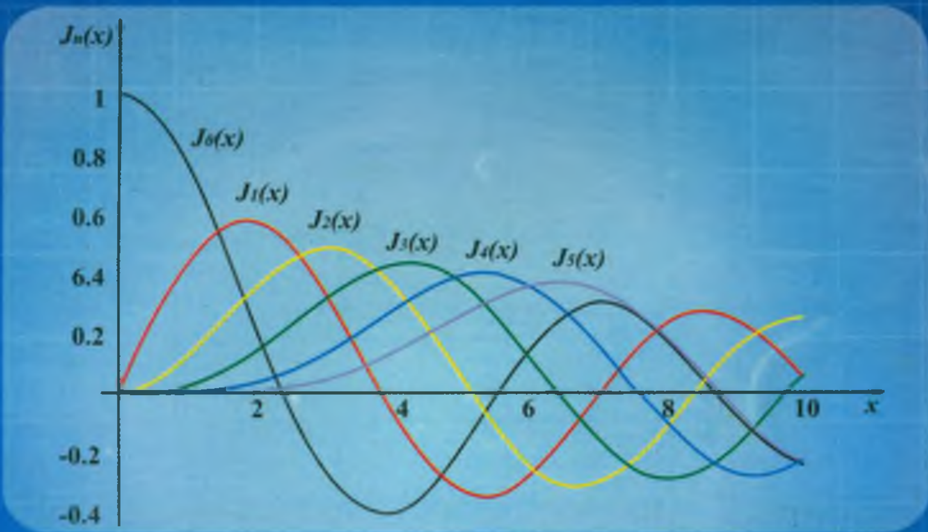
ANÁLISIS MATEMÁTICO IV

PARA ESTUDIANTES DE CIENCIAS E INGENIERÍA



$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}$$

Nueva Edición

Eduardo Espinoza Ramos

Lima - Perú

ANÁLISIS MATEMÁTICO IV

PARA ESTUDIANTES DE CIENCIAS E INGENIERÍAS

- ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS
- TRANSFORMADA DE LAPLACE
- ANALISIS DE SERIES DE FOURIER

EDUARDO ESPINOZA RAMOS

LIMA – PERÚ

IMPRESO EN EL PERÚ
22 - 03 - 2008

2da. EDICIÓN

RUC	N° 10070440607
Ley de Derechos del Autor	N° 13714
Registro comercial	N° 10716
Escritura Publica	N° 4484
Hecho el depósito legal en la Biblioteca Nacional del Perú con el número	N° 2007-12588

PRÓLOGO

Esta obra que presento en su segunda edición está orientada básicamente para todo estudiante de ciencias matemáticas, físicas, Ingeniería, Economía y para toda persona interesada en fundamentar sólidamente sus conocimientos matemáticos. Teniendo en cuenta que el estudio de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias así como la Transformada de Laplace y la Serie de Fourier es muy importante en la formación de los estudiantes de ciencias e ingeniería, debido a que con frecuencia aparecen en el estudio de los fenómenos naturales.

Por este motivo en ésta obra titulada "Análisis Matemático IV, para Estudiante de Ciencias e Ingeniería" he usado la experiencia adquirida en la docencia universitaria, dictando en las facultades de Ingeniería de las diversas universidades donde presto mis servicios. La obra esta cuidadosamente corregida y comentada tanto en sus ejercicios y problemas resueltos y propuestos con sus respectivas respuestas. La teoría expuesta es precisa y necesaria para la solución de los diversos problemas abordados.

La lectura del presente libro requiere de un conocimiento del Cálculo Diferencial e Integral así como las Series de Potencia.

El libro empieza en su Capítulo I con los Conceptos Básicos de Ecuaciones Diferenciales, en el Capítulo II se estudia las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden y Primer Grado, dando métodos analíticos para su solución, en el Capítulo III se presenta algunas aplicaciones importantes, en el Capítulo IV está relacionado con las Ecuaciones Diferenciales de Orden Superior, en el Capítulo V se realiza la Teoría de las Ecuaciones Diferenciales Lineales de orden n, en el Capítulo VI se aborda los Operadores Diferenciales usando los métodos abreviados, en el Capítulo VII se estudia las Ecuaciones Diferenciales de Coeficientes Variables, tratando el estudio de las aplicaciones de las Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden, en el Capítulo VIII se estudia los Sistemas de Ecuaciones Diferenciales de Coeficientes Constantes, en el Capítulo IX estudiaremos las Ecuaciones Diferenciales mediante Series de Potencias aplicando el Método de FROBENIUS, así como las Ecuaciones de Bessel y Legendre, en el Capítulo X se dan los conceptos básicos de la Transformada de Laplace, en el Capítulo XI se estudian las Funciones Especiales: Periódicas, Escalón Unidad, Impulso Unitario, Gama, Beta, Bessel y su Transformada de Laplace, en el Capítulo XII se estudia la Transformada Inversa de Laplace, así como el Teorema de Convolución, en el Capítulo XIII se trata de las Aplicaciones de la Transformada de Laplace en la solución de Ecuaciones Diferenciales, en el Capítulo XIV se estudia los Conceptos Básicos de la Serie de Fourier, en el Capítulo XV se estudia la Serie de Fourier, de funciones pares, impares, simetría de media onda, cuarto de onda par y cuarto de onda impar, en el Capítulo XVI se estudia la forma compleja de la Serie de Fourier y la Transformada de Fourier.

En esta 2da. edición se ha mejorado los conceptos y algunas correcciones sugeridas por los señores catedráticos así mismo se ha incluido ejercicios y problemas tomados en los exámenes en las diversas facultades de ingeniería.

Deseo expresar mis más profundo agradecimiento a mis colegas por sus sugerencias y apoyo en la realización de esta obra.

- **DOCTOR PEDRO CONTRERAS CHAMORRO**

  Ex-Director de la Escuela Profesional de Matemática Pura de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos.

  Catedrático Principal en Pos-Grado de la Facultad de Matemática Pura de la UNMSM

  Miembro Fundador de la Academia Nacional de Ciencia y tecnología del Perú.

  Catedrático de la Universidad Particular Ricardo Palma.

- **DOCTOR EUGENIO CABANILLAS LAPA**

  Doctor en matemática Pura, Universidad Federal de Río de Janeiro – Brasil.

  Director de Pos-Grado en la Universidad Nacional Mayor de San Marcos.

  Catedrático de la Universidad Nacional del Callao.

- **LIC. ANTONIO CALDERON LEANDRO**

  Ex-Jefe de Departamento Académico de la Facultad de Ing. Pesquera y Alimentos de la Universidad Nacional del Callao.

  Jefe de Departamento Académico de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao.

  Coordinador del Area de Matemática en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Ricardo Palma.

- **LIC. SERGIO LEYVA HARO**

  Ex Jefe del Centro de Computo de la Facultad de Ingeniería Química de la Universidad Nacional del Callao.

  Catedrático en la Facultad de Ingeniería Ambiental y de Recursos Naturales de la Universidad Nacional del Callao.

- **LIC. JUAN BERNUI BARROS**

  Director del Instituto de Investigación de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao.

  Catedrático de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos.

- **LIC. PALERMO SOTO SOTO**

  Catedrático de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos.

  Catedrático de la Universidad Particular Ricardo Palma.

- **Mg. JOSE QUIKE BRONCANO**

  Catedrático de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos.

  Coordinador del área de matemática en la Facultad de Ciencias Matemáticas Puras.

- **Lic. GUILLERMO MAS AZAHUANCHE**

  Catedrático de la Universidad Nacional del Callao

  Catedrático de la Universidad Nacional de Ingeniería.

  Catedrático de la Universidad Ricardo Palma.

EDUARDO ESPINOZA RAMOS

DEDICATORIA

Este libro lo dedico a mis hijos:

RONALD, JORGE y DIANA

que Dios ilumine sus caminos para que puedan ser guías de su prójimo

INDICE

CAPÍTULO I

CAPÍTULO II

INDICE

CAPÍTULO I

CAPÍTULO II

CAPÍTULO IV

CAPÍTULO IV

CAPÍTULO V

CAPÍTULO VI

CAPÍTULO VII

CAPÍTULO VIII

CAPÍTULO IX

CAPÍTULO X

CAPÍTULO XI

CAPÍTULO XII

CAPÍTULO XIII

CAPÍTULO XIV

CAPÍTULO XV

15. SERIES DE FOURIER DE FUNCIONES: PARES, IMPARES, SIMETRIA DE MEDIA ONDA, CUARTO DE ONDA PAR Y CUARTO DE ONDA IMPAR 772

CAPÍTULO XVI

CAPÍTULO I

1. CONCEPTOS BÁSICOS Y TERMINOLOGÍA.-

1.1. INTRODUCCIÓN.-

En los cursos básicos el lector aprendió que, dada una función y = f(x) su derivada $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ es también una función de x; y que se calcula mediante alguna regla apropiada. El problema que enfrentamos en este curso, no es, dada una función y = f(x) encontrar su derivada, más bien el problema es, si se da una ecuación como $\frac{dy}{dx} = f'(x)$, encontrar de alguna manera una función y = f(x) que satisfaga a la ecuación, en una palabra se desea resolver ecuaciones diferenciales.

1.2. DEFINICIÓN.-

Una ecuación diferencial es la que contiene derivadas o diferenciales de una función incógnita.

Ejemplos de Ecuaciones diferenciales:

1. $\frac{dy}{dx} = 4x + 7$

2. $y^2dx - x^2dy = 0$

3. $m\frac{d^2y}{dt^2} = mg - K\frac{dy}{dx}$

4. $(\frac{d^2y}{dx^2})^3 - \cos x\frac{dy}{dx} = \operatorname{sen} x$

5. $\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial z^2} = 0$, donde $\omega = f(x,y,z)$

(6) $x^2\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}+z^2\frac{\partial^2\omega}{\partial z^2}=0$, donde $\omega = f(x,y,z)$

1.3. CLASIFICACIÓN DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES.-

Las ecuaciones diferenciales se clasifican en dos tipos:

1er. Si la función incógnita depende de una sola variable independiente, en la cual sólo aparecen derivadas ordinarias, la ecuación diferencial se llama **"Ecuación diferencial ordinaria".**

Ejemplos: Son ecuaciones diferenciales ordinarias las siguientes ecuaciones:

a) $m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx$, donde $k=m\omega^2$ es una magnitud positiva, m la masa (Ecuación diferencial del movimiento armónico simple)

b) $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+p(p+1)y=0$ (Ecuación diferencial de Legendre)

c) $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-p^2)y=0$ (Ecuación diferencial de Bessel)

d) $(x-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}+[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]\frac{dy}{dx}-\alpha\beta y=0$ (Ecuación diferencial de Gauss)

e) $L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{1}{C}q=0$ (Ecuación diferencial de la corriente eléctrica ,donde q es la carga eléctrica, R la resistencia, L la inductancia, C la capacitancia).

