas de dos o más materiales diferentes, como vigas de madera reforzadas con placas de acero y vigas de concreto armado.

La teoría de la flexión de estas vigas dentro del margen de elasticidad de los materiales es muy sencilla. Para vigas de dos materiales el procedimiento consiste en transformar la viga compuesta en una viga equivalente de un solo material.

Por ejemplo, si deseamos determinar el ancho equivalente en acero de una viga de madera, podemos obtenerlo a través de la fórmula 4.20

$$b'_a = \frac{E_m}{E_a} b_m \quad (4.20)$$

Donde:

b'_a - ancho equivalente en acero de la viga de madera

E_m - módulo de elasticidad de la madera

E_a - módulo de elasticidad del acero

b_m - ancho real de la viga de madera

PROBLEMA 4.10 Determinar los esfuerzos máximos en el acero y la madera de la sección transversal de la viga mostrada en la figura 4.30, si los módulos de elasticidad de ambos materiales son $E_a = 209\text{GPa}$ y $E_m = 11\text{GPa}$.

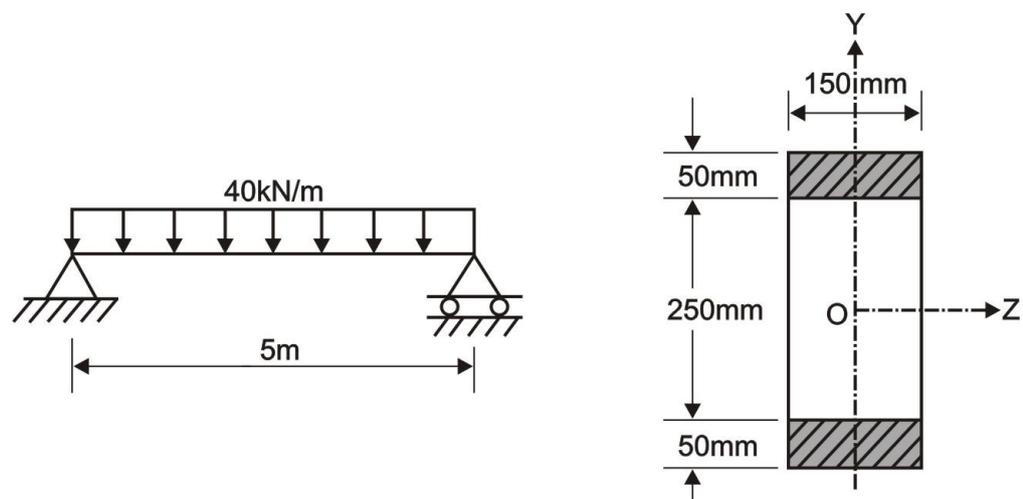


Fig. 4.30

Solución:

Graficamos los diagramas de fuerza cortante y momento flector para la viga, tal como se muestra en la figura 4.31

Esquemizamos la sección transversal de la viga (figura 4,32,a), convirtiéndolo en una sección equivalente de un solo material, en este caso de acero, tal como se puede apreciar en la figura 4.32,b donde el eje central pasa por el mismo centro de la sección, en virtud de la simetría de la viga. Como se puede apreciar, la sección de acero real se esquematiza con líneas inclinadas en un sentido y la madera convertida en acero, está esquematizada con líneas inclinadas en el otro sentido.

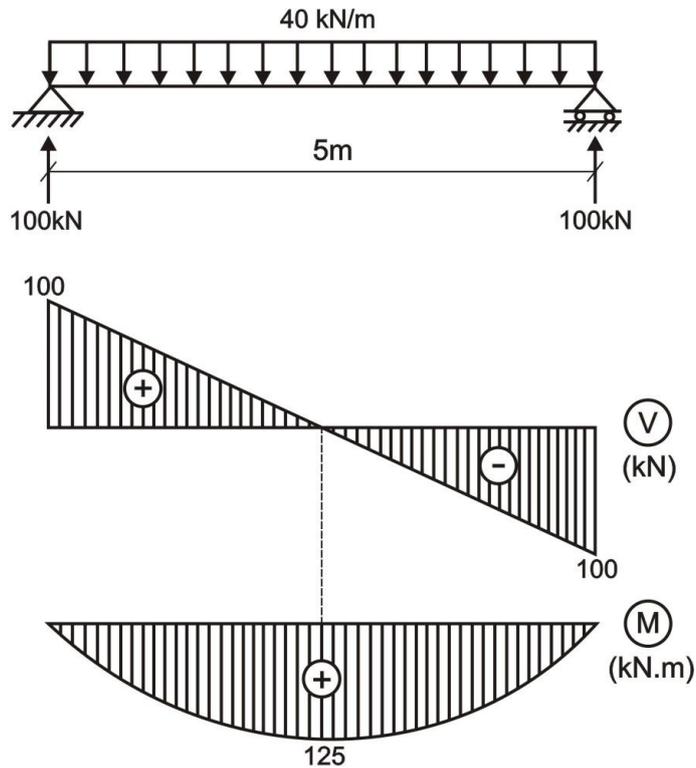


Fig. 4.31

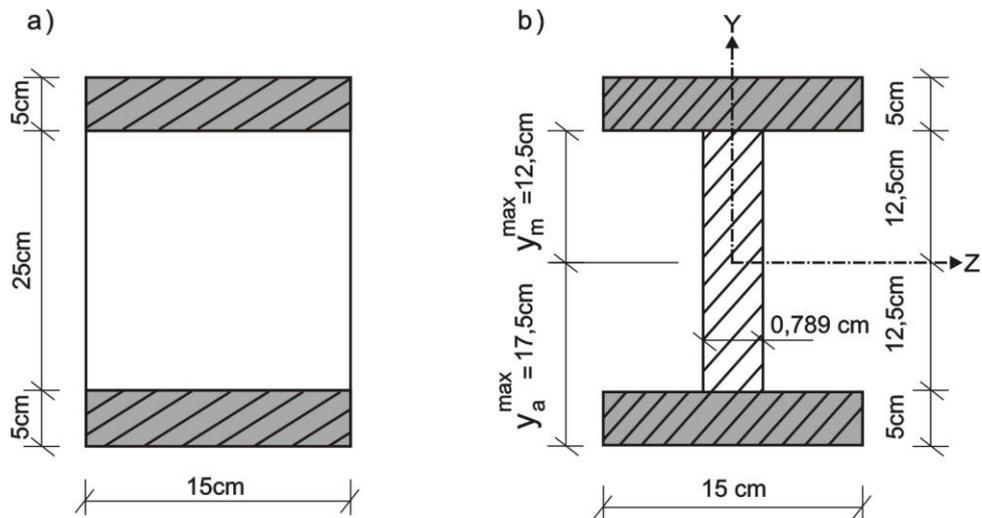


Fig. 4.32

A través de la fórmula 4.20, determinamos el ancho de la sección equivalente, esto es:

$$b'_a = \frac{E_m}{E_a} b_m = \frac{11}{209} \cdot 15 = 0,789 \text{ cm}$$

Posteriormente, calculamos el momento de inercia respecto al eje central.

$$I_z = 2 \left[\frac{15 \cdot 5^3}{12} + 15 \cdot 5 \cdot 15^2 \right] + \frac{0,789 \cdot 25^3}{12} = 35089,84 \text{ cm}^4$$

Ahora, determinamos los esfuerzos máximos para el acero y la madera.

$$\sigma_a^{\text{máx}} = \frac{M_{\text{máx}}}{I_z} y_a^{\text{máx}} = \frac{125 \cdot 10^3}{35089,84 \cdot 10^{-8}} \cdot 17,5 \cdot 10^{-2} = 62,34 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 62,34 \text{ MPa}$$

$$\sigma_m^{\text{máx}} = \frac{E_m}{E_a} \frac{M_{\text{máx}}}{I_z} y_m^{\text{máx}} = \frac{11}{209} \cdot \frac{125 \cdot 10^3}{35089,84 \cdot 10^{-8}} \cdot 12,5 \cdot 10^{-2} = 2,34 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 2,34 \text{MPa}$$

Donde:

$y_a^{\text{máx}}$ - distancia máxima desde el eje neutro hasta el punto más alejado del acero

$y_m^{\text{máx}}$ - distancia máxima desde el eje neutro hasta el punto más alejado de la madera

PROBLEMA 4.11 Una viga compuesta se construye de una viga de madera de 6plg de ancho y 8plg de altura, reforzada en la cara inferior por una placa de acero de 6plg de ancho por 0,5plg de espesor y en la cara superior por otra placa de acero de 2plg de ancho por 1plg de espesor, tal como se muestra en la figura 4.33. El módulo de elasticidad para la madera es $E_m = 1,5 \cdot 10^6$ psi y para el acero es $E_a = 30 \cdot 10^6$ psi. Determinar el momento flector máximo $M_{\text{máx}}$ para la viga, si los esfuerzos permisibles para la madera y el acero son $[\sigma]_m = 2000$ psi y $[\sigma]_a = 16000$ psi.

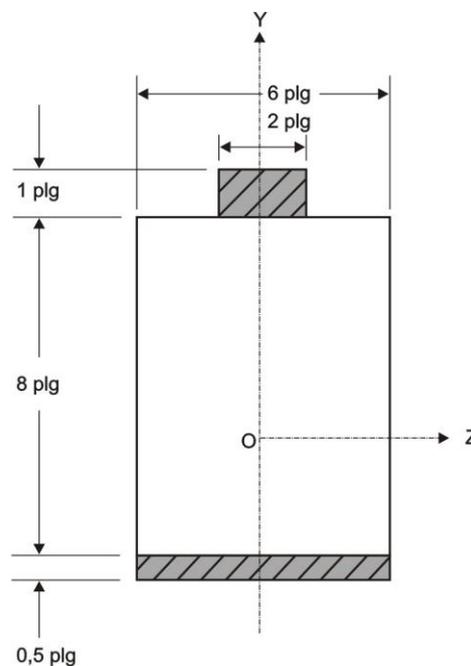


Fig. 4.33

Solución:

Esquematisamos la sección transversal de la viga (figura 4.34,a) y su correspondiente sección equivalente de acero (figura 4.34,b).

Determinamos el ancho equivalente de la viga de madera, convertida en acero, utilizando la fórmula 4.20

$$b'_a = \frac{E_m}{E_a} b_m = \frac{1,5 \cdot 10^6}{30 \cdot 10^6} \cdot 6 = 0,3 \text{plg}$$

Posteriormente, determinamos la ubicación del eje central o neutro, el cual pasa por el centro de gravedad de la sección convertida en acero, calculándolo en función al eje que pasa por la base de la sección.

$$Y_{CG} = \frac{6 \cdot 0,5 \cdot 0,25 + 0,3 \cdot 8 \cdot 4,5 + 2 \cdot 1 \cdot 9}{6 \cdot 0,5 + 0,3 \cdot 8 + 2 \cdot 1} = 3,99 \text{plg}$$

También, determinamos el momento de inercia respecto al eje central.

$$I_z = \frac{6.0,5^3}{12} + 6.0,5.3,74^2 + \frac{0,3.8^3}{12} + 0,3.8.0,51^2 + \frac{2.1^3}{12} + 2.1.5,01^2 = 105,82 \text{ plg}^4$$

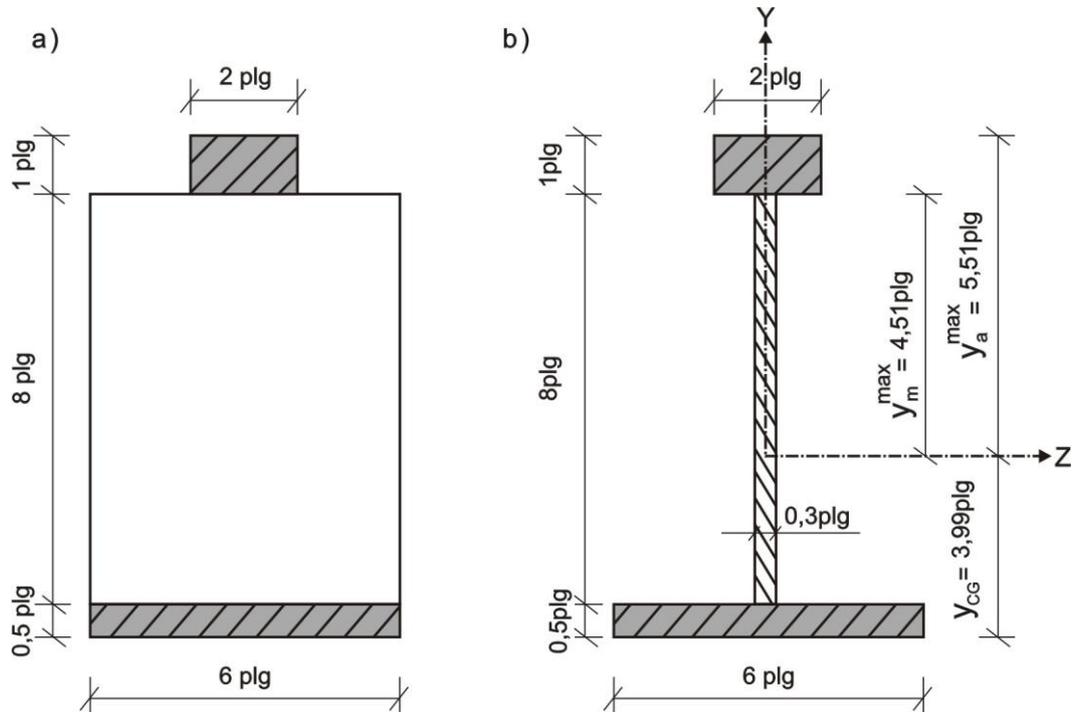


Fig. 4.34

Ahora, aplicamos la condición de resistencia para el acero y la madera, determinando en ambos casos el rango del momento flector máximo.

ACERO:

$$\sigma_a^{\text{máx}} = \frac{M_{\text{máx}}}{I_z} y_a^{\text{máx}} \leq [\sigma]_a \Rightarrow \frac{M_{\text{máx}}}{105,82} \cdot 5,51 \leq 16000$$

$$\therefore M_{\text{máx}} \leq 307281,31 \text{ lb.plg}$$

MADERA:

$$\sigma_m^{\text{máx}} = \frac{E_m}{E_a} \frac{M_{\text{máx}}}{I_z} y_m^{\text{máx}} \leq [\sigma]_m \Rightarrow \frac{1,5 \cdot 10^6}{30 \cdot 10^6} \cdot \frac{M_{\text{máx}}}{105,82} \cdot 4,51 \leq 2000$$

$$\therefore M_{\text{máx}} \leq 938536,58 \text{ lb.plg}$$

Como el momento flector es único debe de cumplir con ambos casos, tal como se muestra en la figura 4.35

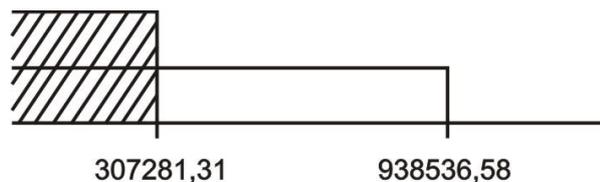


Fig. 4.35

De esta manera, el momento flector permisible será:

$$M_{\text{máx}} = 307281,31 \text{ lb.plg} = 307,28 \text{ k.plg}$$

PROBLEMA 4.12 Una viga de madera de 25cm x 30cm, se refuerza con dos placas de acero firmemente sujetas a las caras superior e inferior, tal como se muestra en la figura 4.36. Calcular la variación del momento flector que puede resistir la viga, que se obtiene al comparar la viga sin reforzar con la viga reforzada. Considerar $n = 15$ y los esfuerzos admisibles en el acero y la madera de 120MPa y 8MPa respectivamente.

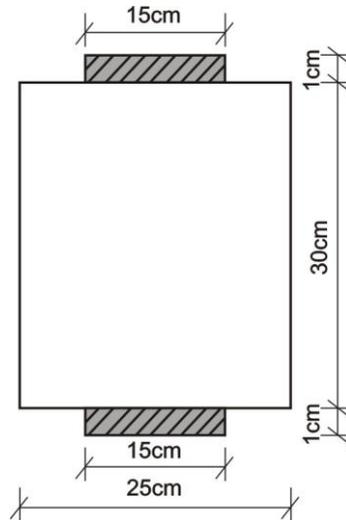


Fig. 4.36

Solución:

Analizamos ambos casos, es decir la viga sin reforzar y luego la viga reforzada.

VIGA SIN REFORZAR:

El esquema de sección transversal se muestra en la figura 4.37

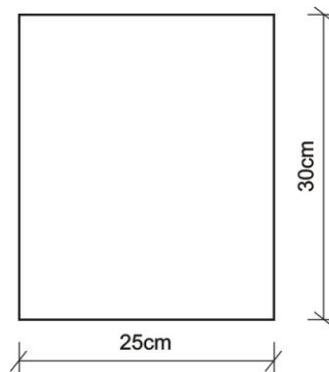


Fig. 4.37

Calculamos su momento de inercia.

$$I_z = \frac{25 \cdot 30^3}{12} = 56250 \text{ cm}^4$$

Luego:

$$\sigma_m^{\text{máx}} = \frac{M_{\text{máx}}}{I_z} y_m^{\text{máx}} \leq [\sigma]_m \quad \Rightarrow \quad \frac{M_1}{56250 \cdot 10^{-8}} \cdot (15 \cdot 10^{-2}) \leq 8 \cdot 10^6$$

$$\therefore M_1 \leq 30000 \text{ N.m}$$

Asumimos:

$$M_1 = 30 \text{ kN.m}$$

VIGA REFORZADA:

El esquema de la viga, es la misma que la mostrada en la figura 4.36

Determinamos el ancho equivalente de la viga de madera, convertida en acero.

$$b'_a = \frac{E_m}{E_a} b_m = \frac{1}{15} \cdot 25 = 1,667 \text{ cm}$$

La sección transformada se muestra en la figura 4.38

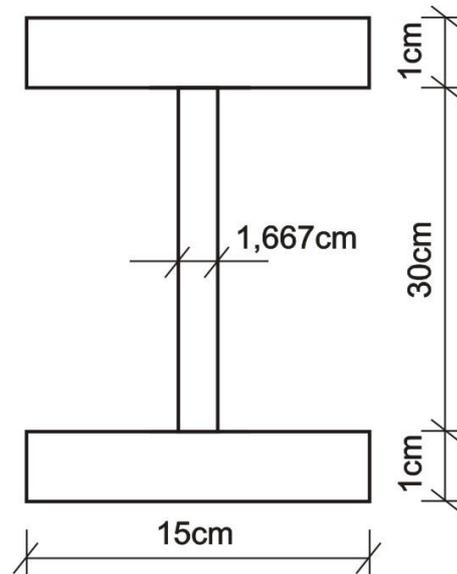


Fig. 4.38

Como la sección transversal es simétrica, no es necesario calcular la ubicación del eje neutro, ya que pasa a una altura de 16cm respecto al eje de la base de dicha sección.

Calculamos el momento de inercia respecto al eje neutro.

$$I_z = \frac{1,667 \cdot 30^3}{12} + 2 \cdot \left[\frac{15 \cdot 1^3}{12} + 15 \cdot 1 \cdot 15,5^2 \right] = 10960,75 \text{ cm}^4$$

Ahora, analizamos cada material en forma separada.

ACERO:

$$\sigma_a^{\text{máx}} = \frac{M_{\text{máx}}}{I_z} y_a^{\text{máx}} \leq [\sigma]_a \quad \Rightarrow \quad \frac{M_2}{10960,75 \cdot 10^{-8}} \cdot (16 \cdot 10^{-2}) \leq 120 \cdot 10^6$$
$$\therefore M_2 \leq 82205,62 \text{ N.m}$$

MADERA:

$$\sigma_m^{\text{máx}} = \frac{E_m}{E_a} \frac{M_{\text{máx}}}{I_z} y_m^{\text{máx}} \leq [\sigma]_m \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{15} \cdot \frac{M_2}{10960,75 \cdot 10^{-8}} \cdot (15 \cdot 10^{-2}) \leq 8 \cdot 10^6$$
$$\therefore M_2 \leq 87686 \text{ N.m}$$

Como para la viga reforzada el momento M_2 es único, analizamos el intervalo que cumpla con ambos materiales (figura 4.39)

Asumimos:

$$M_2 = 82,205 \text{ kN.m}$$

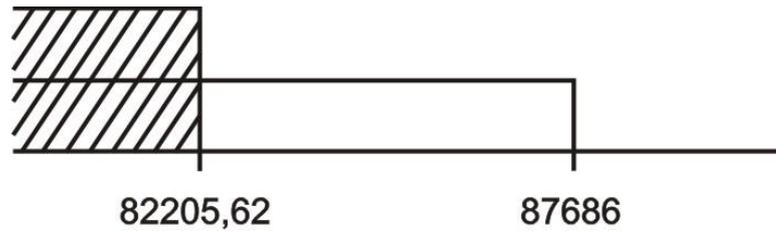


Fig. 4.39

Luego, la variación de momento flector entre ambos casos será:

$$\Delta M = M_2 - M_1 = 82,205 - 30 = 52,205 \text{ kN.m}$$

Esto demuestra, que la viga reforzada puede soportar un momento mucho mayor que la viga sin reforzar.

4.4 VIGAS DE CONCRETO ARMADO

El concreto es el material de construcción más usado a nivel mundial, siendo su resistencia en compresión aproximadamente igual a diez veces su resistencia en tracción, razón por la cual se debe de reforzar con varillas de acero, conociéndolo a tal tipo de estructura como concreto armado o reforzado.

Como el concreto se adhiere perfectamente al acero, no habrá deslizamiento de las varillas con respecto al concreto durante la flexión y se podrá aplicar el procedimiento de cálculo como si se tratase de vigas de dos materiales.

En la práctica, se considera que toda la tracción es absorbida por el acero y toda la compresión por el concreto.

Para el cálculo de vigas de concreto armado, se suele admitir que "n" es la relación entre el módulo de elasticidad del acero y el módulo de elasticidad del concreto, es decir:

$$n = \frac{E_a}{E_c} \quad (4.21)$$

Para resolver tal tipo de estructuras, será necesario transformar el área de acero A_a en un área de concreto $A'_c = nA_a$ equivalente. La distribución de esfuerzos seguirá una ley lineal, ya que las secciones rectas se mantienen planas durante la flexión y se supone que se cumple la Ley de Hooke en el concreto.

Para determinar la ubicación del eje central o neutro, será necesario calcularlo en base a la igualdad de los momentos estáticos de la parte superior a dicho eje, que es de concreto real (compresión) y la parte inferior de acero transformada en concreto (tracción).

El tipo de varilla de acero recomendada es corrugada, con la finalidad de tener una correcta adherencia entre ambos materiales.

El recubrimiento utilizado en las vigas de concreto armado, además de tener una función estructural, sirve como protección ante la corrosión, debido a que el acero expuesto al medio ambiente se corroe muy rápido y la otra función es la seguridad ante incendios, debido a que el acero se dilata rápidamente y expulsa al concreto produciéndose los desastres.

PROBLEMA 4.13 Determinar los esfuerzos máximos en el concreto y el acero de una viga de concreto armado, cuya sección transversal se muestra en la figura 4.40. Considerar $M_{\text{máx}} = 1400 \text{kgf} \cdot \text{m}$, $n = 15$ y el área total de las tres varillas de acero es $6,16 \text{cm}^2$

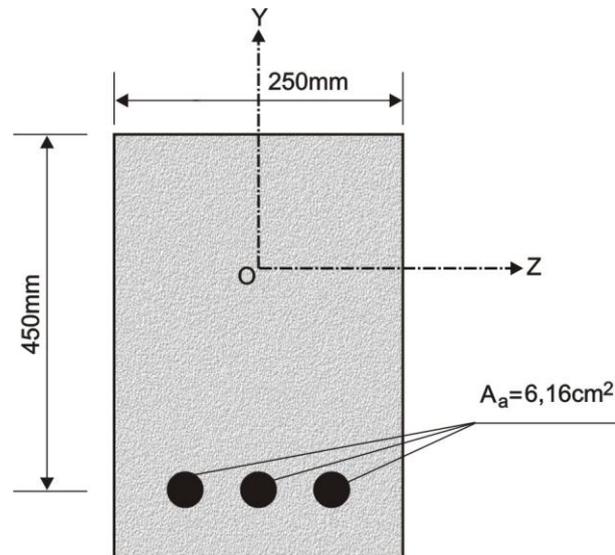


Fig. 4.40

Solución:

Determinamos el área del acero transformado en concreto.

$$A'_c = nA_a = 15 \cdot 6,16 = 92,4 \text{cm}^2$$

En base a este resultado, graficamos la misma sección, pero convertida en un solo material, mostrándose la parte de acero transformada en concreto con líneas oblicuas (figura 4.41) y determinamos la ubicación del eje central, a través de la igualdad de los momentos estáticos.

$$S_z^{\text{sup}} = S_z^{\text{inf}} \quad \Rightarrow \quad 25 \cdot x \cdot \left(\frac{x}{2}\right) = 92,4 \cdot (45 - x)$$

$$12,5x^2 + 92,4x - 4158 = 0$$

De donde:

$$x = 14,91 \text{cm}$$

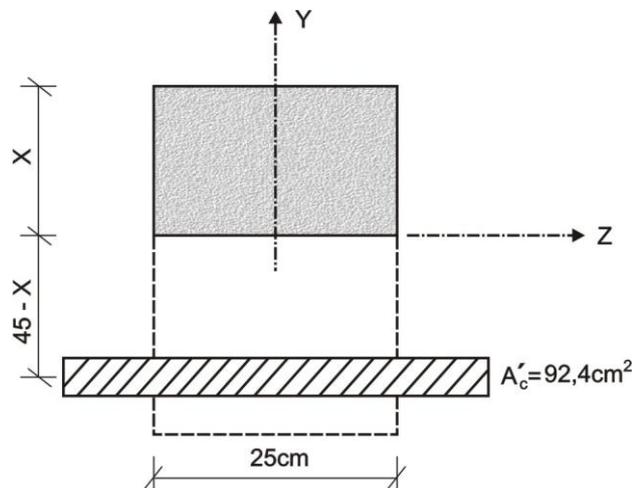


Fig. 4.41

Posteriormente, calculamos el momento de inercia respecto a dicho eje neutro.

$$I_z = \frac{25 \cdot 14,91^3}{12} + 25 \cdot 14,91 \cdot 7,455^2 + 92,4 \cdot 30,09^2 = 111281,49 \text{ cm}^4$$

Finalmente, determinamos los esfuerzos máximos en el concreto y el acero.

$$\sigma_c^{\text{máx}} = \frac{M_{\text{máx}}}{I_z} y_c^{\text{máx}} = \frac{1400 \cdot 100}{111281,49} \cdot 14,91 = 18,76 \text{ kgf / cm}^2$$

$$\sigma_a^{\text{máx}} = \frac{E_a}{E_c} \frac{M_{\text{máx}}}{I_z} y_a^{\text{máx}} = 15 \cdot \frac{1400 \cdot 100}{111281,49} \cdot 30,09 = 567,83 \text{ kgf / cm}^2$$

PROBLEMA 4.14 La sección de una viga de concreto reforzado se muestra en la figura 4.42. El diámetro de cada una de las tres varillas de acero de refuerzo es 25mm y la relación modular $n = 12$. El esfuerzo de compresión permisible en el concreto es $[\sigma]_c = 12 \text{ MPa}$ y el esfuerzo de tracción permisible en el acero es $[\sigma]_a = 110 \text{ MPa}$. Calcular el momento flector máximo permisible $M_{\text{máx}}$ para esta viga.

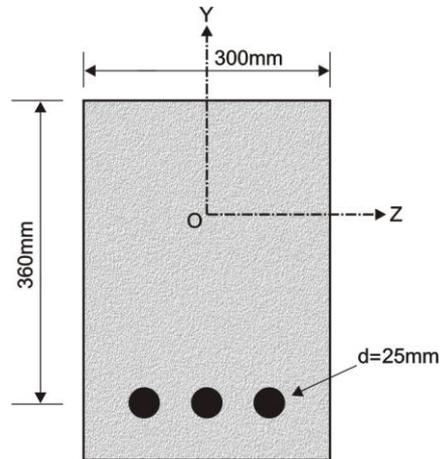


Fig. 4.42

Solución:

Determinamos el área de acero transformada en concreto.

$$A'_c = nA_a = 12 \cdot 3 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 25^2 = 17671,46 \text{ mm}^2$$

Graficamos la misma sección transformada a un solo material (figura 4.43), determinando la ubicación de su eje central, a través de la igualdad de los momentos estáticos.

$$S_z^{\text{sup}} = S_z^{\text{inf}} \quad \Rightarrow \quad 300 \cdot x \cdot \left(\frac{x}{2}\right) = 17671,46 \cdot (360 - x)$$

$$150x^2 + 17671,46x - 6361725,6 = 0$$

De donde:

$$x = 155,3 \text{ mm}$$

Ahora, determinamos el momento de inercia respecto al eje neutro.

$$I_z = \frac{300 \cdot 155,3^3}{12} + 300 \cdot 155,3 \cdot 77,65^2 + 17671,46 \cdot 204,7^2 = 1115025045 \text{ mm}^4$$

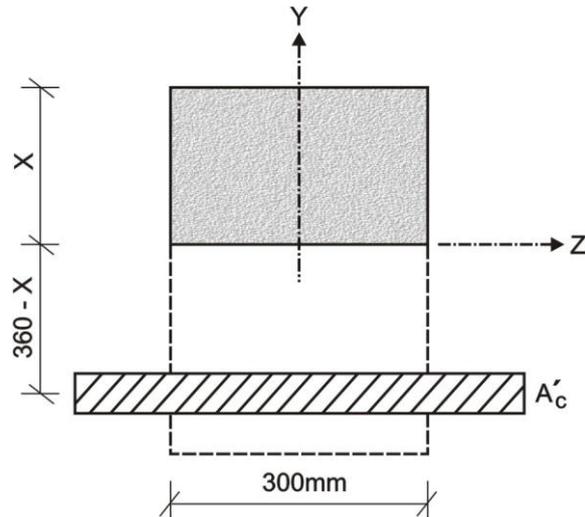


Fig. 4.43

Posteriormente, aplicamos las condiciones de resistencia para ambos materiales.

CONCRETO:

$$\sigma_c^{\text{máx}} = \frac{M_{\text{máx}}}{I_z} y_c^{\text{máx}} \leq [\sigma]_c \quad \Rightarrow \quad \frac{M_{\text{máx}}}{1115025045 \cdot 10^{-12}} \cdot 155,3 \cdot 10^{-3} \leq 12 \cdot 10^6$$

$$\therefore M_{\text{máx}} \leq 86157,76 \text{ N.m}$$

ACERO:

$$\sigma_a^{\text{máx}} = \frac{E_a}{E_c} \frac{M_{\text{máx}}}{I_z} y_a^{\text{máx}} \leq [\sigma]_a \quad \Rightarrow \quad 12 \cdot \frac{M_{\text{máx}}}{1115025045 \cdot 10^{-12}} \cdot 204,7 \cdot 10^{-3} \leq 110 \cdot 10^6$$

$$\therefore M_{\text{máx}} \leq 49931,91 \text{ N.m}$$

Como el momento flector es único debe de cumplir con ambos casos, tal como se muestra en la figura 4.44



Fig. 4.44

De esta manera, el momento flector permisible será:

$$M_{\text{máx}} = 49931,91 \text{ N.m} = 49,93 \text{ kN.m}$$

PROBLEMA 4.15 En una viga de concreto armado, $b = 25 \text{ cm}$, $d = 45 \text{ cm}$ y $n = 10$. Los esfuerzos máximos desarrollados son de 6 MPa en el concreto y de 120 MPa en el acero. Calcular el momento flector aplicado y el área requerida de acero. Considerar "d" la distancia desde el eje de las varillas de acero hasta la cara superior de la viga.

Solución:

Se sabe que:

$$\sigma_c^{\text{máx}} = \frac{M_{\text{máx}}}{I_z} y_c^{\text{máx}} \quad (\text{a})$$

$$\sigma_a^{\text{máx}} = \frac{E_a}{E_c} \frac{M_{\text{máx}}}{I_z} y_a^{\text{máx}} \quad (b)$$

Reemplazamos valores y dividimos (b) entre (a):

$$\frac{10y_a^{\text{máx}}}{y_c^{\text{máx}}} = \frac{120}{6}$$

De donde:

$$y_a^{\text{máx}} = 2y_c^{\text{máx}} \quad (c)$$

En la figura 4.45 se muestran $y_c^{\text{máx}}$ e $y_a^{\text{máx}}$. Hay que indicar que en dicha figura se muestran cuatro varillas de acero, lo cual ha sido elegido arbitrariamente, debido a que en el diseño estructural una vez obtenida el área total de acero, se elige el número de varillas y diámetro de cada una de ellas.

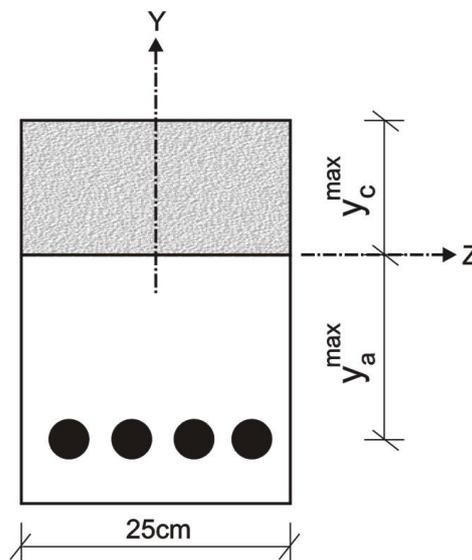


Fig. 4.45

De la figura 4.45, se desprende que:

$$y_c^{\text{máx}} + y_a^{\text{máx}} = 45 \quad (d)$$

Reemplazamos (c) en (d) y obtenemos:

$$y_c^{\text{máx}} = 15\text{cm}$$

$$y_a^{\text{máx}} = 30\text{cm}$$

Transformamos el área de acero en concreto, obteniéndose:

$$A_c' = nA_a = 10A_a$$

En la figura 4.46 se muestran los valores de $y_c^{\text{máx}} = 15\text{cm}$ e $y_a^{\text{máx}} = 30\text{cm}$, así como el área de acero transformado en concreto $A_c' = 10A_a$

Calculamos el área del acero, conocida como cuantía de acero, a través de la igualdad de momentos estáticos de la parte superior e inferior.

$$S_z^{\text{sup}} = S_z^{\text{inf}} \quad \Rightarrow \quad 25 \cdot 15 \cdot 7,5 = 10 \cdot A_a \cdot 30$$

$$A_a = 9,375\text{cm}^2$$

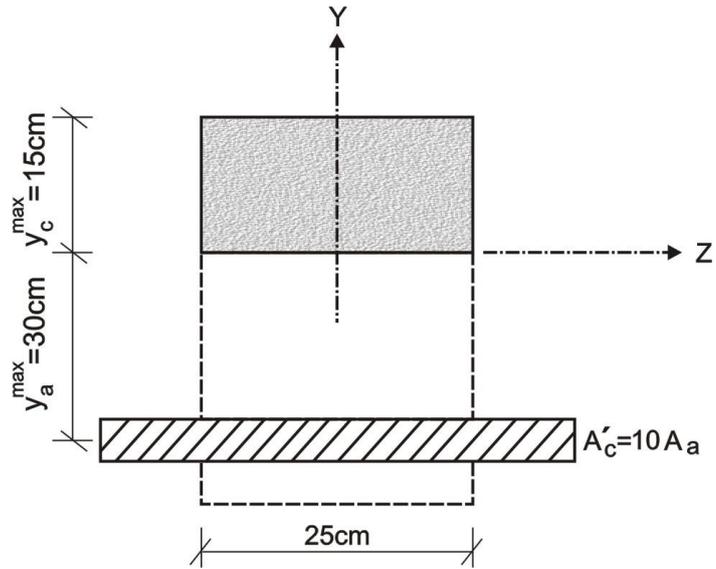


Fig. 4.46

Ahora, calculamos el momento de inercia respecto al eje neutro.

$$I_z = \frac{25 \cdot 15^3}{12} + 25 \cdot 15 \cdot 7,5^2 + 10 \cdot 9,375 \cdot 30^2 = 112500 \text{cm}^4$$

Reemplazamos el valor obtenido en la ecuación (a) y obtenemos:

$$\frac{M_{\text{máx}}}{112500 \cdot 10^{-8}} \cdot (15 \cdot 10^{-2}) = 6 \cdot 10^6$$

De donde:

$$M_{\text{máx}} = 45000 \text{N.m} = 45 \text{kN.m}$$

CAPITULO 5

DEFORMACION EN VIGAS

La viga ante la acción de cargas externas, ubicadas en uno de los planos principales de inercia y actuantes por la normal con su eje, hace que el eje de la viga se deforme en forma de curva en el plano de cargas. El eje deformado de la viga recibe el nombre de *línea elástica* o *elástica*.

La deformación de la viga se caracteriza por dos magnitudes:

1. *Deflexión* o *flecha*, que es el desplazamiento vertical de un punto de la viga, desde su posición inicial hasta su nueva ubicación en la línea elástica.
2. *Pendiente* o *ángulo de giro*, que es el ángulo que gira cada sección transversal alrededor del eje neutro en relación a su posición inicial y se determina por la tangente trazada al punto indicado en la línea elástica respecto a la línea horizontal de su posición inicial.

El desplazamiento de la sección transversal de la viga a lo largo de su eje longitudinal se desprecia, por ser una magnitud muy pequeña en comparación con la deflexión.

La deflexión se simbolizará por la letra "y", mientras que la pendiente por θ (figura 5.1). Por ejemplo, para vigas de concreto armado, su deflexión máxima es $y_{\text{máx}} \leq (L/360)$.

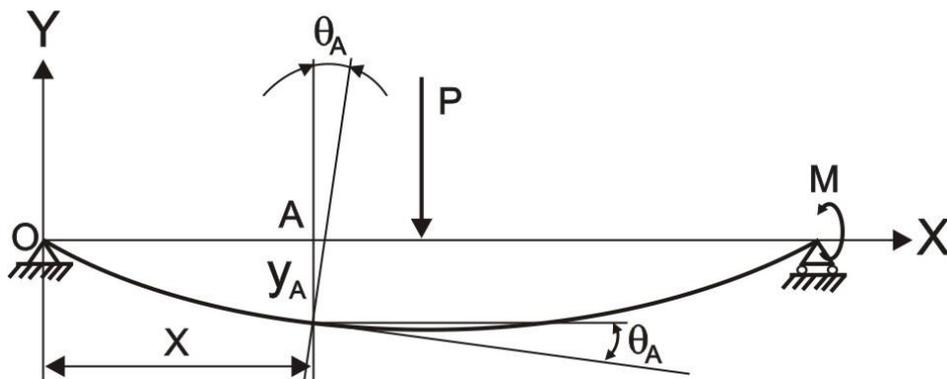


Fig. 5.1

La ecuación $y = f(x)$, que expresa la dependencia entre la deflexión "y" debido a las cargas dadas y la coordenada "x", se denomina *ecuación de la línea elástica*.

En base a un conocido principio acerca de la interpretación geométrica de la derivada, tenemos que $\text{tg}\theta = dy/dx$.

En la práctica, generalmente la pendiente de las secciones transversales $\theta \leq 1^\circ$, razón por la cual se puede asumir que $\text{tg}\theta \approx \theta$, lo que implica que $\theta = dy/dx$.

Entre la curvatura de la línea elástica, el momento flector y la rigidez de la sección transversal de la viga, existe la siguiente dependencia expresada en la fórmula 5.1.

$$\frac{1}{\rho(x)} = \frac{M(x)}{EI_z} \quad (5.1)$$

Donde:

$\rho(x)$ - radio de curvatura de la línea elástica de la viga en el punto ubicada a una distancia "x" del inicio de coordenadas (figura 5.2)

$M(x)$ - momento flector en el mismo punto de la viga

EI_z - rigidez de la sección transversal de la viga

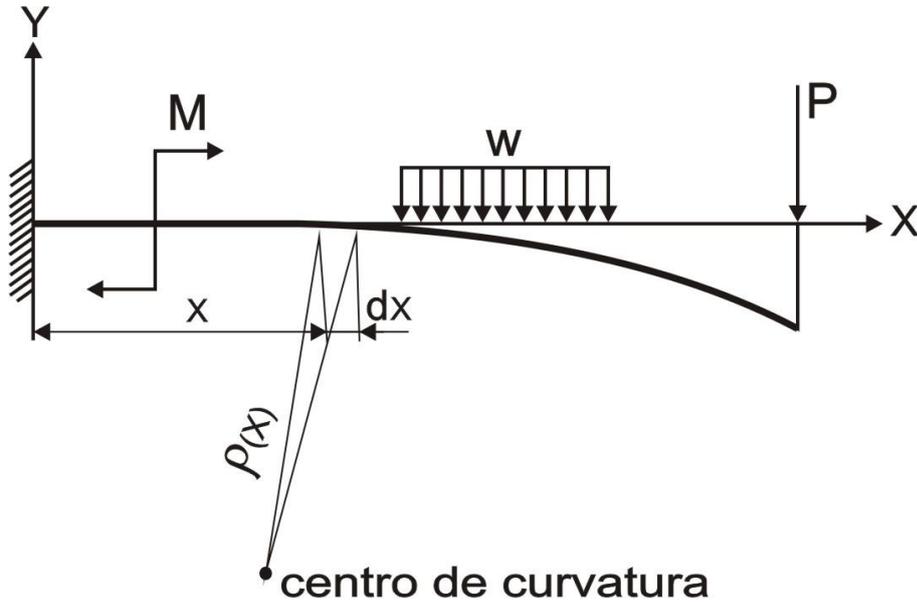


Fig. 5.2

De la dependencia obtenida, se desprende la siguiente ecuación diferencial aproximada de la línea elástica de la viga:

$$EI_z y'' = M(x) \quad (5.2)$$

Por el eje y , orientado verticalmente hacia arriba (figura 5.3), la parte izquierda y derecha de la ecuación tienen siempre un mismo signo.

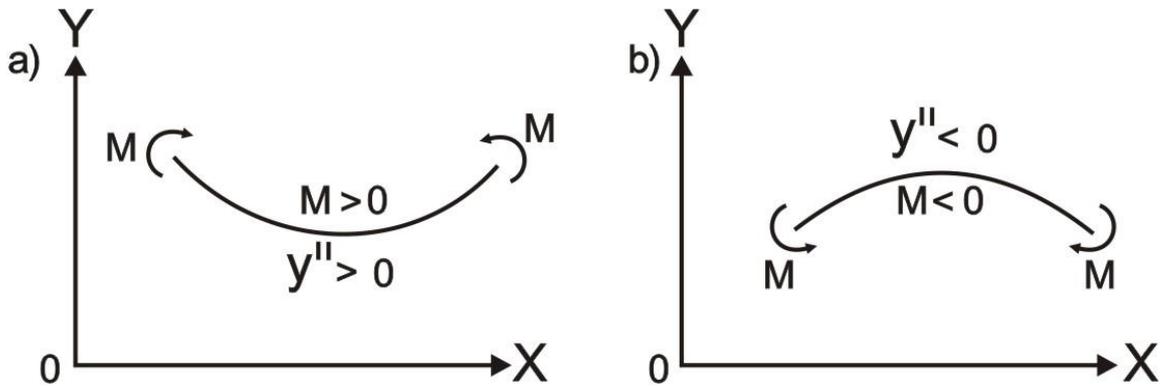


Fig. 5.3

5.1 METODO DE LA DOBLE INTEGRACION

Si integramos una vez la ecuación 5.2, obtendremos la expresión para determinar la pendiente y si integramos una vez más, obtendremos la ecuación para obtener la deflexión.

Como resultado de la doble integración surgen constantes de integración, las cuales serán necesarias determinarlas en función de las condiciones de los apoyos y del Principio de continuidad de la línea elástica en los extremos de los tramos.

Si la viga tiene un solo tramo cargado, entonces tendrá 2 constantes de integración y si tiene n tramos, en consecuencia tendrá $2n$ constantes de integración.

Recordamos, que en base al Principio de continuidad de la línea elástica, en cada sección transversal de la viga, su deflexión y pendiente serán únicas, es decir, tendrán un mismo valor si es extremo de dos tramos de integración. De esta manera, siempre se podrán determinar las constantes de integración, siendo más tedioso el cálculo cuando se tiene un número elevado de tramos.

PROBLEMA 5.1 Determinar θ_A , θ_B , θ_C , y_C para las vigas mostradas en la figura 5.4

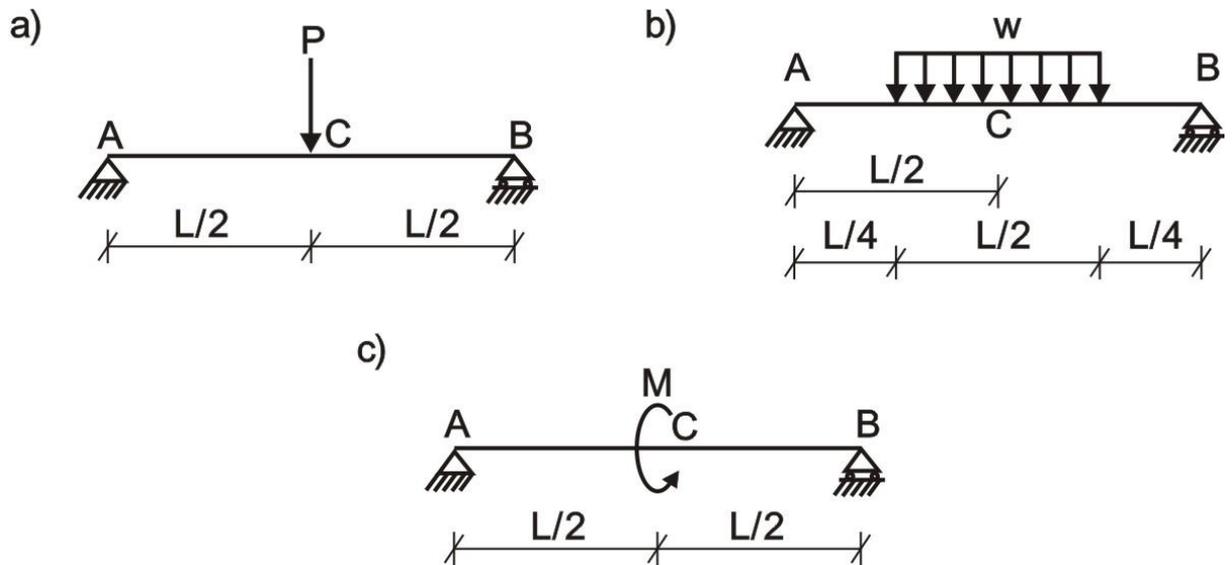


Fig. 5.4

Solución:

CASO (a):

En la figura 5.5 se muestra la viga con sus respectivos ángulos de giro en A y en B y la deflexión máxima que se produce en C.

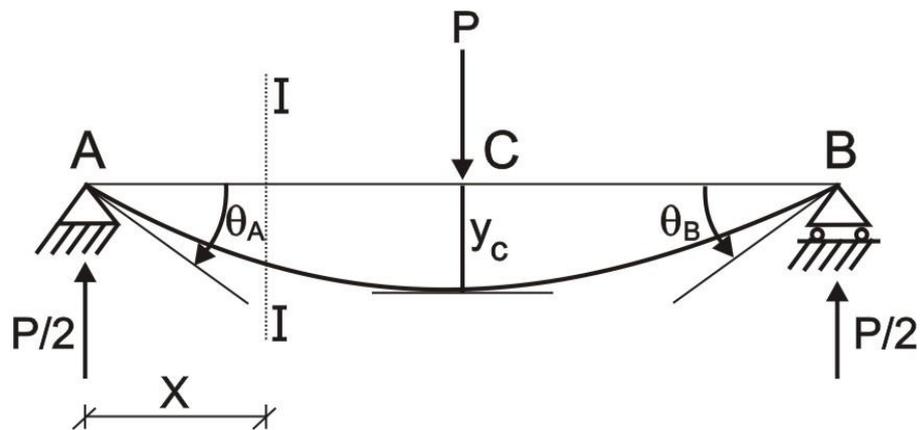


Fig. 5.5

Analizamos el corte I (figura 5.5), aplicando la ecuación 5.2 y reemplazando EI_z por EI .

TRAMO I ($0 \leq x \leq L/2$)

$$EIy'' = \frac{Px}{2}$$

Integramos una vez y obtenemos:

$$EIy' = \frac{Px^2}{4} + C_1$$

Integramos una vez mas, obteniendo:

$$EIy = \frac{Px^3}{12} + C_1x + C_2$$

Las constantes de integración C_1 y C_2 se determinarán a través de las condiciones que la deflexión en el apoyo A y la pendiente en el centro de la viga son iguales a cero.

$$y_{x=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 0 + 0 + C_2 \quad \therefore \quad C_2 = 0$$

$$\theta_{x=L/2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = \frac{PL^2}{16} + C_1 \quad \therefore \quad C_1 = -\frac{PL^2}{16}$$

De esta manera, las ecuaciones quedarán así:

$$EIy' = \frac{Px^2}{4} - \frac{PL^2}{16} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{1}{EI} \left[\frac{Px^2}{4} - \frac{PL^2}{16} \right]$$

$$EIy = \frac{Px^3}{12} - \frac{PL^2}{16}x \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{EI} \left[\frac{Px^3}{12} - \frac{PL^2x}{16} \right]$$

Luego:

$$\theta_A = -\theta_B = \frac{1}{EI} \left[-\frac{PL^2}{16} \right] = -\frac{PL^2}{16EI}$$

$\theta_C = 0$, porque $y_C = y_{\text{máx}}$

$$y_C = \frac{1}{EI} \left[\frac{PL^3}{96} - \frac{PL^2}{32} \right] = -\frac{PL^3}{48EI}$$

Las orientaciones de las pendientes y deflexión, son las mostradas en la figura 5.5

CASO (b):

Analizamos en forma análoga al caso anterior, pero en esta oportunidad debemos de analizar dos tramos, tal como se muestra en la figura 5.6. La elección de los tramos se debe a la actuación de las cargas, por ejemplo, en el tramo I actúa la reacción en A y en el tramo II la reacción en A y la carga distribuida w .

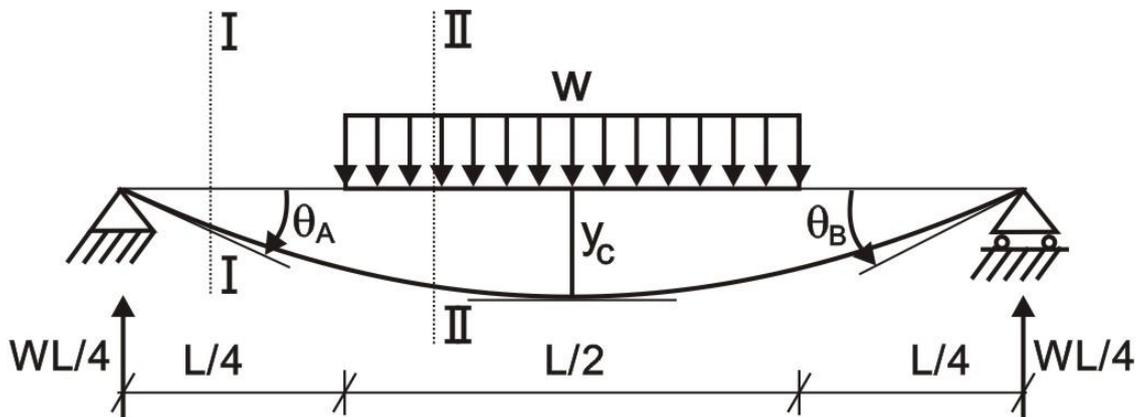


Fig. 5.6

TRAMO I ($0 \leq x \leq L/4$)

$$EIy'' = \frac{wL}{4}x$$

$$EIy' = \frac{wLx^2}{8} + C_1$$

$$EIy = \frac{wLx^3}{24} + C_1x + C_2$$

Como:

$$y_{x=0} = 0 \Rightarrow 0 = 0 + 0 + C_2 \quad \therefore C_2 = 0$$

TRAMO II ($L/4 \leq x \leq 3L/4$)

$$EIy'' = \frac{wL}{4}x - \frac{w\left(x - \frac{L}{4}\right)^2}{2}$$

$$EIy' = \frac{wLx^2}{8} - \frac{w\left(x - \frac{L}{4}\right)^3}{6} + C_3$$

$$EIy = \frac{wLx^3}{24} - \frac{w\left(x - \frac{L}{4}\right)^4}{24} + C_3x + C_4$$

Como:

$$\theta_{x=L/2} = 0 \Rightarrow 0 = \frac{wL^3}{32} - \frac{wL^3}{384} + C_3 \quad \therefore C_3 = -\frac{11wL^3}{384}$$

Para determinar los otros coeficientes, es decir, C_1 y C_4 , debemos de aplicar el Principio de continuidad.

Cuando $x = L/4$ se tiene que:

$$\theta_{x=L/4}^I = \theta_{x=L/4}^{II} \quad (a)$$

$$y_{x=L/4}^I = y_{x=L/4}^{II} \quad (b)$$

Luego, analizamos las ecuaciones (a) y (b), reemplazando $x = L/4$ en las ecuaciones de las pendientes y deflexiones para el primer y segundo tramo, obteniendo:

$$\frac{wL\left(\frac{L}{4}\right)^2}{8} + C_1 = \frac{wL\left(\frac{L}{4}\right)^2}{8} - \frac{w\left(\frac{L}{4} - \frac{L}{4}\right)^3}{6} - \frac{11wL^3}{384} \Rightarrow C_1 = -\frac{11wL^3}{384}$$

$$\frac{wL\left(\frac{L}{4}\right)^3}{24} - \frac{11wL^3}{384}\left(\frac{L}{4}\right) = \frac{wL\left(\frac{L}{4}\right)^3}{24} - \frac{w\left(\frac{L}{4} - \frac{L}{4}\right)^4}{24} - \frac{11wL^3}{384}\left(\frac{L}{4}\right) + C_4 \Rightarrow C_4 = 0$$

De esta manera, las ecuaciones resultantes serán:

TRAMO I:

$$\theta_I = \frac{1}{EI} \left[\frac{wLx^2}{8} - \frac{11wL^3}{384} \right]$$

$$y_I = \frac{1}{EI} \left[\frac{wLx^3}{24} - \frac{11wL^3x}{384} \right]$$

TRAMO II:

$$\theta_{II} = \frac{1}{EI} \left[\frac{wLx^2}{8} - \frac{w \left(x - \frac{L}{4} \right)^3}{6} - \frac{11wL^3}{384} \right]$$

$$y_{II} = \frac{1}{EI} \left[\frac{wLx^3}{24} - \frac{w \left(x - \frac{L}{4} \right)^4}{24} - \frac{11wL^3}{384} x \right]$$

Determinamos:

$$\theta_A = -\theta_B = \frac{1}{EI} \left[-\frac{11wL^3}{384} \right] = -\frac{11wL^3}{384EI}$$

$$\theta_C = 0$$

$$y_C = \frac{1}{EI} \left[\frac{wL^4}{192} - \frac{wL^4}{6144} - \frac{11wL^4}{768} \right] = -\frac{57wL^4}{6144EI}$$

Las orientaciones de las pendientes y deflexión, son las mostradas en al figura 5.6

CASO (c):

Efectuamos una vez más, en forma análoga al caso anterior.

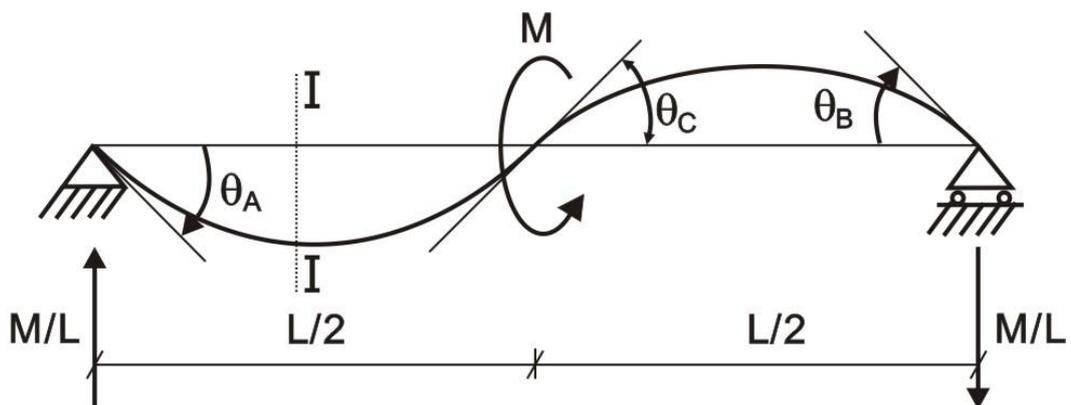


Fig. 5.7

TRAMO I ($0 \leq x \leq L/2$)

$$EIy'' = \frac{M}{L}x$$

$$EIy' = \frac{Mx^2}{2L} + C_1$$

$$EIy = \frac{Mx^3}{6L} + C_1x + C_2$$

Como:

$$y_{x=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 0 + 0 + C_2 \quad \therefore \quad C_2 = 0$$

$$y_{x=L/2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = \frac{ML^2}{48} + \frac{C_1L}{2} \quad \therefore \quad C_1 = -\frac{ML}{24}$$

De esta manera, las ecuaciones serán:

$$\theta = \frac{1}{EI} \left[\frac{Mx^2}{2L} - \frac{ML}{24} \right]$$

$$y = \frac{1}{EI} \left[\frac{Mx^3}{6L} - \frac{ML}{24}x \right]$$

Determinamos:

$$\theta_A = \theta_B = \frac{1}{EI} \left[-\frac{ML}{24} \right] = -\frac{ML}{24EI}$$

$$\theta_C = \frac{1}{EI} \left[\frac{ML}{8} - \frac{ML}{24} \right] = \frac{ML}{12EI}$$

$$y_C = 0$$

Las orientaciones de las pendientes y deflexión, son las mostradas en la figura 5.7

PROBLEMA 5.2 Resolver la viga mostrada en la figura 5.8 y determinar su deflexión máxima, si $b = 300\text{mm}$, $h = 400\text{mm}$ y $E = 19000\text{N/mm}^2$.

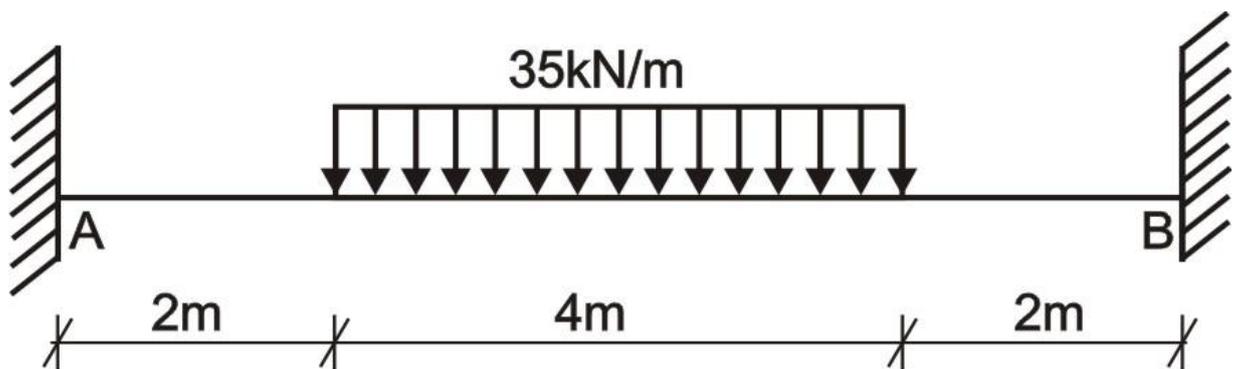


Fig. 5.8

Solución:

La viga es estáticamente indeterminada o hiperestática y determinamos su grado de indeterminación por la fórmula:

$$G.I. = R - 3$$

Donde:

R - número de reacciones en los apoyos.

En este caso es:

$$G.I. = 6 - 3 = 3$$

De esta manera la viga es tres veces hiperestática.

Calculamos las reacciones de la viga, considerando su simetría (figura 5.9) y analizamos cada tramo.

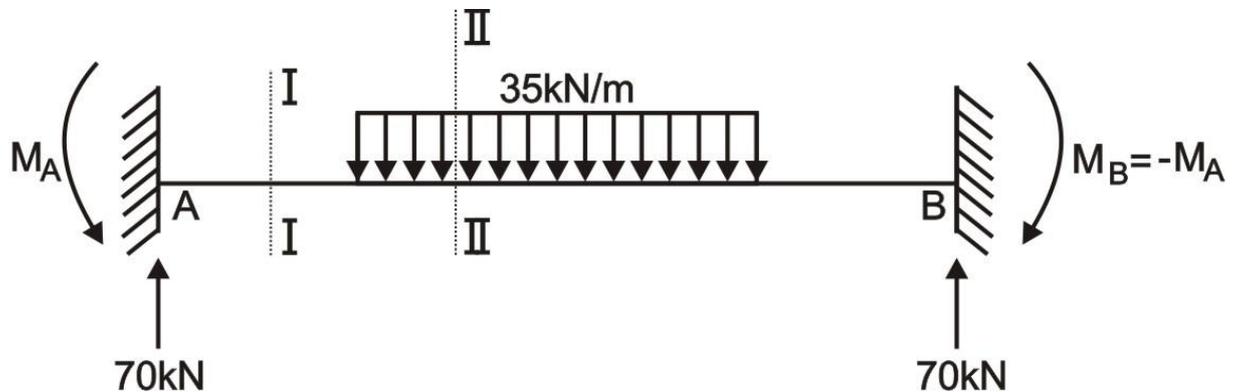


Fig. 5.9

TRAMO I ($0 \leq x \leq 2$)

$$EIy'' = 70x - M_A$$

$$EIy' = 35x^2 - M_A x + C_1$$

$$EIy = \frac{35x^3}{3} - \frac{M_A x^2}{2} + C_1 x + C_2$$

Como:

$$\theta_{x=0} = 0 \Rightarrow 0 = 0 - 0 + C_1 \quad \therefore C_1 = 0$$

$$y_{x=0} = 0 \Rightarrow 0 = 0 - 0 + 0 + C_2 \quad \therefore C_2 = 0$$

TRAMO II ($2 \leq x \leq 6$)

$$EIy'' = 70x - M_A - \frac{35(x-2)^2}{2}$$

$$EIy' = 35x^2 - M_A x - \frac{35(x-2)^3}{6} + C_3$$

$$EIy = \frac{35x^3}{3} - \frac{M_A x^2}{2} - \frac{35(x-2)^4}{24} + C_3 x + C_4$$

Para determinar C_3 y C_4 , aplicamos el Principio de continuidad.

$$1. \theta_{x=2}^I = \theta_{x=2}^{II}$$

$$35(2)^2 - M_A(2) = 35(2)^2 - M_A(2) - 0 + C_3 \Rightarrow C_3 = 0$$

$$2. y_{x=2}^I = y_{x=2}^{II}$$

$$\frac{35(2)^3}{3} - \frac{M_A(2)^2}{2} = \frac{35(2)^3}{3} - \frac{M_A(2)^2}{2} - 0 + 0 + C_4 \Rightarrow C_4 = 0$$

Con la finalidad de determinar M_A , será necesario plantear una condición adicional, tal como:

$$\theta_{x=4}^{\text{II}} = 0 \Rightarrow 35(4)^2 - M_A(4) - \frac{35(2)^3}{6} = 0 \quad \therefore M_A = 128,33\text{kN.m}$$

Luego, los diagramas finales serán los mostrados en la figura 5.10

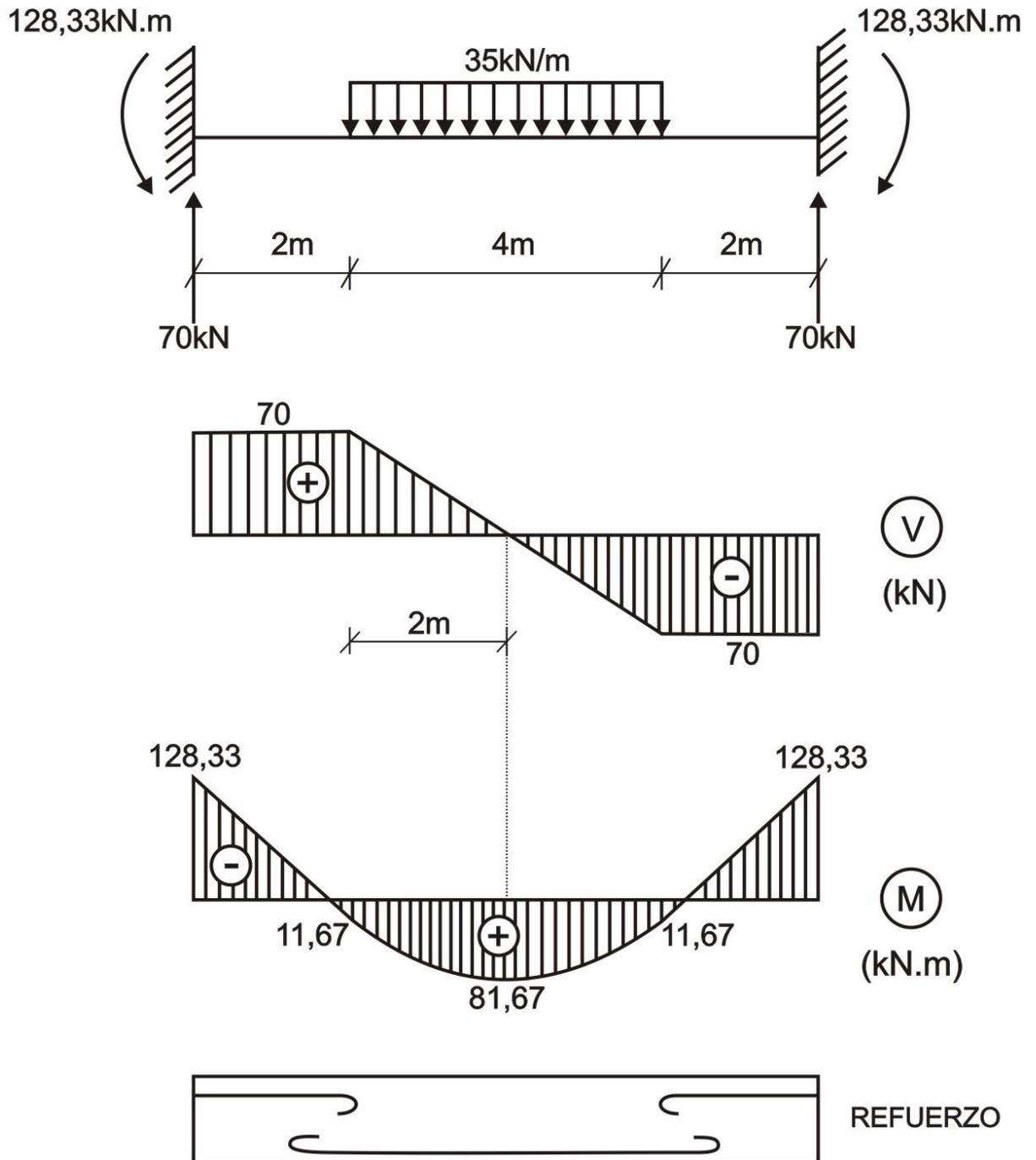


Fig. 5.10

Ahora, determinamos el valor de la deflexión máxima.

$$y_{\text{máx}} = y_{x=4}^{\text{II}} = \frac{1}{EI} \left[\frac{35(4)^3}{3} - \frac{128,33(4)^2}{2} - \frac{35(2)^4}{24} \right]$$

Reemplazamos $E = 19000\text{N/mm}^2 = 19.10^6 \text{kN/m}^2$ en la ecuación anterior y obtenemos:

$$y_{\max} = \frac{1}{19 \cdot 10^6 \cdot \frac{0,3 \cdot 0,4^3}{12}} \left[\frac{35,4^3}{3} - \frac{128,33 \cdot 4^2}{2} - \frac{35,2^4}{24} \right] = -9,98 \cdot 10^{-3} \text{ m} = -9,98 \text{ mm} \downarrow$$

La orientación de la flecha, indica la dirección de la deflexión máxima y se producirá en el centro de la viga.

PROBLEMA 5.3 Resolver la viga mostrada en la figura 5.11 y calcular las deflexiones en los tramos AB y BC, donde surgen los momentos máximos. Considerar que $EI_{AB} = 100000 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$ y $EI_{BC} = 200000 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$.

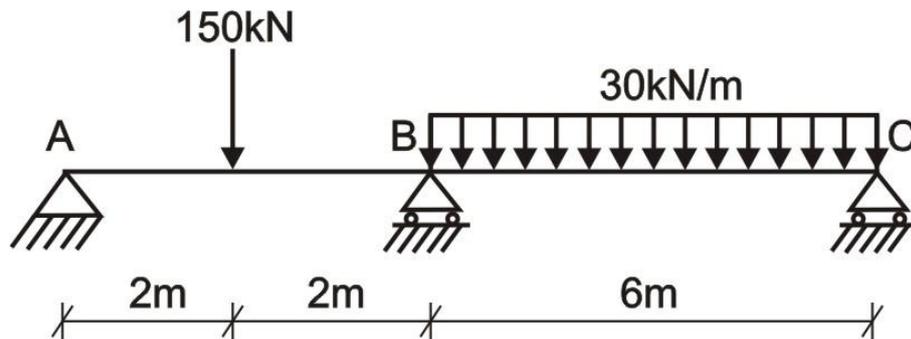


Fig. 5.11

Solución:

Determinamos su grado de indeterminación de la viga:

$$G.I. = 4 - 3 = 1$$

En consecuencia, la viga es una vez hiperestática.

Eliminamos el apoyo B y lo reemplazamos por su reacción, tal como se muestra en la figura 5.12

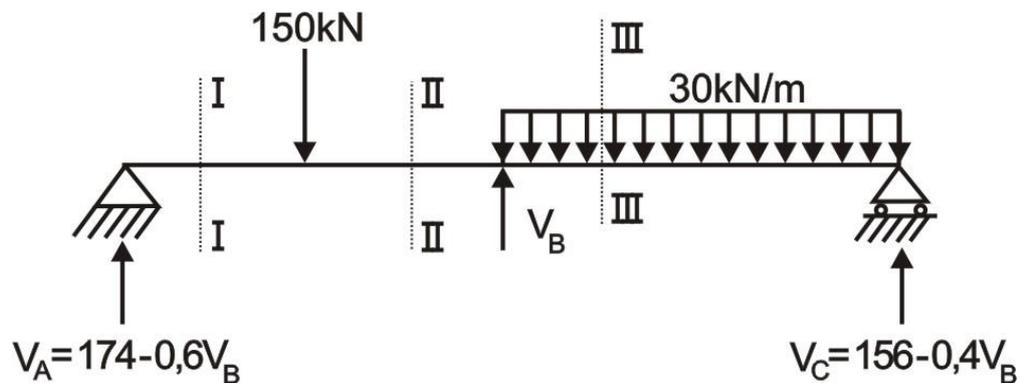


Fig. 5.12

Ahora, calculamos las reacciones de los otros apoyos.

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad V_C(10) + V_B(4) - 150(2) - 30(6)(7) = 0$$

$$V_C = 156 - 0,4V_B$$

$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad V_A + V_B + 156 - 0,4V_B - 150 - 30(6) = 0$$

$$V_A = 174 - 0,6V_B$$

Por facilidad de cálculo, en lo sucesivo consideraremos $EI_{AB} = EI_1$ y $EI_{BC} = EI_2$.

Ahora, analizamos en forma consecutiva cada tramo de la viga.

TRAMO I ($0 \leq x \leq 2$)

$$EI_1 y'' = (174 - 0,6V_B)x$$

$$EI_1 y' = (174 - 0,6V_B) \frac{x^2}{2} + C_1$$

$$EI_1 y = (174 - 0,6V_B) \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2$$

Como:

$$y_{x=0} = 0 \Rightarrow 0 = 0 + 0 + C_2 \quad \therefore \quad C_2 = 0$$

TRAMO II ($2 \leq x \leq 4$)

$$EI_1 y'' = (174 - 0,6V_B)x - 150(x - 2)$$

$$EI_1 y' = (174 - 0,6V_B) \frac{x^2}{2} - \frac{150(x - 2)^2}{2} + C_3$$

$$EI_1 y = (174 - 0,6V_B) \frac{x^3}{6} - \frac{150(x - 2)^3}{6} + C_3 x + C_4$$

Posteriormente, aplicamos el Principio de continuidad entre el 1er y 2do tramo.

$$1. \theta_{x=2}^I = \theta_{x=2}^{II}$$

$$(174 - 0,6V_B) \frac{2^2}{2} + C_1 = (174 - 0,6V_B) \frac{2^2}{2} - 0 + C_3 \Rightarrow C_1 = C_3$$

$$2. y_{x=2}^I = y_{x=2}^{II}$$

$$(174 - 0,6V_B) \frac{2^3}{6} + C_1(2) = (174 - 0,6V_B) \frac{2^3}{6} - 0 + C_1(2) + C_4 \Rightarrow C_4 = 0$$

Aplicamos la condición que la deflexión en el apoyo B es cero.

$$y_{x=4}^{II} = 0 \Rightarrow (174 - 0,6V_B) \frac{4^3}{6} - \frac{150(2)^3}{6} + C_3(4) = 0 \quad \therefore \quad C_3 = 1,6V_B - 414$$

De esta manera, las ecuaciones del 1er y 2do tramo quedarán así:

1er TRAMO:

$$EI_1 y' = (174 - 0,6V_B) \frac{x^2}{2} + (1,6V_B - 414)$$

$$EI_1 y = (174 - 0,6V_B) \frac{x^3}{6} + (1,6V_B - 414)x$$

2do TRAMO:

$$EI_1 y' = (174 - 0,6V_B) \frac{x^2}{2} - \frac{150(x - 2)^2}{2} + (1,6V_B - 414)$$

$$EI_1 y = (174 - 0,6V_B) \frac{x^3}{6} - \frac{150(x - 2)^3}{6} + (1,6V_B - 414)x$$

Ahora analizamos el 3er tramo.

TRAMO III ($4 \leq x \leq 10$)

$$EI_2 y'' = (174 - 0,6V_B)x - 150(x - 2) + V_B(x - 4) - \frac{30(x - 4)^2}{2}$$

$$EI_2 y' = (174 - 0,6V_B) \frac{x^2}{2} - \frac{150(x - 2)^2}{2} + \frac{V_B(x - 4)^2}{2} - \frac{30(x - 4)^3}{6} + C_5$$

$$EI_2 y = (174 - 0,6V_B) \frac{x^3}{6} - \frac{150(x - 2)^3}{6} + \frac{V_B(x - 4)^3}{6} - \frac{30(x - 4)^4}{24} + C_5 x + C_6$$

Aplicamos una vez más el Principio de continuidad, pero esta vez entre el 2do y 3er tramo.

$$1. \theta_{x=4}^{II} = \theta_{x=4}^{III}$$

$$\frac{1}{EI_1} \left[(174 - 0,6V_B) \frac{4^2}{2} - \frac{150(2)^2}{2} + 1,6V_B - 414 \right] = \frac{1}{EI_2} \left[(174 - 0,6V_B) \frac{4^2}{2} - \frac{150(2)^2}{2} + 0 - 0 + C_5 \right]$$

Considerando que $\frac{EI_2}{EI_1} = 2$, se obtiene que $C_5 = 264 - 1,6V_B$

$$2. y_{x=4}^{II} = y_{x=4}^{III}$$

$$\frac{1}{EI_1} \left[(174 - 0,6V_B) \frac{4^3}{6} - \frac{150(2)^3}{6} + (1,6V_B - 414)4 \right] = \frac{1}{EI_2} \left[(174 - 0,6V_B) \frac{4^3}{6} - \frac{150(2)^3}{6} + 0 - 0 + (264 - 1,6V_B)4 + C_6 \right]$$

De donde:

$$C_6 = 12,8V_B - 2712$$

De esta manera, las ecuaciones del 3er tramo serán:

3er TRAMO:

$$EI_2 y' = (174 - 0,6V_B) \frac{x^2}{2} - \frac{150(x - 2)^2}{2} + \frac{V_B(x - 4)^2}{2} - \frac{30(x - 4)^3}{6} + (264 - 1,6V_B)$$

$$EI_2 y = (174 - 0,6V_B) \frac{x^3}{6} - \frac{150(x - 2)^3}{6} + \frac{V_B(x - 4)^3}{6} - \frac{30(x - 4)^4}{24} + (264 - 1,6V_B)x + (12,8V_B - 2712)$$

Además, por condición del apoyo C, se tendrá que:

$$y_{x=10}^{III} = 0$$

$$(174 - 0,6V_B) \frac{10^3}{6} - \frac{150(8)^3}{6} + \frac{V_B(6)^3}{6} - \frac{30(6)^4}{24} + (264 - 1,6V_B)10 + 12,8V_B - 2712 = 0$$

De donde:

$$V_B = 215,9 \text{ kN}$$

De esta forma, se podrán determinar las otras dos reacciones y graficar los diagramas correspondientes, tal como se muestra en la figura 5.13

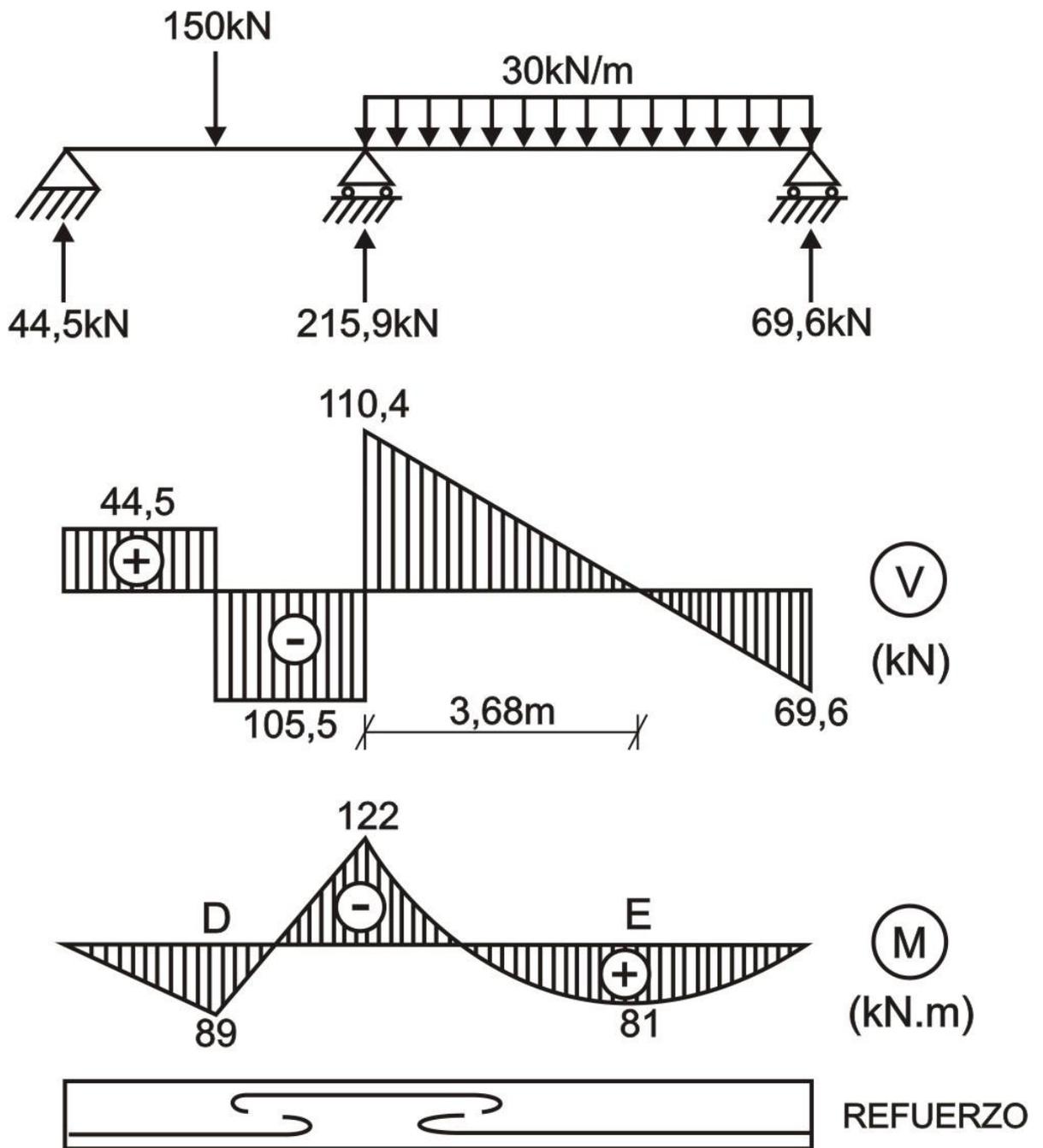


Fig. 5.13

Ahora, analizamos la deflexión en los puntos requeridos, es decir donde el momento flector es máximo en cada tramo.

PUNTO D:

$$y_{\text{máx}}^D = \frac{1}{EI_1} \left[\frac{44,5(2)^3}{6} + (1,6 \cdot 215,9 - 414)(2) \right] = -7,8 \cdot 10^{-4} \text{ m} = -0,78 \text{ mm} \downarrow$$

PUNTO E:

$$y_{\text{máx}}^E = \frac{1}{EI_2} \left[\frac{44,5(7,68)^3}{6} - \frac{150(5,68)^3}{6} + \frac{215,9(3,68)^3}{6} - \frac{30(3,68)^4}{24} + (-81,44)(7,68) + 51,52 \right]$$

$$y_{\text{máx}}^E = -1,16 \cdot 10^{-3} \text{ m} = -1,16 \text{ mm} \downarrow$$

PROBLEMA 5.4 Resolver la viga mostrada en la figura 5.14 y calcular su deflexión máxima. Considerar $b = 300\text{mm}$, $h = 400\text{mm}$ y $E = 19000\text{N/mm}^2$.

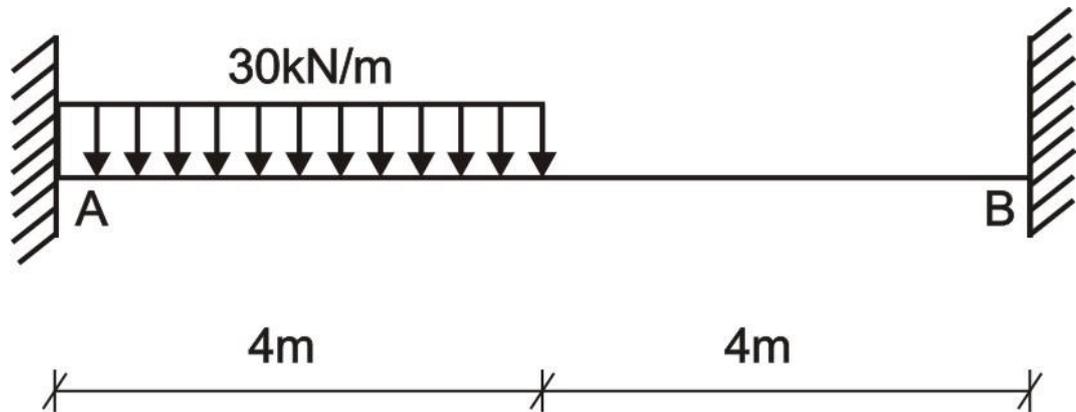


Fig. 5.14

Solución:

Determinamos su grado de indeterminación de la viga:

$$\text{G.I.} = 6 - 3 = 3$$

En consecuencia, la viga es tres veces hiperestática.

Luego, dividimos la viga en tramos y esquematizamos las direcciones de las reacciones y momentos, tal como se muestra en la figura 5.15

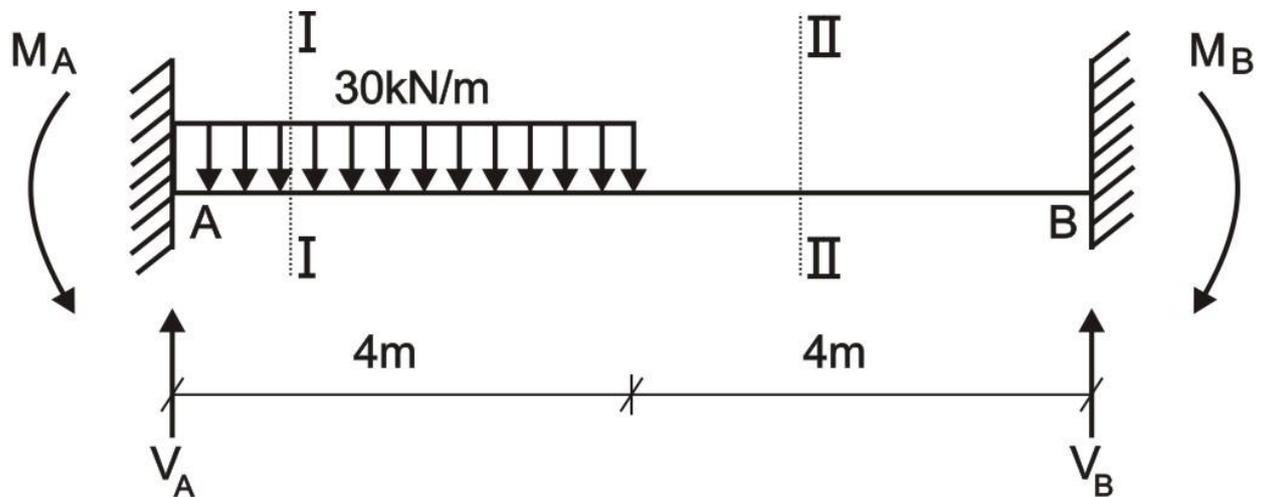


Fig. 5.15

Ahora, analizamos cada tramo de la viga.

TRAMO I ($0 \leq x \leq 4$)

$$EIy'' = V_A x - M_A - \frac{30x^2}{2}$$

$$EIy' = \frac{V_A x^2}{2} - M_A x - 5x^3 + C_1$$

$$EIy = \frac{V_A x^3}{6} - \frac{M_A x^2}{2} - \frac{5x^4}{4} + C_1 x + C_2$$

Como:

$$\theta_{x=0} = 0 \Rightarrow 0 = 0 - 0 - 0 + C_1 \quad \therefore C_1 = 0$$

$$y_{x=0} = 0 \Rightarrow 0 = 0 - 0 - 0 + 0 + C_2 \quad \therefore C_2 = 0$$

TRAMO II ($4 \leq x \leq 8$)

$$EIy'' = V_A x - M_A - 30(4)(x - 2)$$

$$EIy' = \frac{V_A x^2}{2} - M_A x - 60(x - 2)^2 + C_3$$

$$EIy = \frac{V_A x^3}{6} - \frac{M_A x^2}{2} - 20(x - 2)^3 + C_3 x + C_4$$

Aplicamos el Principio de continuidad.

$$1. \theta_{x=4}^I = \theta_{x=4}^{II}$$

$$\frac{V_A (4)^2}{2} - M_A (4) - 5(4)^3 = \frac{V_A (4)^2}{2} - M_A (4) - 60(2)^2 + C_3 \quad \Rightarrow C_3 = -80$$

$$2. y_{x=4}^I = y_{x=4}^{II}$$

$$\frac{V_A (4)^3}{6} - \frac{M_A (4)^2}{2} - \frac{5(4)^4}{4} = \frac{V_A (4)^3}{6} - \frac{M_A (4)^2}{2} - 20(2)^3 - 80(4) + C_4 \quad \Rightarrow C_4 = 160$$

De esta manera, las ecuaciones para el 1er y 2do tramo serán:

1er TRAMO:

$$EIy' = \frac{V_A x^2}{2} - M_A x - 5x^3$$

$$EIy = \frac{V_A x^3}{6} - \frac{M_A x^2}{2} - \frac{5x^4}{4}$$

2do TRAMO:

$$EIy' = \frac{V_A x^2}{2} - M_A x - 60(x - 2)^2 - 80$$

$$EIy = \frac{V_A x^3}{6} - \frac{M_A x^2}{2} - 20(x - 2)^3 - 80x + 160$$

Además, como el apoyo derecho es empotramiento, se tendrán dos condiciones adicionales:

$$1. \theta_{x=8}^{II} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{V_A (8)^2}{2} - M_A (8) - 60(6)^2 - 80 = 0$$

$$4V_A - M_A = 280 \quad (a)$$

$$2. y_{x=8}^{II} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{V_A (8)^3}{6} - \frac{M_A (8)^2}{2} - 20(6)^3 - 80(8) + 160 = 0$$

$$8V_A - 3M_A = 450 \quad (b)$$

Resolvemos las ecuaciones (a) y (b) y obtenemos:

$$V_A = 97,5 \text{ kN}$$

$$M_A = 110\text{kN.m}$$

En base a los resultados obtenidos, calculamos las otras reacciones y graficamos los diagramas de cortante, momento flector y refuerzo, tal como se muestra en la figura 5.16

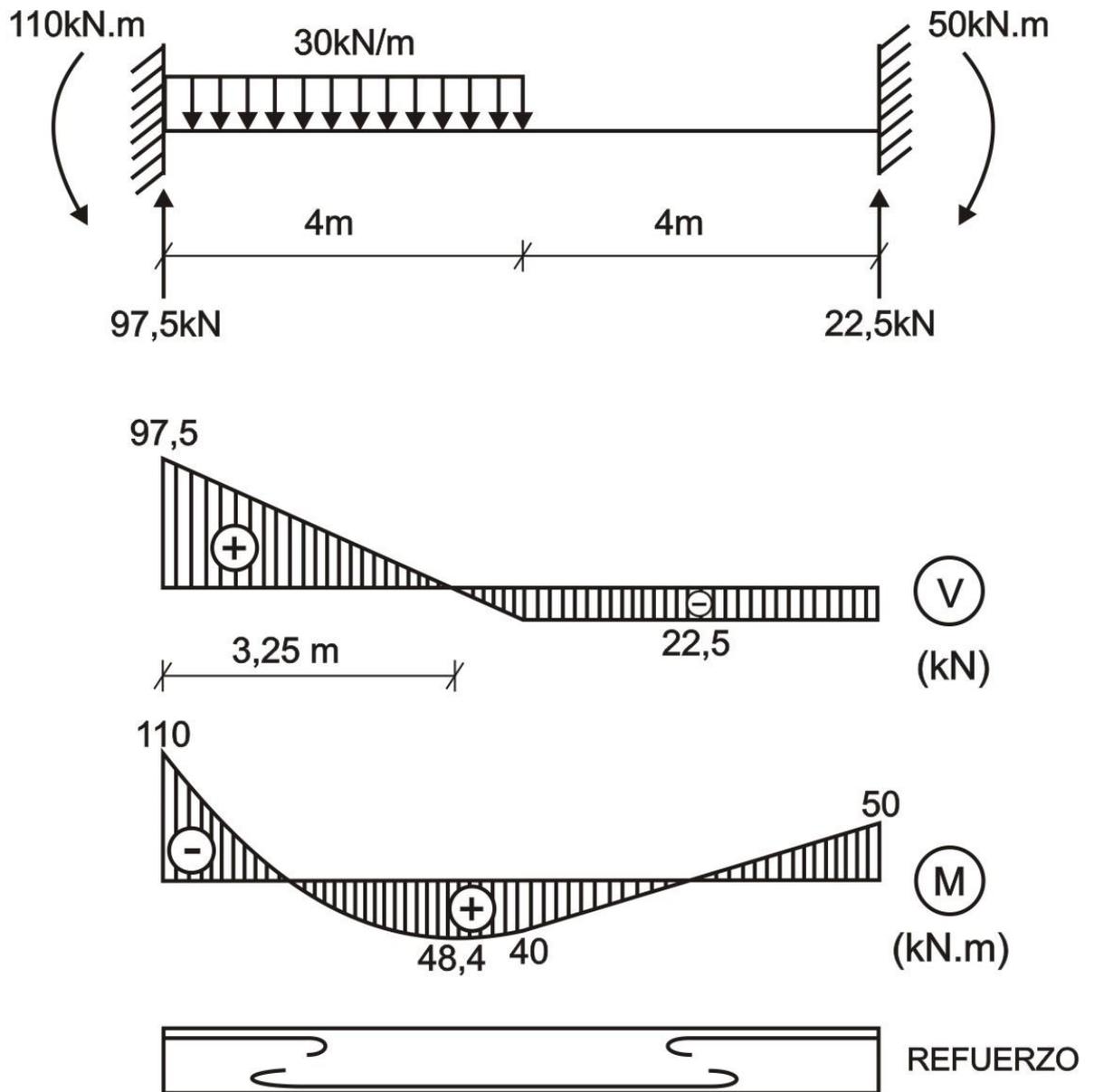


Fig. 5.16

Ahora, analizamos el punto donde la deflexión será máxima, para ello, en dicho punto la pendiente debe ser cero, pero no sucederá en los empotramientos, donde la deflexión es también cero.