NOTACIÓN.-

A las ecuaciones diferenciales ordinarias se representa mediante el símbolo:

$$\boxed{F(x,y,\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2},...,\frac{d^ny}{dx^n})=0}$$

Donde F indica la relación que existe entre las variables x, y , así como también sus derivadas

$$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}$$

2do. Si la función incógnita depende de varias variables independientes y las derivadas son derivadas parciales, la ecuación diferencial se llama **"Ecuación Diferencial Parcial".**

Ejemplos: Las siguientes ecuaciones son ecuaciones diferenciales parciales.

a) $\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial z^2}=0$, donde $\omega = f(x,y,z)$ (Ecuación diferencial de Laplace)

b) $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ (Ecuación diferencial de la onda unidimensional)

c) $\frac{\partial u}{\partial t}=h^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (Ecuación diferencial térmica unidimensional)

d) $a^2(\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial z^2})=\frac{\partial\omega}{\partial t}$ (Ecuación diferencial del calor)

e) $a^2(\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial z^2})=\frac{\partial^2\omega}{\partial t^2}$ (Ecuación diferencial de la onda)

f) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x,y)$ (Ecuación diferencial bidimensional de Poissón)

1.4. ORDEN DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL ORDINARIA.-

El orden de una ecuación diferencial ordinaria, está dado por el orden mayor de su derivada.

1.5. GRADO DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL ORDINARIA.-

El grado de una ecuación diferencial ordinaria, está dado por el exponente del mayor orden de su derivada.

Ejemplos:

Determinar el orden y grado de las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias:

1) $e^x \frac{d^2y}{dx^2} + \operatorname{sen} x.\frac{dy}{dx} = x$, es de 2do. orden y de 1er. grado.

2) $\frac{d^3y}{dx^3} + 2(\frac{d^2y}{dx^2})^3 + \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} x$, es de 3er. orden y de 1er. grado.

3) $\frac{dy}{dx} + p(x)y = Q(x)$, es de 1er. orden y de 1er. grado.

4) $(\frac{d^3y}{dx^3})^2 - 2(\frac{dy}{dx})^4 + xy = 0$, es de 3er. orden y de 2do. grado.

EJERCICIOS PROPUESTOS.-

Determinar el orden y grado de las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias.

1) $\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0$

2) $(\frac{d^3y}{dx^3})^4 - (\frac{d^2y}{dx^2})^5 + y = 0$

3) $\frac{d^2y}{dx^2}.\frac{dy}{dx} + (\frac{dy}{dx})^2 + y = 0$

4) $\sqrt{y' + y} = \cos x$

5) $\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt[4]{y + (\frac{dy}{dx})^2}$

6) $(D_x y)^3 = 3x^2 - 1$

7) $x^4 \frac{dy}{dx} - x^2 \frac{d^2y}{dx^2} = y^4 \frac{d^3y}{dx^3}$

8) $(\frac{d^2y}{dx^2})^3 + \frac{d^2y}{dx^2}.(\frac{dy}{dx})^4 - x^7 y = \cos x$

9) $x(y'')^3 + (y')^4 - y = 0$

10) $\cos x.(y'')^2 + \operatorname{sen} x(y')^4 = 1$

1.6. SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL ORDINARIA.-

Si y = F(x) es una función y f es la derivada de F. es decir: $\frac{dy}{dx} = F'(x) = f(x)$, de donde:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = f(x)} \qquad \dots (\alpha)$$

La ecuación (α) es una ecuación diferencial ordinaria.

La solución de la ecuación (α) consiste en buscar una función y = G(x) de tal manera que verifique a la ecuación (α).

Como F es la antiderivada de f, entonces G(x) = F(x) + C. donde C es una constante, es decir: $$d(G(x)) = d(F(x)+c) = F'(x)\ dx = f(x)\,dx$$

Luego: $\boxed{y = G(x) = F(x) + C}$ ... (β)

Se llama solución completa o solución general de la ecuación diferencial (α).

La solución general (β) nos representa una familia de curvas que dependen de una constante arbitraria que se llama familia de un parámetro.

En los problemas que incluyen ecuaciones diferenciales, se trata de obtener soluciones particulares, luego de la solución general de la ecuación diferencial, mediante ciertas restricciones, llamadas condiciones iniciales o de la frontera, se obtiene la solución particular.

Nota.- En la Solución General de la ecuación diferencial que llamamos no se considera las soluciones escondidas es decir que no están todas las soluciones.

Ejemplos:

1 Verificar que las funciones $y_1 = e^x$, $y_2 = \cosh x$ son soluciones de la ecuación diferencial $y''-y=0$.

Solución

$$y_1 = e^x \Rightarrow y'_1 = e^x \Rightarrow y''_1 = e^x$$

$$y_2 = \cosh x \Rightarrow y'_2 = \operatorname{senh} x \Rightarrow y''_1 = \cosh x$$

Como $y''-y=0 \Rightarrow e^x - e^x = 0$, $y''-y=0 \Rightarrow \cosh x - \cosh x = \theta$

② Verificar que la función $y = \varphi(x) = e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt + e^{x^2}$, es solución de la ecuación diferencial $y' = 2xy = 1$

Solución

$$y = \varphi(x) = e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt + e^{x^2} \Rightarrow y' = \varphi'(x) = 2xe^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt + 1 + 2xe^{x^2}$$

$$y' - 2xy = 2xe^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt + 1 + 2xe^{x^2} - 2x(e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt + e^{x^2})$$

$$= 2xe^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt + 1 + 2xe^{x^2} - 2xe^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt - 2xe^{x^2} = 1 \ , \quad \therefore \ y' - 2xy = 1$$

③ Verificar si la función $J_0(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(t\operatorname{sen}\theta)d\theta$, satisface a la ecuación diferencial $J''_0(t) + \frac{J'_0(t)}{t} + J_0(t) = 0$

Solución

$$J_0(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(t\operatorname{sen}\theta)d\theta \Rightarrow J'_0(t) = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}(t\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta\, d\theta$$

$$J''_0(t) = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(t\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}^2\theta\, d\theta$$

$$J''_0(t) + \frac{J'_0(t)}{t} + J_0(t) = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(t\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}^2\theta\, d\theta$$

$$-\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{sen}(t\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta}{t}d\theta+\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(t\operatorname{sen}\theta)d\theta$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(t\operatorname{sen}\theta)(1-\cos^2\theta)d\theta-\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{sen}(t\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta\ d\theta}{t}$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(t\operatorname{sen}\theta)\cos^2\theta d\theta-\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{sen}(t\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta d\theta}{t} \qquad \textbf{... (1)}$$

Integrando por partes $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(t\operatorname{sen}\theta)\cos^2\theta d\theta$.

$$\begin{cases} u=\cos\theta \\ dv=\cos(t\operatorname{sen}\theta)\cos\theta\ d\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=-\operatorname{sen}\theta\ d\theta \\ v=\dfrac{\operatorname{sen}(t\operatorname{sen}\theta)}{t} \end{cases}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(t\operatorname{sen}\theta)\cos^2\theta\ d\theta=\frac{\cos\theta.\operatorname{sen}(t\operatorname{sen}\theta)}{t}\Big/_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{sen}(t\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta}{t}d\theta$$

$$=(0-0)+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{sen}(t\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta}{t}d\theta$$

Luego $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(t\operatorname{sen}\theta)\cos^2\theta\ d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{sen}(t\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta}{t}d\theta$ **... (2)**

reemplazando (2) en (1) se tiene:

$$J_0''(t)+\frac{J_0'(t)}{t}+J_0(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{sen}(t\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta}{t}d\theta-\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{sen}(t\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta\ d\theta}{t}=0$$

$$\therefore\quad J_0''(t)+\frac{J_0'(t)}{t}+J_0(t)=0$$

4. Dada la función $F(x)=\int_0^{\infty}e^{-x\cosh\theta}d\theta$, $x>0$, verificar que F satisface a la ecuación diferencial. $xF''(x)+F'(x)-xF(x)=0$.

Solución

$$F(x)=\int_0^{\infty} e^{-x\cosh\theta}d\theta \Rightarrow F'(x)=-\int_0^{\infty} e^{-x\cosh\theta}\cosh\theta\, d\theta$$

$$F''(x)=\int_0^{\infty} e^{-x\cosh\theta}\cosh^2\theta\, d\theta$$

$$xF''(x)+F'(x)-xF(x)=x\int_0^{\infty} e^{-x\cosh\theta}\cosh^2\theta\, d\theta-\int_0^{\infty} e^{-x\cosh\theta}\cosh\theta\, d\theta$$

$$-x\int_0^{\infty} e^{-x\cosh\theta}d\theta$$

$$=x\int_0^{\infty} e^{-x\cosh\theta}(\cosh^2\theta-1)d\theta-\int_0^{\infty} e^{-x\cosh\theta}\cosh\theta\, d\theta$$

$$=x\int_0^{\infty} e^{-x\cosh\theta}\operatorname{senh}^2\theta\, d\theta-\int_0^{\infty} e^{-x\cosh\theta}\cosh\theta\, d\theta \qquad \textbf{... (1)}$$

Integrando por partes $\int_0^{\infty} e^{-x\cosh\theta}\operatorname{senh}^2\theta\, d\theta$

$$\begin{cases} u=\operatorname{senh}\theta \\ dv=e^{-x\cosh\theta}\operatorname{senh}\theta\, d\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\cosh\theta\, d\theta \\ v=-\dfrac{e^{-x\cosh\theta}}{x} \end{cases}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x\cosh\theta}\operatorname{senh}^2\theta\, d\theta=-\frac{\operatorname{senh}\theta.e^{-x\cosh\theta}}{x}\Big/_0^{\infty}+\frac{1}{x}\int_0^{\infty} e^{-x\cosh\theta}\cosh\theta\, d\theta$$

$$=-(0-0)+\frac{1}{x}\int_0^{\infty} e^{-x\cosh\theta}\cosh\theta\, d\theta$$

Luego $\int_0^{\infty} e^{-x\cosh\theta}\operatorname{senh}^2\theta\, d\theta=\frac{1}{x}\int_0^{\infty} e^{-x\cosh\theta}\cosh\theta\, d\theta$ **... (2)**

Reemplazando (2) en (1) se tiene:

$$xF''(x)+F'(x)-xF(x)=x(\frac{1}{x}\int_0^{\infty} e^{-x\cosh\theta}\cosh\theta\, d\theta)-\int_0^{\infty} e^{-x\cosh\theta}\cosh\theta\, d\theta$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-x\cosh\theta}\cosh\theta\; d\theta - \int_0^{\infty} e^{-x\cosh\theta}\cosh\theta\; d\theta = 0$$

$$\therefore \quad xF''(x) + F'(x) - xF(x) = 0$$

EJERCICIOS PROPUESTOS.-

1. Verificar que la función $y = x\int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}dt$, satisface a la ecuación diferencial $x\frac{dy}{dx} = y + x\operatorname{sen} x$.

2. Comprobar que la función $y = e^x \int_0^x e^{t^2} dt + ce^x$, satisface a la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} - y = e^{x+x^2}$

3. Dada la función $H(a) = \int_{-1}^{1} \frac{\cos at\,dt}{\sqrt{1-t^2}}$, $a \neq 0$, probar que H(a) satisface a la ecuación diferencial $H''(a) + \frac{1}{a}H'(a) + H(a) = 0$.

4. Verificar que la función y = arcsen (x y), satisface a la ecuación diferencial $xy' + y = y'\sqrt{1-x^2y^2}$

5. Comprobar que la función $x = y\int_0^x \operatorname{sen} t^2\, dt$, satisface a la ecuación diferencial $y = xy' + y^2\operatorname{sen} x^2$

6. Comprobar que la función $y = C_1x + C_2x\int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}dt$, satisface a la ecuación diferencial $x\operatorname{sen} x.y'' - x\cos x.y' + y\cos x = 0$.

7. Sea $h(x) = \int_1^x \frac{e^z}{z}dz$, x > 0, hallar los valores de "a" tal que la función f definida por $f(x) = \frac{e^{ah(x)}}{x}$ satisface a la ecuación diferencial $x^2y'' + (3x - x^2)y' + (1 - x - 3e^{2x})dy = 0$

Rpta. $a = \pm\sqrt{3}$

(8) Verificar que la función $x = y + \ln y$, satisface a la ecuación diferencial $yy''+y'^3-y'^2=0$.

(9) Dada la función $H(a)=\int_{-1}^{1}\frac{\operatorname{sen} at\,dt}{\sqrt{1-t^2}}$, a ≠ 0 probar que H(a) satisface a la ecuación diferencial $H''(a)+\frac{1}{a}H'(a)+H(a)=0$

(10) Si $x(t)=\int_0^t (t-s)e^{-(t-s)}e^s ds$, calcular el valor de: $x''(t)+2x'(t)+x(t)$

(11) Probar que la función $y=\frac{1}{k}\int_0^x R(t)\operatorname{senh} k(x-t)dt$, satisface a la ecuación diferencial $y''-k^2y=R(x)$

(12) Probar que la función $y=C_1x+C_2x\int_x^2\frac{e^t}{t}dt$, x > 0, satisface a la ecuación diferencial $x^2y''-(x^2+x)y'+(x+1)y=0$.

(13) Dada la función $y=C_1Ln\ x+C_2x\int_x^{\infty}\frac{dt}{Ln(t)}$, x > 1, satisface a la ecuación diferencial $x^2\ln^2 x.y''-x\ln x.y'+(\ln x+1)y=0$.

(14) Demostrar que la función $\phi(x)=x^{-1}e^{\int_0^x u^{-1}e^u du}$ para x > 0, satisface a la ecuación diferencial $x^2\phi''(x)+(3x-x^2)\phi'(x)+(1-x-e^{2x})\phi(x)=0$.

(15) Dada la función $y\ln y=x+\int_0^x e^{t^2}dt$, satisface a la ecuación diferencial y $(1+\ln y)y''+y'^2=2xy.e^{x^2}$.

(16) Demostrar que la función $y=(x+\sqrt{x^2+1})^k$, satisface a la ecuación diferencial $(1+x^2)y''+xy'-k^2y=0$.

(17) Probar que la función x(t) definida por: $x(t)=\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+t^2)^2}$, satisface a la ecuación diferencial $t\,x'+3x(t)+\frac{1}{(1+t^2)^2}=0$

(18) Demostrar que la función $f(a,b)=\int_0^{\infty} e^{-ax^3-bx^2}\,dx$, satisface a la ecuación diferencial

$$3ab\frac{\partial^2 f}{\partial b^2}-3a\frac{\partial f}{\partial b}-2b^2\frac{\partial f}{\partial a}=1$$

(19) Probar que $\frac{y}{x}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(mx^n \operatorname{sen}\theta)\cos^n\theta\,d\theta$, satisface a la ecuación diferencial $y''+m^2n^2x^{2n-2}y=0$

(20) Probar que $y=\int_0^{\infty}\frac{a\operatorname{sen} z+b\cos z}{x+z}\,dz$, satisface a la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2}+y=\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}$$

(21) Verificar que las funciones $y_1=\sqrt{x}$, $y_2=x^{-1/2}$, x > 0, satisfacen a la ecuación diferencial $2x^2y''+3xy'-y=0$.

(22) Verificar que las funciones $y_1=x^2$, $y_2=x^{-2}\ln x$, x > 0, satisfacen a la ecuación diferencial $x^2y''+5xy'+4y=0$.

(23) Demostrar que la función $y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\operatorname{sen}^2\theta+x^2\cos^2\theta)\,d\theta$, satisface a la ecuación diferencial $(1+x)^2y''+(1+x)y'+y=\pi\log(\frac{x+1}{2})$.

(24) Dada la función $u=\int_0^{\pi} e^{qx\cos\theta}(A+B\log(x\operatorname{sen}^2\theta))\,d\theta$ satisface a la ecuación diferencial

$$x\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{du}{dx}-q^2xu=0$$

(25) Demuestre que la función $y=\int_0^{\infty}\frac{e^{-xz}dz}{(1+z^2)^{n+1}}$, satisface a la ecuación diferencial $xy''-2ny'+xy=1$.

(26) Si $H(t)=\int_0^{\infty}e^{-x^2}\cos(tx)dx$, para todo t $\in$ R, probar que $H'(t)+\frac{t}{2}H(t)=0$

(27) Si $G(t)=\int_0^{\infty}e^{-x^2-(\frac{t}{x})^2}dx$, t > 0, probar que: $G'(t)+2G(t)=0$

(28) Verificar si la función $y=C_1e^{b\,\text{arcsen}\,x}+C_2e^{-b\,\text{arcsen}\,x}$ es la solución de la ecuación diferencial $(1-x^2)y''-xy'-b^2y=0$.

(29) Verificar que $(y')^2=[1+(y')^2]^3$ es la solución diferencial de las circunferencias de radio r = 1

(30) Demostrar que: $y=e^{x^2}(C_1+C_2\int e^{-x^2}dx)$ es la solución de la ecuación diferencial $y''-2xy'-2y=0$.

(31) Probar que la función $y(t)=\int_0^t \text{sen}(t-s)f(s)ds$ es una solución en I de $y''(t)+y(t)=f(t)$, que satisface $y(0)=y'(0)=0$, donde f es una función continúa sobre el intervalo I, el cual contiene al cero.

(32) Demostrar que $y(t)=\int_0^t\frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}f(s)ds$ es solución de $y^{(n)}(t)=f(t)$ con $y(0)=y'(0)=...=y^{(n-1)}(0)=0$ donde f es continúa sobre un intervalo I que contiene al cero.

(33) Comprobar que $y=2\int_0^{\sqrt{x}}e^{-s^2}ds+c$ es solución de $\frac{dy}{dx}=\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$

1.7. ORIGEN DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS.-

Las ecuaciones diferenciales aparecen no sólo a partir de las familias de curvas geométricas, sino también del intento de describir en términos matemáticos, problemas físicos en ciencias e ingeniería.

Se puede afirmar que las ecuaciones diferenciales son la piedra angular de disciplinas como la física y la ingeniería eléctrica, e incluso proporcionan un importante instrumento de trabajo en áreas tan diversas como la biología y la economía.

Veremos la obtención de ecuaciones diferenciales que se origina de diversos problemas los cuales pueden ser geométricos, físicos o por primitivas.

1.7.1. ECUACIÓN DIFERENCIAL DE UNA FAMILIA DE CURVAS.-

Si se tiene la ecuación de una familia de curvas, se puede obtener su ecuación diferencial mediante la eliminación de las constantes (o parámetros) y esto se obtiene aislando la constante en un miembro de la ecuación y derivando. También se puede eliminar la constante derivando la ecuación dada, tantas veces como constantes arbitrarias tenga, y se resuelve el sistema formado con la ecuación original.

Ejemplos.-

① Encontrar la ecuación diferencial cuya solución general es $y = C_1 \cos(x + C_2)$.

Solución

$$y = C_1 \cos(x + C_2) \quad \Rightarrow \quad y' = -C_1 \operatorname{sen}(x + C_2)$$

$$y'' = -C_1 \cos(x + C_2)$$

donde $\begin{cases} y'' = -C_1 \cos(x + C_2) \\ y = C_1 \cos(x + C_2) \end{cases} \Rightarrow y'' + y = 0$

② Encontrar la ecuación diferencial cuya solución general es y = A sen x + B cos x

Solución

y= A sen x + B cos x $\Rightarrow y' = A\cos x - B\,\text{sen}\,x$

$$y'' = -A\,\text{sen}\,x - B\cos x$$

de donde $\begin{cases} y'' = -A\,\text{sen}\,x - B\cos x \\ y = A\,\text{sen}\,x + B\cos x \end{cases} \Rightarrow y'' + y = 0$

Otra manera de eliminar las constantes es, considerando el sistema siguiente:

$$\begin{cases} y = -A\,\text{sen}\,x + B\cos x \\ y' = A\cos x - B\,\text{sen}\,x \\ y'' = -A\,\text{sen}\,x - B\cos x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y + A\,\text{sen}\,x + B\cos x = 0 \\ -y' + A\cos x - B\,\text{sen}\,x = 0 \\ -y'' - A\,\text{sen}\,x - B\cos x = 0 \end{cases}$$

Este sistema de ecuaciones en dos incógnitas A y B tienen la solución sí y sólo sí:

$$\begin{vmatrix} -y & \text{sen}\,x & \cos x \\ -y' & \cos x & -\text{sen}\,x \\ -y'' & -\text{sen}\,x & -\cos x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow y'' + y = 0$$

(3) Encontrar la ecuación diferencial cuya solución general es $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-3x}$

Solución

$y = C_1e^{-x} + C_2e^{-3x} \Rightarrow e^x y = C_1 + C_2e^{-2x}$ derivando $e^x y' + e^x y = -2C_2e^{-2x}$

$e^{3x}y' + e^{3x}y = -2C_2 \Rightarrow 3e^{3x}y' + e^{3x}y'' + 3e^{3x}y + e^{3x}y' = 0$

$3y' + y'' + 3y + y' = 0 \Rightarrow y'' + 4y' + 3y = 0$

Otra manera es: $\begin{cases} y = C_1e^{-x} + C_2e^{-3x} \\ y' = -C_1e^{-x} - 3C_2e^{-3x} \\ y'' = C_1e^{-x} + 9C_2e^{-3x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y + C_1e^{-x} + C_2e^{-3x} = 0 \\ -y' - C_1e^{-x} - 3C_2e^{-3x} = 0 \\ -y'' + C_1e^{-x} + 9C_2e^{-3x} = 0 \end{cases}$

el sistema tiene solución sí y solo sí:

$$\begin{vmatrix} -y & e^{-x} & e^{-3x} \\ -y' & -e^{-x} & -3e^{-3x} \\ -y'' & e^{-x} & 9e^{-3x} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow e^{-4x}\begin{vmatrix} -y & 1 & 1 \\ -y' & -1 & -3 \\ -y'' & 1 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

de donde $y'' + 4y' + 3y = 0$

4) Encontrar la ecuación diferencial cuya solución general es $(x-a)^2+y^2=r^2$, circunferencias de radio fijo r, con centro en el eje x, siendo "a" arbitrario.