TRAMO I:

La ecuación de la pendiente es:

$$\frac{97,5x^2}{2} - 110x - 5x^3 = 0$$

Resolvemos la ecuación y tenemos los siguientes resultados:

$$x_1 = 0; \quad x_2 = 3,55\text{m}; \quad x_3 = 6,20\text{m}$$

De estos tres resultados, se puede decir que en $x_1 = 0$ se sabe que la pendiente y deflexión son ceros, por ser un empotramiento perfecto y en $x_3 = 6,20\text{m}$ es irreal, porque se encuentra fuera del tramo analizado, quedando como única alternativa $x_2 = 3,55\text{m}$

TRAMO II:

Ecuación de la pendiente será:

$$\frac{97,5x^2}{2} - 110x - 60(x-2)^2 - 80 = 0$$

Resolvemos dicha ecuación y obtenemos:

$$x_1 = 8\text{m}; \quad x_2 = 3,55\text{m}$$

El valor de $x_1 = 8\text{m}$ coincide con el empotramiento del lado derecho y $x_2 = 3,55\text{m}$ se encuentra en el otro tramo, por ello, para el tramo analizado se descarta dicha respuesta.

De esta manera, el único valor que se ajusta a la realidad es $3,55\text{m}$ en el 1er tramo y para dicho punto analizamos la deflexión, siendo máxima para toda la viga.

$$y_{\text{máx}} = y_{x=3,55}^I = \frac{1}{19 \cdot 10^6 \cdot \frac{0,3 \cdot 0,4^3}{12}} \left[\frac{97,5 \cdot 3,55^3}{6} - \frac{110 \cdot 3,55^2}{2} - \frac{5 \cdot 3,55^4}{4} \right] = -5,42 \cdot 10^{-3} \text{m} = -5,42 \text{mm} \downarrow$$

PROBLEMA 5.5 Resolver la viga mostrada en la figura 5.17 y calcular su deflexión máxima.

Considerar $b = 400\text{mm}$, $h = 600\text{mm}$ y $E = 20000\text{N/mm}^2$.

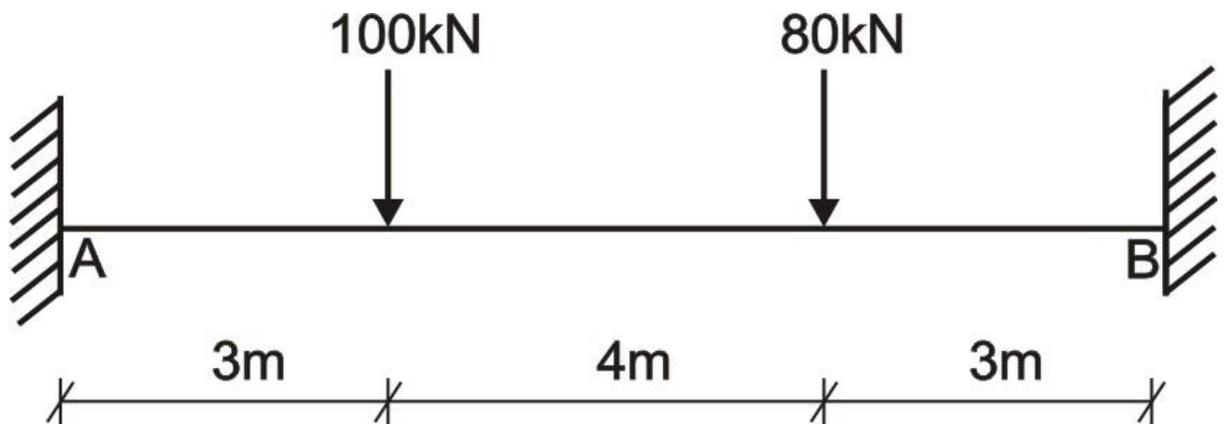


Fig. 5.17

Solución:

Determinamos su grado de indeterminación de la viga:

$$\text{G.I.} = 6 - 3 = 3$$

En consecuencia, la viga es tres veces hiperestática.

Luego, dividimos la viga en tramos y esquematizamos las direcciones de las reacciones y momentos, tal como se muestra en la figura 5.18

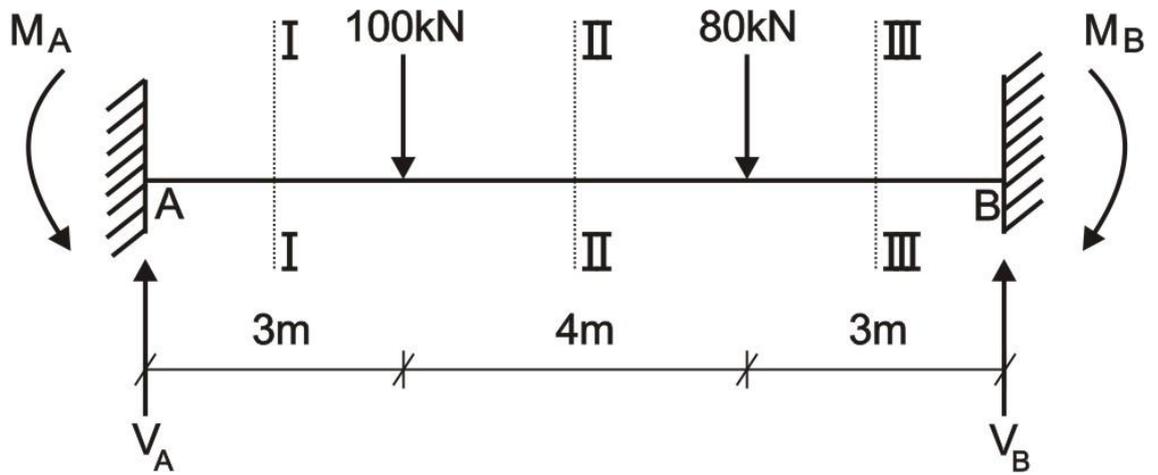


Fig. 5.18

Ahora, analizamos cada tramo de la viga.

TRAMO I ($0 \leq x \leq 3$)

$$EIy'' = V_A x - M_A$$

$$EIy' = \frac{V_A x^2}{2} - M_A x + C_1$$

$$EIy = \frac{V_A x^3}{6} - \frac{M_A x^2}{2} + C_1 x + C_2$$

Como:

$$\theta_{x=0} = 0 \Rightarrow 0 = 0 - 0 + C_1 \quad \therefore C_1 = 0$$

$$y_{x=0} = 0 \Rightarrow 0 = 0 - 0 + 0 + C_2 \quad \therefore C_2 = 0$$

TRAMO II ($3 \leq x \leq 7$)

$$EIy'' = V_A x - M_A - 100(x - 3)$$

$$EIy' = \frac{V_A x^2}{2} - M_A x - \frac{100(x-3)^2}{2} + C_3$$

$$EIy = \frac{V_A x^3}{6} - \frac{M_A x^2}{2} - \frac{100(x-3)^3}{6} + C_3 x + C_4$$

Aplicamos el Principio de continuidad para el 1er y 2do tramo.

$$1. \theta_{x=3}^I = \theta_{x=3}^{II}$$

$$\frac{V_A (3)^2}{2} - M_A (3) = \frac{V_A (3)^2}{2} - M_A (3) - 0 + C_3 \quad \Rightarrow \quad C_3 = 0$$

$$2. y_{x=3}^I = y_{x=3}^{II}$$

$$\frac{V_A (3)^3}{6} - \frac{M_A (3)^2}{2} = \frac{V_A (3)^3}{6} - \frac{M_A (3)^2}{2} - 0 + 0 + C_4 \quad \Rightarrow \quad C_4 = 0$$

TRAMO III ($7 \leq x \leq 10$)

$$EIy'' = V_A x - M_A - 100(x - 3) - 80(x - 7)$$

$$EIy' = \frac{V_A x^2}{2} - M_A x - \frac{100(x-3)^2}{2} - \frac{80(x-7)^2}{2} + C_5$$

$$EIy = \frac{V_A x^3}{6} - \frac{M_A x^2}{2} - \frac{100(x-3)^3}{6} - \frac{80(x-7)^3}{6} + C_5 x + C_6$$

Aplicamos el Principio de continuidad para el 2do y 3er tramo.

$$1. \theta_{x=7}^{\text{II}} = \theta_{x=7}^{\text{III}}$$

$$\frac{V_A (7)^2}{2} - M_A (7) - \frac{100(4)^2}{2} = \frac{V_A (7)^2}{2} - M_A (7) - \frac{100(4)^2}{2} - 0 + C_5 \quad \Rightarrow \quad C_5 = 0$$

$$2. y_{x=7}^{\text{II}} = y_{x=7}^{\text{III}}$$

$$\frac{V_A (7)^3}{6} - \frac{M_A (7)^2}{2} - \frac{100(4)^3}{6} = \frac{V_A (7)^3}{6} - \frac{M_A (7)^2}{2} - \frac{100(4)^3}{6} - 0 + 0 + C_6 \quad \Rightarrow \quad C_6 = 0$$

De esta manera, las ecuaciones para el 1er, 2do y 3er tramo serán:

1er TRAMO:

$$EIy' = \frac{V_A x^2}{2} - M_A x$$

$$EIy = \frac{V_A x^3}{6} - \frac{M_A x^2}{2}$$

2do TRAMO:

$$EIy' = \frac{V_A x^2}{2} - M_A x - \frac{100(x-3)^2}{2}$$

$$EIy = \frac{V_A x^3}{6} - \frac{M_A x^2}{2} - \frac{100(x-3)^3}{6}$$

3er TRAMO:

$$EIy' = \frac{V_A x^2}{2} - M_A x - \frac{100(x-3)^2}{2} - \frac{80(x-7)^2}{2}$$

$$EIy = \frac{V_A x^3}{6} - \frac{M_A x^2}{2} - \frac{100(x-3)^3}{6} - \frac{80(x-7)^3}{6}$$

Además, por ser el apoyo derecho empotramiento perfecto, se tendrá:

$$1. \theta_{x=10}^{\text{III}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{V_A (10)^2}{2} - M_A (10) - \frac{100(7)^2}{2} - \frac{80(3)^2}{2} = 0$$

$$5V_A - M_A = 281 \quad (a)$$

$$2. y_{x=10}^{\text{III}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{V_A (10)^3}{6} - \frac{M_A (10)^2}{2} - \frac{100(7)^3}{6} - \frac{80(3)^3}{6} = 0$$

$$50V_A - 15M_A = 1823 \quad (b)$$

Resolvemos las ecuaciones (a) y (b) y obtenemos:

$$V_A = 95,7 \text{ kN}$$

$$M_A = 197,5 \text{ kN.m}$$

En base a los resultados obtenidos, graficamos los diagramas correspondientes, los cuales se muestran en la figura 5.19

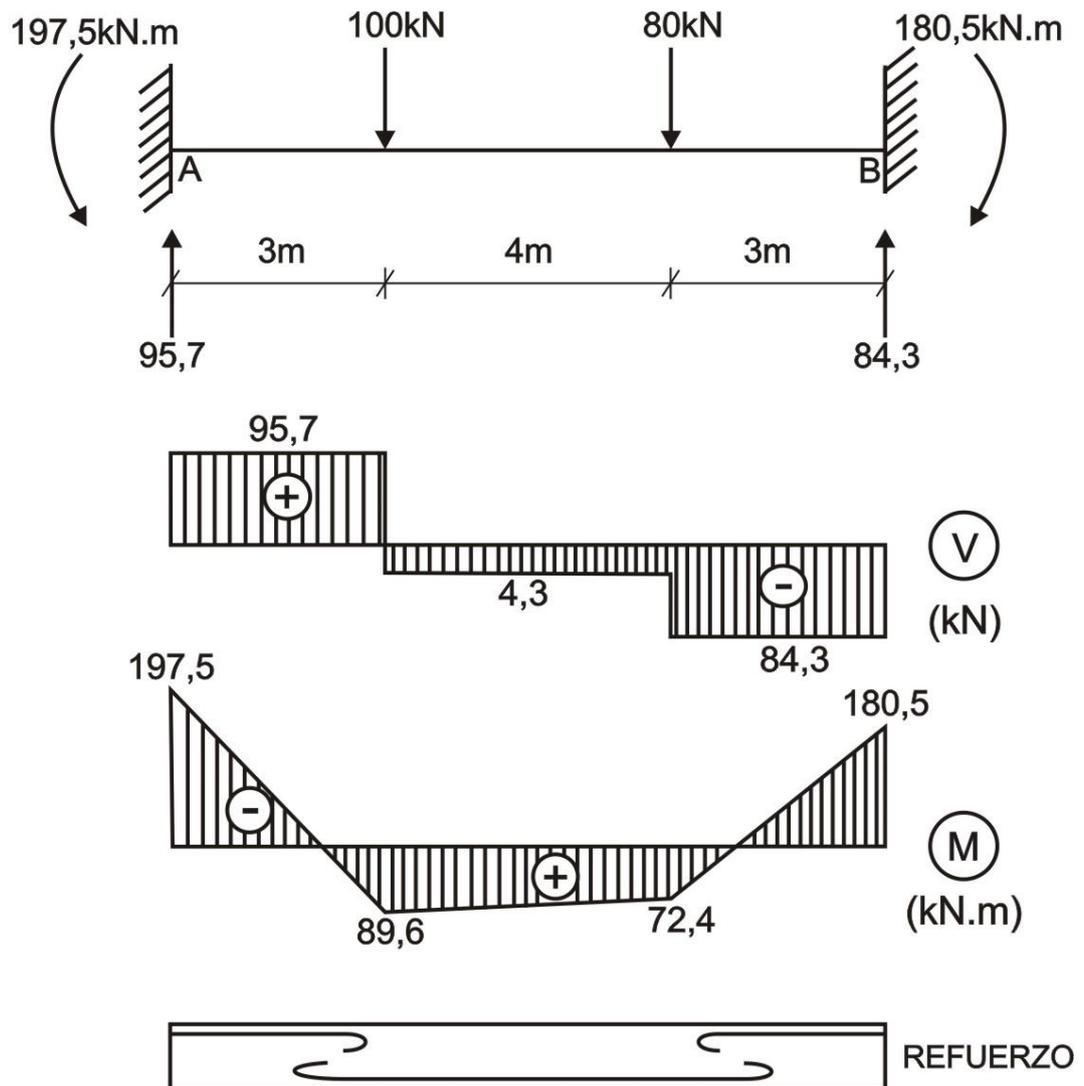


Fig. 5.19

En forma análoga al problema anterior, determinamos la deflexión máxima de la viga, la cual surgirá donde la pendiente es cero, a excepción de los empotramientos. Para ello, analizamos cada tramo de la viga, igualando a cero su ecuación de pendiente.

TRAMO I:

Ecuación:
$$\frac{95,7x^2}{2} - 197,5x = 0$$

Soluciones: $x_1 = 0$ (Empotramiento en el apoyo izquierdo)

$x_2 = 4,13\text{m}$ (Irreal, porque está fuera del tramo)

TRAMO II:

Ecuación:
$$\frac{95,7x^2}{2} - 197,5x - 50(x-3)^2 = 0$$

Soluciones: $x_1 = 42,78\text{m}$ (Irreal, porque está fuera del tramo y de la viga)

$$x_2 = 4,89\text{m}$$

TRAMO III:

Ecuación:
$$\frac{95,7x^2}{2} - 197,5x - 50(x-3)^2 - 40(x-7)^2 = 0$$

Soluciones: $x_1 = 10\text{m}$ (Empotramiento en el apoyo derecho)

$x_2 = 5,72\text{m}$ (Irreal, porque está fuera del tramo)

En consecuencia, la deflexión máxima está en el 2do tramo, a una distancia $x = 4,89\text{m}$

$$y_{\text{máx}} = y_{x=4,89}^{\text{II}} = \frac{1}{20 \cdot 10^6 \cdot \frac{0,4 \cdot 0,6^3}{12}} \left[\frac{95,7 \cdot 4,89^3}{6} - \frac{197,5 \cdot 4,89^2}{2} - \frac{100 \cdot 1,89^3}{6} \right] = -4,23 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$y_{\text{máx}} = -4,23\text{mm} \downarrow$

5.2 METODO DE LOS PARAMETROS INICIALES

El método de parámetros iniciales nos permite escribir una ecuación de deflexión o pendiente, aplicable a todos los tramos de la viga, por ello esta ecuación se llama *universal* o *generalizada*.

La ecuación universal de la línea elástica, que considera todos los tipos de cargas (momento puntual, carga puntual y carga distribuida con intensidad variable) para una viga de sección constante, de acuerdo a las direcciones positivas de las cargas y ejes (figura 5.20), tiene la forma de la ecuación 5.3

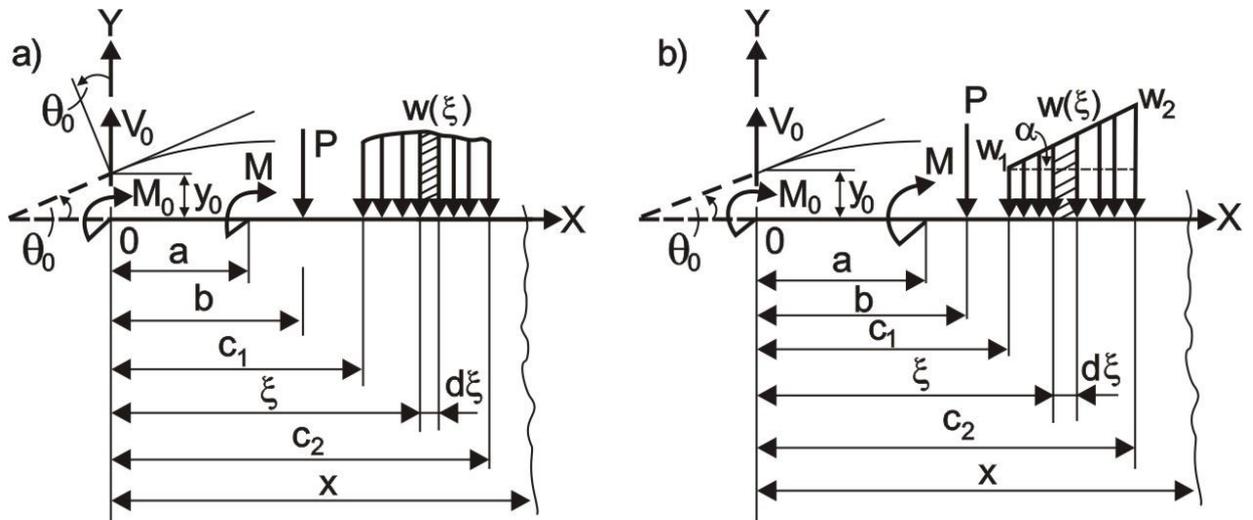


Fig. 5.20

$$y = y_0 + \theta_0 x + \frac{M_0 x^2}{2EI_z} + \frac{V_0 x^3}{6EI_z} + \sum \frac{M(x-a)^2}{2EI_z} \Big|_{x>a} - \sum \frac{P(x-b)^3}{6EI_z} \Big|_{x>b} - \sum \int_{c_1}^{c_2} \frac{w(\xi)(x-\xi)^3}{6EI_z} d\xi \dots (5.3)$$

Donde:

y_0, θ_0, M_0, V_0 - deflexión, pendiente, momento y cortante en el inicio de las coordenadas, denominados *parámetros iniciales*

Los parámetros iniciales pueden ser positivos, negativos o iguales a cero y se determinan a través de las condiciones de borde o extremo en el inicio de la viga y las cargas actuantes en dicho punto. En la figura 5.20,a todos los parámetros iniciales son positivos. Lo relacionado con los otros componentes de la ecuación del método de parámetros iniciales, su signo se determina en dependencia a que tal tipo de carga originará un momento flector positivo o negativo en la sección con el eje OX.

El último componente de la ecuación, expresa la influencia de la carga distribuida de intensidad variable $w(\xi)$, donde $c_1 \leq \xi \leq c_2$, que fija la posición de esta carga en la viga.

El símbolo $\Big|_{x>a}$ indica, que el mencionado componente será considerado solo cuando $x > a$. Esto implica, que para determinar la deflexión en cualquier sección con coordenada x , en la ecuación solo se considerarán las cargas ubicadas a la izquierda de dicha sección.

Si en lugar de las cargas de intensidad variable $w(\xi)$, actúan cargas que varían linealmente, tipo trapecio (figura 5.20,b), entonces la ecuación universal de deflexiones se simplifica y será la expresada en la fórmula 5.4

$$y = y_0 + \theta_0 x + \frac{M_0 x^2}{2EI_z} + \frac{V_0 x^3}{6EI_z} + \sum \frac{M(x-a)^2}{2EI_z} \Big|_{x>a} - \sum \frac{P(x-b)^3}{6EI_z} \Big|_{x>b} - \sum \frac{w_1(x-c_1)^4}{24EI_z} \Big|_{x>c_1} + \sum \frac{w_2(x-c_2)^4}{24EI_z} \Big|_{x>c_2} - \sum \frac{k(x-c_1)^5}{120EI_z} \Big|_{x>c_1} + \sum \frac{k(x-c_2)^5}{120EI_z} \Big|_{x>c_2} \quad (5.4)$$

Donde:

$$k = \frac{w_2 - w_1}{c_2 - c_1} = \text{tg}\alpha \quad (5.5)$$

La ecuación de la pendiente se obtiene fácilmente a través de la ecuación de la deflexión, por medio de una derivada respecto a x .

Si además de las cargas externas indicadas, también actúa un momento distribuido de intensidad variable $m(\eta)$ (figura 5.21), entonces la ecuación universal de la línea elástica tendrá la forma de la ecuación 5.6

$$y = y_0 + \theta_0 x + \frac{M_0 x^2}{2EI_z} + \frac{V_0 x^3}{6EI_z} + \sum \frac{M(x-a)^2}{2EI_z} \Big|_{x>a} - \sum \frac{P(x-b)^3}{6EI_z} \Big|_{x>b} - \sum \int_{c_1}^{c_2} \frac{w(\xi)(x-\xi)^3}{6EI_z} d\xi + \sum \int_{d_1}^{d_2} \frac{m(\eta)(x-\eta)^2}{2EI_z} d\eta \quad (5.6)$$

Si se toma como inicio de coordenadas el extremo derecho de la viga y orientamos el eje de las abscisas de derecha a izquierda, entonces para las pendientes se asumirá como ley de signos lo opuesto a lo anterior, en la cual se consideró como inicio de coordenadas el extremo izquierdo de la viga.

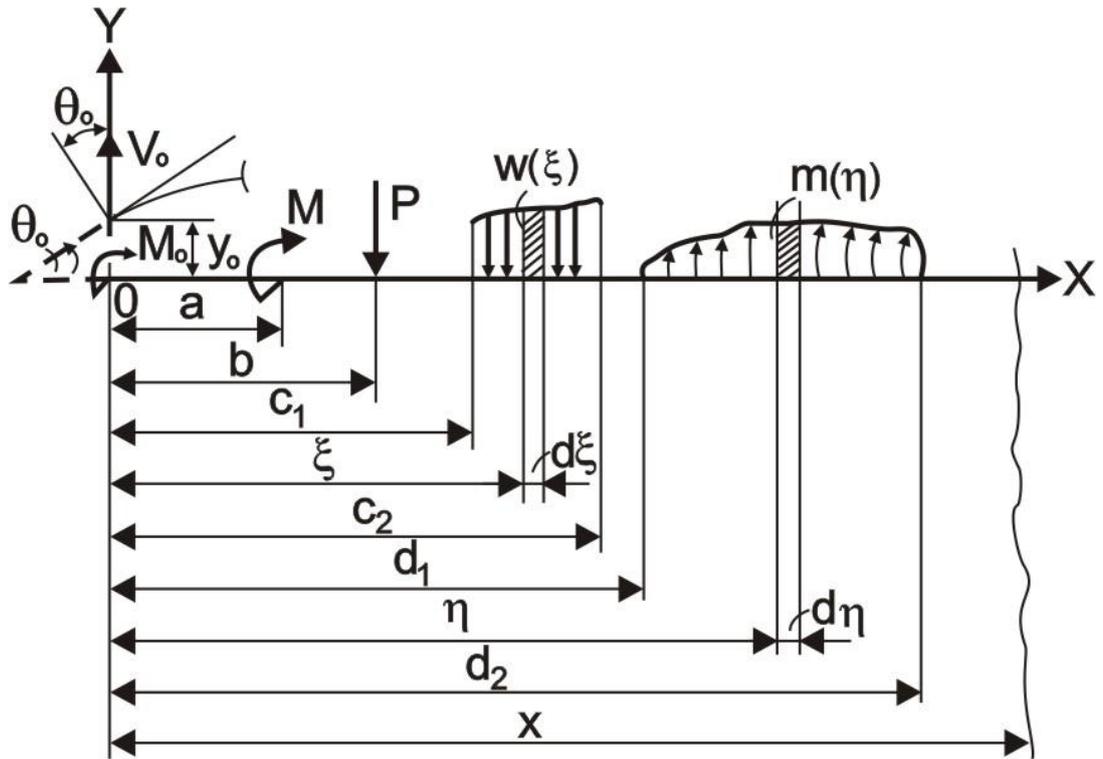


Fig. 5.21

PROBLEMA 5.6 Determinar la deflexión y pendiente en el extremo B de la viga en voladizo de rigidez constante EI , mostrada en la figura 5.22

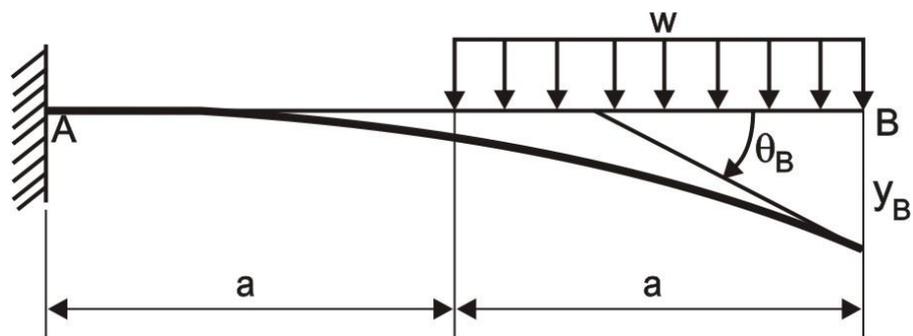


Fig. 5.22

Solución:

Como la viga es isostática, entonces determinamos sus reacciones en el apoyo A (figura 5.23)

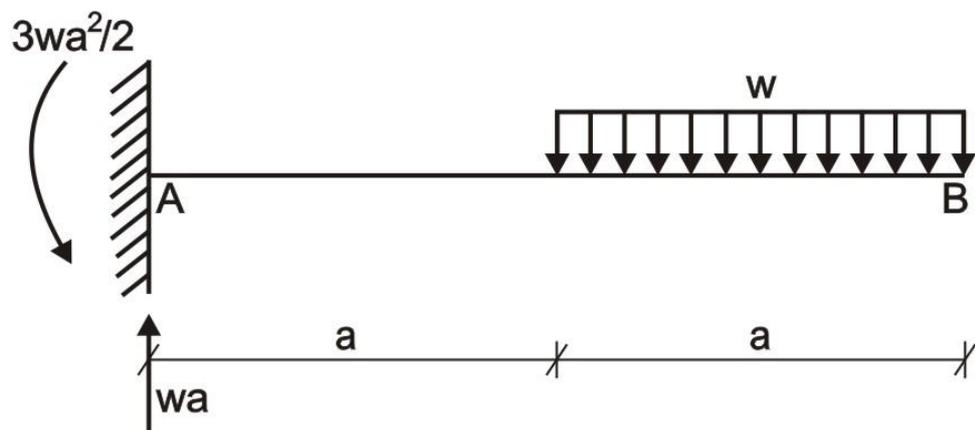


Fig. 5.23

Su ecuación de deflexión será:

$$y = y_0 + \theta_0 x + \frac{M_0 x^2}{2EI} + \frac{V_0 x^3}{6EI} - \frac{w(x-a)^4}{24EI} \Big|_{x>a} + \frac{w(x-2a)^4}{24EI} \Big|_{x>2a}$$

Como $y_0 = 0$, $\theta_0 = 0$ por ser empotramiento perfecto en A, se eliminan ambos miembros, al igual que el último, debido a que $x > 2a$ está fuera de la viga, quedando la ecuación de esta forma.

$$y = -\frac{3wa^2 x^2}{4EI} + \frac{wax^3}{6EI} - \frac{w(x-a)^4}{24EI}$$

Luego, derivamos y obtenemos la pendiente.

$$\theta = \frac{dy}{dx} = -\frac{3wa^2 x}{2EI} + \frac{wax^2}{2EI} - \frac{w(x-a)^3}{6EI}$$

Determinamos las incógnitas requeridas:

$$y_B = y_{x=2a} = -\frac{3wa^2(2a)^2}{4EI} + \frac{wa(2a)^3}{6EI} - \frac{wa^4}{24EI} = -\frac{41wa^4}{24EI} \downarrow$$

$$\theta_B = \theta_{x=2a} = -\frac{3wa^2(2a)}{2EI} + \frac{wa(2a)^2}{2EI} - \frac{wa^3}{6EI} = -\frac{7wa^3}{6EI}$$

Como el signo es negativo, quiere decir que la pendiente va en sentido horario.

PROBLEMA 5.7 Determinar la deflexión en C, si la rigidez de la viga es EI y las cargas externas aplicadas se muestran en la figura 5.24

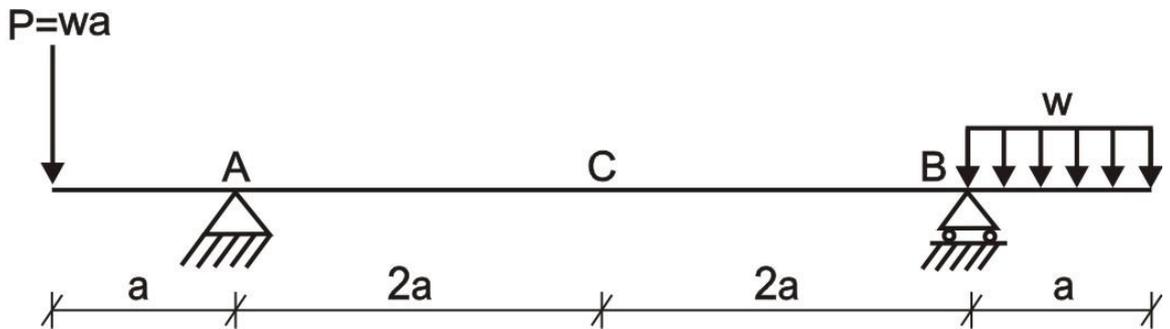


Fig. 5.24

Solución:

Eliminamos los voladizos y lo reemplazamos por su carga y momento puntual (figura 5.25)

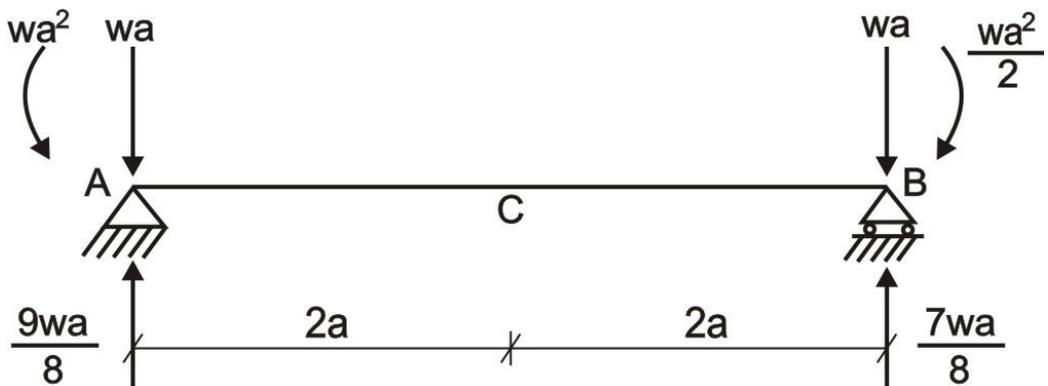


Fig. 5.25

Calculamos las reacciones y escribimos la ecuación de la elástica.

$$y = y_0 + \theta_0 x + \frac{M_0 x^2}{2EI} + \frac{V_0 x^3}{6EI}$$

Como el apoyo A es fijo, se tendrá que $y_0 = 0$

Asimismo, el apoyo B es movable y se cumplirá la condición:

$$y_{x=4a} = 0 \Rightarrow \theta_0(4a) - \frac{wa^2(4a)^2}{2EI} + \frac{\left(\frac{wa}{8}\right)(4a)^3}{6EI} = 0 \quad \therefore \quad \theta_0 = \frac{5wa^3}{3EI}$$

Luego, la ecuación será:

$$y = \frac{5wa^3 x}{3EI} - \frac{wa^2 x^2}{2EI} + \frac{\left(\frac{wa}{8}\right)x^3}{6EI}$$

De esta manera:

$$y_C = y_{x=2a} = \frac{5wa^3(2a)}{3EI} - \frac{wa^2(2a)^2}{2EI} + \frac{\left(\frac{wa}{8}\right)(2a)^3}{6EI} = \frac{3wa^4}{2EI} \uparrow$$

PROBLEMA 5.8 Determinar la deflexión y_D y la pendiente θ_C para las vigas mostradas en la figura 5.26

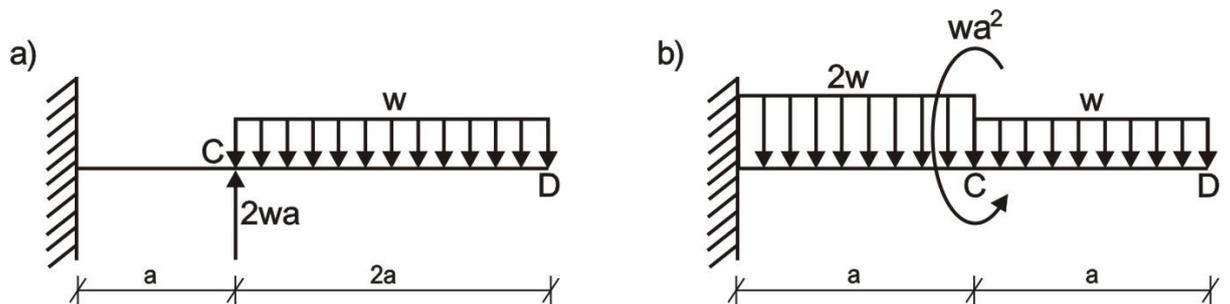


Fig. 5.26

Solución:

CASO (a):

Determinamos las reacciones de la viga, tal como se muestra en la figura 5.27 y escribimos su ecuación de la elástica.

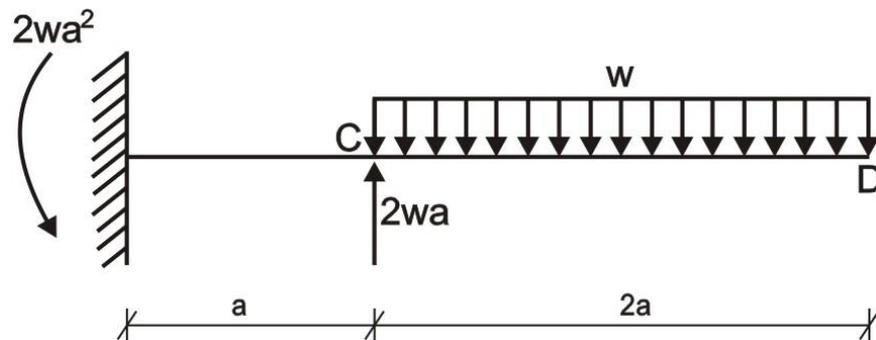


Fig. 5.27

$$y = y_0 + \theta_0 x + \frac{M_0 x^2}{2EI} + \frac{2wa(x-a)^3}{6EI} - \frac{w(x-a)^4}{24EI}$$

Se sabe que $y_0 = 0$ y $\theta_0 = 0$ por ser empotramiento perfecto y reemplazando el valor del momento en dicho lugar, tenemos:

$$y = -\frac{2wa^2 x^2}{2EI} + \frac{2wa(x-a)^3}{6EI} - \frac{w(x-a)^4}{24EI}$$

$$y = -\frac{wa^2 x^2}{EI} + \frac{wa(x-a)^3}{3EI} - \frac{w(x-a)^4}{24EI}$$

Luego:

$$\theta = y' = -\frac{2wa^2 x}{EI} + \frac{wa(x-a)^2}{EI} - \frac{w(x-a)^3}{6EI}$$

De esta manera:

$$y_D = y_{x=3a} = -\frac{wa^2(3a)^2}{EI} + \frac{wa(2a)^3}{3EI} - \frac{w(2a)^4}{24EI} = -\frac{7wa^4}{EI} \downarrow$$

$$\theta_C = \theta_{x=a} = -\frac{2wa^3}{EI}$$

Por ser signo negativo, la pendiente va en sentido horario.

CASO (b):

Efectuamos lo mismo que en el caso anterior, es decir, determinamos las reacciones, tal como se muestra en la figura 5.28 y escribimos su ecuación de la elástica.

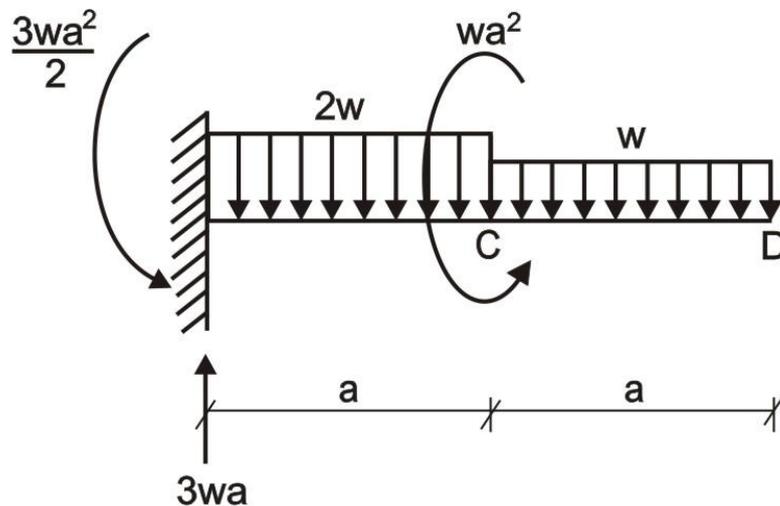


Fig. 5.28

$$y = y_0 + \theta_0 x + \frac{M_0 x^2}{2EI} + \frac{V_0 x^3}{6EI} - \frac{wa^2(x-a)^2}{2EI} - \frac{2w(x-a)^4}{24EI} + \frac{2w(x-a)^4}{24EI} - \frac{w(x-a)^4}{24EI}$$

Como $y_0 = 0$ y $\theta_0 = 0$, por ser empotramiento perfecto y reemplazando los valores del momento y cortante en dicho lugar, tenemos:

$$y = -\frac{3wa^2 x^2}{4EI} + \frac{wax^3}{2EI} - \frac{wa^2(x-a)^2}{2EI} - \frac{wx^4}{12EI} + \frac{w(x-a)^4}{24EI}$$

Derivamos y obtenemos la ecuación de la pendiente, la cual es:

$$\theta = y' = -\frac{3wa^2x}{2EI} + \frac{3wax^2}{2EI} - \frac{wa^2(x-a)}{EI} - \frac{wx^3}{3EI} + \frac{w(x-a)^3}{6EI}$$

Luego:

$$y_D = y_{x=2a} = -\frac{3wa^2(2a)^2}{4EI} + \frac{wa(2a)^3}{2EI} - \frac{wa^2(a)^2}{2EI} - \frac{w(2a)^4}{12EI} + \frac{wa^4}{24EI} = -\frac{19wa^4}{24EI} \downarrow$$

$$\theta_C = \theta_{x=a} = -\frac{3wa^3}{2EI} + \frac{3wa^3}{2EI} - \frac{wa^3}{3EI} = -\frac{wa^3}{3EI}$$

La pendiente va una vez más en sentido horario, debido a que es negativo.

PROBLEMA 5.9 Determinar la deflexión y_C y la pendiente θ_D para la viga mostrada en la figura 5.29

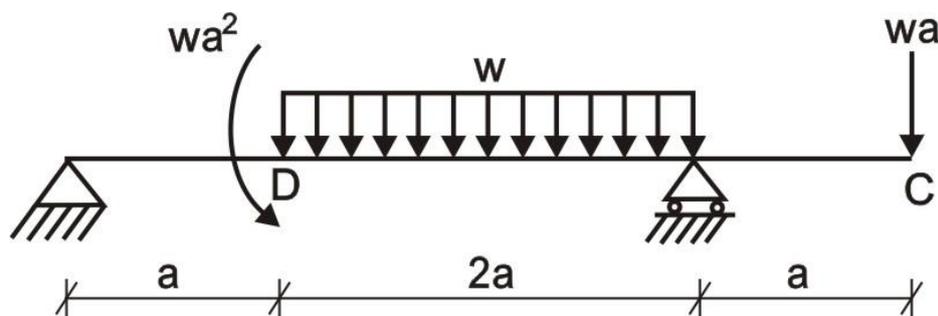


Fig. 5.29

Solución:

Determinamos las reacciones de la viga (figura 5.30) y escribimos la ecuación de la elástica de la viga.

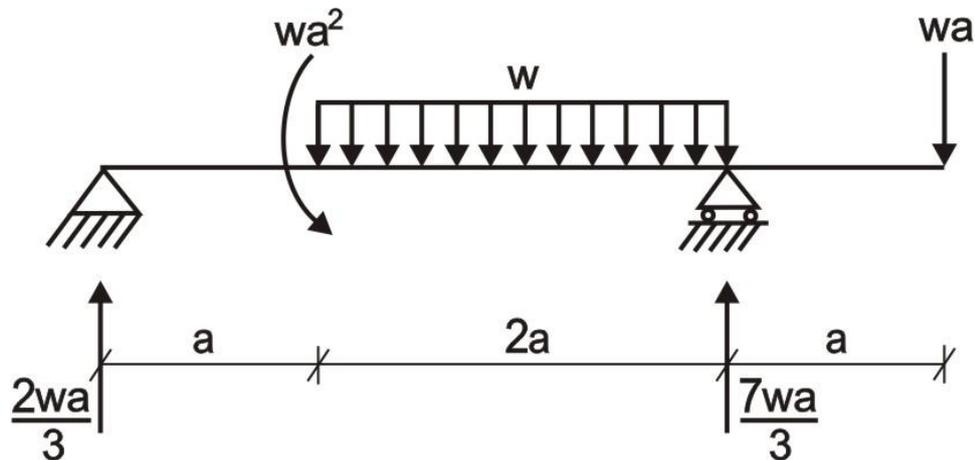


Fig. 5.30

$$y = y_0 + \theta_0 x + \frac{\left(\frac{2wa}{3}\right)x^3}{6EI} - \frac{wa^2(x-a)^2}{2EI} + \frac{\left(\frac{7wa}{3}\right)(x-3a)^3}{6EI} - \frac{w(x-a)^4}{24EI} + \frac{w(x-3a)^4}{24EI}$$

Como el apoyo izquierdo es fijo, se tendrá que $y_0 = 0$, quedando la ecuación de esta forma:

$$y = \theta_0 x + \frac{wax^3}{9EI} - \frac{wa^2(x-a)^2}{2EI} + \frac{7wa(x-3a)^3}{18EI} - \frac{w(x-a)^4}{24EI} + \frac{w(x-3a)^4}{24EI}$$

Además:

$$y_{x=3a} = 0 \Rightarrow \theta_0(3a) + \frac{wa(3a)^3}{9EI} - \frac{wa^2(2a)^2}{2EI} - \frac{w(2a)^4}{24EI} = 0 \quad \therefore \theta_0 = -\frac{wa^3}{9EI}$$

Luego:

$$y = -\frac{wa^3x}{9EI} + \frac{wax^3}{9EI} - \frac{wa^2(x-a)^2}{2EI} + \frac{7wa(x-3a)^3}{18EI} - \frac{w(x-a)^4}{24EI} + \frac{w(x-3a)^4}{24EI}$$

$$\theta = y' = -\frac{wa^3}{9EI} + \frac{wax^2}{3EI} - \frac{wa^2(x-a)}{EI} + \frac{7wa(x-3a)^2}{6EI} - \frac{w(x-a)^3}{6EI} + \frac{w(x-3a)^3}{6EI}$$

En consecuencia:

$$y_C = y_{x=4a} = -\frac{wa^3(4a)}{9EI} + \frac{wa(4a)^3}{9EI} - \frac{wa^2(3a)^2}{2EI} + \frac{7wa(a)^3}{18EI} - \frac{w(3a)^4}{24EI} + \frac{w(a)^4}{24EI} = -\frac{7wa^4}{9EI} \downarrow$$

$$\theta_D = \theta_{x=a} = -\frac{wa^3}{9EI} + \frac{wa^3}{3EI} = \frac{2wa^3}{9EI}$$

Como el signo de la pendiente es positivo, implica que va en sentido antihorario.

PROBLEMA 5.10 Resolver la viga mostrada en la figura 5.31

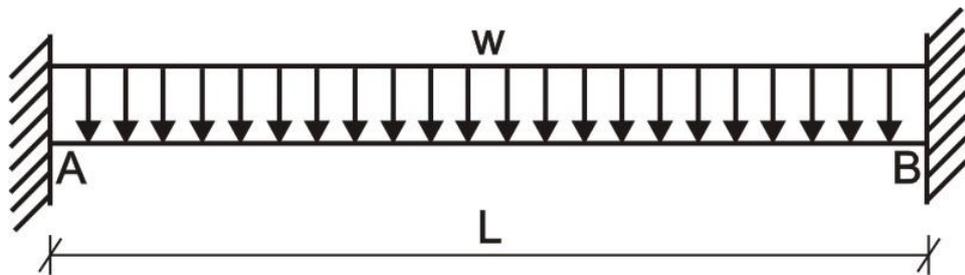


Fig. 5.31

Solución:

Determinamos el grado de indeterminación de la viga.

$$G.I. = 6 - 3 = 3$$

La viga es tres veces hiperestática.

Basados en la simetría de la viga calculamos sus reacciones, las cuales se muestran en la figura 5.32

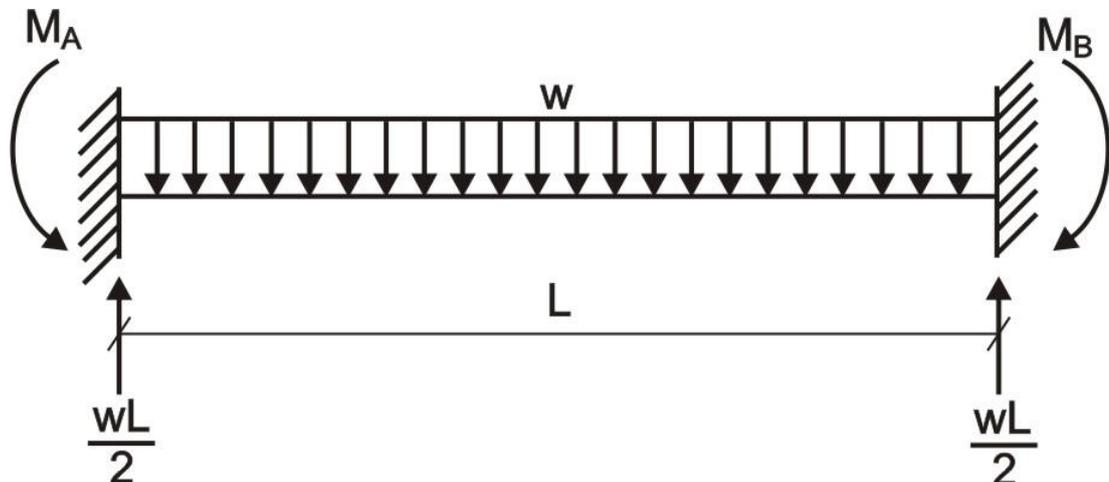


Fig. 5.32

La ecuación de la elástica será:

$$y = y_0 + \theta_0 x - \frac{M_A x^2}{2EI} + \left(\frac{wL}{2}\right) \frac{x^3}{6EI} - \frac{w(x-0)^4}{24EI}$$

$$y = -\frac{M_A x^2}{2EI} + \frac{wLx^3}{12EI} - \frac{wx^4}{24EI}$$

Como el apoyo B es empotramiento, se tendrá:

$$y_B = y_{x=L} = 0 \Rightarrow -\frac{M_A L^2}{2EI} + \frac{wL^4}{12EI} - \frac{wL^4}{24EI} = 0 \quad \therefore M_A = \frac{wL^2}{12}$$

En base al resultado obtenido, graficamos los diagramas de fuerza cortante y momento flector, que se muestran en la figura 5.33

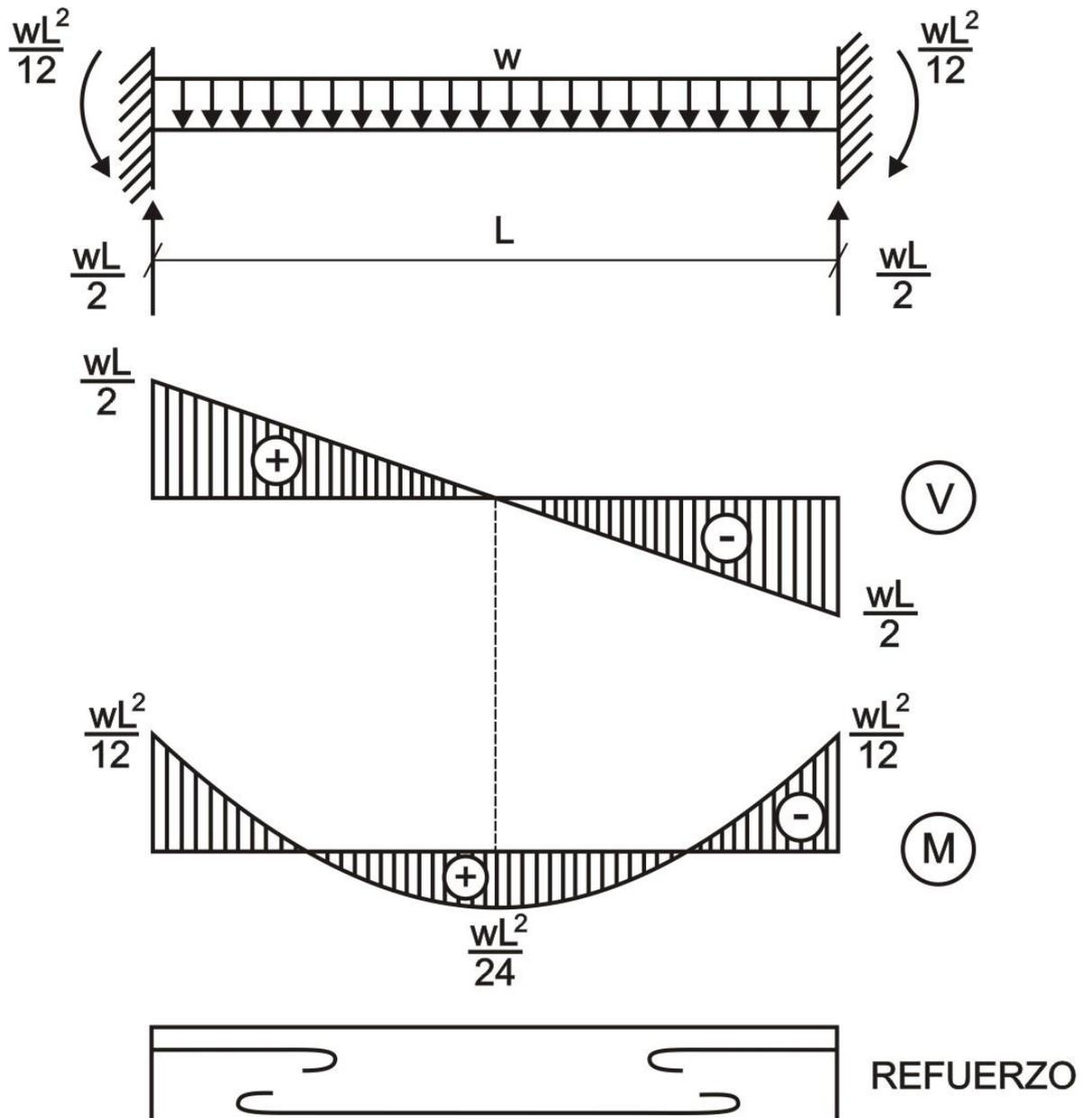


Fig. 5.33

PROBLEMA 5.11 Resolver la viga mostrada en al figura 5.34

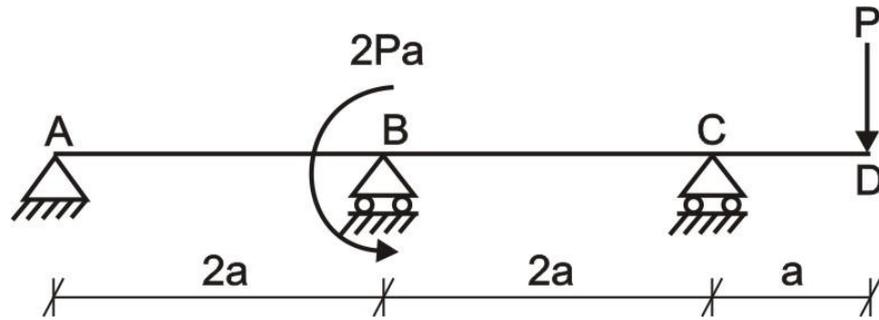


Fig. 5.34

Solución:

Determinamos el grado de indeterminación de la viga.

$$G.I. = 4 - 3 = 1$$

La viga es una vez hiperestática.

Reemplazamos el apoyo C por su reacción y calculamos las reacciones en A y B, en función de la reacción en C (figura 5.35)

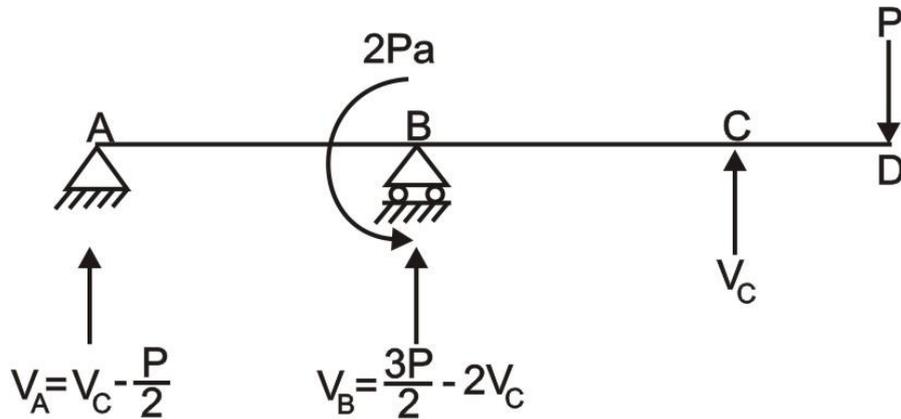


Fig. 5.35

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad V_B(2a) + V_C(4a) + 2Pa - P(5a) = 0 \quad \therefore \quad V_B = \frac{3P}{2} - 2V_C$$

$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad V_A + \left(\frac{3P}{2} - 2V_C\right) + V_C - P = 0 \quad \therefore \quad V_A = V_C - \frac{P}{2}$$

La ecuación de la elástica será:

$$y = y_0 + \theta_0 x + \frac{\left(V_C - \frac{P}{2}\right)x^3}{6EI} - \frac{2Pa(x-2a)^2}{2EI} + \frac{\left(\frac{3P}{2} - 2V_C\right)(x-2a)^3}{6EI} + \frac{V_C(x-4a)^3}{6EI}$$

Por ser A un apoyo fijo, se tendrá que $y_0 = 0$

Además:

$$y_B = y_{x=2a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta_0(2a) + \frac{\left(V_C - \frac{P}{2}\right)(2a)^3}{6EI} = 0 \quad \therefore \quad \theta_0 = -\frac{\left(V_C - \frac{P}{2}\right)(2a^2)}{3EI}$$

Reemplazamos este valor en la ecuación de la elástica, para el caso de la deflexión en C, el cual se sabe que debe de ser cero.

$$y_C = y_{x=4a} = 0$$

$$-\frac{\left(V_C - \frac{P}{2}\right)(2a^2)}{3EI} - (4a) + \frac{\left(V_C - \frac{P}{2}\right)(4a)^3}{6EI} - \frac{2Pa(2a)^2}{2EI} + \frac{\left(\frac{3P}{2} - 2V_C\right)(2a)^3}{6EI} = 0$$

De donde:

$$V_C = \frac{9P}{8}$$

Luego, graficamos los diagramas de fuerza cortante y momento flector (figura 5.36), pero previamente esquematizamos la viga con sus reacciones.

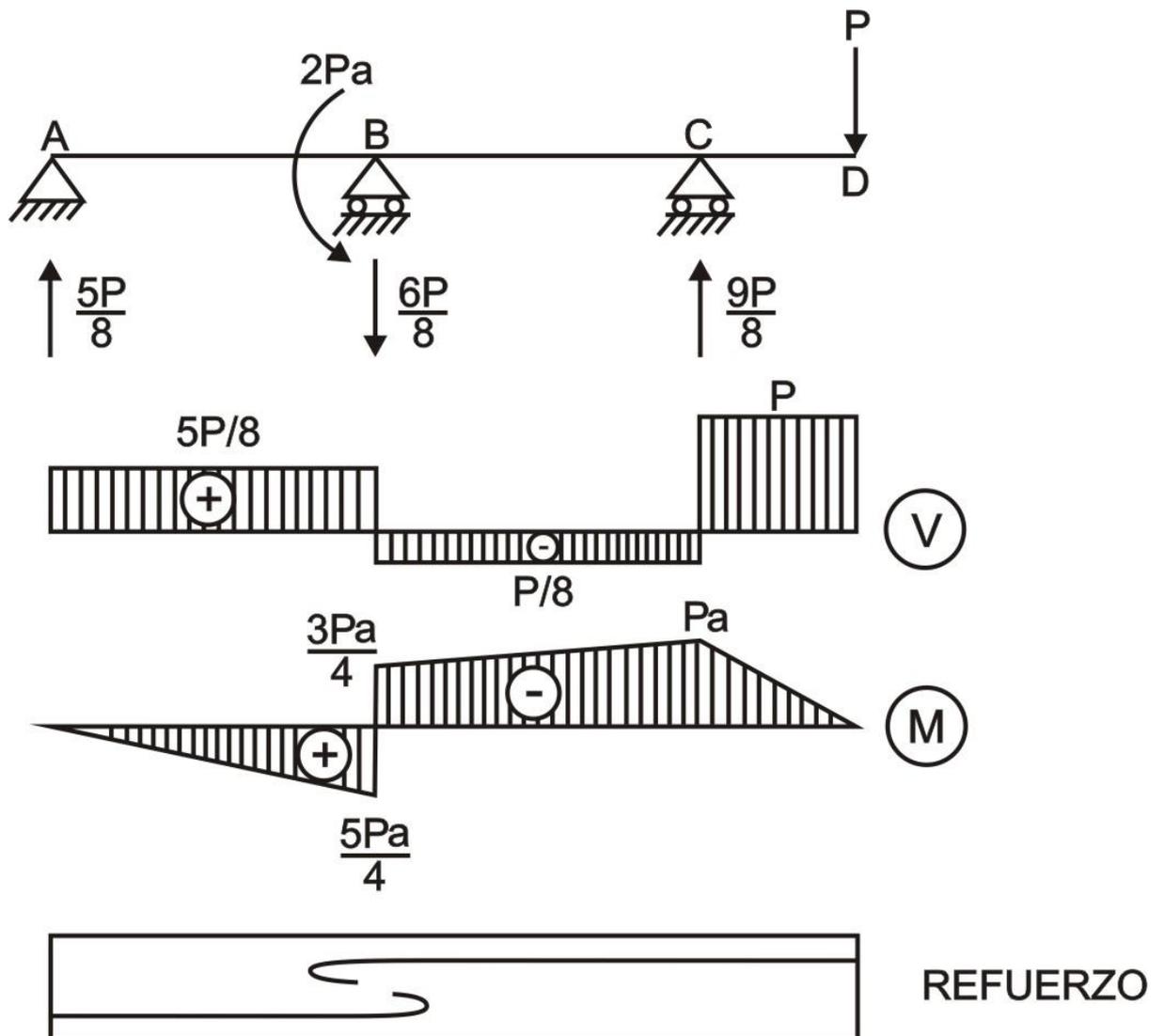
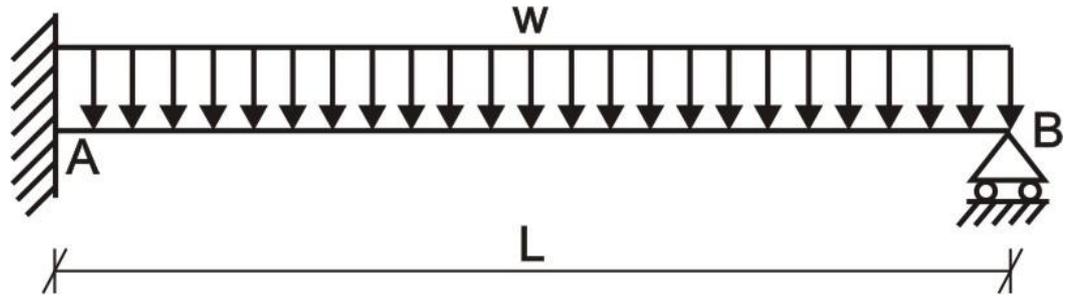


Fig. 5.36

PROBLEMA 5.12 Resolver la viga mostrada en la figura 5.37



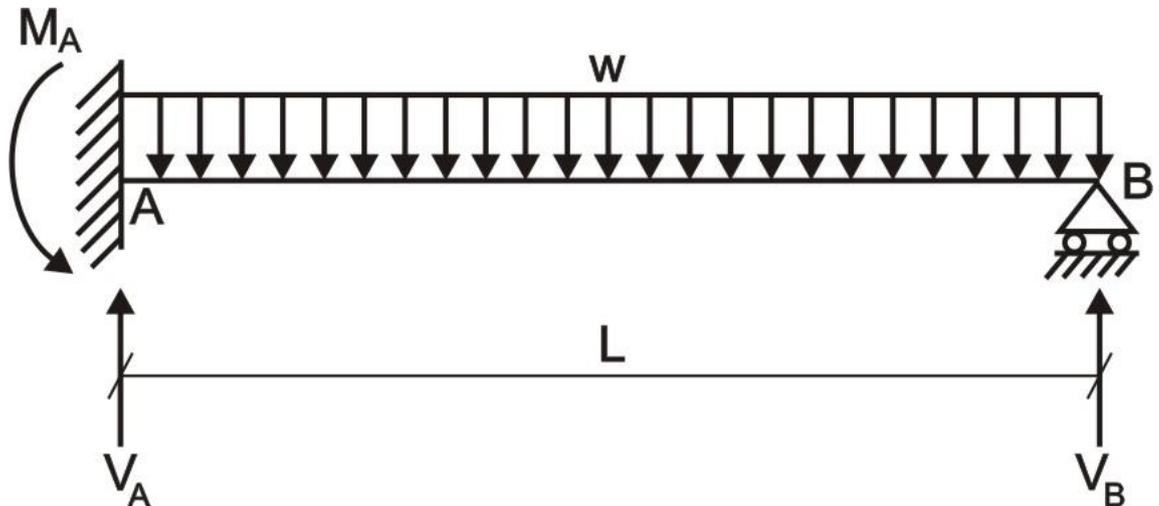
Solución:

Determinamos el grado de indeterminación de la viga.

$$G.I. = 4 - 3 = 1$$

La viga es una vez hiperestática.

Reemplazamos la reacción vertical en A por V_A y calculamos el momento M_A en función de V_A , tal como se muestra en la figura 5.38



$$\sum M_B = 0 \quad \Rightarrow \quad V_A L - \frac{wL^2}{2} - M_A = 0 \quad \therefore \quad M_A = V_A L - \frac{wL^2}{2}$$

Luego, la ecuación de la elástica será:

$$y = y_0 + \theta_0 x - \frac{\left(V_A L - \frac{wL^2}{2} \right) x^2}{2EI} + \frac{V_A x^3}{6EI} - \frac{wx^4}{24EI}$$

Como el apoyo A es empotramiento, se sabe que $y_0 = 0$ y $\theta_0 = 0$, quedando la ecuación de la siguiente manera:

$$y = -\frac{\left(V_A L - \frac{wL^2}{2} \right) x^2}{2EI} + \frac{V_A x^3}{6EI} - \frac{wx^4}{24EI}$$

Además, el apoyo B es movable, en consecuencia se tendrá que:

$$y_B = y_{x=L} = 0 \Rightarrow -\frac{\left(V_A L - \frac{wL^2}{2}\right)L^2}{2EI} + \frac{V_A L^3}{6EI} - \frac{wL^4}{24EI} = 0 \quad \therefore \quad V_A = \frac{5wL}{8}$$

Luego:

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow \frac{5wL}{8} + V_B - wL = 0 \quad \therefore \quad V_B = \frac{3wL}{8}$$

Asimismo:

$$M_A = V_A L - \frac{wL^2}{2} = \frac{5wL^2}{8} - \frac{wL^2}{2} = \frac{wL^2}{8}$$

En base a estos resultados, graficamos los diagramas correspondientes, los cuales se muestran en la figura 5.39

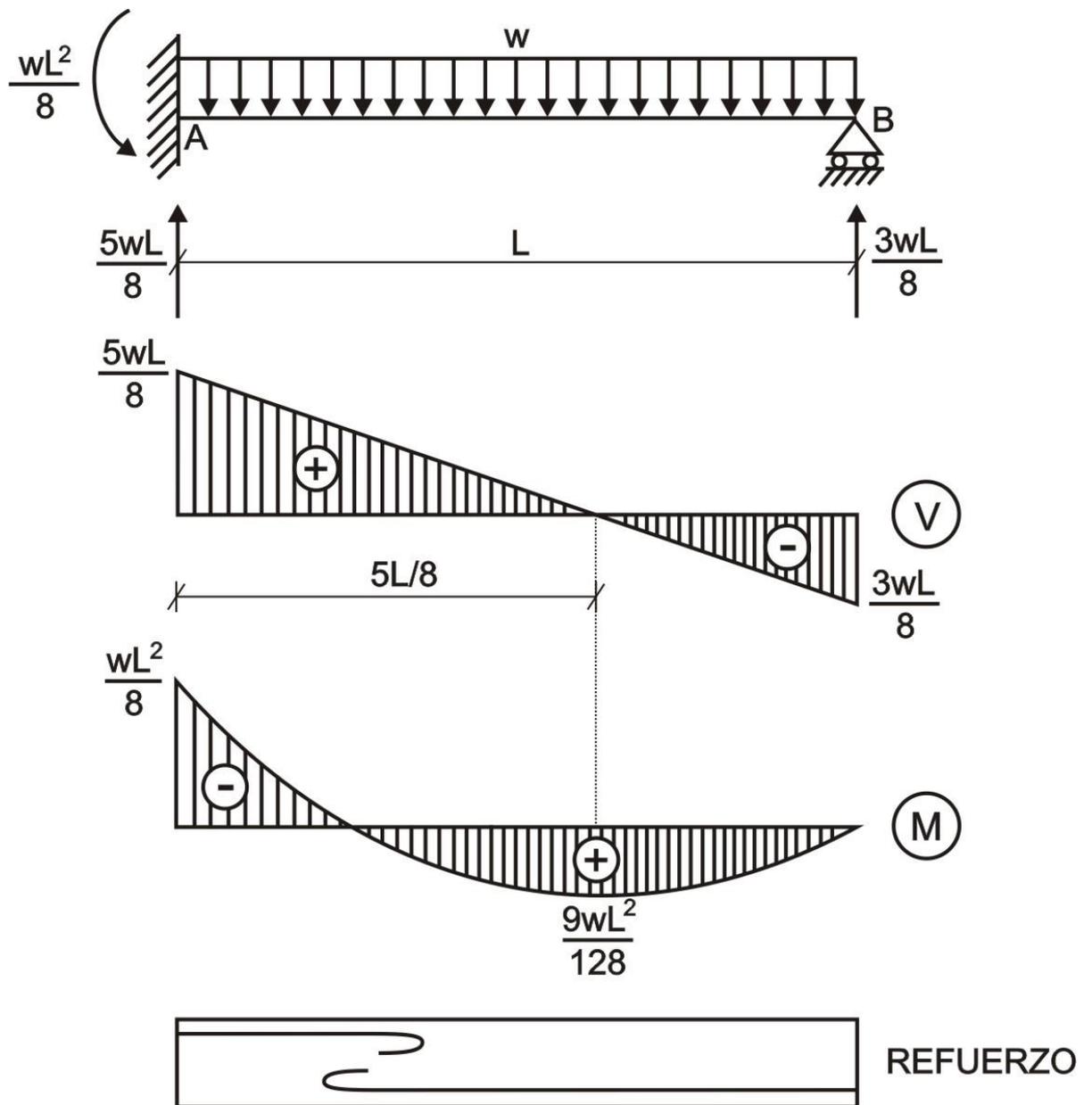


Fig. 5.39

PROBLEMA 5.13 Resolver la siguiente viga y graficar los diagramas de fuerza cortante, momento flector y refuerzo. Considerar que la sección es constante.

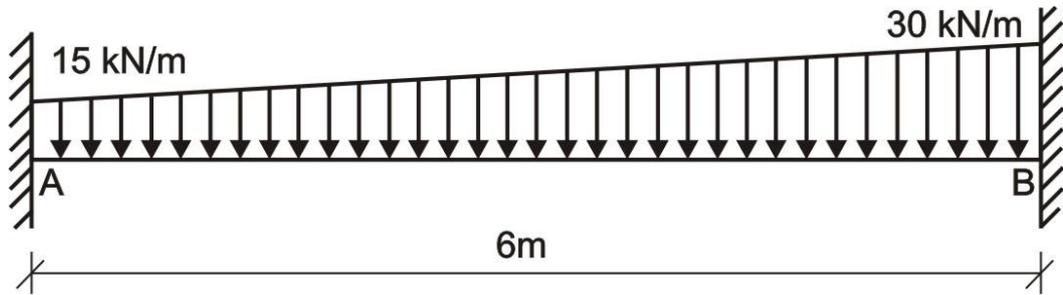


Fig. 5.40

Solución:

Esquematizamos las reacciones en los apoyos de la viga, tal como se muestra en la figura 5.41

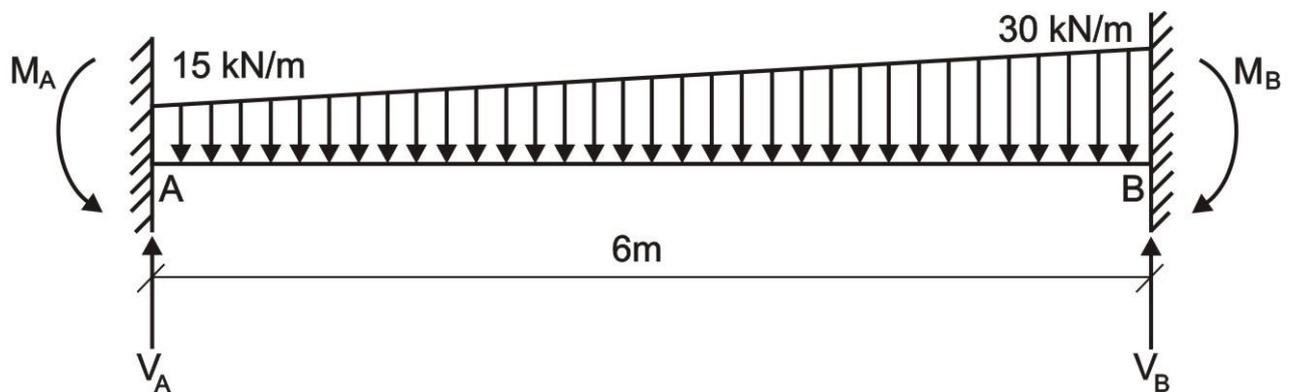


Fig. 5.41

Aplicamos la ecuación universal, obteniendo:

$$y = -\frac{M_A x^2}{2EI} + \frac{V_A x^3}{6EI} - \frac{15x^4}{24EI} - \frac{2,5x^5}{120EI} = -\frac{M_A x^2}{2EI} + \frac{V_A x^3}{6EI} - \frac{5x^4}{8EI} - \frac{x^5}{48EI}$$

$$\theta = \frac{dy}{dx} = -\frac{M_A x}{EI} + \frac{V_A x^2}{2EI} - \frac{5x^3}{2EI} - \frac{5x^4}{48EI}$$

Aplicamos las condiciones de borde o extremos, en este caso para el apoyo B que es un empotramiento perfecto.

1) Si $x = 6m \Rightarrow \theta_B = \theta_{x=6} = 0$

$$0 = -\frac{M_A (6)}{EI} + \frac{V_A (6)^2}{2EI} - \frac{5(6)^3}{2EI} - \frac{5(6)^4}{48EI}$$

$$6V_A - 2M_A = 225 \quad (a)$$

2) Si $x = 6m \Rightarrow y_B = y_{x=6} = 0$

$$0 = -\frac{M_A (6)^2}{2EI} + \frac{V_A (6)^3}{6EI} - \frac{5(6)^4}{8EI} - \frac{6^5}{48EI}$$

$$2V_A - M_A = 54 \quad (b)$$

Resolvemos las ecuaciones (a) y (b), obteniendo:

$$V_A = 58,5\text{kN} \uparrow$$

$$M_A = 63\text{kN.m}$$

El sentido del momento en A, es el mismo que el mostrado en la figura 5.41

Determinamos las otras reacciones, es decir, las correspondientes al apoyo B, aplicando las ecuaciones de equilibrio de la estática.

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad V_B + 58,5 - \frac{(30+15).6}{2} = 0$$

$$V_B = 76,5\text{kN} \uparrow$$

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad 76,5.6 - M_B + 63 - 15.6.3 - \frac{1}{2}.15.6.\left(\frac{2}{3}.6\right) = 0$$

$$M_B = 72\text{kN.m}$$

El sentido del momento en B, es el mismo que el mostrado en la figura 5.41

Con los valores obtenidos graficamos los diagramas de fuerza cortante, momento flector y refuerzo, tal como se muestra en la figura 5.42

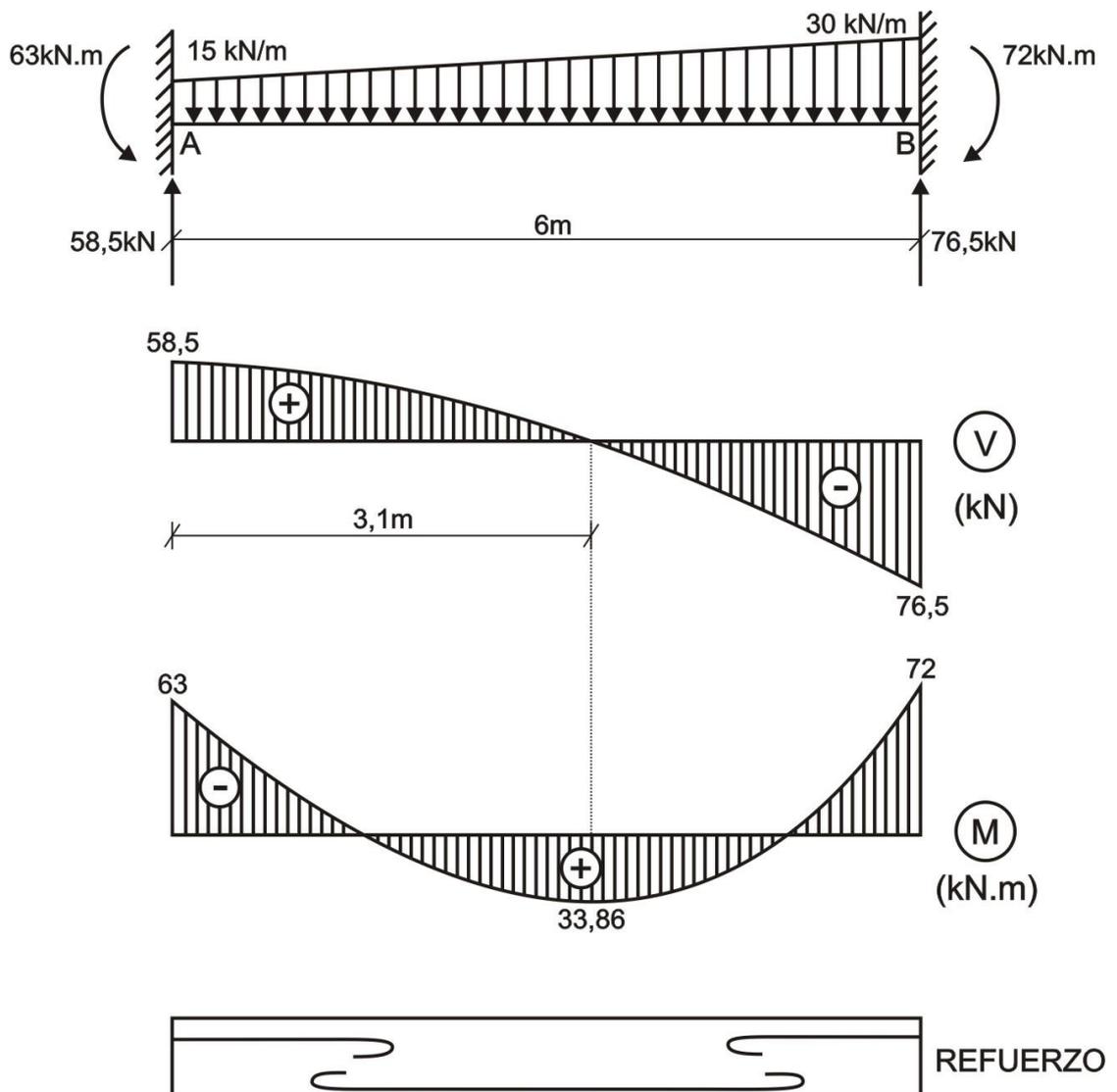


Fig. 5.42

5.3 METODO DEL AREA DE MOMENTOS

Los dos teoremas que constituyen la base de este método fueron enunciados en la Universidad de Michigan en 1873 y resultan ser muy útiles para el cálculo de pendientes y deflexiones en vigas, especialmente cuando se analiza su respuesta ante cargas concentradas.

TEOREMA 1. Si se tienen dos puntos A y B de la curva elástica de un elemento sometido a flexión, la diferencia en pendiente de las tangentes a la curva en esos dos puntos es igual al área del diagrama M/EI entre ellos.

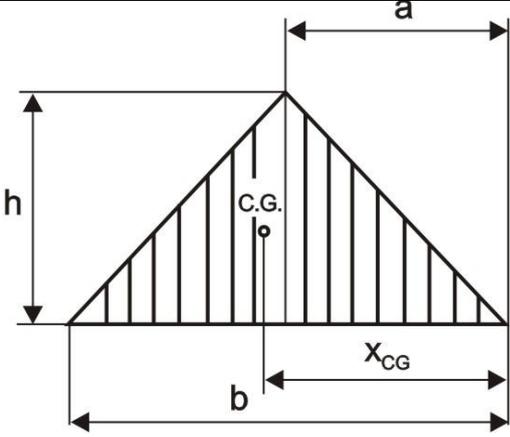
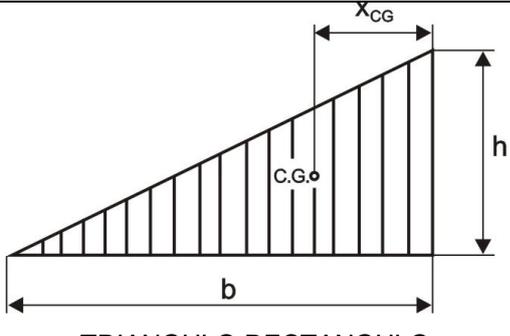
$$\theta_B - \theta_A = \int_A^B \left(\frac{M}{EI} \right) dx = \text{AREA}_{(M/EI)}^{A,B} \quad (5.7)$$

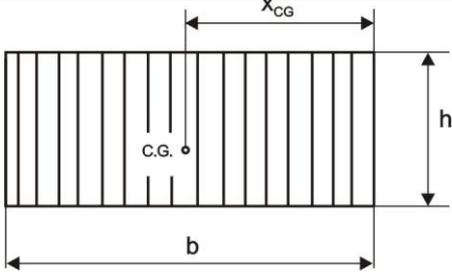
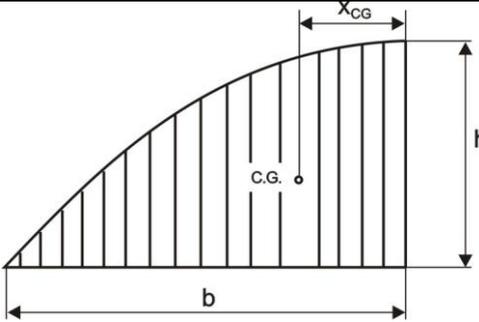
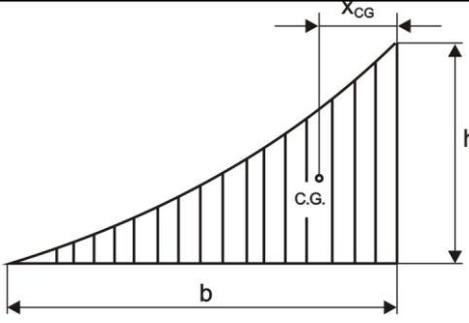
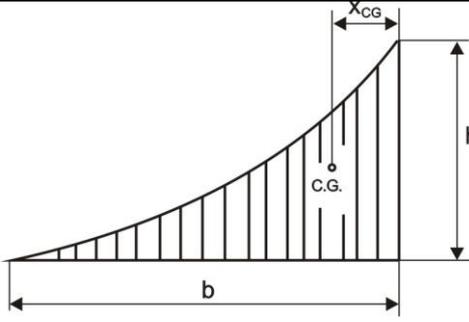
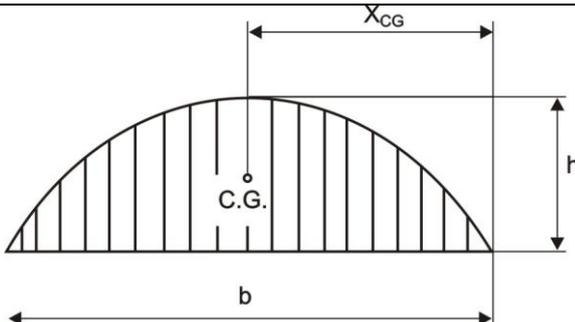
TEOREMA 2. La distancia medida verticalmente de un punto B, sobre la curva elástica de una viga a la tangente trazada en otro punto A de la misma, es igual al momento estático con respecto a B del área del diagrama M/EI entre dichos puntos.

$$d_{B \rightarrow \text{tg}A} = \int_A^B \left(\frac{M}{EI} \right) x dx = S_{\text{AREA}(M/EI)}^B \quad (5.8)$$

Es evidente que para aplicar correctamente el método, será necesario graficar correctamente el diagrama de momento flector de la viga, así como conocer las áreas y ubicación del centro de gravedad de las figuras geométricas más conocidas, las cuales se muestran en la tabla 5.1

Tabla 5.1

Nº	DIAGRAMA DE MOMENTO FLECTOR	AREA	CENTRO DE GRAVEDAD
1	 <p>TRIANGULO</p>	$A = \frac{bh}{2}$	$X_{CG} = \frac{a+b}{3}$
2	 <p>TRIANGULO RECTANGULO</p>	$A = \frac{bh}{2}$	$X_{CG} = \frac{b}{3}$

3	 <p style="text-align: center;">RECTANGULO</p>	$A = bh$	$X_{CG} = \frac{b}{2}$
4	 <p style="text-align: center;">SEMISEGMENTO PARABOLICO</p>	$A = \frac{2bh}{3}$	$X_{CG} = \frac{3b}{8}$
5	 <p style="text-align: center;">ARCO PARABOLICO CUADRATICO</p>	$A = \frac{bh}{3}$	$X_{CG} = \frac{b}{4}$
6	 <p style="text-align: center;">ARCO PARABOLICO CUBICO</p>	$A = \frac{bh}{4}$	$X_{CG} = \frac{b}{5}$
7	 <p style="text-align: center;">PARABOLA CUADRATICA</p>	$A = \frac{2bh}{3}$	$X_{CG} = \frac{b}{2}$

PROBLEMA 5.14 Determinar la deflexión y la pendiente en el extremo libre de la viga en voladizo (figura 5.43), si es de sección constante.

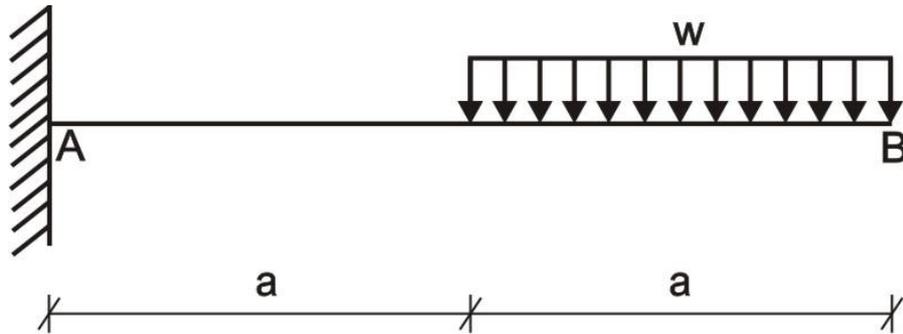


Fig. 5.43

Solución:

Graficamos el diagrama $\left(\frac{M}{EI}\right)$ para la viga, tal como se muestra en la figura 5.44

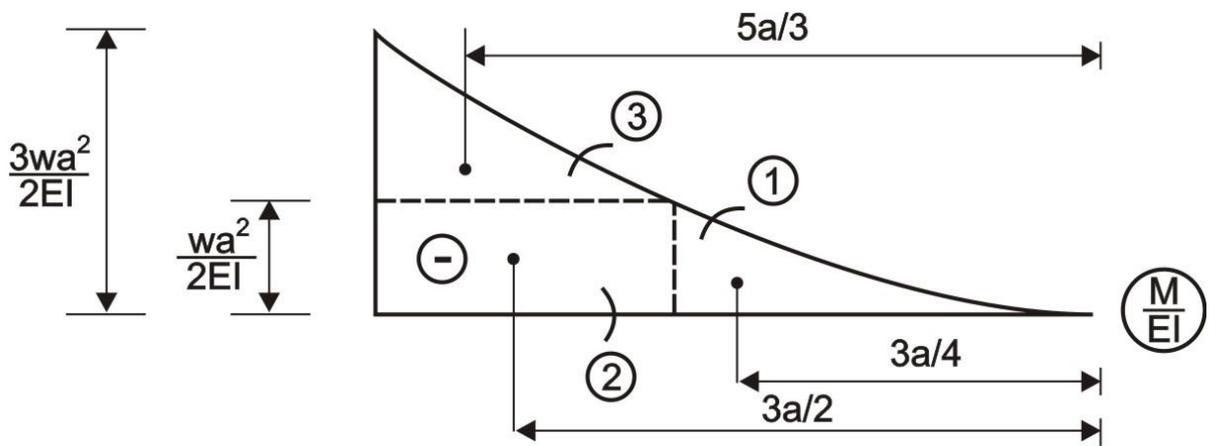


Fig. 5.44

Como se puede apreciar, se dividió el diagrama M/EI en tres figuras geométricas conocidas, con la finalidad de facilitar el trabajo de cálculo.

Para determinar la pendiente en B, aplicamos el primer teorema y trabajamos de derecha a izquierda, es decir, de B hacia A, obteniendo:

$$\theta_B - \theta_A = \text{AREA}_{\text{Fig.1}} + \text{AREA}_{\text{Fig.2}} + \text{AREA}_{\text{Fig.3}}$$

Como $\theta_A = 0$, por ser A un empotramiento perfecto, quedará la ecuación de la siguiente manera:

$$\theta_B = -\frac{1}{3} \left(\frac{wa^2}{2EI} \right) (a) - \left(\frac{wa^2}{2EI} \right) (a) - \frac{1}{2} \left(\frac{wa^2}{EI} \right) (a)$$

$$\theta_B = -\frac{wa^3}{6EI} - \frac{wa^3}{2EI} - \frac{wa^3}{2EI} = -\frac{7wa^3}{6EI}$$

El signo negativo implica que la pendiente va en sentido horario.

Para calcular la deflexión en dicho punto será necesario trazar la curva elástica, tal como se muestra en la figura 5.45, aplicando, para ello, el segundo teorema y obtenemos:

$$y_B = d_{B \rightarrow \text{tgA}} = \left(-\frac{wa^3}{6EI} \right) \left(\frac{3a}{4} \right) + \left(-\frac{wa^3}{2EI} \right) \left(\frac{3a}{2} \right) + \left(-\frac{wa^3}{2EI} \right) \left(\frac{5a}{3} \right)$$

$$y_B = -\frac{41wa^4}{24EI} \downarrow$$

El signo negativo indica que el punto B de la curva elástica está debajo de la tgA , por ello la dirección de la deflexión es hacia abajo, lo cual se corrobora en la figura 5.45

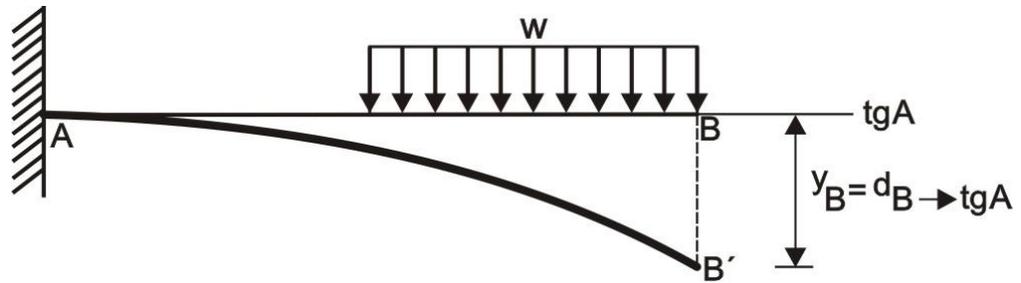


Fig. 5.45

PROBLEMA 5.15 Determinar θ_A , θ_B , θ_C , y_C para la viga mostrada en la figura 5.46

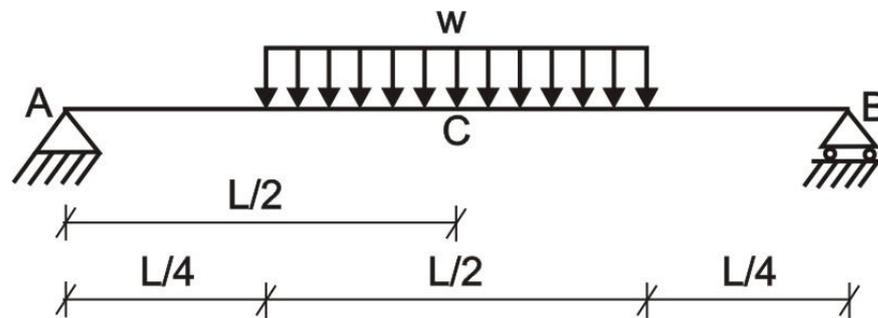
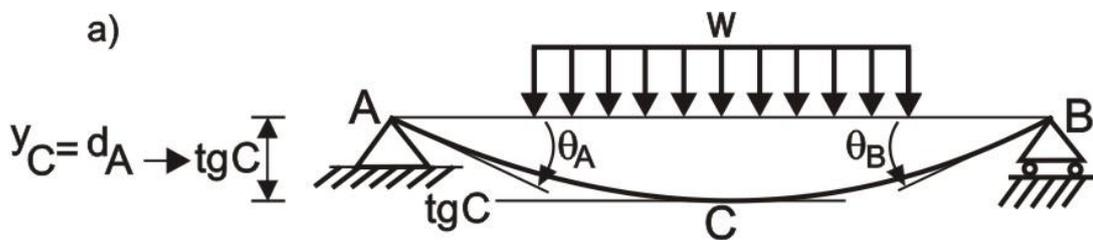


Fig. 5.46

Solución:

a)



b)

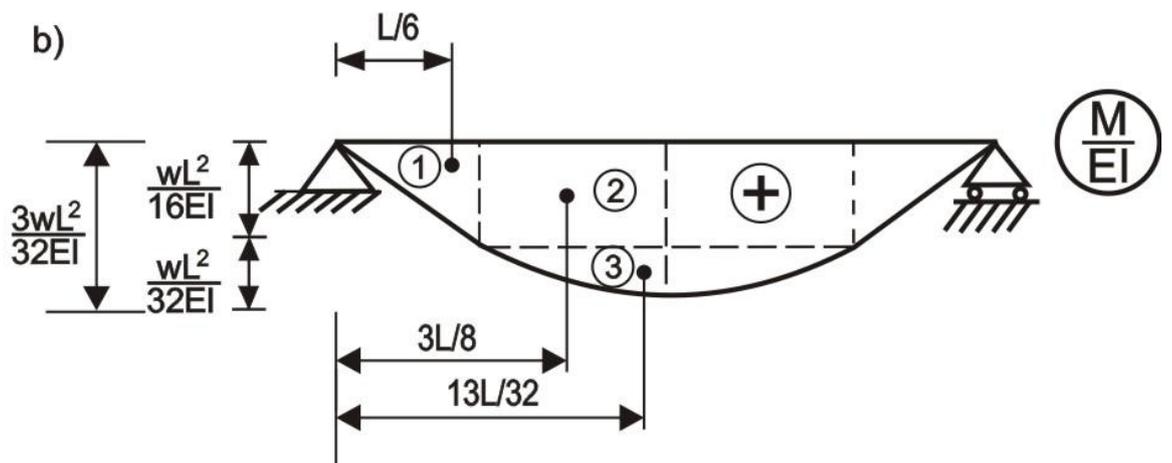


Fig. 5.47

Hacemos lo mismo que en el problema anterior, es decir, graficamos la curva elástica (figura 5.47,a) y el diagrama $\left(\frac{M}{EI}\right)$ (figura 5.47,b)

Como la viga es simétrica, se tendrá que $\theta_C = 0$ y en dicho punto la deflexión será máxima.