Solución

$(x-a)^2+y^2=r^2 \Rightarrow x-a=\sqrt{r^2-y^2}$ derivando se tiene:

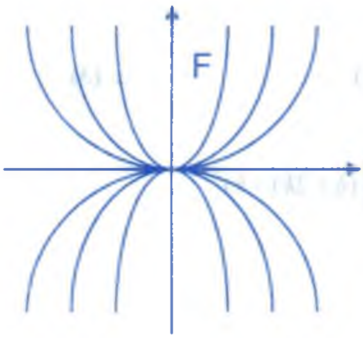
$$1-0=\frac{-yy'}{\sqrt{r^2-y^2}} \Rightarrow \sqrt{r^2-y^2}=-yy'$$

de donde $r^2-y^2=y^2y'^2$ $\therefore$ $(1+y'^2)y^2=r^2$

5) Encontrar la ecuación diferencial de la familia de parábolas las que tienen sus vértices en el origen y sus focos sobre el eje y.

Solución

De acuerdo a los datos del problema, la gráfica de estas parábolas es:



La ecuación de ésta familia de parábolas es:

$$x^2=4py \qquad \textbf{... (1)}$$

donde el vértice es v(0,0) y el foco F(0,p).

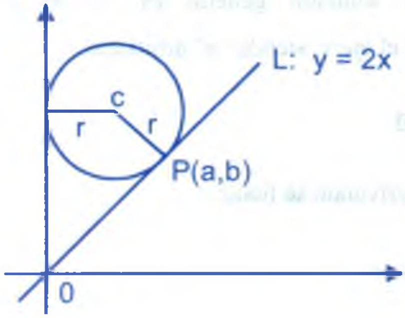
Com el parámetro es P entonces lo eliminamos $\frac{x^2}{y}=4p$, derivando se tiene $\frac{2yx-x^2y'}{y^2}=0$ simplificando

$\therefore$ $xy'=2y$ ecuación diferencial pedida

6) Hallar la ecuación diferencial de la familia de circunferencia en el primer cuadrante. tangentes a las rectas x = 0 e y = 2x

Solución

De los datos del problema. el gráfico es:



Sí c (h,k) el centro $\Rightarrow$ r = h por ser tangente el eje Y.

$$r^2 = d^2(c,p) = d^2(c,p) = (a-h)^2 + (b-k)^2$$

$$r^2 = (a-h)^2 + (b-k)^2$$

pero p(a,b) $\in$ L: y = 2x $\Rightarrow$ b = 2a

Luego $r^2 = (a-h)^2 + (2a-k)^2$ **... (1)**

Además la ecuación de la circunferencia de radio r, centro c (h,k) es:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \qquad \textbf{... (2)}$$

Ahora derivamos la ecuación (2) se tiene; $(x-h)+(y-k)y' = 0$

Como en el punto p (a,b) es tangente a la recta y = 2x

$\Rightarrow y'|_{x=a} = 2$ entonces (a - h) + 2 (2a - k) = 0 $\Rightarrow$ 5a = h + 2k

$$a = \frac{h+2k}{5} \quad \text{y} \quad b = \frac{2}{5}(h+2k) \qquad \textbf{... (3)}$$

Reemplazando (3) en (1) $h^2 = (\frac{h+2k}{5} - h)^2 + (\frac{2}{5}(h+2k) - k)^2$

$h^2 = (\frac{2k-4h}{5})^2 + (\frac{2h-k}{5})^2$, simplificando

$$5h^2 + 20kh - 5k^2 = 0 \Rightarrow h^2 + 4kh - k^2 = 0 \Rightarrow h = (\sqrt{5}-2)k \quad \text{ó} \Rightarrow k = \frac{h}{\sqrt{5}-2}$$

$$(x-h)^2 + (y - \frac{h}{\sqrt{5}-2})^2 = h^2 \qquad \textbf{... (4)}$$

La expresión (4) es la ecuación de la familia de circunferencias, para hallar la ecuación diferencial, eliminamos el parámetro h de la ecuación (4) para esto derivamos:

$2(x-h)+2(y-\frac{h}{\sqrt{5}-2})y'=0$ despejando h tenemos:

$h=\frac{(\sqrt{5}-2)(x+yy')}{\sqrt{5}-2+y'}$ reemplazando en (4)

$$[x-\frac{(\sqrt{5}-2)(x+yy')}{\sqrt{5}-2+y'}]^2+[y-\frac{(\sqrt{5}-2)(x+yy')}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}-2+y')}]=(\frac{(\sqrt{5}-2)(x+yy')}{\sqrt{5}-2+y'})$$

Simplificando se tiene: $(x-(\sqrt{5}-2)y)^2(1+y'^2)=[(\sqrt{5}-2)(x+yy')]^2$

1.7.2. ECUACIONES DIFERENCIALES DE PROBLEMAS FÍSICOS.-

Las ecuaciones diferenciales de problemas físicos provienen de diferentes fuentes, tales como la mecánica, eléctrica, química, etc.

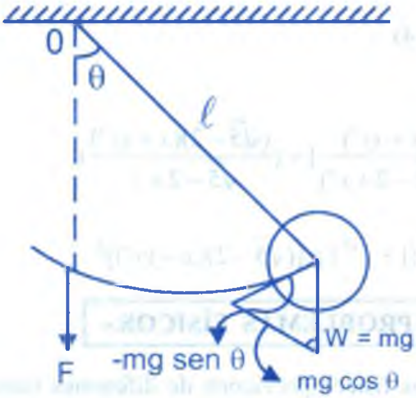
Ejemplos:

1 Se sabe que los objetos en caída libre cercanos a la superficie de la tierra tiene una aceleración constante g. Ahora bien, la aceleración es la derivada de la velocidad y esta a su vez, es la derivada de la distancia S. Luego, si se toma como dirección positiva la dirección vertical hacia arriba, tenemos que la fórmula. $\frac{d^2s}{dt^2}=-g$ es la ecuación diferencial de la distancia vertical recorrida por el cuerpo que cae. Se usa el signo menos puesto que el peso del cuerpo es una fuerza de dirección opuesta a la dirección positiva.

2 Una masa m de peso w se suspende del extremo de una varilla de longitud constante L. Suponiendo que el movimiento se realiza en un plano vertical, se trata de determinar el ángulo de desplazamiento θ, medido con respecto a la vertical, en función del tiempo t, (se considera θ > 0° a la derecha de op y θ < 0° a la izquierda de op). Recuérdese que el arco s de un círculo de radio L se relaciona con el ángulo del centro θ por la fórmula s = L θ.

Por lo tanto, la aceleración angular es: $a=\frac{d^2s}{dt^2}=L\frac{d^2\theta}{dt^2}$

por la segunda ley de Newton: $F = ma = mL\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$



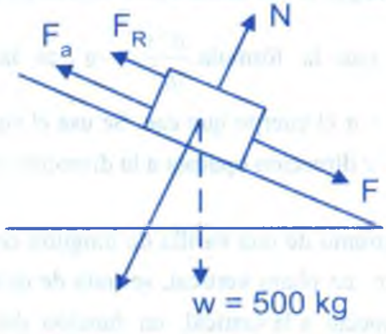
En la figura vemos que la componente tangencial de la fuerza debida al peso w es mg sen θ, si no se tiene en cuenta la masa de la varilla y se igualan las dos expresiones de la fuerza tangencial se obtiene:

$$mL\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\,\text{sen}\,\theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\,\text{sen}\,\theta = 0$$

(3) Una lancha que pesa 500kg. se desliza por un plano inclinado a 5°. Si la fuerza de rozamiento que se opone al movimiento es 20kg. y la resistencia de aire expresado en kilogramos equivale a 0.05 veces la velocidad en centímetros por segundo, hallar la ecuación del movimiento.

Solución



En la figura mostramos a la lancha sobre un plano inclinado; tomemos los siguientes datos:

F = Componente de peso en la dirección del movimiento.

F_R = Fuerza de rozamiento

F_a = Resistencia del aire

De acuerdo a la segunda ley de Newton se tiene:

Suma de fuerzas en la dirección del movimiento = (masa) x (aceleración)

Luego se tiene: $F - F_R - F_a = m.a$ **... (1)**

donde $F = 500\text{ sen }5° = 43.6$, $F_R = 20$

Fa = 0.05v, $m = \frac{500}{981}$ siendo v = la velocidad, a = aceleración, m = la masa.

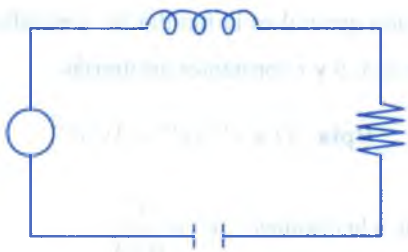
ahora reemplazamos en la ecuación (1)

$$43.6 - 20 - 0.05v = \frac{500}{981}a \quad \text{entonces} \quad 23.6 - 0.05v = \frac{500}{981}a \quad \text{... (2)}$$

como $a = \frac{dv}{dt}$ que al reemplazar en (2)

se tiene: $\frac{500}{981}.\frac{dv}{dt} + 0.05v = 23.6$ que es la ecuación diferencial del movimiento.