Luego, aplicamos el primer teorema, para determinar la pendiente en A.

$$\theta_C - \theta_A = \frac{1}{2} \left(\frac{wL^2}{16EI} \right) \left(\frac{L}{4} \right) + \left(\frac{wL^2}{16EI} \right) \left(\frac{L}{4} \right) + \frac{2}{3} \left(\frac{wL^2}{32EI} \right) \left(\frac{L}{4} \right)$$

$$\theta_A = -\frac{wL^3}{128EI} - \frac{wL^3}{64EI} - \frac{wL^3}{192EI} = -\frac{11wL^3}{384EI}$$

El signo negativo implica que la pendiente va en sentido horario (figura 5.47,a)

Ahora, determinamos la pendiente en B, basándonos una vez más en la simetría de la viga.

$$\theta_B = -\theta_A = \frac{11wL^3}{384EI}$$

La pendiente en B va en sentido antihorario (figura 5.47,a).

Finalmente, para determinar la deflexión en C, aplicamos el segundo teorema.

$$y_C = y_{\text{máx}} = d_{A \rightarrow \text{tg}C} = \left(\frac{wL^3}{128EI} \right) \left(\frac{L}{6} \right) + \left(\frac{wL^3}{64EI} \right) \left(\frac{3L}{8} \right) + \left(\frac{wL^3}{192EI} \right) \left(\frac{13L}{32} \right)$$

$$y_C = \frac{57wL^4}{6144EI} \downarrow$$

El signo positivo indica que el punto A está por encima de la $\text{tg}C$, por ello la dirección de la deflexión en C es hacia abajo, tal como se muestra en la figura 5.47,a

PROBLEMA 5.16 Determinar la pendiente en B y la deflexión en A, si la viga es de sección constante, siendo $E = 2100T/cm^2$ e $I = 8000cm^4$

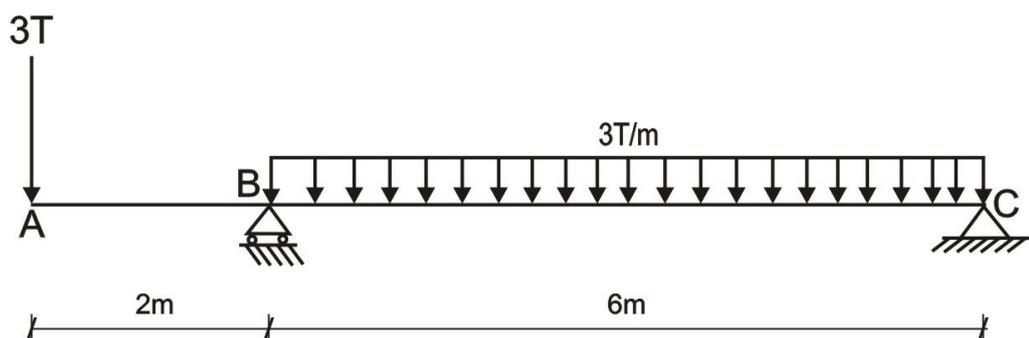


Fig. 5.48

Solución:

Aplicamos el principio de superposición de cargas, es decir, la viga original la descomponemos en dos vigas con las cargas mostradas en la figura 5.49, graficando sus diagramas M/EI para cada una de ellas en forma separada.

Luego, trazamos la deformada de la viga original (figura 5.50) y la tangente a dicha curva en el apoyo B, obteniendo la distancia del punto C a la tangente en B y a partir de ella, las relaciones geométricas, con la finalidad de obtener la deflexión en el extremo libre A.

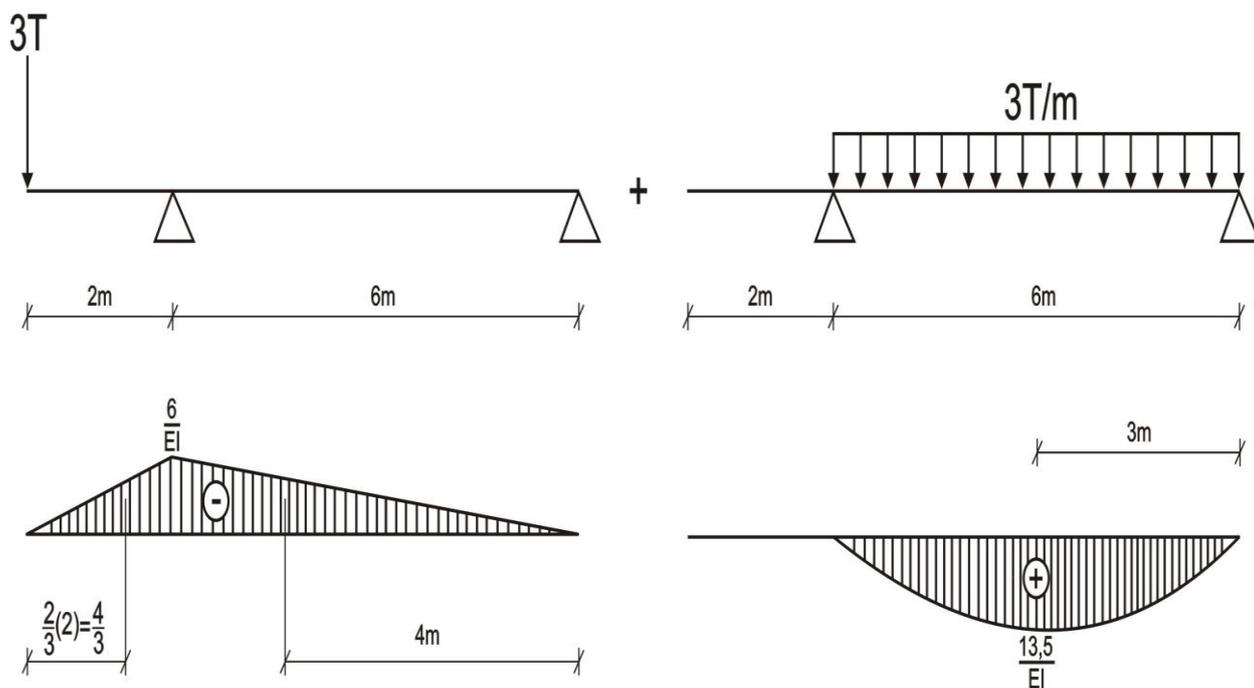


Fig. 5.49

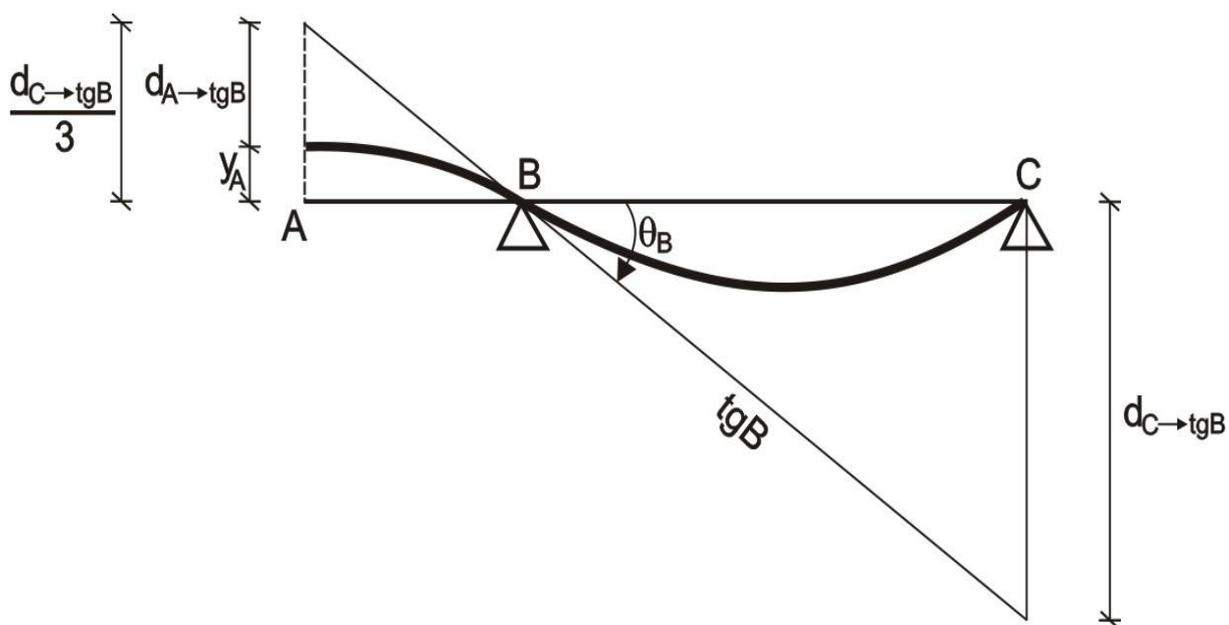


Fig. 5.50

De las figuras 5.49 y 5.50 se tiene:

$$d_{C \rightarrow tgB} = \frac{2}{3} \left(\frac{13,5}{EI} \right) (6)(3) - \frac{1}{2} (6) \left(\frac{6}{EI} \right) (4) = \frac{90}{EI}$$

Luego, analizamos la geometría del diagrama en el extremo libre A, obteniendo el valor de $\frac{1}{3} d_{C \rightarrow tgB}$

Por relaciones de triángulos rectángulos y de acuerdo a la deformada, se tendrá la siguiente relación:

$$\frac{1}{3} d_{C \rightarrow tgB} = d_{A \rightarrow tgB} + y_A$$

Ahora, calculamos el valor de $d_{A \rightarrow tgB}$ a través del diagrama de momento mostrado en la figura 5.49

$$d_{A \rightarrow tgB} = -\frac{1}{2}(2)\left(\frac{6}{EI}\right)\left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{8}{EI}$$

Esto solo indica que el signo (-) expresa que el punto A está debajo de la pendiente, pero como estamos analizando la geometría de las figuras, no ingresa signo alguno.

De esta manera obtenemos:

$$\frac{1}{3}\left(\frac{90}{EI}\right) = \left(\frac{8}{EI}\right) + y_A$$

De donde:

$$y_A = \frac{22}{EI}$$

Reemplazamos valores y obtenemos:

$$y_A = \frac{22}{2100 \cdot 10^4 \cdot 8000 \cdot 10^{-8}} = 0,01310\text{m} = 13,10\text{mm} \uparrow$$

La deflexión en A está orientada hacia arriba, en concordancia con el diagrama de la deformada de la viga, mostrada en la figura 5.50

Ahora, calculamos la pendiente en el apoyo B, el cual también lo efectuamos con ayuda de la figura 5.50

$$tg\theta_B = \frac{d_{C \rightarrow tgB}}{6}$$

De donde:

$$\theta_B = \arctg\left(\frac{15}{EI}\right) = \arctg(8,928 \cdot 10^{-3}) = 0,51^\circ$$

La orientación de la pendiente en el apoyo B, es la misma que la mostrada en la figura 5.50

PROBLEMA 5.17 Resolver la viga mostrada en la figura 5.51 y determinar su deflexión máxima, si $b = 300\text{mm}$, $h = 400\text{mm}$ y $E = 19000\text{N/mm}^2$.

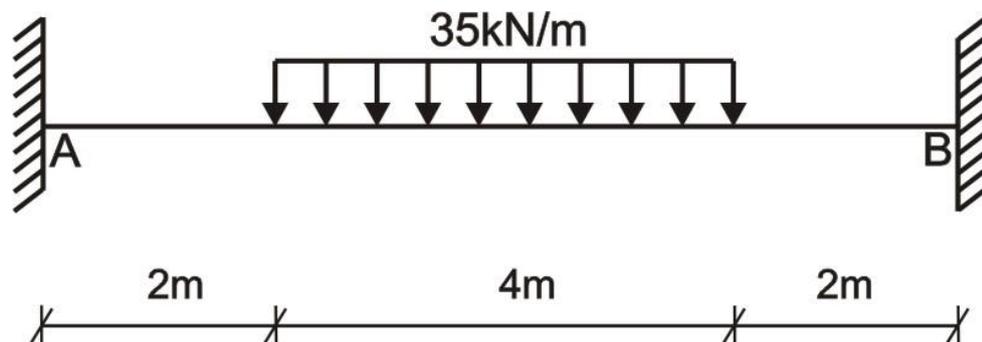


Fig. 5.51

Solución:

Determinamos el grado de indeterminación de la viga.

$$G.I. = 6 - 3 = 3$$

La viga es tres veces hiperestática.

Para resolver la hiperestaticidad, aplicamos el principio de superposición de cargas, tal como se muestra en la figura 5.52, convirtiendo, de esta manera, en dos vigas isostáticas, lo cual es fácil de calcular.

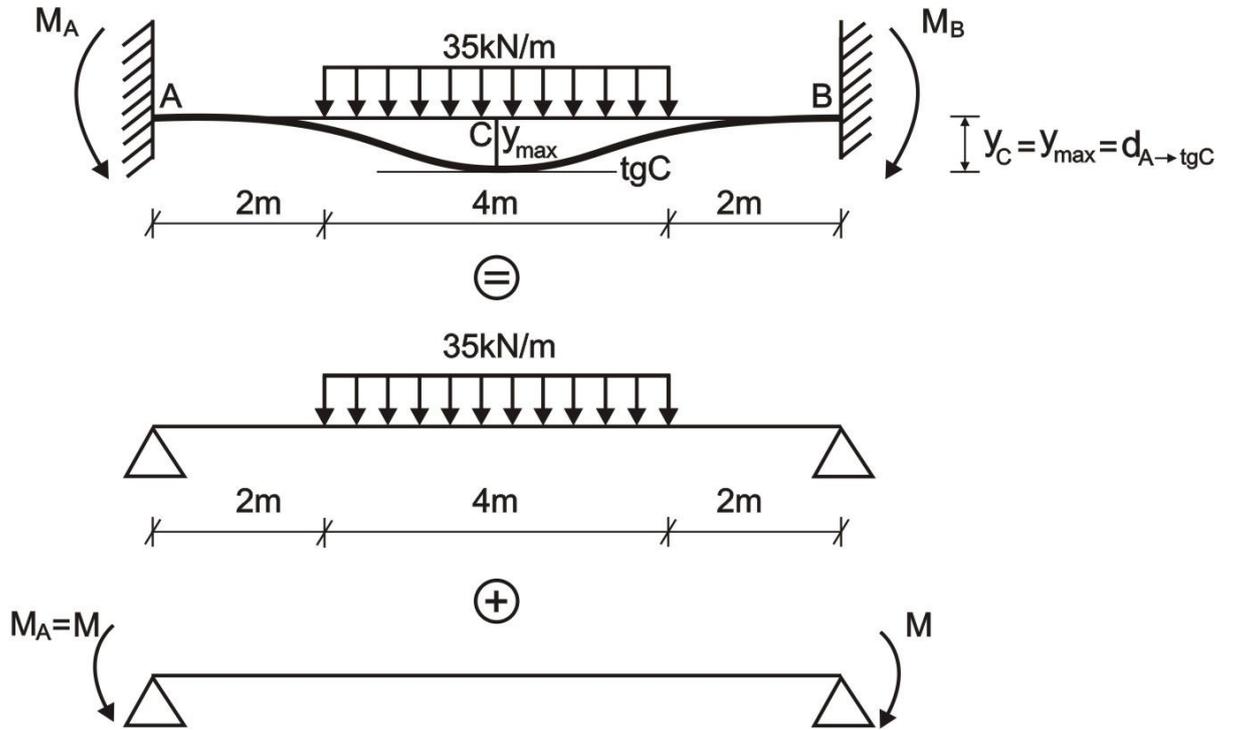


Fig. 5.52

Luego, graficamos los diagramas $\left(\frac{M}{EI}\right)$ para ambos casos (figuras 5.53 y 5.54)

1er caso:

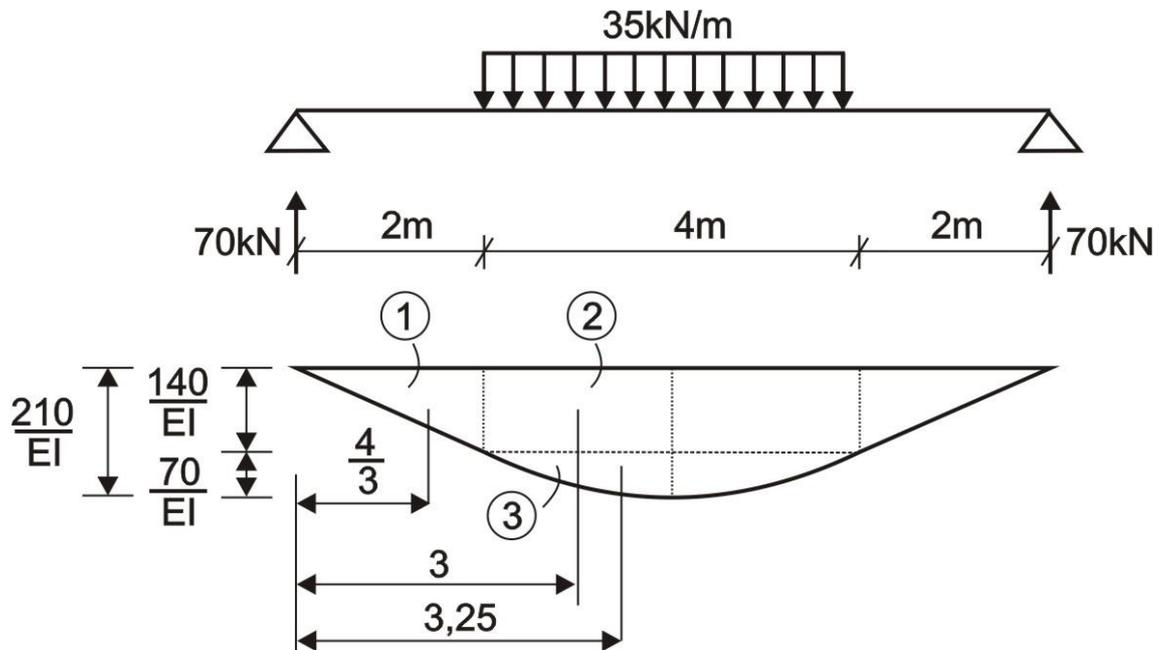


Fig. 5.53

2do caso:

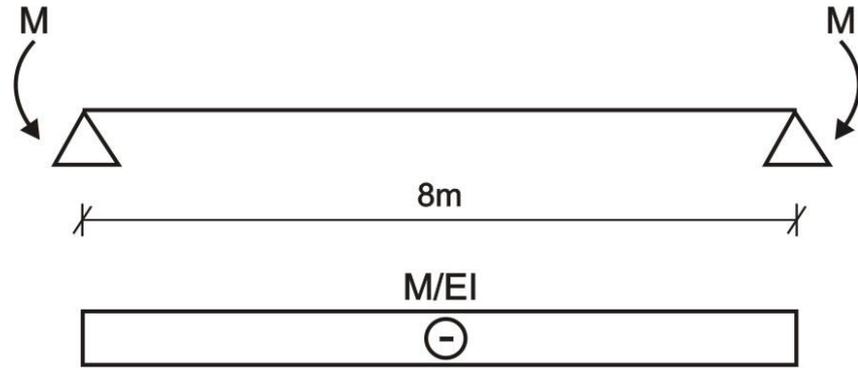


Fig. 5.54

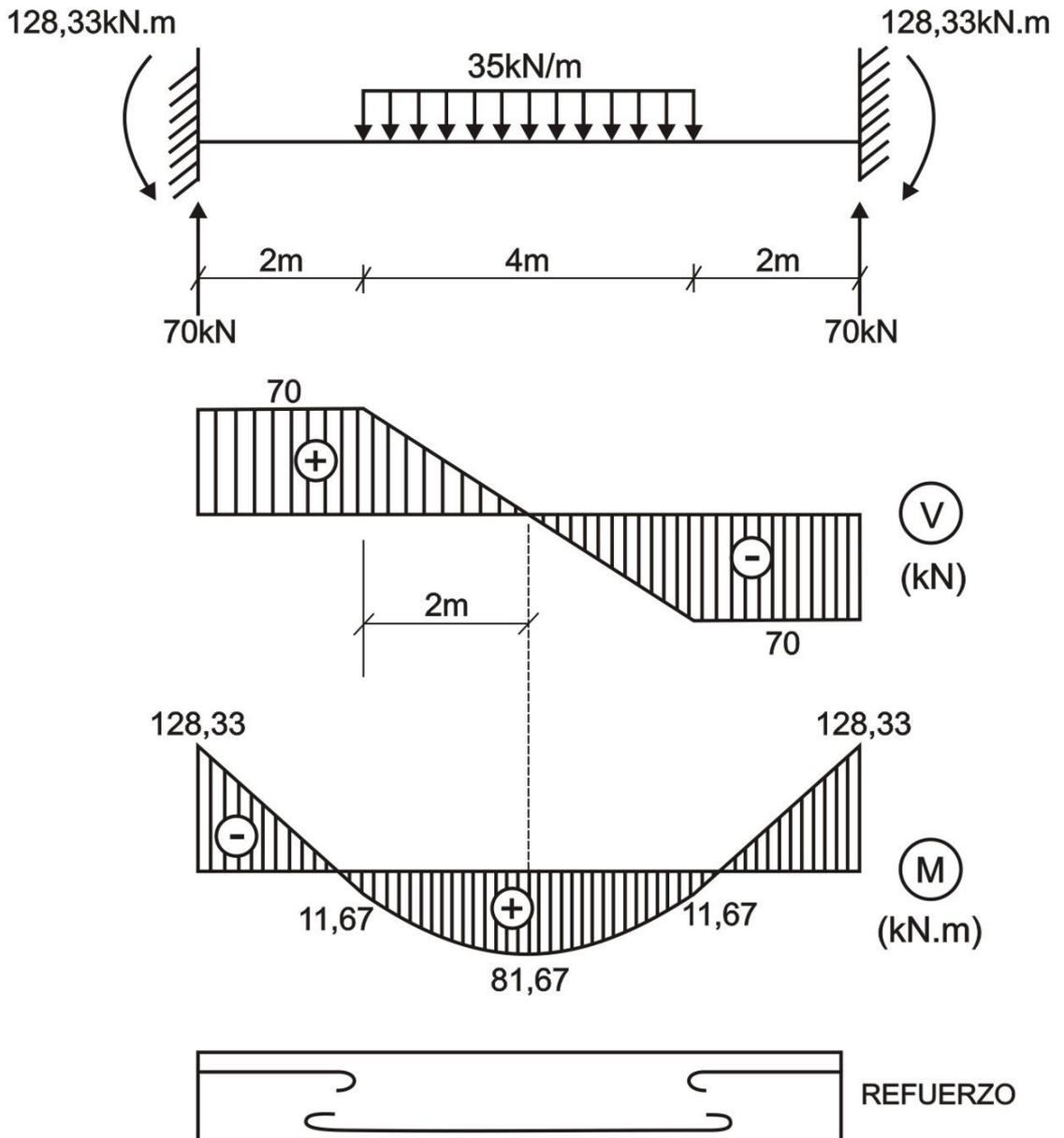


Fig. 5.55

Luego, aplicamos el primer teorema entre A y B, pero sumando las acciones de los dos casos anteriormente indicados y conociendo que $\theta_A = \theta_B = 0$, por ser empotramientos perfectos, obtenemos:

$$\theta_B - \theta_A = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{140}{EI} \right) (2) + \left(\frac{140}{EI} \right) (2) + \frac{2}{3} \left(\frac{70}{EI} \right) (2) \right] (2) - \left(\frac{M}{EI} \right) (8)$$

De donde:

$$M = 128,33 \text{ kN.m}$$

En base al resultado obtenido, calculamos las otras reacciones y graficamos los diagramas de fuerza cortante, momento flector y refuerzo, los cuales se muestran en la figura 5.55

Luego, determinamos la deflexión máxima, la cual sucede en el centro de la viga, debido a su simetría.

$$y_{\text{máx}} = y_C = d_{A \rightarrow \text{tg}C} = \frac{1}{EI} \left[(140) \left(\frac{4}{3} \right) + (280)(3) + \left(\frac{280}{3} \right) (3,25) - (128,33)(4)(2) \right]$$

$$y_{\text{máx}} = \frac{1}{19000 \cdot 10^3 \cdot \frac{0,3 \cdot 0,4^3}{12}} (303,36) = 9,98 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 9,98 \text{ mm} \downarrow$$

PROBLEMA 5.18 Resolver la viga mostrada en la figura 5.56, si es de sección constante.

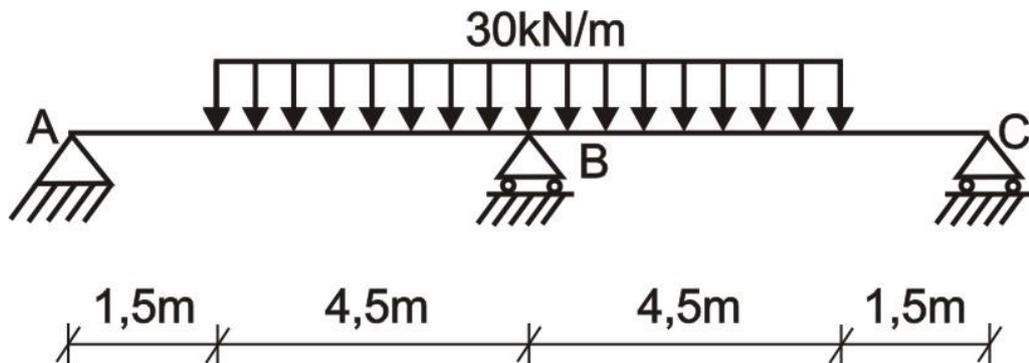


Fig. 5.56

Solución:

Determinamos el grado de indeterminación de la viga:

$$G.I. = 4 - 3 = 1$$

La viga es una vez hiperestática.

Una vez más aplicamos el principio de superposición, reemplazando el apoyo B por su reacción V_B , tal como se muestra en la figura 5.57

Tal como se puede apreciar, la viga hiperestática se ha convertido en la suma de dos vigas isostáticas y como el apoyo B es móvil, su deflexión será cero, lo que implica que la suma de las deflexiones para ambos casos será también cero, es decir:

$$y_B = y_1 + y_2 = 0$$

De esta manera, graficamos los diagramas $\left(\frac{M}{EI} \right)$ para cada caso en forma separada, tal como se muestra en las figuras 5.58 y 5.59

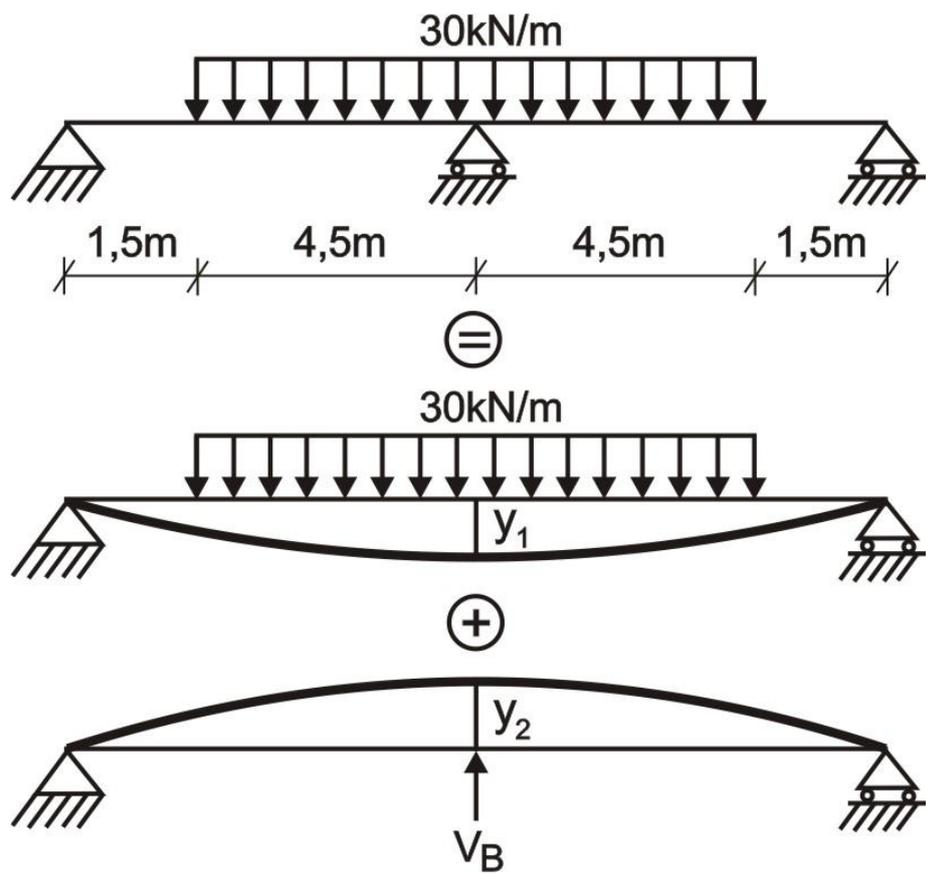


Fig. 5.57

1er caso:

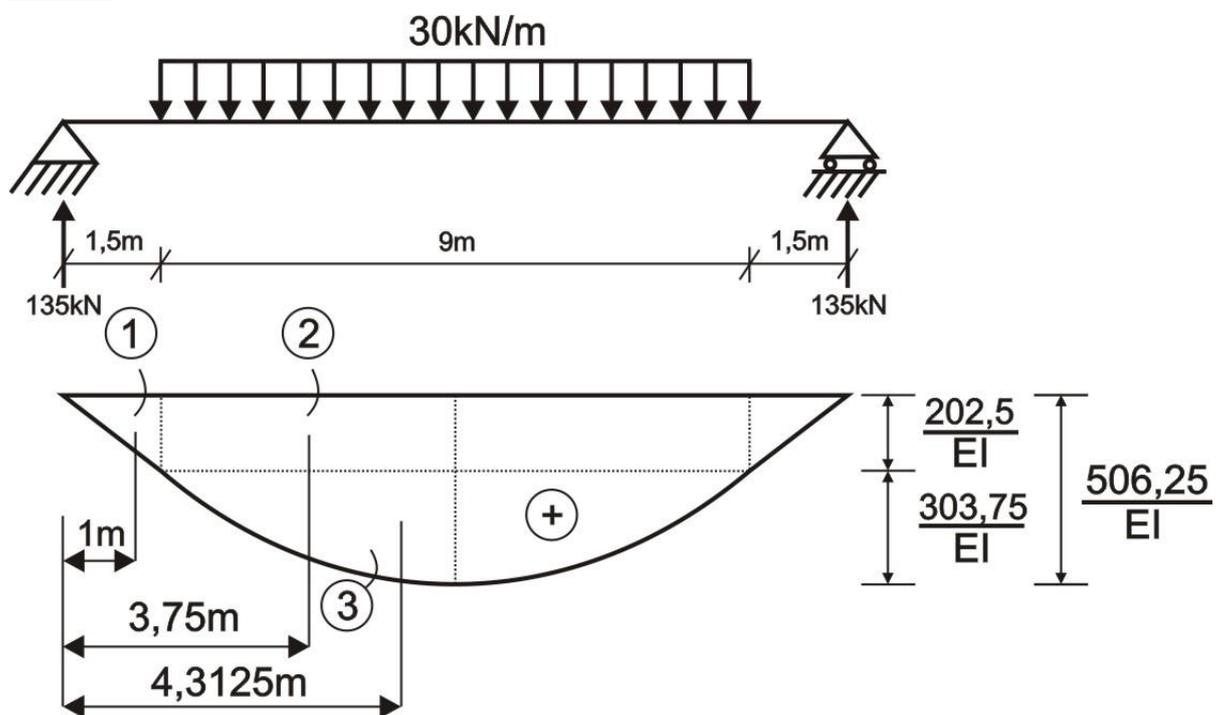


Fig. 5.58

2do caso:

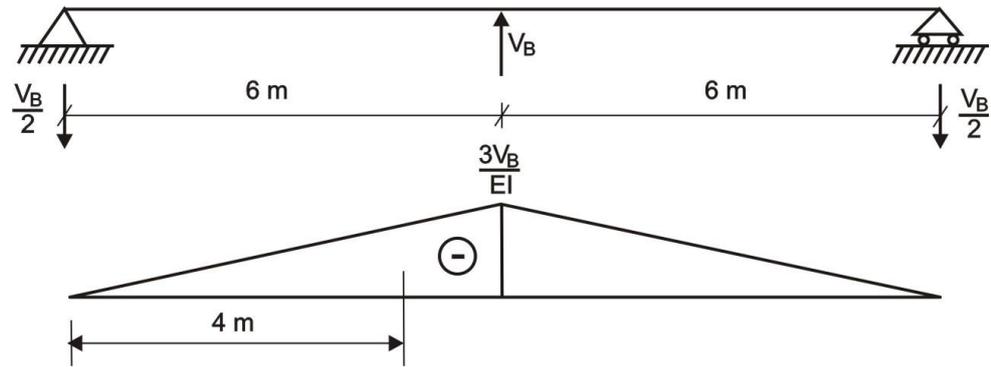


Fig. 5.59

Efectuamos el cálculo, aplicando la condición $y_B = d_{A \rightarrow B} = 0$, sumando la acción de ambos casos, obteniendo:

$$y_B = \frac{1}{2} \left(\frac{202,5}{EI} \right) (1,5)(1) + (4,5) \left(\frac{202,5}{EI} \right) (3,75) + \frac{2}{3} (4,5) \left(\frac{303,75}{EI} \right) (4,3125) - \frac{1}{2} \left(\frac{3V_B}{EI} \right) (6)(4) = 0$$

De donde:

$$V_B = 208,30 \text{ kN}$$

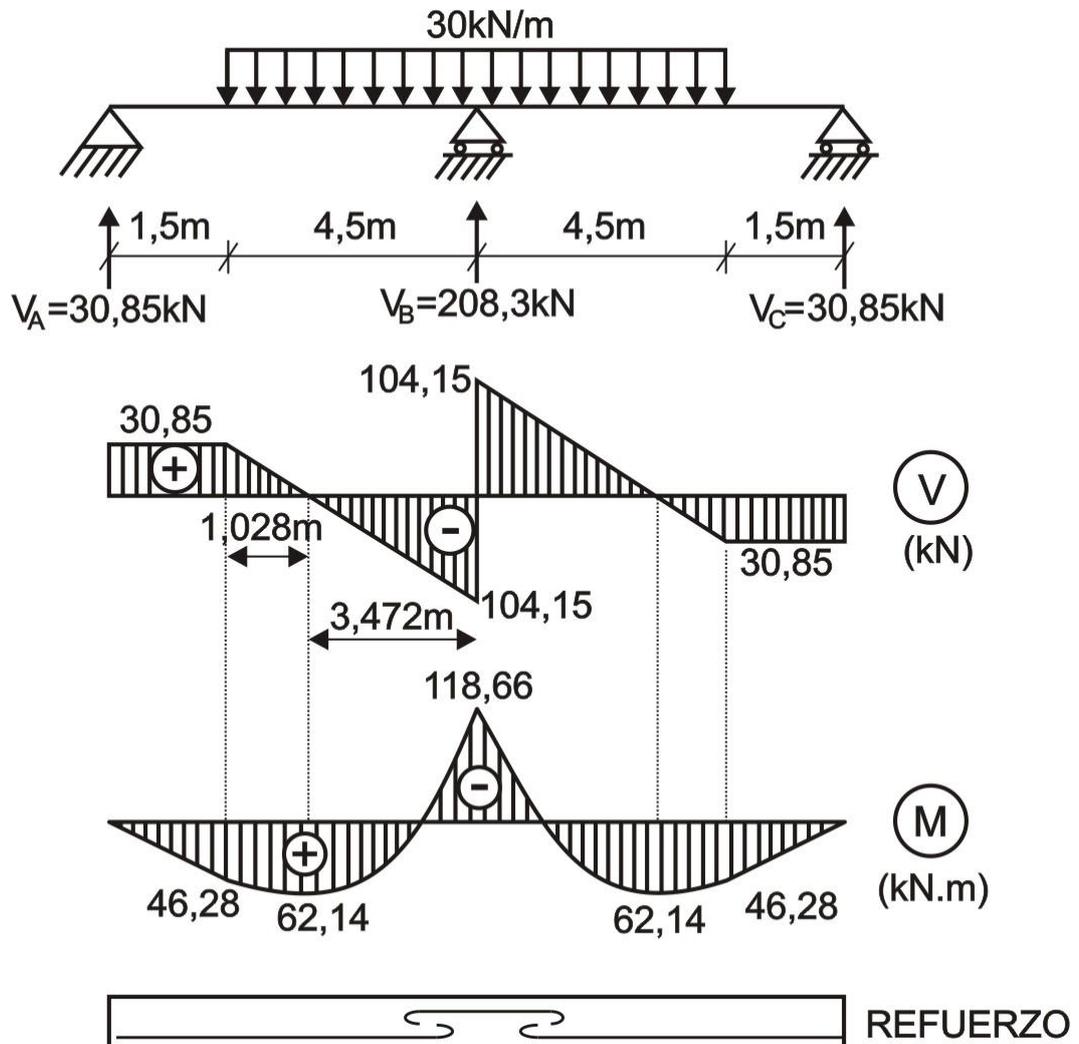


Fig. 5.60

En base al resultado obtenido, calculamos las otras reacciones y graficamos los diagramas de fuerza cortante, momento flector y refuerzo, tal como se muestra en la figura 5.60

PROBLEMA 5.19 Resolver la viga mostrada en la figura 5.61

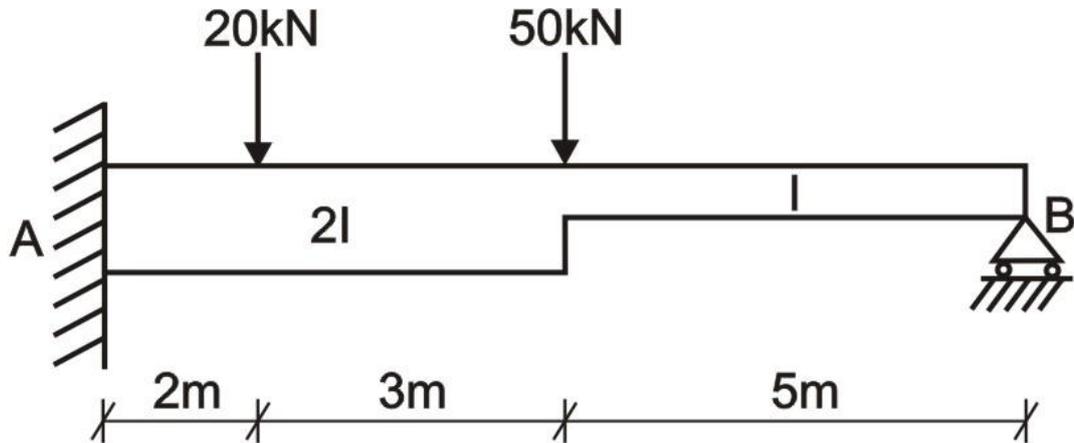


Fig. 5.61

Solución:

Determinamos el grado de indeterminación de la viga:

$$G.I. = 4 - 3 = 1$$

La viga es una vez hiperestática.

Aplicamos otra vez el principio de superposición de cargas, reemplazando el apoyo B por su reacción, es decir, su equivalente será la mostrada en la figura 5.62

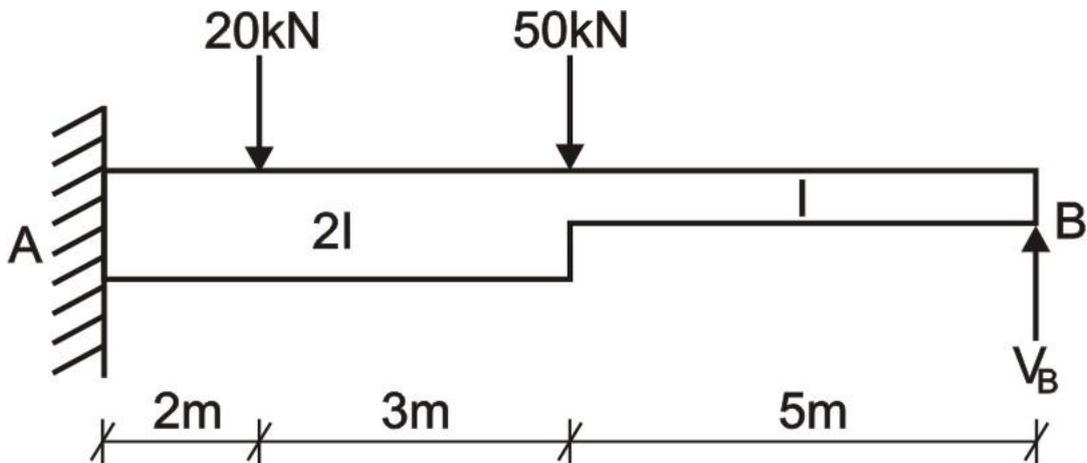


Fig. 5.62

Luego, aplicamos en forma separada las cargas y graficamos los diagramas $\left(\frac{M}{EI}\right)$, pero teniendo en

cuenta la variación de la inercia, tal como se muestra para el 1er caso (figura 5.63,a) y 2do caso (figura 5.63,b)

Como podemos apreciar, ambos gráficos han sido divididos en tres figuras regulares, con la intención de determinar las distancias hasta el punto B, donde existirán dos tipos de deflexión, correspondientes a cada caso, los cuales se muestran en la figura 5.64

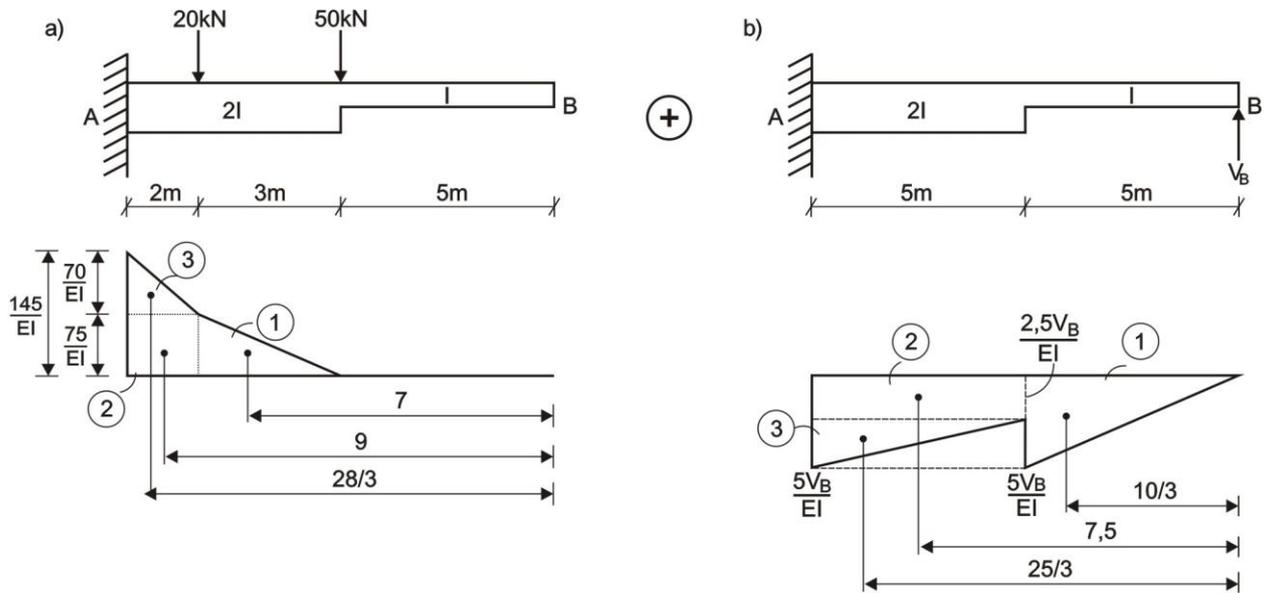


Fig. 5.63

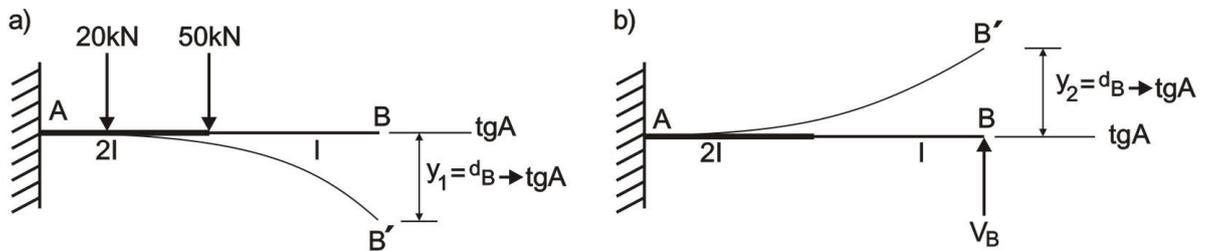


Fig. 5.64

Como el apoyo B es movable, su deflexión vertical será cero, es decir:

$$y_B = y_1 + y_2 = 0$$

Efectuamos el cálculo, aplicando la condición $y_B = d_{B \rightarrow tgA} = 0$, sumando la acción de ambos casos, obteniendo:

$$y_B = -\frac{1}{2}(3)\left(\frac{75}{EI}\right)(7) - \left(\frac{75}{EI}\right)(2)(9) - \frac{1}{2}\left(\frac{70}{EI}\right)(2)\left(\frac{28}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{5V_B}{EI}\right)(5)\left(\frac{10}{3}\right) + \left(\frac{2,5V_B}{EI}\right)(5)(7,5) + \frac{1}{2}\left(\frac{2,5V_B}{EI}\right)(5)\left(\frac{25}{3}\right) = 0$$

De donde:

$$V_B = 14,88 \text{ kN}$$

En base al resultado obtenido, calculamos las otras reacciones y graficamos los diagramas de fuerza cortante, momento flector y refuerzo, los cuales se muestran en la figura 5.65

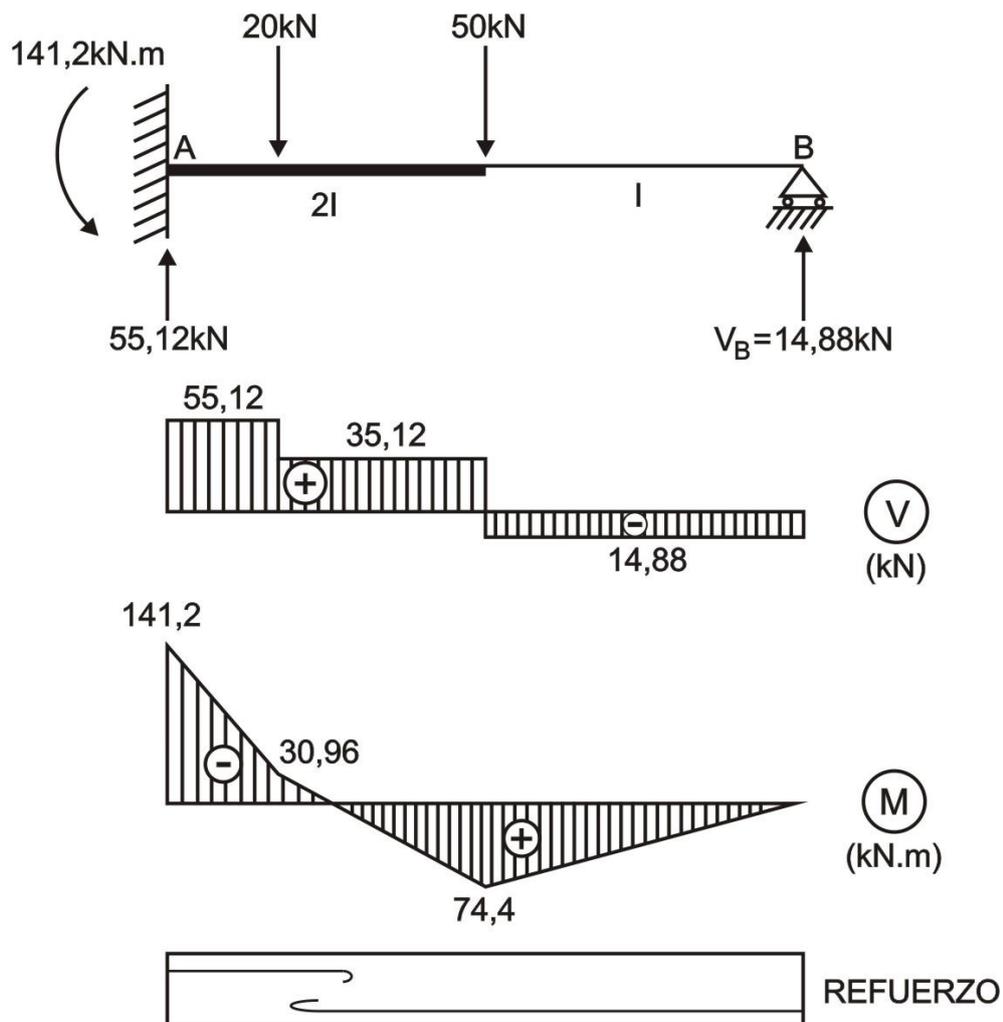


Fig. 5.65

5.4 METODO DE LA VIGA CONJUGADA

Este método consiste en cambiar el problema de encontrar las pendientes y deflexiones causadas en una viga por un sistema de cargas aplicadas, por otro problema en que se averiguan las fuerzas de corte y momentos de una viga especial, llamada viga conjugada, que está cargada con el diagrama M/EI de la viga original.

En relación con el método del área de momentos tiene la ventaja de que no necesita conocer previamente un punto de tangente cero y, por consiguiente, en todos los casos se puede averiguar directamente la pendiente y deflexión de cualquier punto de la elástica.

Su aplicación se fundamenta en dos proposiciones.

PROPOSICION 1. La pendiente de la elástica en cualquier sección de la viga real (θ) es igual a la fuerza de corte en la misma sección de la viga conjugada correspondiente (\bar{V}).

$$\theta = \bar{V} \tag{5.9}$$

PROPOSICION 2. La deflexión de cualquier punto de la viga real (y) es igual al momento en la sección correspondiente de su viga conjugada (\bar{M}).

$$y = \bar{M} \tag{5.10}$$

Utilizando estas proposiciones se pueden establecer las condiciones de apoyo que debe tener la viga conjugada para que se produzca la equivalencia, los cuales se muestran en la tabla 5.2

Tabla 5.2

Equivalencia entre los apoyos de la viga real y los de la viga conjugada correspondiente

VIGA REAL		VIGA CONJUGADA	
Tipo de apoyo	Condición	Condición equivalente	Tipo de apoyo
Simple	$\theta \neq 0$ $y = 0$	$\nabla \neq 0$ $\bar{M} = 0$	Simple
Empotramiento	$\theta = 0$ $y = 0$	$\nabla = 0$ $\bar{M} = 0$	Libre
Libre	$\theta \neq 0$ $y \neq 0$	$\nabla \neq 0$ $\bar{M} \neq 0$	Empotramiento
Apoyo interior	$\theta \neq 0$ $y = 0$	$\nabla \neq 0$ $M = 0$	Articulación
Articulación interior	$\theta \neq 0$ $y \neq 0$	$\nabla \neq 0$ $\bar{M} \neq 0$	Apoyo interior

La tabla de equivalencias se puede explicar de la siguiente manera: si el apoyo es simple habrá rotación pero no deflexión, lo cual implica que en la viga conjugada debe haber corte pero no momento, o sea las condiciones que ofrece el mismo apoyo simple. En el caso de empotramiento, no hay giro ni deflexión, de tal manera que en la viga conjugada no puede haber ni corte ni momento, lo cual se logra dejando dicho extremo libre. En cambio, si el extremo de la viga real está libre por ser un voladizo, tendrá rotación y deflexión, obligando a empotrarlo en la viga conjugada para que allí se presenten corte y momento. En los apoyos interiores de la viga real no hay deflexión, pero la pendiente debe ser la misma hacia un lado y hacia el otro, por consiguiente, este tipo de apoyo se debe de reemplazar en la viga conjugada, por una articulación que brinda momento nulo e igual fuerza de corte a ambos lados. Cuando se presenta una articulación en la viga real, el raciocinio inverso es completamente válido, de ahí que deba de reemplazarse por un apoyo interior en la viga conjugada.

Puede ser que al convertir la viga real en conjugada, esta última sea inestable, la cual mantendrá su equilibrio inestable al cargarlo con el diagrama M/EI .

Hay que tener en cuenta, que conviene que en todos los casos la viga conjugada sea determinada, debido a que una viga conjugada indeterminada requerirá una viga real inestable.

PROBLEMA 5.20 Determinar la pendiente θ_A y la deflexión máxima para la viga mostrada en la figura 5.66

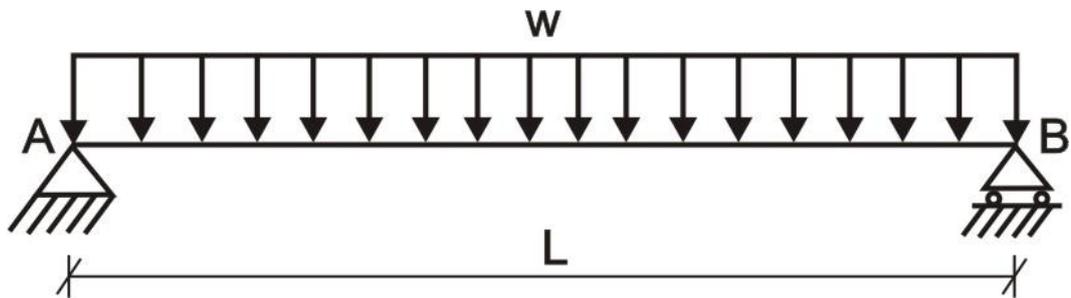


Fig. 5.66

Solución:

De acuerdo a las condiciones de extremos (apoyos), convertimos la viga real en conjugada y lo analizamos ante las cargas del diagrama M/EI , correspondiente a la viga real, tal como se muestra en la figura 5.67. Nótese que la dirección de las flechas de dicha carga M/EI , siempre va hacia el eje horizontal de la viga en forma perpendicular.

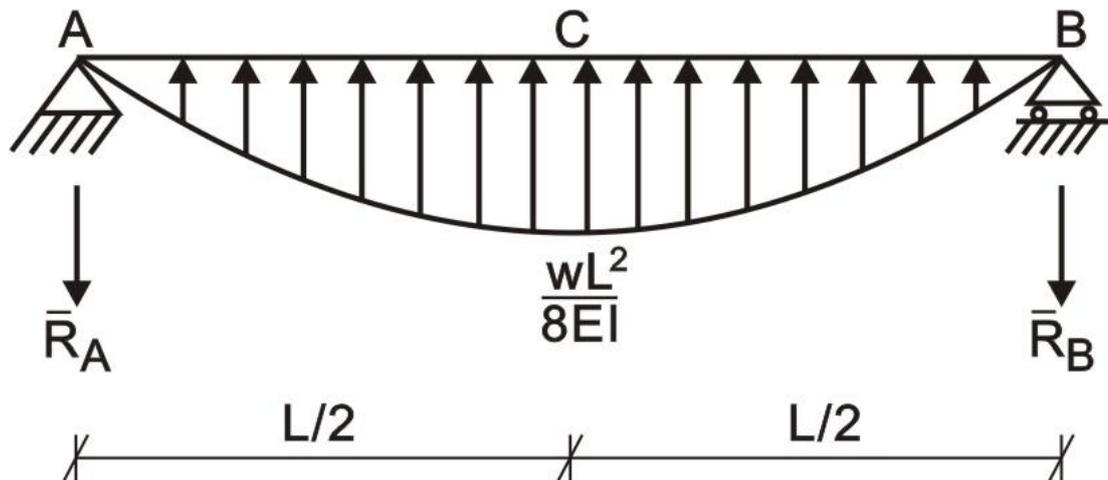


Fig. 5.67

Para determinar la pendiente en A, debemos de aplicar la 1ra proposición, es decir, debemos de determinar la reacción en dicho punto de la viga conjugada, es decir:

$$\sum M_B = 0 \quad \Rightarrow \quad -R_A(L) + \left[\frac{2}{3}(L) \left(\frac{wL^2}{8EI} \right) \right] \left(\frac{L}{2} \right) = 0 \quad \therefore \quad R_A = \frac{wL^3}{24EI}$$

De esta manera, se tendrá:

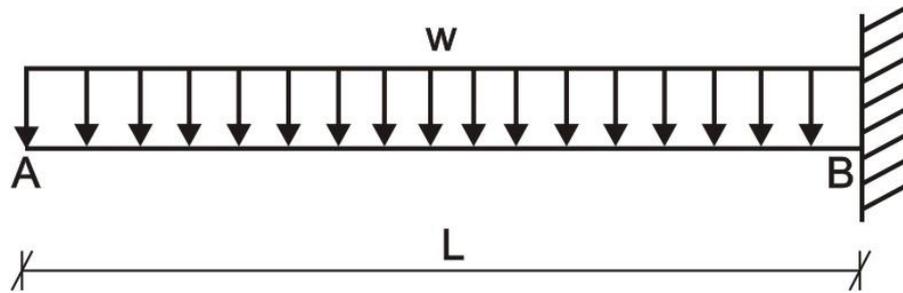
$$\theta_A = \nabla_A = -R_A = -\frac{wL^3}{24EI}$$

El signo negativo indica que la pendiente va en el sentido horario.

Luego, determinamos la deflexión máxima, la cual debe de suceder en el centro de la viga, es decir, en el punto C de la figura 5.67, aplicando la 2da proposición, se obtiene:

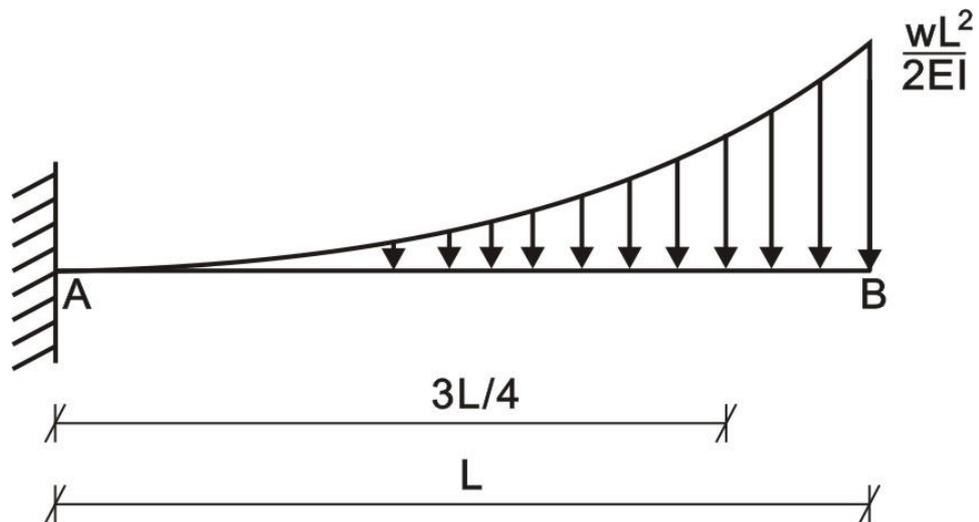
$$y_{\text{máx}} = y_C = M_C = -R_A \left(\frac{L}{2} \right) + \frac{2}{3} \left(\frac{L}{2} \right) \left(\frac{wL^2}{8EI} \right) \left(\frac{3}{8} \cdot \frac{L}{2} \right) = -\frac{wL^3}{24EI} \left(\frac{L}{2} \right) + \frac{wL^4}{128EI} = -\frac{5wL^4}{384EI} \downarrow$$

PROBLEMA 5.21 Determinar la pendiente y la deflexión en el extremo libre de la viga en voladizo, mostrada en la figura 5.68



Solución:

Primero convertimos la viga real en viga conjugada y lo sometemos ante el diagrama M/EI de la viga real, tal como se muestra en la figura 5.69. Una vez más, se puede notar, que la dirección de las flechas de la carga M/EI va hacia el eje horizontal de la viga en forma perpendicular a la misma.



Luego, aplicamos la 1ra proposición y determinamos la pendiente en A.

$$\theta_A = \bar{R}_A = \frac{1}{3}(L)\left(\frac{wL^2}{2EI}\right) = \frac{wL^3}{6EI}$$

Como es positivo, la pendiente va en el sentido antihorario.

Posteriormente, aplicamos la 2da proposición y determinamos la deflexión en A.

$$y_A = \bar{M}_A = -\frac{wL^3}{6EI}\left(\frac{3L}{4}\right) = -\frac{wL^4}{8EI} \downarrow$$

PROBLEMA 5.22 Determinar la deflexión máxima en la viga mostrada en la figura 5.70

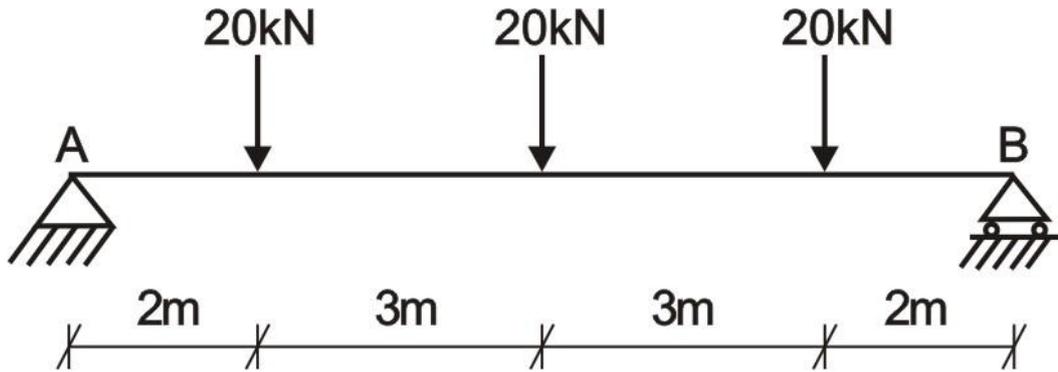


Fig. 5.70

Solución:

Una vez más convertimos la viga real en viga conjugada y lo cargamos con el diagrama M/EI de la viga real, tal como se muestra en la figura 5.71, la cual se ha dividido en tres figuras geométricas regulares.

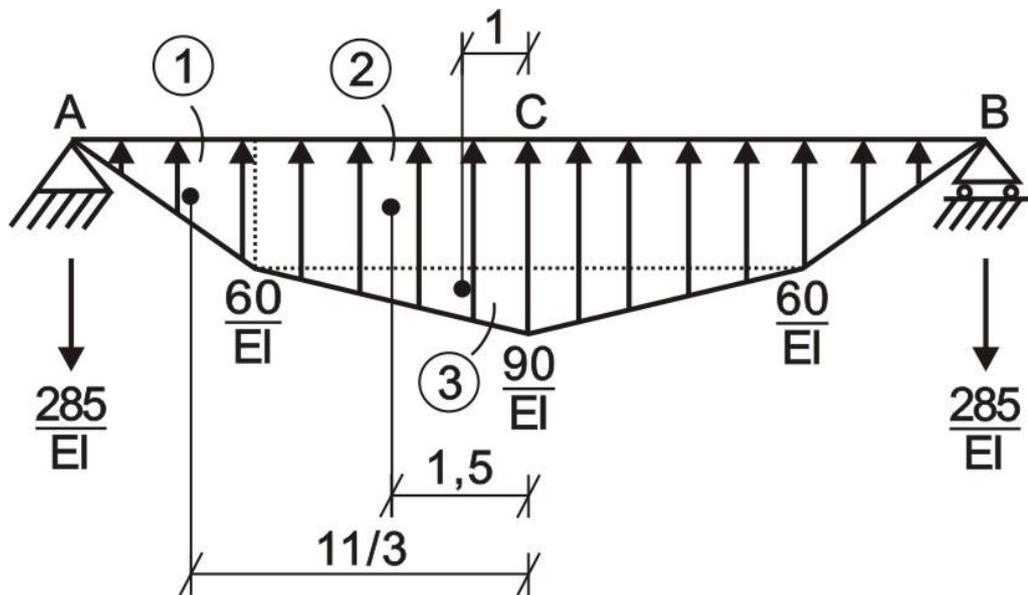


Fig. 5.71

Aplicamos la 2da proposición y determinamos la deflexión máxima, la cual sucederá en el punto C de la figura 5.71, debido a que la viga es simétrica.

$$y_{\text{máx}} = y_C = M_C = -\frac{285}{EI}(5) + \frac{1}{2}\left(\frac{60}{EI}\right)(2)\left(\frac{11}{3}\right) + \left(\frac{60}{EI}\right)(3)(1,5) + \frac{1}{2}\left(\frac{30}{EI}\right)(3)(1) = -\frac{890}{EI} \downarrow$$

PROBLEMA 5.23 Resolver la viga mostrada en la figura 5.72, si es de sección constante.

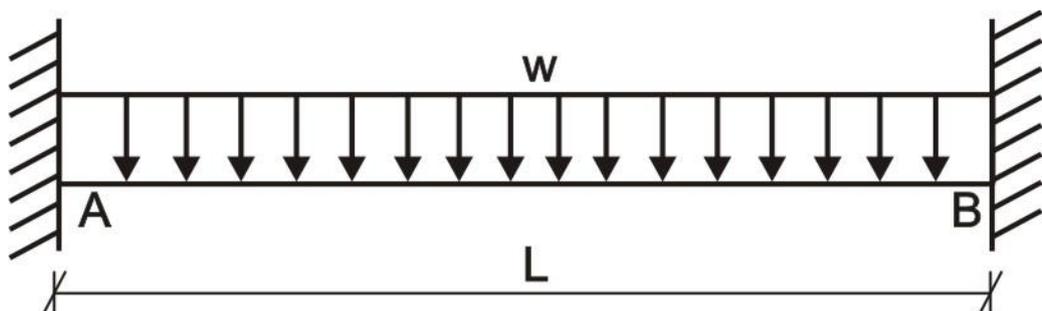


Fig. 5.72

Solución:

Determinamos el grado de indeterminación de la viga:

$$G.I. = 6 - 3 = 3$$

La viga es tres veces hiperestática.

Primero, aplicamos el principio de superposición de cargas, convirtiendo la viga hiperestática en dos vigas isostáticas y luego, analizamos cada viga como una viga conjugada en forma separada, tal como se muestra en la figura 5.73

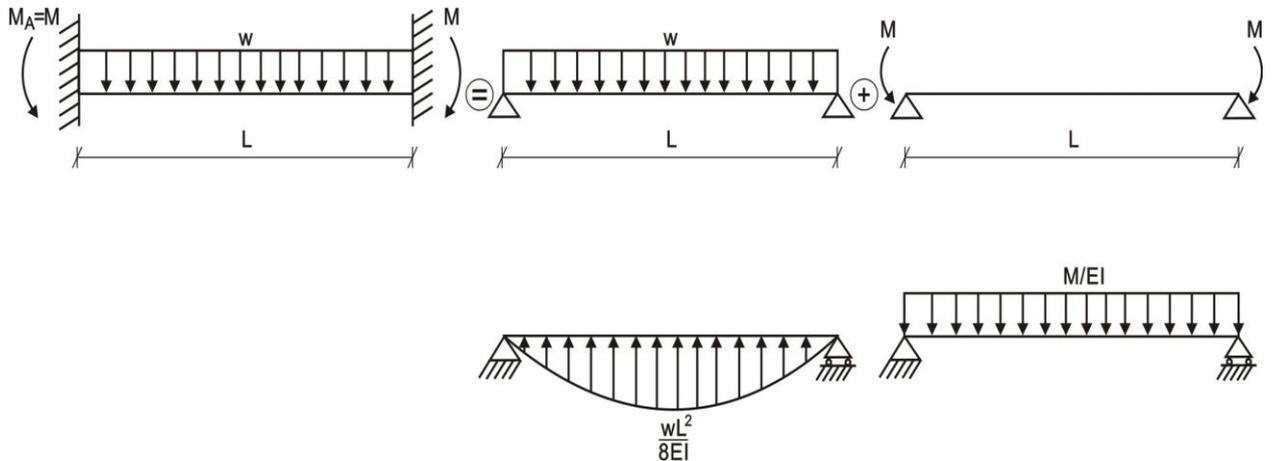


Fig. 5.73

Ahora, regresamos al esquema inicial, convirtiéndolo la viga real de la figura 5.72 en viga conjugada, de acuerdo a las condiciones de extremos (tabla 5.2), sometida a la suma de las cargas de la figura 5.73, quedando la viga con sus cargas, tal como se muestra en la figura 5.74

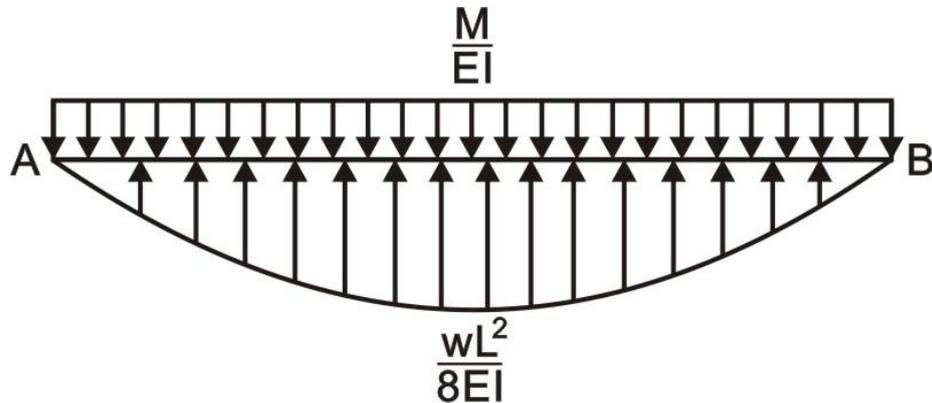


Fig. 5.74

Como el apoyo B es empotrado, su pendiente y deflexión será igual a cero, es decir:

$$y_B = \bar{M}_B = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[\frac{2}{3}(L) \left(\frac{wL^2}{8EI} \right) \right] \left(\frac{L}{2} \right) - \left(\frac{M}{EI} \right) (L) \left(\frac{L}{2} \right) = 0 \quad \therefore \quad M = \frac{wL^2}{12}$$

Con el resultado obtenido, determinamos las otras reacciones y graficamos los diagramas de fuerza cortante, momento flector y refuerzo, tal como se muestra en la figura 5.75

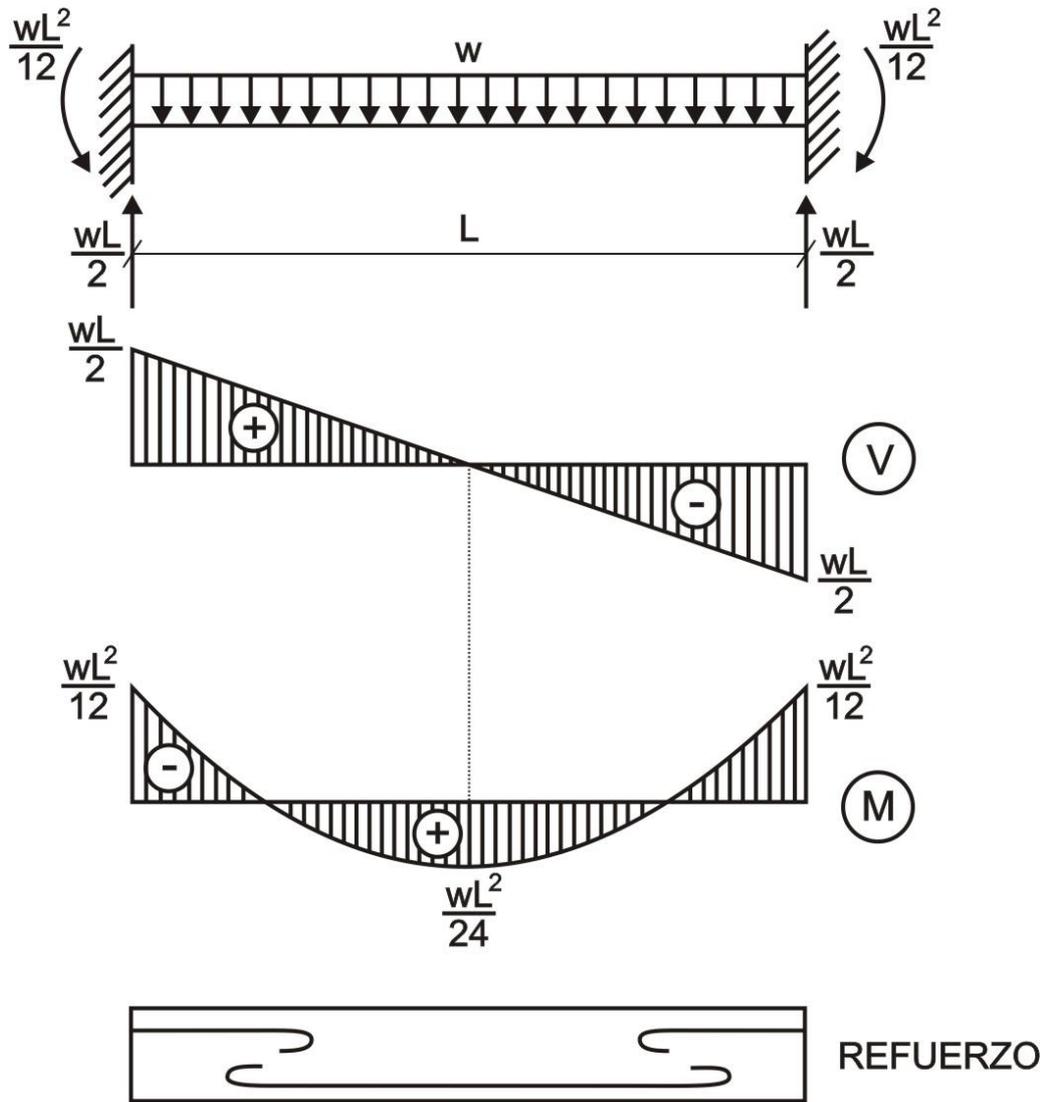


Fig. 5.75

PROBLEMA 5.24 Resolver la viga mostrada en la figura 5.76, si es de sección constante.

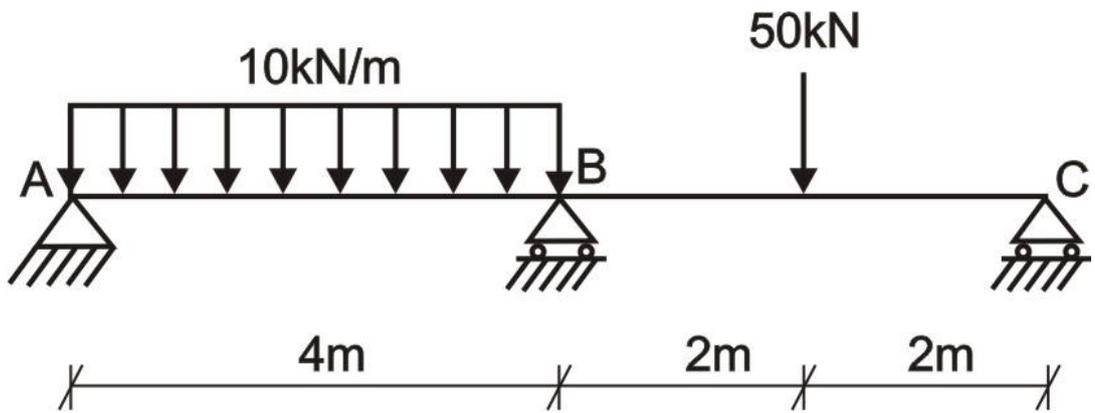


Fig. 5.76

Solución:

Determinamos el grado de indeterminación de la viga.

$$G.I. = 4 - 3 = 1$$

La viga es una vez hiperestática.

Primero, convertimos la viga hiperestática de la figura 5.76, en isostática, aplicando una vez más el principio de superposición de cargas. Para ello, eliminamos el apoyo central y lo reemplazamos por su reacción V_B , analizando cada viga conjugada en forma separada y sometida a las cargas M/EI de las vigas reales correspondientes, tal como se muestra en la figura 5.77

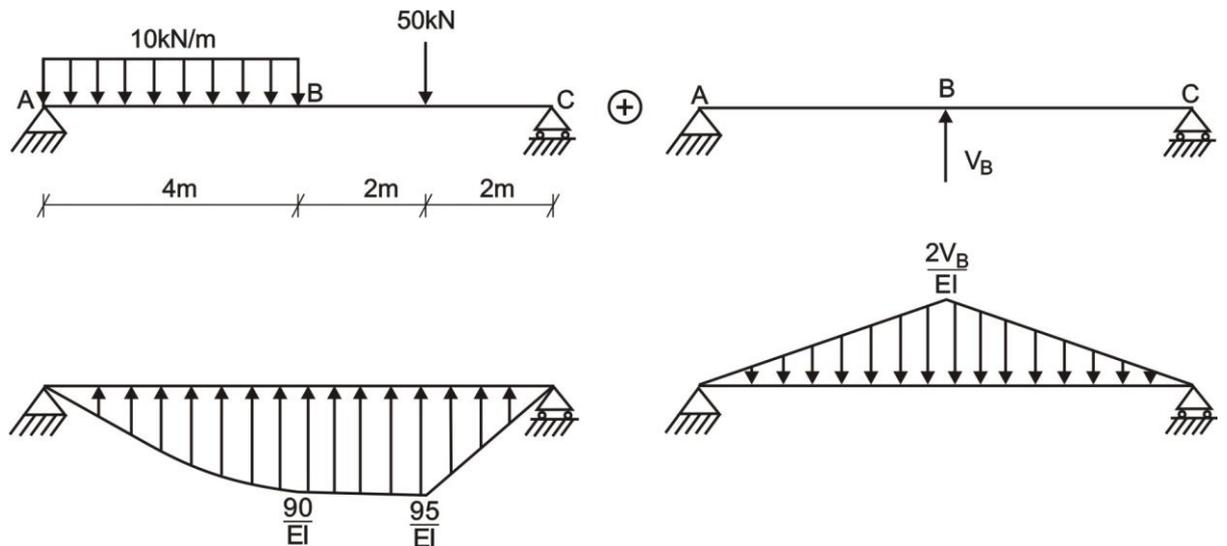


Fig. 5.77

Ahora, regresamos a la viga real de la figura 5.76 y lo convertimos en viga conjugada, pero sometida a las cargas de la figura 5.77, quedando como se muestra en la figura 5.78

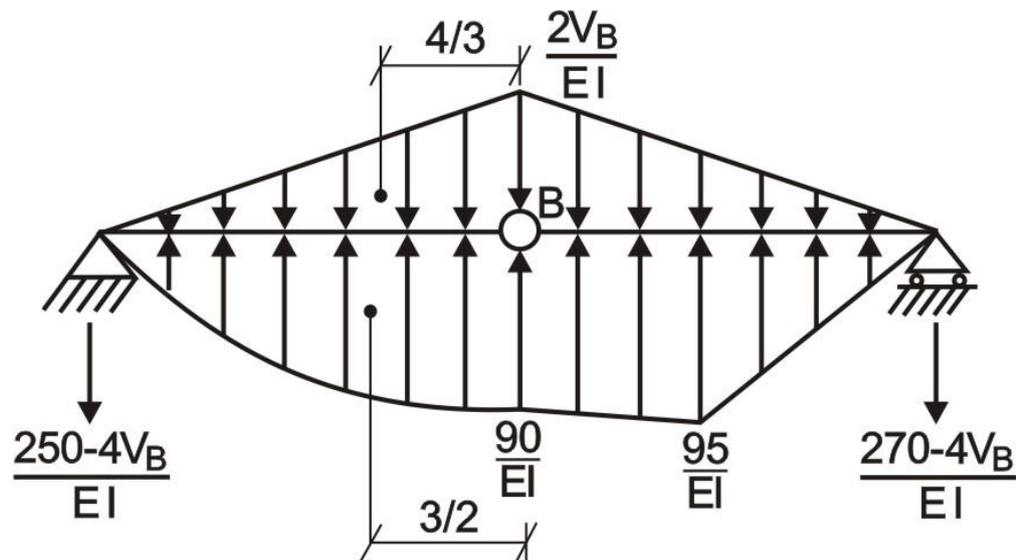


Fig. 5.78

Como el apoyo central es movable, entonces su deflexión será cero, quedando así:

$$y_B = \bar{M}_B = 0 \quad \Rightarrow \quad -\left(\frac{250 - 4V_B}{EI}\right)(4) + \frac{2}{3}\left(\frac{90}{EI}\right)(4)\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{2V_B}{EI}\right)(4)\left(\frac{4}{3}\right) = 0$$

De donde:

$$V_B = 60\text{kN}$$

En base al resultado obtenido, determinamos las otras reacciones y graficamos los diagramas de fuerza cortante, momento flector y refuerzo, los cuales se muestran en la figura 5.79

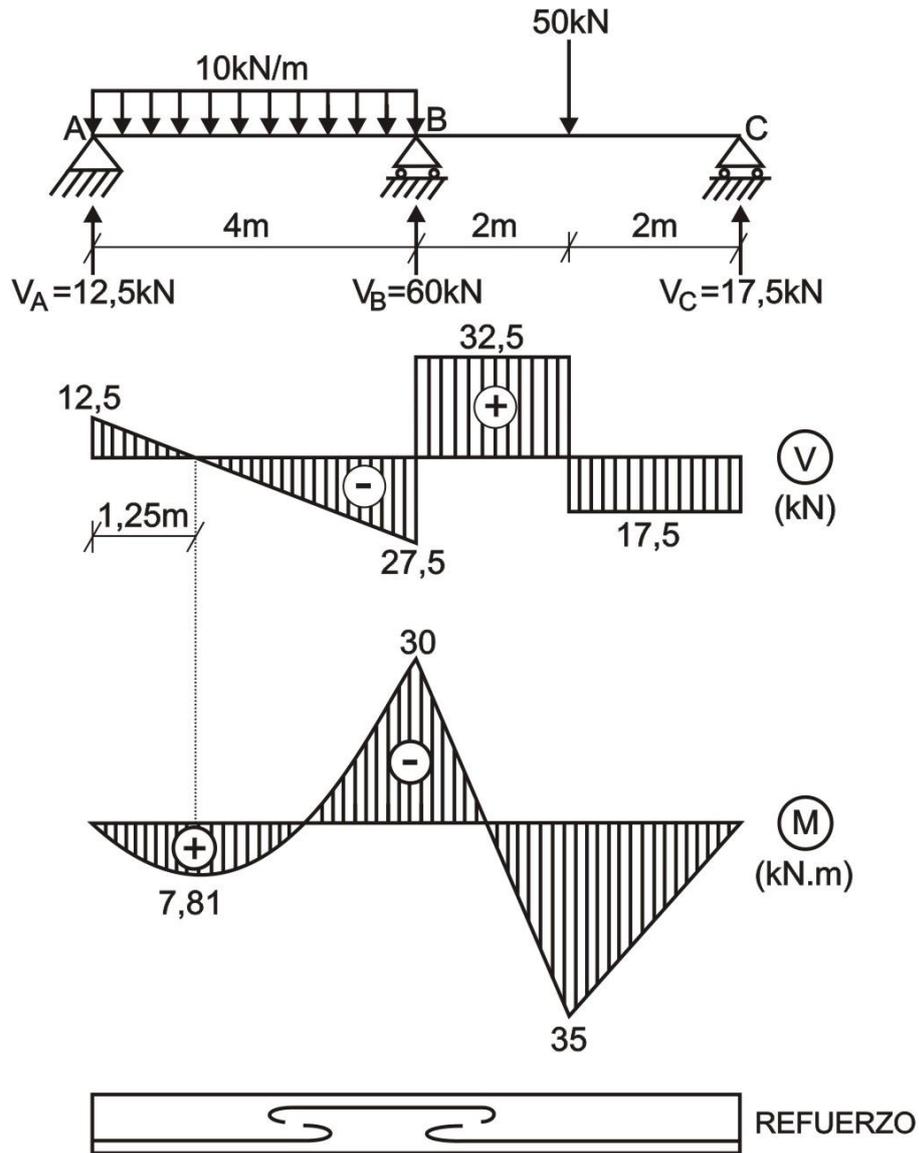


Fig. 5.79

PROBLEMA 5.25 Resolver la viga mostrada en la figura 5.80, si es de sección constante.

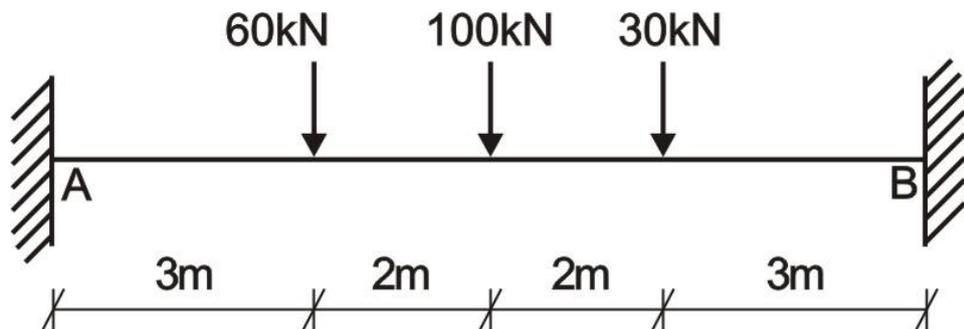


Fig. 5.80

Solución:

Determinamos el grado de indeterminación de la viga.

$$G.I. = 6 - 3 = 3$$

La viga es tres veces hiperestática.

Aplicamos el principio de superposición de cargas, convirtiendo la viga hiperestática de la figura 5.80, en dos vigas isostáticas, tal como se muestra en la figura 5.81; las cuales están sometidas a la

acción de las cargas correspondientes al diagrama M/EI de la viga real. Nótese que los momentos en A y B son diferentes, debido a que en este caso la viga de la figura 5.80, en cargas no es simétrica.

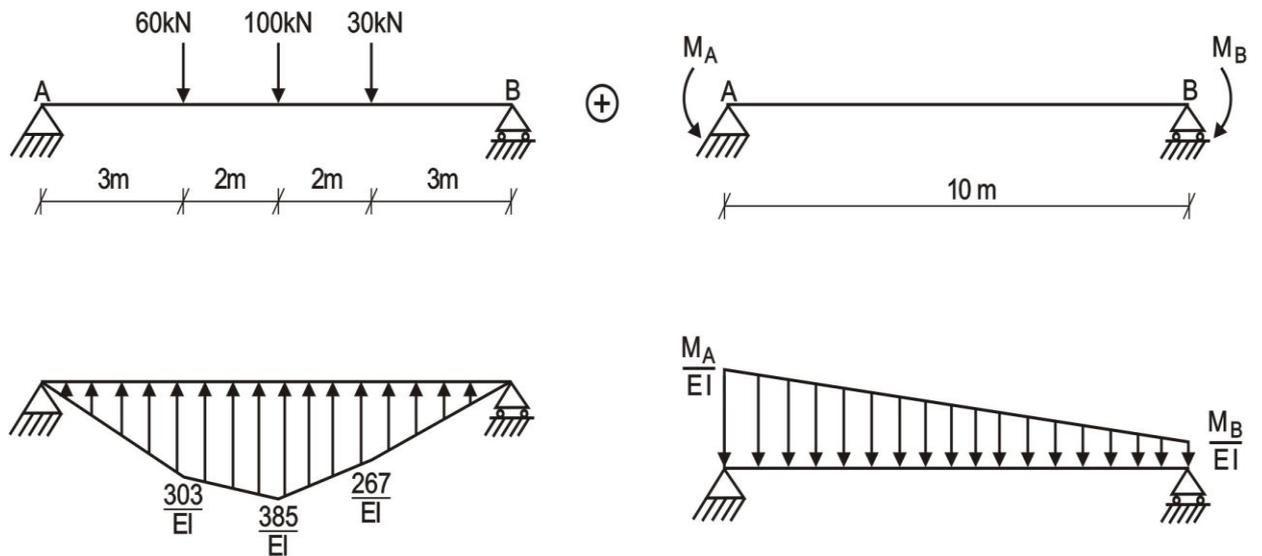


Fig. 5.81

Luego, regresamos a la viga real de la figura 5.80, convirtiéndolo en viga conjugada y sometida a la acción de las cargas M/EI de la figura 5.81, quedando tal como se muestra en la figura 5.82

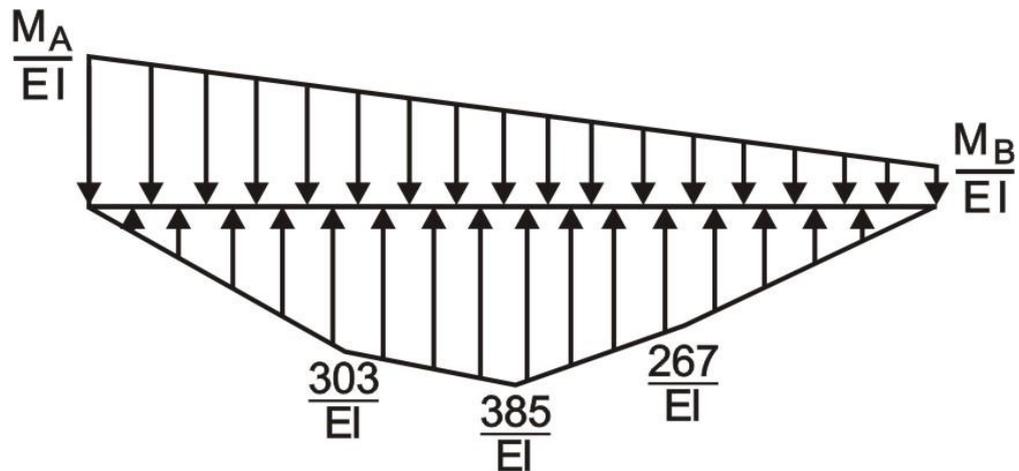


Fig. 5.82

Como el apoyo A de la viga real es empotramiento perfecto, se tendrá que su deflexión en dicho apoyo, debe ser igual a cero, esto es:

$$y_A = \bar{M}_A = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{303}{EI} \right) (3)(2) + \left(\frac{303}{EI} \right) (2)(4) + \frac{1}{2} \left(\frac{82}{EI} \right) (2) \left(\frac{13}{3} \right) + \left(\frac{267}{EI} \right) (2)(6) + \frac{1}{2} \left(\frac{118}{EI} \right) (2) \left(\frac{17}{3} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{267}{EI} \right) (3)(8) - \left(\frac{M_B}{EI} \right) (10)(5) - \frac{1}{2} \left(\frac{M_A - M_B}{EI} \right) (10) \left(\frac{10}{3} \right) = 0$$

De donde:

$$16,67M_A + 33,33M_B = 10765 \quad (a)$$

En el otro extremo, es decir en el apoyo B, se cumplirá lo mismo, es decir que su deflexión será igual a cero.

$$y_B = \bar{M}_B = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{303}{EI} \right) (3)(8) + \left(\frac{303}{EI} \right) (2)(6) + \frac{1}{2} \left(\frac{82}{EI} \right) (2) \left(\frac{17}{3} \right) + \left(\frac{267}{EI} \right) (2)(4) +$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\frac{118}{EI} \right) (2) \left(\frac{13}{3} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{267}{EI} \right) (3)(2) - \left(\frac{M_B}{EI} \right) (10)(5) - \frac{1}{2} \left(\frac{M_A - M_B}{EI} \right) (10) \left(\frac{20}{3} \right) = 0$$

De donde:

$$33,33M_A + 16,67M_B = 11185 \quad (b)$$

Resolvemos las ecuaciones (a) y (b), obteniendo:

$$M_A = 232,1 \text{ kN.m}$$

$$M_B = 206,9 \text{ kN.m}$$

En base a los resultados obtenidos, calculamos las otras reacciones y graficamos los diagramas de fuerza cortante, momento flector y refuerzo, tal como se muestra en la figura 5.83

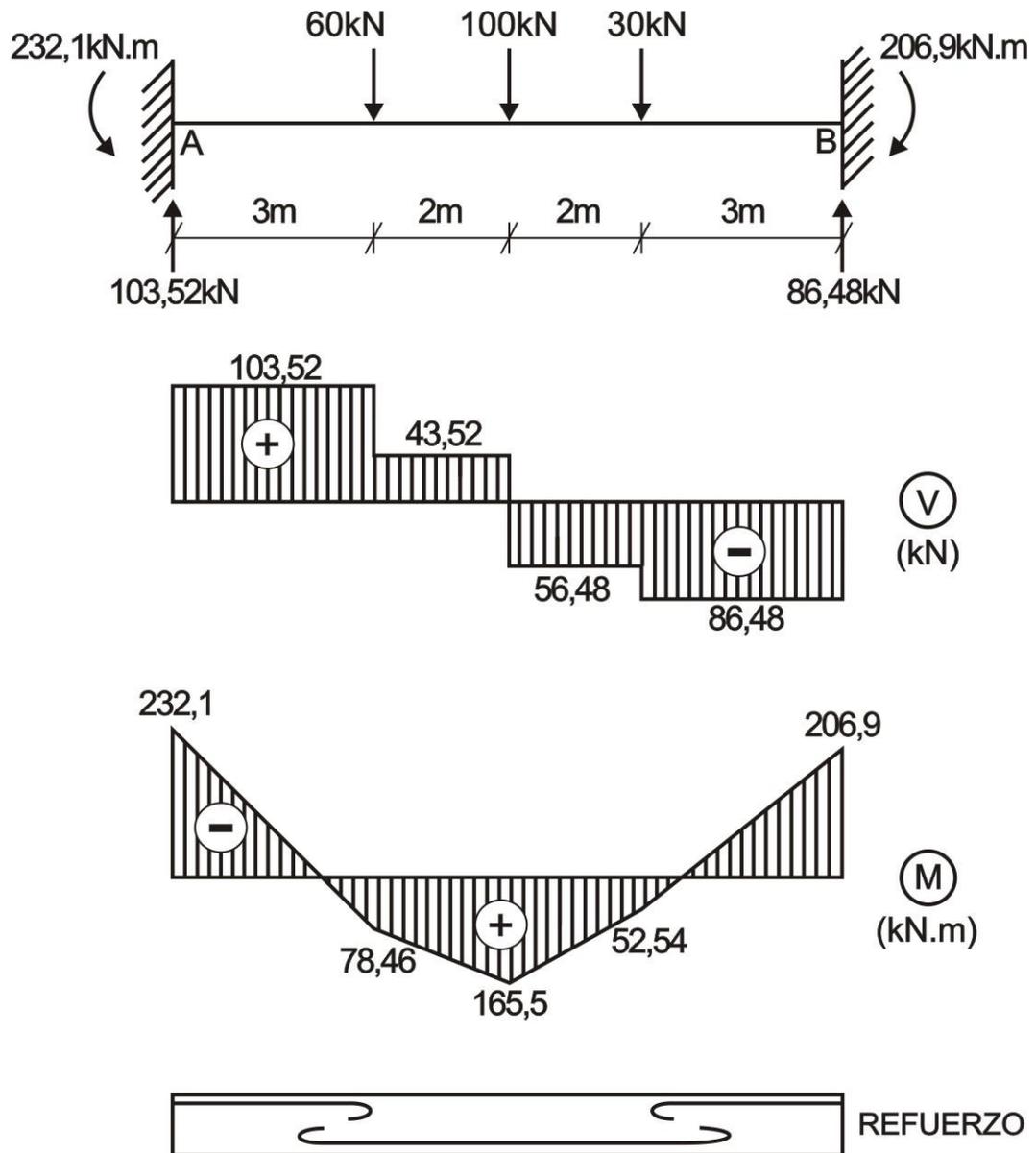


Fig. 5.83

CAPITULO 6

METODOS ENERGETICOS

6.1 ENERGIA POTENCIAL DE DEFORMACION

En forma general, el trabajo de las fuerzas externas es:

$$W = \sum \frac{P_n \delta_n}{2} \quad (6.1)$$

Donde:

P_n - fuerza generalizada

δ_n - desplazamiento generalizado

Recordamos, que la acción de un momento genera un desplazamiento angular (pendiente) y la acción de la carga puntual un desplazamiento lineal (deflexión o alargamiento).

La fórmula para determinar la energía potencial de deformación es:

$$U = \sum \int_s \frac{N^2 ds}{2EA} + \sum \int_s \frac{M^2 ds}{2EI} + \sum k \int_s \frac{V^2 ds}{2GA} + \sum \int_s \frac{T^2 ds}{2GI_p(t)} \quad (6.2)$$

Donde:

k - coeficiente de forma de la sección transversal (igual a 6/5 para sección rectangular, 10/9 para sección circular y 1 para sección I, en la que para calcular el área sólo se considerará el área del alma)

En la ecuación 6.2, la primera parte corresponde al efecto de tracción o compresión; la segunda, a flexión por momento flector; la tercera, a flexión por fuerza cortante y la cuarta a torsión.

Cuando se trata de flexión, el efecto de la fuerza cortante es pequeño en comparación con la ocasionada por el momento flector, es por ello que se puede despreciar su efecto.

6.2 METODO DEL TRABAJO VIRTUAL

Denominado también *Método de la integral de Mohr* o *Método de la carga unitaria ficticia*, el cual nos permite determinar los desplazamientos lineal y angular para vigas, pórticos, arcos y armaduras.

Para flexión de barras lineales o curvas de pequeña curvatura, la integral de Mohr tiene la forma de la ecuación 6.3, donde no se considera la influencia de las fuerzas de corte.

$$\delta = \sum \int_s \frac{MM_1 ds}{EI} \quad (6.3)$$

Donde:

δ - desplazamiento requerido (lineal o angular)

M - momento flector debido a la acción de las cargas reales

M_1 - momento flector, debido a la acción de la carga unitaria $P = 1$ o momento unitario $m = 1$, aplicados en el punto donde se desea calcular el desplazamiento lineal (carga unitaria en dicha dirección) o angular (momento unitario)

EI - rigidez de la barra

ds - elemento diferencial de la longitud de la barra

En caso, que se requiera considerar el efecto de la cortante, el desplazamiento se calculará por la fórmula 6.4

$$\delta = \sum \int_s \frac{MM_1 ds}{EI} + \sum k \int_s \frac{VV_1 ds}{GA} \quad (6.4)$$

Donde:

V_1 - cortante debido a la acción de $P = 1$ o $m = 1$

Cuando se trata de armaduras se aplicará la ecuación 6.5

$$\delta = \sum \frac{NN_1 L}{EA} \quad (6.5)$$

Donde:

N_1 - fuerza axial o normal, debido a la acción de $P = 1$ en el punto y dirección requerida

Para barras, cuyos tramos sólo están expuestos a torsión, se aplicará la ecuación 6.6

$$\delta = \sum \int_s \frac{TT_1 ds}{GI_{p(t)}} \quad (6.6)$$

Donde:

T_1 - momento torsor, debido a la acción de la carga o momento unitario ficticio

Para el caso de vigas y pórticos, la integral de Mohr se puede calcular en forma aproximada por el Método de Vereschaguin o de Simpson-Kornoujov.

METODO DE VERESCHAGUIN. Para multiplicar dos diagramas M_i y M_j , siendo M_i un diagrama no lineal o lineal y M_j lineal, se tendrá:

$$\delta = \int_L \frac{M_i M_j ds}{EI} = \frac{AREA_{M_i} \cdot y_{M_j}^{CG(M_i)}}{EI} = \frac{AREA_{M_j} \cdot y_{M_i}^{CG(M_j)}}{EI} \quad (6.7)$$

Donde:

$AREA_{M_i}$ - área del diagrama M_i

$AREA_{M_j}$ - área del diagrama M_j

$y_{M_j}^{CG(M_i)}$ - ordenada en el diagrama M_j , debajo del centro de gravedad del diagrama M_i

$y_{M_i}^{CG(M_j)}$ - ordenada en el diagrama M_i , debajo del centro de gravedad del diagrama M_j

Cuando se tiene varios tramos, se aplicará la sumatoria de cada uno de ellos.

Para aplicar el Método de Verschaguin será necesario tener en cuenta que:

1. Los diagramas de momento flector deben ser divididos en tramos, de tal manera, que por lo menos un diagrama es lineal y la rigidez constante.
2. La multiplicación de los diagramas será negativo, si ambos diagramas tienen signos opuestos o se encuentran en diferentes lados, respecto al eje de cálculo.

Las áreas y ubicación del centro de gravedad de figuras geométricas conocidas, se muestran en la tabla 5.1

METODO DE SIMPSON-KORNOUJOV. Se aplica para multiplicar dos diagramas M_i y M_j , siendo ambos curvos o uno curvo y el otro lineal variable, tal como se muestra en la figura 6.1

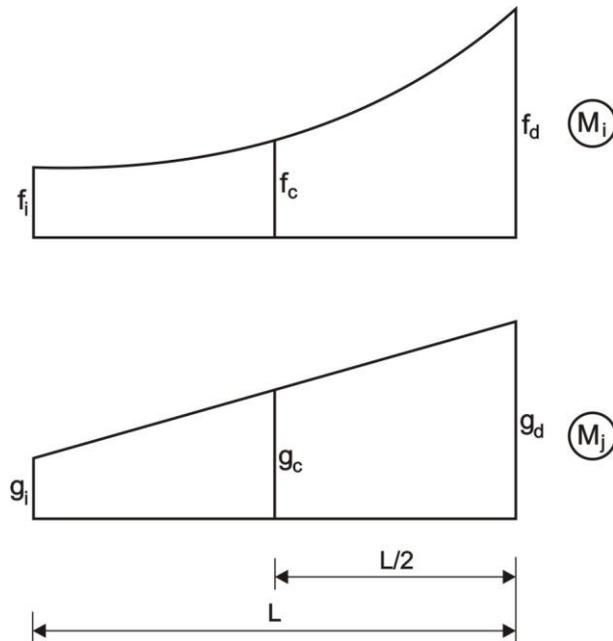


Fig. 6.1

De esta manera, la ecuación para determinar la deflexión o pendiente en un punto determinado, se calculará por medio de la fórmula 6.8

$$\delta = \int_L \frac{M_i M_j ds}{EI} = \frac{L}{6EI} (f_i g_i + 4f_c g_c + f_d g_d) \quad (6.8)$$

Donde:

f_i y g_i - ordenadas en el lado izquierdo de los diagramas M_i y M_j

f_c y g_c - ordenadas en el centro de los diagramas M_i y M_j

f_d y g_d - ordenadas en el lado derecho de los diagramas M_i y M_j

En la multiplicación de diagramas, se consideran los signos en las ordenadas de ambos diagramas, siendo positivo (+) si están al mismo lado y negativo (-) si están en sentidos opuestos, respecto al eje de la barra.

En caso se tengan varios tramos, se aplicará la sumatoria de dichos tramos, teniendo en cuenta que método será el más sencillo y rápido de aplicación.

PROBLEMA 6.1 Determinar la deflexión vertical en el extremo libre A de la viga en voladizo mostrada en la figura 6.2, si $E = 20G$

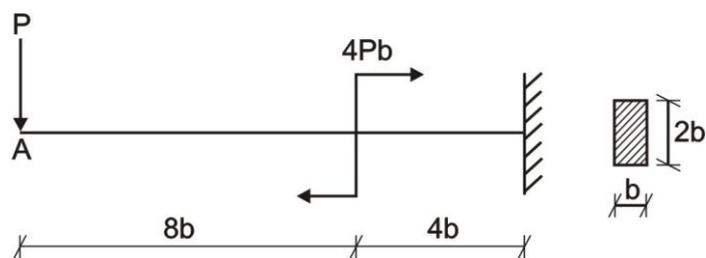


Fig. 6.2

Solución:

Como nos dan la relación entre los módulos E y G, entonces debemos de analizar el efecto de flexión por fuerza cortante y momento flector, graficando los diagramas de fuerza cortante y momento flector para la viga sometida a la acción de las cargas reales y la otra viga sometida a la acción de la carga unitaria aplicada en el punto A de la viga y en sentido vertical, tal como se muestra en la figura 6.3

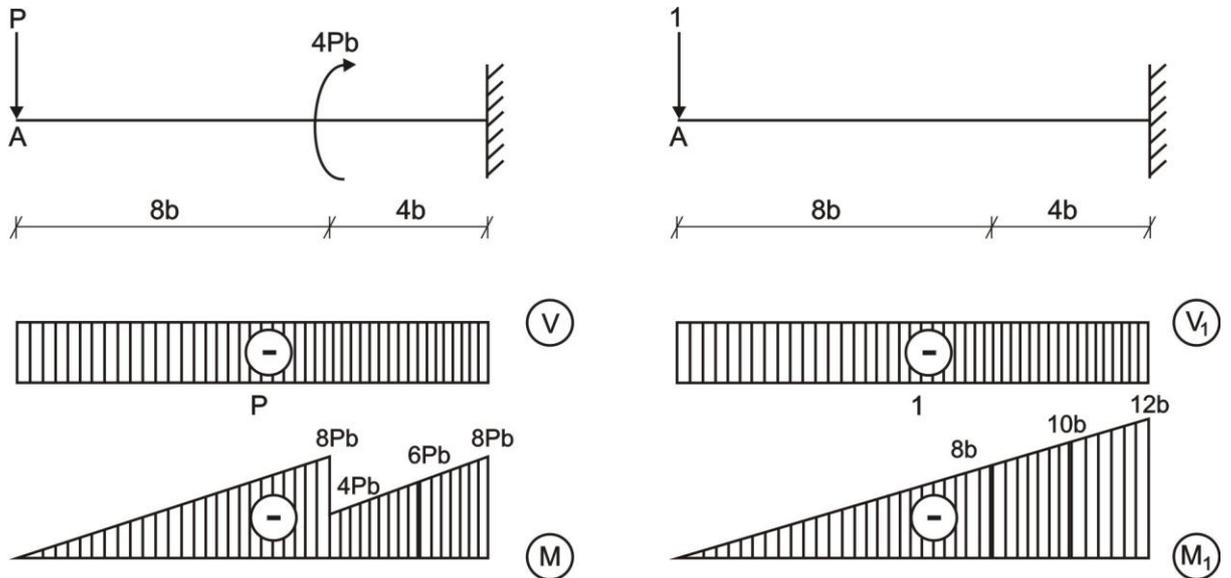


Fig. 6.3

Ahora, calculamos la deflexión vertical en A, a través de la fórmula 6.4 y aplicando los métodos de Vereschaguin y Simpson-Kornoujov.

$$y_A = \delta_V^A = k \sum \int_s \frac{VV_1 ds}{GA} + \sum \int_s \frac{MM_1}{EI} ds = \frac{6}{5} \left[\frac{1}{GA} \cdot 12b \cdot P \cdot 1 \right] + \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 8b \cdot 8Pb \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 8b \right) + \frac{4b}{6EI} [4Pb \cdot 8b + 4 \cdot 6Pb \cdot 10b + 8Pb \cdot 12b] = \frac{72Pb}{5GA} + \frac{2496Pb^3}{6EI}$$

$$y_A = \frac{72Pb}{5 \cdot \frac{E}{20} \cdot b \cdot 2b} + \frac{2496Pb^3}{6E \cdot \frac{b \cdot (2b)^3}{12}} = \frac{144P}{bE} + \frac{624P}{bE} = \frac{768P}{bE} \downarrow$$

Como el resultado es positivo, indica que la orientación de la deflexión vertical es la misma que la carga unitaria de la figura 6.3, es decir, hacia abajo.

PROBLEMA 6.2 Determinar la deflexión y pendiente en el extremo libre de la viga en voladizo mostrada en la figura 6.4, si es de sección constante.

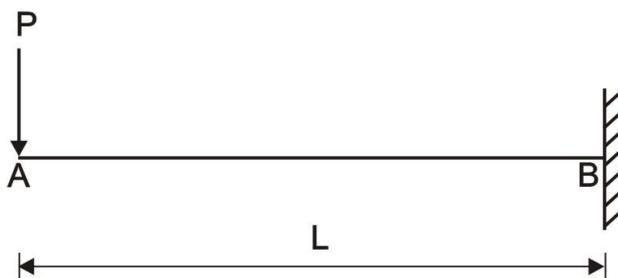


Fig. 6.4

Solución:

Analizamos la deflexión en A, graficando ambos diagramas, primero el diagrama M , cuando está sometida a la carga real (figura 6.3,a) y segundo, el diagrama M_1 , el cual se obtiene cuando la viga está sometida a la acción de una carga unitaria en el sentido y dirección deseado, tal como se muestra en la figura 6.5,b

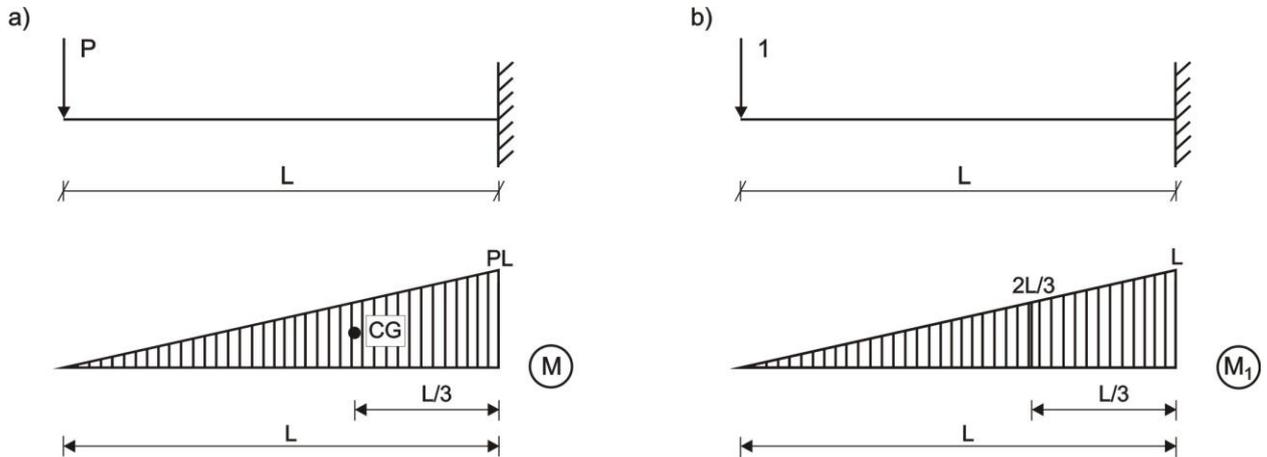


Fig. 6.5

A través de los diagramas y aplicando el método de Vereschaguin, determinamos la deflexión vertical en el punto A.

$$y_A = \delta_V^A = \int_L \frac{MM_1 dx}{EI} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot PL \cdot L \cdot \frac{2L}{3} = \frac{PL^3}{3EI} \downarrow$$

El signo (+) indica que la deflexión va en la misma dirección que la carga unitaria, es decir, hacia abajo. Por ello, la dirección de la flecha (\downarrow) orienta la dirección de la deflexión.

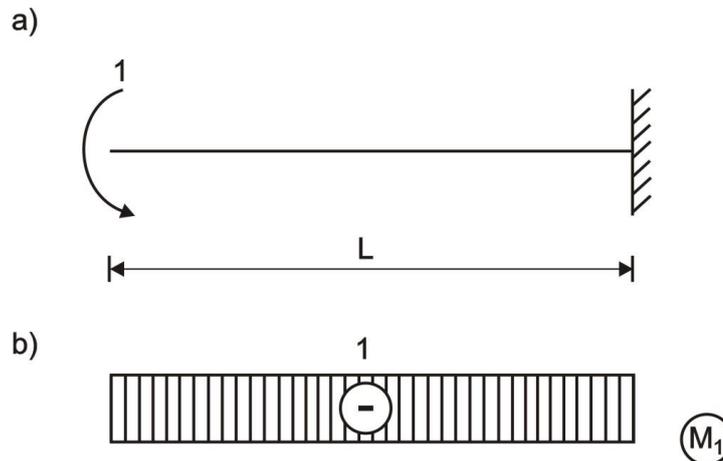


Fig. 6.6

Luego, analizamos la pendiente en dicho punto, aplicando un momento unitario, tal como se muestra en la figura 6.6,a y el diagrama debido a la acción de dicho momento, que se muestra en la figura 6.6,b

De esta manera, determinamos la pendiente en el extremo libre de la viga en voladizo, aplicando una vez más el método de Vereschaguin.

$$\theta_A = \int_L \frac{MM_1 dx}{EI} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot PL \cdot L \cdot 1 = \frac{PL^2}{2EI}$$

Una vez más, el signo (+) indica la orientación de la pendiente es correcta, es decir en sentido antihorario.

PROBLEMA 6.3 Determinar la deflexión en el centro de la viga y la pendiente en el apoyo derecho de la viga mostrada en la figura 6.7, si es de sección constante.

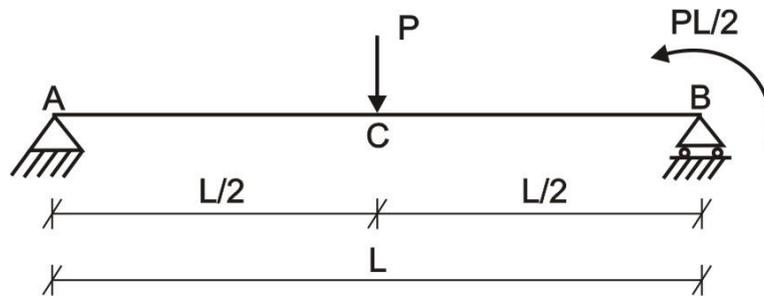


Fig. 6.7

Solución:

Para determinar la deflexión en el centro de la viga, aplicamos una carga unitaria en dicho punto en forma vertical y multiplicamos el diagrama M (debido a cargas reales) por el diagrama M_1 (debido a la carga unitaria), cuyos esquemas de cargas y diagramas, se muestran en las figuras 6.8,a y 6.8,b respectivamente.

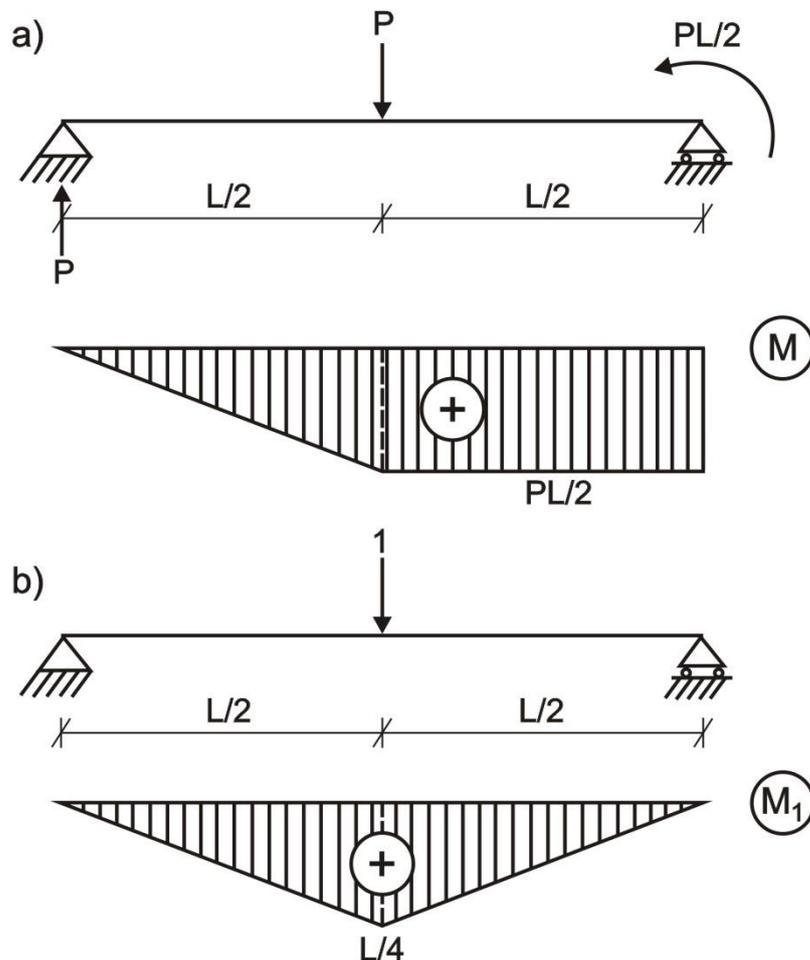


Fig. 6.8

De esta manera, determinamos la deflexión vertical del punto C, a través del método de Vereschaguin.

$$y_C = \delta_V^C = \int_L \frac{MM_1 dx}{EI} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{PL}{2} \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{2}{3} \left(\frac{L}{4} \right) + \frac{PL}{2} \cdot \frac{L}{2} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{L}{4} \right) \right] = \frac{5PL^3}{96EI} \downarrow$$

Posteriormente, analizamos la pendiente en el apoyo derecho, es decir en el punto B. Para ello, aplicamos un momento unitario y graficamos el diagrama M_1 , tal como se muestra en la figura 6.9

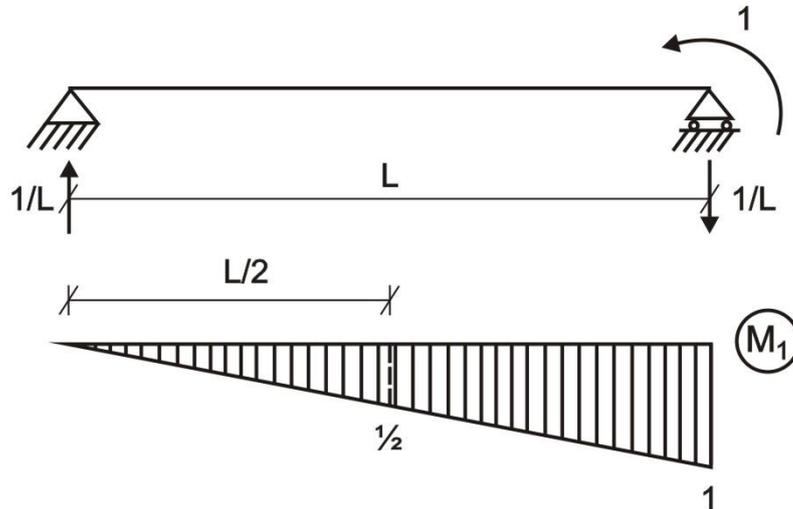


Fig. 6.9

Para determinar la pendiente en el punto B, aplicamos el método de Vereschaguin.

$$\theta_B = \int_L \frac{MM_1 dx}{EI} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{PL}{2} \cdot \frac{L}{2} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) \frac{L}{2} \cdot \frac{PL}{2} \right] = \frac{11PL^2}{48EI}$$

El signo (+) indica que la orientación de la pendiente es en el mismo sentido que el momento unitario, es decir en sentido antihorario.

PROBLEMA 6.4 Determinar la deflexión en el centro de la viga mostrada en la figura 6.10

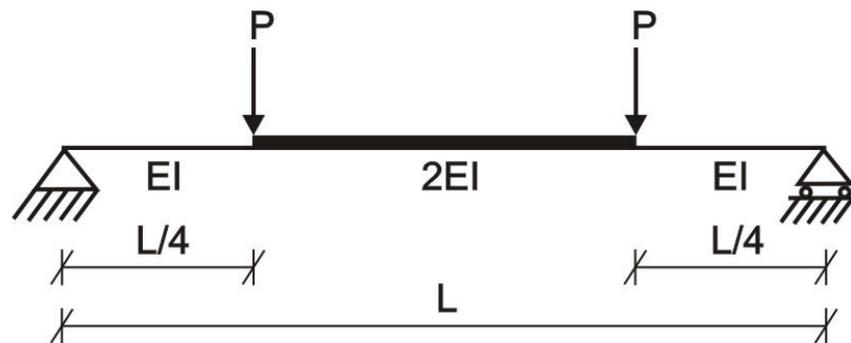


Fig. 6.10

Solución:

Primero, graficamos el diagrama M , debido a la acción de las cargas P, tal como se muestra en la figura 6.11

Luego, graficamos el diagrama M_1 , debido a la acción de la carga unitaria, aplicada en el centro de la viga, tal como se muestra en la figura 6.12

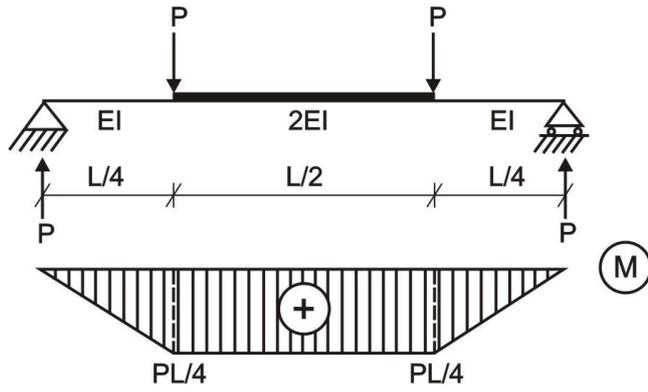


Fig. 6.11

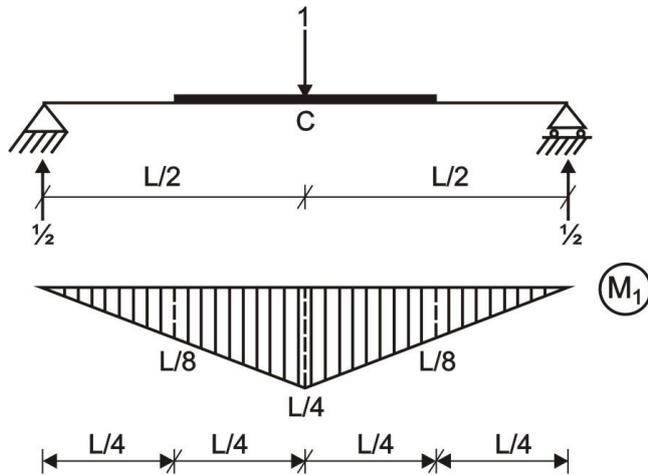


Fig. 6.12

Ahora, determinamos la deflexión vertical en el punto C de la viga, considerando, para ello, el cambio de rigidez que existe en la parte central de la misma, aplicando la simetría y el método de Vereschaguin.

$$y_C = \delta_V^C = \int_L \frac{MM_1 dx}{EI} = 2 \left[\frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{PL}{4} \cdot \frac{L}{4} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{L}{8} \right) + \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{L}{8} + \frac{L}{4} \right) \frac{L}{4} \cdot \frac{PL}{4} \right] = \frac{13PL^3}{768EI} \downarrow$$

PROBLEMA 6.5 Determinar la deflexión vertical y la pendiente en el punto C de los pórticos mostrados en las figuras 6.13,a y 6.13,b

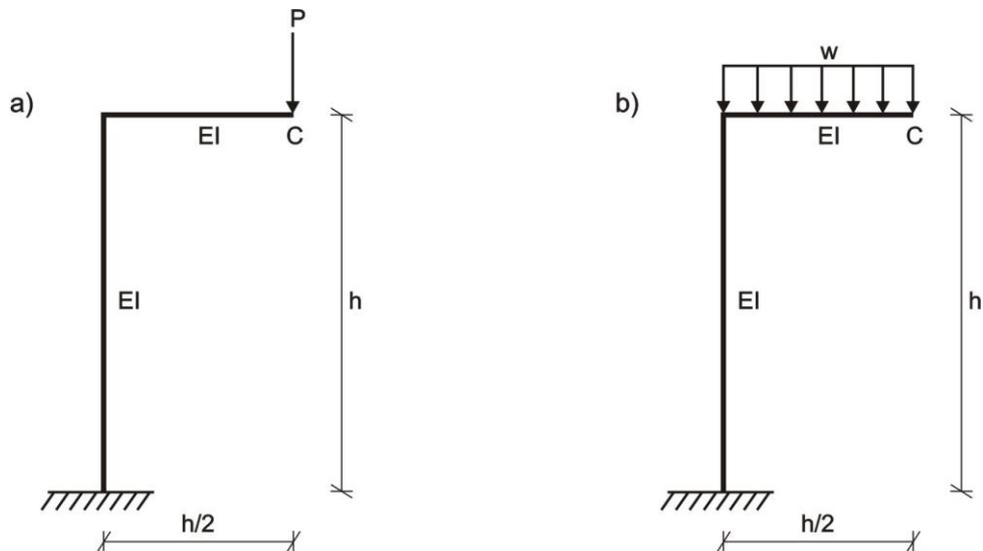


Fig. 6.13

Solución:

CASO a):

Primero, analizamos la deflexión vertical en el punto C, graficando los diagramas M y M_1 , debido a la acción de la carga real y carga unitaria en el sentido requerido, tal como se muestra en las figuras 6.14 y 6.15

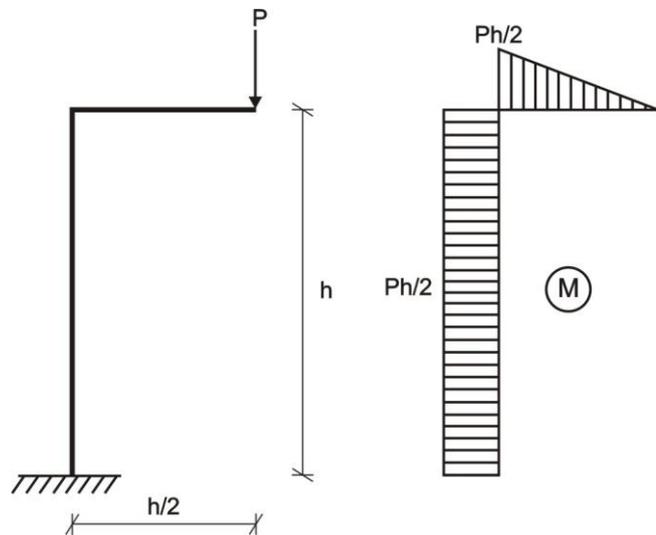


Fig. 6.14

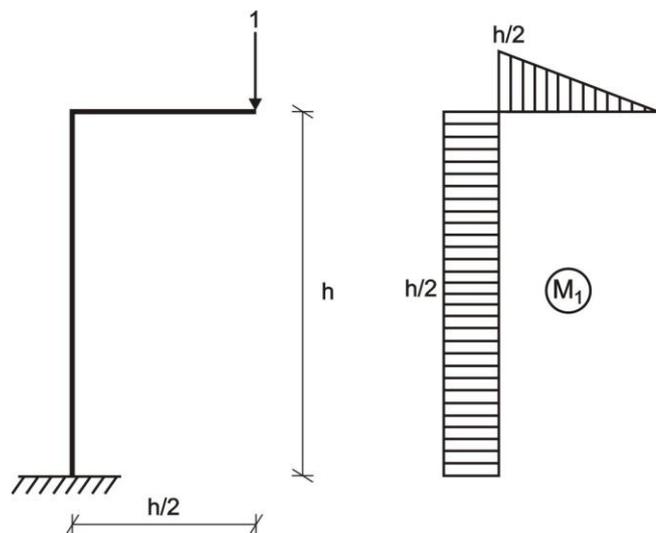


Fig. 6.15

Ahora, determinamos la deflexión vertical en el punto C.

$$y_C = \delta_v^C = \int_L \frac{MM_1 dx}{EI} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{Ph}{2} \cdot \frac{h}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{h}{2} \right) + \frac{1}{EI} \cdot \frac{Ph}{2} \cdot h \cdot \frac{h}{2} = \frac{7Ph^3}{24EI} \downarrow$$

Luego, analizamos la pendiente en el mismo punto C, aplicando un momento unitario en el mencionado punto, tal como se muestra en la figura 6.16

Determinamos la pendiente en el punto C.

$$\theta_C = \int_L \frac{MM_1 dx}{EI} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{Ph}{2} \cdot \frac{h}{2} \cdot 1 + \frac{1}{EI} \cdot \frac{Ph}{2} \cdot h \cdot 1 = \frac{5Ph^2}{8EI}$$

El signo (+), indica que el sentido de la pendiente es el mismo que el momento unitario, es decir en sentido horario.

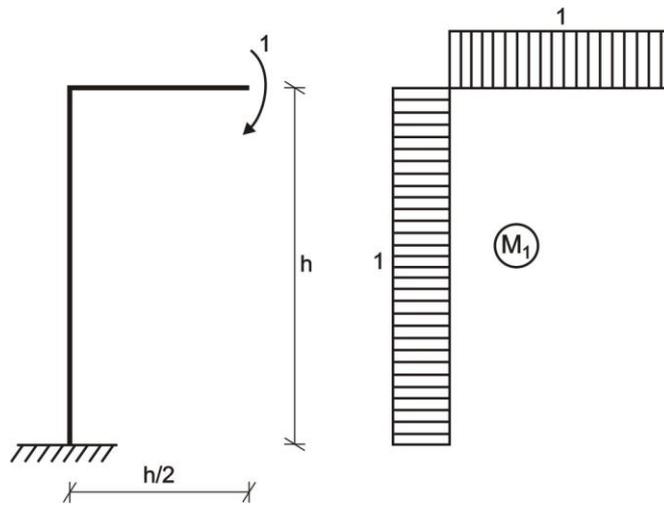


Fig. 6.16

CASO b):

Análogamente, calculamos la deflexión vertical en el punto C, graficando los diagramas M y M_1 , debido a la acción de la carga real y la carga unitaria en el sentido requerido, tal como se muestra en las figuras 6.17 y 6.18

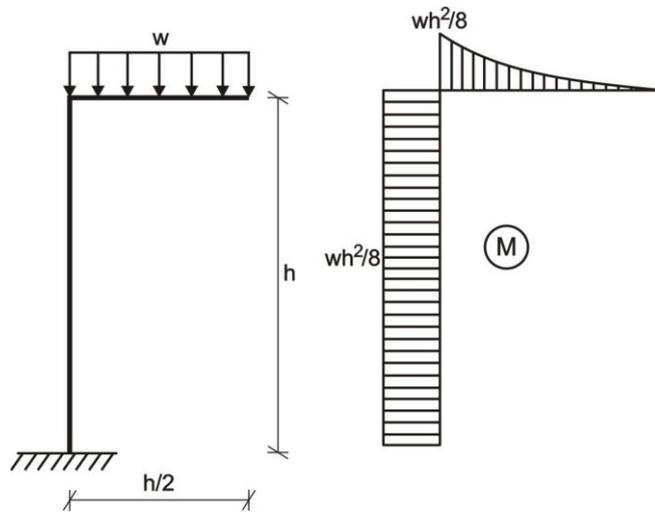


Fig. 6.17

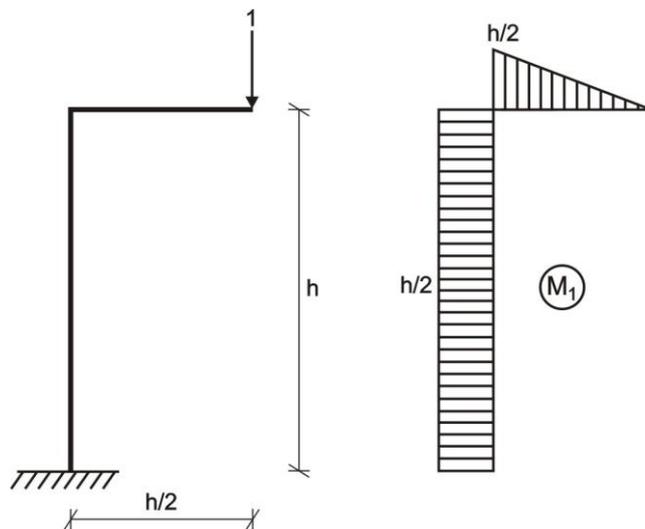


Fig. 6.18

Determinamos la deflexión vertical en C.

$$y_C = \delta_v^C = \int_L \frac{MM_1 dx}{EI} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{wh^2}{8} \cdot \frac{h}{2} \cdot \left(\frac{3h}{4} \cdot \frac{h}{2} \right) + \frac{1}{EI} \cdot \frac{wh^2}{8} \cdot h \cdot \frac{h}{2} = \frac{9wh^4}{128EI} \downarrow$$

Luego, determinamos la pendiente en el punto C, aplicando un momento unitario en dicho punto y graficando el diagrama M_1 , tal como se muestra en la figura 6.19

$$\theta_C = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{wh^2}{8} \cdot \frac{h}{2} \cdot 1 + \frac{1}{EI} \cdot \frac{wh^2}{8} \cdot h \cdot 1 = \frac{7wh^3}{48EI}$$

Como el signo es (+), indica que la orientación de la pendiente es la misma que el momento unitario, es decir en el sentido horario.

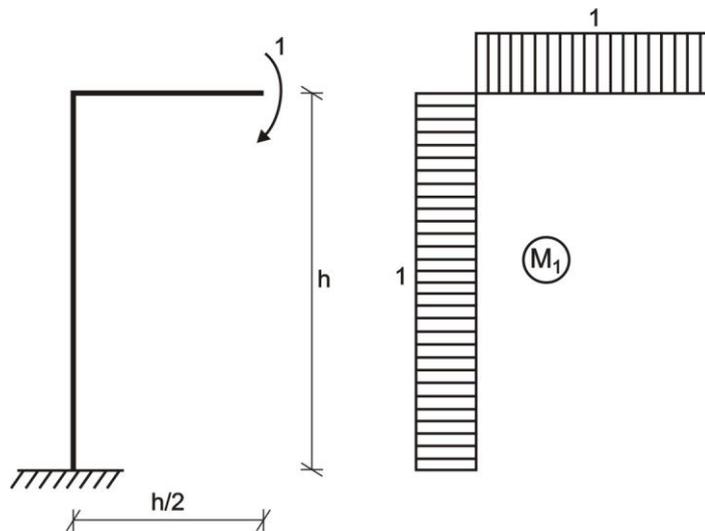


Fig. 6.19

PROBLEMA 6.6 Determinar la distancia que se acercarán los puntos A y B, debido a la acción de las cargas P, tal como se muestra en la figura 6.20. Considerar que la rigidez es constante.

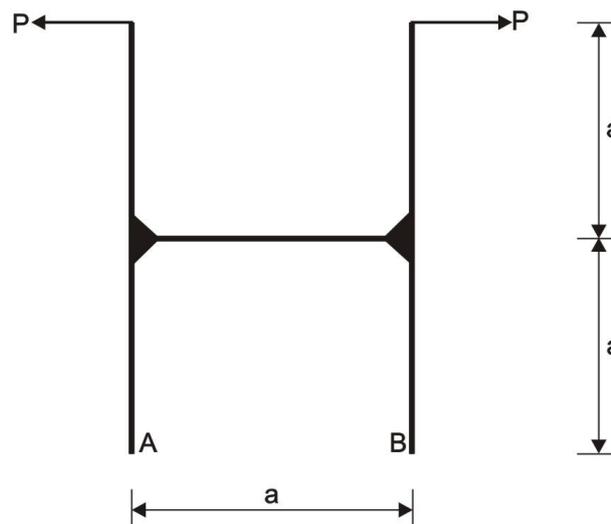


Fig. 6.20

Solución:

Graficamos el diagrama M , debido a la acción de las cargas P y el diagrama M_1 , debido a la acción de las cargas unitarias, aplicadas en los puntos A y B, en el sentido del encuentro, tal como se muestra en la figura 6.21

Tal como se puede apreciar, solo se podrán multiplicar ambos diagramas M y M_1 en la barra horizontal, ya que en ambos casos existen diagramas en dicha barra. Las barras verticales no se multiplicarán, debido a la inexistencia de diagramas en las mismas zonas. Por ejemplo, el diagrama de la carga real, tiene diagrama en la parte superior, más no en la parte inferior y en el otro caso sucede lo opuesto, siendo su multiplicación igual a cero en las barras verticales.

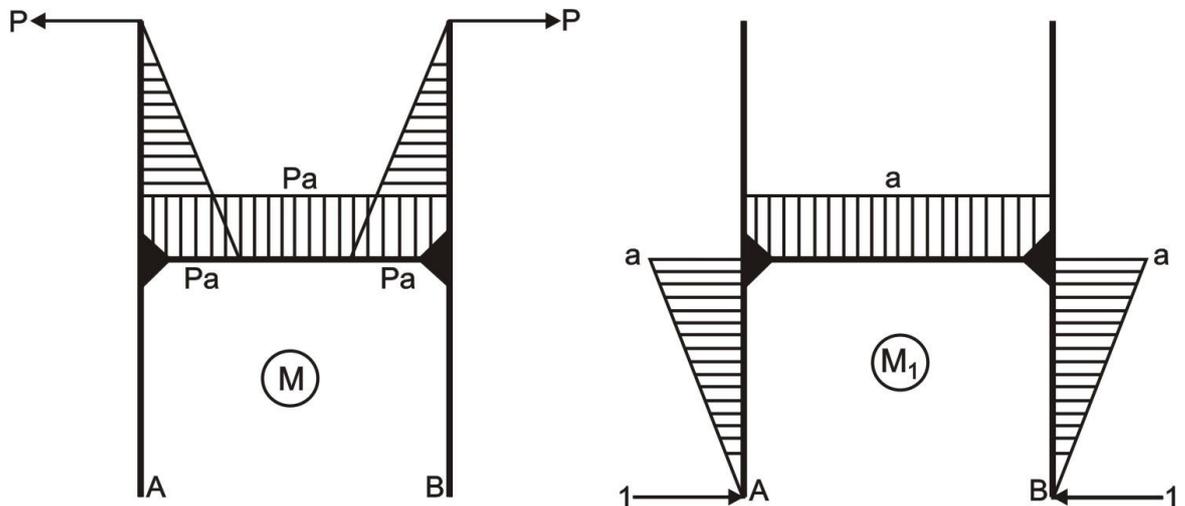


Fig. 6.21

Determinamos la distancia que se acercarán los puntos A y B.

$$\delta_{A-B} = \int_L \frac{MM_1 dx}{EI} = \frac{1}{EI} \cdot Pa \cdot a \cdot a = \frac{Pa^3}{EI}$$

PROBLEMA 6.7 Determinar el desplazamiento horizontal en el punto A del pórtico mostrado en la figura 6.22, si $E = 29 \cdot 10^6 \text{ lb/pulg}^2$ e $I = 3000 \text{ pulg}^4$ para todo el pórtico.

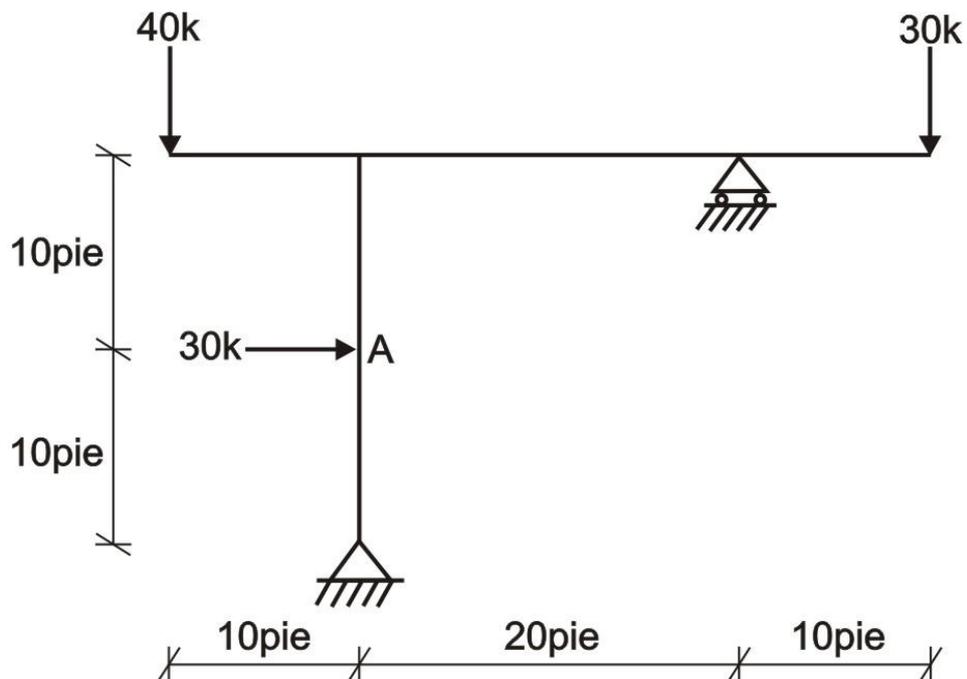


Fig. 6.22

Solución:

Graficamos los diagramas M y M_1 , debido a la acción de las cargas reales y la carga unitaria en el punto A y en la dirección requerida, tal como se muestra en la figura 6.23

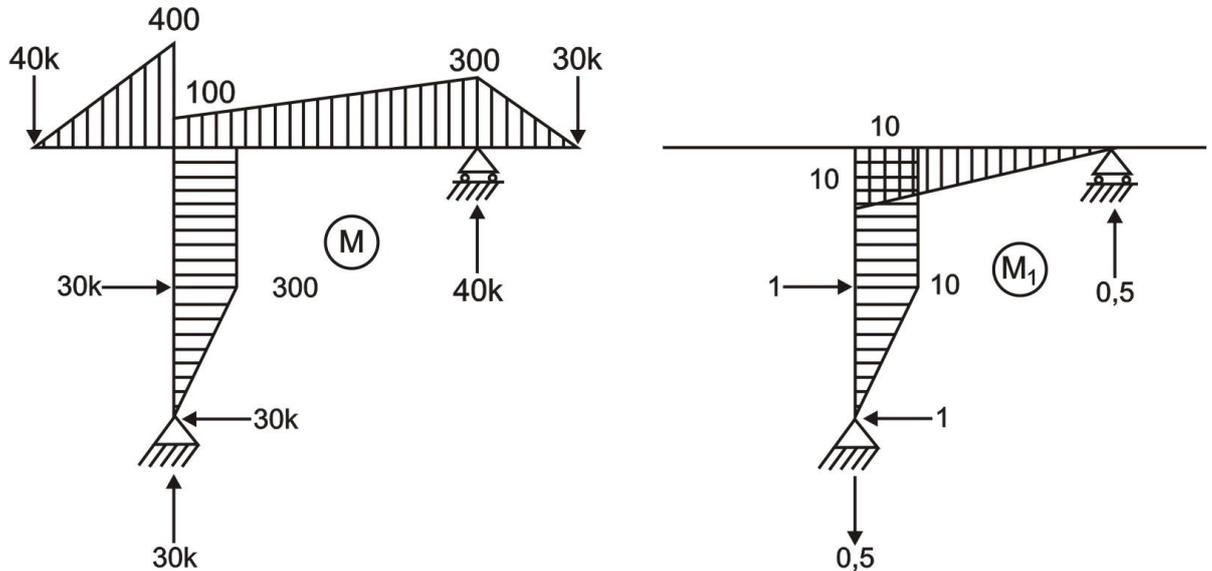


Fig. 6.23

Calculamos el valor de la rigidez de la estructura.

$$EI = 29 \cdot 10^6 \cdot 3000 \text{ lb} \cdot \text{pie}^2 = 0,604 \cdot 10^6 \text{ k} \cdot \text{pie}^2$$

Ahora, determinamos el desplazamiento horizontal del punto A del pórtico.

$$\delta_H^A = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 300 \cdot \frac{2}{3} \cdot 10 + \frac{1}{EI} \cdot 300 \cdot 10 \cdot 10 - \frac{20}{6EI} [100 \cdot 10 + 4 \cdot 200 \cdot 5 + 0] = \frac{23333,33}{EI} = \frac{23333,33}{0,604 \cdot 10^6}$$

$$\delta_H^A = 0,0386 \text{ pie} = 0,463 \text{ plg} \rightarrow$$

PROBLEMA 6.8 Determinar la deflexión vertical en el punto B y la pendiente en C del siguiente pórtico, si $E = 23000 \text{ MPa}$, $b = 30 \text{ cm}$, $h = 50 \text{ cm}$ para toda la estructura.

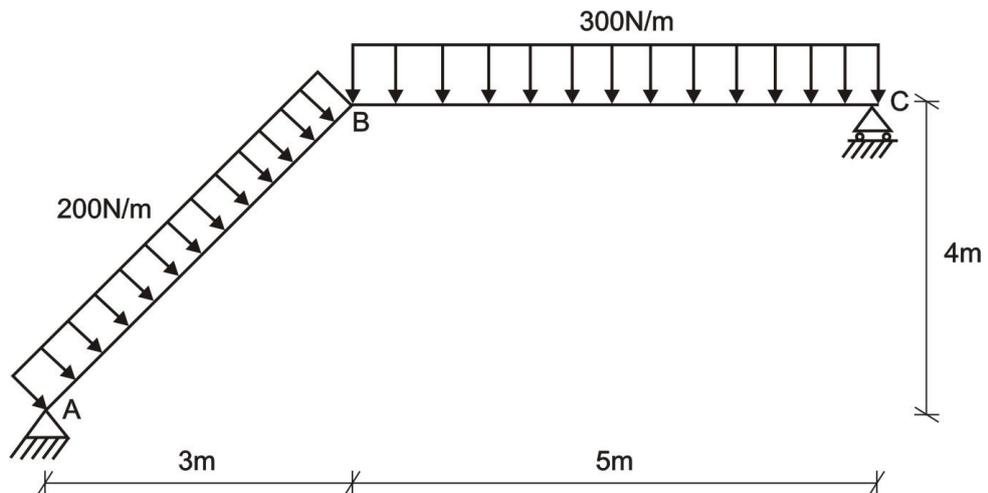


Fig. 6.24

Solución:

Determinamos las reacciones en los apoyos, por medio de las ecuaciones simples de la estática, cuyos resultados se muestran en la figura 6.25

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0 & \Rightarrow 200 \cdot 5 \cdot 2,5 + 300 \cdot 5 \cdot 5,5 - V_C \cdot 8 = 0 \\ & V_C = 1343,75 \text{ N } \uparrow \\ \sum F_y = 0 & \Rightarrow V_A + 1343,75 - 300 \cdot 5 - 200 \cdot 5 \cdot \text{sen} 37^\circ = 0 \\ & V_A = 756,25 \text{ N } \uparrow \\ \sum F_x = 0 & \Rightarrow -H_A + 200 \cdot 5 \cdot \text{cos} 37^\circ = 0 \\ & H_A = 800 \text{ N } \leftarrow \end{aligned}$$

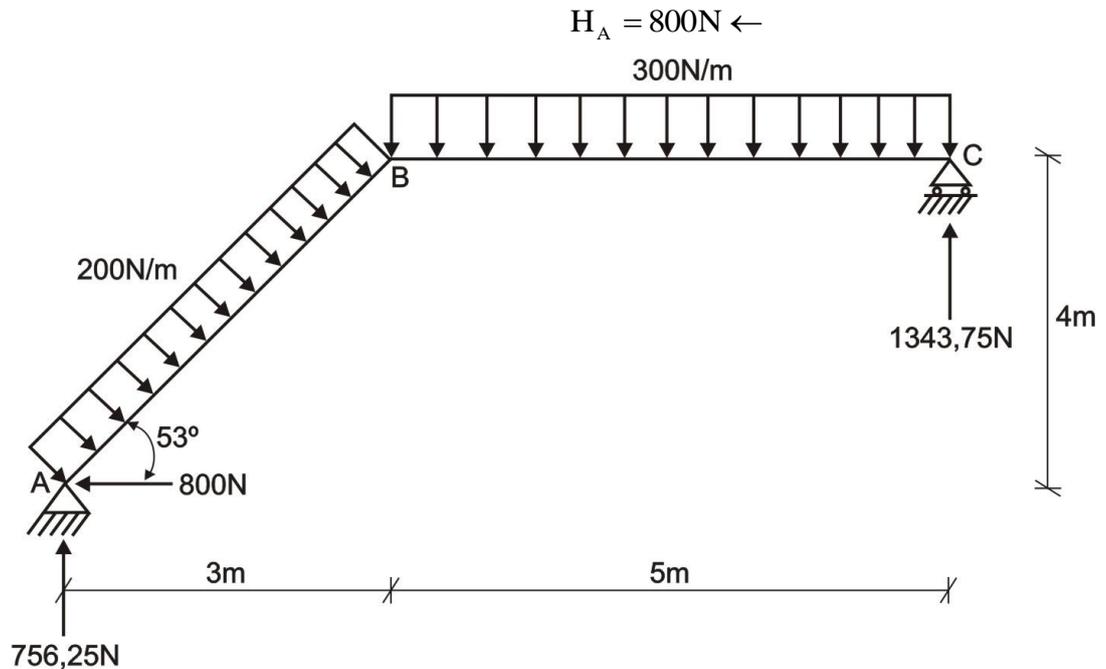


Fig. 6.25

Ahora, graficamos el diagrama de momento flector del pórtico sometido a la acción de las cargas reales, el cual se muestra en la figura 6.26

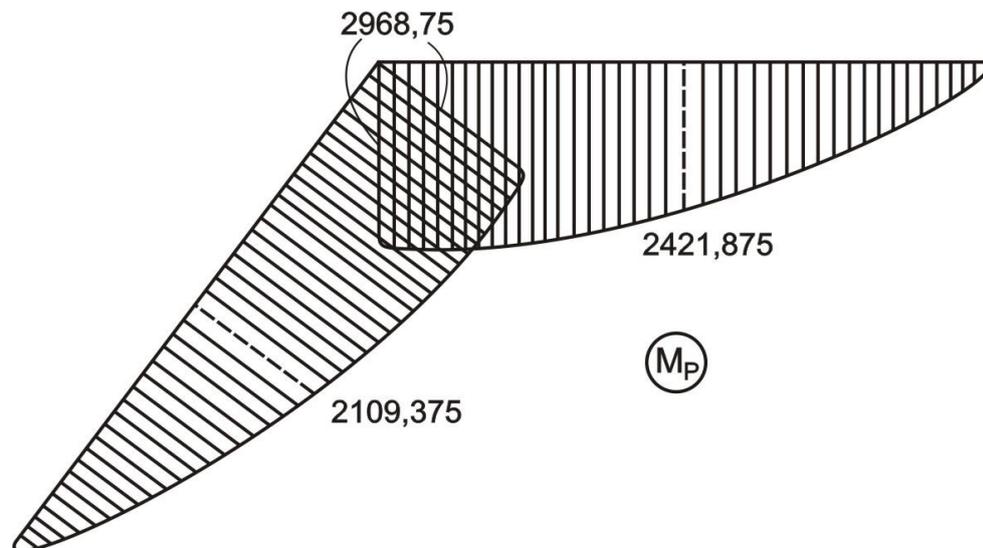


Fig. 6.26

Luego, calculamos la deflexión vertical en B y la pendiente en C, en forma separada, aplicando la carga vertical y momento unitario y graficando sus diagramas correspondientes, los cuales se muestran en las figuras 6.27 y 6.28

DEFLEXION VERTICAL EN "B":

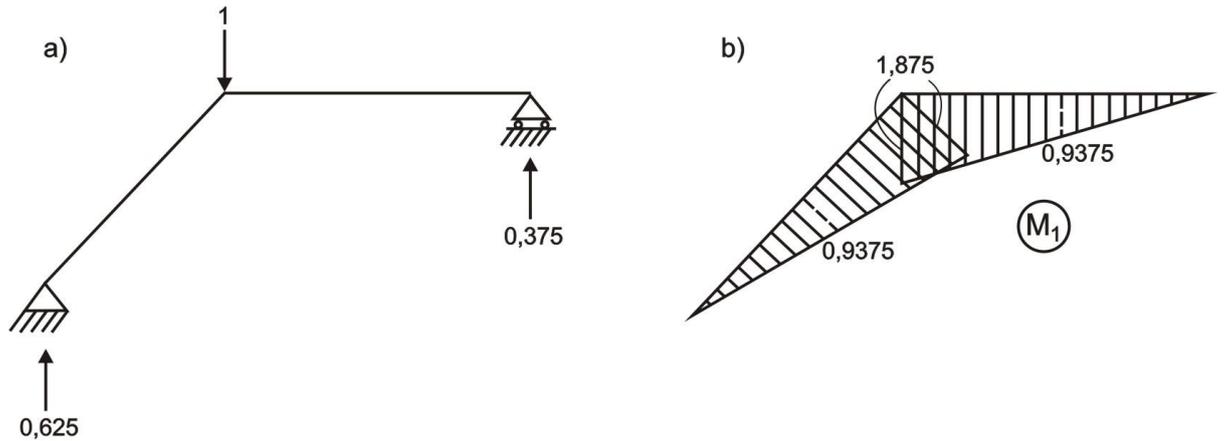


Fig. 6.27

Para multiplicar los diagramas, aplicamos el método de Simpson-Kornoujov.

$$y_B = \frac{5}{6EI} [4 \cdot 2109,375 \cdot 0,9375 + 2968,75 \cdot 1,875] + \frac{5}{6EI} [1,875 \cdot 2968,75 + 4 \cdot 0,9375 \cdot 2421,875]$$

$$y_B = \frac{23437,5}{EI} = \frac{23437,5}{23000 \cdot 10^6 \cdot \frac{0,3 \cdot 0,5^3}{12}} = 3,26 \cdot 10^{-4} \approx 0,33 \text{mm} \downarrow$$

El signo (+) indica que la deflexión vertical va hacia abajo, concordando con la orientación inicial planteada, es decir lo mostrado en la figura 6.27,a.

PENDIENTE EN "C":

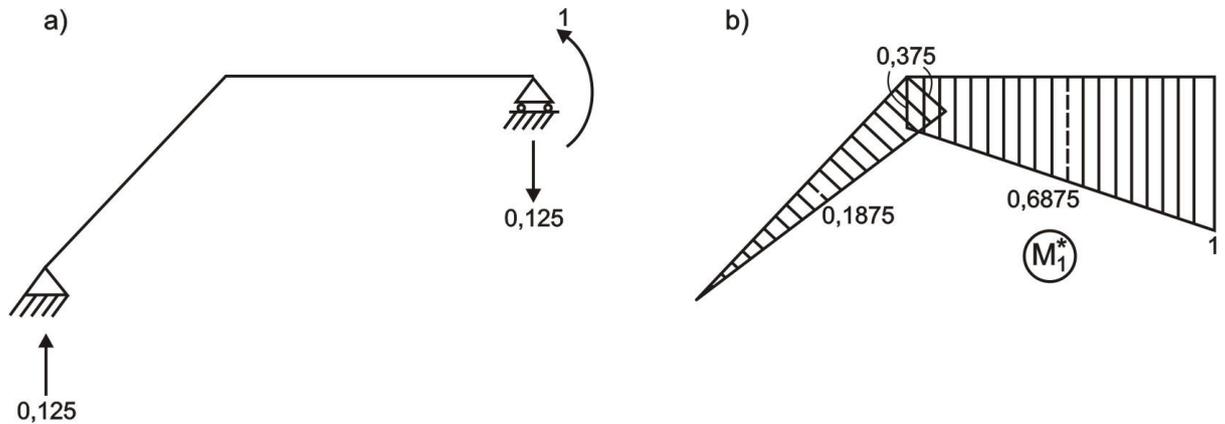


Fig. 6.28

Una vez más aplicamos el método de Simpson-Kornoujov.

$$\theta_C = \frac{5}{6EI} [4 \cdot 0,1875 \cdot 2109,375 + 0,375 \cdot 2968,75] + \frac{5}{6EI} [0,375 \cdot 2968,75 + 4 \cdot 0,6875 \cdot 2421,875]$$

$$\theta_C = \frac{8723,958}{EI} = \frac{8723,958}{23000 \cdot 10^6 \cdot \frac{0,3 \cdot 0,5^3}{12}} = 1,214 \cdot 10^{-4} \text{ rad} = 0,007^\circ$$

Como el signo es (+), indica que la orientación de la pendiente, es la misma que el momento unitario de la figura 6.28,a

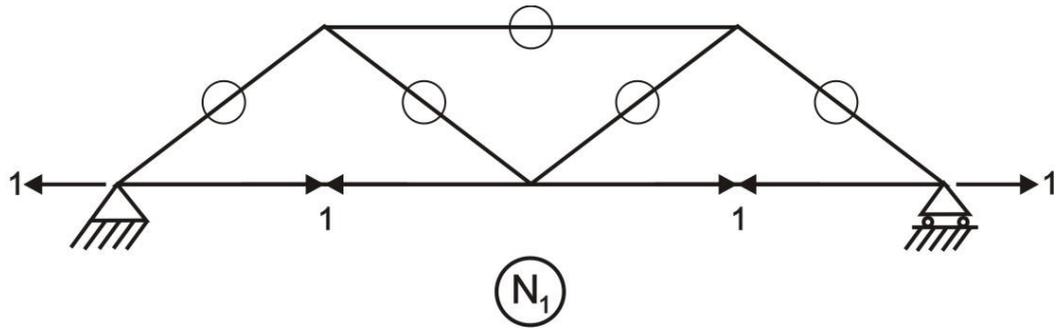


Fig. 6.31

$$\delta_H^F = \sum \frac{NN_1L}{EA} = \frac{1}{116000} [63,33 \cdot 1,40 + 70 \cdot 1,40] = 0,046 \text{pie} = 0,552 \text{plg} \rightarrow$$

PROBLEMA 6.10 Determinar la deflexión vertical en el nudo H de la armadura mostrada en la figura 6.32, si los números encerrados en círculos son las áreas expresadas en plg^2 y $E = 29 \cdot 10^6 \text{lb/plg}^2$

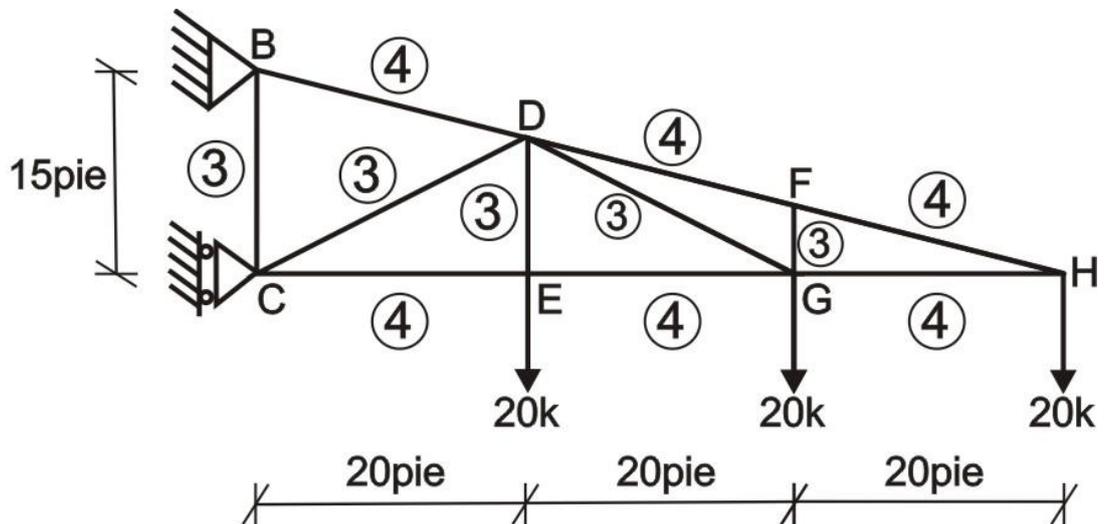


Fig. 6.32

Solución:

Determinamos las fuerzas internas en todas las barras de la armadura, debido a la acción de las cargas reales (diagrama N) y ante la carga unitaria en el nudo y dirección requerida (diagrama N_1), tal como se muestra en la figura 6.33

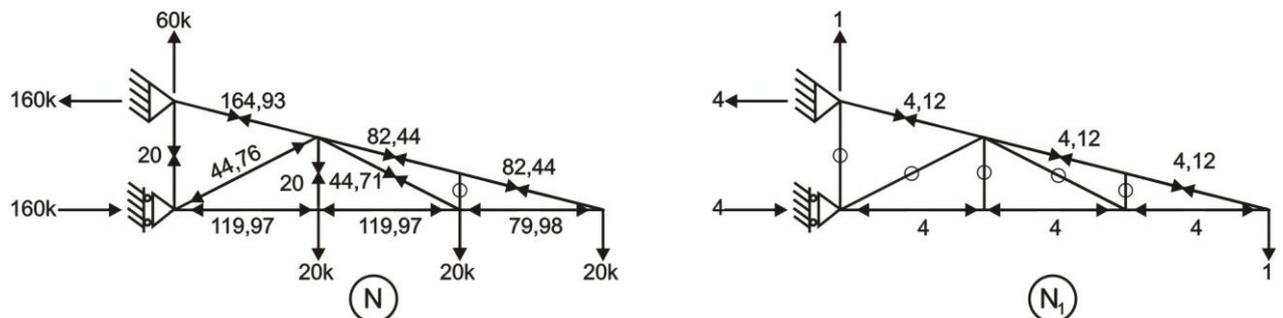


Fig. 6.33

Luego:

$$EA_3 = 29 \cdot 10^6 \cdot 3 = 87 \cdot 10^6 \text{ lb} = 87000k$$

$$EA_4 = 29 \cdot 10^6 \cdot 4 = 116 \cdot 10^6 \text{ lb} = 116000k$$

$$\delta_v^H = \frac{1}{116000} [(-119,97)(-4)(20) + (-119,97)(-4)(20) + (-79,98)(-4)(20) + (164,93)(4,12)(20,62) + (82,44)(4,12)(20,62) + (82,44)(4,12)(20,62)] = 0,462 \text{ pie} = 5,544 \text{ plg} \downarrow$$

PROBLEMA 6.11 Determinar los desplazamientos vertical, horizontal y total del punto B del arco metálico mostrado en la figura 6.34, si $E = 2 \cdot 10^6 \text{ kgf} / \text{cm}^2$

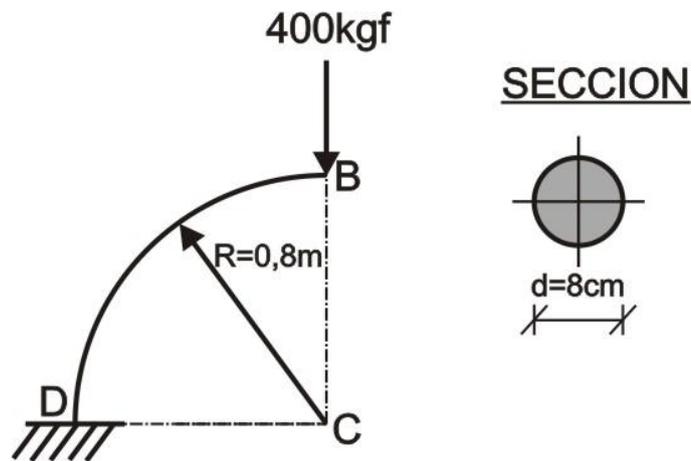


Fig. 6.34

Solución:

Determinamos las ecuaciones de los momentos para un punto F del arco, para los casos, cuando está sometido a la carga real P y el otro caso, cuando está sometido a la carga unitaria en el sentido vertical en el punto B, tal como se muestran en las figuras 6.35 y 6.36

CASO CARGA REAL:

$$M = -PR \text{sen} \varphi$$

$$ds = R d\varphi$$

$$0 \leq \varphi \leq \pi/2$$

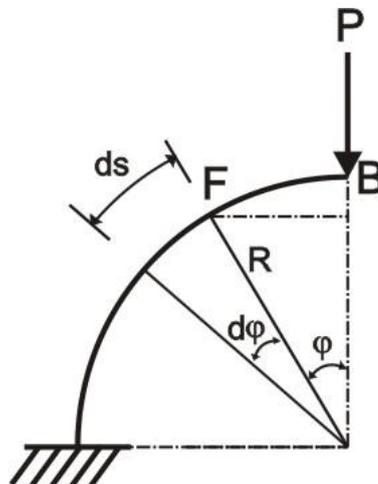


Fig. 6.35

CARGA UNITARIA VERTICAL:

$$M_1 = -R \operatorname{sen} \varphi$$

$$ds = R d\varphi$$

$$0 \leq \varphi \leq \pi/2$$

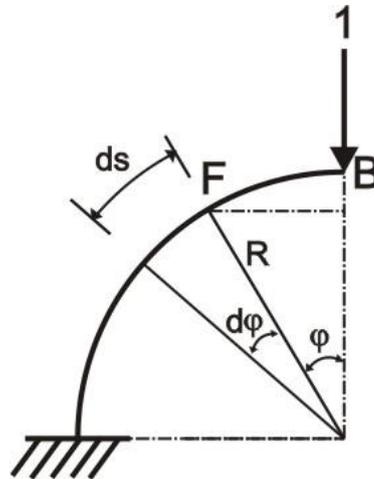


Fig. 6.36

Luego:

$$\delta_V^B = \int_s \frac{MM_1 ds}{EI} = \int_0^{\pi/2} \frac{(-PR \operatorname{sen} \varphi)(-R \operatorname{sen} \varphi)}{EI} R d\varphi = \frac{\pi PR^3}{4EI} = \frac{\pi \cdot 400 \cdot 0,8^3}{4 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 10^4 \cdot \frac{\pi}{64} \cdot 8^4 \cdot 10^{-8}} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$\delta_V^B = 4 \text{ mm} \downarrow$$

Ahora, analizamos el desplazamiento horizontal en el mismo punto B, aplicando una carga unitaria en el punto y dirección requerida, tal como se muestra en la figura 6.37 y determinamos el valor de su desplazamiento, multiplicando los diagramas de las figuras 6.35 y 6.37

CASO CARGA UNITARIA HORIZONTAL:

$$M_1 = -R(1 - \cos \varphi)$$

$$ds = R d\varphi$$

$$0 \leq \varphi \leq \pi/2$$

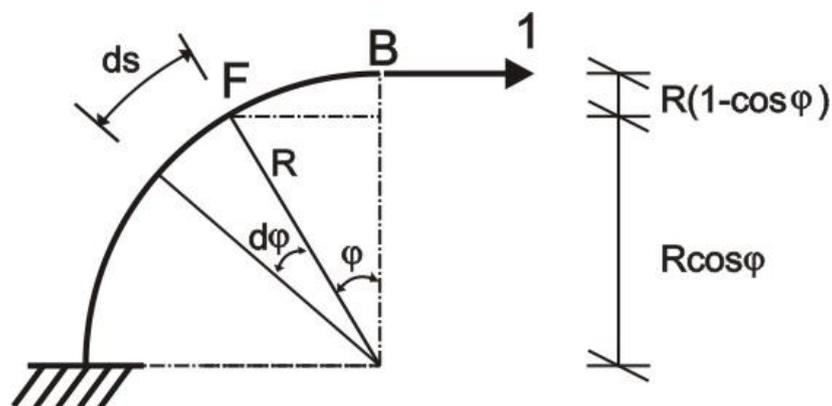


Fig. 6.37

$$\delta_H^B = \int_s \frac{MM_1 ds}{EI} = \int_0^{\pi/2} \frac{(-PR \sin \varphi)[-R(1 - \cos \varphi)]}{EI} R d\varphi = \frac{PR^3}{2EI} = \frac{400 \cdot 0,8^3}{2 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 10^4 \cdot \frac{\pi}{64} \cdot 8^4 \cdot 10^{-8}}$$

$$\delta_H^B = 2,55 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 2,55 \text{ mm} \rightarrow$$

El desplazamiento total lo determinamos en base al diagrama de desplazamientos, mostrado en la figura 6.38 y el ángulo que forma con la vertical.

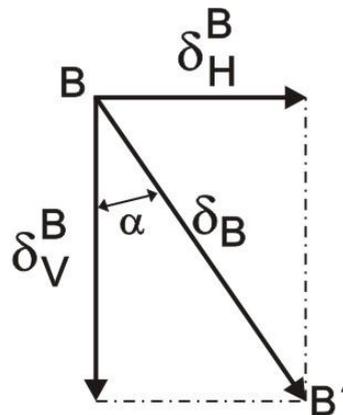


Fig. 6.38

$$\delta_T^B = \sqrt{(\delta_V^B)^2 + (\delta_H^B)^2} = \sqrt{4^2 + 2,55^2} = 4,74 \text{ mm}$$

$$\text{tg} \alpha = \frac{2,55}{4} \Rightarrow \alpha = 32,52^\circ$$

PROBLEMA 6.12 Determinar el desplazamiento vertical y el ángulo de giro en el extremo libre B del arco mostrado en la figura 6.39, donde la carga w va dirigido hacia el centro C del arco.

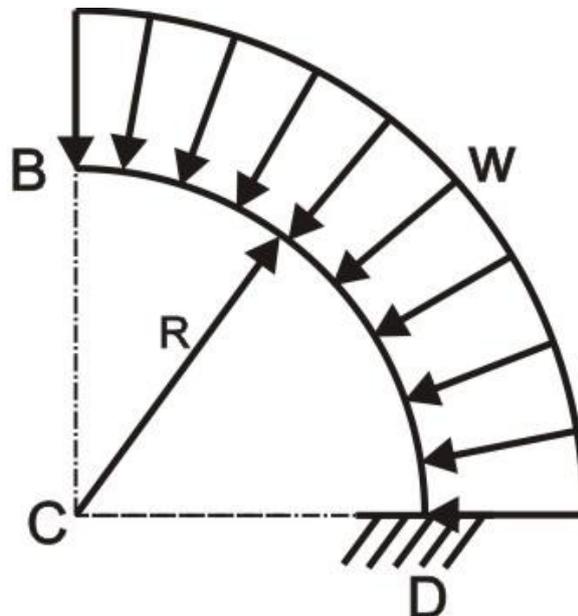


Fig. 6.39

Solución:

Analizamos el arco, a través de una fuerza elemental dV (figura 6.40), que actúa en el tramo del elemento de longitud ds .

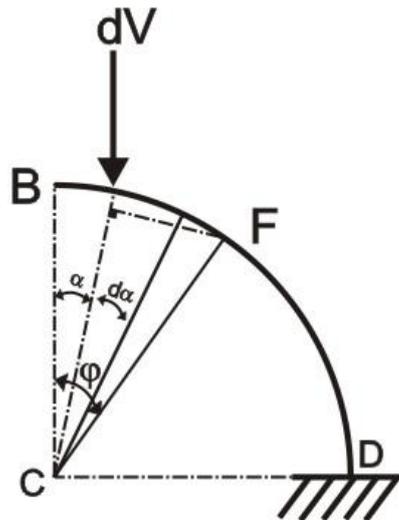


Fig. 6.40

Determinamos la fuerza elemental dV :

$$dV = wds = wRd\alpha$$

El momento flector que origina esta fuerza respecto al punto F, que forma un ángulo φ con la vertical es:

$$dM = -dV[R\text{sen}(\varphi - \alpha)] = -wRd\alpha[R\text{sen}(\varphi - \alpha)] = -wR^2\text{sen}(\varphi - \alpha)d\alpha$$

Luego, integramos y obtenemos:

$$M = -wR^2 \int_{\alpha=0}^{\alpha=\varphi} \text{sen}(\varphi - \alpha)d\alpha = -wR^2(1 - \cos \varphi)$$

Ahora, analizamos el caso de la carga unitaria vertical en el punto B, tal como se muestra en la figura 6.41, cuyos valores del momento en un punto cualquiera F es:

$$M_1 = -R\text{sen}\varphi$$

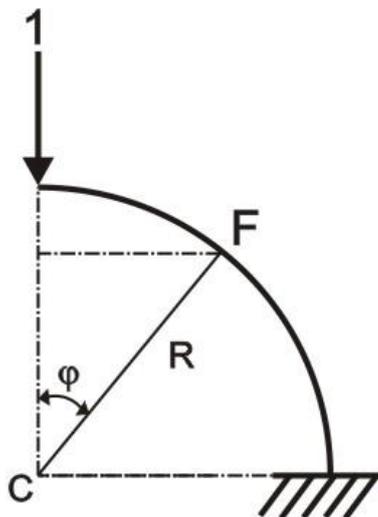


Fig. 6.41

De esta manera, el desplazamiento vertical en el punto B será:

$$\delta_V^B = \int_s \frac{MM_1 ds}{EI} = \int_0^{\pi/2} \frac{[-wR^2(1 - \cos \varphi)][-R\text{sen}\varphi]}{EI} R d\varphi = \frac{wR^4}{2EI} \downarrow$$

Para el caso de la pendiente en el punto B, aplicamos un momento unitario, tal como se muestra en la figura 6.42, siendo el valor del momento en un punto cualquiera F igual a $M_1 = -1$, determinándose mediante la multiplicación de los diagramas de las figuras 6.40 y 6.42

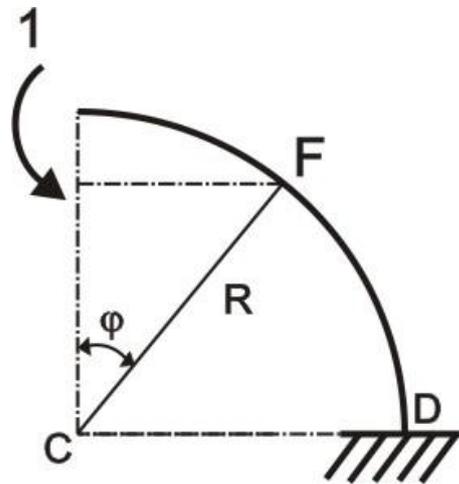


Fig. 6.42

$$\theta_B = \int_s \frac{MM_1 ds}{EI} = \int_0^{\pi/2} \frac{[-wR^2(1 - \cos \varphi)](-1)R d\varphi}{EI} = \frac{wR^3}{EI} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right)$$

Como el signo es (+), indica que la orientación de la pendiente es la misma que el momento unitario.

6.3 TEOREMAS DE CASTIGLIANO

En 1876, Alberto Castigliano enunció un teorema que permite encontrar cualquier componente de deflexión de una estructura a partir de la energía de deformación de la misma. Al aplicarlo a las reacciones redundantes de una estructura indeterminada, se obtiene un corolario que se conoce como Segundo Teorema de Castigliano.

PRIMER TEOREMA. La componente de deflexión del punto de aplicación de una acción sobre una estructura, en la dirección de dicha acción, se puede obtener evaluando la primera derivada parcial de la energía interna de deformación de la estructura con respecto a la acción aplicada.

$$\Delta_p = \frac{\partial W}{\partial P} \quad (6.9)$$

Si el signo de la respuesta da negativo, quiere decir que la deflexión es opuesta al sentido de la acción con respecto a la cual se tomó la derivada. Si se quiere averiguar la deflexión en un punto donde no hay aplicada ninguna acción, o en una dirección distinta de la acción aplicada, sencillamente se aplica una acción imaginaria en el sitio y dirección deseados hasta encontrar la derivada parcial de la energía de deformación; luego la acción imaginaria se iguala a cero.

Si se quiere averiguar una deflexión lineal en una armadura, se aplicará la fórmula 6.10

$$\Delta_p = \frac{\partial}{\partial P} \sum \frac{N^2 L}{2EA} = \sum N \left(\frac{\partial N}{\partial P} \right) \frac{L}{EA} \quad (6.10)$$

Las deflexiones lineales por flexión se calculan mediante la fórmula 6.11

$$\Delta_p = \frac{\partial}{\partial P} \int \frac{M^2 dx}{2EI} = \int M \left(\frac{\partial M}{\partial P} \right) \frac{dx}{EI} \quad (6.11)$$

Cuando sólo se considera el efecto de corte, la deflexión se calcula por la fórmula 6.12

$$\Delta_P = \frac{\partial}{\partial P} k \int \frac{V^2 dx}{2GA} = k \int V \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right) \frac{dx}{GA} \quad (6.12)$$

En el caso que se considere sólo el efecto de torsión, se aplicará la fórmula 6.13

$$\Delta_P = \frac{\partial}{\partial P} \int \frac{T^2 dx}{2GI_{p(t)}} = \int T \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right) \frac{dx}{GI_{p(t)}} \quad (6.13)$$

En el caso que se desee aplicar todos los efectos posibles que surgen en la estructura, simplemente se aplicarán las fórmulas 6.10 – 6.13, considerando el Principio de superposición, es decir, la suma de los efectos parciales, dependiendo de las fuerzas internas que surjan en la estructura.

Si se quiere averiguar pendientes, en el lado izquierdo de las expresiones anteriores se escribirá θ y las derivadas parciales se tomarían con respecto a un momento aplicado en el punto de la pendiente deseada.

SEGUNDO TEOREMA. La derivada parcial de la energía interna de deformación de una estructura cargada, con respecto a un componente de reacción, es igual a cero.

En cualquier estructura indeterminada sometida a carga, los valores de las redundantes deben ser tales que hagan mínima la energía total interna de deformación elástica que resulta de la aplicación del sistema de cargas dado.

Si X_1, X_2, \dots, X_n son las incógnitas redundantes, la condición de mínimo hace que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial X_1} &= 0 \\ \frac{\partial W}{\partial X_2} &= 0 \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{\partial W}{\partial X_n} &= 0 \end{aligned} \quad (6.14)$$

Este teorema proporciona ecuaciones adicionales a las de equilibrio estático, lo que, en general, permite resolver todo tipo de estructuras hiperestáticas.

PROBLEMA 6.13 Determinar la deflexión vertical en el nudo C y el desplazamiento horizontal en el apoyo D de la armadura mostrada en la figura 6.43. Considerar que $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$ y las áreas de las barras AB, AC, CD y BD es 300 cm^2 y el área de la barra BC es 200 cm^2

Solución:

Primero, analizamos la deflexión vertical en C, aplicando en forma adicional una carga P en el mismo sentido que la carga 100kN y determinamos las fuerzas internas en todas las barras de la armadura, tal como se muestra en la figura 6.44, llenando los valores en la tabla 6.1

Asimismo, calculamos la rigidez de la armadura:

$$EA_{200} = 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 200 \cdot 10^{-4} = 4 \cdot 10^9 \text{ N} = 4 \cdot 10^6 \text{ kN}$$

$$EA_{300} = 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 300 \cdot 10^{-4} = 6 \cdot 10^9 \text{ N} = 6 \cdot 10^6 \text{ kN}$$

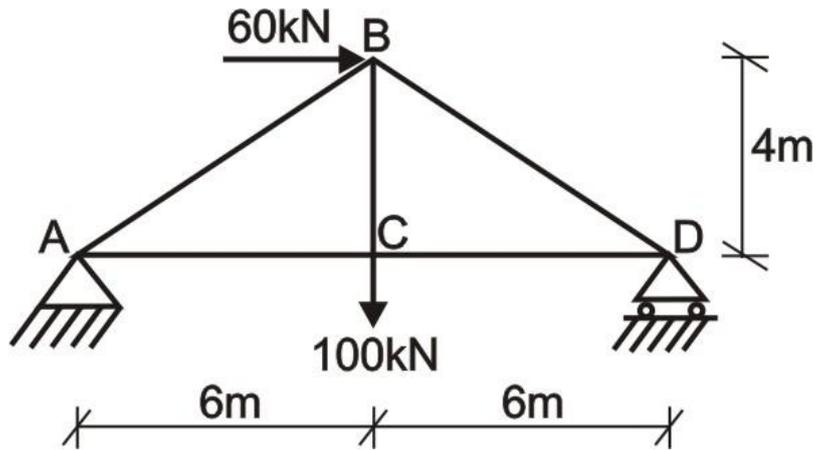


Fig. 6.43

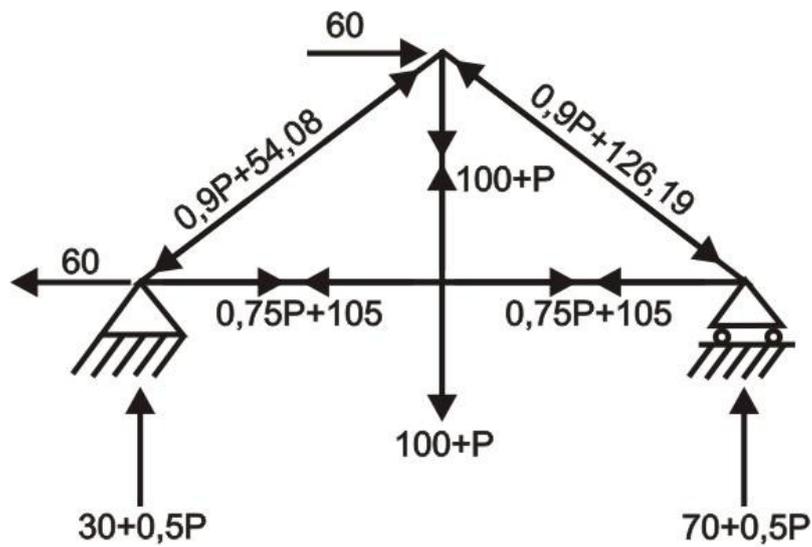


Fig. 6.44

Tabla 6.1

BARRA	L (m)	EA (kN)	$\frac{L}{EA}$ (m/kN)	$F_{(P)}$	$\frac{\partial F_{(P)}}{\partial P}$	$F \frac{\partial F}{\partial P} \frac{L}{EA} \Big _{P=0}$
AB	7,21	$6 \cdot 10^6$	$1,2 \cdot 10^{-6}$	$-(0,9P + 54,08)$	-0,9	$58,41 \cdot 10^{-6}$
AC	6	$6 \cdot 10^6$	10^{-6}	$0,75P + 105$	0,75	$78,75 \cdot 10^{-6}$
BC	4	$4 \cdot 10^6$	10^{-6}	$P + 100$	1	$100 \cdot 10^{-6}$
BD	7,21	$6 \cdot 10^6$	$1,2 \cdot 10^{-6}$	$-(0,9P + 126,19)$	-0,9	$136,29 \cdot 10^{-6}$
CD	6	$6 \cdot 10^6$	10^{-6}	$0,75P + 105$	0,75	$78,75 \cdot 10^{-6}$

$$\Sigma = 452,20 \cdot 10^{-6}$$

De esta manera, el desplazamiento vertical del nudo C de la armadura será:

$$\delta_V^C = 452,20 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 0,452 \text{ mm} \downarrow$$

Ahora, analizamos el caso cuando la carga P está aplicada en forma horizontal en el apoyo D, tal como se muestra en la figura 6.45. Luego, efectuamos el mismo proceso que en el caso anterior, es decir, llenando los valores en la tabla 6.2 y calculando el desplazamiento horizontal del apoyo.

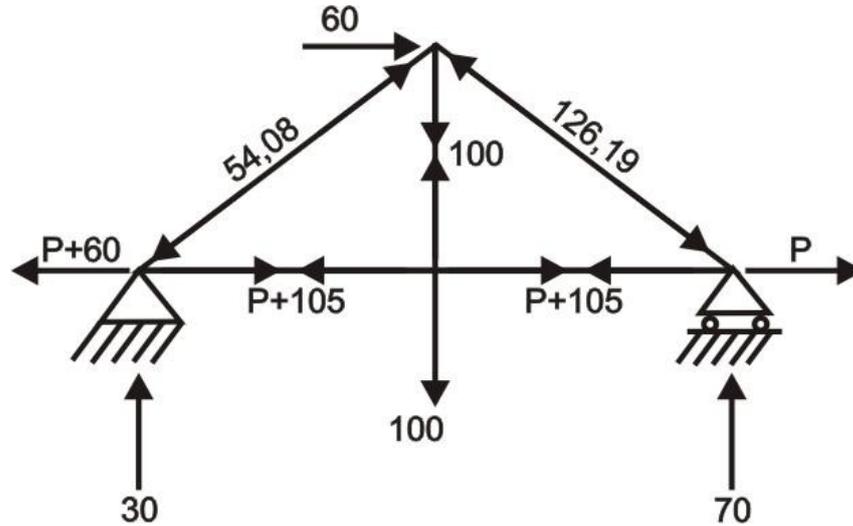


Fig. 6.45

Tabla 6.2

BARRA	L (m)	EA (kN)	$\frac{L}{EA}$ (m/kN)	$F_{(P)}$	$\frac{\partial F_{(P)}}{\partial P}$	$F \frac{\partial F}{\partial P} \frac{L}{EA} \Big _{P=0}$
AC	6	$6 \cdot 10^6$	10^{-6}	$P + 105$	1	$105 \cdot 10^{-6}$
CD	6	$6 \cdot 10^6$	10^{-6}	$P + 105$	1	$105 \cdot 10^{-6}$

$$\Sigma = 210 \cdot 10^{-6}$$

$$\delta_H^D = 210 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 0,210 \text{ mm} \rightarrow$$

PROBLEMA 6.14 Determinar la pendiente en el apoyo A y la deflexión en el centro de la viga, mostrada en la figura 6.46. Considerar $E = 20000 \text{ N/mm}^2$, $b = 300 \text{ mm}$ y $h = 400 \text{ mm}$

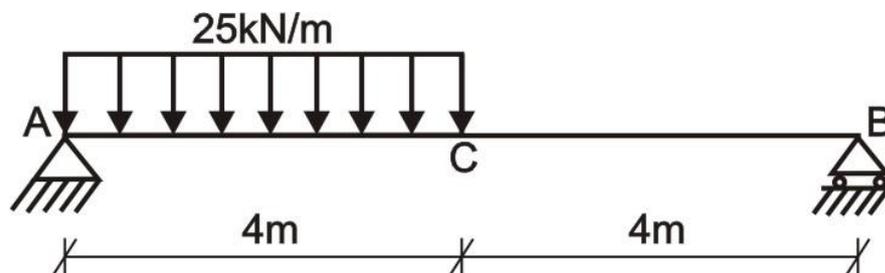


Fig. 6.46

Solución:

Para determinar la pendiente en el apoyo izquierdo (punto A), aplicamos un momento ficticio M y determinamos sus reacciones y momentos en cada tramo de la viga.