(4) Considere el circuito simple conectado en serie que se muestra en la figura y que consta de un inductor, un resistor y un capacitor. La segunda Ley de Kirchoff dice que la suma de las caídas de voltaje a través de cada uno de los componentes del circuito es igual a la tensión E(t) aplicada. Si llamamos q(t) a la carga del capacitor en un instante cualquiera, entonces la corriente i(t) está dada por $i = \frac{dq}{dt}$, ahora bien, se sabe que las caídas del voltaje son:



En un inductor $= L\frac{di}{dt} = L\frac{d^2q}{dt^2}$

En un capacitor $= \frac{1}{c}q$

En un resistor $= iR = R\frac{dq}{dt}$

en donde L, C y R son constantes llamadas inductancia, capacitancia y resistencia respectivamente.

Para determinar q(t) debemos por lo tanto, resolver la ecuación diferencial de segundo orden que se obtiene mediante la Ley de Kirchoff, es decir:

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{c}q = E(t)$$

(5) Según la Ley de enfriamiento de Newton, la velocidad a la que se enfría una sustancia al aire libre es proporcional a la diferencia entre la temperatura de la sustancia y la del aire. Obtener la ecuación diferencial respectiva.

Solución

Consideremos los siguientes datos:

T = Temperatura de la sustancia en el instante t

Ta = Temperatura del aire

$\frac{dT}{dt}$ = La velocidad a la que se enfría una sustancia

de la condición del problema se tiene: $\frac{dT}{dt}=-k(T-T_a)$, $k>0$

que es la ecuación diferencial pedida donde k es la constante de proporcionalidad.

El signo negativo se debe a que la temperatura de la sustancia disminuye al transcurrir el tiempo.

EJERCICIOS PROPUESTOS.-

(1) Encontrar la ecuación diferencial cuya solución general es la familia de circunferencias: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ en el plano xy, siendo a, b y r constantes arbitrarias.

Rpta. $(1+y'^2)y'''=3y'y''^2$

(2) Hallar la ecuación diferencial correspondiente a la cisoides, $y^2=\frac{x^3}{a-x}$

Rpta. $2x^3y'=y(y^2+3x^2)$

(3) Hallar la ecuación diferencial correspondiente a las rectas con pendientes y la intercepción con el eje x iguales. **Rpta.** $y'^2=xy'-y$

(4) Hallar la ecuación diferencial de la familia de rectas cuyas pendientes y sus intercepciones con el eje Y son iguales. **Rpta.** ydx - (x + 1) dy = 6

(5) Hallar la ecuación diferencial de la familia de rectas cuya suma algebraica de las intercepciones con los ejes coordenados es igual a k. **Rpta.** $(xy'-y)(y'-1)+ky'=0$

(6) Hallar la ecuación diferencial correspondiente a las estrofoides $y^2=\dfrac{x^2(a+x)}{a-x}$

Rpta. $(x^4-4x^2y^2-y^4)dx+4x^3y\,dy=0$

(7) Encontrar la ecuación diferencial cuya solución general es la familia de circunferencias $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, de radio fijo r en el plano xy siendo a y b constantes arbitrarias.

Rpta. $(1+y'^2)^3=r^2y''^2$

(8) Encontrar la ecuación diferencial cuya solución general es dada.

a) $y=x^2+C_1e^x+C_2e^{-2x}$ **Rpta.** $y''+y'-2y=2(1+x-x^2)$

b) $y=C_1x+C_2e^{-x}$ **Rpta.** $(x+1)y''+xy'-y=0$

c) $y=x+C_1e^{-x}+C_2e^{-3x}$ **Rpta.** $y''+4y'+3y=4+3x$

d) $y=C_1e^{2x}\cos 3x+C_2e^{2x}\operatorname{sen} 3x$ **Rpta.** $y''-4y'+13y=0$

e) $y=Ae^{2x}+Bxe^{2x}$ **Rpta.** $y''-4y'+4y=0$

f) $y=e^{x^2}(C_1+C_2\int e^{-x^2}dx)$, **Rpta.** $y''-2xy'-2y=0$

g) $y=Ae^{\frac{1}{\sqrt{x}}}+Be^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}$ **Rpta.** $4x^3y''+6x^2y'-y=0$

h) $y=C_1x.\int\dfrac{e^{x^{\frac{2}{3}}}}{x^2}dx+C_2x$ **Rpta.** $y''-x^2y'+xy=0$

i) (ax + b)(ay + b) = c, a, b, c constantes arbitrarias. **Rpta.** $(x-y)y''+2y'+2y'^2=0$

j) $y = C_1 e^{ax}\cos bx + C_2 e^{ax}\,\text{sen}\,bx$, a, b parámetro. **Rpta.** $y''-2ay'+(a^2+b^2)y = 0$

k) y = A (cos x + x sen x) + B (sen x - x cos x), A, B constantes

Rpta. $xy''-2y'+xy = 0$

l) x = A sen (ωt + β), ω un parámetro, no debe ser eliminado, **Rpta.** $\dfrac{d^2x}{dt^2}+\omega^2 x = 0$

m) $y = Ae^{x+y} + Be^{-x+y}$, A y B constantes arbitrarias **Rpta.** $(y-1)y''+y = (y-2)y'^2$

n) $y = A\sqrt{1+x^2} + Bx$ **Rpta.** $(1+x^2)y''+xy'-y = 0$

(9) Encontrar la ecuación diferencial que describa la familia de circunferencias que pasan por el origen. **Rpta.** $(x^2+y^2)y''+2[y'^2+1](y-xy') = 0$

(10) Encontrar la ecuación diferencial de la familia de rectas que pasan por el origen.

Rpta. $xy'-y = 0$

(11) Determinar la ecuación diferencial de la familia de circunferencias que pasan por el origen y cuyos centros están en el eje X. **Rpta.** $2xy\,y' = y^2 - x^2$

(12) Halle la ecuación diferencial de la familia de circunferencias cuyos centros están en el eje Y.

(13) Encontrar la ecuación diferencial de la familia de parábolas con vértice en el origen y cuyos focos están en el eje X. **Rpta.** $2xy' = y$

(14) Halle la ecuación diferencial de la familia de tangentes a la parábola $y^2 = 2x$

(15) Hallar la ecuación diferencial de la familia de circunferencias que tienen su centro sobre el eje X. **Rpta.** $y'^2+yy''+1 = 0$

(16) Hallar la ecuación diferencial de la familia de parábolas con el eje focal paralelo al eje X.

Rpta. $y'^2\,y''' = 3y'\,y''^2$

(17) Obtenga la ecuación diferencial de la familia de parábolas cuyos vértices y focos están en el eje X. **Rpta.** $yy''+y'^2 = 0$

(18) Obtenga la ecuación diferencial de la familia de circunferencias que pasan por (0,-3) y (0,3), y cuyos centros están en el eje X.

(19) Hallar la ecuación diferencial de todas las circunferencias que pasan por los puntos (2,2) y (-2,2). **Rpta.** $(x^2-y^2-2xy-8)\frac{dy}{dx}-(x^2-y^2-2xy+8)=0$

(20) Hallar la ecuación diferencial de todas las líneas tangentes a la curva $y^2=-x$.

(21) Hallar la ecuación diferencial de todas las circunferencias tangentes a la recta y = -x

Rpta. $(x-y)y''[2-(x-y)y'']=2y'[1+y'^2]^2$

(22) Por un punto p(x,y) de una curva que pasa por el origen, se trazan dos rectas paralelas a los ejes coordenados, las que determinan un rectángulo con dichos ejes. Hallar la ecuación diferencial de la curva, de modo que ésta divida al rectángulo formado en dos regiones, donde el área de la parte derecha sea el triple del área de la parte izquierda.

Rpta. $3xy'=y$ 1

(23) Hallar la ecuación diferencial de todas las tangentes a la parábolas $x^2=2y+1$.

Rpta. $2xy'-y'^2-2y-1=0$

(24) Hallar la ecuación diferencial de todas las normales de la parábola $y^2=x$

Rpta. $y'(4x-y'^2)=4y+2y'$

(25) Determinar la ecuación diferencial de todas las curvas planas y = f(x) tal que la ley que incide en ellas, partiendo de una fuente puntual fija, es reflejada hacia un segundo punto fijo. Suponer que los puntos fijos son (a,0) y (-a, 0). **Rpta.** $xyy'^2\ t(x^2-y^2-a^2)y'=xy$

(26) Hallar la ecuación diferencial de la familia de curvas que satisfacen la siguiente propiedad: "El área de la región encerrada por la curva, los ejes coordenados x e y, y la coordenada del punto p(x,y) de la curva es igual a (x^2+y^2)" **Rpta.** $2yy'+2x-y=0$

(27) Hallar la ecuación diferencial de la familia de curvas que cumple con la siguiente propiedad: "Si por un punto cualquiera de una curva de la familia se trazan las rectas tangente y normal a ella, el área del triángulo formado por dichas rectas con el eje y es igual a $\frac{x^2y_0}{2}$, donde y_0 es la coordenada del punto en que la tangente corta el eje y.

Rpta. $y'^2(1+x)-yy'+1=0$

(28) Hallar la ecuación diferencial de la familia de curvas que satisface la condición siguiente: "Si por el punto p(x,y) de una curva, en el primer cuadrante, se trazan las rectas tangente y normal a ella, siendo T el punto de intersección de la tangente con el eje 0X y N el punto de intersección de la normal con el eje 0Y, entonces el área del triángulo TON es igual al $\frac{xy}{2}$, donde 0 es el origen de coordenadas. **Rpta.** $(x^2-y^2)y'=xy$

(29) Hallar la ecuación diferencial de la familia de curvas que satisfacen la siguiente condición: "Si por un punto cualquiera p(x,y) de una curva de la familia se trazan las rectas tangente y normal a la curva, y si además A es el punto de intersección de la recta normal con la recta y = x y B es la intersección de la recta tangente con la recta y = x entonces el segmento $\overline{AB}$ tiene longitud $\sqrt{2}$. **Rpta.** $(y'^2-1)^2=(x-y)^2(y'^2+1)^2$

(30) Hallar la ecuación diferencial perteneciente a las cardioides r = a(1 - sen θ)

Rpta. $(1-\operatorname{sen}\theta)\,dr+r\cos\theta\, d\theta=0$

(31) Hallar la ecuación diferencial perteneciente a la estrofoides, r = a (sec θ + tg θ).