En este caso, dividimos la viga en dos tramos, tal como se muestra en la figura 6.47, determinando previamente la rigidez de la viga.

$$E = 20000 \text{ N/mm}^2 = 2 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$$

$$I = \frac{0,3 \cdot 0,4^3}{12} = 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$$

$$EI = 2 \cdot 10^7 \cdot 1,6 \cdot 10^{-3} = 3,2 \cdot 10^4 \text{ kN.m}^2$$

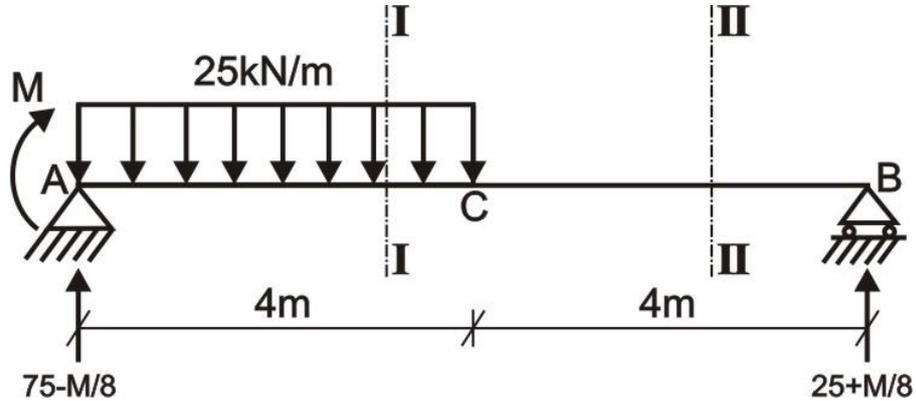


Fig. 6.47

TRAMO I ($0 \leq x \leq 4$)

$$M_I = \left(75 - \frac{M}{8}\right)x + M - \frac{25x^2}{2}$$

$$\frac{\partial M_I}{\partial M} = -\frac{x}{8} + 1$$

TRAMO II ($4 \leq x \leq 8$)

$$M_{II} = \left(75 - \frac{M}{8}\right)x + M - 100(x - 2)$$

$$\frac{\partial M_{II}}{\partial M} = -\frac{x}{8} + 1$$

Luego:

$$\theta_A = \frac{1}{EI} \left[\int_0^4 (75x - 12,5x^2)(1 - 0,125x) dx + \int_4^8 (75x - 100x + 200)(1 - 0,125x) dx \right] = \frac{299,2}{EI}$$

$$\theta_A = \frac{299,2}{3,2 \cdot 10^4} = 0,00935 \text{ rad}$$

Como el signo es (+), indica que la pendiente va en el mismo sentido que el momento ficticio, es decir, en sentido horario.

Ahora, analizamos el caso de la deflexión en el centro de la viga, aplicando, para ello, una carga vertical ficticia en dicho punto, tal como se muestra en la figura 6.48

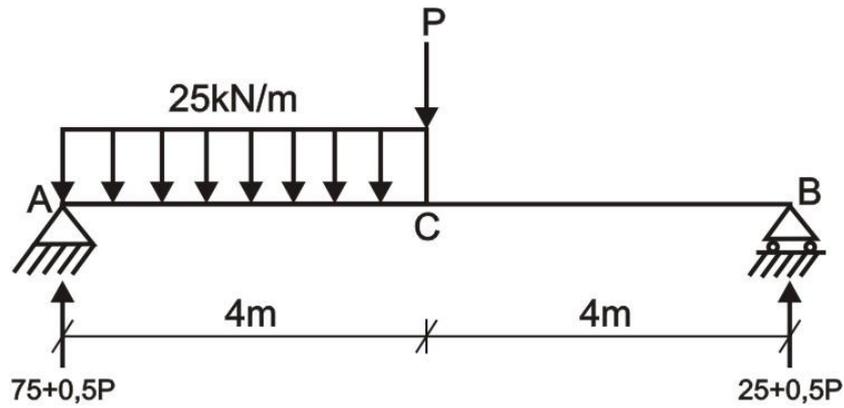


Fig. 6.48

TRAMO I ($0 \leq x \leq 4$)

$$M_I = (75 + 0,5P)x - \frac{25x^2}{2}$$

$$\frac{\partial M_I}{\partial P} = 0,5x$$

TRAMO II ($4 \leq x \leq 8$)

$$M_{II} = (75 + 0,5P)x - P(x - 4) - 100(x - 2)$$

$$\frac{\partial M_{II}}{\partial P} = 0,5x - x + 4 = -0,5x + 4$$

Luego:

$$y_C = \frac{1}{EI} \left[\int_0^4 (75x - 12,5x^2)(0,5x) dx + \int_4^8 (75x - 100x + 200)(4 - 0,5x) dx \right] = \frac{668,80}{EI} = \frac{668,80}{3,2 \cdot 10^4}$$

$$y_C = 209 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 20,9 \text{ mm} \downarrow$$

PROBLEMA 6.15 Determinar el desplazamiento horizontal en el punto A y el desplazamiento vertical del punto B del pórtico mostrado en la figura 6.49. Considerar $E = 29 \cdot 10^6 \text{ lb/plg}^2$ e $I = 1200 \text{ plg}^4$ para todo el pórtico.

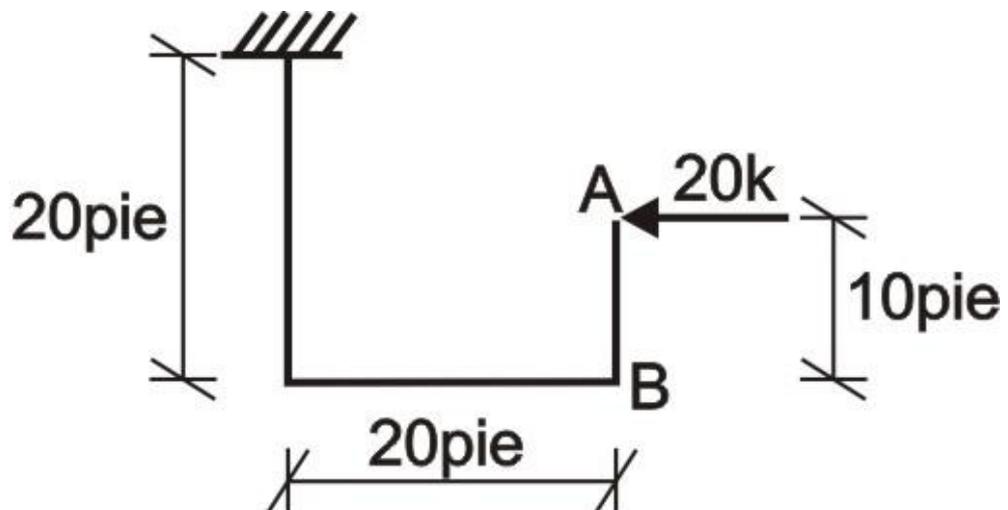


Fig. 6.49

Solución:

Determinamos la rigidez del pórtico.

$$EI = 29 \cdot 10^6 \cdot 1200 \text{ lb} \cdot \text{pie}^2 = 24,17 \cdot 10^4 \text{ k} \cdot \text{pie}^2$$

Analizamos tramo por tramo por toda la longitud del pórtico, aplicando una fuerza horizontal H en el punto A en la misma dirección que 20k y una fuerza vertical V en el punto B, tal como se muestra en la figura 6.50

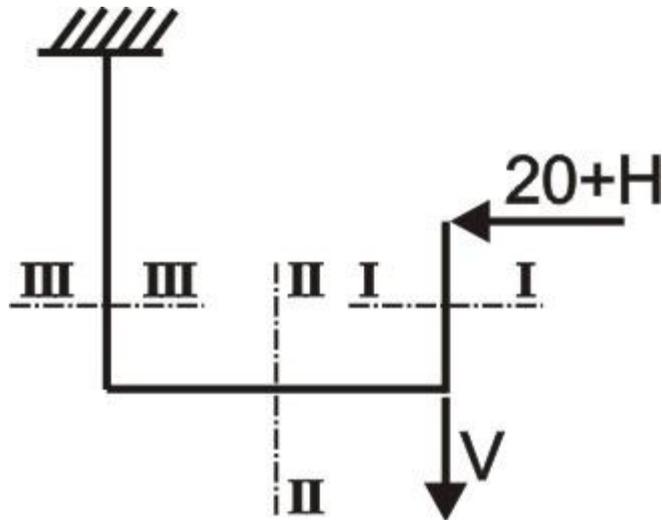


Fig. 6.50

TRAMO I ($0 \leq y \leq 10$)

$$M_I = (20 + H)y$$

$$\frac{\partial M_I}{\partial H} = y$$

$$\frac{\partial M_I}{\partial V} = 0$$

TRAMO II ($0 \leq x \leq 20$)

$$M_{II} = (20 + H)10 - Vx$$

$$\frac{\partial M_{II}}{\partial H} = 10$$

$$\frac{\partial M_{II}}{\partial V} = -x$$

TRAMO III ($0 \leq z \leq 20$)

$$M_{III} = (20 + H)(10 - z) - 20V$$

$$\frac{\partial M_{III}}{\partial H} = 10 - z$$

$$\frac{\partial M_{III}}{\partial V} = -20$$

Luego:

$$\delta_H^A = \frac{1}{EI} \left[\int_0^{10} (20y)(y)dy + \int_0^{20} (200)(10)dx + \int_0^{20} (200 - 20z)(10 - z)dz \right] = \frac{60000}{EI} = \frac{60000}{24,17 \cdot 10^4}$$

$$\delta_H^A = 0,248 \text{ pie} = 2,98 \text{ plg} \leftarrow$$

$$\delta_V^B = \frac{1}{EI} \left[\int_0^{20} (200)(-x)dx + \int_0^{20} (200 - 20z)(-20)dz \right] = -\frac{40000}{EI} = -\frac{40000}{24,17 \cdot 10^4} = -0,165 \text{ pie}$$

$$\delta_V^B = -1,98 \text{ plg} \uparrow$$

El signo (-) indica que el punto B no se desplaza verticalmente hacia abajo, sino hacia arriba, tal como lo muestra la flecha.

PROBLEMA 6.16 Determinar el desplazamiento vertical, horizontal y total del extremo libre del arco mostrado en la figura 6.51, si está sometido a una carga distribuida w tangente por toda la longitud del arco.

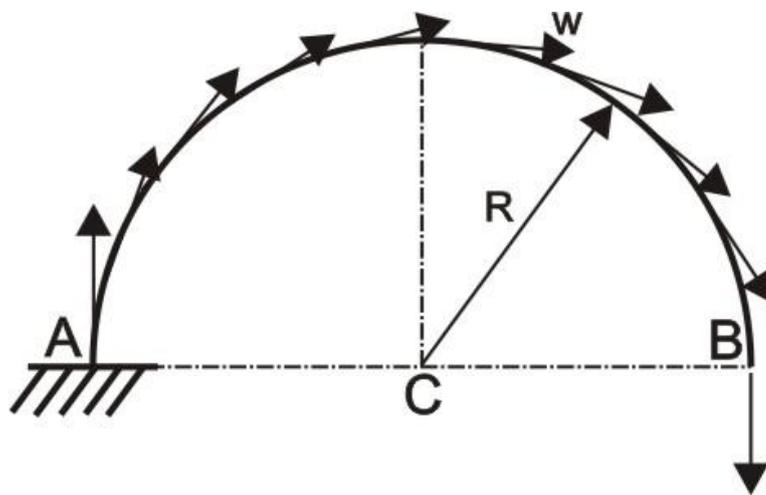


Fig. 6.51

Solución:

Analizamos el arco a través de una fuerza elemental dP (figura 6.52), que actúa en el tramo del elemento de longitud ds .

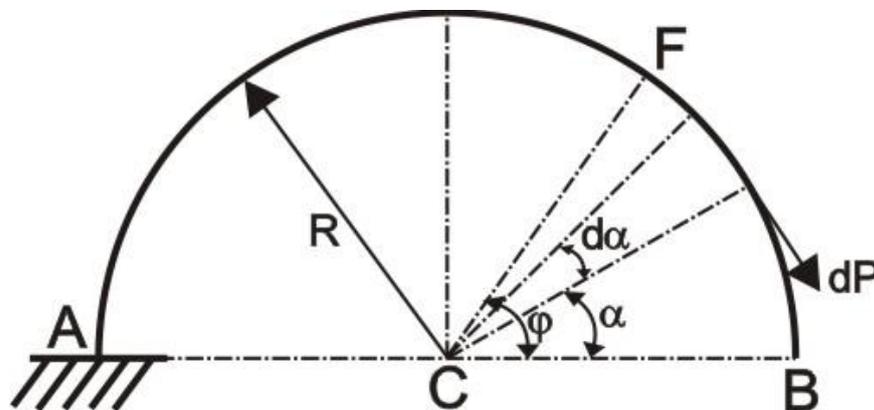


Fig. 6.52

Determinamos la fuerza elemental dP :

$$dP = wds = wRd\alpha$$

El momento flector en un punto cualquiera F del arco, es decir, cuando el ángulo es φ , lo determinamos por la expresión:

$$dM = dP[R - R \cos(\varphi - \alpha)] = wR^2 [1 - \cos(\varphi - \alpha)] d\alpha$$

Para evitar multiplicación de signos, ya que todos los momentos son negativos, obviamos dicho proceso, ya que la multiplicación de dos valores negativos es positiva.

El momento total en dicha sección se determinará como la suma de los momentos elementales, esto es:

$$M = wR^2 \left[\int_0^\varphi d\alpha - \int_0^\varphi \cos(\varphi - \alpha) d\alpha \right] = wR^2 (\varphi - \text{sen}\varphi)$$

Ahora, aplicamos la carga vertical ficticia V en el punto B (figura 6.53), siendo su momento:

$$M_V = V(R - R \cos \varphi) = VR(1 - \cos \varphi)$$

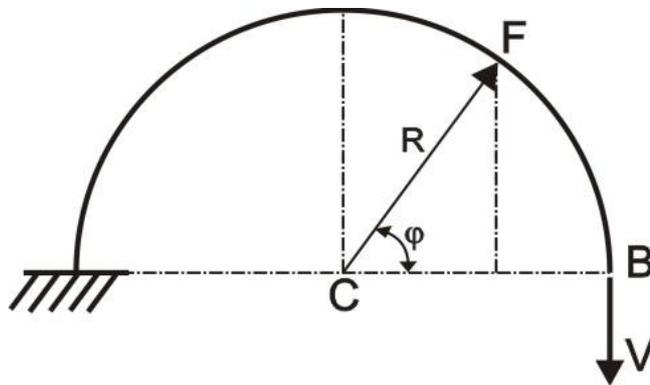


Fig. 6.53

De esta manera, el momento total será:

$$M_T = wR^2 (\varphi - \text{sen}\varphi) + VR(1 - \cos \varphi)$$

$$\frac{\partial M_T}{\partial V} = R(1 - \cos \varphi)$$

Luego:

$$\delta_V^B = \frac{1}{EI} \int_0^\pi [wR^2 (\varphi - \text{sen}\varphi)] [R(1 - \cos \varphi)] R d\varphi = \frac{\pi^2 wR^4}{2EI} \downarrow$$

Efectuamos lo mismo para el desplazamiento horizontal, es decir, aplicamos una carga horizontal ficticia H en el punto B (figura 6.54), siendo su momento:

$$M_H = HR \text{sen}\varphi$$

El momento total para este caso será:

$$M_T = wR^2 (\varphi - \text{sen}\varphi) + HR \text{sen}\varphi$$

$$\frac{\partial M_T}{\partial H} = R \text{sen}\varphi$$

Luego:

$$\delta_H^B = \frac{1}{EI} \int_0^\pi [wR^2 (\varphi - \text{sen}\varphi)] [R \text{sen}\varphi] R d\varphi = \frac{\pi wR^4}{2EI} \leftarrow$$

El signo (+) indica que el punto B se desplaza por la horizontal hacia la izquierda, en el mismo sentido de la carga horizontal ficticia H.

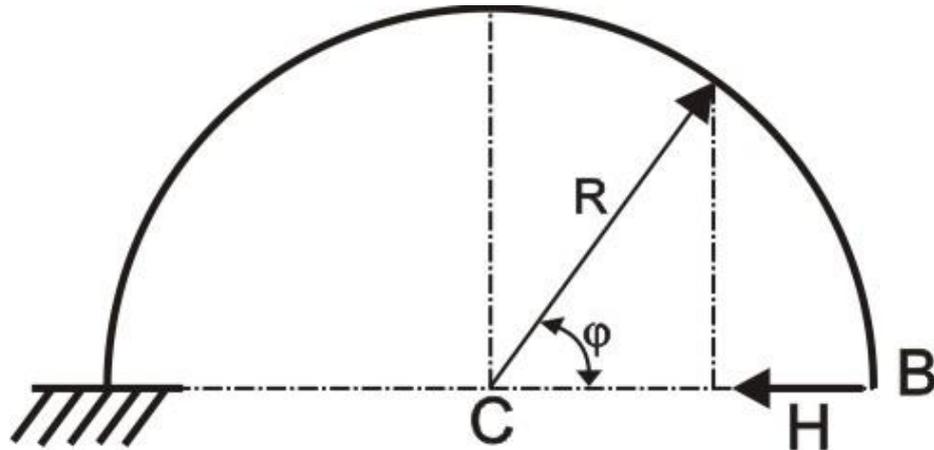


Fig. 6.54

El desplazamiento total se calculará mediante el diagrama de desplazamientos (figura 6.55)

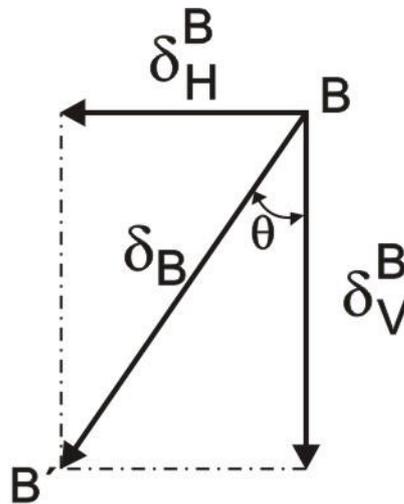


Fig. 6.55

$$\delta_B = \sqrt{(\delta_V^B)^2 + (\delta_H^B)^2} = \frac{wR^4}{EI} \sqrt{\frac{\pi^4}{4} + \frac{\pi^2}{4}} = 5,18 \frac{wR^4}{EI}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\delta_H^B}{\delta_V^B} = \frac{1}{\pi} \quad \Rightarrow \quad \theta = 17,66^\circ$$

PROBLEMA 6.17 Resolver la armadura mostrada en la figura 6.56, si $E = 200000\text{N/mm}^2$ y las áreas de las barras del cordón superior es 10000mm^2 , del cordón inferior 5000mm^2 y las diagonales 8000mm^2 .

Solución:

Analizamos la armadura calculando su hiperestaticidad:

$$\text{G.I.} = B - 2N = 11 - 2(5) = 1$$

Donde:

G.I. - Grado de indeterminación de la armadura

B - Número de barras de la armadura, incluido los apoyos, siendo el apoyo fijo equivalente a dos y el apoyo móvil a uno.

N - Número de nudos de la armadura

De esta manera, la armadura es una vez hiperestática, siendo su hiperestaticidad externa, por ello, eliminamos una redundante (reacción horizontal en G) y lo reemplazamos por una fuerza P.

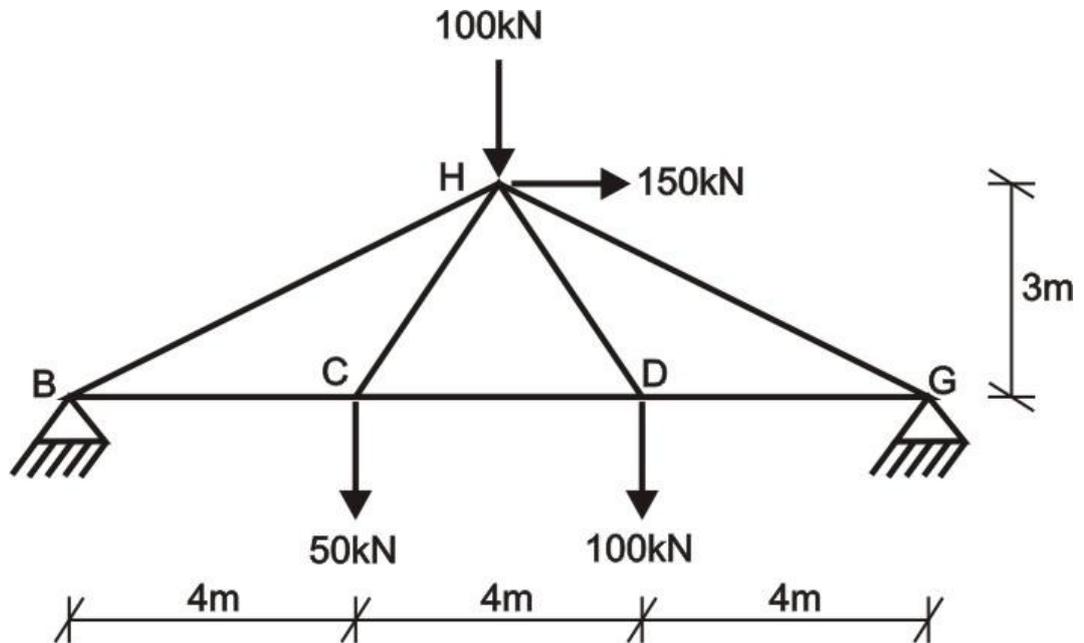


Fig. 6.56

Calculamos sus fuerzas internas en cada barra, así como las reacciones en los apoyos (figura 6.57), reemplazando los valores en la tabla 6.3

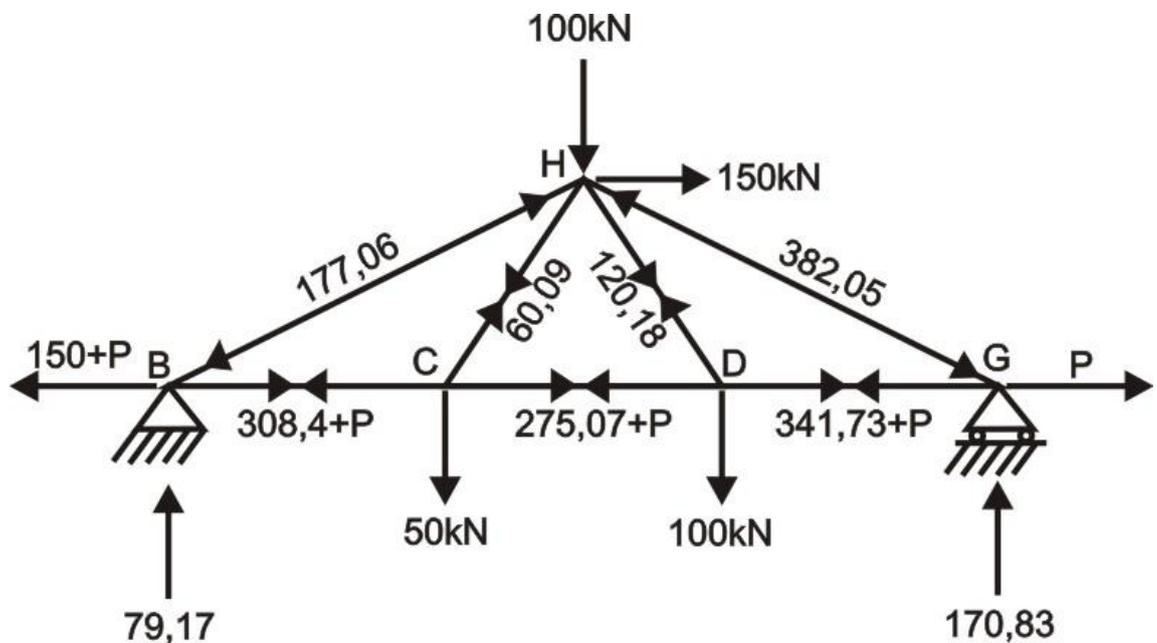


Fig. 6.57

La hiperestaticidad de la armadura se resolverá cuando se cumpla la condición $\frac{\partial W}{\partial P} = 0$, debido a que el desplazamiento horizontal en dicho apoyo es cero.

Tabla 6.3

BARRA	L (m)	EA (kN)	$F_{(P)}$	$\frac{\partial F_{(P)}}{\partial P}$	$F \frac{\partial F}{\partial P} \frac{L}{EA}$
BH	6,71	$2 \cdot 10^6$	-177,06	0	0
BC	4	10^6	$308,4 + P$	1	$\frac{(308,4 + P) \cdot 4}{10^6}$
CH	3,61	$1,6 \cdot 10^6$	60,09	0	0
CD	4	10^6	$275,07 + P$	1	$\frac{(275,07 + P) \cdot 4}{10^6}$
DH	3,61	$1,6 \cdot 10^6$	120,18	0	0
DG	4	10^6	$341,73 + P$	1	$\frac{(341,73 + P) \cdot 4}{10^6}$
GH	6,71	$2 \cdot 10^6$	-382,05	0	0

$$\Sigma = \frac{3699,2 + 12P}{10^6}$$

Luego:

$$\frac{3699,2 + 12P}{10^6} = 0 \quad \Rightarrow \quad P = -308,27 \text{ kN}$$

De esta manera, con el resultado obtenido, calculamos las otras reacciones y fuerzas internas en todas las barras de la armadura, siendo sus valores finales los mostrados en la figura 6.58

Otra de las formas es reemplazar el valor de P en las fuerzas internas y reacciones de la figura 6.57, obteniendo los mismos valores de la figura 6.58

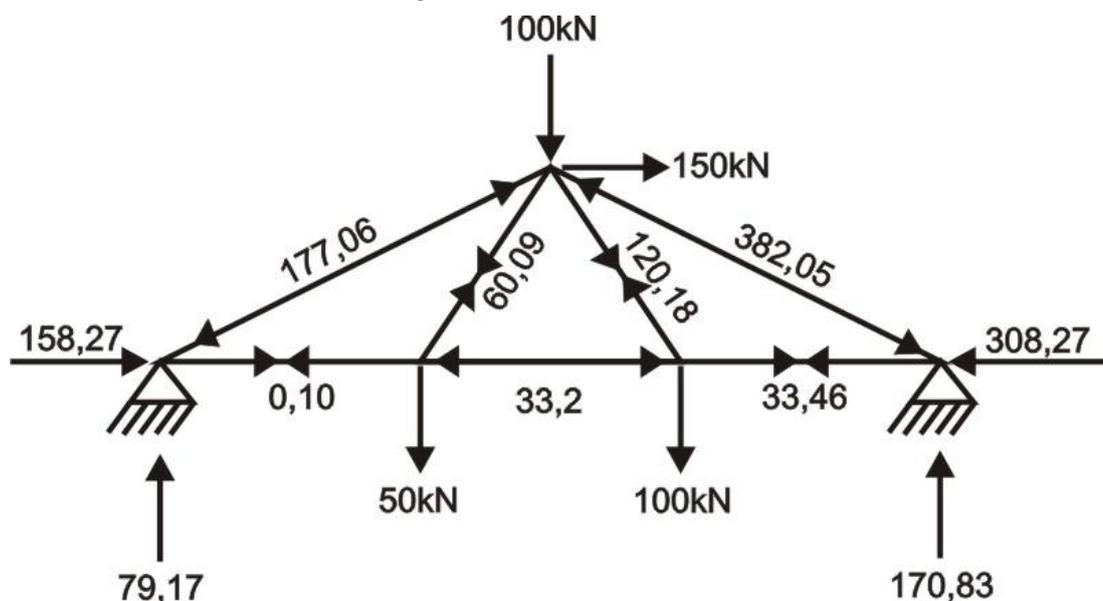


Fig. 6.58

PROBLEMA 6.18 Resolver la armadura mostrada en la figura 6.59, si $E = 200000\text{N/mm}^2$ y las áreas de las barras exteriores es 20000mm^2 e interiores 30000mm^2

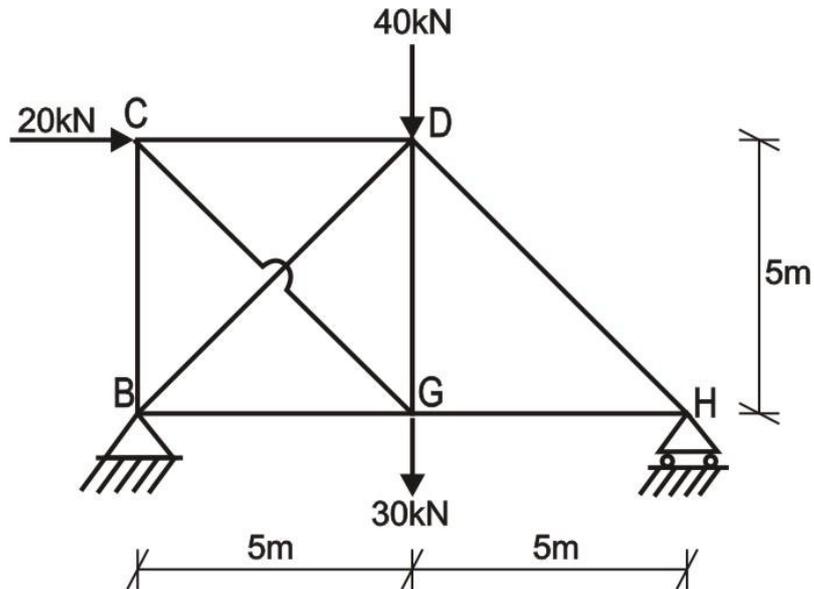


Fig. 6.59

Solución:

Analizamos el grado de indeterminación de la armadura:

$$G.I. = 11 - 2(5) = 1$$

La armadura es una vez hiperestática, con la condición que la hiperestaticidad es interna y, es por ello, que cortamos una barra y lo reemplazamos por una fuerza P , calculando el resto de las fuerzas internas y las reacciones en los apoyos, tal como se muestra en la figura 6.60

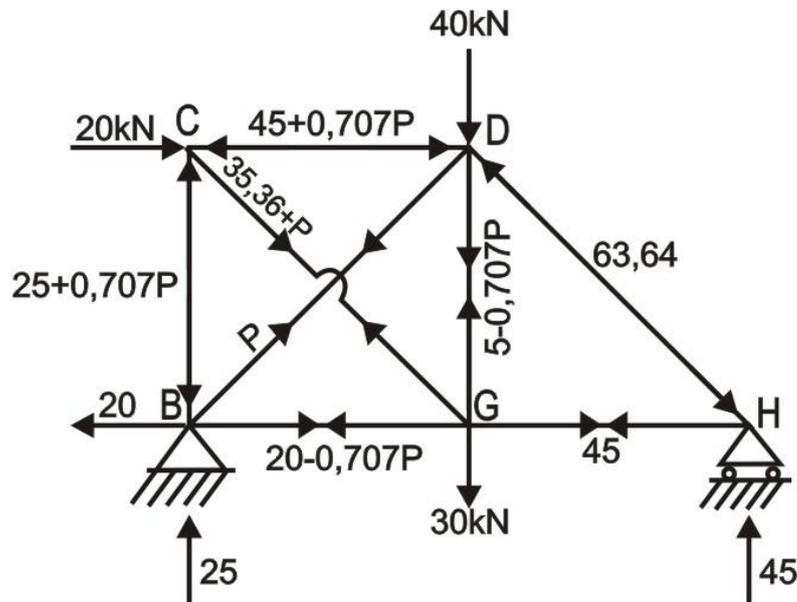


Fig. 6.60

Posteriormente, derivamos y llenamos la tabla 6.4, aplicando la condición $\frac{\partial W}{\partial P} = 0$, porque es la redundante desconocida.

Tabla 6.4

BARRA	L (m)	EA (kN)	$F_{(P)}$	$\frac{\partial F_{(P)}}{\partial P}$	$F \frac{\partial F}{\partial P} \frac{L}{EA}$
BC	5	$4 \cdot 10^6$	$-(25 + 0,707P)$	-0,707	$\frac{22,09 + 0,62P}{10^6}$
BD	7,07	$6 \cdot 10^6$	P	1	$\frac{1,18P}{10^6}$
BG	5	$4 \cdot 10^6$	$20 - 0,707P$	-0,707	$\frac{-17,68 + 0,62P}{10^6}$
CD	5	$4 \cdot 10^6$	$-(45 + 0,707P)$	-0,707	$\frac{39,77 + 0,62P}{10^6}$
CG	7,07	$6 \cdot 10^6$	$35,36 + P$	1	$\frac{41,67 + 1,18P}{10^6}$
DG	5	$6 \cdot 10^6$	$5 - 0,707P$	-0,707	$\frac{-2,95 + 0,42P}{10^6}$
DH	7,07	$4 \cdot 10^6$	-63,64	0	0
GH	5	$4 \cdot 10^6$	45	0	0

$$\sum = \frac{82,9 + 4,64P}{10^6}$$

Luego:

$$\frac{82,9 + 4,64P}{10^6} = 0 \quad \Rightarrow \quad P = -17,87 \text{ kN}$$

Con el resultado obtenido, calculamos las otras fuerzas internas o simplemente reemplazamos el valor de P en las fuerzas internas de la figura 6.60, obteniendo los resultados finales mostrados en la figura 6.61

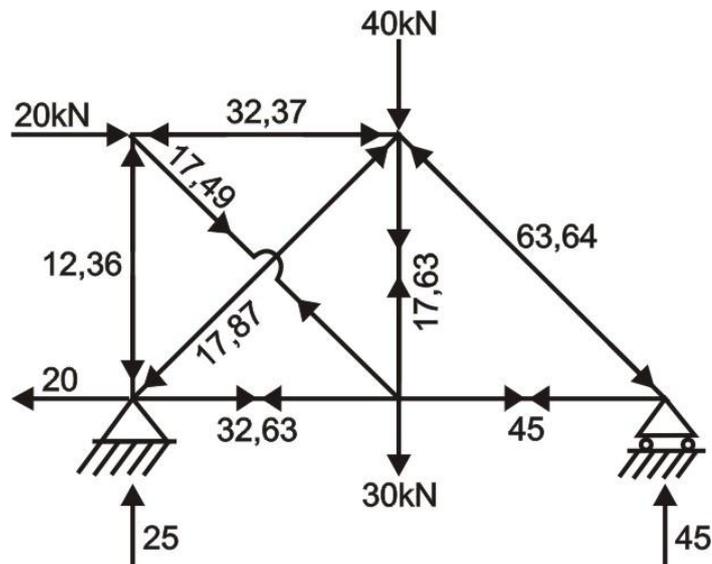


Fig. 6.61

PROBLEMA 6.19 Resolver la viga mostrada en la figura 6.62, considerando que es de rigidez constante.

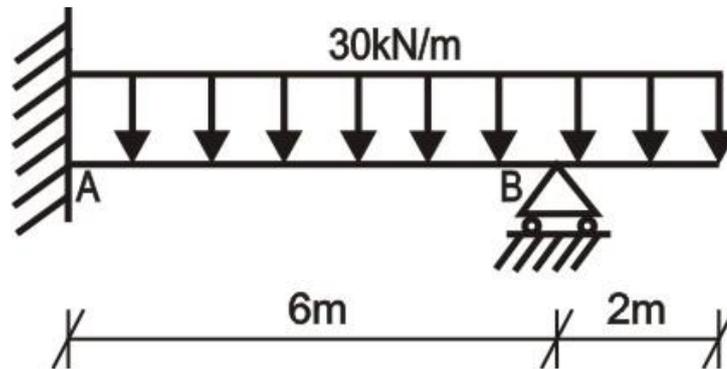


Fig. 6.62

Solución:

Determinamos la hiperestaticidad de la viga:

$$G.I. = R - 3 = 4 - 3 = 1$$

La viga es una vez hiperestática, por ello, eliminamos el apoyo en B y lo reemplazamos por su reacción V_B , calculando las reacciones en el apoyo A en función de V_B , tal como se muestra en la figura 6.63

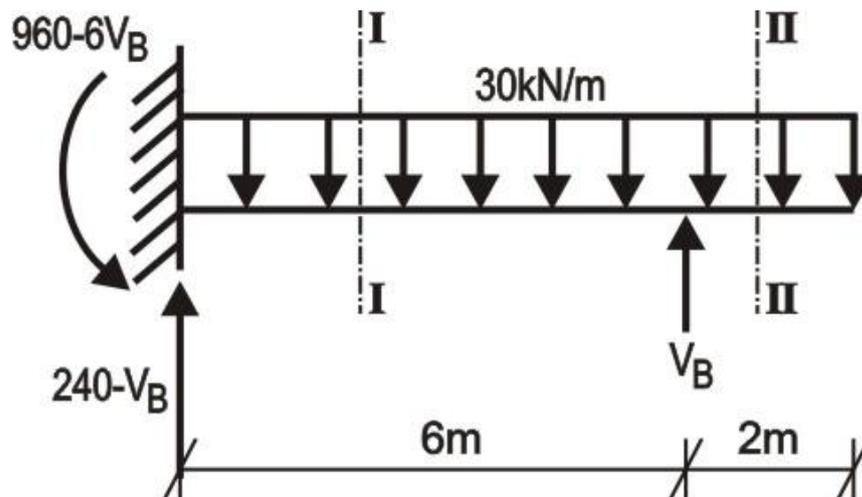


Fig. 6.63

Ahora, analizamos los dos tramos de la viga:

TRAMO I ($0 \leq x \leq 6$)

$$M_I = -(960 - 6V_B) + (240 - V_B)x - 15x^2$$

$$\frac{\partial M_I}{\partial V_B} = 6 - x$$

TRAMO II ($6 \leq x \leq 8$)

$$M_{II} = -(960 - 6V_B) + (240 - V_B)x - 15x^2 + V_B(x - 6)$$

$$\frac{\partial M_{II}}{\partial V_B} = 6 - x + x - 6 = 0$$

Como la deflexión en B es cero, se cumplirá la condición:

$$\frac{1}{EI} \int_L M \frac{\partial M}{\partial V_B} dx = 0$$

Reemplazamos valores y obtenemos:

$$\frac{1}{EI} \int_0^6 (-960 + 6V_B + 240x - V_B x - 15x^2)(6-x) dx = 0$$

De donde:

$$72V_B - 10260 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_B = 142,5 \text{ kN}$$

Con el resultado obtenido, calculamos las nuevas reacciones y graficamos los diagramas correspondientes, mostrados en la figura 6.64

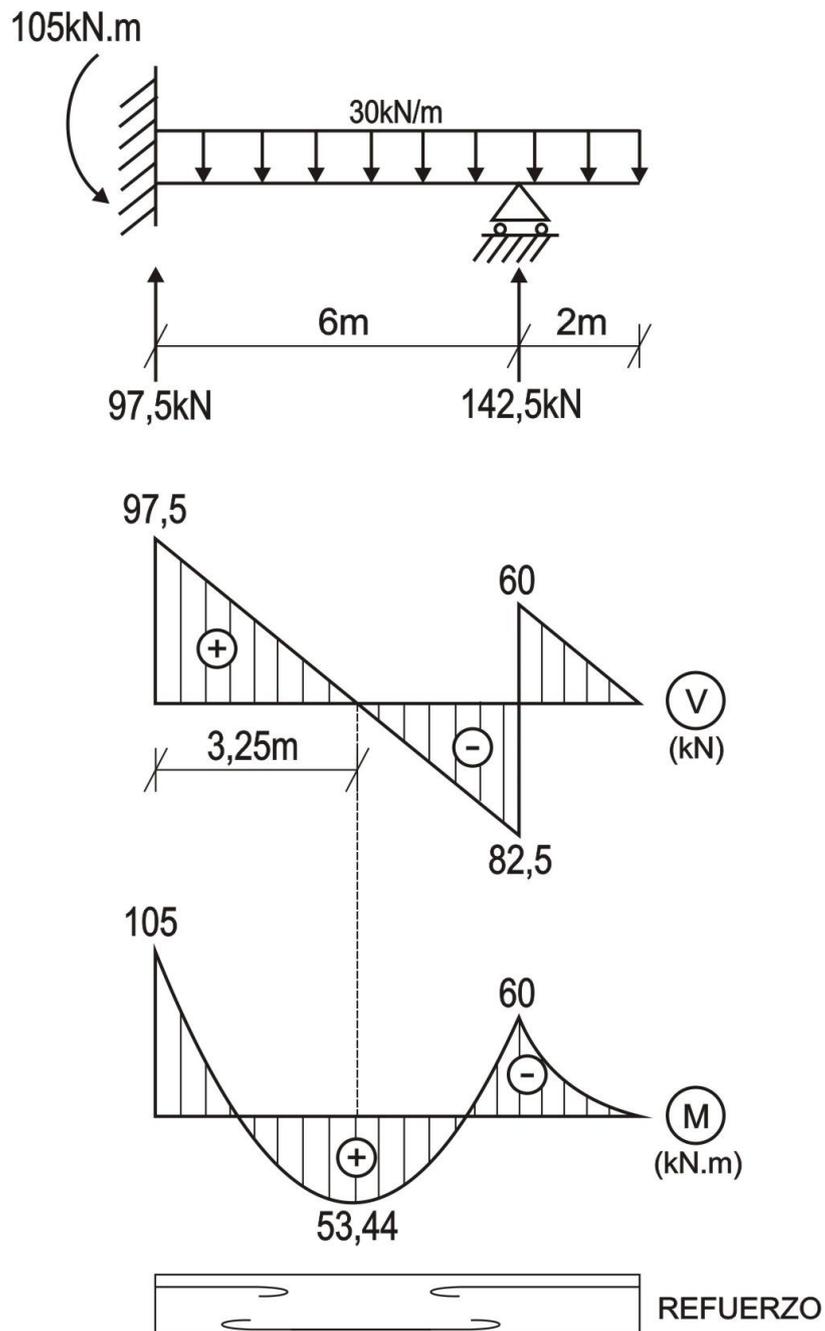


Fig. 6.64

PROBLEMA 6.20 Resolver el pórtico mostrado en la figura 6.65, si es de rigidez constante.

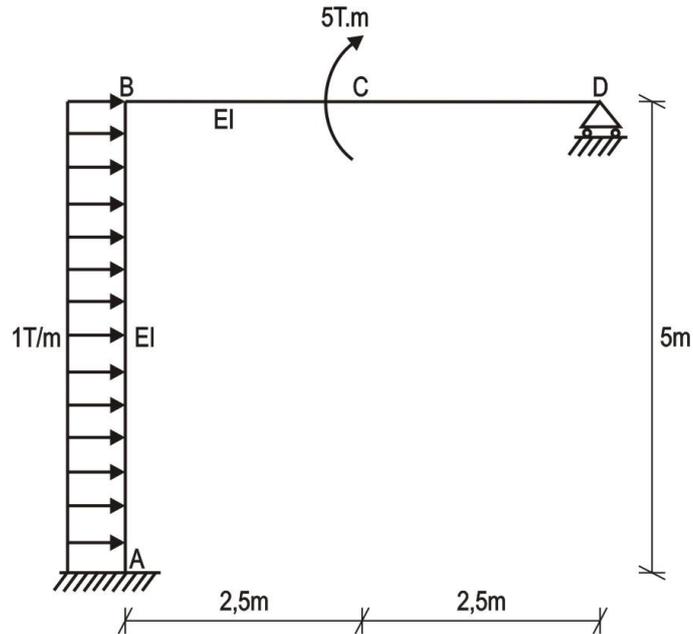


Fig. 6.65

Solución:

Analizamos la hiperestaticidad del pórtico dado, aplicando la fórmula:

$$G.I. = 3C - A$$

Donde:

G.I. - Grado de indeterminación del pórtico dado

C - Número de contornos cerrados

A - Número de articulaciones o rótulas simples, incluido la equivalencia de los apoyos, que para el caso de apoyo fijo equivale a una articulación o rótula y el apoyo móvil a dos.

En nuestro caso, unimos los apoyos por un disco llamado "disco de la tierra" y tenemos un solo contorno cerrado y las articulaciones simples son dos, debido al apoyo móvil en D.

De esta manera, tenemos:

$$G.I. = 3(1) - 2 = 1$$

Luego, eliminamos el apoyo en D y lo reemplazamos por su reacción V_D (figura 6.66), analizando el pórtico de derecha a izquierda, tramo por tramo.

TRAMO DC ($0 \leq x \leq 2,5$)

$$M_{DC} = V_D x$$

$$\frac{\partial M_{DC}}{\partial V_D} = x$$

TRAMO CB ($2,5 \leq x \leq 5$)

$$M_{CB} = V_D x - 5$$

$$\frac{\partial M_{CB}}{\partial V_D} = x$$

TRAMO BA ($0 \leq y \leq 5$)

$$M_{BA} = 5V_D - 5 - 1 \cdot y \cdot \frac{y}{2} = 5V_D - 5 - 0,5y^2$$

$$\frac{\partial M_{BA}}{\partial V_D} = 5$$

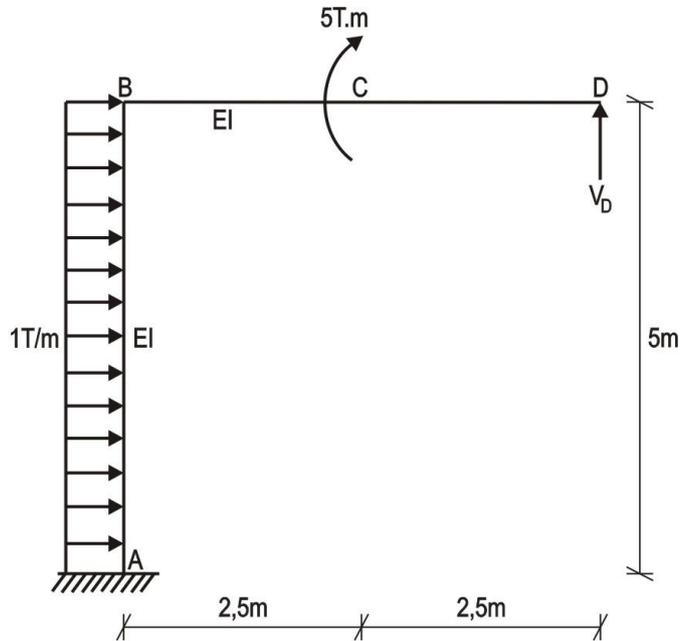


Fig. 6.66

Luego:

$$\frac{1}{EI} \int_L M \frac{\partial M}{\partial V_D} dx = 0$$

Reemplazamos valores y obtenemos:

$$\frac{1}{EI} \int_0^{2,5} (V_D x)(x) dx + \frac{1}{EI} \int_{2,5}^5 (V_D x - 5)(x) dx + \frac{1}{EI} \int_0^5 (5V_D - 5 - 0,5y^2)(5) dy = 0$$

De donde:

$$166,666V_D - 276,042 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_D = 1,656T$$

En base al resultado obtenido, determinamos las reacciones en el empotramiento (figura 6.67) y graficamos los diagramas correspondientes de fuerza axial o normal, cortante y momento flector, tal como se muestra en la figura 6.68

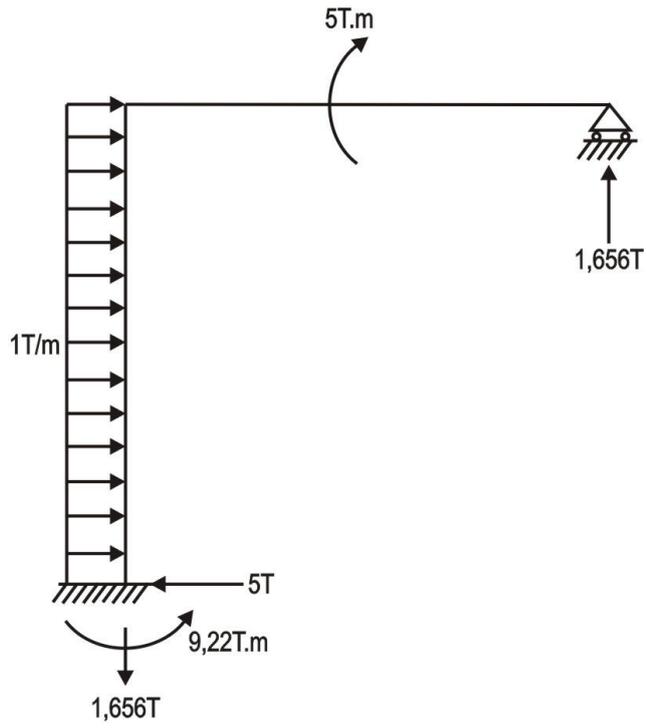


Fig. 6.67

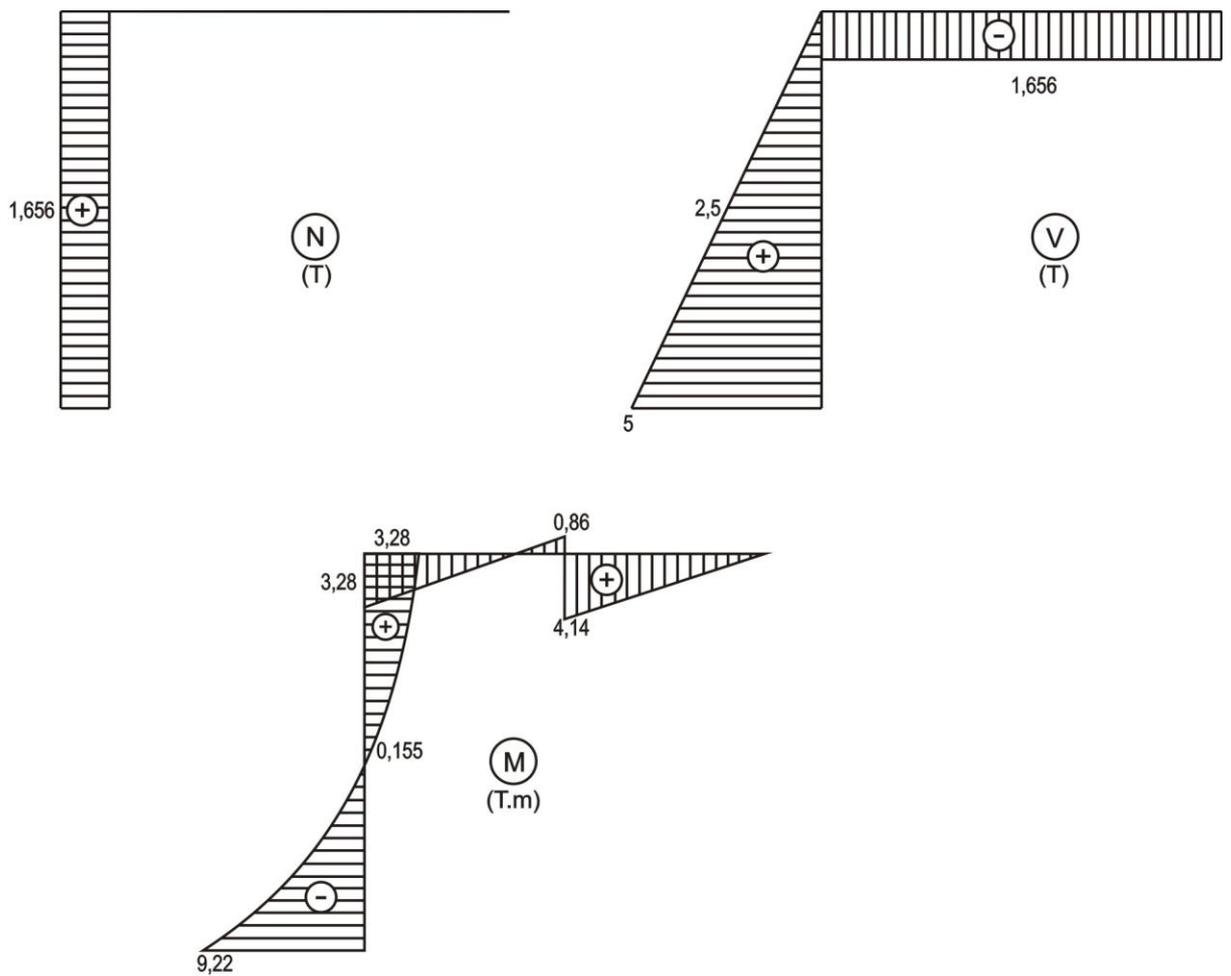


Fig. 6.68

CAPITULO 7

ESTRUCTURAS HIPERESTATICAS

7.1 GRADO DE INDETERMINACION

VIGAS:

El grado de indeterminación de una viga hiperestática, se determina por la fórmula 7.1

$$G.I. = R - A - 3 \quad (7.1)$$

Donde:

G.I. - Grado de indeterminación de la viga

R - Número de reacciones en los apoyos

A - Número de articulaciones simples

Se dice, que una articulación o rótula es simple, si une a dos barras.

ARMADURAS:

Para el caso de armaduras, el grado de indeterminación se calcula por la expresión 7.2

$$G.I. = B - 2N \quad (7.2)$$

Donde:

G.I. - Grado de indeterminación de la armadura

B - Número de barras de la armadura, incluido los apoyos, siendo el apoyo fijo equivalente a dos barras y el apoyo móvil a una barra

N - Número de nudos de la armadura

PORTICOS:

El grado de indeterminación de pórticos hiperestáticos, se determina por la fórmula 7.3

$$G.I. = 3C - A \quad (7.3)$$

Donde:

G.I. - Grado de indeterminación del pórtico

C - Número de contornos cerrados

A - Número de articulaciones o rótulas simples, incluido la equivalencia de los apoyos, que para el caso de apoyo fijo equivale a una articulación o rótula y el apoyo móvil a dos

El número de contornos cerrados se determina uniendo los apoyos, que forman un disco llamado *disco de la tierra* y luego se calculan todos los contornos cerrados que se han formado producto de esta unión.

Para calcular una rótula o articulación compleja o compuesta, es decir, aquella que une a varias barras, su equivalente es igual al número de barras menos uno. Esto quiere decir, que si una rótula une a tres barras, es equivalente a dos rótulas o articulaciones simples.

7.2 ECUACION DE LOS TRES MOMENTOS

Este método se utiliza para resolver vigas continuas (figura 7.1,a) sometida a diversos tipos de cargas.

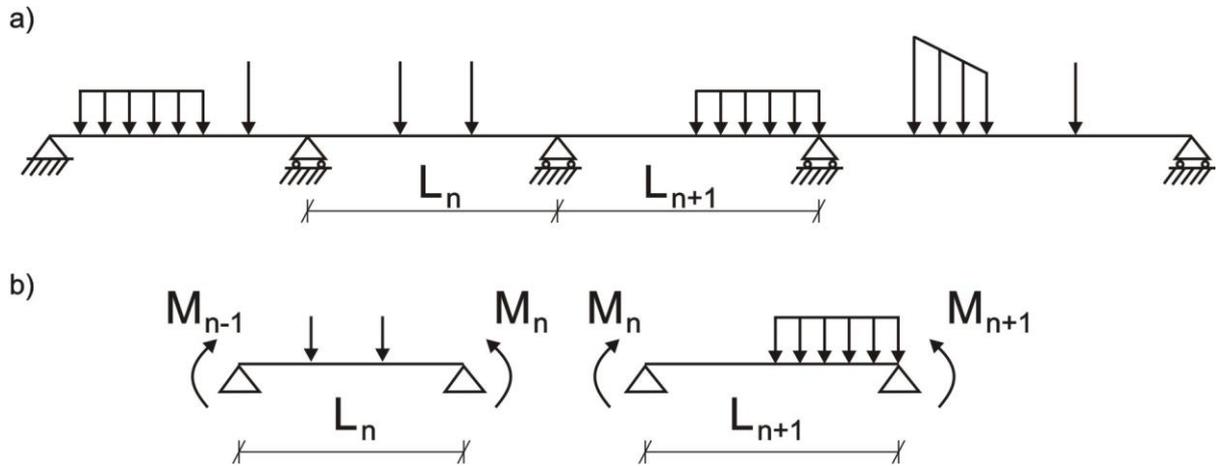


Fig. 7.1

En la figura 7.1,b se presentan separados los tramos respectivos de la viga, que se pueden tratar como vigas simplemente apoyadas con momentos redundantes en sus extremos.

En caso general, los diagramas de momentos debidos a las cargas aplicadas tendrán áreas A_n y A_{n+1} con sus centroides localizados como se muestra en la figura 7.2

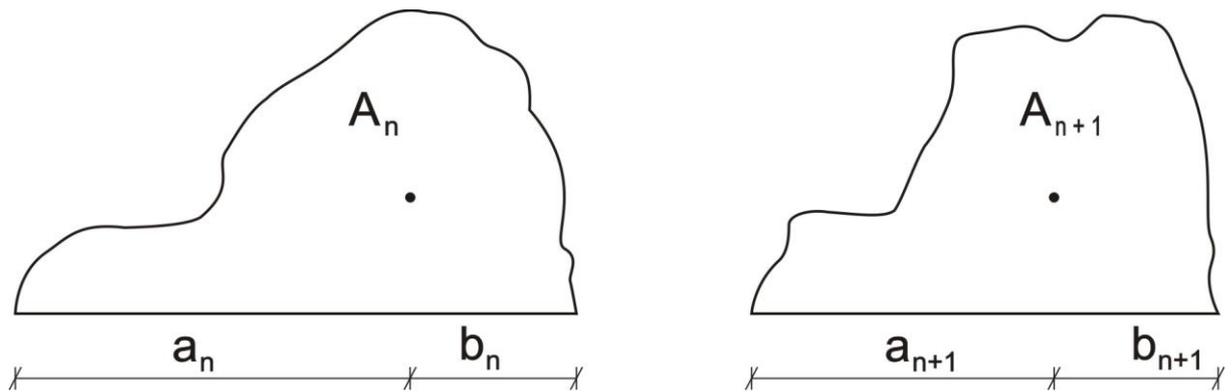


Fig. 7.2

En caso que la sección sea constante, la Ecuación de los tres momentos para vigas continuas es:

$$M_{n-1}L_n + 2M_n(L_n + L_{n+1}) + M_{n+1}L_{n+1} = -\frac{6A_n a_n}{L_n} - \frac{6A_{n+1} b_{n+1}}{L_{n+1}} \quad (7.4)$$

El procedimiento consiste entonces en tomar porciones de viga formadas por dos tramos consecutivos y aplicarles la ecuación 7.4. Resulta así, un sistema de ecuaciones cuya solución da los momentos en los apoyos.

Una forma alterna de la Ecuación de los tres momentos se obtiene al observar que los términos de la derecha de la ecuación son simplemente las reacciones de las vigas conjugadas correspondientes (figura 7.3), multiplicadas por EI .

Queda entonces:

$$M_{n-1}L_n + 2M_n(L_n + L_{n+1}) + M_{n+1}L_{n+1} = -6(\alpha_d)_n - 6(\alpha_i)_{n+1} \quad (7.5)$$

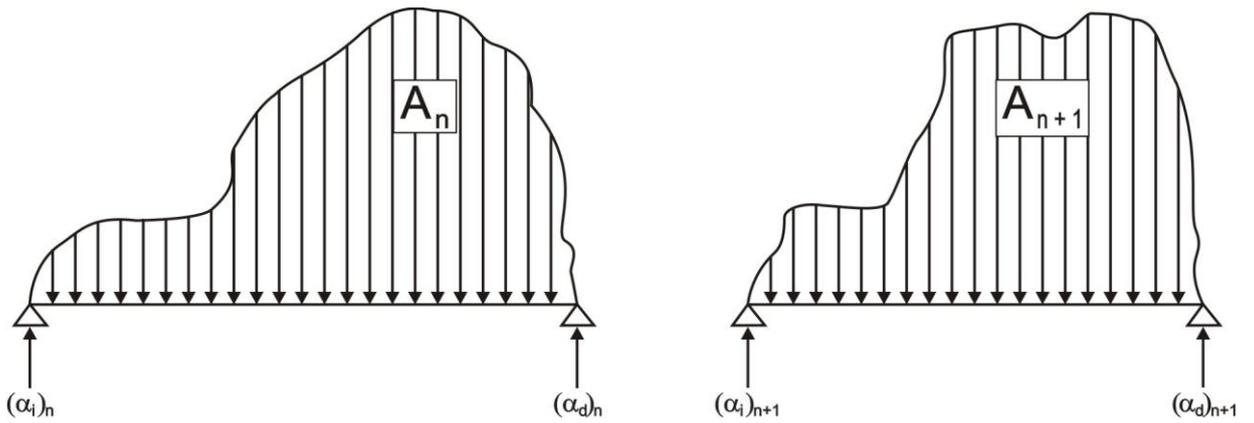


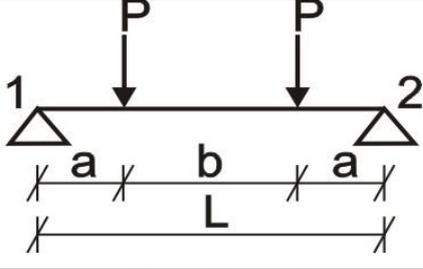
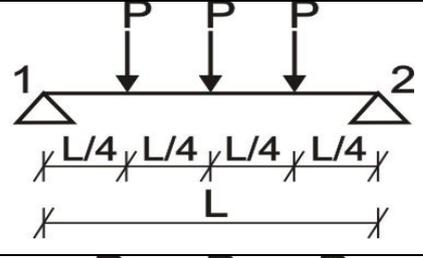
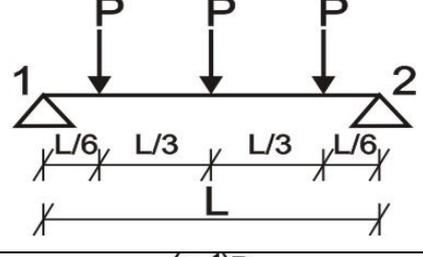
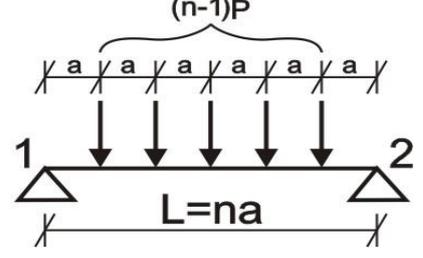
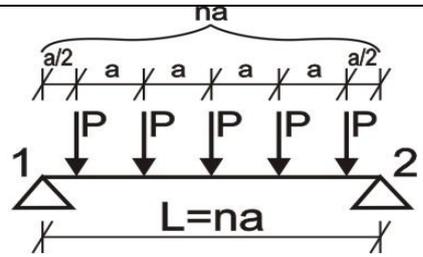
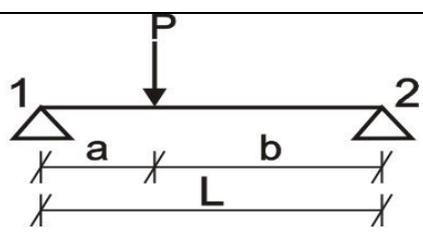
Fig. 7.3

Para aplicar la ecuación anterior, resultan útiles tablas como la tabla 7.1, que dan de una vez las reacciones de la viga conjugada para diversas sollicitaciones de carga, siendo $\alpha_d = \alpha_2$ y $\alpha_i = \alpha_1$ correspondiente a los tramos "n" y "n + 1", respectivamente.

Tabla 7.1

Nº	Esquema de carga	Rotaciones en los apoyos 1 y 2
1		$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{wL^3}{24}$
2		$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{ws}{48}(3L^2 - s^2)$
3		$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{ws^2}{12}(2L + a)$
4		$\alpha_1 = \frac{ws^2}{24L}(2L - s)^2$ $\alpha_2 = \frac{ws^2}{24L}(2L^2 - s^2)$

5		$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{5wL^3}{192}$
6		$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{ws}{48}(3L^2 - 2s^2)$
7		$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{wL^3}{64}$
8		$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{ws^2}{24}(2L - s)$
9		$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{w}{24}[L^3 - a^2(2L - a)]$
10		$\alpha_1 = \frac{wL^3}{45}$ $\alpha_2 = \frac{7wL^3}{360}$
11		$\alpha_1 = M \frac{L}{6} \left(\frac{3b^2}{L^2} - 1 \right)$ $\alpha_2 = M \frac{L}{6} \left(1 - \frac{3a^2}{L^2} \right)$
12		$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{PL^2}{16}$

13		$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{Pa(L-a)}{2}$
14		$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{5PL^2}{32}$
15		$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{19PL^2}{144}$
16		$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{PL^2}{24} \cdot \frac{n^2 - 1}{n}$
17		$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{PL^2}{48} \cdot \frac{2n^2 + 1}{n}$
18		$\alpha_1 = \frac{Pab}{6L}(b+L)$ $\alpha_2 = \frac{Pab}{6L}(a+L)$

Cuando los extremos de las vigas descansan sobre apoyos simples o están en voladizo, se empieza por determinar los valores de la carga puntual y momento equivalente a la acción de dicho tramo. En el caso que sea el apoyo empotrado, no se puede determinar a priori el valor del momento. En este caso, dado que la condición geométrica requerida es que la pendiente en dicho apoyo debe ser cero, se puede añadir una luz imaginaria adyacente al empotramiento $L_0 = 0$, simplemente apoyada en el apoyo opuesto y de inercia infinita (figura 7.4)

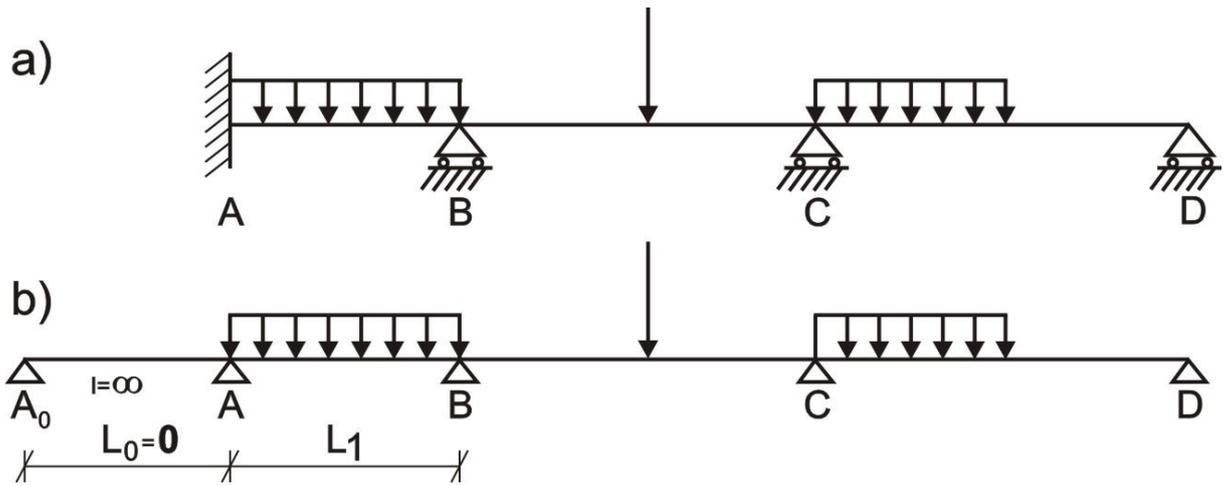


Fig. 7.4

La Ecuación de los tres momentos se puede extender para incluir el efecto de asentamientos diferenciales en los apoyos (figura 7.5)

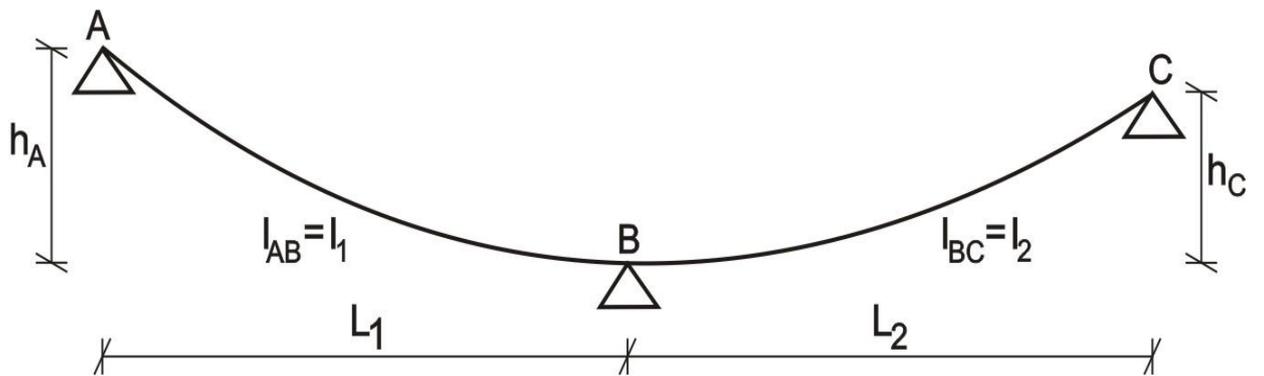


Fig. 7.5

$$M_A \left(\frac{L_1}{I_1} \right) + 2M_B \left(\frac{L_1}{I_1} + \frac{L_2}{I_2} \right) + M_C \left(\frac{L_2}{I_2} \right) = -\frac{6(\alpha_d)_1}{I_1} - \frac{6(\alpha_i)_2}{I_2} + \frac{6Eh_A}{L_1} + \frac{6Eh_C}{L_2} \quad (7.6)$$

PROBLEMA 7.1 Graficar los diagramas de fuerza cortante, momento flector y refuerzo para la viga continua mostrada en la figura 7.6

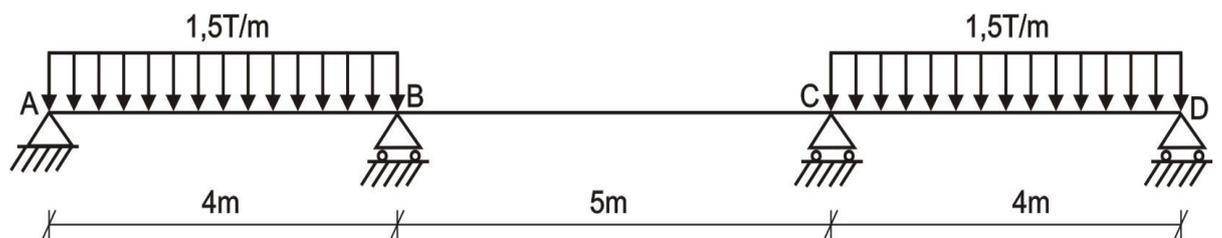


Fig. 7.6

Solución:

Analizamos el tramo ABC de la viga, aplicando la ecuación 7.5 y sabiendo que $M_A = 0$ (apoyo simple y extremo).

$$M_A(4) + 2M_B(4+5) + M_C(5) = -6\frac{1,5 \cdot 4^3}{24} - 6(0)$$

$$18M_B + 5M_C = -24 \quad (a)$$

Ahora, analizamos el tramo BCD, considerando que $M_D = 0$ (apoyo simple y extremo).

$$M_B(5) + 2M_C(5+4) + M_D(4) = -6(0) - 6\frac{1,5 \cdot 4^3}{24}$$

$$5M_B + 18M_C = -24 \quad (b)$$

Resolvemos las ecuaciones (a) y (b), obteniendo:

$$M_B = M_C = -1,043 \text{T.m}$$

Luego, determinamos las reacciones en cada tramo de la viga, efectuando el equilibrio de los mismos.

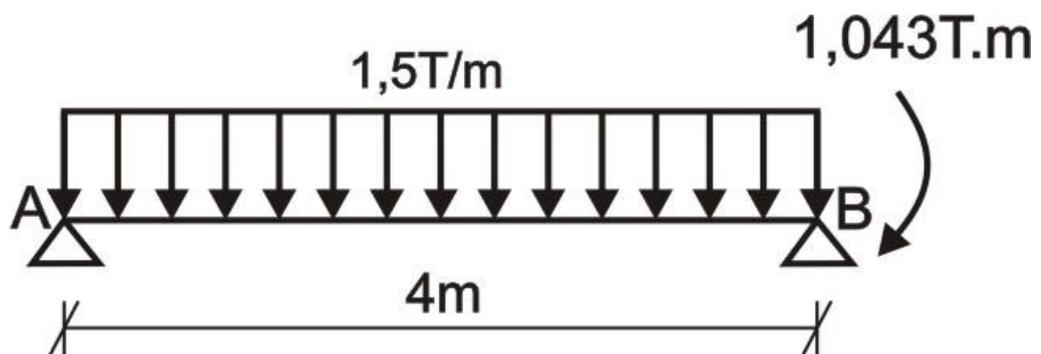


Fig. 7.7

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_{BA}(4) - 1,5(4)(2) - 1,043 = 0 \quad \therefore V_{BA} = 3,26 \text{T} \uparrow$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_{AB} + 3,26 - 1,5(4) = 0 \quad \therefore V_{AB} = 2,74 \text{T} \uparrow$$

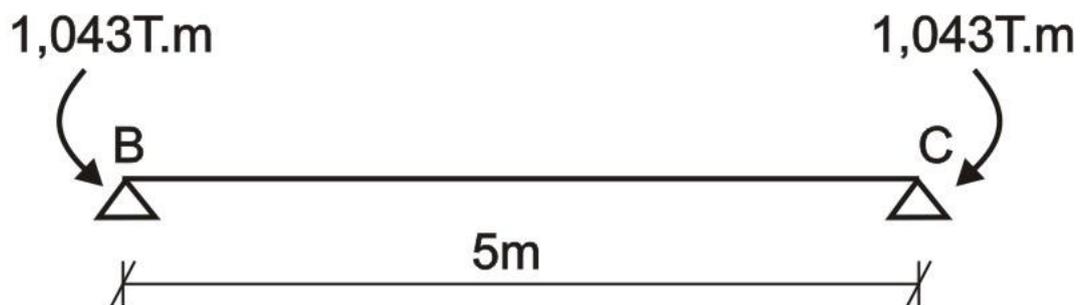


Fig. 7.8

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow V_{CB} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_{BC} = 0$$

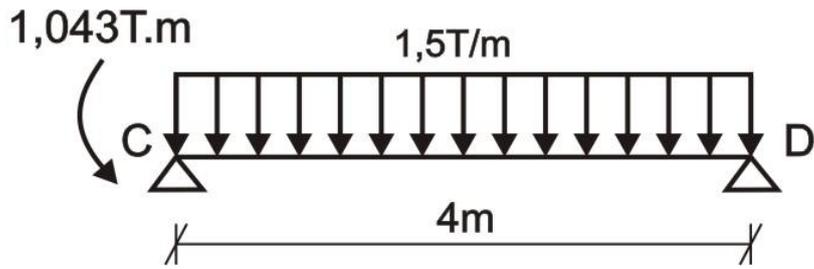


Fig. 7.9

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow V_{DC}(4) + 1,043 - 1,5(4)(2) = 0 \quad \therefore V_{DC} = 2,74T \uparrow$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_{CD} + 2,74 - 1,5(4) = 0 \quad \therefore V_{CD} = 3,26T \uparrow$$

De esta manera, graficamos los diagramas finales de fuerza cortante, momento flector y refuerzo (figura 7.10)

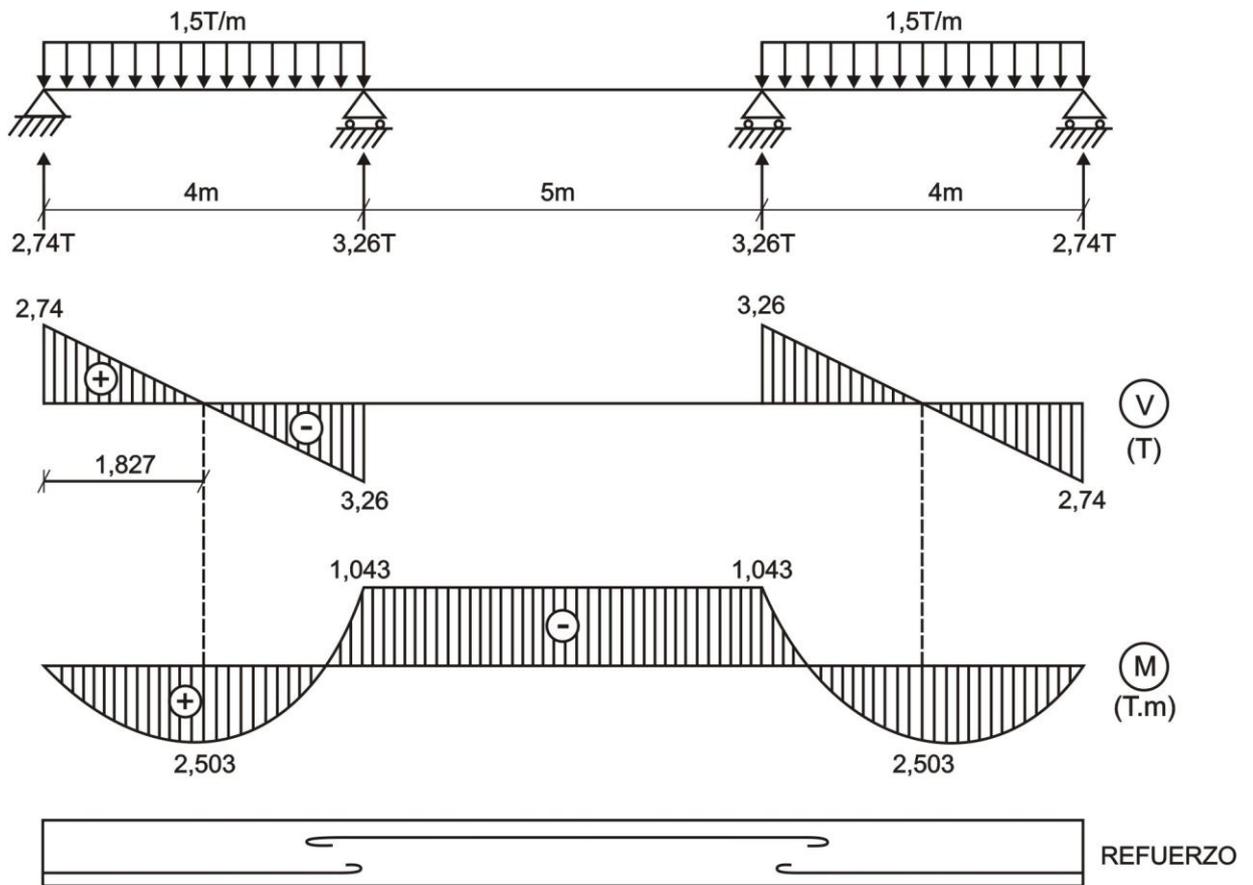


Fig. 7.10

PROBLEMA 7.2 Resolver la viga continua de la figura 7.11, si es de sección constante.

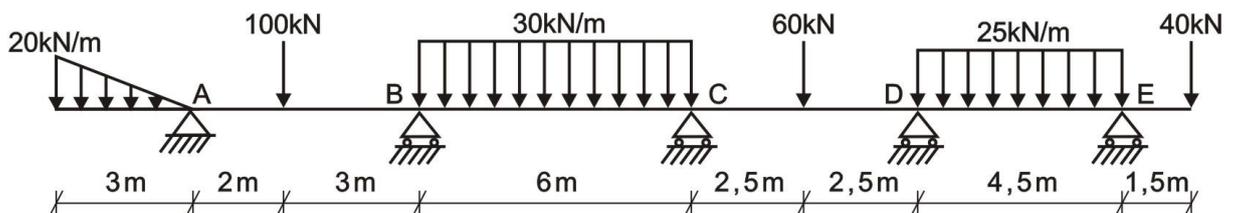


Fig. 7.11

Solución:

Reemplazamos los efectos de las cargas en los voladizos por una carga puntual y un momento en el apoyo más cercano (figura 7.12)

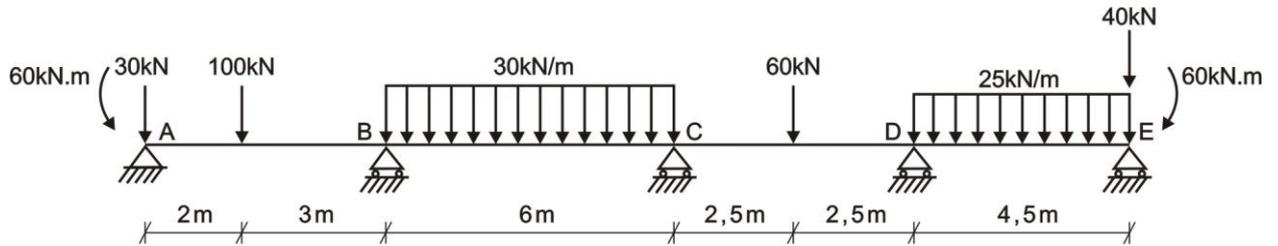


Fig. 7.12

Ahora planteamos las ecuaciones de los tres momentos en los tramos ABC, BCD y CDE.

TRAMO ABC:

$$M_A(5) + 2M_B(5+6) + M_C(6) = -6\left[\frac{100 \cdot 2 \cdot 3}{6 \cdot 5}(2+5)\right] - 6\left(\frac{30 \cdot 6^3}{24}\right)$$

$$-60(5) + 22M_B + 6M_C = -840 - 1620$$

$$11M_B + 3M_C = -1080 \quad (a)$$

TRAMO BCD:

$$M_B(6) + 2M_C(6+5) + M_D(5) = -6\left(\frac{30 \cdot 6^3}{24}\right) - 6\left(\frac{60 \cdot 5^2}{16}\right)$$

$$6M_B + 22M_C + 5M_D = -2182,5 \quad (b)$$

TRAMO CDE:

$$M_C(5) + 2M_D(5+4,5) + M_E(4,5) = -6\left(\frac{60 \cdot 5^2}{16}\right) - 6\left(\frac{25 \cdot 4,5^3}{24}\right)$$

$$5M_C + 19M_D - 60(4,5) = -562,5 - 569,53$$

$$5M_C + 19M_D = -862,03 \quad (c)$$

Resolvemos las ecuaciones (a), (b) y (c), obteniendo:

$$M_B = -78,616 \text{ kN.m}$$

$$M_C = -71,743 \text{ kN.m}$$

$$M_D = -26,490 \text{ kN.m}$$

Calculamos las reacciones en cada tramo de la viga.

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad V_A^{\text{vol}} - \frac{20(3)}{2} = 0 \quad \therefore \quad V_A^{\text{vol}} = 30 \text{ kN} \uparrow$$

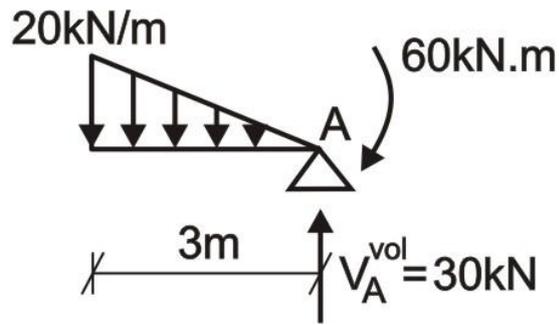


Fig. 7.13

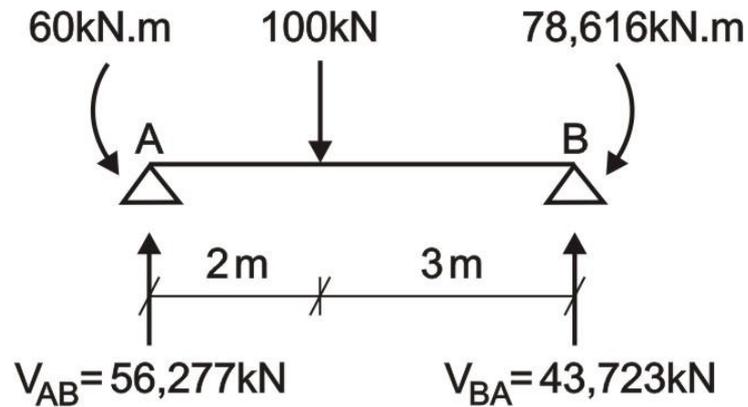


Fig. 7.14

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_{BA}(5) - 100(2) - 78,616 + 60 = 0 \quad \therefore V_{BA} = 43,723 \text{ kN } \uparrow$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_{AB} + 43,723 - 100 = 0 \quad \therefore V_{AB} = 56,277 \text{ kN } \uparrow$$

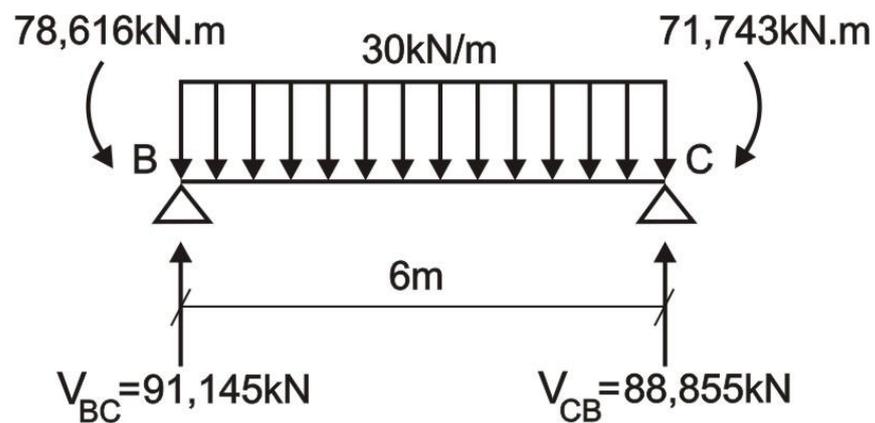


Fig. 7.15

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow V_{CB}(6) - 30(6)(3) - 71,743 + 78,616 = 0 \quad \therefore V_{CB} = 88,855 \text{ kN } \uparrow$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_{BC} + 88,855 - 30(6) = 0 \quad \therefore V_{BC} = 91,145 \text{ kN } \uparrow$$

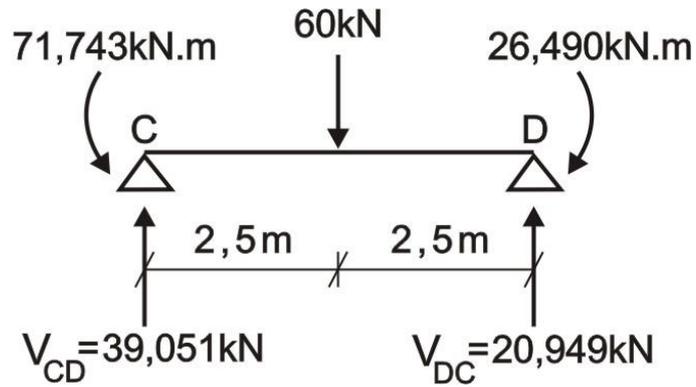


Fig. 7.16

$$\begin{aligned} \sum M_C = 0 &\Rightarrow V_{DC}(5) - 60(2,5) - 26,490 + 71,743 = 0 &\therefore V_{DC} = 20,949\text{kN} \uparrow \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow V_{CD} + 20,949 - 60 = 0 &\therefore V_{CD} = 39,051\text{kN} \uparrow \end{aligned}$$

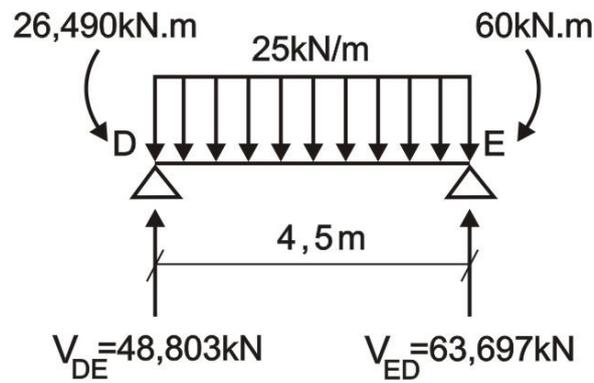


Fig. 7.17

$$\begin{aligned} \sum M_D = 0 &\Rightarrow V_{ED}(4,5) - 25(4,5)(2,25) - 60 + 26,490 = 0 &\therefore V_{ED} = 63,697\text{kN} \uparrow \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow V_{DE} + 63,697 - 25(4,5) = 0 &\therefore V_{DE} = 48,803\text{kN} \uparrow \end{aligned}$$

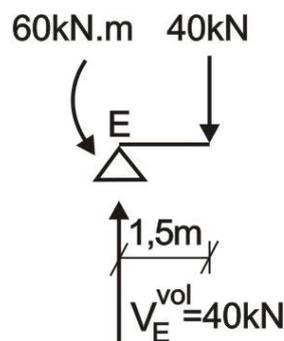


Fig. 7.18

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_E^{\text{vol}} - 40 = 0 \quad \therefore V_E^{\text{vol}} = 40\text{kN} \uparrow$$

Ahora, graficamos los diagramas de fuerza cortante y momento flector, teniendo en cuenta que las reacciones en los apoyos es igual a la suma de las reacciones en dicho apoyo de los tramos que convergen en el nudo.

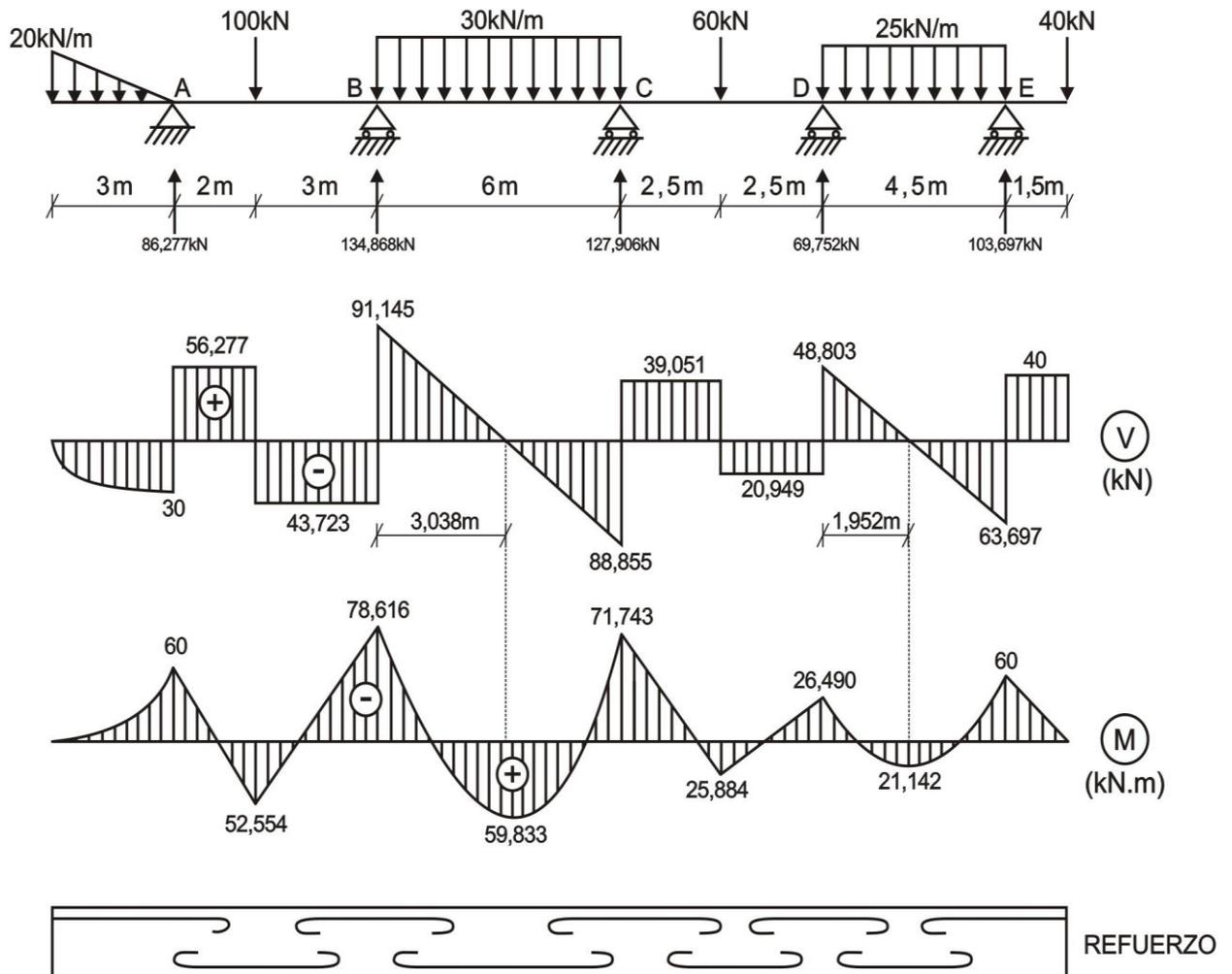


Fig. 7.19

PROBLEMA 7.3 Resolver la viga de la figura 7.20, si es de sección constante.

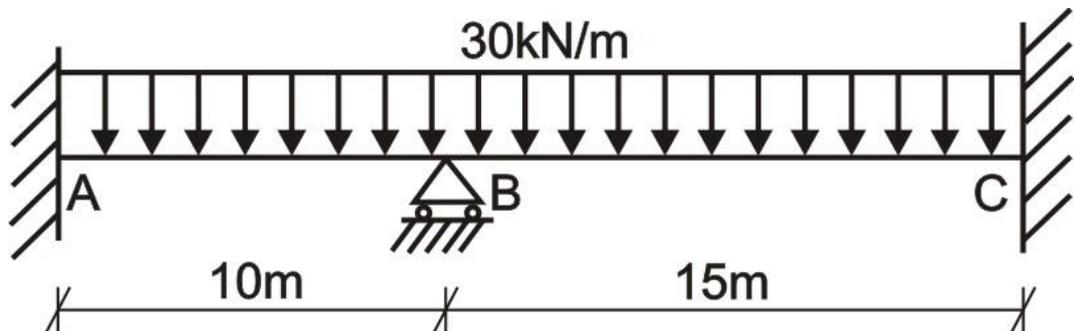


Fig. 7.20

Solución:

Como A y C son empotramientos, por ello adicionamos en cada lado un tramo ficticio de longitud cero y de inercia infinita (figura 7.21)

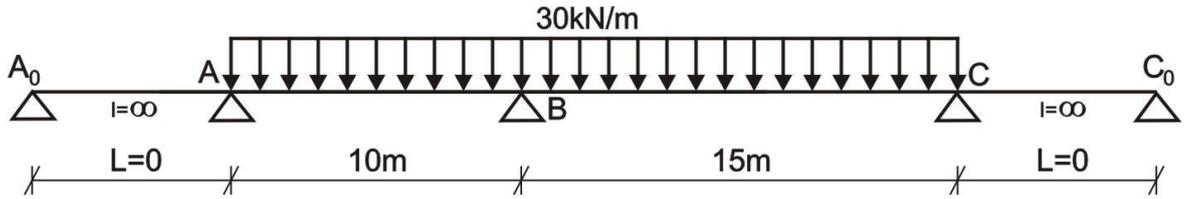


Fig. 7.21

Ahora, analizamos los tramos A_0AB , ABC y BCC_0 .