Rpta. $\frac{dr}{d\theta}=r\sec\theta$

(32) Encontrar la ecuación diferencial de las siguientes soluciones generales:

a) $y = A\dfrac{\operatorname{senh} x}{x} + B\dfrac{\cosh x}{x}$, A, B constantes.

b) $\operatorname{tgh}(\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{2}) = \sqrt{3}\operatorname{tg}(\dfrac{\sqrt{3}}{4}x + C)$, C constante.

c) $\pm(x+c) = \sqrt{k^2 - y^2} - k\,\text{arc.}\cosh(\dfrac{k}{y})$, k fijo y c arbitrario

d). $y = a\cosh(\dfrac{x-b}{a})$, a, b constantes arbitrarios.

e) $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{2x} + C_3xe^{2x}$, C_1, C_2, C_3 constantes.

(33) Encontrar la ecuación diferencial de la familia de circunferencias de radio 1, con centros en la bisectriz del primer y tercer cuadrante.

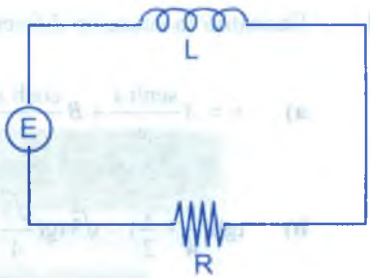
Rpta. $(x-y)^2(1+y')^2 = (1+y')^2$

(34) Hallar la ecuación diferencial de todas las parábolas con eje paralelo al eje y, y tangente a la recta y = x . **Rpta.** $y'^2 = 2yy'' - 2xy'' + 2y' - 1$

(35) Hallar la ecuación diferencial de las curvas tales que la tangente en un punto cualquiera M forme un ángulo θ con el eje 0X y que verifique $\theta - \phi = \dfrac{\pi}{4}$ siendo ϕ el ángulo que OM forme con el eje OX.

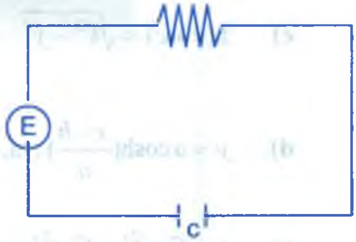
(36) En la práctica, un cuerpo B de masa m que va cayendo (tal como un hombre que desciende en paracaídas) encuentra una resistencia del aire proporcional a su velocidad instantánea v(t). Usar la segunda ley de Newton para encontrar la ecuación diferencial de la velocidad del cuerpo en un instante cualquiera. **Rpta.** $\dfrac{dv}{dt} + \dfrac{k}{m}v = g$

(37) Un circuito en serie contiene un resistor y un inductor, tal como se muestra en la figura. Determine la ecuación diferencial de la corriente i(t) si la resistencia es R, la inductancia es L y la tensión aplicada es E(t).



Rpta. $L\frac{di}{dt}+Ri=E(t)$

(38) Un circuito en serie contiene un resistor y un capacitor, tal como se muestra en la figura, encuentre la ecuación diferencial para la carga q(t) del capacitor si la resistencia es R, la capacitancia es C y el voltaje aplicado es E(t).



(39) ¿Cuál es la ecuación diferencial de la velocidad v de un cuerpo de masa m que cae verticalmente a través de un medio que opone una resistencia proporcional al cuadrado de la velocidad instantánea? **Rpta.** $\frac{dv}{dt}+\frac{k}{m}v^2=g$

CAPÍTULO II

2. ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN Y DE PRIMER GRADO

A las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden y de primer grado, representaremos en la forma:

$$\boxed{F(x,y,\frac{dy}{dx})=0} \qquad \ldots (1)$$

En la ecuación (1), F nos indica la relación entre la variable independiente x, la variable dependiente y, y su derivada $\frac{dy}{dx}$

De la ecuación diferencial $F(x,y,\frac{dy}{dx})=0$, despejamos la derivada $\frac{dy}{dx}$; es decir en la forma siguiente:

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=g(x,y)}$$

2.1. ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE VARIABLE SEPARABLE.-

Si de la ecuación diferencial ordinaria de primer orden y primer grado que es:

$\frac{dy}{dx}=g(x,y)$, podemos expresar en la forma:

$$\boxed{M(x)\,dx+N(y)\,dy=0} \qquad \ldots (2)$$

donde M es una función sólo de x y N es una función sólo de y, entonces a la ecuación (2) se le denomina **"ecuación diferencial ordinaria de variable separable"** y la solución general se obtiene por integración directa. es decir:

$$\boxed{\int M(x)dx + \int N(y)dy = C}$$

donde C es la constante de integración.

Ejemplos: Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

1) $(y^2 + xy^2)\dfrac{dy}{dx} + x^2 - x^2 y = 0$

Solución

A la ecuación diferencial dada expresaremos en la forma:

$y^2(x+1)dy + x^2(1-y)dx = 0$, separando las variables

$\dfrac{y^2}{1-y}dy + \dfrac{x^2 dx}{1+x} = 0$, integrando se tiene: $\displaystyle\int \frac{y^2}{1-y}dy + \int \frac{x^2 dx}{1+x} = C$, de donde tenemos:

$$\therefore \quad (x+y).(x-y-2) + 2\ln\left|\frac{1+x}{1-y}\right| = k$$

2) $x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2}\, y' = 0$

Solución

A la ecuación diferencial expresaremos así:

$x\sqrt{1+y^2}\,dx + y\sqrt{1+x^2}\,dy = 0$, separando las variables

$\dfrac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} + \dfrac{y}{\sqrt{1+y^2}}dy = 0$, integrando se tiene: $\displaystyle\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} + \int \frac{ydy}{\sqrt{1+y^2}} = C$,

donde tenemos $\therefore \quad \sqrt{1+x^2} + y\sqrt{1+y^2} = C$

3) $e^x \sec y\, dx + (1+e^x)\sec y \operatorname{tg} y\, dy = 0$, y = 60° si x = 3

Solución

$e^x \sec y\,dx + (1+e^x)\sec y \operatorname{tg} y\,dy = 0$, separando la variable.

$\frac{e^x dx}{1+e^x} + \operatorname{tg} y dy = 0$, integrando. $\int \frac{e^x dx}{1+e^x} + \int \operatorname{tg} y dy = C$, de donde se tiene:

$\ln(\frac{1+e^x}{\cos y}) = \ln k \Rightarrow 1+e^x = k\cos y$

Cuando x = 3, y = 60° $\Rightarrow 1+e^3 = \frac{k}{2} \Rightarrow k = 2(1+e^3)$

$$\therefore \quad 1+e^x = 2(1+e^3)\cos y$$

4 y ln y dx + x dy = 0, $y\big|_{x=1} = 1$

Solución

y ln y dx + x dy = 0, separando las variables se tiene:

$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y\ln y} = 0$, integrando ambos miembros.

$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dy}{y\ln y} = C$, de donde tenemos:

ln x + ln(ln y) = C $\Rightarrow$ ln(x.ln y) = C, Levantando el logaritmo: x ln y = k

Cuando x = 1, y = 1 $\Rightarrow$ ln 1 = k $\Rightarrow$ k = 0

x ln y = 0 $\Rightarrow$ ln y = 0 $\Rightarrow$ $\therefore$ y = 1

5 $(xy^2 - y^2 + x - 1)dx + (x^2y - 2xy + x^2 + 2y - 2x + 2)dy = 0$

Solución

$(xy^2 - y^2 + x - 1)dx + (x^2y - 2xy + x^2 + 2y - 2x + 2)dy = 0$, agrupando

$[y^2(x-1) + (x-1)]dx + [x^2(y+1) - 2x(y+1) + 2(y+1)]dy = 0$

$(y^2+1)(x-1)dx+(x^2-2x+2)(y+1)dy=0$, separando las variables

$\frac{(x-1)dx}{x^2-2x+2}+\frac{(y+1)dy}{y^2+1}=0$, integrando ambos miembros

$\int\frac{(x-1)dx}{x^2-2x+2}+\int\frac{y+1}{y^2+1}dy=C$, de donde tenemos:

$\frac{1}{2}\ln|x^2-2x+2|+\frac{1}{2}\ln|y^2+1|+arc.\text{tg}\,y=C$,

$\ln((x^2-2x+2)(y^2+1))+2\,\text{arctg}\,y=C$.

$\ln((x^2-2x+2)(y^2+1))=C-\text{arctg}\,y$, levantando el logaritmo

$(x^2-2x+2)(y^2+1)=ke^{-2\,\text{arctg}\,y}$, de donde se tiene: $\therefore\ (x^2-2x+2)(y^2+1)e^{2\,\text{tg}\,y}=k$

EJERCICIOS PROPUESTOS.-

I. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales.

1) $\text{tg}\,x.\text{sen}^2\,y.dx+\cos^2 x.c\,\text{tg}\,y.dy=0$ **Rpta.** $c\,\text{tg}^2\,y=\text{tg}^2\,x+C$

2) $xy'-y=y^3$ **Rpta.** $x=\frac{cy}{\sqrt{1+y^2}}$

3) $\sqrt{1+x^3}\,\frac{dy}{dx}=x^2y+x^2$ **Rpta.** $2\sqrt{1+x^3}=3\ln(y+1)+C$

4) $e^{2x-y}dx+e^{y-2x}dy=0$ **Rpta.** $e^{4x}+2e^{2y}=C$

5) $(x^2y-x^2+y-1)dx+(xy+2x-3y-6)dy=0$

Rpta. $\frac{x^2}{2}+3x+y+\ln(x-3)^{10}(y-1)^3=C$

6) $e^{x+y}\,\text{sen}\,xdx+(2y+1)e^{-y^2}dy=0$ **Rpta.** $e^x(\text{sen}\,x-\cos x)-2e^{-y^2-y}=C$

(7) $3e^x \operatorname{tg} y\, dx + (1-e^x)\sec^2 y\, dy = 0$ **Rpta.** $\operatorname{tg} y = C(1-e^x)^3$

(8) $e^y(\frac{dy}{dx}+1) = 1$ **Rpta.** $\ln(e^y - 1) = C - x$

(9) $y' = 1 + x + y^2 + xy^2$ **Rpta.** $arc.\operatorname{tg} - x - \frac{x^2}{2} = C$

(10) $y - xy' = a(1 + x^2 y)$ **Rpta.** $y = \frac{a+cx}{1+ax}$

(11) $(1+y^2)dx = (y - \sqrt{1+y^2})(1+x^2)^{3/2} dy$ **Rpta.** $\ln\left|\frac{\sqrt{1+y^2}}{y+\sqrt{1+y^2}}\right| = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C$

(12) $(1-y)e^y y' + \frac{y^2}{x\ln x} = 0$ **Rpta.** $C + \frac{e^y}{y} = \ln(\ln x)$