TRAMO A_0AB :

$$M_{A_0}(0) + 2M_A(0+10) + M_B(10) = -6(0) - 6\left(\frac{30 \cdot 10^3}{24}\right)$$

$$2M_A + M_B = -750 \quad (a)$$

TRAMO ABC :

$$M_A(10) + 2M_B(10+15) + M_C(15) = -6\left(\frac{30 \cdot 10^3}{24}\right) - 6\left(\frac{30 \cdot 15^3}{24}\right)$$

$$2M_A + 10M_B + 3M_C = -6562,5 \quad (b)$$

TRAMO BCC_0 :

$$M_B(15) + 2M_C(15+0) + M_{C_0}(0) = -6\left(\frac{30 \cdot 15^3}{24}\right) - 6(0)$$

$$M_B + 2M_C = -1687,5 \quad (c)$$

Resolvemos las ecuaciones (a), (b) y (c), obteniendo:

$$M_A = -156,25 \text{ kN.m}$$

$$M_B = -437,5 \text{ kN.m}$$

$$M_C = -625 \text{ kN.m}$$

Ahora, determinamos las reacciones en cada tramo de la viga.

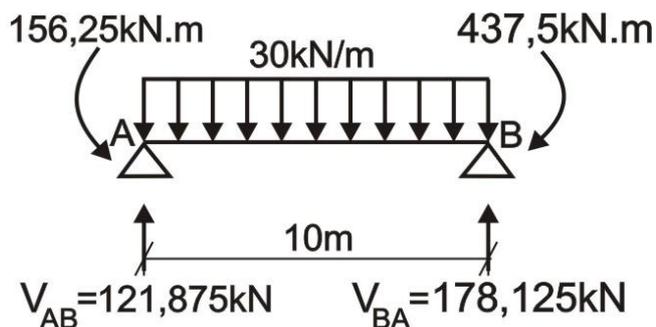


Fig. 7.22

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_{BA}(10) - 30(10)(5) - 437,5 + 156,25 = 0 \therefore V_{BA} = 178,125 \text{ kN} \uparrow$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_{AB} + 178,125 - 30(10) = 0 \therefore V_{AB} = 121,875 \text{ kN} \uparrow$$

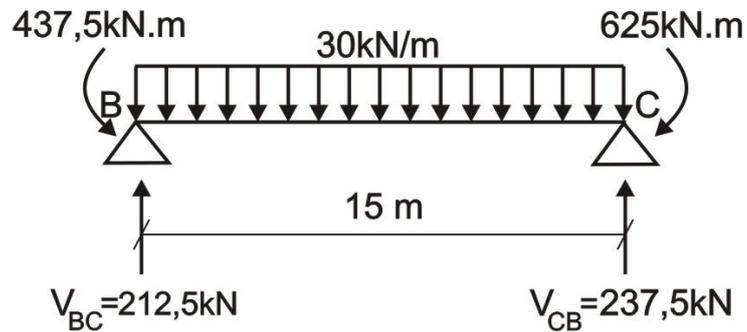


Fig. 7.23

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow V_{CB}(15) - 30(15)(7,5) - 625 + 437,5 = 0 \therefore V_{CB} = 237,5 \text{ kN} \uparrow$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_{BC} + 237,5 - 30(15) = 0 \therefore V_{BC} = 212,5 \text{ kN} \uparrow$$

Graficamos los diagramas finales de fuerza cortante, momento flector y refuerzo.

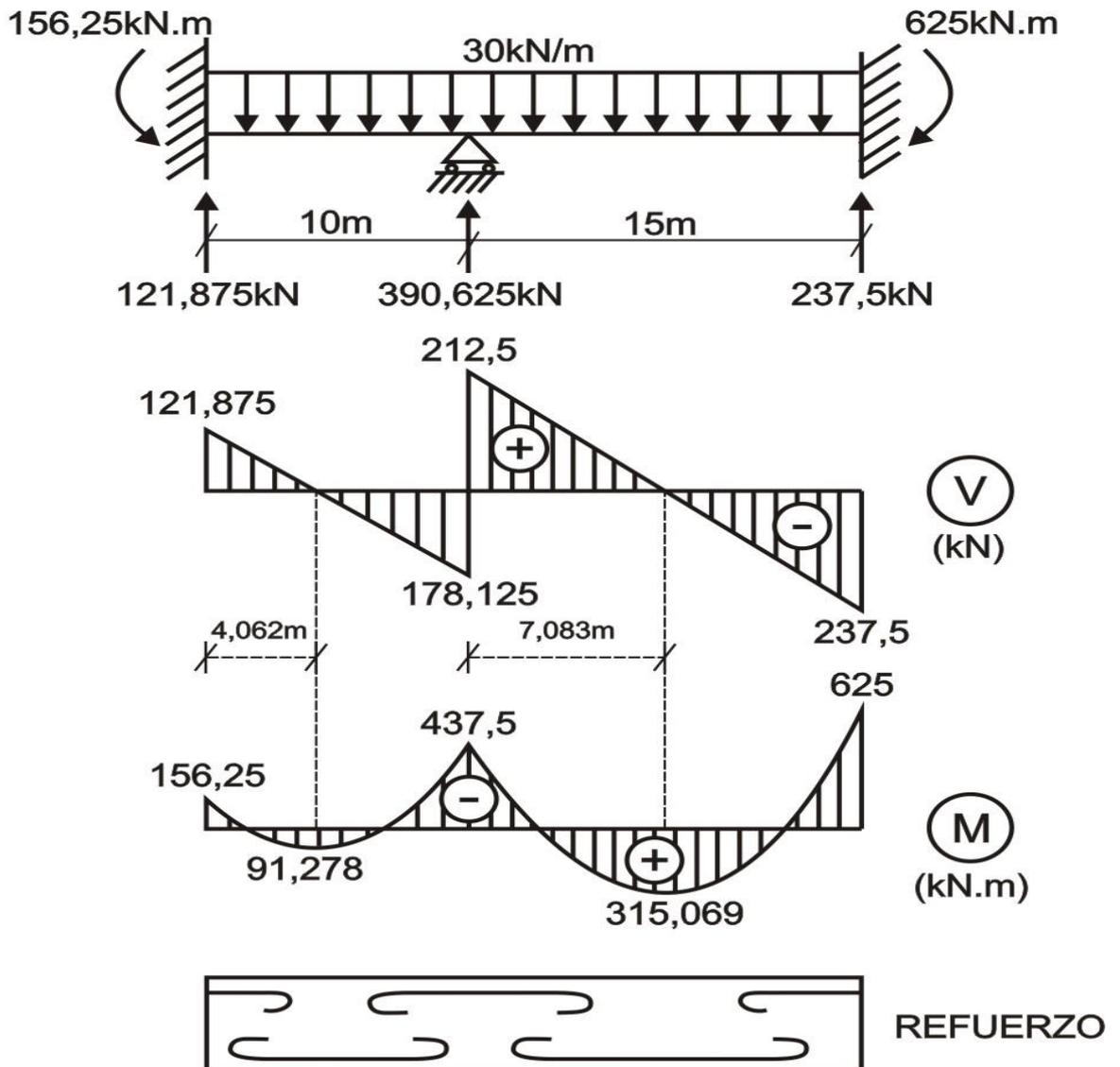


Fig. 7.24

PROBLEMA 7.4 Resolver la viga de la figura 7.25, sabiendo que el apoyo B sufrió un asentamiento de 12mm. Considerar $I = 80 \cdot 10^7 \text{ mm}^4$ y $E = 200 \text{ kN/mm}^2$

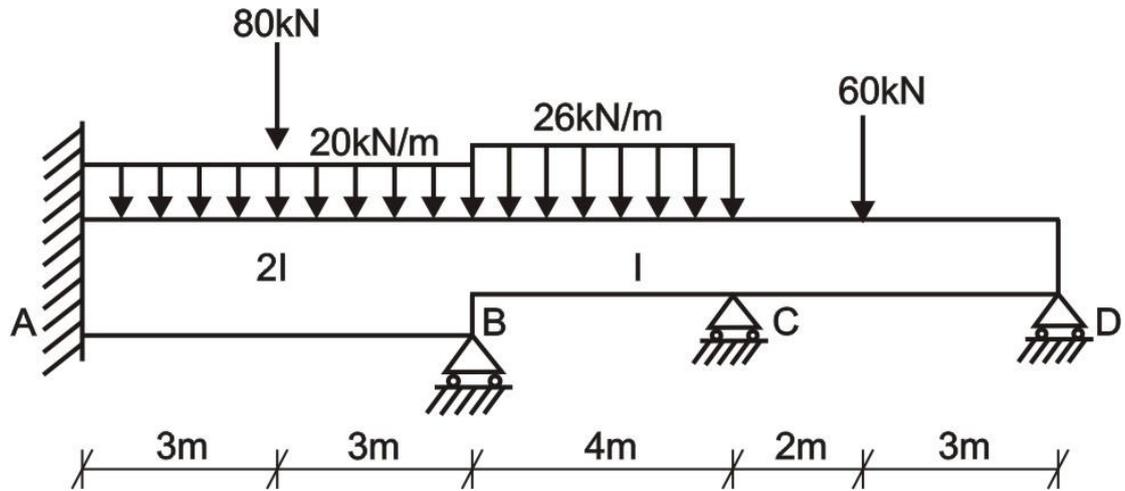


Fig. 7.25

Solución:

Como A es un empotramiento, entonces adicionamos un tramo ficticio de longitud cero y de inercia infinita (figura 7.26)

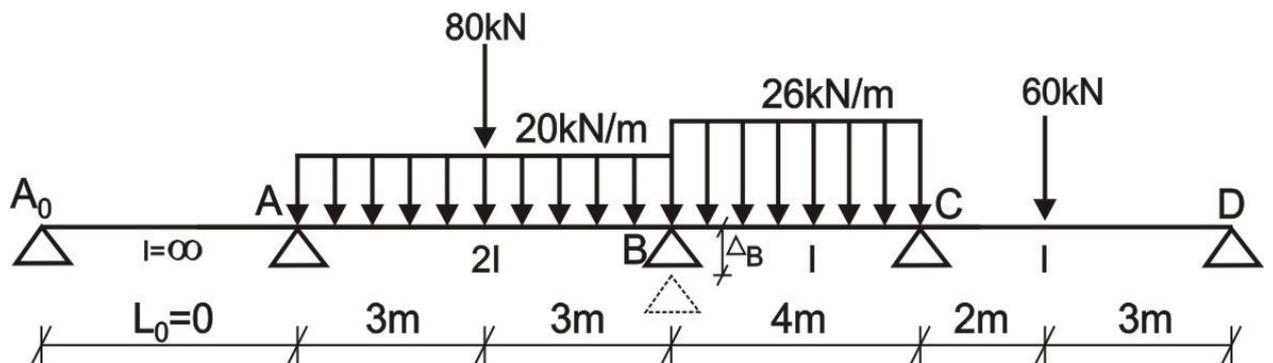


Fig. 7.26

Ahora, analizamos los tramos A_0AB , ABC y BCD , transformando los datos del problema en un solo tipo de unidades.

$$E = 200 \text{ kN/mm}^2 = 2 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2$$

$$I = 80 \cdot 10^7 \text{ mm}^4 = 8 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$\Delta_B = 12 \text{ mm} = 12 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

TRAMO A_0AB :

$$M_{A_0} \left(\frac{0}{\infty} \right) + 2M_A \left(\frac{0}{\infty} + \frac{6}{2I} \right) + M_B \left(\frac{6}{2I} \right) = -\frac{6(0)}{\infty} - \frac{6 \left(\frac{20 \cdot 6^3}{24} + \frac{80 \cdot 6^2}{16} \right)}{2I} + 0 + \frac{6 \cdot 2 \cdot 10^8 (-12 \cdot 10^{-3})}{6}$$

Efectuando cálculos y reemplazando el valor del momento de inercia I , obtenemos:

$$2M_A + M_B = -1000 \quad (a)$$

TRAMO ABC:

$$M_A \left(\frac{6}{2I} \right) + 2M_B \left(\frac{6}{2I} + \frac{4}{I} \right) + M_C \left(\frac{4}{I} \right) = - \frac{6 \left(\frac{20.6^3}{24} + \frac{80.6^2}{16} \right)}{2I} - \frac{6 \left(\frac{26.4^3}{24} \right)}{I} + \frac{6.2 \cdot 10^8 \cdot 12 \cdot 10^{-3}}{6} + \frac{6.2 \cdot 10^8 \cdot 12 \cdot 10^{-3}}{4}$$

Efectuamos cálculos y reemplazamos el valor del momento de inercia I, obteniendo:

$$3M_A + 14M_B + 4M_C = 3304 \quad (b)$$

TRAMO BCD:

$$M_B \left(\frac{4}{I} \right) + 2M_C \left(\frac{4}{I} + \frac{5}{I} \right) + M_D \left(\frac{5}{I} \right) = - \frac{6 \left(\frac{26.4^3}{24} \right)}{I} - \frac{6 \left[\frac{60.2 \cdot 3}{6.5} (3+5) \right]}{I} + \frac{6.2 \cdot 10^8 (-12 \cdot 10^{-3})}{4}$$

Efectuamos cálculos y reemplazando el valor del momento de inercia I, obtenemos:

$$2M_B + 9M_C = -1936 \quad (c)$$

Resolvemos las ecuaciones (a), (b) y (c), obteniendo:

$$M_A = -743,946 \text{ kN.m}$$

$$M_B = 487,893 \text{ kN.m}$$

$$M_C = -323,532 \text{ kN.m}$$

Ahora determinamos las reacciones en cada tramo de la viga.

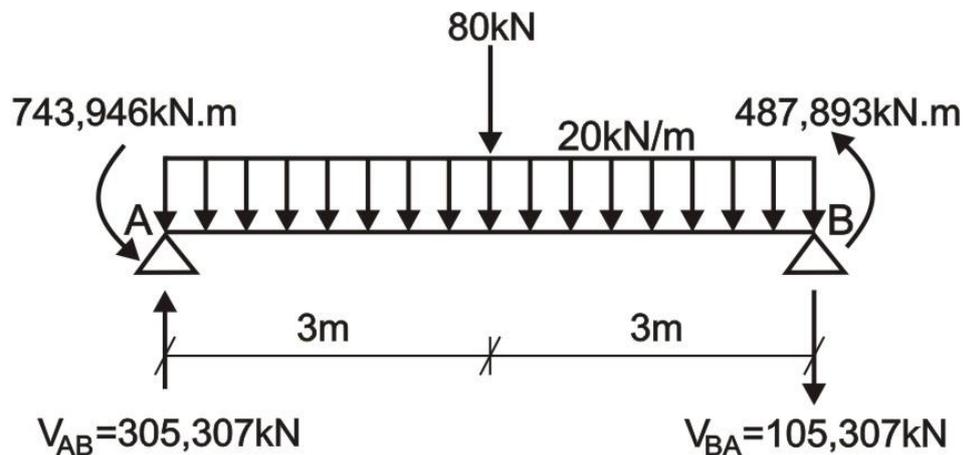


Fig. 7.27

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad -V_{BA}(6) - 20(6)(3) - 80(3) + 487,893 + 743,946 = 0$$

$$V_{BA} = 105,307 \text{ kN} \downarrow$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{AB} - 80 - 20(6) - 105,307 = 0 \quad \therefore \quad V_{AB} = 305,307 \text{ kN} \uparrow$$

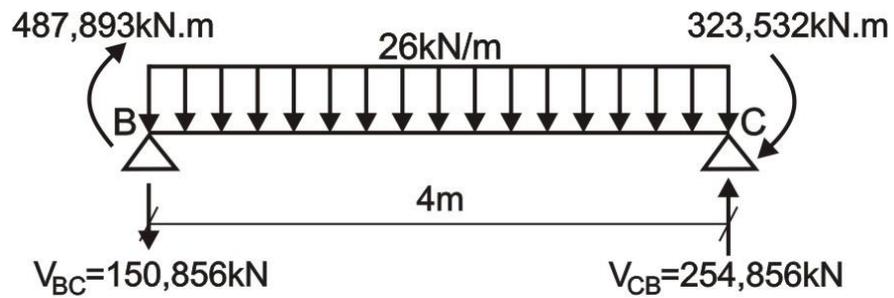


Fig. 7.28

$$\sum M_B = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{CB}(4) - 26(4)(2) - 323,532 - 487,893 = 0 \quad \therefore V_{CB} = 254,856 \text{ kN } \uparrow$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad 254,856 - 26(4) - V_{BC} = 0 \quad \therefore V_{BC} = 150,856 \text{ kN } \downarrow$$

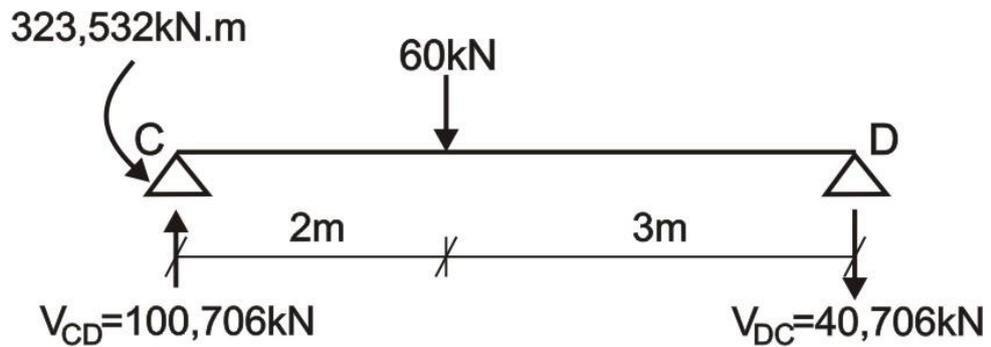


Fig. 7.29

$$\sum M_C = 0 \quad \Rightarrow \quad -V_{DC}(5) - 60(2) + 323,532 = 0 \quad \therefore V_{DC} = 40,706 \text{ kN } \downarrow$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{CD} - 60 - 40,706 = 0 \quad \therefore V_{CD} = 100,706 \text{ kN } \uparrow$$

Graficamos los diagramas finales de fuerza cortante, momento flector y refuerzo.

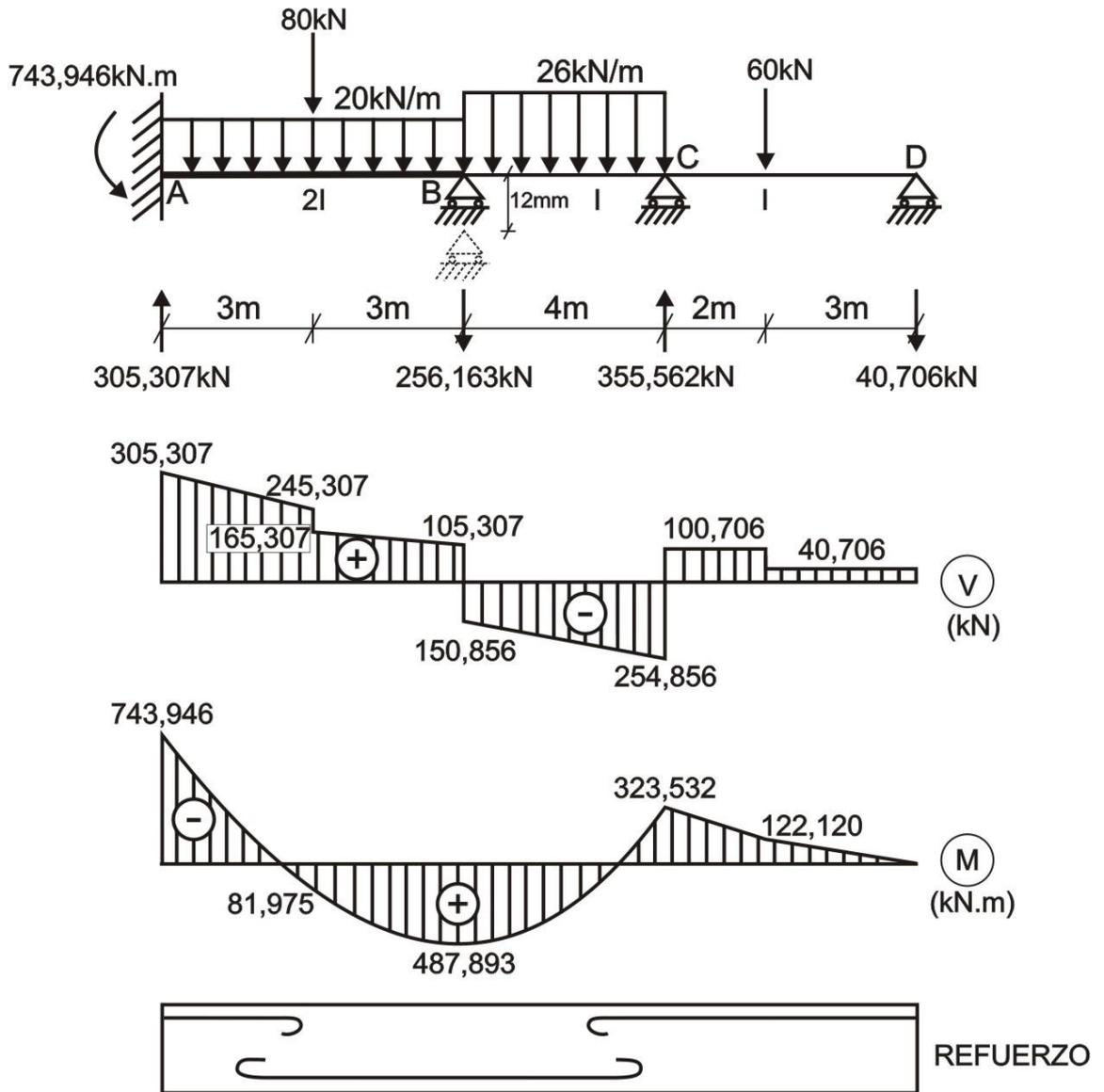


Fig. 7.30

7.3 METODO DE LAS FUERZAS

Este método es muy utilizado para el cálculo de estructuras hiperestáticas, como vigas continuas, pórticos, armaduras y arcos.

Para ello, se debe inicialmente determinar el grado de indeterminación del sistema estructural, a través de las ecuaciones 7.1, 7.2 y 7.3, dependientes del tipo de estructura a resolver.

El grado de indeterminación nos indica el número de conexiones a eliminar, eligiendo el denominado *sistema principal*, el cual es isostático.

Luego, se plantea el *sistema de ecuaciones canónicas*, que para una estructura con grado de indeterminación "n" y sometido a cargas externas, tendrá la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \dots + \delta_{1n}x_n + \Delta_{1P} &= 0 \\
 \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \dots + \delta_{2n}x_n + \Delta_{2P} &= 0 \\
 \dots & \\
 \delta_{n1}x_1 + \delta_{n2}x_2 + \dots + \delta_{nn}x_n + \Delta_{nP} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{7.7}$$

Donde:

δ_{ik} - desplazamiento del punto de aplicación de la incógnita x_i en la dirección x_i , debido a la acción de la carga $x_k = 1$

Δ_{iP} - desplazamiento del punto de aplicación de la incógnita x_i en la dirección x_i , debido a la acción de la carga externa

Los coeficientes δ_{ik} y Δ_{iP} se denominan respectivamente, coeficiente del sistema de ecuaciones canónicas y miembro libre o de carga del mismo sistema.

Como δ_{ik} y Δ_{iP} son desplazamientos, entonces para su cálculo se puede utilizar la fórmula de Mohr y sus correspondientes formas de cálculo de integrales, como la fórmula de Simpson-Kornoujov o el método de Vereschaguin, analizados en el tema de Trabajo Virtual del capítulo anterior y que se expresan para vigas, pórticos y arcos por medio de la fórmula 7.8 y para el caso de armaduras en lugar del momento se incluirá la fuerza axial o normal y en lugar de la rigidez EI se utilizará la rigidez EA.

$$\delta_{ik} = \sum \int_1 \frac{M_i M_k}{EI} dx \quad (7.8)$$
$$\Delta_{iP} = \sum \int_1 \frac{M_i M_P}{EI} dx$$

Donde:

$i, k = 1, 2, \dots, n$

M_i, M_k - diagramas de momento flector, que surgen en el sistema principal, debido a la acción de las fuerzas $x_i = 1$ y $x_k = 1$

M_P - diagrama de momento flector, que surge en el sistema principal, debido a la acción de las cargas externas

De esta manera, para determinar los coeficientes δ_{ik} y los miembros de carga Δ_{iP} del sistema de ecuaciones canónicas, será necesario analizar los denominados estados de carga unitaria y carga externa del sistema principal.

El estado de carga externa del sistema principal, es aquel por el cual la estructura está sometida solo a las cargas externas.

El estado de carga unitaria "i" del sistema principal, es aquella que surge debido a la acción de la fuerza $x_i = 1$, aplicado en la estructura. Esta fuerza se aplica en el punto de acción y en la dirección de la fuerza desconocida x_i . El número de estados unitarios de carga es igual al número de incógnitas "n".

En los estados de cargas externas y unitarias del sistema principal, será necesario determinar las reacciones en los apoyos y graficar los diagramas de momento flector M_P (de carga externa) y M_i ($i = 1, 2, \dots, n$) (de carga unitaria).

El sistema de ecuaciones algebraicas lineales de la fórmula 7.7, cuyos coeficientes se calculan por la fórmula 7.8, contiene en su diagonal principal miembros positivos, esto es $\delta_{ii} > 0$. Los coeficientes ubicados simétricamente a la diagonal principal son iguales, esto es $\delta_{ik} = \delta_{ki}$, fundamentándose en la ley de reciprocidad de desplazamientos. Consecuentemente, la matriz de los coeficientes $\|\delta_{ik}\|$ del sistema de ecuaciones canónicas del método de las fuerzas, siempre será simétrica.

La solución del sistema de ecuaciones canónicas del método de las fuerzas, permite calcular las magnitudes de las fuerzas en las conexiones eliminadas del pórtico y de esta manera graficar los diagramas finales de fuerzas internas en la estructura hiperestática.

Los diagramas finales de fuerzas internas se determinan por las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} M &= M_1x_1 + M_2x_2 + \dots + M_nx_n + M_p \\ V &= V_1x_1 + V_2x_2 + \dots + V_nx_n + V_p \\ N &= N_1x_1 + N_2x_2 + \dots + N_nx_n + N_p \end{aligned} \quad (7.9)$$

Donde:

M, V, N - diagramas finales de fuerzas internas

M_i, V_i, N_i - diagramas de fuerzas internas en el estado unitario de carga "i" del sistema principal

M_p, V_p, N_p - diagramas de fuerzas internas en el estado de carga externa del sistema principal

x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) - valores de las fuerzas desconocidas

Para vigas, pórticos y arcos, la sumatoria de diagramas de la fórmula 7.9 se aplica solo a momentos flectores, debido a que el diagrama de fuerza cortante V se obtiene a partir del diagrama M , a través de la dependencia diferencial de la fórmula 7.10

$$V_{(x)} = \frac{dM_{(x)}}{dx} \quad (7.10)$$

Las fuerzas normales o axiales se determinarán a partir de la condición de equilibrio de los nudos del pórtico. A dichos nudos del pórtico se le aplicarán las cargas externas existentes, fuerzas cortantes calculadas anteriormente y las fuerzas axiales desconocidas. Después de ello, se elaborarán para estos nudos las ecuaciones de equilibrio y a partir de ellas se encontrarán las fuerzas axiales en las barras del pórtico. El equilibrio de los nudos se debe analizar de tal manera que en cada nudo no existan más de dos fuerzas axiales desconocidas.

A partir de los diagramas finales M, V, N se determinarán las reacciones en los apoyos y se comprobarán las ecuaciones generales de equilibrio, donde "k" es cualquier punto del pórtico.

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 \\ \sum F_y &= 0 \\ \sum M_k &= 0 \end{aligned} \quad (7.11)$$

Otra de las formas de graficar los diagramas finales, es volver a analizar el equilibrio de la estructura, sometida a las cargas externas y considerando los valores de las reacciones en las conexiones

eliminadas calculadas anteriormente, determinando las otras reacciones en los demás apoyos y graficamos los diagramas de acuerdo a los principios de la estática.

PROBLEMA 7.5 Resolver la viga mostrada en la figura 7.31

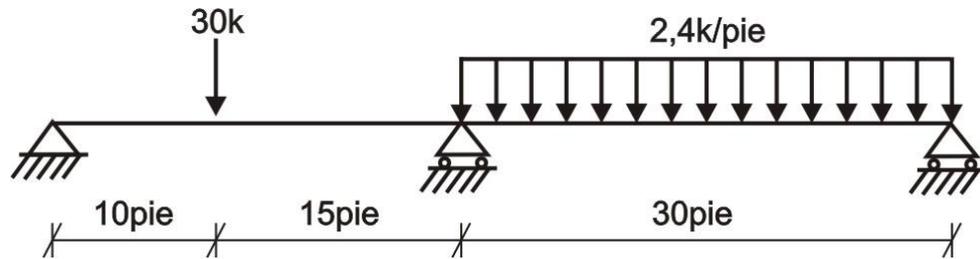


Fig. 7.31

Solución:

Calculamos el grado de indeterminación de la viga:

$$G.I. = 4 - 3 = 1$$

La viga es una vez hiperestática, razón por la cual eliminamos su apoyo intermedio y analizamos dos vigas, una sometida a la carga unitaria en dicho punto y otra sometida a las cargas reales, siendo el desplazamiento real en dicho apoyo igual a cero, por lo tanto resolveremos la ecuación:

$$\delta_{11}x_1 + \Delta_{1P} = 0$$

Donde:

$$\delta_{11} = \int \frac{M_1 M_1}{EI} dx$$

$$\Delta_{1P} = \int \frac{M_1 M_P}{EI} dx$$

Los diagramas de momento flector M_1 y M_P se muestran en las figuras 7.32 y 7.33

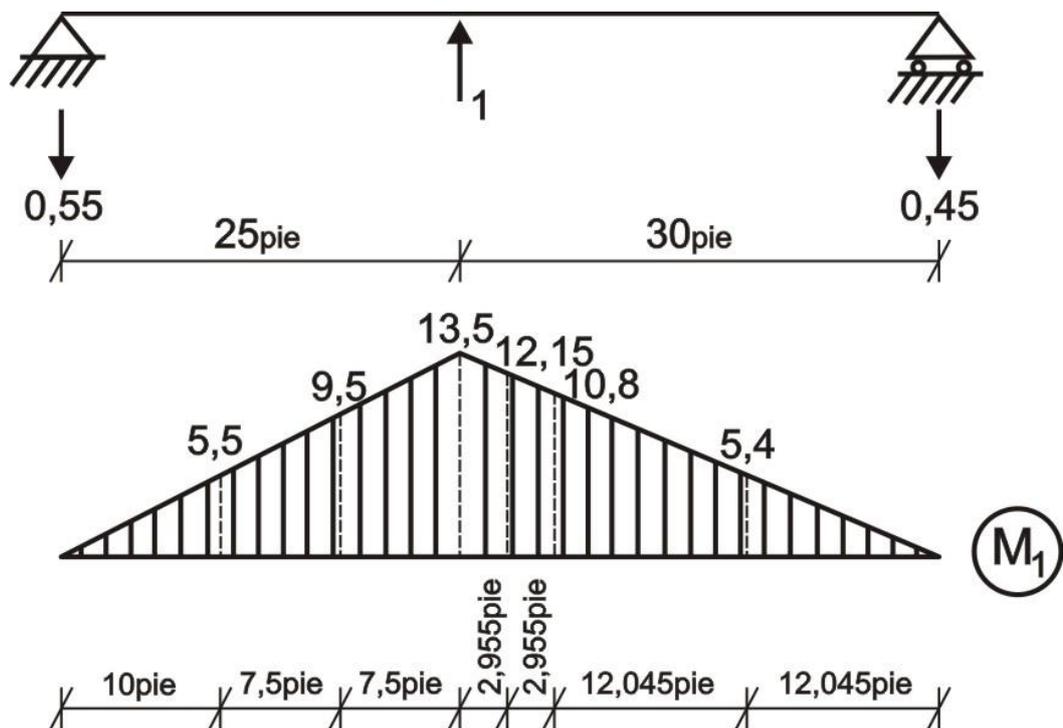


Fig. 7.32

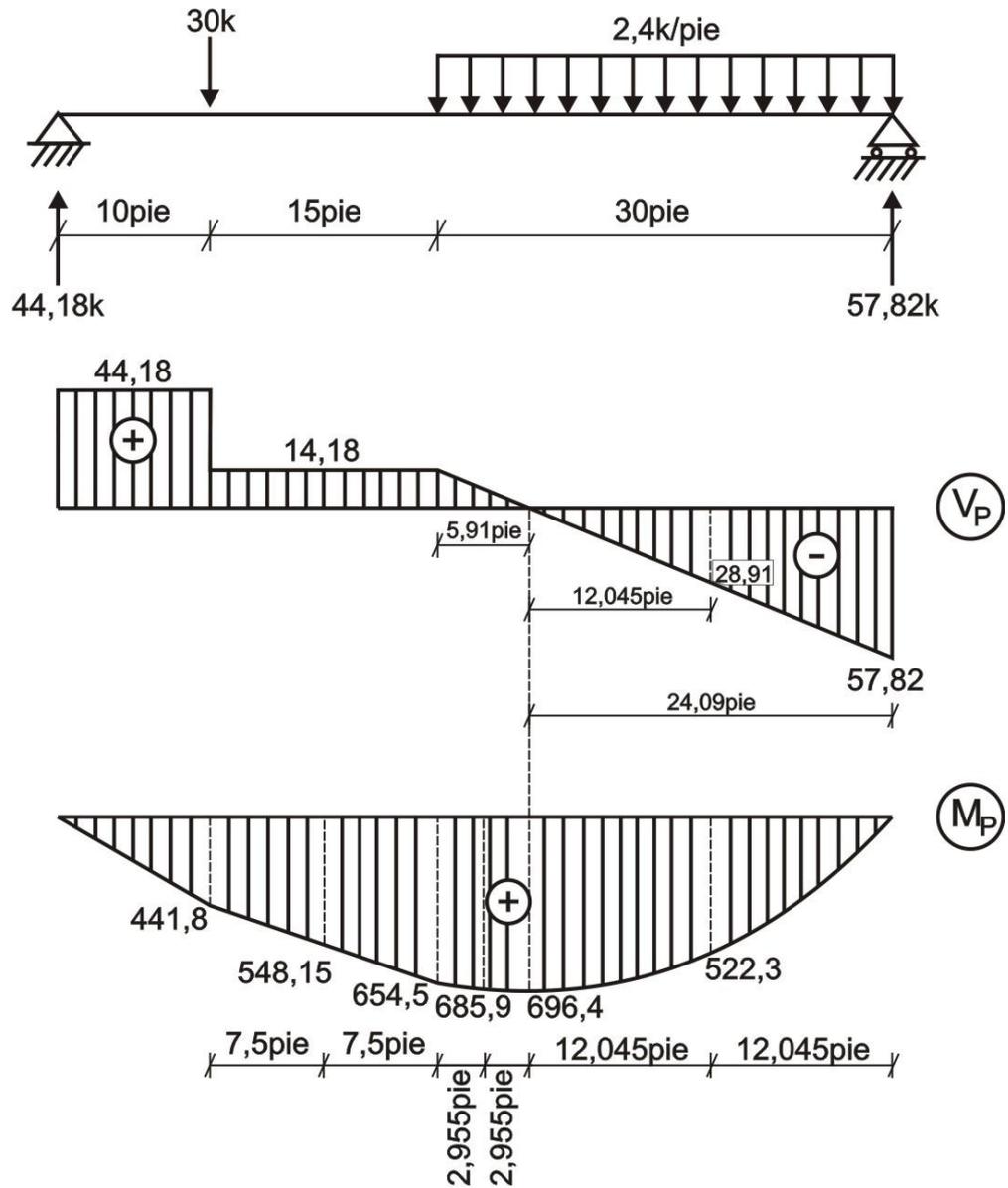


Fig. 7.33

Aplicamos el método de Vereschaguin o de Simpson-Kornoujov para la multiplicación de diagramas, obteniendo:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 13,5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 13,5 + \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 13,5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 13,5 = \frac{3341,25}{EI}$$

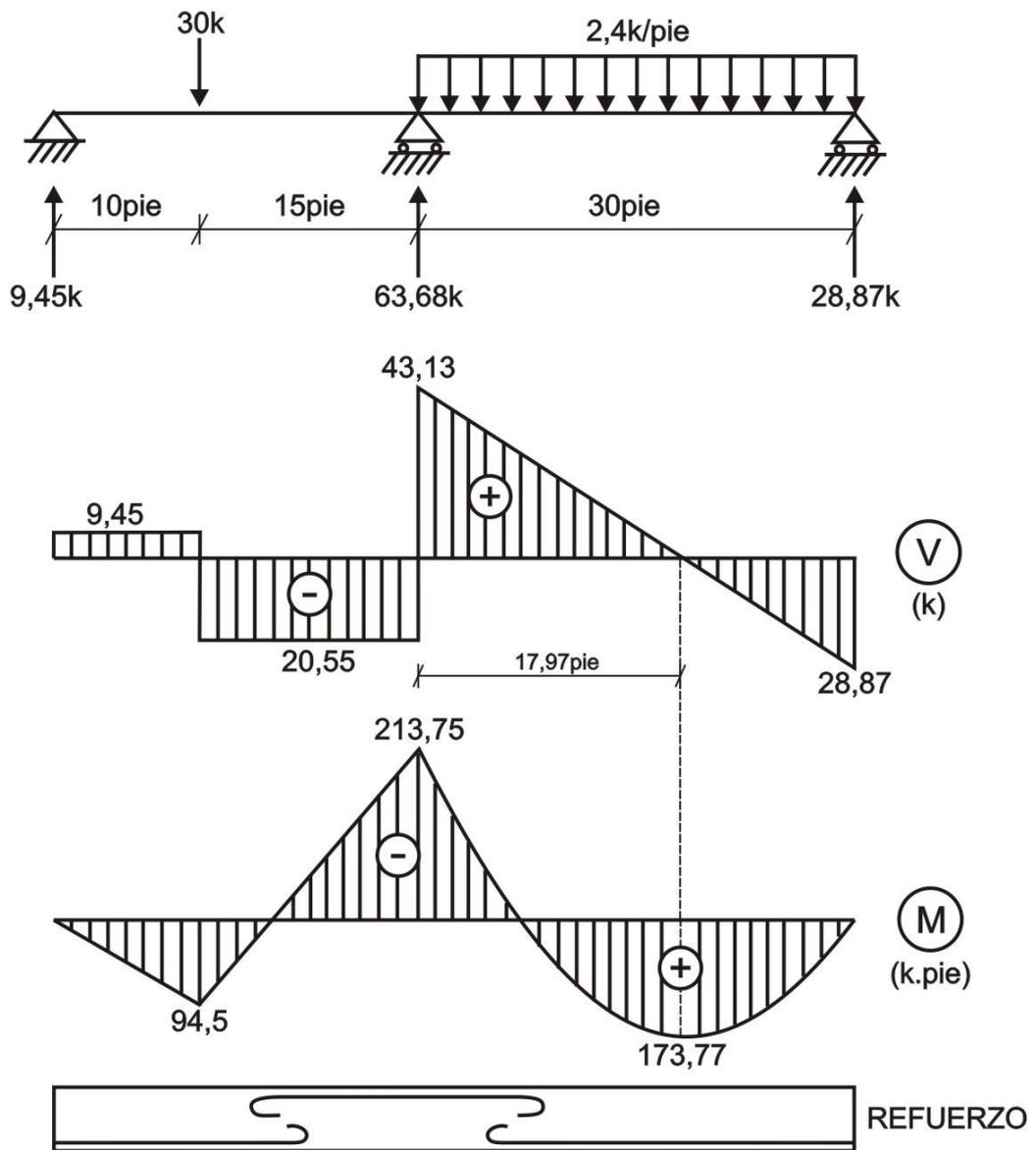
$$\Delta_{1P} = -\frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 441,8 \cdot 10 \cdot \frac{2}{3} \cdot 5,5 - \frac{15}{6EI} [441,8 \cdot 5,5 + 4 \cdot 548,15 \cdot 9,5 + 654,5 \cdot 13,5] - \frac{5,91}{6EI} [654,5 \cdot 13,5 + 4 \cdot 685,9 \cdot 12,15 + 696,4 \cdot 10,8] - \frac{24,09}{6EI} [696,4 \cdot 10,8 + 4 \cdot 522,3 \cdot 5,4 + 0] = -\frac{212777,52}{EI}$$

Luego:

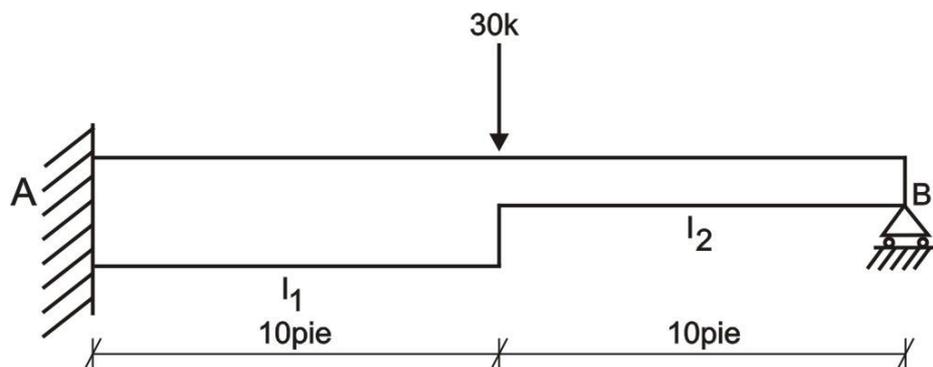
$$\frac{3341,25}{EI} x_1 - \frac{212777,52}{EI} = 0$$

$$x_1 = V_B = 63,68k \uparrow$$

Con este resultado, determinamos las otras reacciones y graficamos los diagramas finales.



PROBLEMA 7.6 Resolver la viga mostrada en la figura 7.35, considerando $I_1 = 1800plg^4$, $I_2 = 1000plg^4$ y $E = 29 \cdot 10^6 lb/plg^2$



Solución:

Como tendremos que utilizar las rigideces, las calculamos para cada tramo de la viga.

$$EI_1 = 29 \cdot 10^6 \cdot 1800 = 52200 \cdot 10^6 \text{ lb} \cdot \text{plg}^2 = 0,3625 \cdot 10^6 \text{ k} \cdot \text{pie}^2$$

$$EI_2 = 29 \cdot 10^6 \cdot 1000 = 29000 \cdot 10^6 \text{ lb} / \text{plg}^2 = 0,2014 \cdot 10^6 \text{ k} \cdot \text{pie}^2$$

Para evitar el excesivo cálculo con el denominador, asumimos:

$$EI_2 = EI$$

$$EI_1 = \frac{0,3625}{0,2014} EI = 1,8EI$$

Determinamos el grado de indeterminación de la viga:

$$G.I. = 4 - 3 = 1$$

Como la viga es una vez hiperestática, eliminamos el apoyo en B y analizamos tan igual que en el caso anterior, es decir, dos vigas, la primera sometida a la carga unitaria y la segunda, sometida a la carga real, resolviendo la ecuación $\delta_{11}x_1 + \Delta_{1P} = 0$, donde x_1 es la reacción en B.

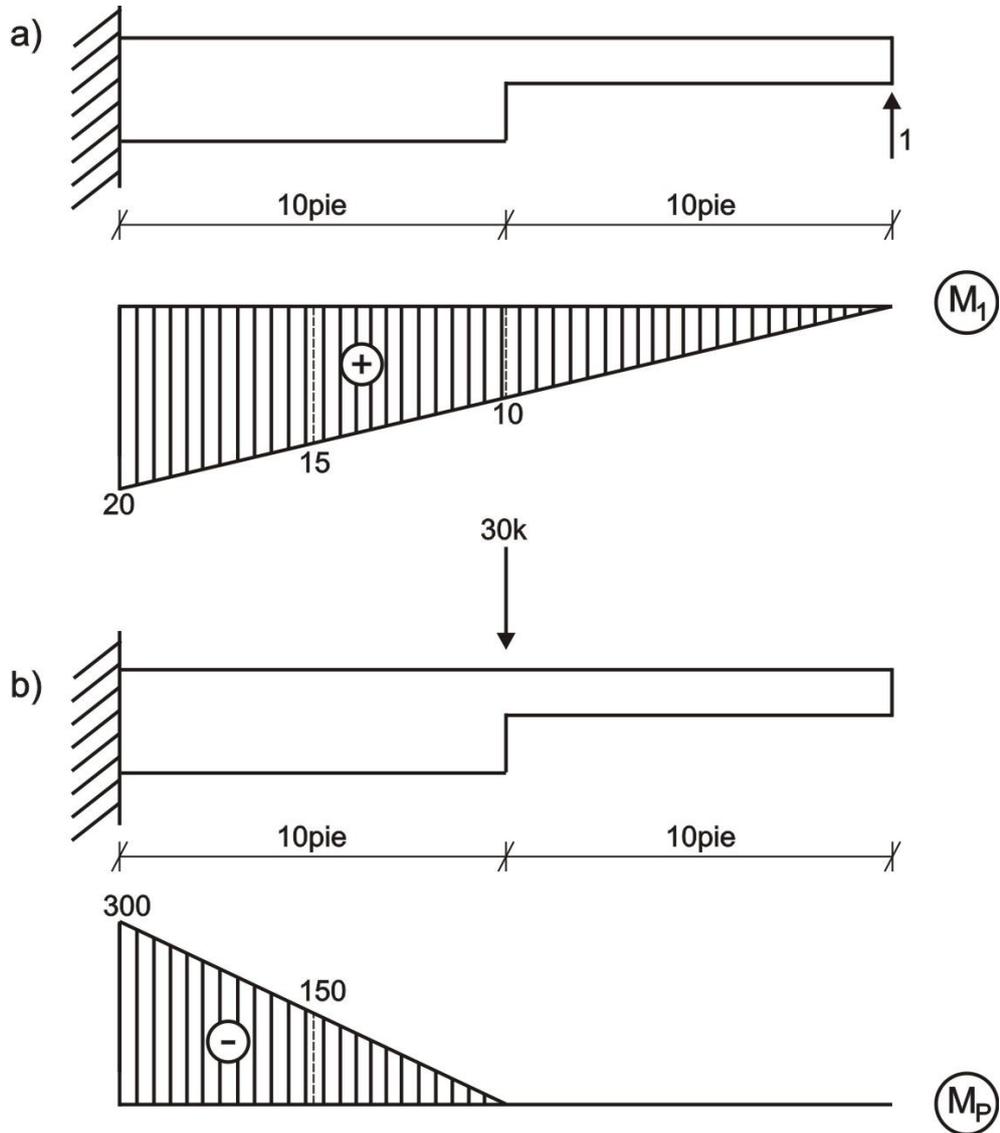


Fig. 7.36

Posteriormente, graficamos los diagramas de momento flector M_1 y M_p , tal como se muestran en la figura 7.36

Calculamos los coeficientes δ_{11} y Δ_{1P} , obteniendo:

$$\delta_{11} = \frac{10}{6EI_1} [20 \cdot 20 + 4 \cdot 15 \cdot 15 + 10 \cdot 10] + \frac{1}{EI_2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 \cdot \frac{2}{3} \cdot 10 = \frac{14000}{6(1,8EI)} + \frac{1000}{3EI} = \frac{1629,63}{EI}$$

$$\Delta_{1P} = -\frac{10}{6EI_1} [300 \cdot 20 + 4 \cdot 150 \cdot 15 + 0] = -\frac{150000}{6(1,8EI)} = -\frac{13888,89}{EI}$$

Luego:

$$\frac{1629,63}{EI} x_1 - \frac{13888,89}{EI} = 0$$

$$x_1 = V_B = 8,52k \uparrow$$

Con este resultado, determinamos las reacciones en el empotramiento y graficamos los diagramas finales, que se muestran en la figura 7.37

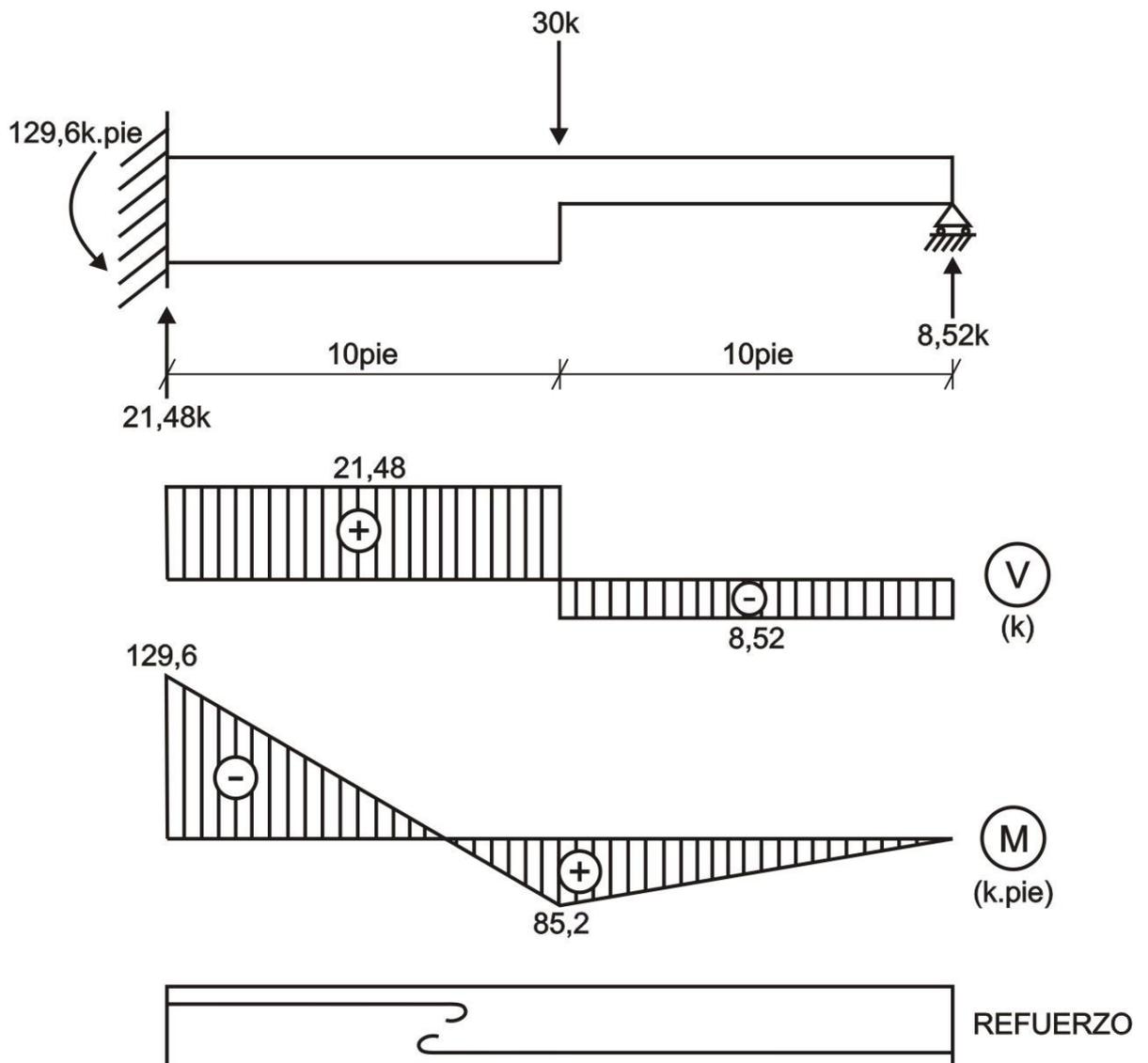


Fig. 7.37

PROBLEMA 7.7 Resolver la viga mostrada en la figura 7.38, considerando que es de sección constante.

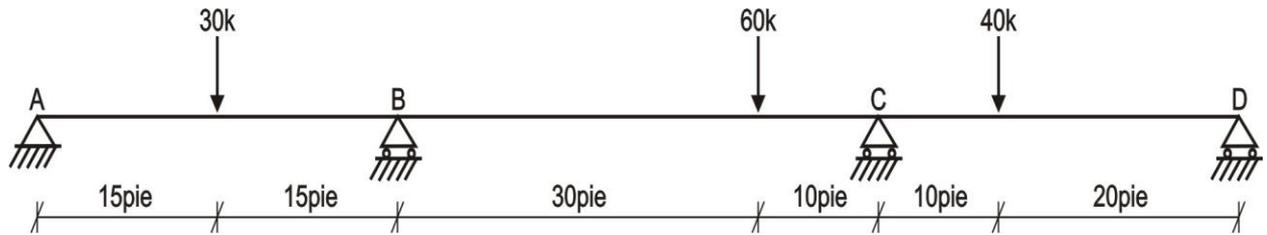


Fig. 7.38

Solución:

Determinamos el grado de indeterminación de la viga:

$$G.I. = 5 - 3 = 2$$

Como la viga es dos veces hiperestática, entonces eliminamos los apoyos móviles C y D y los reemplazamos por cargas unitarias, graficando sus diagramas, uno ante las cargas reales, otro ante la carga unitaria en C y el otro ante la carga unitaria en D, los cuales se muestran en la figura 7.39

Para ello, debemos de resolver el sistema de ecuaciones canónicas:

$$\delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \Delta_{1P} = 0$$

$$\delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \Delta_{2P} = 0$$

Donde:

$$\delta_{11} = \int \frac{M_1 M_1}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 40 \cdot \frac{2}{3} \cdot 40 + \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 40 \cdot \frac{2}{3} \cdot 40 \right] = \frac{37333,33}{EI}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \int \frac{M_1 M_2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 40 \cdot \frac{2}{3} \cdot 70 \right] + \frac{30}{6EI} [40 \cdot 70 + 4 \cdot 25 \cdot 55 + 10 \cdot 40] + \frac{10}{6EI} [10 \cdot 40 + 4 \cdot 5 \cdot 35 + 0] = \frac{73333,33}{EI}$$

$$\delta_{22} = \int \frac{M_2 M_2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 70 \cdot \frac{2}{3} \cdot 70 + \frac{1}{2} \cdot 70 \cdot 70 \cdot \frac{2}{3} \cdot 70 \right] = \frac{163333,33}{EI}$$

$$\Delta_{1P} = \int \frac{M_1 M_P}{EI} dx = -\frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 1675 \cdot \frac{2}{3} \cdot 20 - \frac{15}{6EI} [1675 \cdot 20 + 4 \cdot 2737,5 \cdot 30 + 3800 \cdot 40] - \frac{30}{6EI} [3800 \cdot 40 + 4 \cdot 2300 \cdot 25 + 800 \cdot 10] - \frac{10}{6EI} [800 \cdot 10 + 4 \cdot 600 \cdot 5 + 0] = -\frac{3435833,33}{EI}$$

$$\Delta_{2P} = \int \frac{M_2 M_P}{EI} dx = -\frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 1675 \cdot \frac{2}{3} \cdot 35 - \frac{15}{6EI} [1675 \cdot 35 + 4 \cdot 2737,5 \cdot 52,5 + 3800 \cdot 70] - \frac{30}{6EI} [3800 \cdot 70 + 4 \cdot 2300 \cdot 55 + 800 \cdot 40] - \frac{20}{6EI} [800 \cdot 40 + 4 \cdot 400 \cdot 30 + 0] = -\frac{6828541,67}{EI}$$

Luego, reemplazamos los valores obtenidos en el sistema de ecuaciones canónicas, quedando de la siguiente manera:

$$\frac{37333,33}{EI}x_1 + \frac{73333,33}{EI}x_2 - \frac{3435833,33}{EI} = 0$$

$$\frac{73333,33}{EI}x_1 + \frac{163333,33}{EI}x_2 - \frac{6828541,67}{EI} = 0$$

De donde:

$$x_1 = V_C = 83,92k \uparrow$$

$$x_2 = V_D = 4,13k \uparrow$$

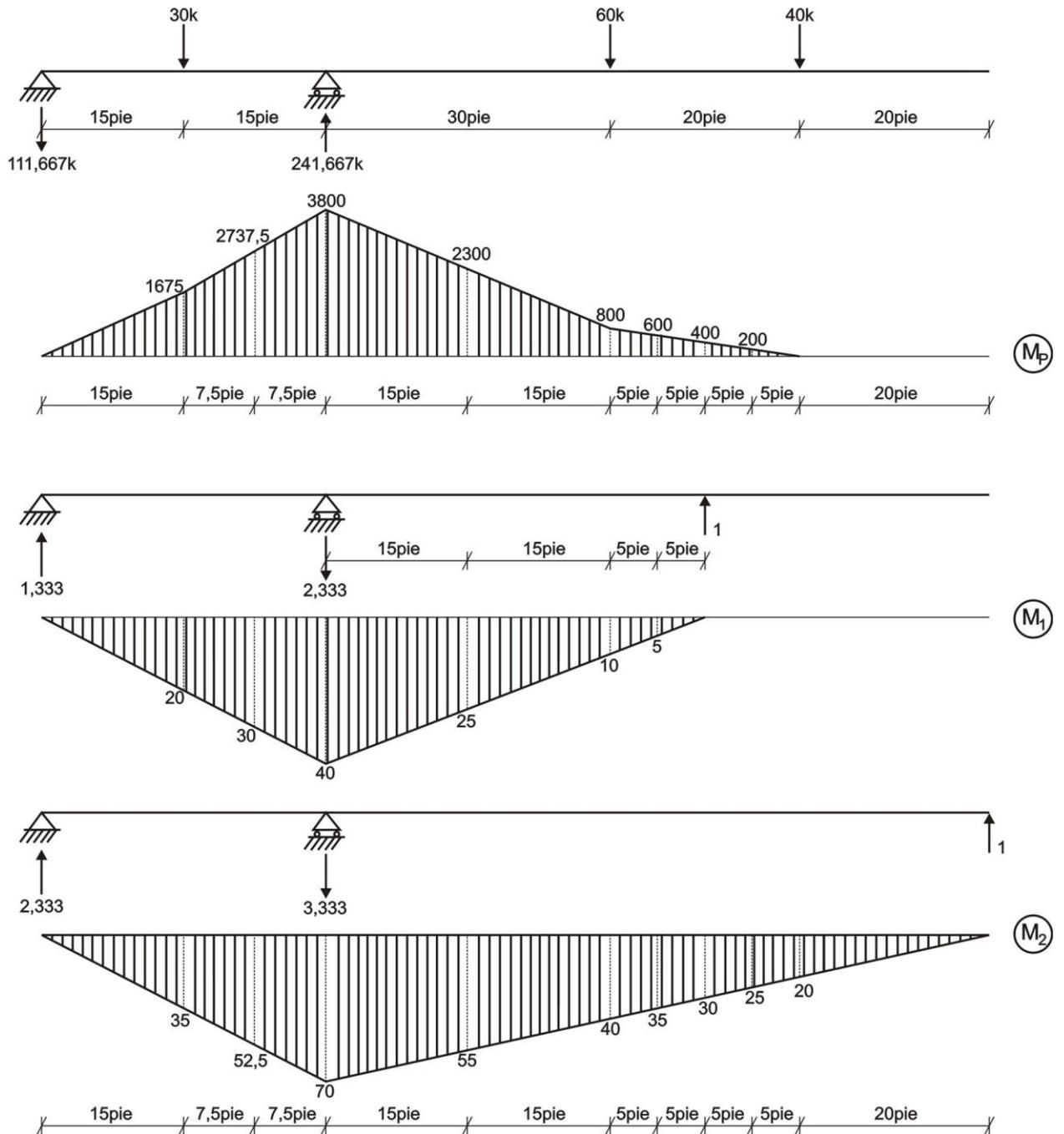


Fig. 7.39

En base a los resultados obtenidos, graficamos los diagramas finales de fuerza cortante, momento flector y refuerzo, los cuales se muestran en la figura 7.40

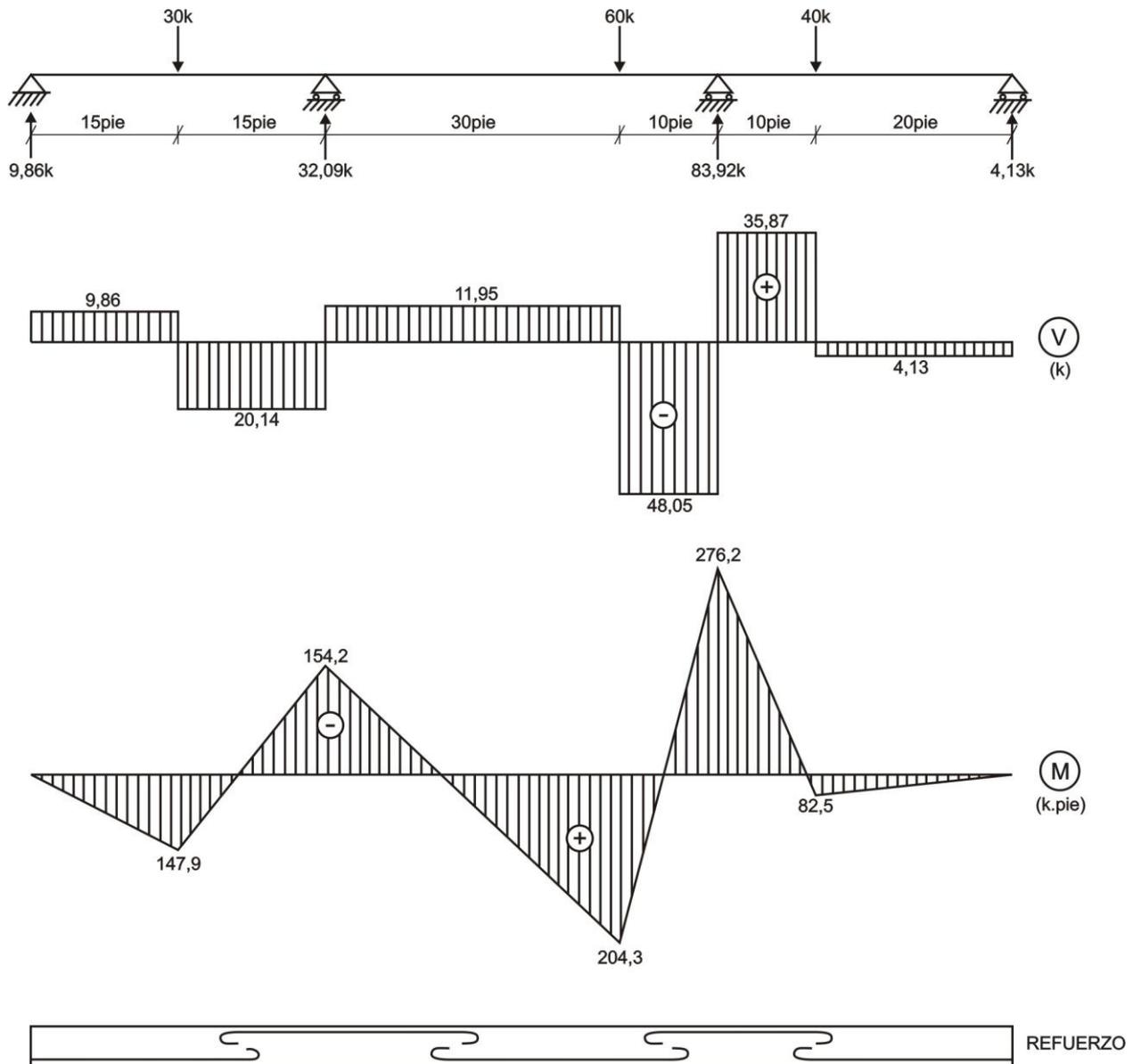


Fig. 7.40

PROBLEMA 7.8 Resolver el pórtico mostrado en la figura 7.41, considerando que es de sección constante.

Solución:

Determinamos el grado de indeterminación del pórtico, a través de la fórmula 7.3

$$G.I. = 3(1) - 2 = 1$$

El pórtico es una vez hiperestático, por ello, eliminamos la reacción horizontal en el apoyo D y lo convertimos en isostático, graficando los diagramas de momento flector del pórtico ante las cargas reales y el pórtico ante la carga unitaria aplicada en la dirección de la conexión eliminada, cuyos gráficos se muestran respectivamente en las figuras 7.42 y 7.43

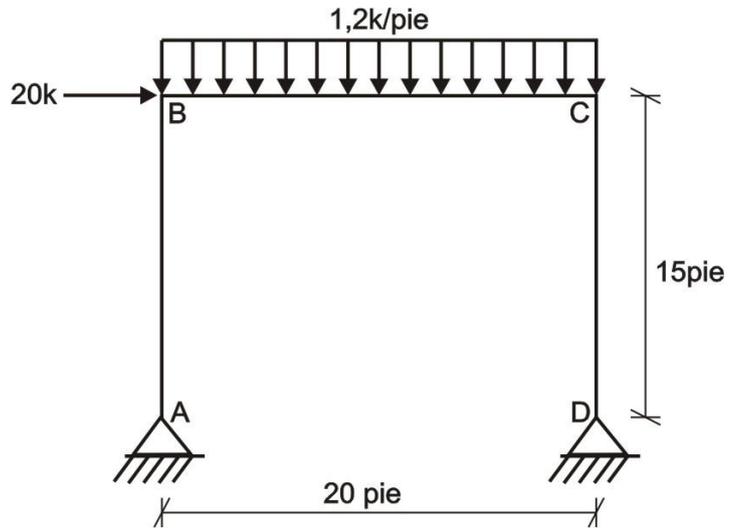


Fig. 7.41

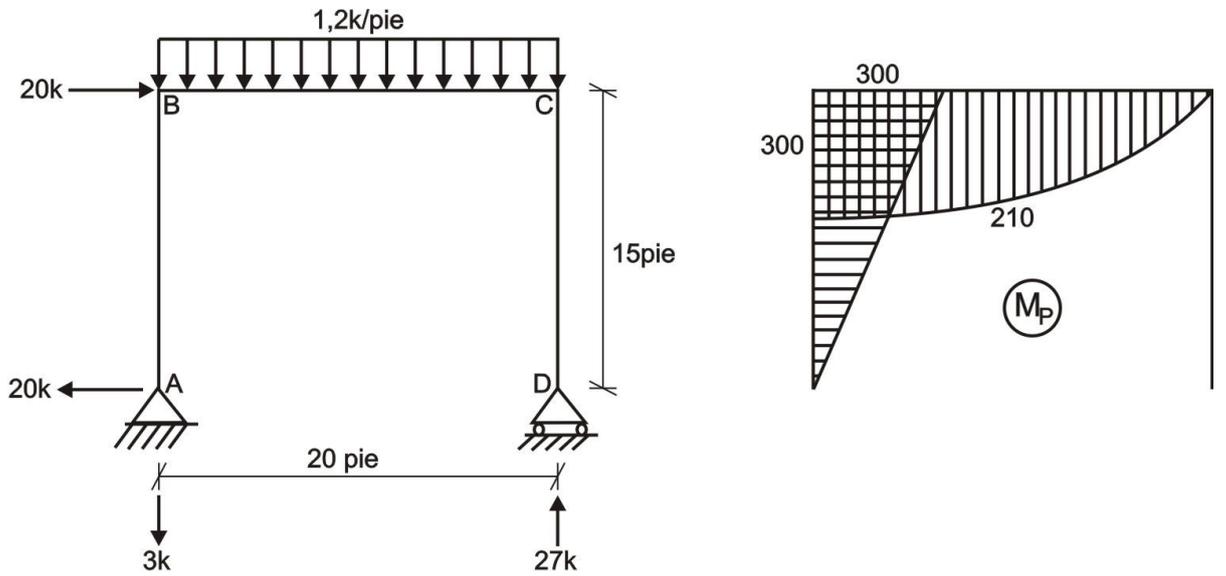


Fig. 7.42

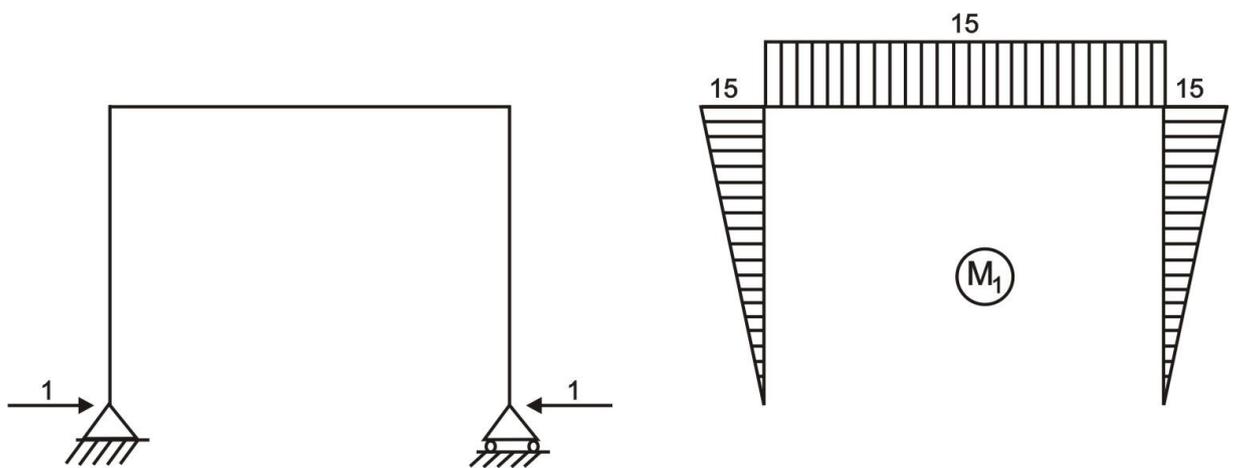


Fig. 7.43

La ecuación canónica será:

$$\delta_{11}x_1 + \Delta_{1P} = 0$$

Siendo:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 15 \cdot \frac{2}{3} \cdot 15 \cdot 2 + 15 \cdot 20 \cdot 15 \right] = \frac{6750}{EI}$$

$$\Delta_{1P} = -\frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 300 \cdot \frac{2}{3} \cdot 15 - \frac{20}{6EI} [300 \cdot 15 + 4 \cdot 210 \cdot 15 + 0] = -\frac{79500}{EI}$$

Luego:

$$\frac{6750}{EI}x_1 - \frac{79500}{EI} = 0$$

De donde:

$$x_1 = H_D = 11,78k \leftarrow$$

Reemplazamos esta reacción y calculamos las otras, graficando el diagrama final de momento flector, el cual se muestra en la figura 7.44

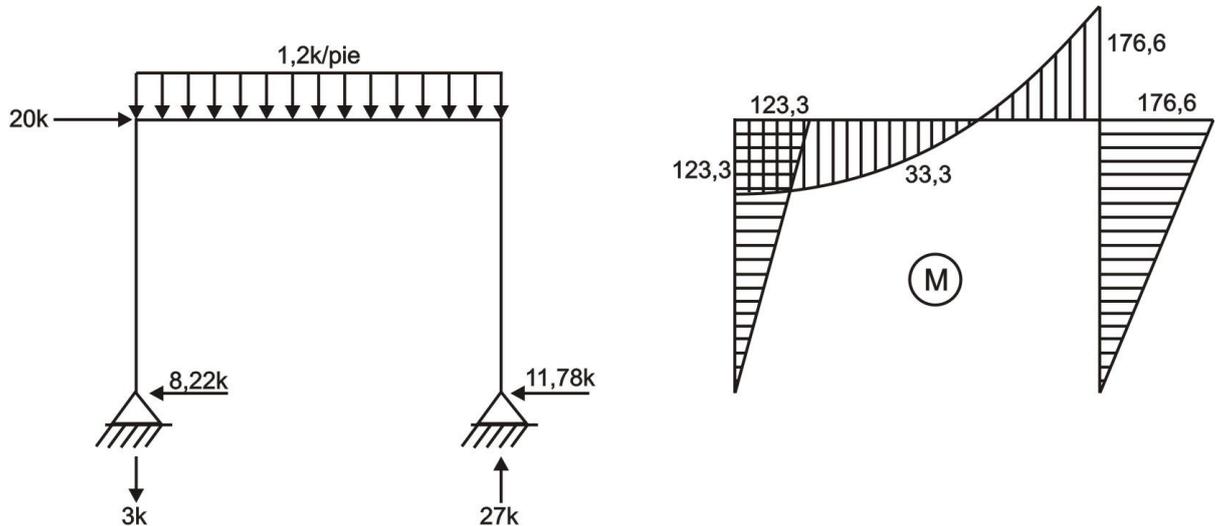


Fig. 7.44

PROBLEMA 7.9 Resolver el pórtico mostrado en la figura 7.45, sabiendo que es de sección constante.

Solución:

Determinamos el grado de indeterminación del sistema:

$$G.I. = 3(1) - 1 = 2$$

El pórtico es dos veces hiperestático, debiendo de eliminarse dos conexiones adicionales, que son la reacción vertical y la reacción horizontal en el apoyo A, convirtiendo a la estructura en isostática, graficando los diagramas de momento flector para la carga real y cargas unitarias, los cuales se muestran respectivamente en las figuras 7.46 – 7.48

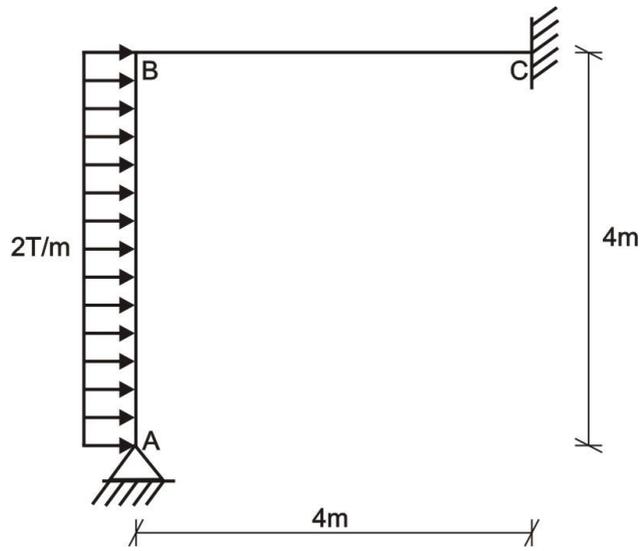


Fig. 7.45

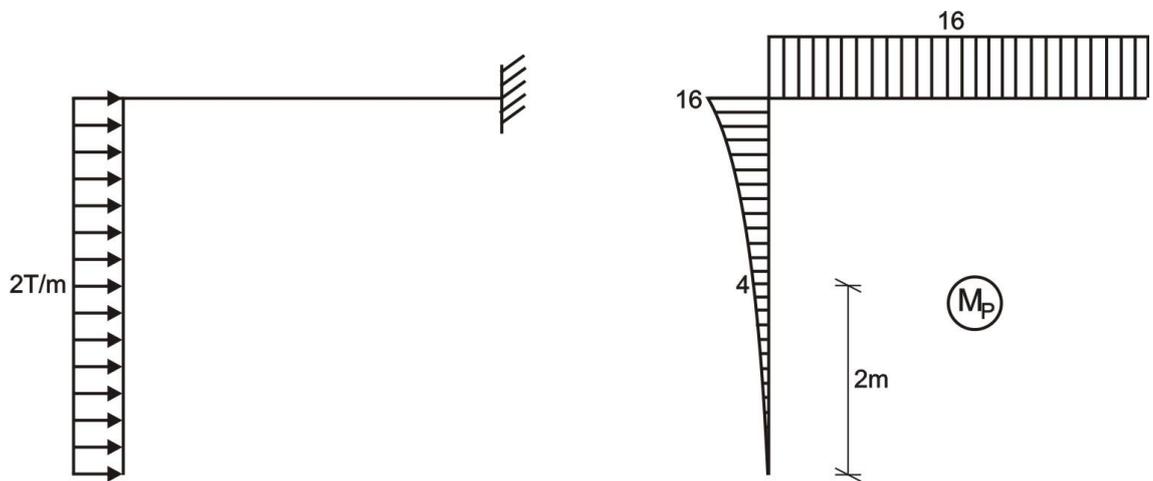


Fig. 7.46

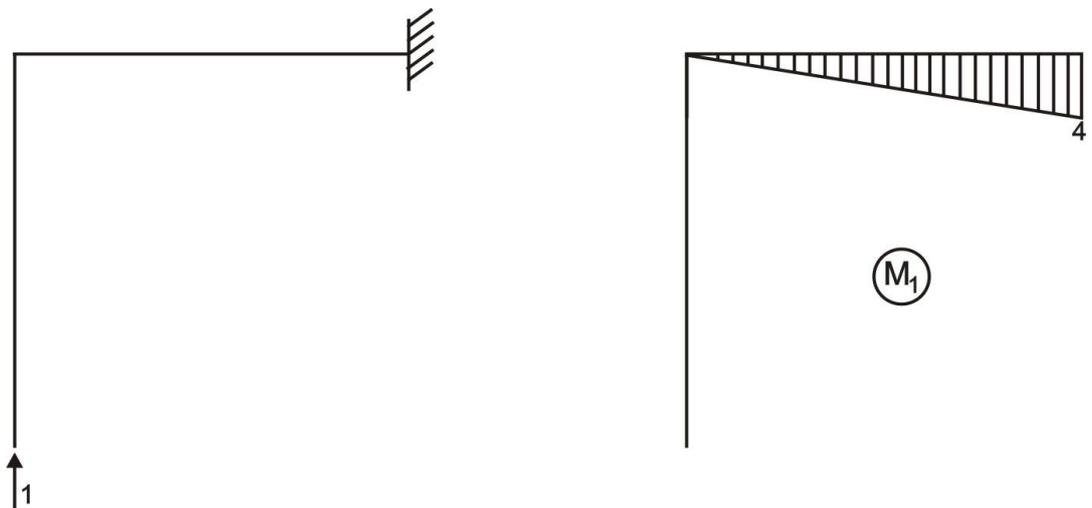


Fig. 7.47

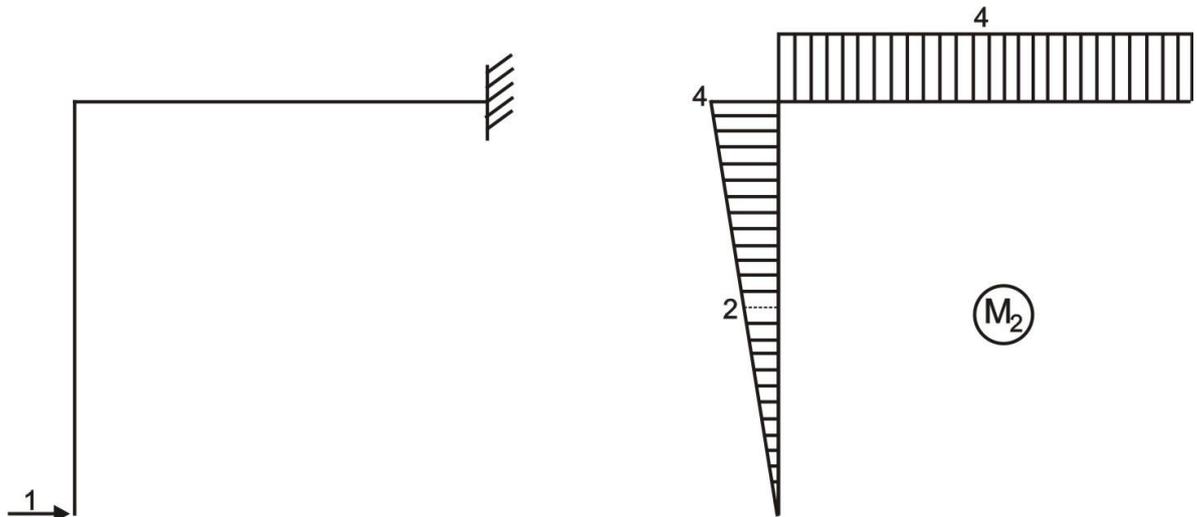


Fig. 7.48

Posteriormente, resolvemos el siguiente sistema de ecuaciones canónicas:

$$\delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \Delta_{1P} = 0$$

$$\delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \Delta_{2P} = 0$$

Donde:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 = \frac{64}{3EI} = \frac{21,33}{EI}$$

$$\delta_{12} = -\frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = -\frac{32}{EI}$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + 4 \cdot 4 \cdot 4 \right] = \frac{85,33}{EI}$$

$$\Delta_{1P} = -\frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 16 = -\frac{128}{EI}$$

$$\Delta_{2P} = \frac{4}{6EI} [0 + 4 \cdot 2 \cdot 4 + 4 \cdot 16] + \frac{1}{EI} \cdot 16 \cdot 4 \cdot 4 = \frac{320}{EI}$$

Luego:

$$\begin{aligned} \frac{21,33}{EI}x_1 - \frac{32}{EI}x_2 - \frac{128}{EI} &= 0 \\ -\frac{32}{EI}x_1 + \frac{85,33}{EI}x_2 + \frac{320}{EI} &= 0 \end{aligned}$$

De donde:

$$x_1 = V_A = 0,86T \uparrow$$

$$x_2 = H_A = -3,43T \leftarrow$$

Calculamos las otras reacciones y graficamos los diagramas de fuerza cortante y momento flector, los cuales se muestran en la figura 7.49

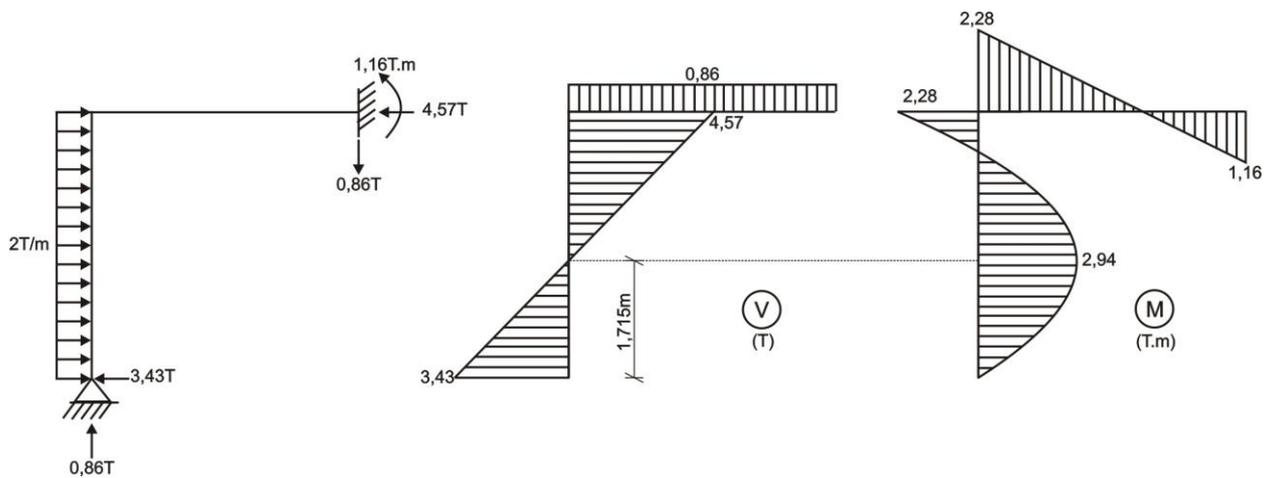


Fig. 7.49

PROBLEMA 7.10 Resolver el pórtico mostrado en la figura 7.50, sabiendo que es de sección constante.

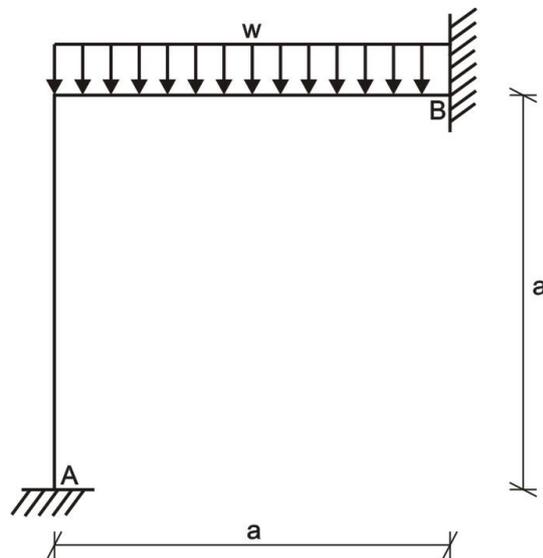


Fig. 7.50

Solución:

Determinamos el grado de indeterminación del pórtico:

$$G.I. = 3(1) - 0 = 3$$

El pórtico es tres veces hiperestático y debemos de resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \delta_{13}x_3 + \Delta_{1P} = 0$$

$$\delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \delta_{23}x_3 + \Delta_{2P} = 0$$

$$\delta_{31}x_1 + \delta_{32}x_2 + \delta_{33}x_3 + \Delta_{3P} = 0$$

Eliminamos las reacciones en el apoyo B, convirtiendo al pórtico en isostático y graficamos sus diagramas de momento flector ante la acción de la carga real y las cargas unitarias vertical, horizontal y momento unitario, tal como se muestran en las figuras 7.51 – 7.54

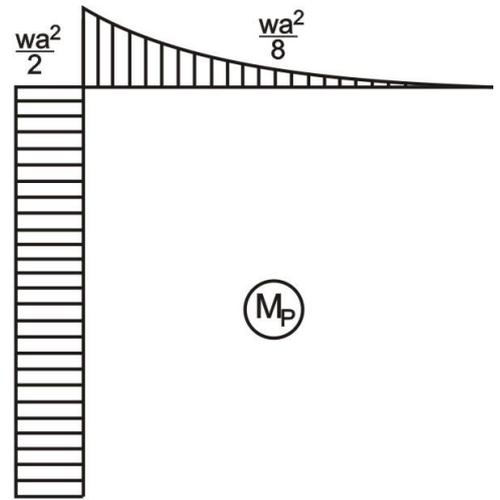
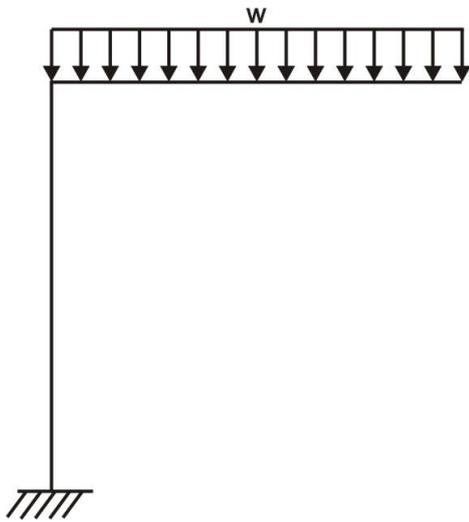


Fig. 7.51

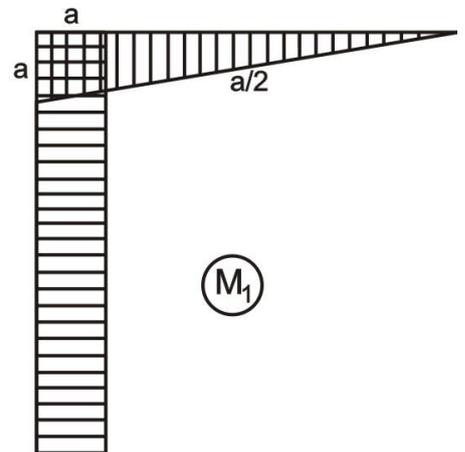
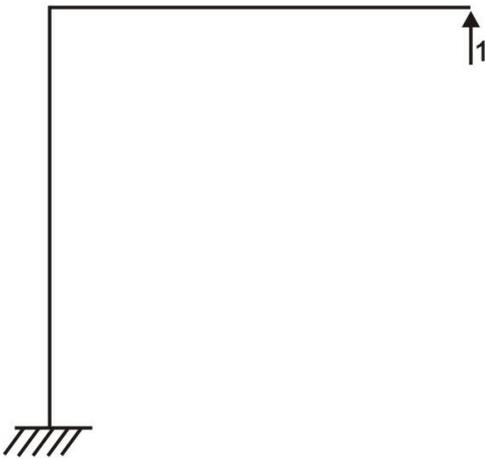


Fig. 7.52

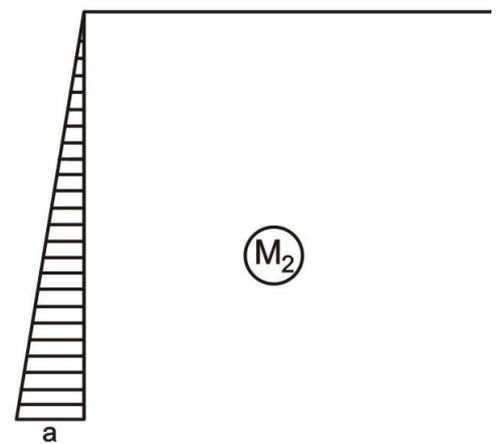
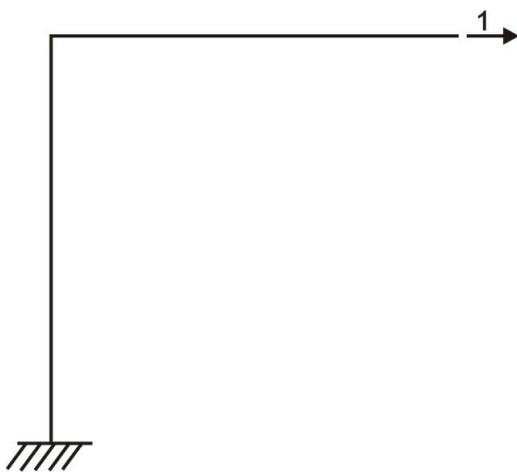


Fig. 7.53

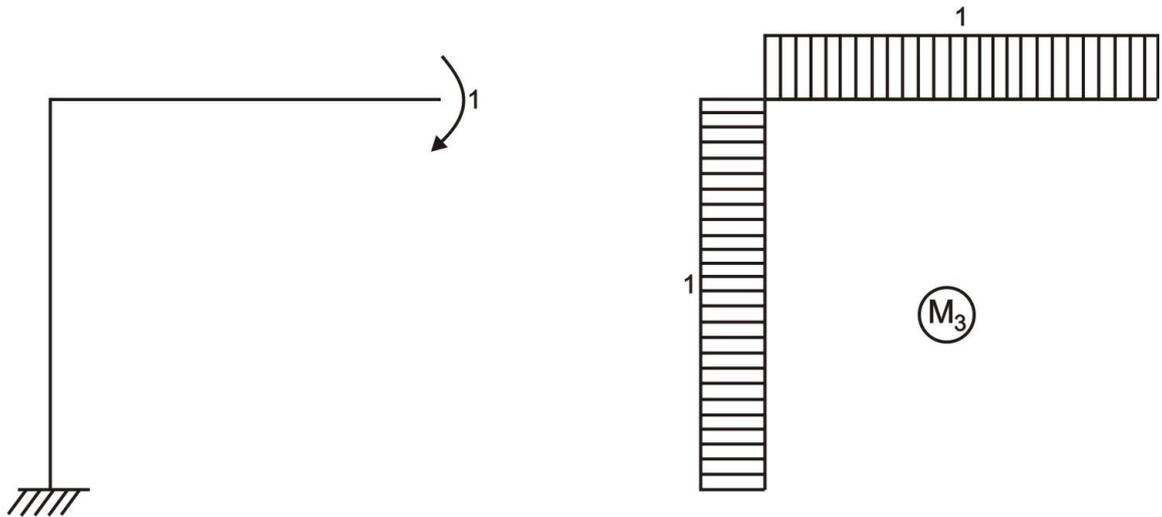


Fig. 7.54

Ahora, calculamos los coeficientes del sistema de ecuaciones canónicas.