(13) $e^{-y}(1+y') = 1$ **Rpta.** $e^x = C(1-e^{-y})$

(14) $e^{x-y}dx + e^{y-x}dy = 0$ **Rpta.** $e^{2x} + e^{2y} = C$

(15) $(1+y+y^2)dx + x(x^2-4)dy = 0$, **Rpta.** $\frac{1}{8}\ln(\frac{x^2-4}{x^2}) + \frac{2}{\sqrt{3}} arc.\operatorname{tg}(\frac{2y+1}{\sqrt{3}}) = C$

(16) $y' = 10^{x+y}$, $a > 0$, $a \neq 1$ **Rpta.** $10^x + 10^{-y} = C$

(17) $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y(1+x^3)}$ **Rpta.** $3y^2 - 2\ln(1+x^3) = C$

(18) $\frac{dy}{dx} = \frac{x-e^{-x}}{y+e^y}$ **Rpta.** $y^2 - x^2 + 2(e^y - e^{-x}) = C$

(19) $\frac{dy}{dx} = \frac{ax+b}{cx+d}$, a,b,c,d $\in$ R **Rpta.** $y = \frac{ax}{c} + \frac{bc-ad}{c^2}\ln|cx+d| + k$

(20) $\frac{dy}{dx}=\frac{ay+b}{cy+d}$, a,b,c,d $\in$ R **Rpta.** $x=\frac{cy}{a}+\frac{ad-bc}{a^2}\ln|ay+b|+k$

(21) $y(x^3dy+y^3dx)=x^3dy$ **Rpta.** $3x^2y-2x^2+3y^2=kx^2y^3$

(22) $(xy+x)dx=(x^2y^2+x^2+y^2+1)dy$ **Rpta.** $\ln(x^2+1)=y^2-2y+4\ln|k(y+1)|$

(23) $x^3e^{2x^2+2y^2}dx-y^3e^{-x^2-2y^2}dy=0$, **Rpta.** $25(3x^2-1)e^{3x^2}+9(5y^2+1)e^{-5y^2}=C$

(24) $xdy+\sqrt{1+y^2}\,dx=0$ **Rpta.** $x(y+\sqrt{1+y^2})=k$

(25) $\frac{dy}{dx}=\frac{(y-1)(x-2)(y+3)}{(x-1)(y-2)(x+3)}$ **Rpta.** $(x-1)(y+5)^5=k(y-1)(x+3)^5$

(26) $x^2y^2-4x^2=(x^2y^2-9y^2)\frac{dy}{dx}$ **Rpta.** $x+\frac{9}{4}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|=y+\ln\left|\frac{y-2}{y+2}\right|+k$

(27) $(x-y^2x)dx+(y-x^2y)dy=0$ **Rpta.** $(x^2-1)(y^2-1)=k$

(28) $y^2(1-x^2)^{\frac{1}{2}}dy=\operatorname{arcsen}x\,dx$ en el intervalo -1 < x < 1 **Rpta.** $2y^3-3(\operatorname{arcsen}x)^2=C$

(29) $xy'=\sqrt{1-y^2}$ **Rpta.** y = sen (ln |x| + C)

(30) $xydx+(x^2+1)e^{y^2}dy=0$ **Rpta.** $\ln\sqrt{x^2+1}+\int_a^x\frac{e^{t^2}}{t}dt=C$

(31) (x + 1)(y - 1)dx + (x - 1)(y + 1) dy = 0 **Rpta.** $(x-1)(y-1)=ke^{\frac{-x+y}{2}}$

(32) $(e^y+1)\cos x\,dx+e^y(\operatorname{sen}x+1)dy=0$ **Rpta.** $(\operatorname{sen}x+1)(e^y+1)=k$

(33) $xy+y^2\frac{dy}{dx}=6x$ **Rpta.** $x^2+y^2+12y+72\ln|6-y|=C$

(34) y ln x . ln y. dx + dy = 0 **Rpta.** ln (ln y) + x ln x – x = C

(35) $(xy + 2x + y + 2)\,dx + (x^2 + 2x)\,dy = 0$ **Rpta.** $\sqrt{x^2+2x}\,(y+2) = k$

(36) $e^y(1+x^2)dy - 2x(1+e^y)dx = 0$ **Rpta.** $1+e^y = C(1+x^2)$

(37) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1+\cos x}{\operatorname{sen}^2 y}$ **Rpta.** $2y - \operatorname{sen}^2 y - x - \operatorname{sen} x = C$

(38) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2-xy-x+y}{xy-y^2}$ **Rpta.** $y^2 = (x-1)^2 + k$

(39) $xdx - \sqrt{1-x^4}\,dy = x^2\sqrt{1+x^4}\,dy$ **Rpta.** $y = -\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1+x^2}} + C$

(40) $(1+y^2)dx = (y - \sqrt{1+y^2})(1+x^2)^{3/2}dy$ **Rpta.** $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \ln\left|\dfrac{C\sqrt{1+y^2}}{1+\sqrt{1+y^2}}\right|$

(41) $yy' = \operatorname{sen} x . e^{x+2y}$ **Rpta.** $2y = 2e^{x+2y}(\cos x - \operatorname{sen} x) + k$

(42) $(4x+xy^2)dx + (y+x^2y)dy = 0$ **Rpta.** $(1+x^2)(4+y^2) = k$

(43) $(x + x\sqrt{y})dy + y\sqrt{y}\,dx = 0$ **Rpta.** $-\dfrac{2}{\sqrt{y}} + \ln xy = c$

(44) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2y-y}{y+1}$; $y(3) = 1$ **Rpta.** $x^3 - 3x - 3y - 3\ln|y| = 21$

(45) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x^2-6x^2y^2}{y-x^3y}$; $y(3) = 1$ **Rpta.** $(x^3-1)^4 = k(2y^2-1)$

II. Encontrar la solución particular de la ecuación diferencial, mediante las condiciones dadas:

(1) $\operatorname{sen} 2x \,.\, dx + \cos 3y\, dy = 0$, $y(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{3}$ **Rpta.** $2 \operatorname{sen} 3y - 3\cos 2x = 3$

(2) $y' - 2y.c\,\text{tg}\,x = 0$, $y(\frac{\pi}{2}) = 2$ **Rpta.** $y = 2\,\text{sen}^2 x$

(3) $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} - \frac{x}{1+y}$, y(0) = 1 **Rpta.** $3y^2 + 2y^3 = 3x^2 + 5$

(4) $x(y^6+1)dx + y^2(x^4+1)dy = 0$, y(0) = 1 **Rpta.** $3arc.\text{tg}\,x^2 + 2arc.\text{tg}\,y^3 = \frac{\pi}{2}$

(5) $\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{1+\text{sen}\,y}} + y' = 0$, $y(\frac{\pi}{4}) = 0$ **Rpta.** $\sqrt{2}\,\text{sen}\,x + \text{sen}\,y - \cos y = 0$

(6) $y^2y' - x^2 = 0$, y (-2) = -2, **Rpta.** y = x

(7) $x^3dy + xydx = x^2dy + 2y\,dx$, y (2) = e **Rpta.** $xy = 2(x-1)e^{\frac{2}{x}}$

(8) $\frac{dy}{dx} = xy^3(1+x^2)^{-1/2}$, y(0) = 1 **Rpta.** $y = (3 - 2\sqrt{1+x^2})^{-1/2}$

(9) $y'\,\text{sen}\,x = y\ln y$, $y(\frac{\pi}{2}) = e$ **Rpta.** $y = e^{\text{tg}\frac{x}{2}}$

(10) $(1+e^x)y.y' = e^x$, y(0) = 1 **Rpta.** $2e^{y^2/2} = \sqrt{e}(1+e^x)$

(11) $(xy^2 + x)dx + (x^2y - y)dy = 0$, y (0) = 1 **Rpta.** $1 + y^2 = \frac{2}{1-x^2}$

(12) $(4x + xy^2)dx + (y + x^2y)dy = 0$, y (1) = 2 **Rpta.** $(1+x^2)(4+y^2) = 16$

(13) $x\,dx + ye^{-x}dy = 0$, y (0) = 1 **Rpta.** $y = [2(1-x)e^x - 1]^{\frac{1}{2}}$

(14) $ye^{y^2}y' = x - 1$, $y(2) = 0$ **Rpta.** $e^{y^2} = x^2 - 2x + 1$

(15) $y' + 6y.\text{tg}\,2x = 0$, y (0) = -2, **Rpta.** $y = -2\cos^3 2x$

16) $y'x\ln x - y = 0$, y (2) = ln 4 **Rpta.** y = 2 ln x

17) $(1+e^x)yy' = e^y$, y (0) = 0 **Rpta.** $(1+y)e^{-y} = \ln(\frac{1+e^x}{2}) + 1 - x$

18) $2ydx + x^2dy = -dx$, $y(\frac{1}{\ln^2 x}) = \frac{7}{2}$ **Rpta.** $2y + 1 = 2e^{\frac{2}{x}}$

19) $\frac{dr}{d\theta} = \frac{\operatorname{sen}\theta + e^{2r}\operatorname{sen}\theta}{3e^r + e^r\cos\theta}$, $r(\frac{\pi}{2}) = 0$ **Rpta.** $2\operatorname{arctg}(e^r) + \operatorname{arctg}(\cos\theta) = \frac{\pi}{2}$

20) $4dy + y\,dx = x^2dy$, y (4) = -1, **Rpta.** $(2+x)y^4 - 3x + 6 = 0$

21) dy = x (2y dx – x dy), y (1) = 4 **Rpta.** $y = 2x^2 + 2$

22) Hallar y si:

a) $\int_a^x ydx = K(y^3 - b^3)$ **Rpta.** $3Ky^2 - 2x = 3Kb^2 - 2a$

b) $\int_a^x ydx = K(y - b)$ **Rpta.** $y = e^{\frac{(x-a)}{K}}$

c) $\int_a^x ydx = K(y^2 - b^2)$ **Rpta.** $y = (2K)^{-1}(x - a \pm 2Kb)$

d) $\int_a^x y^2dx = K(y - b)$ **Rpta.** $y(x - a - \frac{K}{b}) + K = 0$

e) $\int_a^x y^2dx = K(y^2 - b^2)$ **Rpta.** $x - a = 2K\ln(\frac{y}{b})$

f) $\int_a^x x^2dy = x^3(y - b)$ **Rpta.** $(2y - 3b)x^2 = -a^2b$

g) $\int_a^x x^6y^2dx = x^7(y^2 - b^2)$ **Rpta.** $(6y^2 - 7b^2)x^6 + a^6b^2 = 0$

2.2. ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS REDUCIBLES A VARIABLE SEPARABLE.-

Las ecuaciones diferenciales de la forma siguiente:

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=f(ax+by+c)} \qquad \ldots (1)$$

donde a, b y c son constantes, no son de variable separable.