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \frac{2}{3} \cdot a + a \cdot a \cdot a \right] = \frac{4a^3}{3EI} = 1,333 \frac{a^3}{EI}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = -\frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot a \right] = -\frac{a^3}{2EI} = -0,5 \frac{a^3}{EI}$$

$$\delta_{13} = \delta_{31} = -\frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot 1 + a \cdot a \cdot 1 \right] = -\frac{3a^2}{2EI} = -1,5 \frac{a^2}{EI}$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \frac{2}{3} \cdot a \right] = \frac{a^3}{3EI} = 0,333 \frac{a^3}{EI}$$

$$\delta_{23} = \delta_{32} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot 1 \right] = \frac{a^2}{2EI} = 0,5 \frac{a^2}{EI}$$

$$\delta_{33} = \frac{1}{EI} [1 \cdot a \cdot 1 + 1 \cdot a \cdot 1] = 2 \frac{a}{EI}$$

$$\Delta_{1P} = -\frac{a}{6EI} \left[a \cdot \frac{wa^2}{2} + 4 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{wa^2}{8} + 0 \right] - \frac{1}{EI} \cdot a \cdot a \cdot \frac{wa^2}{2} = -\frac{5wa^4}{8EI} = -0,625 \frac{wa^4}{EI}$$

$$\Delta_{2P} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \frac{wa^2}{2} \right] = \frac{wa^4}{4EI} = 0,25 \frac{wa^4}{EI}$$

$$\Delta_{3P} = \frac{a}{6EI} \left[1 \cdot \frac{wa^2}{2} + 4 \cdot 1 \cdot \frac{wa^2}{8} + 0 \right] + \frac{1}{EI} \cdot 1 \cdot a \cdot \frac{wa^2}{2} = \frac{2wa^3}{3EI} = 0,667 \frac{wa^3}{EI}$$

Luego, reemplazamos los valores obtenidos en el sistema de ecuaciones canónicas:

$$1,333 \frac{a^3}{EI} x_1 - 0,5 \frac{a^3}{EI} x_2 - 1,5 \frac{a^2}{EI} x_3 - 0,625 \frac{wa^4}{EI} = 0$$

$$-0,5 \frac{a^3}{EI} x_1 + 0,333 \frac{a^3}{EI} x_2 + 0,5 \frac{a^2}{EI} x_3 + 0,25 \frac{wa^4}{EI} = 0$$

$$-1,5 \frac{a^2}{EI} x_1 + 0,5 \frac{a^2}{EI} x_2 + 2 \frac{a}{EI} x_3 + 0,667 \frac{wa^3}{EI} = 0$$

De donde:

$$x_1 = V_B = 0,563wa \uparrow$$

$$x_2 = H_B = -0,062wa \leftarrow$$

$$x_3 = M_B = 0,104wa^2$$

Como el signo del momento es positivo, esto quiere decir que será sentido horario e igual al momento unitario y el pórtico tendrá las reacciones mostradas en la figura 7.55

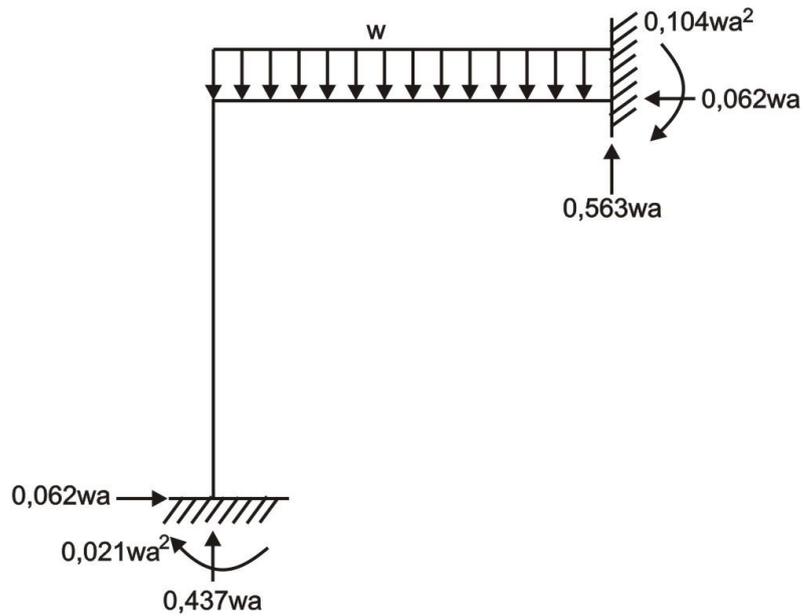


Fig. 7.55

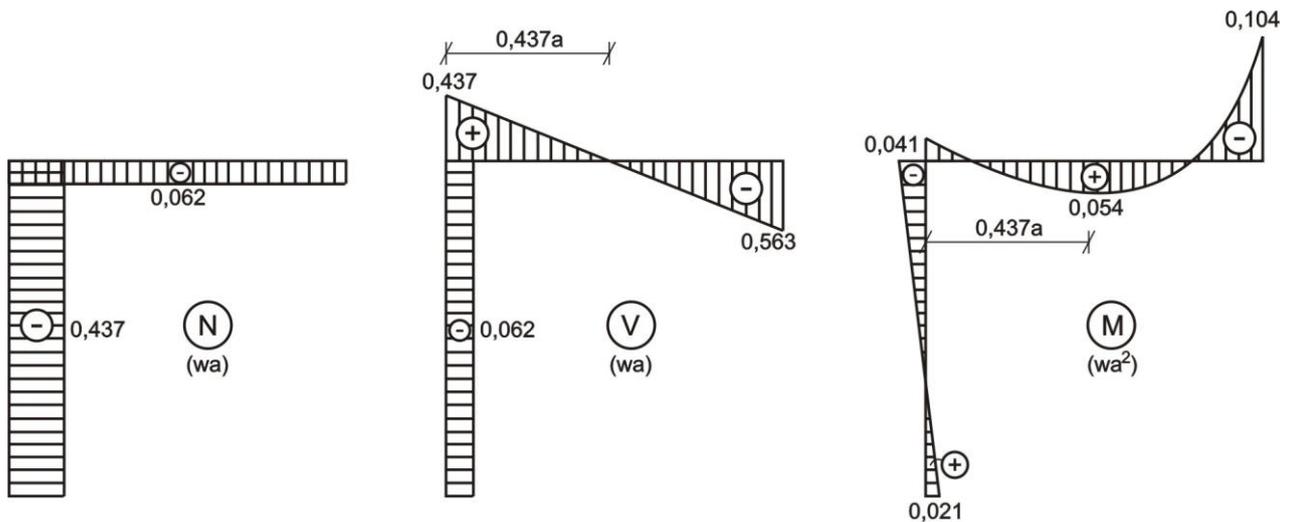


Fig. 7.56

A partir de los valores obtenidos en la figura 7.55, graficamos los diagramas finales de fuerza axial o normal, fuerza cortante y momento flector para el pórtico indicado, los cuales se muestran en la figura 7.56

PROBLEMA 7.11 Resolver la armadura mostrada en la figura 7.57 y determinar las fuerzas internas en todas las barras, sabiendo que las áreas de las barras AB, BD, AC y CD es 3000mm^2 y de la barra BC es 2000mm^2

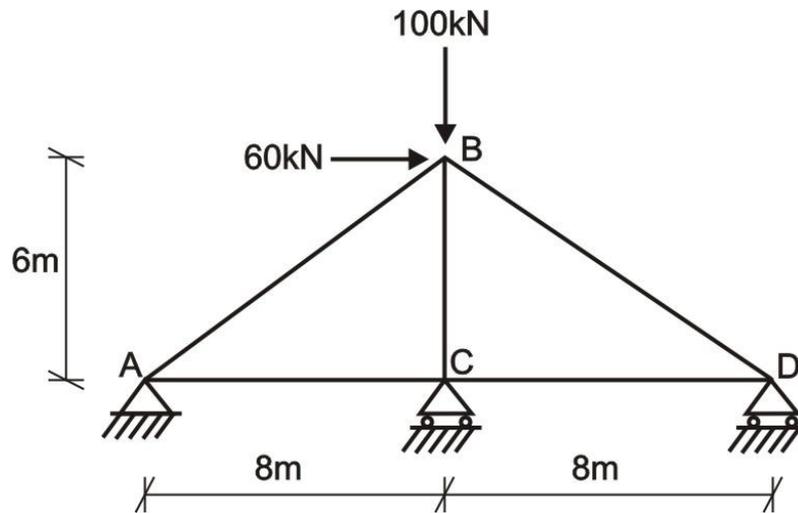


Fig. 7.57

Solución:

Determinamos el grado de indeterminación de la armadura:

$$G.I. = 9 - 2(4) = 1$$

La armadura es una vez hiperestática y dicha hiperestaticidad es externa, debido a que el número de reacciones es cuatro, es decir uno más de lo permitido por la Estática. Es por ello, que eliminamos la reacción vertical en el apoyo C y lo reemplazamos por una carga unitaria, resolviendo dos armaduras, una bajo la acción de las cargas reales y la otra bajo la acción de la reacción unitaria, cuyos valores de fuerzas internas se muestran en las figuras 7.58 y 7.59

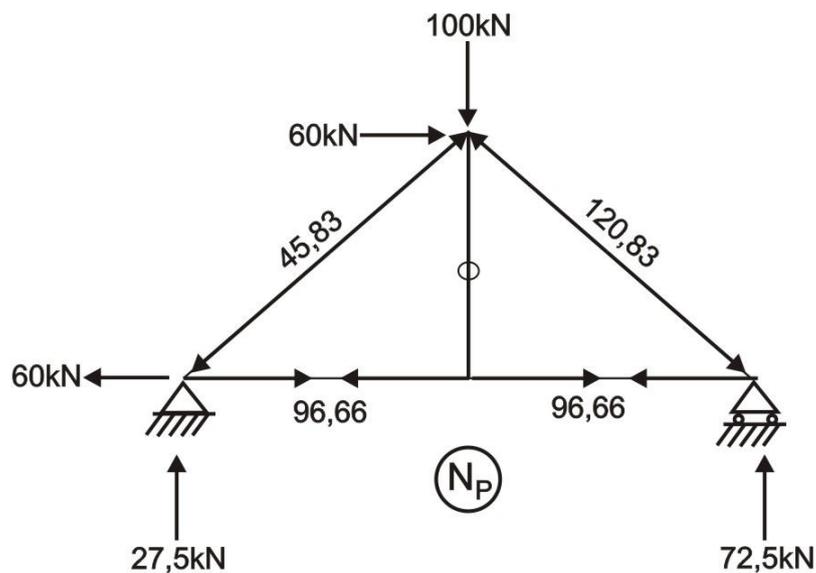


Fig. 7.58

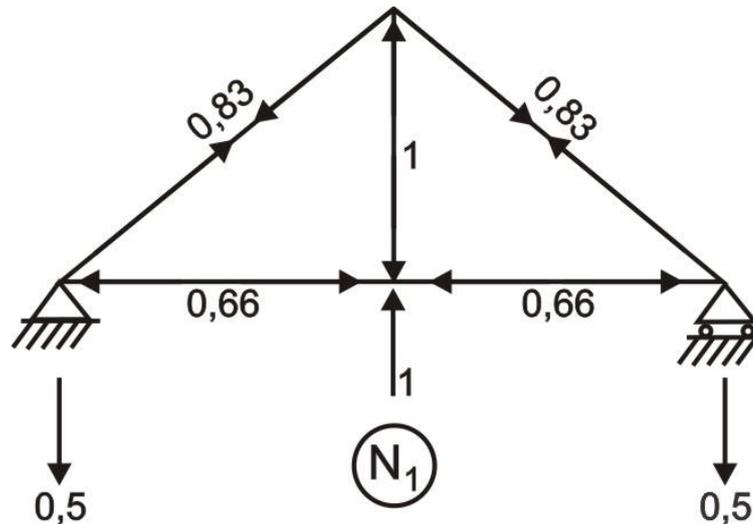


Fig. 7.59

Para ello, resolvemos la ecuación canónica:

$$\delta_{11}x_1 + \Delta_{1P} = 0$$

Donde:

$$\delta_{11} = \sum_{i=1}^n \frac{N_{l,i} N_{l,i}}{EA_i} L_i = \frac{1}{E} \left[\frac{(-0,66)^2 \cdot 8}{3000 \cdot 10^{-6}} \cdot 2 + \frac{(0,83)^2 \cdot 10}{3000 \cdot 10^{-6}} \cdot 2 + \frac{(-1)^2 \cdot 6}{2000 \cdot 10^{-6}} \right] = \frac{9915,87}{E}$$

$$\Delta_{1P} = \sum_{i=1}^n \frac{N_{l,i} N_{p,i}}{EA_i} L_i = \frac{1}{E} \left[\frac{96,66 \cdot (-0,66) \cdot 8}{3000 \cdot 10^{-6}} \cdot 2 + \frac{(-45,83) \cdot 0,83 \cdot 10}{3000 \cdot 10^{-6}} + \frac{(-120,83) \cdot 0,83 \cdot 10}{3000 \cdot 10^{-6}} \right]$$

$$\Delta_{1P} = -\frac{801335,87}{E}$$

Luego:

$$\frac{9915,87}{E} x_1 - \frac{801335,87}{E} = 0$$

De donde:

$$x_1 = V_C = 80,81 \text{ kN } \uparrow$$

Esquematisamos de nuevo la armadura, determinamos las otras reacciones y calculamos sus fuerzas internas, las cuales se muestran en la figura 7.60

Existe otra forma como obtener las fuerzas internas en la armadura, no siendo necesario aplicar los métodos de los nudos o secciones, sino aplicando la siguiente relación, que es válida para armaduras hiperestáticas de un grado de indeterminación, como es el presente caso.

$$N_F = N_1 x_1 + N_P$$

Siendo:

N_F - fuerza interna final de cada barra de la armadura

N_1 - fuerza interna de cada barra de la armadura, debido a la acción de la carga unitaria, mostrado en la figura 7.59

x_1 - valor de la redundante desconocida, que en este caso, es la reacción vertical en C

N_p - fuerza internas de cada barra de la armadura, debido a la acción de las cargas reales, mostradas en la figura 7.58

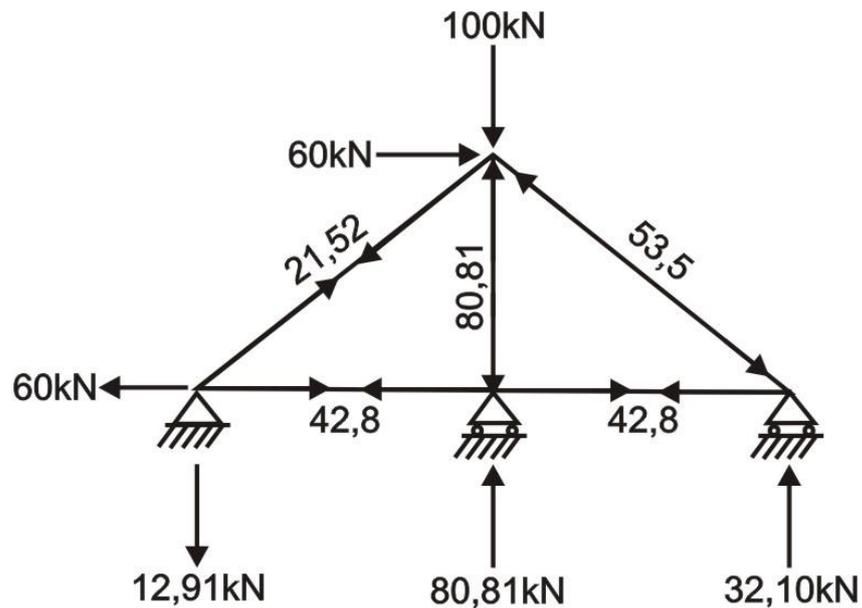


Fig. 7.60

PROBLEMA 7.12 Resolver la armadura mostrada en la figura 7.61, si es de sección constante en todas sus barras.

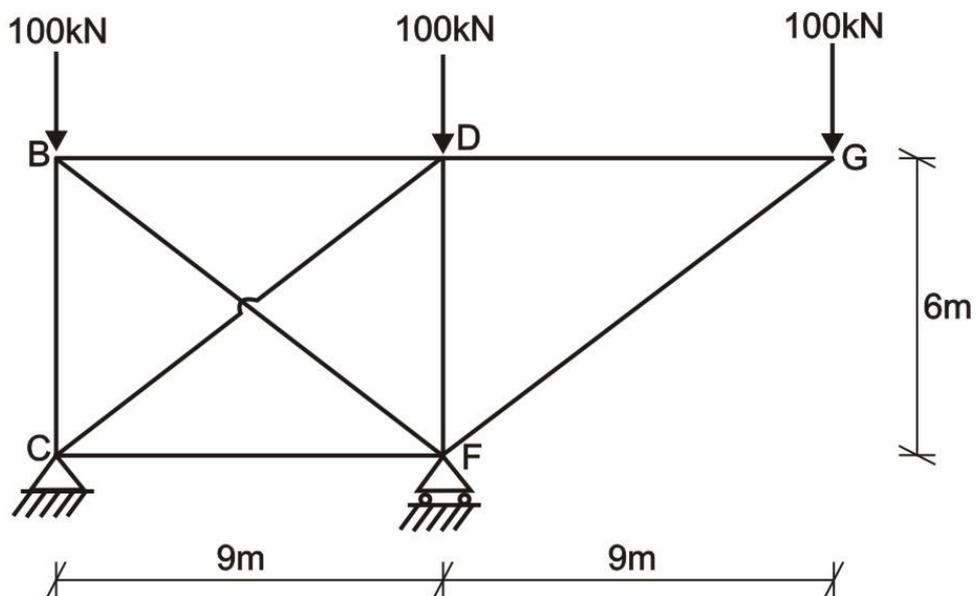


Fig. 7.61

Solución:

Determinamos el grado de indeterminación de la armadura:

$$G.I. = 11 - 2(5) = 1$$

La armadura es una vez hiperestática y dicha hiperestaticidad es interna, debido a las barras cruzadas superpuestas CD y BF.

Para ello, debemos de cortar una de estas barras, que en este caso lo haremos con la barra CD y analizamos la armadura sin esa barra y sometida a la acción de las cargas externas y otra armadura solo sometida a una carga unitaria en la barra cortada, calculando sus fuerzas internas para ambos casos, los cuales se muestran en las figuras 7.62 y 7.63

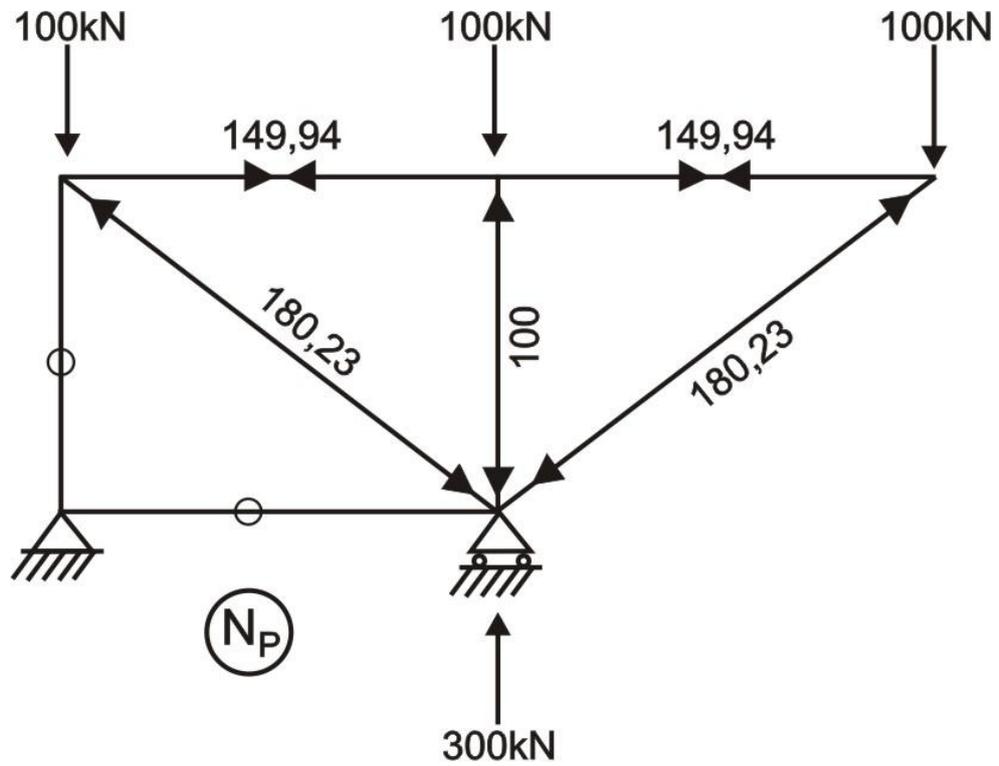


Fig. 7.62

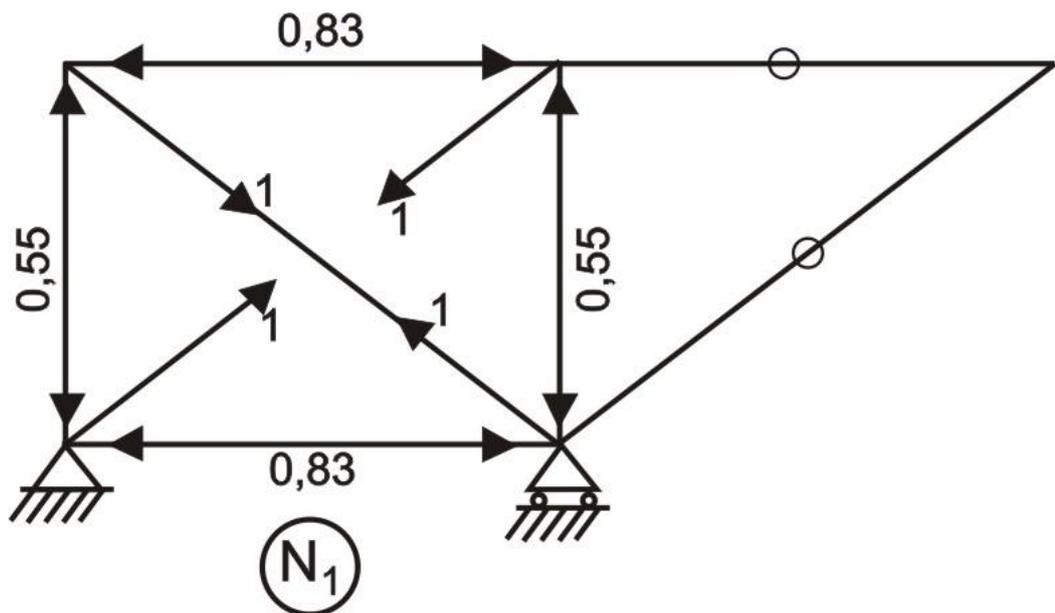


Fig. 7.63

Luego, resolvemos la ecuación canónica:

$$\delta_{11}x_1 + \Delta_{1P} = 0$$

Donde:

$$\delta_{11} = \sum_{i=1}^n \frac{N_{l,i} N_{l,i}}{EA} L_i = \frac{(-0,55)^2 \cdot 6}{EA} \cdot 2 + \frac{(-0,83)^2 \cdot 9}{EA} \cdot 2 + \frac{1^2 \cdot 10,82}{EA} \cdot 2 = \frac{37,67}{EA}$$

$$\Delta_{1P} = \sum_{i=1}^n \frac{N_{l,i} N_{p,i}}{EA} L_i = \frac{(149,94) \cdot (-0,83) \cdot 9}{EA} + \frac{(-100) \cdot (-0,55) \cdot 6}{EA} + \frac{(-180,23) \cdot (1) \cdot (10,82)}{EA} = -\frac{2740,14}{EA}$$

Después reemplazamos los valores obtenidos en la ecuación canónica:

$$\frac{37,67}{EA} x_1 - \frac{2740,14}{EA} = 0$$

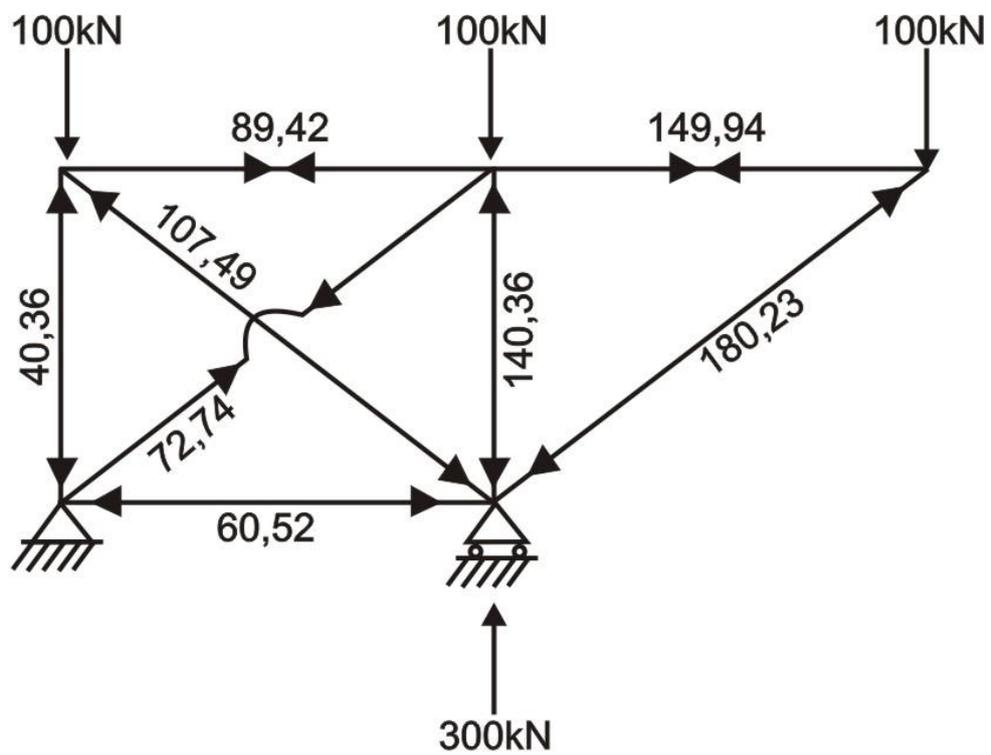
De donde:

$$x_1 = N_{CD} = 72,74 \text{ kN}$$

El signo positivo, indica que la fuerza axial o normal es de tracción, tal como se mostró previamente en la figura 7.63. Esto quiere decir, que la orientación de la fuerza interna fue la correcta, caso contrario, sería opuesta, es decir, de compresión.

En base al resultado obtenido, determinamos las fuerzas internas finales para la armadura, la cual como se sabe se puede obtener de dos formas, una reemplazando la fuerza interna recientemente calculada y luego se determinan las otras fuerzas internas por los métodos tradicionales y la otra metodología, es aplicando la relación $N_F = N_l x_1 + N_p$, que es válido para el presente caso, debido a que la armadura es una vez hiperestática.

En la figura 7.64 se muestra las reacciones y fuerzas internas en todas las barras de la armadura.



CAPITULO 8

RESISTENCIA COMPUESTA

8.1 FLEXION DESVIADA

Una barra se encuentra en flexión desviada, si el plano de acción de las cargas no concuerda con ninguno de sus planos principales (figura 8.1)

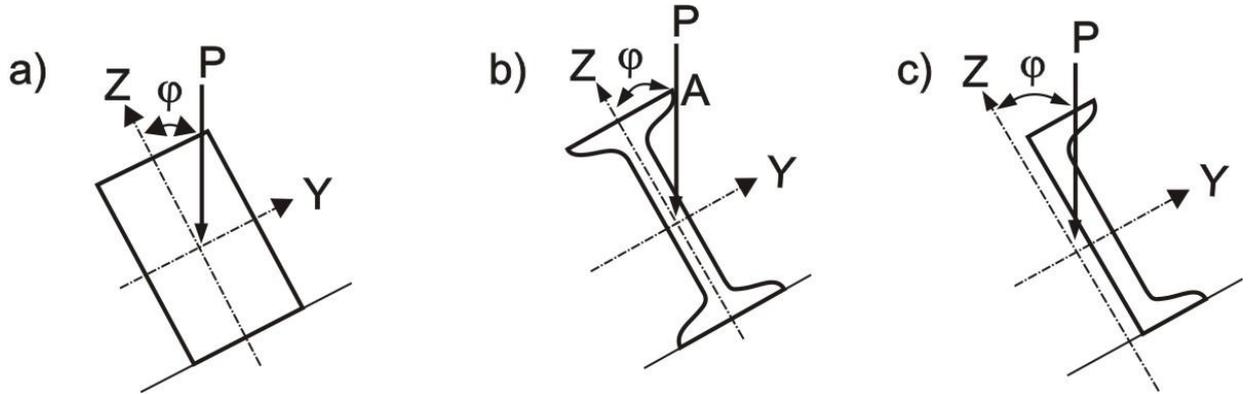


Fig. 8.1

Existen dos tipos de flexión desviada: plana y espacial. La flexión desviada plana se produce cuando todas las fuerzas se encuentran en un mismo plano y la línea elástica de la barra es una curva plana. En cambio, la flexión desviada espacial, es aquella donde las fuerzas externas se encuentran en diferentes planos y la línea elástica es una curva espacial.

FLEXION DESVIADA PLANA

Si se divide la acción externa en sus componentes por los ejes principales de la sección transversal, se puede analizar la flexión desviada como un conjunto de dos flexiones planas, que suceden en planos principales mutuamente perpendiculares.

El esfuerzo normal en cualquier punto de la sección transversal de la barra, se determina en base al principio de superposición de cargas y a través de la fórmula 8.1

$$\sigma = \frac{M_y}{I_y} z + \frac{M_z}{I_z} y \quad (8.1)$$

Donde:

M_y, M_z - momento flector respecto a los ejes centrales principales y, z de la sección transversal

I_y, I_z - momentos de inercia de la sección transversal respecto a los ejes centrales principales y, z

y, z - coordenadas del punto donde se desea determinar el esfuerzo

La ecuación de la línea central o neutra, se determina como un lugar geométrico de puntos, en los cuales los esfuerzos normales son iguales a cero (fórmula 8.2) o su transformación (fórmula 8.3)

$$\frac{M_y}{I_y} z + \frac{M_z}{I_z} y = 0 \quad (8.2)$$

$$z = -\frac{M_z I_y}{M_y I_z} y \quad (8.3)$$

Esta ecuación es de una línea con coeficiente angular (fórmula 8.4):

$$k = \operatorname{tg}\alpha = -\frac{M_z I_y}{M_y I_z} = -\frac{I_y}{I_z} \operatorname{tg}\varphi \quad (8.4)$$

Donde:

φ - ángulo que forma la fuerza con el eje OZ (figura 8.1)

En flexión desviada, la línea neutra es recta y no es perpendicular a la línea de acción de la carga.

Para determinar la deflexión, también, se aplica el Principio de superposición, esto es, la deflexión total es igual a la suma geométrica de las deflexiones que surgen en las direcciones de los ejes principales (fórmula 8.5)

$$f = \sqrt{f_y^2 + f_z^2} \quad (8.5)$$

En flexión desviada, la dirección de la deflexión total es perpendicular a la línea neutra y no concuerda con la línea de acción de la carga, es por ello, que la flexión se denomina desviada.

El cálculo de resistencia se realiza en la zona más peligrosa de la sección transversal. Para barras con sección transversal constante, la sección más peligrosa es aquella donde el momento flector es máximo. El punto más peligroso en esta sección, para el caso de barras de materiales plásticos, sucede en el punto más alejado de la línea neutra.

La condición de resistencia para materiales plásticos es:

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{M_{y,\text{máx}}}{I_y} z_A + \frac{M_{z,\text{máx}}}{I_z} y_A \leq [\sigma] \quad (8.6)$$

Donde:

y_A, z_A - coordenadas del punto más peligroso (figura 8.1,b)

Para barras de materiales frágiles, en la sección más peligrosa, se debe de efectuar las comprobaciones de resistencia para los puntos con esfuerzos máximos en tracción y compresión. Si

$\sigma_{\text{máx}}^{\text{tr}} < \sigma_{\text{máx}}^{\text{comp}}$, las condiciones de resistencia a comprobar serán $\sigma_{\text{máx}}^{\text{tr}} \leq [\sigma]_{\text{tr}}$ y $\sigma_{\text{máx}}^{\text{comp}} \leq [\sigma]_{\text{comp}}$.

Para el caso, cuando $\sigma_{\text{máx}}^{\text{tr}} > \sigma_{\text{máx}}^{\text{comp}}$, la comprobación de resistencia se realizará solo para el punto con mayor esfuerzo normal en tracción.

Para secciones que tienen dos ejes de simetría, el punto más peligroso se calcula sin determinar la línea neutra.

Si el punto más peligroso es el que se encuentra más alejado de ambos ejes principales, entonces la condición de resistencia se puede realizar por la fórmula 8.7

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{M_{y,\text{máx}}}{W_y} + \frac{M_{z,\text{máx}}}{W_z} \quad (8.7)$$

FLEXION DESVIADA ESPACIAL

El cálculo de resistencia se efectúa en forma análoga a la flexión desviada plana, pero se hace más complicada la determinación de la sección peligrosa, debido a que M_y, M_z pueden alcanzar valores máximos en diferentes secciones. Generalmente, se efectúa el cálculo de resistencia para dos secciones con $M_{y,máx}$ y $M_{z,máx}$

PROBLEMA 8.1 Determinar el perfil tipo I, si $[\sigma] = 1600 \text{ kgf/cm}^2$ y calcular la magnitud y dirección de la deflexión máxima de la viga, sabiendo que en el mercado existen los siguientes tipos de perfiles de acero:

Nº de perfil	Área (A) cm ²	W_y cm ³	W_z cm ³	I_y cm ⁴	I_z cm ⁴
1	28,9	203	28,2	2030	155
2	32,8	254	34,3	2790	206
3	37,5	317	41,6	3800	260
4	43,2	407	50	5500	337
5	49,9	518	60,1	7780	436

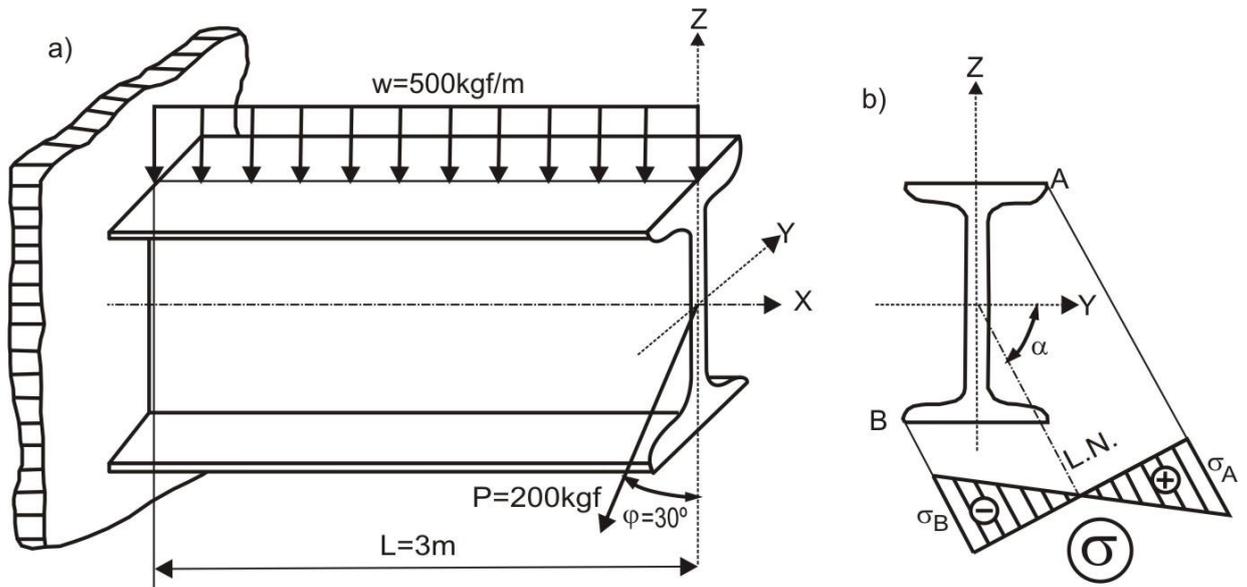


Fig. 8.2

Solución:

Los momentos flectores máximos surgen en el empotramiento, siendo sus valores los siguientes:

$$M_{y,máx} = \frac{wL^2}{2} + (P \cos \varphi)L = \frac{500 \cdot 3^2}{2} + (200 \cos 30^\circ)3 = 2770 \text{ kgf} \cdot \text{m}$$

$$M_{z,máx} = (P \sin \varphi)L = (200 \sin 30^\circ)3 = 300 \text{ kgf} \cdot \text{m}$$

El momento M_y actúa en el plano vertical y M_z en el plano horizontal.

La condición de resistencia tiene la forma:

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{M_{y,\text{máx}}}{W_y} + \frac{M_{z,\text{máx}}}{W_z} \leq [\sigma]$$

Las incógnitas en esta ecuación son W_y , W_z

Analizando la tabla de los perfiles comerciales, podemos indicar que la relación W_y/W_z varía en los intervalos de 7,2 a 8,6

Para elegir la sección del perfil, asumimos una relación $\frac{W_y}{W_z} = 8$, transformando la ecuación de la condición de resistencia, quedando así:

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{M_{y,\text{máx}}}{W_y} + \frac{8M_{z,\text{máx}}}{W_y} = \frac{M_{y,\text{máx}} + 8M_{z,\text{máx}}}{W_y} \leq [\sigma]$$

De donde:

$$W_y = \frac{M_{y,\text{máx}} + 8M_{z,\text{máx}}}{[\sigma]} = \frac{2770 \cdot 10^2 + 8 \cdot 300 \cdot 10^2}{1600} = 323,1 \text{ cm}^3$$

De acuerdo a los perfiles existentes en el mercado, elegimos el perfil N° 3, cuyas características geométricas son $W_y = 317 \text{ cm}^3$, $W_z = 41,6 \text{ cm}^3$

Verificamos la condición de resistencia:

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{2770 \cdot 10^2}{317} + \frac{300 \cdot 10^2}{41,6} = 1595 \text{ kgf/cm}^2 < [\sigma] = 1600 \text{ kgf/cm}^2$$

El diagrama de esfuerzos normales se muestra en la figura 8.2,b.

La deflexión máxima surge en el extremo libre de la viga, para ello, analizamos las deflexiones en los planos XOZ y XOY.

Plano XOZ:

$$f_z = \frac{1}{EI_y} \left(\frac{wL^4}{8} + \frac{PL^3 \cos \varphi}{3} \right) = \frac{1}{2 \cdot 10^6 \cdot 3800} \left(\frac{5,3^4 \cdot 10^8}{8} + \frac{200 \cdot 3^3 \cdot 10^6 \cdot 0,866}{3} \right) = 0,871 \text{ cm}$$

Plano XOY:

$$f_y = \frac{1}{EI_z} \frac{PL^3 \sin \varphi}{3} = \frac{1}{2 \cdot 10^6 \cdot 260} \cdot \frac{200 \cdot 3^3 \cdot 10^6 \cdot 0,5}{3} = 1,731 \text{ cm}$$

De esta manera, la deflexión total del extremo libre de la viga es:

$$f = \sqrt{f_y^2 + f_z^2} = \sqrt{0,871^2 + 1,731^2} = 1,938 \text{ cm}$$

La deflexión está orientada formando un ángulo α con el eje OY:

$$\text{tg} \alpha = \frac{f_y}{f_z} = \frac{1,731}{0,871} = 1,987 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 63,28^\circ$$

PROBLEMA 8.2 Comprobar la resistencia de la barra de hierro fundido mostrado en la figura 8.3, a si $[\sigma]_{tr} = 350\text{kgf/cm}^2$ y $[\sigma]_{comp} = 1300\text{kgf/cm}^2$. Graficar el diagrama de esfuerzos para la sección más peligrosa.

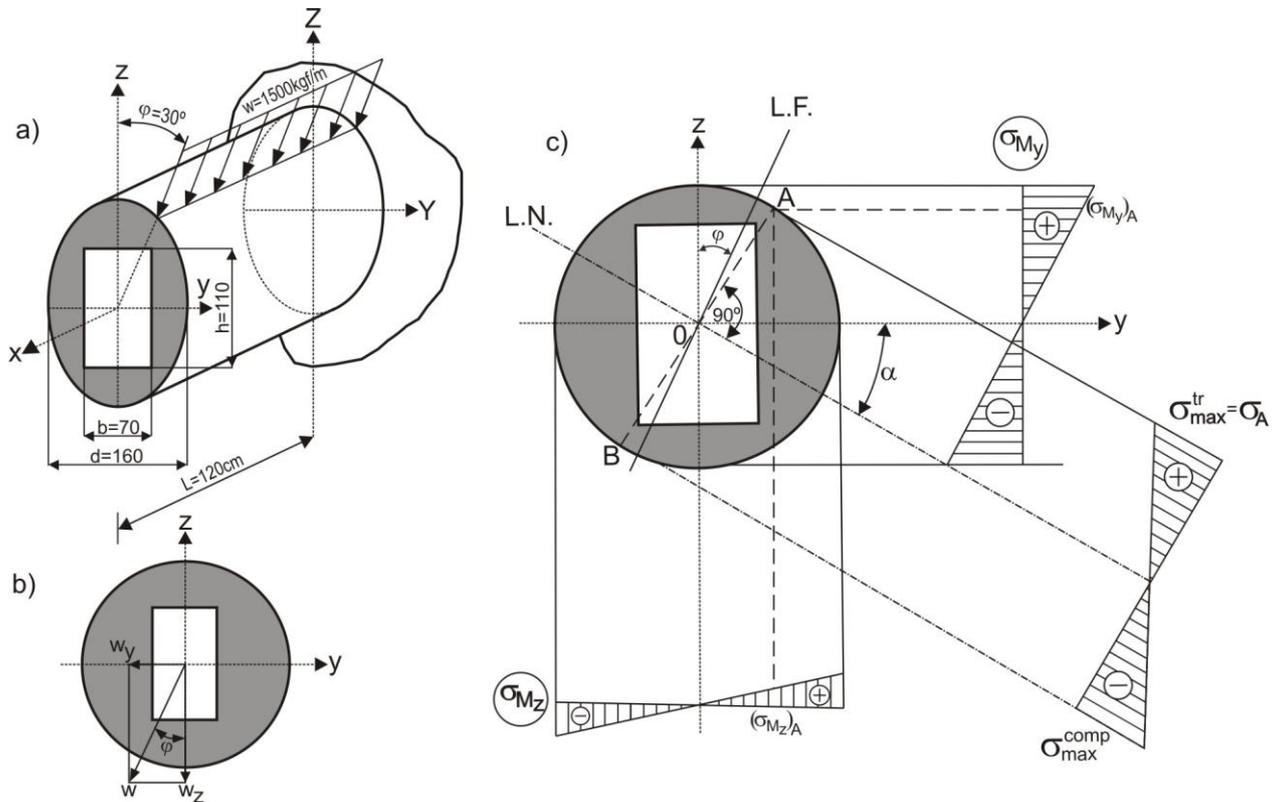


Fig. 8.3

Solución:

La barra trabaja en flexión desviada plana, para ello, descomponemos la carga en sus proyecciones por los ejes principales en OY, OZ (figura 8,3,b)

La sección peligrosa es el empotramiento, donde los momentos flectores máximos son:

$$M_{y,m\acute{a}x} = \frac{w_z L^2}{2} = \frac{(w \cos \varphi) L^2}{2} = \frac{1500 \cdot 0,866 \cdot 1,2^2 \cdot 100}{2} = 93528 \text{kgf} \cdot \text{cm}$$

$$M_{z,m\acute{a}x} = \frac{w_y L^2}{2} = \frac{(w \sin \varphi) L^2}{2} = \frac{1500 \cdot 0,5 \cdot 1,2^2 \cdot 100}{2} = 54000 \text{kgf} \cdot \text{cm}$$

Sin calcular los valores de los esfuerzos normales debido a cada momento flector se muestran en la figura 8.3,c

Para determinar el punto más peligroso, determinamos la ubicación de la línea neutra. El coeficiente de giro de la línea neutra es:

$$k = \text{tg} \alpha = -\frac{M_z I_y}{M_y I_z} = -\text{tg} \varphi \cdot \frac{I_y}{I_z}$$

Donde los momentos de inercia de la sección transversal son:

$$I_y = \frac{\pi d^4}{64} - \frac{bh^3}{12} = \frac{\pi \cdot 16^4}{64} - \frac{7 \cdot 11^3}{12} = 2440,6 \text{cm}^4$$

$$I_z = \frac{\pi d^4}{64} - \frac{hb^3}{12} = \frac{\pi \cdot 16^4}{64} - \frac{11 \cdot 7^3}{12} = 2902,6 \text{ cm}^4$$

Luego, se tendrá:

$$k = \text{tg} \alpha = -0,577 \cdot \frac{2440,6}{2902,6} = -0,485 \quad \Rightarrow \quad \alpha = -25,87^\circ$$

El signo negativo implica que se girará en el sentido horario respecto al eje OY y trazamos la línea neutra.

Para graficar los diagramas de esfuerzos normales, trazamos tangentes a la sección transversal en los puntos más alejados, esto es, los puntos A y B, siendo el más peligroso el punto A, donde surgen los esfuerzos de tracción (figura 8.3,c)

El eje del diagrama σ es perpendicular a la línea neutra y para graficar dicho diagrama, es suficiente calcular las coordenadas del punto A, los cuales son:

$$y_A = \frac{d}{2} \text{sen} \alpha = \frac{16}{2} \cdot 0,436 = 3,49 \text{ cm}$$

$$z_A = \frac{d}{2} \text{cos} \alpha = 8,0900 = 7,20 \text{ cm}$$

Como se podrá apreciar, para calcular $\text{sen} \alpha$ y $\text{cos} \alpha$, no se considera el signo del ángulo, debido a que geoméricamente la línea OA forma un ángulo con OY igual a $(90 - \alpha)$, siendo sus proyecciones en los ejes OY y OZ, respectivamente $\text{cos}(90 - \alpha) = \text{sen} \alpha$ y $\text{sen}(90 - \alpha) = \text{cos} \alpha$, siendo las coordenadas del punto A positivas.

Luego, el esfuerzo normal en el punto A es:

$$\sigma_A = \frac{M_{y,\text{máx}}}{I_y} z_A + \frac{M_{z,\text{máx}}}{I_z} y_A = \frac{93528}{2440,6} \cdot 7,20 + \frac{54000}{2902,6} \cdot 3,49 = 340,8 \text{ kgf/cm}^2 < [\sigma]_{\text{tr}}$$

De esta manera, se comprueba que la resistencia de la barra es la correcta y no es necesario efectuar la comprobación por compresión, debido a que no superará los límites permisibles.

PROBLEMA 8.3 Determinar el valor de la carga máxima que puede soportar la barra mostrada en la figura 8.4,a; siendo $[\sigma] = 1000 \text{ kgf/cm}^2$ y las características geométricas del perfil I son $A = 23,4 \text{ cm}^2$, $I_y = 1290 \text{ cm}^4$, $I_{z_1} = 82,6 \text{ cm}^4$. Las dimensiones de los perfiles y de las planchas metálicas se muestran en la figura 8.4,e, donde $a_1 = 4,5 \text{ cm}$ y $a_2 = 9,5 \text{ cm}$

Solución:

La barra trabaja en flexión desviada espacial, para ello, descomponemos la fuerza P_1 en los ejes OY, OZ (figura 8.4,b), mostrándose los esquemas de cargas en la barra y sus diagramas en los planos vertical (figura 8.4,c) y horizontal (figura 8.4,d)

Determinamos los momentos de inercia centrales principales, de acuerdo a los valores dados en la figura 8.4,e

$$I_y = 2I_y^I + 2 \frac{bh^3}{12} + 2A_{II} a_2^2 = 2 \cdot 1290 + 2 \cdot \frac{12 \cdot 1^3}{12} + 2 \cdot 12 \cdot 1,9,5^2 = 4748 \text{ cm}^4$$

$$I_z = 2I_{z_1}^I + 2A_1 a_1^2 + 2 \frac{hb^3}{12} = 2.82,6 + 2.23,4.4,5^2 + 2 \cdot \frac{1.12^3}{12} = 1401 \text{cm}^4$$

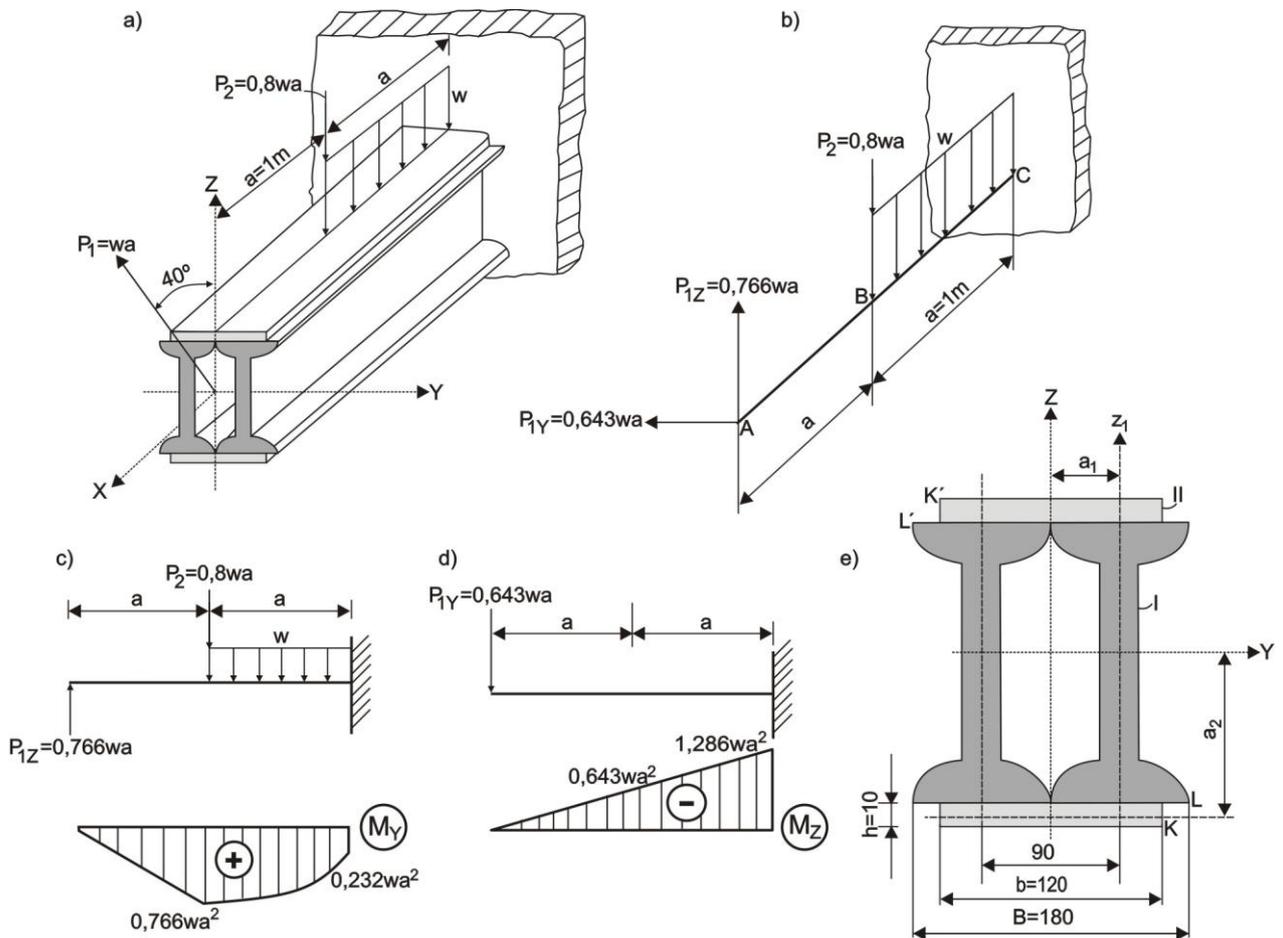


Fig. 8.4

El cálculo de resistencia lo efectuamos para dos secciones de la viga con valores máximos de momento flector M_y y M_z . Estas son las secciones B y C. Cada cálculo lo realizaremos para dos puntos peligrosos K, L o igualmente peligrosos K' , L'

Punto K de la sección B:

$$(\sigma_K)_B = \frac{M_{y,B}}{I_y} z_K + \frac{M_{z,B}}{I_z} y_K = \frac{0,766w \cdot 1^2}{4748 \cdot 10^{-8}} \cdot 10 \cdot 10^{-2} + \frac{0,643w \cdot 1^2}{1401 \cdot 10^{-8}} \cdot 6 \cdot 10^{-2} = 4367,1w$$

Punto L de la sección B:

$$(\sigma_L)_B = \frac{M_{y,B}}{I_y} z_L + \frac{M_{z,B}}{I_z} y_L = \frac{0,766w \cdot 1^2}{4748 \cdot 10^{-8}} \cdot 9 + \frac{0,643w \cdot 1^2}{1401 \cdot 10^{-8}} \cdot 9 \cdot 10^{-2} = 5582,6w$$

Punto K de la sección C:

$$(\sigma_K)_C = \frac{M_{y,C}}{I_y} z_K + \frac{M_{z,C}}{I_z} y_K = \frac{0,232w \cdot 1^2}{4748 \cdot 10^{-8}} \cdot 10 \cdot 10^{-2} + \frac{1,286w \cdot 1^2}{1401 \cdot 10^{-8}} \cdot 6 \cdot 10^{-2} = 5996,1w$$

Punto L de la sección C:

$$(\sigma_L)_C = \frac{M_{y,C}}{I_y} z_L + \frac{M_{z,C}}{I_z} y_L = \frac{0,232w \cdot 1^2}{4748 \cdot 10^{-8}} \cdot 9 \cdot 10^{-2} + \frac{1,286w \cdot 1^2}{1401 \cdot 10^{-8}} \cdot 9 \cdot 10^{-2} = 8701w$$

De esta manera, se concluye que el punto L de la sección C es el más peligroso y para dicho punto comprobamos la condición de resistencia, sabiendo que $[\sigma] = 1000 \text{kgf/cm}^2 = 10000 \text{T/m}^2$

$$(\sigma_L)_C \leq [\sigma]$$

$$8701w \leq 10000$$

$$w \leq 1,149 \text{T/m}$$

Entonces, la carga máxima admisible para la viga es:

$$w_{\text{máx}} = 1,149 \text{T/m}$$

8.2 FLEXION Y CARGA AXIAL

Para el cálculo de barras sometidas a flexión y carga axial (figura 8.5), solo se analizará por medio de los esfuerzos normales, esto es, se considerará la fuerza axial N_x y los momentos flectores M_y y M_z .

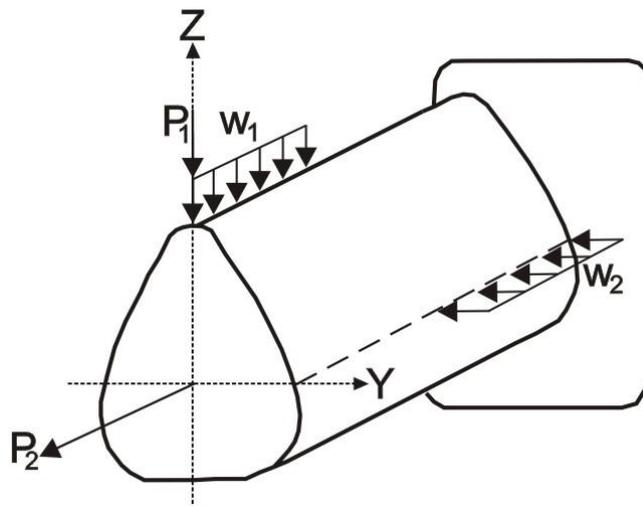


Fig. 8.5

En este capítulo analizaremos barras de gran rigidez, sometidas a la acción conjunta de flexión y carga axial, para lo cual se puede aplicar el Principio de superposición de cargas.

Para determinar la sección más peligrosa, se grafican los diagramas N_x, M_y, M_z y el cálculo de resistencia se realiza en la sección donde N_x, M_y, M_z alcanzan los valores máximos. En el caso que las fuerzas internas máximas se obtengan en diferentes secciones, entonces será necesario analizar cada una de ellas en forma separada para determinar la sección más peligrosa.

El esfuerzo normal en cualquier punto de la sección transversal de la barra se calculará por la fórmula 8.8

$$\sigma = \frac{N_x}{A} + \frac{M_y}{I_y} z + \frac{M_z}{I_z} y \quad (8.8)$$

Para determinar los esfuerzos, consideraremos la convención de signos del capítulo 1 (tracción y compresión) y capítulo 4 (flexión).

En la figura 8.6 se muestran los diagramas de esfuerzos normales correspondientes a cada una de las acciones internas y el diagrama final de esfuerzo normal correspondiente a la suma de los anteriores.

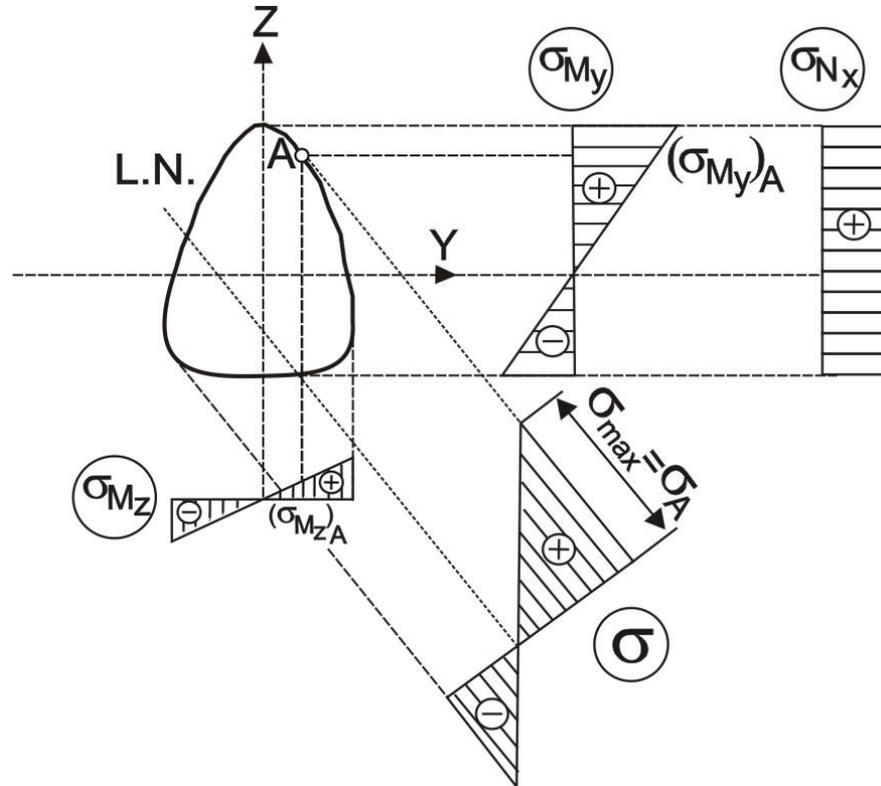


Fig. 8.6

La ecuación de la línea neutra lo obtenemos igualando a cero la parte derecha de la ecuación 8.8, tal como se muestra en la fórmula 8.9

$$\frac{N_x}{A} + \frac{M_y}{I_y} z + \frac{M_z}{I_z} y = 0 \quad (8.9)$$

La línea neutra, es una recta que no pasa por el inicio de coordenadas.

La ecuación de la línea neutra también se puede expresar como la ecuación de una recta en un tramo:

$$\frac{z}{a_z} + \frac{y}{a_y} = 1 \quad (8.10)$$

Donde:

$$a_z = -\frac{I_y N_x}{A M_y} \quad (8.11)$$

$$a_y = -\frac{I_z N_x}{A M_z}$$

También se puede expresar a_z y a_y en función de los radios principales de inercia i_y e i_z , tal como se muestra en la fórmula 8.12

$$a_z = -\frac{i_y^2 N_x}{M_y} \quad (8.12)$$

$$a_y = -\frac{i_z^2 N_x}{M_z}$$

Siendo:

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \quad (8.13)$$

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}$$

En las fórmulas 8.10 – 8.12, se tiene:

a_z, a_y - longitud del tramo que interseca la línea neutra con los ejes OZ y OY.

Para barras de materiales plásticos, el punto más peligroso será el punto más alejado de la línea neutra, esto es, el punto A de la figura 8.6 y su condición de resistencia será:

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{N_x}{A} + \frac{M_y}{I_y} z_A + \frac{M_z}{I_z} y_A \leq [\sigma] \quad (8.14)$$

Para barras de materiales frágiles, el cálculo de resistencia se realiza para los puntos con los valores máximos de los esfuerzos de compresión y tracción, si $\sigma_{\text{máx}}^{\text{comp}} > \sigma_{\text{máx}}^{\text{tr}}$

Para barras con secciones que tienen dos ejes de simetría y puntos igualmente más alejados del centro de coordenadas, como es el caso de secciones rectangulares y perfiles I, el punto más peligroso para materiales será aquel punto en el cual los signos de los esfuerzos son los mismos para cada una de las fuerzas internas (N_x, M_y, M_z), siendo la condición de resistencia para este caso la siguiente:

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{N_x}{A} + \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} \leq [\sigma] \quad (8.15)$$

Si las barras son de material frágil con carga axial de compresión, será necesario efectuar el cálculo para dos puntos con los mayores esfuerzos de tracción y compresión.

En un inicio la elección de la sección transversal se realizará sin considerar la fuerza axial.

Para elegir las secciones transversales, en el caso de barras de sección circular se puede aplicar la relación 8.16 y para barras con sección rectangular o perfil tipo I, se aplicará la fórmula 8.17

$$W_y = W_z = \frac{\sqrt{M_y^2 + M_z^2}}{[\sigma]} \quad (8.16)$$

$$W_y \geq \frac{M_y + \frac{W_y}{W_z} \cdot M_z}{[\sigma]} \quad (8.17)$$

Dada la relación de los lados del rectángulo, se obtiene la relación $W_y/W_z = h/b$, siendo h la altura y b la base.

Para secciones tipo perfil I, se da un valor medio de la relación W_y/W_z y luego se encuentra el perfil adecuado por medio de aproximaciones sucesivas.

Después de la elección previa de la sección transversal, se procede a la comprobación final considerando la fuerza axial y si es necesario se harán las correcciones de las dimensiones de la sección transversal y su elección definitiva.

PROBLEMA 8.4 Determinar el perfil tipo canal para la estructura mostrada en la figura 8.7,a; sabiendo que $[\sigma] = 1600 \text{kgf/cm}^2$; P_1, P_2, M están ubicados en el plano XOZ y P_3 está ubicado en el plano XOY. Considerar que en el mercado existen los siguientes tipos de perfiles metálicos:

Nº de perfil	y_0 cm	b cm	AREA (A) cm^2	W_y cm^3	W_z cm^3	I_y cm^4	I_z cm^4
1	2,42	9,0	30,6	242	31,6	2900	208
2	2,47	9,5	35,2	308	37,3	4160	262
3	2,52	10,0	40,5	387	43,6	5810	327
4	2,59	10,5	46,5	484	51,8	7980	410
5	2,68	11,0	53,4	601	61,7	10820	513

Solución:

Descomponemos la fuerza P_1 en los ejes OX, OZ y la fuerza P_3 en los ejes OX y OY. El esquema de la barra se muestra en la figura 8.7,b. La barra sufre flexión en el plano vertical (debido a la acción de las fuerzas P_2 , la componente $P_1 \text{sen} \alpha$ y el momento M), flexión en el plano horizontal (debido a la componente $P_3 \text{sen} \beta$) y tracción (debido a las componentes $P_1 \text{cos} \alpha$ y $P_3 \text{cos} \beta$).

En la figura 8.7,c se muestran los diagramas de fuerza axial (N_x) y momentos flectores (M_y, M_z), siendo la sección más peligrosa la ubicada en el empotramiento.

La primera elección de las dimensiones de la sección transversal lo realizamos para el cálculo de flexión debido al momento M_y :

$$W_y = \frac{M_y}{[\sigma]} = \frac{8 \cdot 10^3 \cdot 10^2}{1600} = 500 \text{cm}^3$$

Este valor corresponde a 2 secciones tipo canal, es por ello, que elegimos el perfil Nº 2 ($W_y^1 = 308 \text{cm}^3$), debido a que la condición de resistencia nos indica que debemos elegir perfiles con características mayores que la obtenida.

De esta manera, las características geométricas de la sección previamente elegida son:

$$W_y = 2W_y^1 = 2 \cdot 308 = 616 \text{cm}^3$$

$$A = 2A_1 = 2 \cdot 35,2 = 70,4 \text{cm}^2$$

$$I_{z1} = 262\text{cm}^4$$

$$y_0 = 2,47\text{cm}$$

$$b = 9,5\text{cm}$$

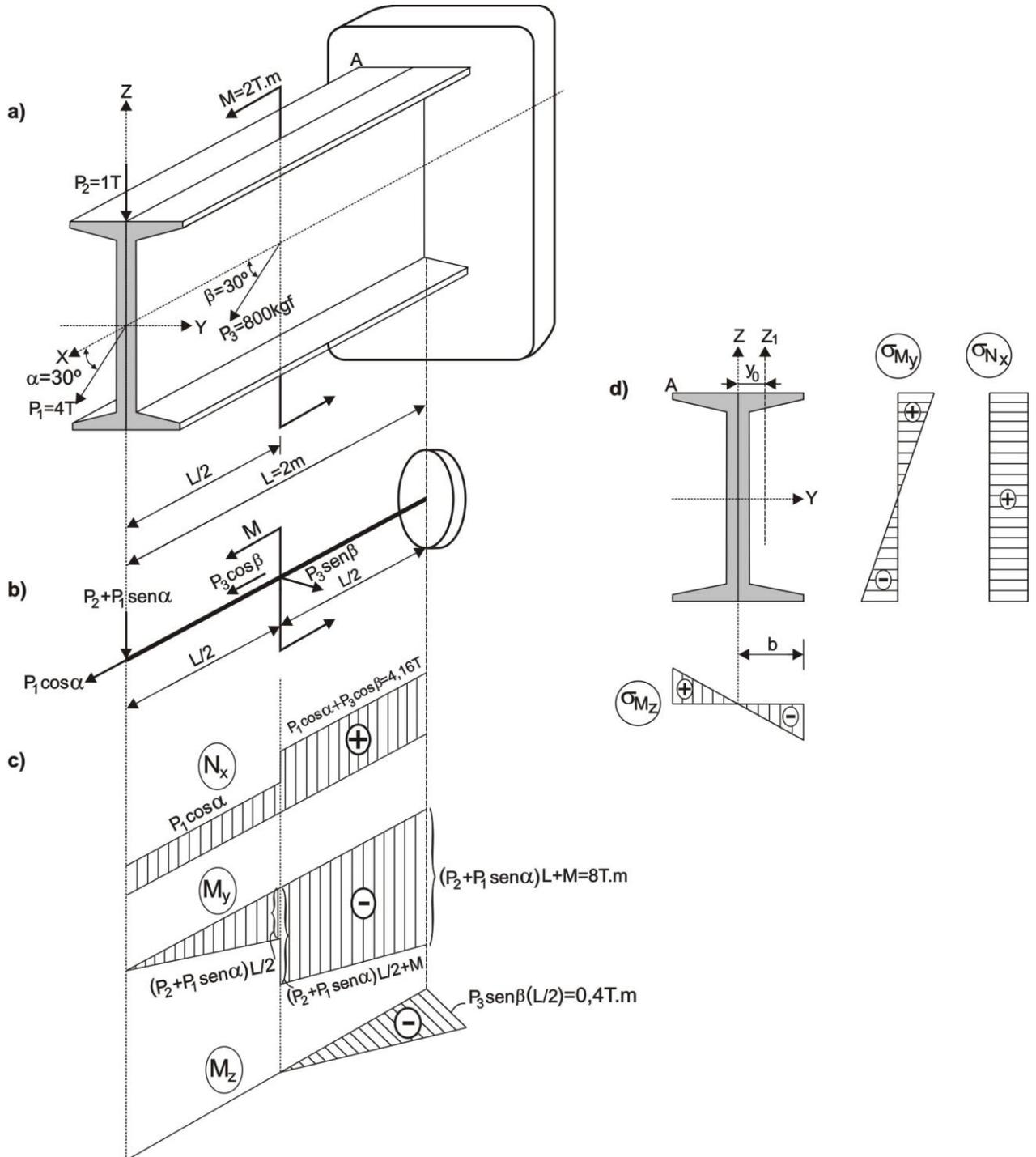


Fig. 8.7

El momento de inercia de toda la sección (figura 8.7,d) es:

$$I_z = 2I_{z1} + 2A_1y_0^2 = 2.262 + 2.35,2.2,47^2 = 953,5\text{cm}^4$$

$$W_z = \frac{I_z}{b} = \frac{953,5}{9,5} = 100,4\text{cm}^3$$

Los diagramas de esfuerzos normales, correspondientes a cada una de las acciones internas se muestran en la figura 8.7,d. El punto más peligroso es A, en el cual los signos de todos los esfuerzos son los mismos. El esfuerzo en el punto A lo determinamos por la siguiente relación:

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{N_x}{A} + \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} = \frac{4160}{70,4} + \frac{8.10^5}{616} + \frac{0,4.10^5}{100,4} = 1756,2\text{kgf} / \text{cm}^2 > 1600\text{kgf} / \text{cm}^2$$

El sobreesfuerzo es aproximadamente el 10%, por ello, elegimos el perfil N° 3, siendo sus características geométricas las siguientes:

$$W_y = 2W_y^1 = 2.387 = 774\text{cm}^3$$

$$A = 2A_1 = 2.40,5 = 81\text{cm}^2$$

$$I_{z1} = 327\text{cm}^4$$

$$y_0 = 2,52\text{cm}$$

$$b = 10\text{cm}$$

$$I_z = 2.327 + 2.40,5.2,52^2 = 1168,4\text{cm}^4$$

$$W_z = \frac{I_z}{b} = \frac{1168,4}{10} = 116,8\text{cm}^3$$

Determinamos el esfuerzo en el punto A y comprobamos la condición de resistencia:

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{N_x}{A} + \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} = \frac{4160}{81} + \frac{8.10^5}{774} + \frac{0,4.10^5}{116,8} = 1427,4\text{kgf} / \text{cm}^2 < 1600\text{kgf} / \text{cm}^2$$

De esta manera, elegimos el perfil N° 3, por ser el que cumple con la condición de resistencia, teniendo una holgura del 10,8%

8.3 CARGA AXIAL EXCÉNTRICA

Carga axial excéntrica, es aquella carga paralela al eje longitudinal de la barra y que puede ser de tracción o de compresión, tal como se muestra en la figura 8.8

La distancia "e" se llama *excentricidad* y el punto donde se aplica la carga *polo*.

La acción de la carga axial excéntrica es equivalente a las acciones de la carga axial céntrica con la flexión desviada pura. De esta manera, el cálculo de resistencia se realiza con las mismas fórmulas que flexión y carga axial, con la condición que en los diagramas de fuerzas internas, las secciones no son igualmente peligrosas.

Los puntos del tramo de recta que interseca la línea neutra con los ejes centrales principales se puede determinar por medio de la fórmula 8.18

$$a_z = -\frac{i_y^2}{e_z} \quad (8.18)$$

$$a_y = -\frac{i_z^2}{e_y}$$

Donde:

e_z, e_y - proyecciones de la excentricidad en los ejes centrales principales o lo que es lo mismo, coordenadas del polo

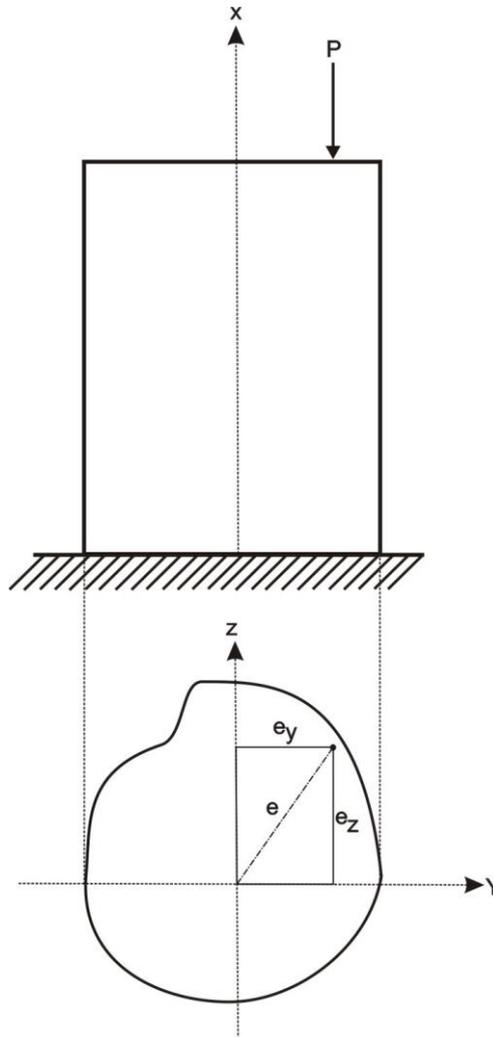


Fig. 8.8

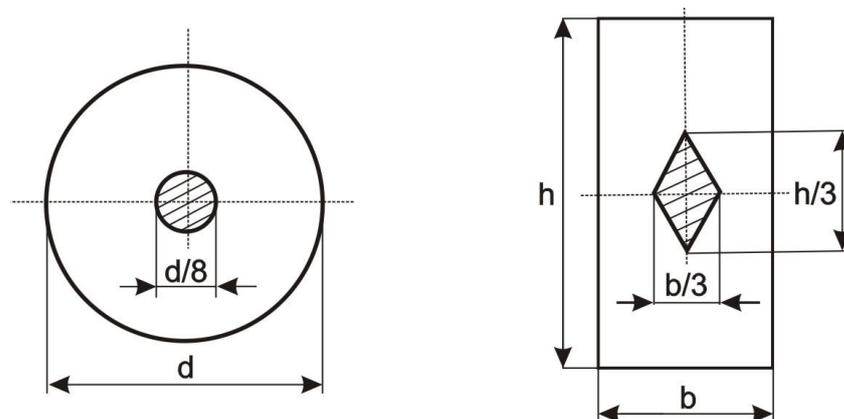


Fig. 8.9

Si la carga axial excéntrica se encuentra en el plano de uno de los ejes principales de la sección, así como para el caso de secciones, en los cuales todos sus ejes centrales son principales, se tendrá el caso de la suma de las acciones de flexión y tracción o compresión. Para los materiales, que trabajan mal en tracción, surgirán de todas maneras esfuerzos de tracción.

Los esfuerzos en toda la sección surgirán en el caso, cuando la línea neutra no interseca la sección. La ubicación de la línea neutra está relacionada con la ubicación del polo.

El lugar geométrico de los polos, que corresponden a las líneas centrales, tangentes a la sección, forman el contorno del núcleo central.

Si la carga excéntrica se aplica en cualquier punto del núcleo central, entonces generará en toda la sección esfuerzos de un mismo signo. El núcleo central para las secciones circular y rectangular, se muestran en la figura 8.9

PROBLEMA 8.5 Determinar los esfuerzos en la sección m – n de la estructura mostrada en la figura 8.10,a

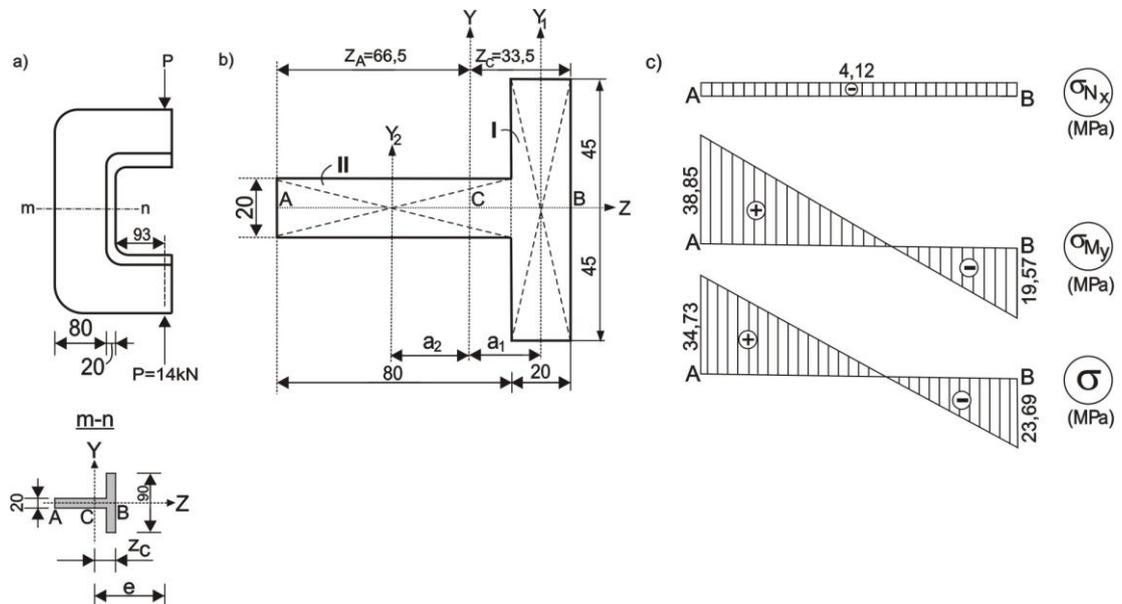


Fig. 8.10

Solución:

En este caso, la compresión excéntrica se puede obtener como la suma de la compresión céntrica y la flexión desviada pura en el plano XOZ.

Determinamos la ubicación del centro de gravedad de la sección, calculamos el momento de inercia respecto al eje central principal OY y determinamos el área de la sección transversal de la figura 8.10,b

$$z_C = \frac{A_1 z_1 + A_2 z_2}{A_1 + A_2} = \frac{9 \cdot 2 \cdot 1 + 8 \cdot 2 \cdot 6}{9 \cdot 2 + 8 \cdot 2} = 3,35 \text{ cm}$$

$$I_y = I_y^I + I_y^{II}$$

$$I_y^I = I_{y1}^I + A_1 a_1^2 = \frac{9 \cdot 2^3}{12} + 9 \cdot 2 \cdot (3,35 - 1)^2 = 105,4 \text{ cm}^4$$

$$I_y^{II} = I_{y2}^{II} + A_2 a_2^2 = \frac{2 \cdot 8^3}{12} + 2 \cdot 8 \cdot (6 - 3,35)^2 = 197,7 \text{ cm}^4$$

$$I_y = 105,4 + 197,7 = 303,1 \text{cm}^4$$

$$A = A_1 + A_2 = 18 + 16 = 34 \text{cm}^2$$

En la sección surgen dos fuerzas internas: fuerza axial $N_x = -P$ y momento flector $M_y = -Pe$, donde $e = 9,3 + 3,35 = 12,65 \text{cm}$

Los esfuerzos normales debido a la compresión central serán iguales en todos los puntos de la sección transversal:

$$\sigma_{N_x} = \frac{N_x}{A} = -\frac{P}{A} = -\frac{14 \cdot 10^3}{34 \cdot 10^{-4}} = -4,12 \text{MPa}$$

Los esfuerzos normales debido a la flexión, alcanzan los valores máximos en los puntos extremos de la sección: A ($z_A = -6,65 \text{cm}$), B ($z_B = z_C = 3,35 \text{cm}$)

$$(\sigma_{M_y})_A = -\frac{Pe}{I_y} z_A = -\frac{14 \cdot 10^3 \cdot 12,65 \cdot 10^{-2}}{303,1 \cdot 10^{-8}} (-6,65 \cdot 10^{-2}) = 38,85 \text{MPa (TRACCION)}$$

$$(\sigma_{M_y})_B = -\frac{Pe}{I_y} z_B = -\frac{14 \cdot 10^3 \cdot 12,65 \cdot 10^{-2}}{303,1 \cdot 10^{-8}} (3,35 \cdot 10^{-2}) = -19,57 \text{MPa (COMPRESION)}$$

Los diagramas de esfuerzos normales, correspondientes a N_x , M_y y la suma de los diagramas de esfuerzos, se muestran en la figura 8.10,c

Los valores extremos del diagrama de suma de esfuerzos son:

$$\sigma_A = (\sigma_{M_y})_A + \sigma_{N_x} = 38,85 - 4,12 = 34,73 \text{MPa}$$

$$\sigma_B = (\sigma_{M_y})_B + \sigma_{N_x} = -19,57 - 4,12 = -23,69 \text{MPa}$$

PROBLEMA 8.6 Una columna corta de acero, es cargada excéntricamente por una carga P, tal como se muestra en la figura 8.11,a. Determinar la carga permisible que puede soportar la columna, si $[\sigma] = 1400 \text{kgf/cm}^2$ y las características geométricas del perfil metálico son las siguientes:

h cm	b cm	A cm ²	W _y cm ³	W _z cm ³	I _y cm ⁴	I _z cm ⁴	i _y cm	i _z cm
30	13,5	46,5	472	49,9	7080	337	12,3	2,69

Solución:

Como la columna está sometida a compresión excéntrica, se puede descomponer en dos acciones, la compresión céntrica y la flexión desviada pura, cuyo polo no se encuentra en ninguno de los ejes principales.

Las coordenadas del polo son: $e_y = 6,75 \text{cm}$ y $e_z = 15 \text{cm}$

Las fuerzas internas son iguales en todas las secciones:

$$N_x = -P; \quad M_y = -Pe_z; \quad M_z = -Pe_y$$

Los diagramas de esfuerzos normales correspondientes a cada una de las acciones internas, se muestran en la figura 8.11,b

El punto más peligroso es el punto A y para dicho punto aplicamos la comprobación de resistencia, con la finalidad de determinar la carga permisible P.

$$|\sigma_{\text{máx}}^{\text{comp}}| = |\sigma_A| = \left| \frac{N_x}{A} + \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} \right| \leq [\sigma]$$

$$|\sigma_{\text{máx}}^{\text{comp}}| = \left| -\frac{P}{46,5} - \frac{P \cdot 15}{472} - \frac{P \cdot 6,75}{49,9} \right| = 0,188P \leq [\sigma]$$

De donde:

$$P_{\text{adm}} = P_{\text{máx}} = \frac{[\sigma]}{0,188} = \frac{1400}{0,188} = 7446,8 \text{kgf}$$

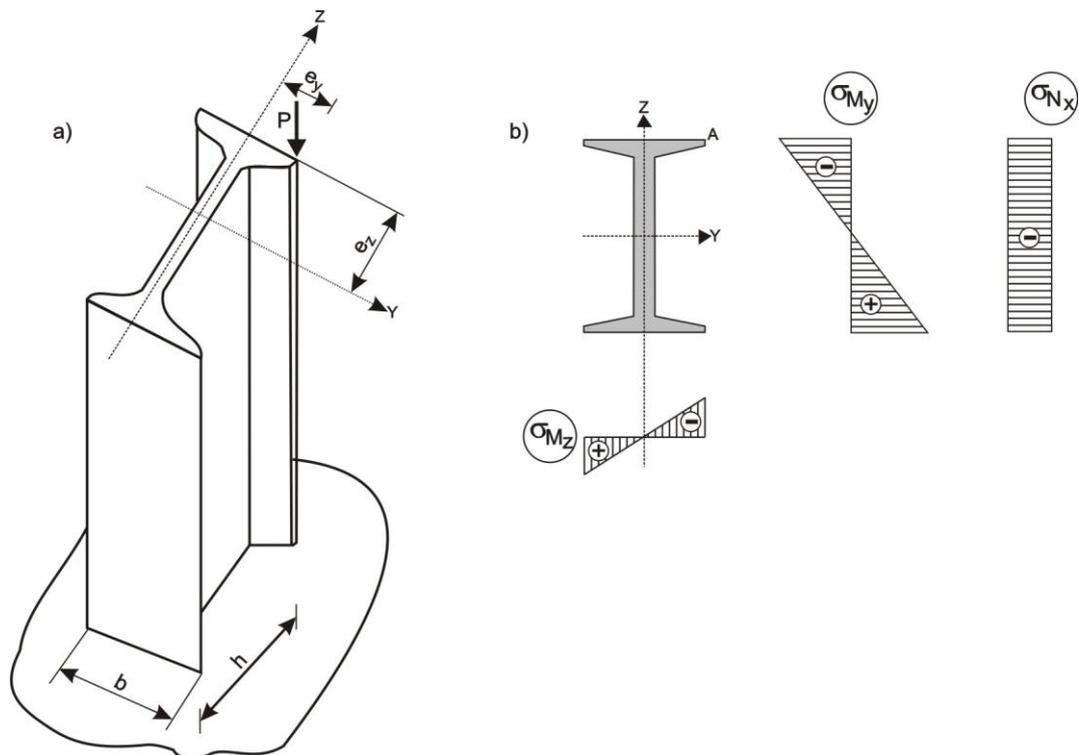


Fig. 8.11

PROBLEMA 8.7 Comprobar la resistencia de una columna de hierro fundido, mostrada en la figura 8.12,a; sabiendo que $[\sigma]_{\text{tr}} = 400 \text{kgf} / \text{cm}^2$ y $[\sigma]_{\text{comp}} = 1000 \text{kgf} / \text{cm}^2$

Solución:

La columna está sometida a compresión excéntrica, por medio de la carga P, cuya acción también puede ser descompuesta en compresión céntrica y flexión desviada pura.

Determinamos las características geométricas de la sección. El eje principal OZ lo trazamos una vez calculada la distancia y_c del centro de gravedad de la sección transversal, la cual se muestra en la figura 8.12,b

La sección transversal lo dividimos en tres rectángulos y calculamos la ubicación del centro de gravedad:

$$y_c = \frac{2A_1y_1 + A_2y_2}{2A_1 + A_2} = \frac{2 \cdot 24 \cdot 6 + 32 \cdot 1}{2 \cdot 24 + 32} = 4 \text{cm}$$

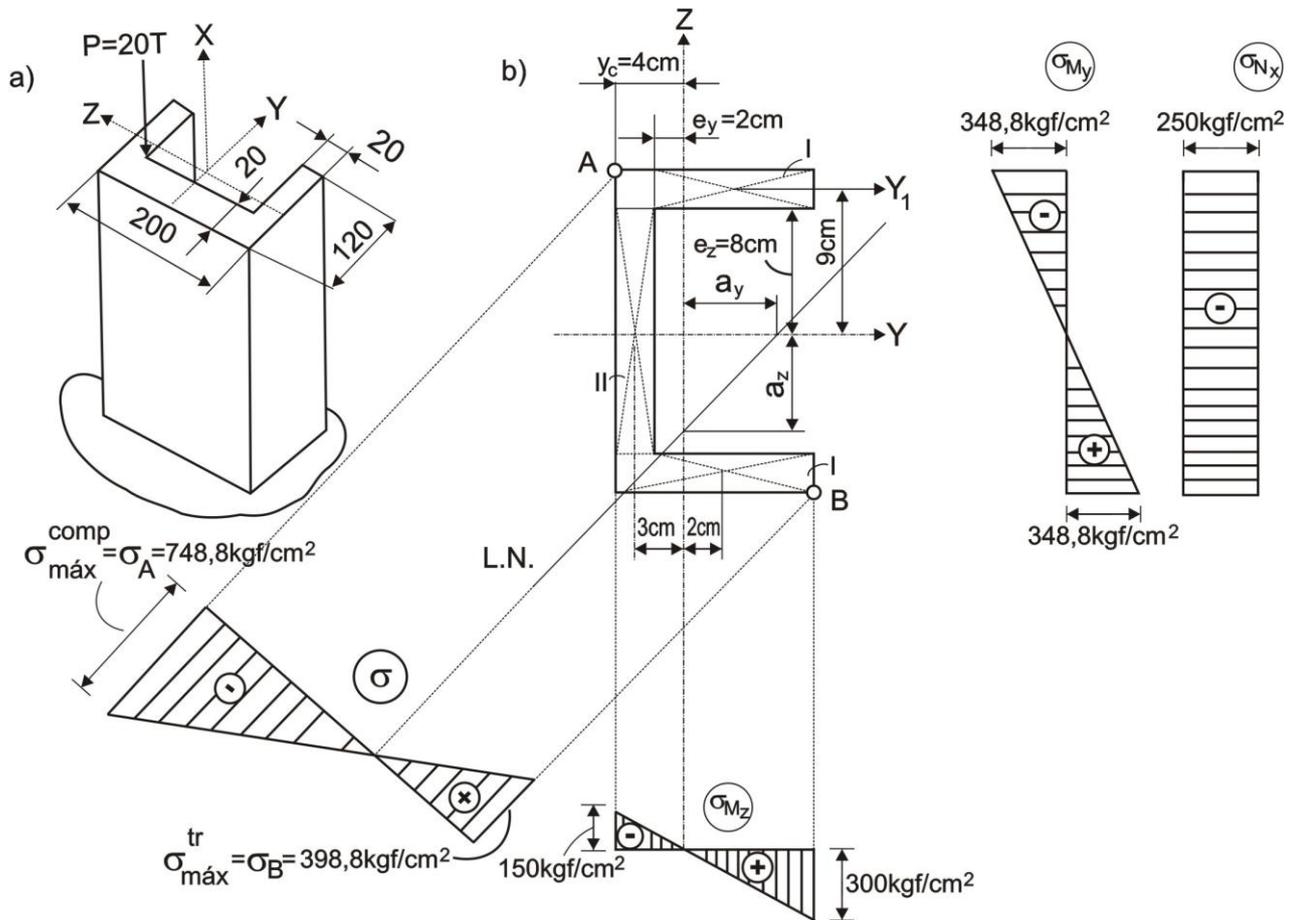


Fig. 8.12

Los momentos de inercia centrales principales son:

$$I_y = 2 \left(\frac{12.2^3}{12} + 24.9^2 \right) + \frac{2.16^3}{12} = 4586,7 \text{ cm}^4$$

$$I_z = 2 \left(\frac{2.12^3}{12} + 24.2^2 \right) + \frac{16.2^3}{12} + 32.3^2 = 1066,7 \text{ cm}^4$$

Los cuadrados de los radios de inercia son:

$$i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{4586,7}{2.24 + 32} = 57,3 \text{ cm}^2$$

$$i_z^2 = \frac{I_z}{A} = \frac{1066,7}{80} = 13,3 \text{ cm}^2$$

Las fuerzas internas que surgen en cualquier sección son:

$$N_x = -P$$

$$M_y = -P|e_z|$$

$$M_z = -P|e_y|$$

Donde, las coordenadas del polo son:

$$e_y = -2\text{cm}$$

$$e_z = 8\text{cm}$$

Para determinar los puntos peligrosos de la sección, trazamos la línea neutra, calculando previamente los tramos de longitud a_y, a_z que intersecan a los ejes centrales principales:

$$a_y = -\frac{i_z^2}{e_y} = -\frac{13,3}{-2} = 6,65\text{cm}$$

$$a_z = -\frac{i_y^2}{e_z} = -\frac{57,3}{8} = -7,16\text{cm}$$

Efectuando el trazo de la línea neutra (figura 8.12,b), observamos, que los puntos más alejados son el punto A ($y_A = -4\text{cm}, z_A = 10\text{cm}$), en el cual surgen los esfuerzos de compresión y el punto B ($y_B = 8\text{cm}, z_B = -10\text{cm}$), en el cual surgen los esfuerzos de tracción.

Como $|\sigma_A| > \sigma_B$, esto es, $|\sigma_{\text{máx}}^{\text{comp}}| > \sigma_{\text{máx}}^{\text{tr}}$, la comprobación de resistencia lo realizamos para ambos puntos.

Esfuerzo máximo de compresión:

$$|\sigma_{\text{máx}}^{\text{comp}}| = |\sigma_A| = \left| \frac{N_x}{A} + \frac{M_y}{I_y} z_A + \frac{M_z}{I_z} y_A \right|$$

$$|\sigma_{\text{máx}}^{\text{comp}}| = \left| -\frac{20000}{80} - \frac{20000 \cdot 8}{4586,7} \cdot 10 - \frac{20000 \cdot 2}{1066,7} \cdot 4 \right| = |-250 - 348,8 - 150| = 748,8 \text{kgf} / \text{cm}^2 < [\sigma]_{\text{comp}}$$

Esfuerzo máximo de tracción:

$$\sigma_{\text{máx}}^{\text{tr}} = \sigma_B = \frac{N_x}{A} + \frac{M_y}{I_y} z_B + \frac{M_z}{I_z} y_B$$

$$\sigma_{\text{máx}}^{\text{tr}} = -\frac{20000}{80} - \frac{20000 \cdot 8}{4586,7} \cdot (-10) + \frac{20000 \cdot 2}{1066,7} \cdot 8 = -250 + 348,8 + 300 = 398,8 \text{kgf} / \text{cm}^2 < [\sigma]_{\text{tr}}$$

De esta manera, la resistencia de la columna está asegurada.

8.4 FLEXION, TORSION Y CARGA AXIAL

Cuando existe torsión y carga axial, en las secciones transversales de la barra surgen el momento torsor $M_x = T$ y la fuerza axial N_x . En cambio, para el caso de torsión y flexión surgirán el momento torsor y los momentos flectores M_y, M_z .

Para determinar la sección más peligrosa, debemos de graficar los diagramas de fuerzas internas y analizar varias secciones, porque en ciertos casos, es difícil determinar dicha sección.

El cálculo de resistencia se realiza por los esfuerzos equivalentes para el punto más peligroso y será el punto donde el esfuerzo equivalente sea máximo.

Dependiendo de la teoría de resistencia, el esfuerzo equivalente lo determinamos por una de las siguientes fórmulas:

$$\sigma_{e,III} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \quad (8.19)$$

$$\sigma_{e,IV} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \quad (8.20)$$

$$\sigma_{e,V} = \frac{1-\mu}{2}\sigma + \frac{1+\mu}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \quad (8.21)$$

Donde:

σ - esfuerzo normal en el punto más peligroso de la sección transversal

τ - esfuerzo tangencial en el mismo punto

Para el cálculo de barras de sección transversal circular, sometidas a flexión y torsión, se calcula el denominado momento equivalente para la sección más peligrosa.

Por la teoría de resistencia de esfuerzos tangenciales máximos:

$$M_{e,III} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} \quad (8.22)$$

Por la teoría de la energía potencial de variación de la forma:

$$M_{e,IV} = \sqrt{0,75M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} \quad (8.23)$$

La sección más peligrosa será aquella, cuyo valor del momento equivalente será máximo. En esta sección, los puntos peligrosos, son las intersecciones de la línea de carga con el contorno de la sección circular.

PROBLEMA 8.8 Determinar las dimensiones de la sección transversal AB (figura 8.13,a), si $[\sigma] = 1400 \text{ kgf/cm}^2$. Efectuar el cálculo por la teoría de resistencia de esfuerzos tangenciales máximos.

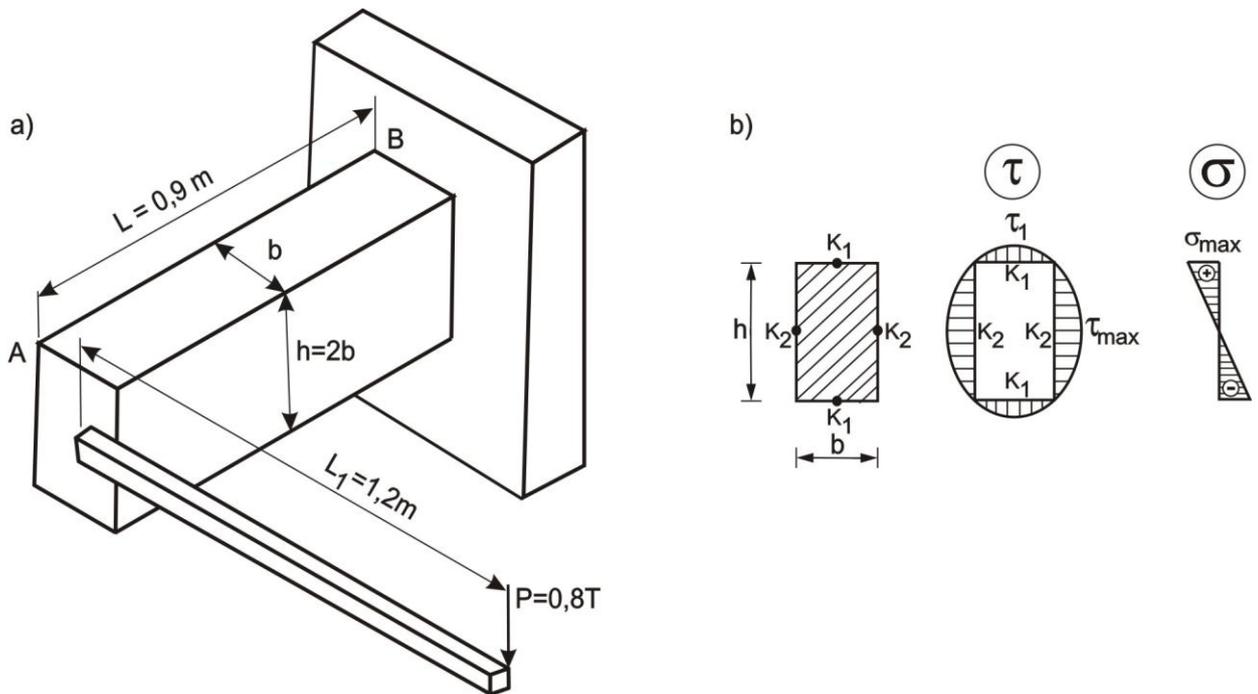


Fig. 8.13

Solución:

La barra está sometida a torsión y flexión. La sección más peligrosa es el empotramiento, donde surgen el momento flector máximo $M_{\text{máx}} = PL = 800.90 = 72000\text{kgf}\cdot\text{cm}$ y el momento torsor

$$T_{\text{máx}} = PL_1 = 800.120 = 96000\text{kgf}\cdot\text{cm}$$

Los esfuerzos normales máximos surgen en los puntos de la parte superior e inferior de la sección transversal (figura 8.13,b)

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{M_{\text{máx}}}{W_z} = \frac{72000}{\frac{bh^2}{6}} = \frac{432000}{b(2b)^2} = \frac{108000}{b^3}$$

Los esfuerzos tangenciales máximos surgen en los puntos K_2 (figura 8.13,b)

Sin considerar el efecto de la fuerza cortante, tenemos:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{T_{\text{máx}}}{W_t} = \frac{96000}{0,246(2b)(b)^2} = \frac{195122}{b^3}$$

El esfuerzo tangencial en el punto K_1 será:

$$\tau_1 = \gamma\tau_{\text{máx}} = 0,795 \cdot \frac{195122}{b^3} = \frac{155122}{b^3}$$

En el punto K_1 surge el estado de esfuerzo plano equivalente:

$$(\sigma_{e,III})_{K_1} = \sqrt{\sigma_{\text{máx}}^2 + 4\tau_1^2} = \sqrt{\left(\frac{108000}{b^3}\right)^2 + 4\left(\frac{155122}{b^3}\right)^2} = \frac{328505}{b^3} \leq 1400$$

De donde:

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{328505}{1400}} = 6,17\text{cm}$$

$$h = 2b = 12,34\text{cm}$$

En el punto K_2 surge el estado de esfuerzos de cortante puro, siendo el esfuerzo equivalente el siguiente:

$$(\sigma_{e,III})_{K_2} = \sqrt{0 + 4\tau_{\text{máx}}^2} = 2\tau_{\text{máx}} = 2 \cdot \frac{195122}{b^3} = \frac{390244}{b^3} \leq 1400$$

De donde:

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{390244}{1400}} = 6,53\text{cm}$$

$$h = 2b = 13,06\text{cm}$$

Tomamos el valor máximo y lo redondeamos a los valores comerciales, es decir:

$$b = 6,6\text{cm}$$

$$h = 2b = 13,2\text{cm}$$

De esta manera, se concluye que el punto más peligroso es el punto K_2

PROBLEMA 8.9 Determinar el valor admisible de la carga para la barra de hierro fundido mostrado en la figura 8.14, si los esfuerzos admisibles en tracción es $[\sigma]_{tr} = 210\text{MPa}$ y en compresión $[\sigma]_{comp} = 840\text{MPa}$. Considerar que el factor de seguridad es $n = 4,5$

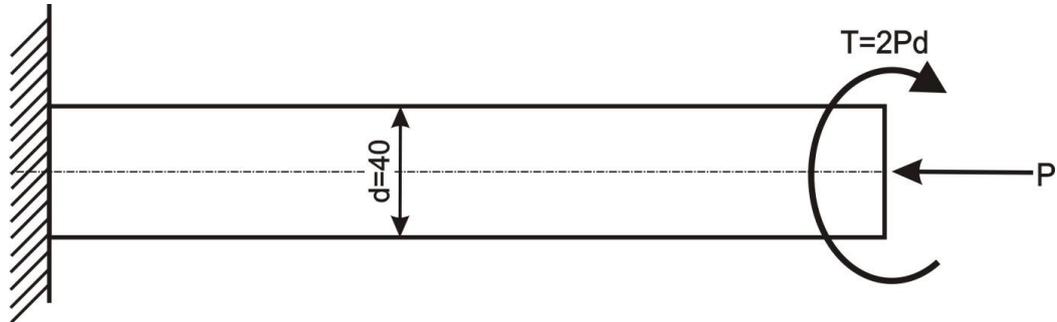


Fig. 8.14

Solución:

La barra trabaja en torsión y compresión, siendo según el esquema, todas las secciones transversales igualmente peligrosas.

En cada sección transversal, los puntos peligrosos son los del contorno, debido a que ahí surgen los mayores esfuerzos debido a torsión. Los esfuerzos normales se distribuyen en forma uniforme por la sección transversal.

Expresamos los esfuerzos en el punto más peligroso en función de la carga P :

$$\sigma = -\frac{4P}{\pi d^2}$$

$$\tau = \frac{T}{W_p} = \frac{2Pd}{\frac{\pi d^3}{16}} = \frac{32P}{\pi d^2}$$

Aplicamos el criterio de resistencia de Mohr, a través de la siguiente relación:

$$\sigma_{e,v} = \frac{1-\mu}{2}\sigma + \frac{1+\mu}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \frac{1-0,25}{2}\left(-\frac{4P}{\pi d^2}\right) + \frac{1+0,25}{2}\frac{P}{\pi d^2}\sqrt{4^2 + 4.32^2} \leq \frac{[\sigma]_{tr}}{n}$$

Donde:

$$\mu = \frac{[\sigma]_{tr}}{[\sigma]_{comp}} = \frac{210}{840} = 0,25$$

Efectuamos el cálculo y obtenemos:

$$38,58 \frac{P}{\pi d^2} \leq \frac{[\sigma]_{tr}}{n}$$

De donde:

$$P_{\max} = \frac{\pi d^2 [\sigma]_{tr}}{38,58n} = \frac{\pi \cdot 40^2 \cdot 10^{-6} \cdot 210 \cdot 10^6}{38,58 \cdot 4,5} = 6080\text{N} = 6,08\text{kN}$$

PROBLEMA 8.10 Comprobar la resistencia de la barra de hierro fundido mostrado en la figura 8.15,a si $[\sigma]_{tr} = 300\text{kgf/cm}^2$ y $[\sigma]_{comp} = 1000\text{kgf/cm}^2$

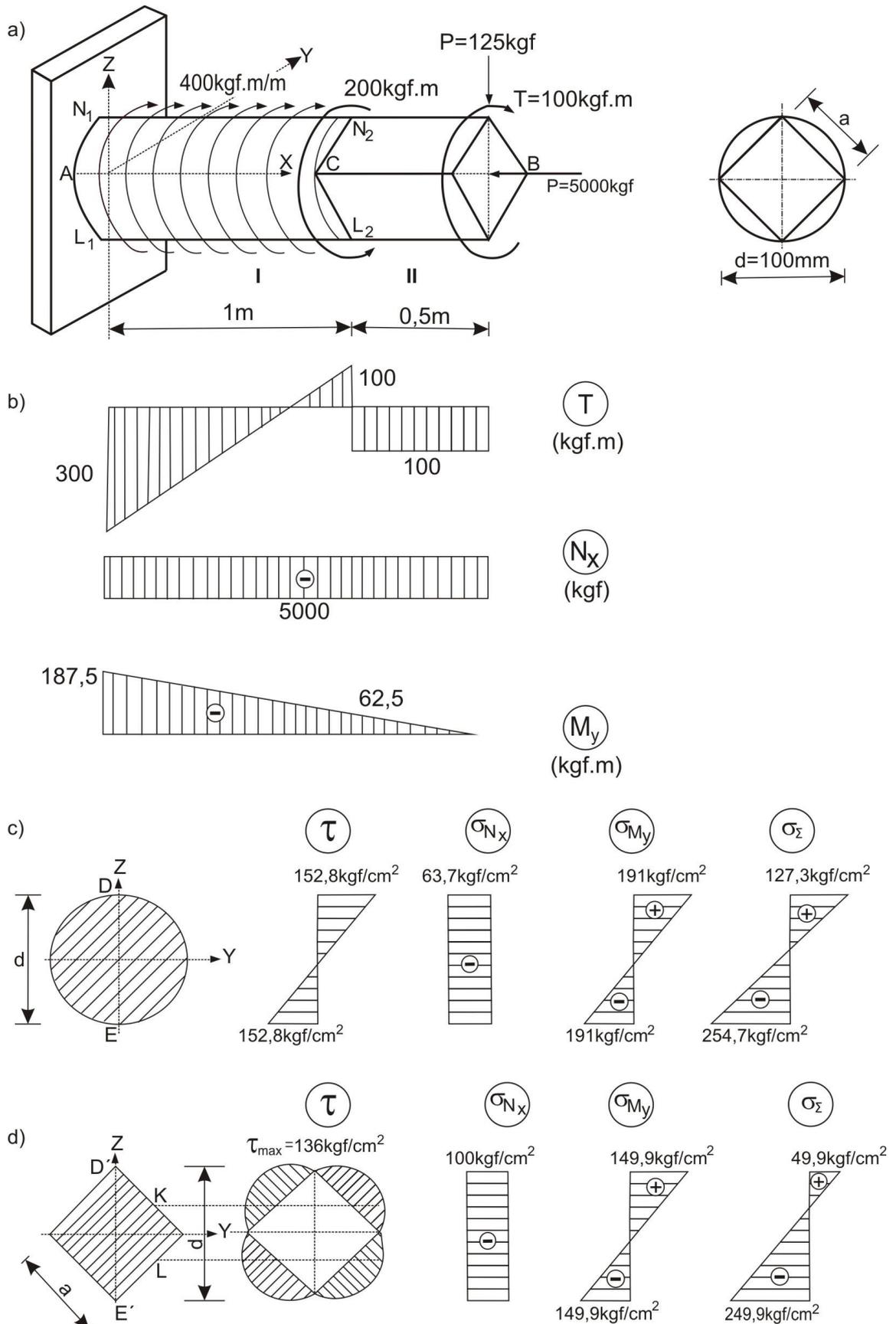


Fig. 8.15

Solución:

La barra está sometida a flexión, torsión y compresión.

En las secciones transversales surgen las fuerzas internas N_x, M_x, M_y , cuyos diagramas se muestran en la figura 8.15,b

Comprobamos la resistencia de la barra en la sección N_1L_1 :

Esfuerzo máximo debido a torsión:

$$\tau_I = \frac{T_{\text{máx}}}{W_p} = \frac{30000}{\frac{\pi d^3}{16}} = \frac{30000 \cdot 16}{\pi \cdot 10^3} = 152,8 \text{ kgf / cm}^2$$

Esfuerzo debido a la compresión:

$$(\sigma_{N_x})_I = \frac{N_x}{A_I} = -\frac{5000}{\frac{\pi \cdot 10^2}{4}} = -63,7 \text{ kgf / cm}^2$$

Los esfuerzos máximos debido a flexión:

$$(\sigma_{M_y}^{\text{máx}})_I = \pm \frac{M_y^{\text{máx}}}{W_y} = \pm \frac{M_y^{\text{máx}}}{\frac{\pi d^3}{32}} = \pm \frac{18750 \cdot 32}{\pi \cdot 10^3} = \pm 191 \text{ kgf / cm}^2$$

Los diagramas de esfuerzos en la sección transversal N_1L_1 se muestran en la figura 8.15,c

Cuál de los puntos (D o E) de la sección transversal analizada es la más peligrosa, no es factible identificarlo, ya que por valor absoluto el esfuerzo en el punto E es mayor que el esfuerzo en el punto D, pero el material es hierro fundido, el cual posee mayor resistencia en compresión que en tracción. Es por ello, que efectuamos el cálculo para ambos puntos.

Los esfuerzos normales en los puntos D y E son:

$$\sigma_D = \sigma_{N_x} + (\sigma_{M_y}^{\text{máx}})_D = -63,7 + 191 = 127,3 \text{ kgf / cm}^2 \text{ (TRACCION)}$$

$$\sigma_E = \sigma_{N_x} + (\sigma_{M_y}^{\text{máx}})_E = -63,7 - 191 = -254,7 \text{ kgf / cm}^2 \text{ (COMPRESION)}$$

Determinamos los esfuerzos equivalentes para los puntos D y E, aplicando el criterio de resistencia de Mohr y considerando que:

$$\mu = \frac{[\sigma]_{\text{tr}}}{[\sigma]_{\text{comp}}} = \frac{300}{1000} = 0,3$$

Para el punto D:

$$(\sigma_{e,v})_D = \frac{1-0,3}{2} \cdot 127,3 + \frac{1+0,3}{2} \sqrt{127,3^2 + 4 \cdot 152,8^2} = 259,7 \text{ kgf / cm}^2 < [\sigma]_{\text{tr}}$$

Para el punto E:

$$(\sigma_{e,v})_E = \frac{1-0,3}{2} \cdot (-254,7) + \frac{1+0,3}{2} \sqrt{(-254,7)^2 + 4 \cdot (-152,8)^2} = 169,4 \text{ kgf / cm}^2 < [\sigma]_{\text{comp}}$$

De ello, se desprende, que el punto más peligroso es el D, cuya resistencia está asegurada en dicho tramo.

Ahora, efectuamos la comprobación de resistencia de la barra en la sección N_2L_2 , siendo las características geométricas en dicha sección las siguientes:

$$A = a^2 = \left(\frac{d\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \left(\frac{10\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 50\text{cm}^2$$

$$I_y = \frac{a^4}{12} = \frac{\left(\frac{d\sqrt{2}}{2}\right)^4}{12} = \frac{\left(\frac{10\sqrt{2}}{2}\right)^4}{12} = 208,3\text{cm}^4$$

$$W_y = \frac{I_y}{\frac{d}{2}} = \frac{208,3}{\frac{10}{2}} = 41,7\text{cm}^3$$

Esfuerzo máximo debido a torsión:

$$\tau_{II} = \frac{T_{\text{máx}}}{W_t} = \frac{10000}{0,208a^3} = \frac{10000}{0,208\left(\frac{10\sqrt{2}}{2}\right)^3} = 136\text{kgf/cm}^2$$

Esfuerzo debido a la compresión:

$$(\sigma_{N_x})_{II} = \frac{N_x}{A_{II}} = -\frac{5000}{\left(\frac{10\sqrt{2}}{2}\right)^2} = -100\text{kgf/cm}^2$$

Los esfuerzos máximos debido a flexión:

$$(\sigma_{M_y}^{\text{máx}})_{II} = \pm \frac{M_y^{\text{máx}}}{W_y} = \pm \frac{6250}{41,7} = \pm 149,9\text{kgf/cm}^2$$

Los esfuerzos normales en los puntos D' y E' son:

$$\sigma_{D'} = \sigma_{N_x} + (\sigma_{M_y}^{\text{máx}})_{D'} = -100 + 149,9 = 49,9\text{kgf/cm}^2 \text{ (TRACCION)}$$

$$\sigma_{E'} = \sigma_{N_x} + (\sigma_{M_y}^{\text{máx}})_{E'} = -100 - 149,9 = -249,9\text{kgf/cm}^2 \text{ (COMPRESION)}$$

Los diagramas de esfuerzos normales y tangenciales se muestran en la figura 8.15,d

Al comparar los diagramas obtenidos con los de la sección A (N_1L_1) se concluye, que cualquier punto de la sección N_2L_2 es menos peligroso que el punto D y, en consecuencia, la resistencia del tramo II está asegurada.

CAPITULO 9 ESTABILIDAD DE BARRAS

9.1 FLEXION LONGITUDINAL

La carga crítica de pérdida de estabilidad en el estado elástico, se calcula por la fórmula de Euler:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu L)^2} \quad (9.1)$$

Donde:

μ - coeficiente asumido de la longitud de la barra, cuyo valor depende de las condiciones de fijación de los extremos de la barra (figura 9.1)

I_{\min} - momento de inercia mínimo de la sección transversal de la barra

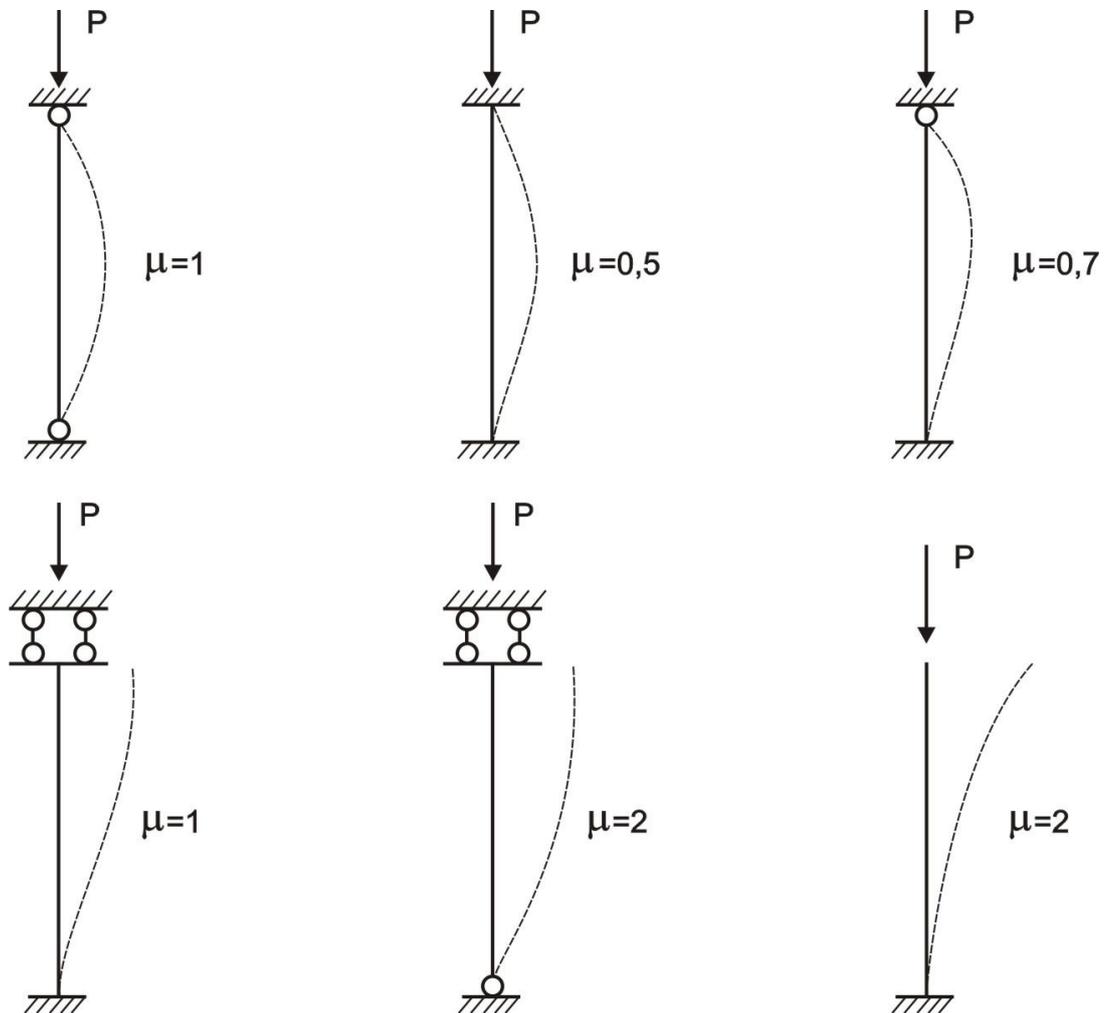


Fig. 9.1

El valor de la carga admisible de compresión se determina por la fórmula 9.2

$$[P] = \frac{P_{cr}}{[n_{est}]} \quad (9.2)$$

Donde:

$[n_{est}]$ - factor de seguridad de estabilidad

Los esfuerzos que surgen en la sección transversal de la barra, cuando $P = P_{cr}$, también se denomina crítico y se calcula por la fórmula 9.3

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (9.3)$$

$$\lambda = \frac{\mu L}{i_{\min}} \quad (9.4)$$

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} \quad (9.5)$$

Donde:

λ - flexibilidad de la barra

i_{\min} - radio de inercia mínimo de la sección transversal de la barra

La fórmula de Euler es válida para el caso cuando la carga crítica no supera el límite de proporcionalidad del material de la barra, es decir, cuando se cumpla la condición:

$$\sigma_{cr} \leq \sigma_{prop} \quad (9.6)$$

En algunos casos, la fórmula de Euler se expresa por medio de la flexibilidad de la barra:

$$\lambda \geq \lambda_{\lim} \quad (9.7)$$

Donde:

$$\lambda_{\lim} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{prop}}} \quad (9.8)$$

Para el acero $\lambda_{\lim} \approx 100$, para el hierro fundido $\lambda_{\lim} \approx 80$, para el pino $\lambda_{\lim} \approx 110$ y para el aluminio $\lambda_{\lim} \approx 60$

ESTABILIDAD DE BARRAS POR LA FORMULA DE YASINSKI

Si la pérdida de estabilidad surge en el estado plástico, la fórmula de Euler no es aplicable y el esfuerzo crítico se calcula por la fórmula empírica de Yasinski:

$$\sigma_{cr} = a - b\lambda + c\lambda^2 \quad (9.9)$$

Donde:

a, b, c - coeficientes experimentales, dependientes del material y que poseen las mismas unidades de medida que los esfuerzos (tabla 9.1)

Tabla 9.1

MATERIAL	a (kgf/cm ²)	b (kgf/cm ²)	c (kgf/cm ²)
Acero	3100	11,4	0
Aluminio	4060	28,3	0
Hierro fundido	7760	120	0,53
Pino	293	1,94	0

ESTABILIDAD DE BARRA POR MEDIO DEL COEFICIENTE φ DE FLEXION LONGITUDINAL

Este tipo de cálculo se realiza para elementos estructurales de concreto armado y estructuras metálicas.

El cálculo se efectúa como para el caso de compresión simple, pero con disminución de los esfuerzos admisibles.

La fórmula de cálculo es:

$$\sigma = \frac{P}{A} \leq \varphi[\sigma] \quad (9.10)$$

Donde:

φ - coeficiente de flexión longitudinal, que considera la disminución del esfuerzo de compresión admisible y depende de la flexibilidad λ y del material de la barra.

El coeficiente φ se elige mediante la tabla 9.2

Tabla 9.2

Estabilidad λ	Madera	Hierro fundido	Acero
0	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,97	0,99
20	0,97	0,91	0,97
30	0,93	0,81	0,95
40	0,87	0,69	0,92
50	0,80	0,57	0,89
60	0,71	0,44	0,86
70	0,61	0,34	0,81
80	0,49	0,26	0,75
90	0,38	0,20	0,69
100	0,31	0,16	0,60
110	0,25	-	0,52
120	0,22	-	0,45
130	0,18	-	0,40
140	0,16	-	0,36
150	0,14	-	0,32
160	0,12	-	0,29
170	0,11	-	0,26
180	0,10	-	0,23
190	0,09	-	0,21
200	0,08	-	0,19

PROBLEMA 9.1 Determinar el valor de la carga admisible que puede ser aplicada a la estructura de la figura 9.2, si el factor de seguridad de estabilidad es $[n_{est}] = 3$, el material es acero y su módulo de elasticidad $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kgf/cm}^2$. Considerar que el perfil metálico tiene las siguientes características geométricas: $A = 17,4 \text{ cm}^2$; $I_y = 41,9 \text{ cm}^4$; $i_y = 1,55 \text{ cm}$; $I_z = 572 \text{ cm}^4$; $i_z = 5,73 \text{ cm}$

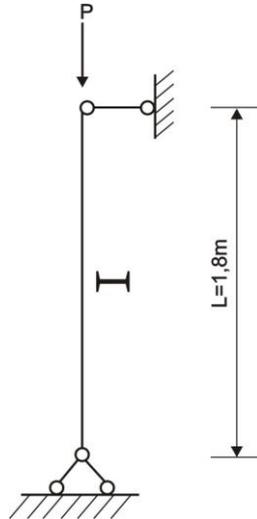


Fig. 9.2

Solución:

La flexibilidad de la barra es:

$$\lambda = \frac{\mu L}{i_{\min}} = \frac{1,180}{1,55} = 116,1$$

Donde el valor de $i_{\min} = i_y = 1,55 \text{ cm}$ se obtuvo de las características geométricas del perfil.

Como el material es acero, se tendrá que $\lambda > \lambda_{\lim} = 100$ y la carga crítica lo calculamos por la fórmula de Euler:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu L)^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot 41,9}{(1,180)^2} = 26803,3 \text{ kgf}$$

De esta manera, la carga admisible será:

$$[P] = \frac{P_{cr}}{[n_{est}]} = \frac{26803,3}{3} = 8934,4 \text{ kgf}$$

PROBLEMA 9.2 Resolver el problema anterior, considerando que el apoyo inferior es empotrado y el superior fijo.

Solución:

En este caso, el coeficiente $\mu = 0,7$ (figura 9.1) y la flexibilidad de la barra lo calculamos por la expresión:

$$\lambda = \frac{\mu L}{i_{\min}} = \frac{0,7 \cdot 1,80}{1,55} = 81,3$$

De esta manera $\lambda < \lambda_{lim}$ y la fórmula de Euler no es aplicable, determinando, para ello, la carga crítica por la fórmula empírica de Yasinski.

$$P_{cr} = \sigma_{cr} A = (a - b\lambda)A = (3100 - 11,4.81,3).17,4 = 37813,3\text{kgf}$$

La carga admisible será:

$$[P] = \frac{P_{cr}}{[n_{est}]} = \frac{37813,3}{3} = 12604,4\text{kgf}$$

PROBLEMA 9.3 Determinar el valor admisible de la carga de compresión para la columna de acero (figura 9.3,a), si $[n_{est}] = 2$ y los perfiles tipo ángulos de lados iguales, rígidamente están unidos entre si. Considerar las siguientes características geométricas para cada ángulo: $A_1 = 5,41\text{cm}^2$; $I_{y_1} = I_{z_1} = 16\text{cm}^4$

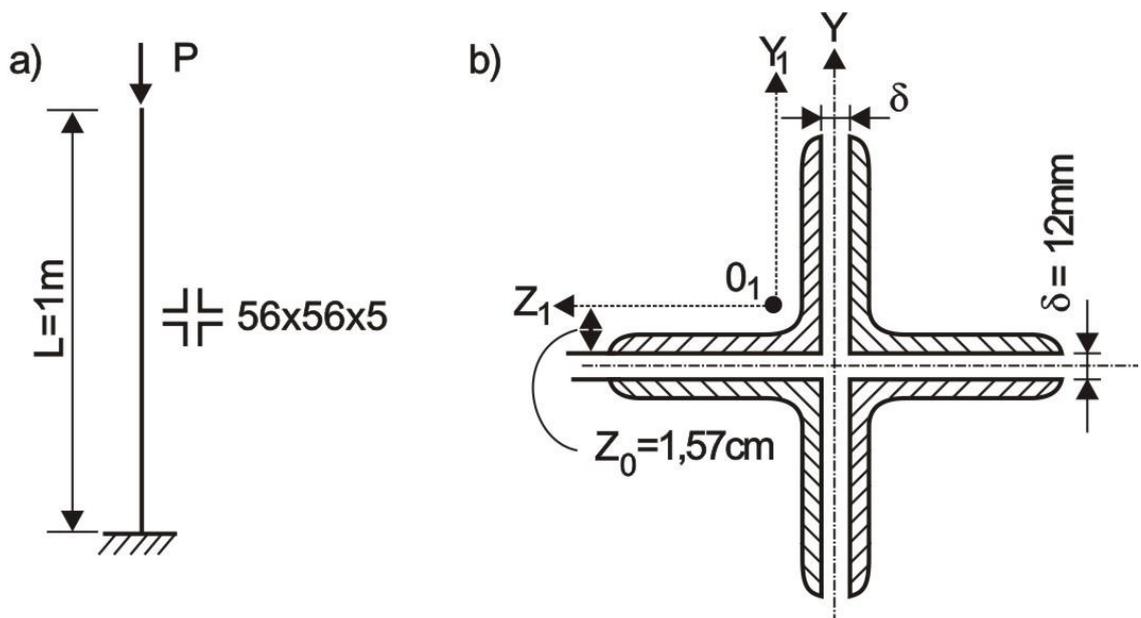


Fig. 9.3

Solución:

En la figura 9.3,a los valores 56x56x5 indican las dimensiones de los lados del ángulo (56mm) y el espesor del mismo (5mm).

Calculamos el momento de inercia de la sección transversal (figura 9.3,b):

$$I_z = I_y = 4(I_{z_1} + a^2 A_1) = 4[16 + (1,57 + 0,6)^2 .5,41] = 165,9\text{cm}^4$$

Donde:

$$a = z_0 + 0,5\delta$$

Determinamos el radio de inercia de toda la sección:

$$i_{min} = i_{max} = i_z = i_y = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = \sqrt{\frac{165,9}{4,5,41}} = 2,77\text{cm}$$

La flexibilidad de la columna es:

$$\lambda = \frac{\mu L}{i_{min}} = \frac{2.100}{2,77} = 72,2$$

Como $\lambda < \lambda_{\text{lím}}$, la fórmula de Euler no es válida y determinamos la carga crítica por la fórmula empírica de Yasinski:

$$P_{\text{cr}} = \sigma_{\text{cr}} A = (a - b\lambda)A = (3100 - 11,4 \cdot 72,2) \cdot 4,5 \cdot 41 = 49272,5 \text{kgf}$$

De esta manera, la carga admisible será:

$$[P] = \frac{P_{\text{cr}}}{[n_{\text{est}}]} = \frac{49272,5}{2} = 24636,25 \text{kgf}$$

PROBLEMA 9.4 Elegir el perfil tipo I de una columna de acero, cuyo apoyo inferior es empotrado y el superior fijo. Considerar que la carga de compresión es $P = 120 \text{kN}$, la altura de la columna $L = 3 \text{m}$, el factor de seguridad de estabilidad $[n_{\text{est}}] = 2,7$ y el módulo de elasticidad $E = 2 \cdot 10^5 \text{MPa}$. Los tipos de perfiles comerciales en el medio son:

Nº de perfil	Área (A) cm ²	I _y cm ⁴	i _y cm	I _z cm ⁴	i _z cm
1	20,2	58,6	1,70	873	6,57
2	23,4	82,6	1,88	1290	7,42
3	26,8	115	2,07	1840	8,28
4	30,6	157	2,27	2550	9,13
5	34,8	198	2,37	3460	9,97

Solución:

Efectuamos el cálculo por la fórmula de Euler:

$$P \leq \frac{P_{\text{cr}}}{[n_{\text{est}}]} = \frac{\pi^2 EI_{\text{mín}}}{(\mu L)^2 [n_{\text{est}}]}$$

De donde, despejamos el momento de inercia mínimo y calculamos su valor:

$$I_{\text{mín}} \geq \frac{P(\mu L)^2 [n_{\text{est}}]}{\pi^2 E} = \frac{120 \cdot 10^3 \cdot (0,7 \cdot 3)^2 \cdot 2,7}{\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6} = 72,4 \cdot 10^{-8} \text{m}^4 = 72,4 \text{cm}^4$$

Por economía elegimos el perfil Nº 2, cuyos valores son un poco mayores que los mínimos requeridos, siendo sus características geométricas las siguientes:

$$I_y = I_{\text{mín}} = 82,6 \text{cm}^4$$

$$i_y = i_{\text{mín}} = 1,88 \text{cm}$$

Con estos valores, comprobamos la aplicación de la fórmula de Euler:

$$\lambda = \frac{\mu L}{i_{\text{mín}}} = \frac{0,7 \cdot 300}{1,88} = 111,7$$

Como se cumple la condición $\lambda > \lambda_{\text{lím}}$, la fórmula de Euler fue correctamente utilizada en la solución del problema.

PROBLEMA 9.5 Determinar a partir de la condición de estabilidad, la disminución admisible de la temperatura de los cables, de tal manera que sostengan a la viga absolutamente rígida ABC, apoyada fijamente en A, tal como se muestra en la figura 9.4,a. Considerar que el material de los

cables es acero, con coeficiente de dilatación térmica $\alpha = 12 \cdot 10^{-6} \left(\frac{1}{^\circ\text{C}} \right)$, módulo de elasticidad

$E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kgf} / \text{cm}^2$ y factor de seguridad de estabilidad $[n_{\text{est}}] = 2,5$

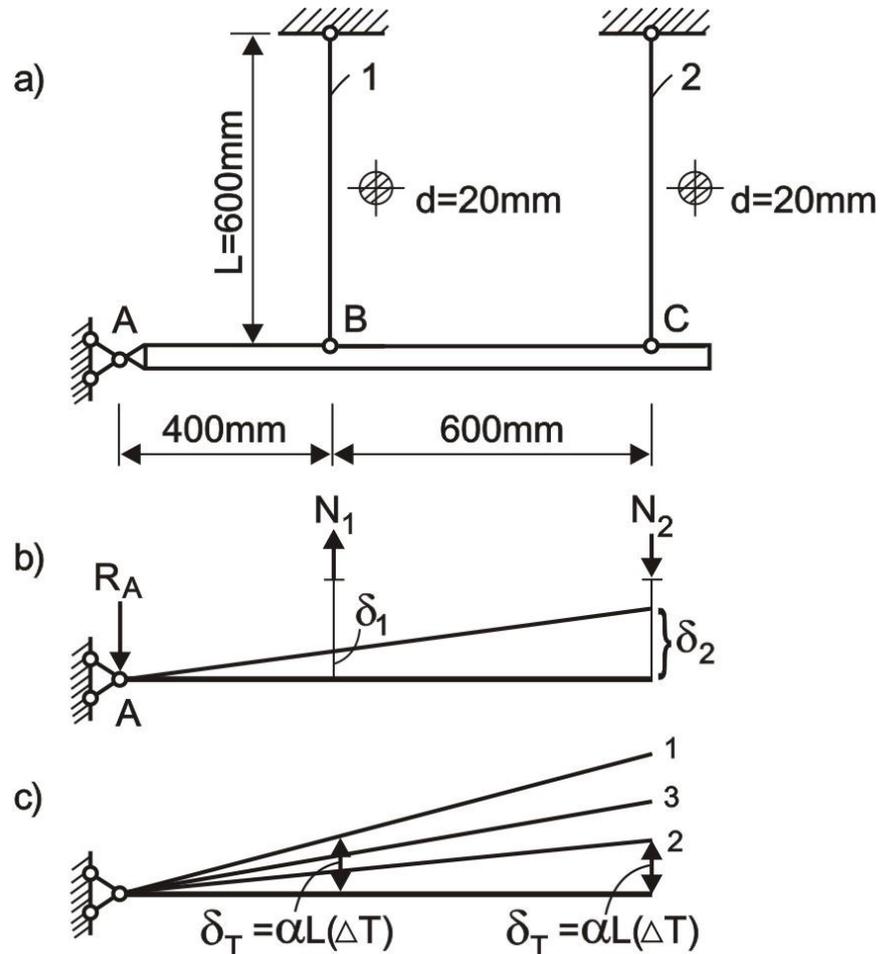


Fig. 9.4

Solución:

Tal tipo de estructura es una vez hiperestática, cuya reacción vertical en A y las fuerzas internas en los cables, forman un sistema de fuerzas paralelas (figura 9.4,b). De esta manera, el número de incógnitas es tres y el número de ecuaciones de la estática son dos.

Analizamos el diagrama de desplazamientos que se producirá en la estructura, haciendo el siguiente análisis:

- a) Por efecto de la disminución de la temperatura, ambos cables se acortarán una misma magnitud
- b) Como la viga es absolutamente rígida, entonces, se desviará tal como se muestra en la figura 9.4,b siendo el acortamiento del cable 2 mayor que el del cable 1
- c) Esto quiere decir, que para que la viga siga comportándose como absolutamente rígida, el cable 1 sufrirá un alargamiento elástico debido a la fuerza interna de tracción N_1 y el cable 2 sufrirá un acortamiento debido a la fuerza interna de compresión N_2 (figura 9.4,b)

- d) En calidad de explicación adicional del comportamiento interno de ambos cables, podemos decir, que en la figura 9.4,c se muestran tres posiciones de la viga: línea 1 corresponde a la deformación por temperatura del cable 1 (sin considerar la acción del cable 2); análogamente sucede con la línea 2 correspondiente a la deformación por temperatura del cable 2 y la línea 3 la posición final de la viga después de la disminución de la temperatura y acción de las fuerzas internas en los cables

Efectuamos el equilibrio de la viga de la figura 9.4,b

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad -400N_1 + 1000N_2 = 0 \quad \therefore \quad N_1 = \frac{5}{2}N_2$$

A través del diagrama de desplazamientos, tenemos:

$$\frac{\delta_2}{1000} = \frac{\delta_1}{400} \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta_2}{\delta_1} = \frac{5}{2}$$

Del análisis de la geometría tenemos:

$$\delta_1 = \delta_T - \delta_{N_1} = \alpha L(\Delta T) - \frac{N_1 L}{EA}$$

$$\delta_2 = \delta_T + \delta_{N_2} = \alpha L(\Delta T) + \frac{N_2 L}{EA}$$

Dividimos la segunda ecuación entre la primera, cuyo valor es conocido y simplificamos L, obteniendo:

$$\frac{\left(\alpha(\Delta T) + \frac{N_2}{EA} \right)}{\left(\alpha(\Delta T) - \frac{N_1}{EA} \right)} = \frac{5}{2}$$

Efectuamos operaciones y obtenemos:

$$3\alpha(\Delta T)EA = 5N_1 + 2N_2$$

Si consideramos que $N_1 = \frac{5}{2}N_2$, obtendremos:

$$N_2 = \frac{6\alpha(\Delta T)EA}{29}$$

El valor admisible de la variación de temperatura, lo obtenemos a partir de la condición de estabilidad del cable 2:

$$[N_2] = \frac{N_{2,cr}}{[n_{est}]}$$

La flexibilidad del cable es:

$$\lambda = \frac{L}{i} = \frac{L}{d/4} = \frac{600}{20/4} = 120$$

Para el acero $\lambda_{lim} \approx 100$, en consecuencia, $\lambda > \lambda_{lim}$ y la fórmula de Euler es aplicable para este caso, obteniéndose la siguiente relación:

$$[N_2] = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{L^2 [n_{\text{est}}]}$$

El valor de la variación de la temperatura, lo obtenemos igualando la expresión de N_2 obtenida del equilibrio estático y diagrama de desplazamientos, con el obtenido de la condición de estabilidad.

$$\frac{6\alpha[\Delta T]EA}{29} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{L^2 [n_{\text{est}}]}$$

De donde:

$$[\Delta T] = \frac{29}{6} \frac{\pi^2 I_{\min}}{\alpha AL^2 [n_{\text{est}}]} = \frac{29 \cdot \pi^2 \cdot \frac{\pi}{64} \cdot 20^4}{6 \cdot 12 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 20^2 \cdot 600^2 \cdot 2,5} = 110,4^\circ$$

PROBLEMA 9.6 Comprobar la estabilidad de una columna de madera (figura 9.5), si el esfuerzo admisible es $[\sigma] = 10\text{MPa}$

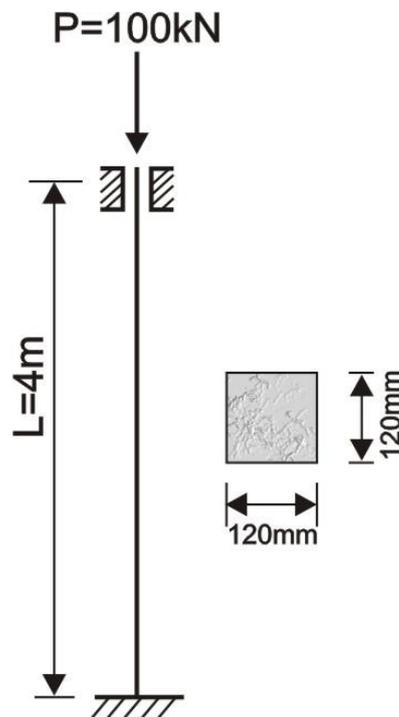


Fig. 9.5

Solución:

Determinamos su radio de inercia de la sección y la flexibilidad de la columna.

$$i_{\min} = i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{b^4}{12b^2}} = \frac{b}{\sqrt{12}} = \frac{12}{\sqrt{12}} = 3,46\text{cm}$$

$$\lambda = \frac{\mu L}{i} = \frac{0,5 \cdot 4}{3,46 \cdot 10^{-2}} = 57,8$$

El esfuerzo normal que surge en la sección transversal de la columna es:

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{100 \cdot 10^3}{12^2 \cdot 10^{-4}} = 6,94\text{MPa}$$

A través de la tabla 9.2 obtenemos el valor del coeficiente de flexión longitudinal, por medio de la interpolación, en función de la flexibilidad de la columna:

$$\varphi = 0,728$$

De esta manera, se tendrá:

$$\varphi[\sigma] = 0,728 \cdot 10 = 7,28 \text{MPa}$$

De esta manera, se cumple con la condición $\sigma < \varphi[\sigma]$ y se tiene un 4,67% de reserva para posible sobrecarga.

PROBLEMA 9.7 Determinar el valor admisible de la carga de compresión de una barra de una armadura, cuya sección transversal está formada por dos ángulos de lados desiguales unidos rígidamente entre si (figura 9.6). La longitud de la barra es $L = 3,4\text{m}$ y el material es acero. Considerar que los extremos de la barra están unidos por rótulas ideales, que el esfuerzo admisible de la estructura es $[\sigma] = 1900 \text{kgf/cm}^2$, los momentos de inercia de cada ángulo son $I_{y_1} = 54,6 \text{cm}^4$ e $I_{z_1} = 172 \text{cm}^4$, el área $A_1 = 13,9 \text{cm}^2$ y $x_0 = 1,64 \text{cm}$

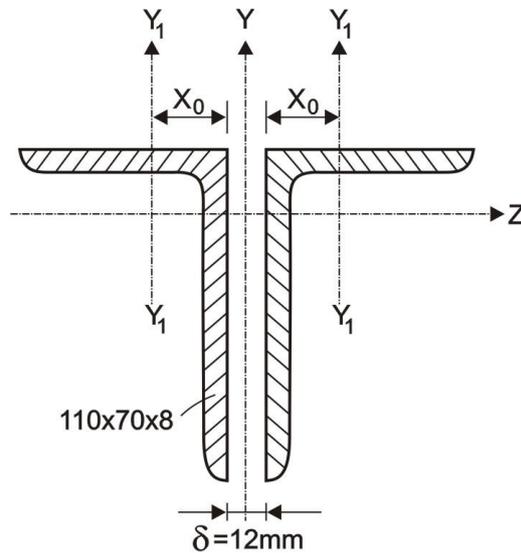


Fig. 9.6

Solución:

En la figura 9.6, los valores 110x70x8 indican las dimensiones de los lados desiguales del ángulo (110mm y 70mm) y el espesor del ángulo (8mm).

El valor admisible de la carga lo determinamos por la fórmula:

$$[N] = A\varphi[\sigma]$$

Calculamos los momentos de inercia respecto a los ejes OY y OZ.

$$I_y = 2[I_{y_1} + (x_0 + 0,5\delta)^2 A_1] = 2[54,6 + (1,64 + 0,5 \cdot 1,2)^2 \cdot 13,9] = 248,7 \text{cm}^4$$

$$I_z = 2I_{z_1} = 2 \cdot 172 = 344 \text{cm}^4$$

De esta manera, se tiene que $I_y < I_z$ y el radio mínimo de inercia es:

$$i_{\min} = i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{248,7}{2 \cdot 13,9}} = 2,99 \text{cm}$$

Determinamos la flexibilidad de la barra:

$$\lambda = \frac{\mu L}{i_{\min}} = \frac{1.340}{2,99} = 113,7$$

Por medio de la tabla 9.2 interpolamos y obtenemos:

$$\varphi = 0,494$$

La carga de compresión admisible es:

$$[N] = 2.13,9.0,494.1900 = 26093\text{kgf}$$

PROBLEMA 9.8 Elegir el tipo de perfil I de acero estructural para la columna mostrada en la figura 9.7, si $[\sigma] = 1800\text{kgf/cm}^2$. Considerar que en el mercado se dispone de los siguientes tipos de perfiles:

Nº de perfil	Área (A) cm ²	I _y cm ⁴	i _y cm	I _z cm ⁴	i _z cm
1	72,6	667	3,03	19062	16,2
2	84,7	808	3,09	27696	18,1
3	100	1043	3,23	39727	19,9
4	118	1356	3,39	55962	21,8
5	138	1725	3,54	76806	23,6

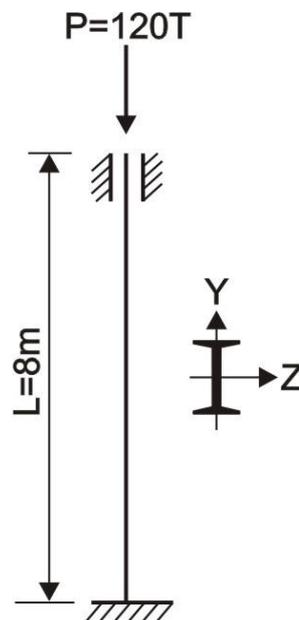


Fig. 9.7

Solución:

La falla de la columna se puede producir respecto al eje OY, debido a que el momento de inercia respecto a este eje es menor que al eje OZ.

El área de la sección transversal necesaria se determinará por la fórmula:

$$A_{\text{requerida}} \geq \frac{P}{\varphi[\sigma]}$$

En esta fórmula existen dos incógnitas (A, φ), por ello, damos un valor a uno de ellos, eligiendo en este caso $\varphi = 0,6$

Luego:

$$A_{\text{requerida}} = \frac{120 \cdot 10^3}{0,6 \cdot 1800} = 111,1 \text{cm}^2$$

De acuerdo a la tabla de perfiles comerciales, podemos elegir los perfiles N° 4 y N° 5

Por economía, elegimos el perfil N° 4, cuya área es $A = 118 \text{cm}^2$ y comprobamos la estabilidad de la columna por la fórmula:

$$\sigma = \frac{P}{A} \leq \varphi[\sigma]$$

Determinamos el valor de φ para el perfil elegido, siendo su radio mínimo de inercia $i_{\text{mín}} = i_y = 3,39 \text{cm}$ y la estabilidad será:

$$\lambda = \frac{\mu L}{i_{\text{mín}}} = \frac{0,5 \cdot 800}{3,39} = 118$$

A través de la tabla 9.2 interpolamos y obtenemos $\varphi = 0,464$

De esta manera se tendrá:

$$\begin{aligned} \varphi[\sigma] &= 0,464 \cdot 1800 = 835,2 \text{kgf} / \text{cm}^2 \\ \sigma &= \frac{120 \cdot 10^3}{118} = 1016,9 \text{kgf} / \text{cm}^2 > 835,2 \text{kgf} / \text{cm}^2 \end{aligned}$$

Esto quiere decir, que no se cumple con la condición de estabilidad y debemos de elegir el siguiente perfil.

Elegimos el perfil N° 5, cuya área es $A = 138 \text{cm}^2$, radio mínimo de inercia $i_{\text{mín}} = i_y = 3,54 \text{cm}$ y la estabilidad será:

$$\lambda = \frac{\mu L}{i_{\text{mín}}} = \frac{0,5 \cdot 800}{3,54} = 113$$

Una vez más, a través de la tabla 9.2 interpolamos y obtenemos $\varphi = 0,499$

De esta manera se tendrá:

$$\begin{aligned} \varphi[\sigma] &= 0,499 \cdot 1800 = 898,2 \text{kgf} / \text{cm}^2 \\ \sigma &= \frac{120 \cdot 10^3}{138} = 869,6 \text{kgf} / \text{cm}^2 < 898,2 \text{kgf} / \text{cm}^2 \end{aligned}$$

De esta manera, se cumple con la condición de estabilidad, es decir $\sigma \leq \varphi[\sigma]$ y la columna tiene una reserva del 3,18% para ser cargada.

9.2 FLEXION LONGITUDINAL Y TRANSVERSAL SIMULTANEA

Para estructuras sometidas a flexión longitudinal y transversal simultánea (figura 9.8), la deflexión se determina por la siguiente fórmula aproximada:

$$y = \frac{y^o}{1 - \frac{S}{P_e}} \quad (9.11)$$

Donde:

$$P_e = \frac{\pi^2 EI}{(\mu L)^2} \quad (9.12)$$

Siendo:

y^o - deflexión debido a la acción de la carga transversal

y - deflexión total, debido a la acción de la carga transversal y carga longitudinal S

P_e - carga de Euler, para cuyo cálculo, se considera el momento de inercia I respecto al eje principal, perpendicular al plano de acción de la carga transversal

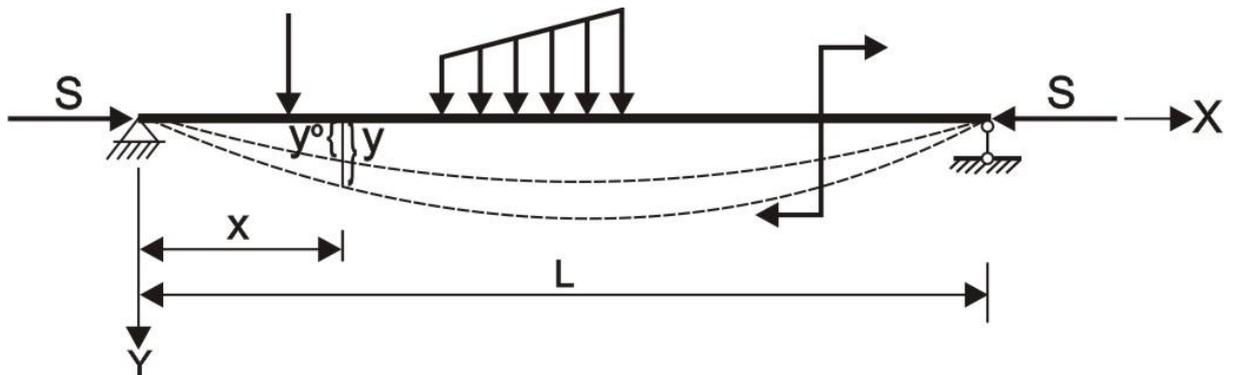


Fig. 9.8

El esfuerzo normal máximo en valor absoluto en la sección transversal de la estructura es:

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{N_x}{A} + \frac{M}{W} = \frac{S}{A} + \frac{M^o}{W} + \frac{Sy}{W} \quad (9.13)$$

Donde:

$$M = M^o + Sy \quad (9.14)$$

Siendo:

M - Momento flector de la suma de las acciones en cualquier sección de la estructura

M^o - Momento flector en la misma sección, debido a la acción de la carga transversal

Para flexión longitudinal y transversal simultánea, no se cumple el Principio de superposición, debido a que la dependencia entre el esfuerzo y la carga no es lineal. El esfuerzo se incrementa más rápido que la carga.

En el caso de flexión longitudinal y transversal simultánea, el cálculo no se realiza por medio de los esfuerzos admisibles, sino por medio de las cargas admisibles.

La fórmula de cálculo por cargas admisibles para barras de materiales plásticos es:

$$[n]S \left[\frac{1}{A} + \frac{[n]y^o}{W} \cdot \frac{1}{1 - [n]\frac{S}{P_e}} \right] + \frac{[n]M^o}{W} \leq \sigma_y \quad (9.15)$$

Donde.

$[n]$ - factor de seguridad por resistencia

σ_y - esfuerzo de fluencia

PROBLEMA 9.9 Una columna de madera está cargada como se muestra en la figura 9.9. Con ayuda de tensómetros se determinó el esfuerzo normal en el punto A y es igual a $\sigma_A = 70 \text{kgf/cm}^2$. Determinar la magnitud de la carga P por medio de dos variantes: a) aplicando el principio de independencia de cargas y b) flexión longitudinal y transversal simultánea. Considerar que el módulo de elasticidad es $E = 10^5 \text{kgf/cm}^2$

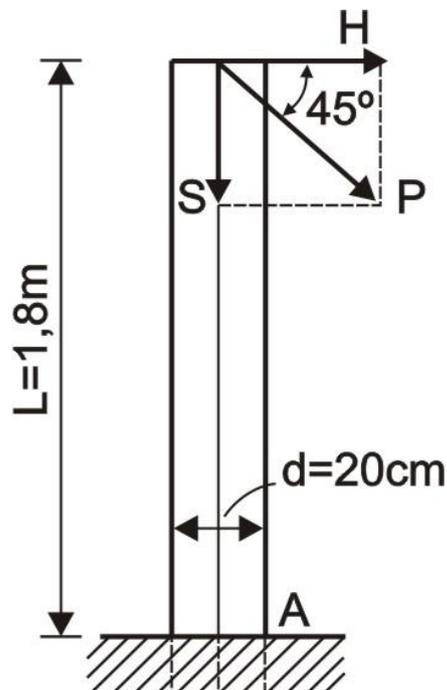


Fig. 9.9

Solución:

Primero, aplicamos el principio de independencia de cargas, siendo el esfuerzo normal en el punto A:

$$\sigma_A = \frac{S}{A} + \frac{M}{W} = \frac{P \text{sen} 45^\circ}{\frac{\pi d^2}{4}} + \frac{(P \text{cos} 45^\circ)L}{\frac{\pi d^3}{32}}$$

Como $\text{sen} 45^\circ = \text{cos} 45^\circ$, se tendrá:

$$P = \frac{\sigma_A \pi d^2}{4 \text{cos} 45^\circ \left(1 + 8 \frac{L}{d} \right)} = \frac{70 \cdot \pi \cdot 20^2}{4 \text{cos} 45^\circ \left(1 + 8 \frac{180}{20} \right)} = 426 \text{kgf}$$

Ahora, aplicamos la flexión longitudinal y transversal simultánea, siendo la relación entre el esfuerzo y la carga la siguiente:

$$\sigma_A = \frac{S}{A} + \frac{HL}{W} + \frac{Sy^o}{W\left(1 - \frac{S}{P_e}\right)} = \frac{P \text{sen}45^\circ}{\frac{\pi d^2}{4}} + \frac{(P \cos 45^\circ)L}{\frac{\pi d^3}{32}} + \frac{(P \text{sen}45^\circ)y^o}{\left(\frac{\pi d^3}{32}\right)\left(1 - \frac{P \text{sen}45^\circ}{P_e}\right)}$$

La fuerza de Euler para esta columna es:

$$P_e = \frac{\pi^2 EI}{(\mu L)^2} = \frac{\pi^2 \cdot 10^5 \cdot \frac{\pi \cdot 20^4}{64}}{(2 \cdot 180)^2} = 59811,5 \text{kgf}$$

La deflexión en el extremo libre debido a la acción de la carga H en centímetros es:

$$y^o = \frac{HL^3}{3EI} = \frac{(P \cos 45^\circ) \cdot 180^3}{3 \cdot 10^5 \cdot \frac{\pi \cdot 20^4}{64}} = (1,75 \cdot 10^{-3})P$$

Considerando que $\text{sen}45^\circ = \cos 45^\circ$ y reemplazando valores se tendrá:

$$\sigma_A = \frac{P \cos 45^\circ}{\frac{\pi \cdot 20^2}{4}} + \frac{(P \cos 45^\circ) \cdot 180}{\frac{\pi \cdot 20^3}{32}} + \frac{(P \cos 45^\circ) \cdot (1,75 \cdot 10^{-3})P}{\left(\frac{\pi \cdot 20^3}{32}\right)\left(1 - \frac{P \cos 45^\circ}{59811,5}\right)} = 70 \text{kgf} / \text{cm}^2$$

De donde:

$$P = 424,3 \text{kgf}$$

Como se puede apreciar, el valor obtenido difiere muy poco del obtenido por el Principio de independencia de cargas, lo cual es natural, debido a que la rigidez de la estructura es bastante grande.

PROBLEMA 9.10 Para la viga mostrada en figura 9.10, determinar el factor de seguridad por resistencia $[n]$, si el material posee un esfuerzo de fluencia $\sigma_y = 2400 \text{kgf} / \text{cm}^2$ y su módulo de elasticidad es $E = 2 \cdot 10^6 \text{kgf} / \text{cm}^2$

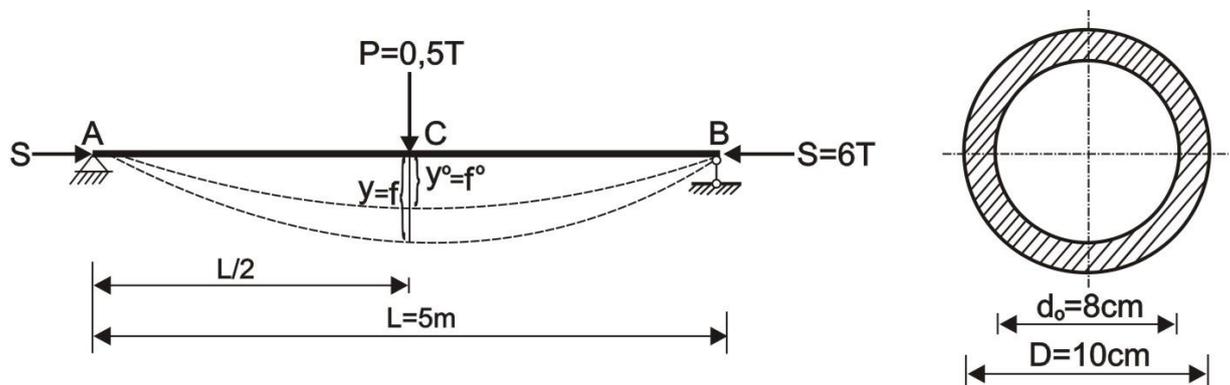


Fig. 9.10

Solución:

El esfuerzo normal máximo en compresión en la sección más peligrosa es:

$$\sigma = \frac{S}{A} + \frac{Sf^{\circ}}{W \left(1 - \frac{S}{P_e}\right)} + \frac{M^{\circ}}{W}$$

Determinamos las características geométricas de la viga:

$$A = \frac{\pi}{4}(D^2 - d_0^2) = \frac{\pi}{4}(10^2 - 8^2) = 28,3\text{cm}^2$$

$$I = \frac{\pi}{64}(D^4 - d_0^4) = \frac{\pi}{64}(10^4 - 8^4) = 289,8\text{cm}^4$$

$$W = \frac{I}{0,5D} = \frac{289,8}{0,5 \cdot 10} = 58\text{cm}^3$$

Calculamos la deflexión máxima debido a la acción de la carga transversal y la fuerza de Euler:

$$f^{\circ} = \frac{PL^3}{48EI} = \frac{500 \cdot 500^3}{48 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 289,8} = 2,2\text{cm}$$

$$P_e = \frac{\pi^2 EI}{(\mu L)^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 289,8}{(1 \cdot 500)^2} = 22881,7\text{kgf}$$

El momento flector máximo debido a la carga transversal es:

$$M^{\circ} = \frac{PL}{4} = \frac{500 \cdot 500}{4} = 62500\text{kgf} \cdot \text{cm}$$

Reemplazamos estos valores y obtenemos:

$$\sigma = \frac{6000}{28,3} + \frac{6000 \cdot 2,2}{58 \left(1 - \frac{6000}{22881,7}\right)} + \frac{62500}{58} = 1598\text{kgf} / \text{cm}^2$$

De esta manera, debido a la dependencia lineal entre el esfuerzo y las cargas externas, el factor de seguridad es:

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_y}{\sigma} = \frac{2400}{1598} = 1,50$$

En la realidad, debido a la flexión longitudinal y transversal simultánea, el factor de seguridad $[n]$ será menor, porque el esfuerzo crece más rápido que las cargas.

El valor del factor de seguridad lo determinamos por la fórmula 9.15

$$[n]S \left[\frac{1}{A} + \frac{[n]f^{\circ}}{W} \cdot \frac{1}{1 - [n]\frac{S}{P_e}} \right] + \frac{[n]M^{\circ}}{W} = \sigma_y$$

Reemplazamos valores:

$$[n]6000 \cdot \left[\frac{1}{28,3} + \frac{[n]2,2}{58} \cdot \frac{1}{1 - [n] \frac{6000}{22881,7}} \right] + \frac{[n]62500}{58} = 2400$$

Efectuamos los cálculos y obtenemos dos soluciones, eliminando la más alta por ser irreal, quedando de esta manera:

$$[n] = 1,36$$

Calculamos el error porcentual del cálculo por dependencia lineal:

$$\varepsilon = \frac{1,50 - 1,36}{1,36} \cdot 100\% = 10,29\%$$

CAPITULO 10

CARGAS DE IMPACTO

10.1 DEFINICIONES Y DEPENDENCIAS PRINCIPALES

Como es conocido de la Mecánica Teórica, los problemas de la Dinámica se pueden plantear como problemas de la Estática, a través del Principio de D’Alambert. Recordamos, que este principio, se fundamenta, en que el punto o sistema en movimiento se puede analizar en cualquier momento en equilibrio, si las fuerzas actuantes en el punto o sistema y las reacciones dinámicas de las conexiones se unen con las fuerzas inerciales.

Las fuerzas inerciales de un punto material son iguales al producto de la masa del punto por su aceleración y está orientada en el sentido opuesto a la aceleración.

En general, para un movimiento curvilíneo no uniforme, la fuerza inercial posee dos componentes: tangencial y centrífuga. La primera, está orientada en cada momento por la tangente a la trayectoria del movimiento y en sentido opuesto a la aceleración tangencial. La segunda, está orientada por la normal al movimiento curvilíneo y en sentido opuesto a la aceleración normal, la cual como es conocida, siempre está orientada hacia el centro de la curvatura de la trayectoria.

Se denominan cargas dinámicas, a aquellas que varían con el tiempo, provocando vibraciones en la estructura. Algunos ejemplos son las cargas de impacto, como cuando dos objetos chocan o cuando un objeto que cae golpea una estructura, y las cargas cíclicas originadas por maquinaria rotatoria. Otros ejemplos son las cargas provocadas por tráfico urbano, ráfagas de viento, agua, olas, sismos y procesos de manufactura, todas las cuales son de carácter dinámico.

Los esfuerzos y desplazamientos producto de las cargas de impacto, se determinan por las fórmulas 10.1 y 10.2

$$\sigma_{din} = k_{din} \sigma_{est} \quad (10.1)$$

$$\delta_{din} = k_{din} \delta_{est} \quad (10.2)$$

Donde:

σ_{din} , δ_{din} - esfuerzo y desplazamiento dinámico, producto de la carga de impacto

k_{din} - coeficiente dinámico para cargas de impacto

σ_{est} , δ_{est} - esfuerzo y desplazamiento obtenido producto de la carga estática igual al peso de la carga que cae

El coeficiente dinámico para cargas de impacto (k_{din}), sin considerar el peso de la estructura que es impactada, se determina por la fórmula 10.3

$$k_{din} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{est}}} \quad (10.3)$$

Donde:

h - altura que cae la carga de impacto

Para el caso de cargas aplicadas súbitamente, es decir, cuando $h = 0$, se obtendrá $k_{din} = 2$

Si consideramos el peso de la estructura, que recibe el impacto, el coeficiente dinámico se determina por la fórmula 10.4

$$k_{\text{din}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{\text{est}} \left(1 + \beta \frac{P}{Q}\right)}} \quad (10.4)$$

Donde:

P - peso del sistema elástico que es impactado

Q - peso de la carga de impacto

h - altura de caída

δ_{est} - desplazamiento en el punto de impacto, debido a la acción de la carga estática Q

β - coeficiente asumido que caracteriza la masa del sistema con el punto de impacto ($\beta < 1$)

El coeficiente asumido β se determina por la fórmula 10.5

$$\beta = \frac{\int (\delta_{x,\text{est}})^2 dP}{\delta_{\text{est}}^2 P} \quad (10.5)$$

Donde:

$\delta_{x,\text{est}}$ - ecuación del diagrama de desplazamientos, producto de la acción de la carga estática, igual al peso de la carga de impacto y actuante en el punto de impacto

Si la relación h / δ_{est} es muy grande (mayor a 100), se puede asumir la fórmula aproximada 10.6 y si se considera el peso de la estructura la fórmula 10.7

$$k_{\text{din}} = \sqrt{\frac{2h}{\delta_{\text{est}}}} \quad (10.6)$$

$$k_{\text{din}} = \sqrt{\frac{2h}{\delta_{\text{est}} \left(1 + \beta \frac{P}{Q}\right)}} \quad (10.7)$$

10.2 CALCULO DE ESTRUCTURAS ANTE CARGAS DE IMPACTO

PROBLEMA 10.1 Un resorte de rigidez “k” sostiene una barra rígida prismática AB de masa M_1 y longitud L, tal como se muestra en la figura 10.1. Un objeto pesado de masa M_2 cae sobre la barra desde una altura “h”. Obtener una fórmula para la deflexión máxima δ del punto B, si se supone que no hay pérdidas de energía durante el impacto. Considerar que la masa M_2 es mucho mayor que M_1

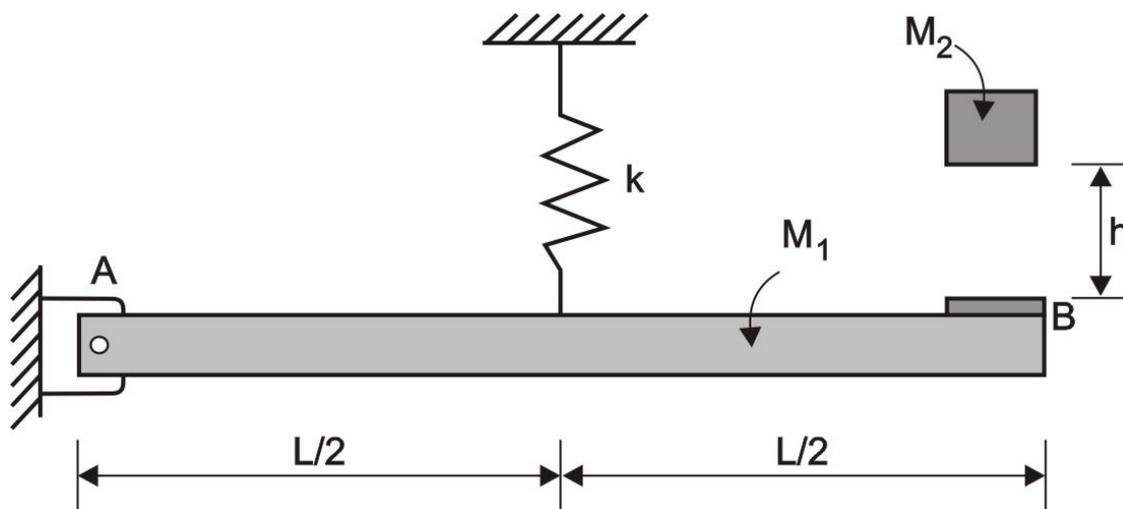


Fig. 10.1

Solución:

Analizamos el diagrama de cuerpo libre de la estructura (figura 10.2)

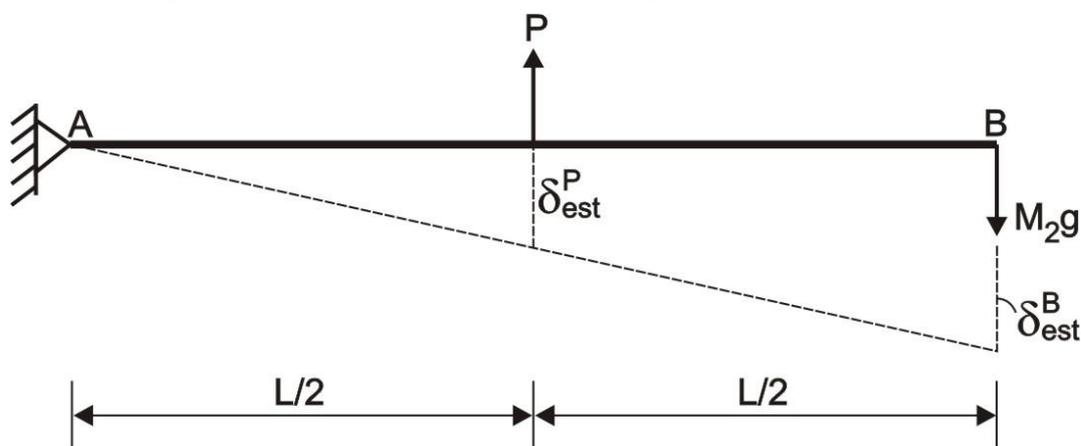


Fig. 10.2

Del gráfico, se tiene:

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad P\left(\frac{L}{2}\right) = M_2gL \quad \therefore \quad P = 2M_2g$$

Además:

$$\delta_{est}^P = \frac{PL}{EA} = \frac{P}{k} = \frac{2M_2g}{k}$$

Del diagrama de desplazamientos, se obtiene:

$$\delta_{est}^B = 2\delta_{est}^P = \frac{4M_2g}{k}$$

En consecuencia:

$$\delta_B = \delta_{est}^B \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{est}^B}} \right] = \frac{4M_2g}{k} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\left(\frac{4M_2g}{k}\right)}} \right] = \frac{4M_2g}{k} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{kh}{2M_2g}} \right]$$

La orientación del desplazamiento es hacia abajo por ser M_2 mayor que M_1

PROBLEMA 10.2 Sobre una barra escalonada de acero, cae una carga $Q = 40\text{kgf}$, tal como se muestra en la figura 10.3. Determinar los esfuerzos máximos de compresión que surgen en las secciones transversales de la barra escalonada, considerando que la estabilidad de la misma está asegurada.

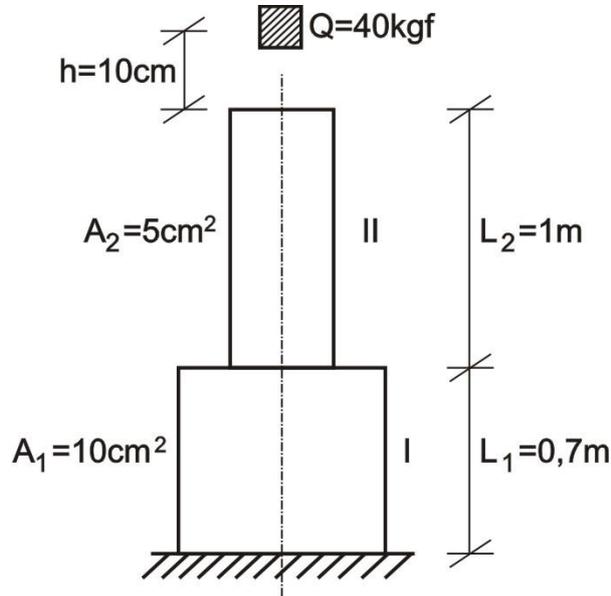


Fig. 10.3

Resolver el problema para los siguientes casos:

- No considerar el peso de la barra
- Considerar el peso de la barra, siendo su peso específico del material $\gamma = 7,85\text{T/m}^3$

Para ambos casos, considerar $E = 2.10^6 \text{kgf/cm}^2$

Solución:

El esfuerzo estático máximo de compresión surge en la parte superior de la barra escalonada e igual a:

$$\sigma_{\text{est}} = \frac{N}{A_2} = \frac{Q}{A_2} = \frac{40}{5} = 8\text{kgf/cm}^2$$

El desplazamiento estático en el lugar del impacto será:

$$\delta_{\text{est}} = \frac{QL_1}{EA_1} + \frac{QL_2}{EA_2} = \frac{40}{2.10^6} \left(\frac{70}{10} + \frac{100}{5} \right) = 54.10^{-5} \text{cm}$$

La relación $h/\delta_{\text{est}} = 10/(54.10^{-5}) = 185,18.10^2$. En consecuencia, aplicamos la fórmula aproximada para el coeficiente dinámico.

CASO (a):

Si no consideramos el peso de la barra, obtenemos:

$$k_{\text{din}} = \sqrt{\frac{2h}{\delta_{\text{est}}}} = \sqrt{\frac{2.10}{54.10^{-5}}} = 192,45$$

El esfuerzo dinámico será:

$$\sigma_{\text{din}} = k_{\text{din}} \sigma_{\text{est}} = 192,45.8 = 1539,6\text{kgf/cm}^2$$

El resultado obtenido, tiene sentido, si se cumple la condición que el límite de proporcionalidad del material de la barra es mayor que el esfuerzo dinámico obtenido.

CASO (b):

Para el caso, cuando se considere el peso de la barra, debemos previamente determinar el coeficiente asumido β

El desplazamiento estático para cualquier sección transversal del tramo inferior de la barra escalonada ($0 \leq x_1 \leq L_1$) será:

$$\delta_{x,\text{est}}^I = \frac{Qx_1}{EA_1}$$

Para el tramo superior ($0 \leq x_2 \leq L_2$) se tendrá:

$$\delta_{x,\text{est}}^{II} = \frac{QL_1}{EA_1} + \frac{Qx_2}{EA_2}$$

El peso de un elemento diferencial del tramo inferior es $dP_1 = \gamma A_1 dx_1$ y del tramo superior $dP_2 = \gamma A_2 dx_2$

Ahora, determinamos el valor del coeficiente β

$$\beta = \frac{\int_L (\delta_{x,\text{est}})^2 dP}{\delta_{\text{est}}^2 P} = \frac{\int_0^{L_1} \left(\frac{Qx_1}{EA_1}\right)^2 \gamma A_1 dx_1 + \int_0^{L_2} \left(\frac{QL_1}{EA_1} + \frac{Qx_2}{EA_2}\right)^2 \gamma A_2 dx_2}{\left[\frac{Q}{E} \left(\frac{L_1}{A_1} + \frac{L_2}{A_2}\right)\right]^2 \gamma (A_1 L_1 + A_2 L_2)}$$

$$\beta = \frac{\frac{Q^2 L_1^3}{3(EA_1)^2} \gamma A_1 + \frac{Q^2 L_1^2}{(EA_1)^2} \gamma A_2 L_2 + \frac{Q^2 L_1 L_2^2}{E^2 A_1 A_2} \gamma A_2 + \frac{Q^2 L_2^3}{3(EA_2)^2} \gamma A_2}{\left[\frac{Q}{E} \left(\frac{L_1}{A_1} + \frac{L_2}{A_2}\right)\right]^2 \gamma (A_1 L_1 + A_2 L_2)}$$

Reemplazamos las relaciones $A_1 = 2A_2$, $L_1 = 0,7L_2$ y efectuamos los cálculos, obteniendo:

$$\beta = 0,197$$

El peso de la barra es:

$$P = \gamma A_1 L_1 + \gamma A_2 L_2 = 7,85 \cdot 10^{-3} \cdot (10,70 + 5 \cdot 100) = 9,42 \text{ kgf}$$

El coeficiente dinámico, considerando el peso de la barra es:

$$k_{\text{din}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10}{54 \cdot 10^{-5} \left(1 + 0,197 \cdot \frac{9,42}{40}\right)}} = 188,13$$

El esfuerzo dinámico, considerando el peso de la barra es:

$$\sigma_{\text{din}} = k_{\text{din}} \sigma_{\text{est}} = 188,13 \cdot 8 = 1505,04 \text{ kgf / cm}^2$$

En el presente caso, la influencia del peso de la estructura no es considerable.

PROBLEMA 10.3 Sobre la barra de acero de eje quebrado ABKC, cae una carga Q, tal como se muestra en la figura 10.4,a. Determinar el esfuerzo máximo de la estructura y su desplazamiento vertical en el extremo A. Considerar que el elemento AB es rígido

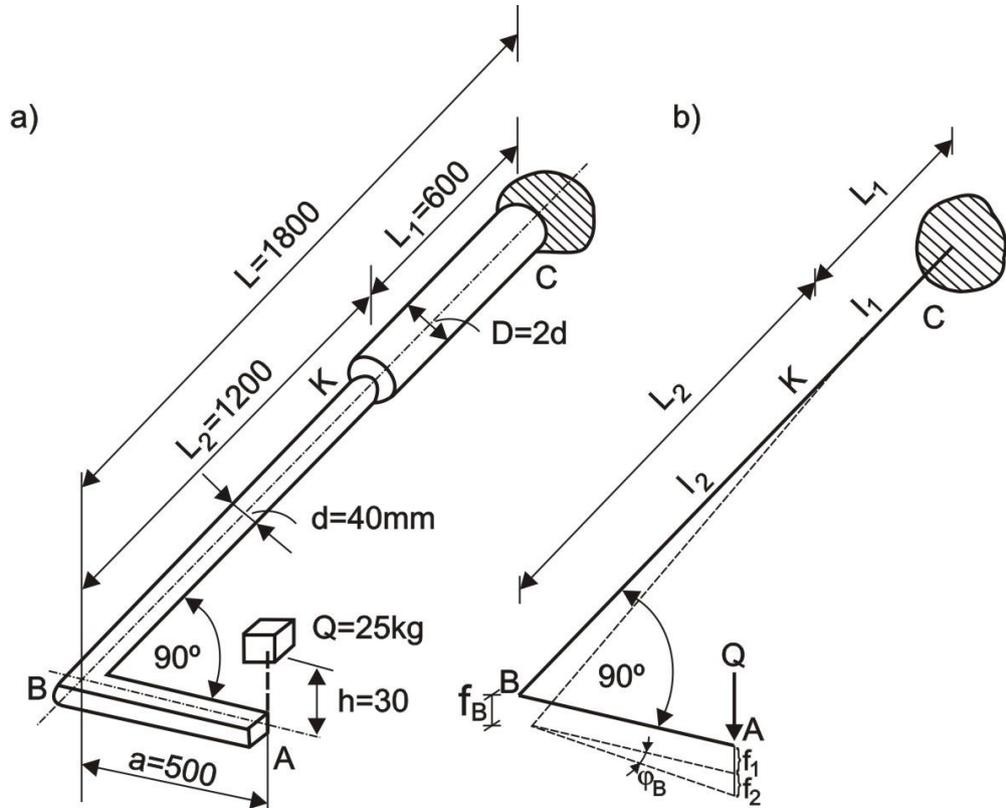


Fig. 10.4

Solución:

La barra BKC estará sometida a flexión por la fuerza Q y a torsión por el momento Qa , cuyo esquema de carga se muestra en la figura 10.4,b

Para determinar la sección más peligrosa de la barra BKC, graficamos los diagramas de momento flector M y momento torsor T . El diagrama M de acuerdo a su esquema de carga se muestra en la figura 10.5,a y el diagrama T con su esquema de carga en la figura 10.5,c. De ambos diagramas, podemos indicar que las secciones peligrosas pueden ser las secciones C o K. Para el segundo caso, el momento flector es menor, pero su diámetro también, es por ello, la importancia de analizar ambos casos.

Se recuerda, que la sección más peligrosa, es aquella, cuyo esfuerzo estático equivalente es el mayor.

SECCION "C":

$$M_C = Q(L_1 + L_2) = 25 \cdot 180 = 4500 \text{ kgf} \cdot \text{cm}$$

$$T_C = Qa = 25 \cdot 50 = 1250 \text{ kgf} \cdot \text{cm}$$

El esfuerzo estático equivalente lo calculamos a través de la hipótesis de los esfuerzos tangenciales máximos:

$$\sigma_e^{\text{III}} = \frac{1}{W_C} \sqrt{M_C^2 + T_C^2} = \frac{1}{0,18^3} \sqrt{4500^2 + 1250^2} = 91,2 \text{ kgf} / \text{cm}^2$$

SECCION "K":

$$M_K = QL_2 = 25.120 = 3000\text{kgf} \cdot \text{cm}$$

$$T_K = Qa = 25.50 = 1250\text{kgf} \cdot \text{cm}$$

$$\sigma_e^{\text{III}} = \frac{1}{W_K} \sqrt{M_K^2 + T_K^2} = \frac{1}{0,1.4^3} \sqrt{3000^2 + 1250^2} = 507,8\text{kgf} / \text{cm}^2$$

De esta manera, se concluye, que la sección más peligrosa es la sección "K".

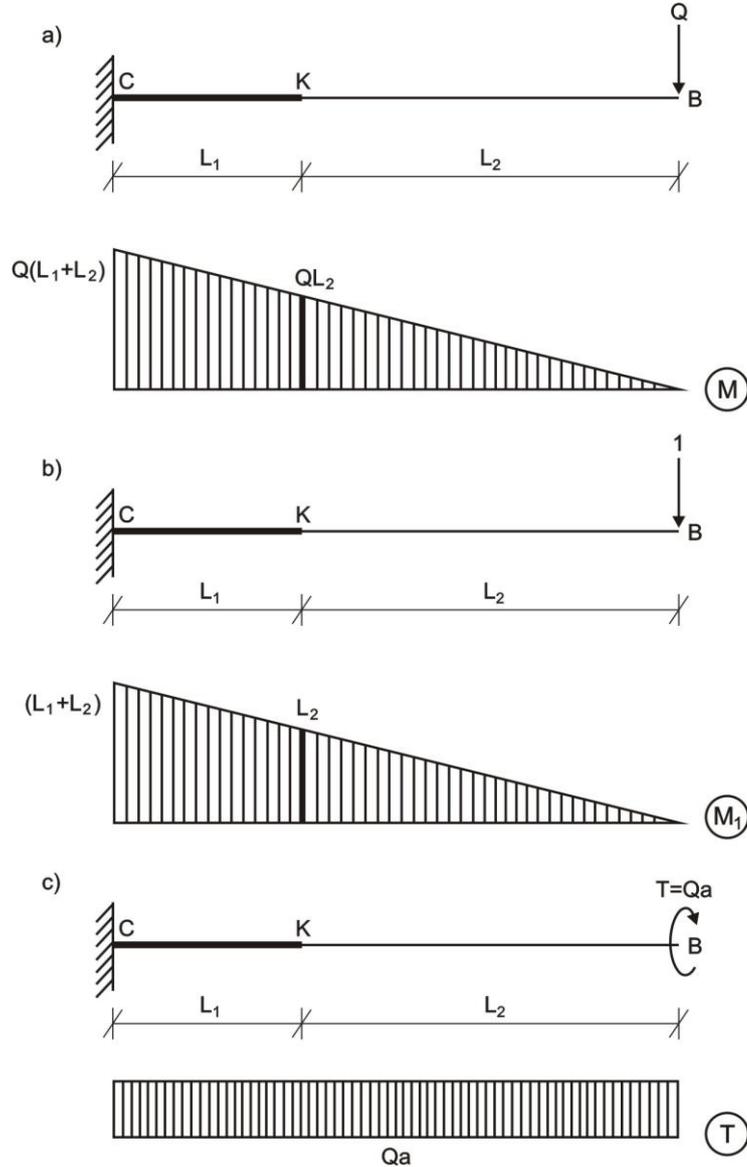


Fig. 10.5

Ahora, determinamos el desplazamiento vertical de la sección A. El desplazamiento total, se puede analizar como la suma del desplazamiento f_1 , debido a la flexión de la barra BKC y el desplazamiento f_2 debido a la torsión de la misma barra, tal como se puede apreciar en la figura 10.4,b

El desplazamiento f_1 es igual a la deflexión f_B en la sección B, debido a la carga Q, recordando que por condición del problema la barra AB es rígida.

Para su cálculo, aplicamos el método del trabajo virtual, utilizando el principio de Vereschaguin:

$$f_1 = \frac{1}{EI_1} [QL_2 L_1 L_2] + \frac{1}{EI_1} \cdot \frac{1}{2} \cdot QL_1 L_1 \cdot \frac{2}{3} L_1 + \frac{1}{EI_2} \cdot \frac{1}{2} \cdot QL_2 L_2 \cdot \frac{2}{3} L_2$$

$$f_1 = \frac{1}{2 \cdot 10^6 \cdot \frac{\pi \cdot 8^4}{64}} [25 \cdot 120^2 \cdot 60] + \frac{1}{2 \cdot 10^6 \cdot \frac{\pi \cdot 8^4}{64}} \cdot \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 60^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 60 + \frac{1}{2 \cdot 10^6 \cdot \frac{\pi \cdot 4^4}{64}} \cdot \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 120^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 120$$

$$f_1 = 0,631 \text{ cm}$$

El desplazamiento f_2 lo determinamos considerando que el ángulo φ_B es muy pequeño e igual al ángulo de giro en torsión de la sección B.

$$\varphi_B = \frac{T \cdot L_1}{GI_{p,1}} + \frac{T \cdot L_2}{GI_{p,2}} = \frac{25 \cdot 50 \cdot 60}{8 \cdot 10^5 \cdot \frac{\pi \cdot 8^4}{32}} + \frac{25 \cdot 50 \cdot 120}{8 \cdot 10^5 \cdot \frac{\pi \cdot 4^4}{32}} = 0,769 \cdot 10^{-2} \text{ rad}$$

Luego:

$$f_2 = \varphi_B \cdot a = 0,769 \cdot 10^{-2} \cdot 50 = 0,384 \text{ cm}$$

El desplazamiento vertical estático de la sección A es:

$$\delta_{\text{est}}^A = f_1 + f_2 = 0,631 + 0,384 = 1,015 \text{ cm}$$

Determinamos el coeficiente dinámico:

$$k_{\text{din}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{\text{est}}^A}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 3}{1,015}} = 3,629$$

Para la sección más peligrosa K, el esfuerzo dinámico máximo es:

$$\sigma_{\text{din}} = k_{\text{din}} \cdot \sigma_e^{\text{III}} = 3,629 \cdot 507,8 = 1842,8 \text{ kgf / cm}^2$$

El desplazamiento vertical dinámico de la sección A es:

$$\delta_{\text{din}} = k_{\text{din}} \delta_{\text{est}}^A = 3,629 \cdot 1,015 = 3,68 \text{ cm}$$

BIBLIOGRAFIA

1. **Gere James – Timoshenko Stephen.** Mecánica de materiales. Grupo Editorial Iberoamericana. 2da Edición. ISBN 968-7270-16-0. México, 1986. – 825p.
2. **Miroliubov I.N. y otros.** Problemas de resistencia de materiales. Editorial Escuela Superior. Moscú, 2005. – 396p.
3. **Nelson James – McCormac Jack.** Análisis de estructuras. Editorial Alfaomega. 3ra edición. ISBN 970-15-1118-2. México, 2006. – 582p.
4. **Popov Egor.** Mecánica de sólidos. Pearson Educación. 2da edición. ISBN 970-17-0398-7. México, 2000. – 864p.
5. **Pytel Andrew – Singer Ferdinand.** Resistencia de materiales. Editorial Oxford. 4ta edición. ISBN 970-15-1056-9. México, 2006. – 584p.
6. **Uribe Escamilla Jairo.** Análisis de estructuras. Editorial Uniandes. 2da Edición. ISBN 958-9057-15-2. Colombia, 2004. – 840p.
7. **Villarreal Castro Genner.** Interacción sísmica suelo-pilote-superestructura en edificios altos. 1ra Edición. ISBN 9972-33-175-X. Trujillo, 2005. – 119p.
8. **Villarreal Castro Genner.** Interacción sísmica suelo-estructura en edificaciones con zapatas aisladas. 1ra. Edición. ISBN 9972-33-242-X. Lima, 2006. – 113p.
9. **Villarreal Castro Genner.** Interacción sísmica suelo-estructura en edificaciones con zapatas aisladas. Asamblea Nacional de Rectores. 2da. Edición. ISBN 9972-2909-8-0. Lima, 2006. – 125p.
10. **Villarreal Castro Genner.** Análisis de estructuras con el programa LIRA 9.0. 1ra Edición. ISBN 9972-33-313-2. Lima, 2006. – 115p.
11. **Villarreal Castro Genner.** Interacción suelo-estructura en edificios altos. Asamblea Nacional de Rectores. 1ra Edición. ISBN 978-603-4011-04-5. Lima, 2007. – 142p.
12. **Villarreal Castro Genner.** Análisis estructural. 1ra Edición. ISBN 978-9972-33-657-7. Lima, 2008. – 335p.
13. **Villarreal Castro Genner – Oviedo Sarmiento Ricardo.** Edificaciones con dispositivos pasivos de disipación de energía. 1ra Edición. ISBN 978-9972-33-910-0. Lima, 2009. – 127p.
14. **Villarreal Castro Genner – Oviedo Sarmiento Ricardo.** Edificaciones con disipadores de energía. Asamblea Nacional de Rectores. 1ra Edición. ISBN 978-612-4011-09-2. Lima, 2009. – 159p.
15. **Volmir A.** Problemas de resistencia de materiales. Editorial MIR. Moscú, 1986. – 478p.

INDICE

PROLOGO	02
CAPITULO 1. TRACCION Y COMPRESION	
1.1. Definiciones y dependencias principales	04
1.2. Estructuras estáticamente determinadas	07
1.3. Estructuras estáticamente indeterminadas	32
1.4. Esfuerzos de temperatura	41
1.5. Esfuerzos de montaje	44
CAPITULO 2. ESFUERZO Y DEFORMACION	
2.1. Definiciones y dependencias principales	48
2.2. Esfuerzo lineal	52
2.3. Esfuerzo plano	56
2.4. Esfuerzo espacial	64
2.5. Ley de Hooke generalizada	71
2.6. Teorías o criterios de resistencia	75
CAPITULO 3. TORSION	
3.1. Definiciones y dependencias principales	80
3.2. Torsión de barras de sección circular	82
3.3. Estructuras estáticamente indeterminadas	87
3.4. Torsión de barras de sección no circular	92
3.5. Resortes helicoidales de paso pequeño	100
CAPITULO 4. FLEXION	
4.1. Esfuerzos normales	106
4.2. Esfuerzos tangenciales	117
4.3. Vigas de dos materiales	126
4.4. Vigas de concreto armado	132
CAPITULO 5. DEFORMACION EN VIGAS	
5.1. Método de la doble integración	139
5.2. Método de los parámetros iniciales	158
5.3. Método del área de momentos	173
5.4. Método de la viga conjugada	187
CAPITULO 6. METODOS ENERGETICOS	
6.1. Energía potencial de deformación	198
6.2. Método del trabajo virtual	198

6.3. Teoremas de Castigliano	219
CAPITULO 7. ESTRUCTURAS HIPERESTATICAS	
7.1. Grado de indeterminación	238
7.2. Ecuación de los tres momentos	238
7.3. Método de las fuerzas	255
CAPITULO 8. RESISTENCIA COMPUESTA	
8.1. Flexión desviada	279
8.2. Flexión y carga axial	286
8.3. Carga axial excéntrica	291
8.4. Flexión, torsión y carga axial	297
CAPITULO 9. ESTABILIDAD DE BARRAS	
9.1. Flexión longitudinal	304
9.2. Flexión longitudinal y transversal simultánea	316
CAPITULO 10. CARGAS DE IMPACTO	
10.1. Definiciones y dependencias principales	321
10.2. Cálculo de estructuras ante cargas de impacto	322
BIBLIOGRAFIA	329