Para resolver estas ecuaciones diferenciales, se transforma en una ecuación diferencial de variable separable, mediante la sustitución; z = ax + by + c, de donde $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{b}(\frac{dz}{dx}-a)$, que al reemplazar en la ecuación (1), se obtiene una nueva ecuación diferencial, que es de variable separable.

es decir: $\frac{1}{b}(\frac{dz}{dx}-a)=f(z)$, de donde $\frac{dz}{dx}=a+bf(z)$, separando la variable $\frac{dz}{a+bf(z)}=dx$ que es una ecuación de variable separable.

Ejemplos: Resolver las ecuaciones diferenciales siguientes:

1. $(x+y)^2 y'=a^2$

Solución

Sea $z=x+y \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}-1$, reemplazando en la ecuación diferencial se tiene:

$z^2(\frac{dy}{dx}-1)=a^2$, separando la variable $\frac{z^2dz}{z^2+a^2}=dx$, integrando ambos miembros.

$\int\frac{z^2dz}{z^2+a^2}=\int dx+C \Rightarrow z-a\,arc.\text{tg}(\frac{z}{a})=x+C$, de donde

$x+y-a.\text{arctg}(\frac{x+y}{a})=x+C$, simplificando se tiene: $\therefore\quad x+y=a\,\text{tg}(\frac{y}{a}+k)$

2 $y' = \cos^2(ax + by + c)$, a , b constantes positivas y diferentes.

Solución

Sea z = ax + by + c $\Rightarrow \frac{dz}{dx} = a + by'$, de donde $y' = \frac{1}{b}(\frac{dz}{dx} - a)$, reemplazando en la ecuación $\frac{1}{b}(\frac{dz}{dx} - a) = \cos^2 z \Rightarrow \frac{dz}{dx} = a + b\cos^2 z$

separando las variables se tiene: $\frac{dz}{a + b\cos^2 z} = dx$, integrando se tiene:

$$\int \frac{dz}{a + b\cos^2 z} = \int dx + k \Rightarrow \int \frac{dz}{a\,\text{sen}^2 z + (a+b)\cos^2 z} = x + k$$

$$\frac{1}{a}\int \frac{\sec^2 z dz}{\text{tg}^2 z + \frac{a+b}{a}} = x + k \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{a(a+b)}} \text{arctg} \sqrt{\frac{a}{a+b}}\, \text{tg}(ax + by + c) = x + k$$

3 $y' + 1 = \frac{(x+y)^m}{(x+y)^n + (x+y)^p}$

Solución

Sea z = x + y $\Rightarrow y' = \frac{dz - 1}{dx} - 1$, reemplazando en la ecuación diferencial se tiene:

$\frac{dz}{dx} - 1 + 1 = \frac{z^m}{z^n + z^p} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{z^m}{z^n + z^p}$, separando las variables

$\frac{z^n + z^p}{z^m} dz = dx$, integrando se tiene:

$$\int \frac{z^n + z^p}{z^m} dz = \int dx + C \Rightarrow \frac{z^{n-m+1}}{n-m+1} + \frac{z^{p-m+1}}{p-m+1} = x + C$$

$$\therefore \frac{(x+y)^{n-m+1}}{n-m+1} + \frac{(x+y)^{p-m+1}}{p-m+1} = x + C,\quad n - m \neq -1,\quad p - m \neq -1$$

(4) $xy^2(xy'+y)=a^2$

Solución

Sea $z = xy \Rightarrow y=\frac{z}{y} \Rightarrow y'=\frac{x\frac{dz}{dx}-z}{x^2}$ reemplazando en la ecuación diferencia dada.

$$\frac{z^2}{x}[x\frac{(x\frac{dz}{dx}-z)}{x^2}+\frac{z}{x}]=a^2 \text{, simplificando } \quad z^2dz=a^2x\,dx$$

integrando se tiene: $\frac{z^3}{3}=a^2\frac{x^2}{2}+C \Rightarrow 2x^3y^3=3a^2x^2+K$

(5) $(\ln x+y^3)dx-3xy^2dy=0$

Solución

Sea $z=\ln x+y^3 \Rightarrow \frac{dz}{dx}=\frac{1}{x}+3y^2.y'$, de donde $3xy^2y'=x\frac{dz}{dx}-1$, reemplazando en la ecuación diferencial se tiene: $z-(x\frac{dz}{dx}-1)=0 \Rightarrow (z+1)-x\frac{dz}{dx}=0$ separando las variables. $\frac{dx}{x}-\frac{dz}{z+1}=0$, integrando se tiene: $\ln x - \ln(z+1)=\ln C \Rightarrow x=C(z+1)$

$z+1=kx \Rightarrow \ln x+y^3+1=kx$ donde $k=\frac{1}{c}$ $\therefore y^3=kx-\ln x-1$

(6) $(6x + 4y + 3)\, dx + (3x + 2y + 2)dy = 0$

Solución

La ecuación diferencial expresaremos en la forma: $(2(3x + 2y)+3)dx + (3x+2y + 2)dy = 0$

Sea $z = 3x + 2y \Rightarrow dz = 3\, dx + 2\, dy \Rightarrow dy=\frac{1}{2}(dz-3dx)$

reemplazando en la ecuación diferencial $(2x+3)dx+(z+2)(\frac{dz-3dx}{2})=0$

simplificando y separando la variable se tiene $dx + \frac{z+2}{z} dz = 0$

integrando ambos miembros $z + 2 \ln z + x = C$ de donde:

$$\therefore \quad 4x + 2y + 2 \ln(3x + 2y) = C$$

(7) $\cos(x + y)dx = x \operatorname{sen}(x + y)\, dx + x \operatorname{sen}(x + y)dy$

Solución

Sea $z = x + y \Rightarrow dx = dz - dy$, reemplazando en la ecuación diferencial se tiene:

$\cos z\, dx = x \operatorname{sen} z\, dx + x \operatorname{sen} z\,(dz - dx)$, simplificando y separando la variable.

$\frac{dx}{x} = \operatorname{tg} z\, dz$ integrando se tiene: $\therefore \quad x \cos(x + y) = C$

EJERCICIOS PROPUESTOS.-

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

(1) $\frac{dy}{dx} = \cos.(x + y)$ **Rpta.** $y = 2 \operatorname{arc.tg}(x + C) - x$

(2) $y' = \operatorname{sen}^2(x - y + 1)$ **Rpta.** $\operatorname{tg}(x - y + 1) = x + C$

(3) $\frac{dy}{dx} = \frac{x + y}{x + y + 2}$ **Rpta.** $y + \ln|x + y + 1| = x + C$

(4) $y' \ln|x - y| = 1 + \ln|x - y|$ **Rpta.** $(x - y) \ln|x - y| = C - y$

(5) $y' = (x + y)^2$ **Rpta.** $x + y = \operatorname{tg}(x + C)$

(6) $(x + y - 1)dx + (2x + 2y - 3)\, dy = 0$ **Rpta.** $x + 2y + \ln|x + y - 2| = C$

(7) $(1 + x^2 y^2)y + (xy - 1)^2 xy' = 0$ sug : $xy = z$ **Rpta.** $y^2 = ke^{xy - \frac{1}{xy}}$

8) $(x^6 - 2x^5 + 2x^4 - y^3 + 4x^2 y)dx + (xy^2 - 4x^3)dy = 0$,

sug : y = xz **Rpta.** $\frac{x^3}{3} - x^2 + 2x + \frac{y^3}{3x^3} - \frac{4y}{x} = C$

9) $y' = \frac{y-x+1}{y-x+5}$ **Rpta.** $(y-x)^2 + 10y - 2x = C$

10) $ye^{x/y^2} dx + (y^2 - 2xe^{x/y^2})dy = 0$ **Rpta.** $\ln y + e^{\frac{x}{y^2}} = C$

11) $y' = \text{sen}(x-y)$ **Rpta.** $x + C = ctg(\frac{y-x}{2} + \frac{\pi}{4})$

12) $y' = (8x + 2y + 1)^2$ **Rpta.** 8x + 2y + 1 = 2 tg (4x + C)

13) $(x^2 y^3 + y + x - 2)dx + (x^3 y^2 + x)dy = 0$ **Rpta.** $3x^2 - 12x + 2x^3 y^3 + 6xy = C$

14) $(1 - xy\cos xy)dx - x^2 \cos xy \ dy = 0$ **Rpta.** ln x – sen xy = C

15) $[x^2 \text{sen}(\frac{y}{x^2}) - 2y\cos(\frac{y}{x^2})]dx + x\cos(\frac{y}{x^2})dy = 0$ **Rpta.** $x\,\text{sen}(\frac{y}{x^2}) = C$

16) $e^y y' = K(x + e^y) - 1$ sug: $Z = x + e^y$ **Rpta.** $y = \ln(Ce^{kx} - x)$

17) $x^2 yy' = \frac{1}{2}\text{tg}(x^2 y^2) - xy^2$ sug: $z = x^2 y^2$ **Rpta.** $\text{sen}(x^2 y^2) = ke^x$

18) $y' = ax + by + c$, a, b, c $\in$ R **Rpta.** $b(ax + by + c) + a = ce^{bx}$

19) $(x^2 y^2 + 1)dx + 2x^2 dy = 0$ **Rpta.** $\frac{1}{1-xy} + \frac{1}{2}\ln x = C$

20) $(xy - 2xy\ln^2 y + y\ln y)dx + (2x^2 \ln y + x)dy = 0$

sug: z = x Ln y **Rpta.** $2x^2 + (2x\ln y + 1)^2 = C$

(21) $(2x+3y-1)dx+(4x+6y-5)dy=0$ **Rpta.** $x+2y+3\ln(2x+3y-7)=C$

(22) $(2x-y)dx+(4x-2y+3)\,dy=0$ **Rpta.** $5x+10y+C=3\ln|10x-5y+6|$

(23) $(6x+3y-5)dx-(2x+y)\,dy=0$ **Rpta.** $3x-y=C+\ln(2x+y-1)$

(24) $(x^3y^4+y^5x^5+x^5y^2+x^3y^5+y^7+y^5)dx-(x^4y^3+x^6y+xy^6)dy=0$

Rpta. $\frac{x^3}{3}+x-\frac{1}{2x^2}-\frac{y^2}{2x^2}+\frac{x}{y}+\frac{x^3}{3y^3}=C$

(25) Mediante una sustitución adecuada reducir la ecuación diferencial.

$p(x^m y^n)ydx+Q(x^m y^n)xdy=0$, a una ecuación diferencial de variable separable.

(26) $(2+4x^2\sqrt{y})y\;dx+x^3\sqrt{y}\;dy=0$ **Rpta.** $x^3y^{\frac{1}{2}}=C$

(27) $y(xy+1)dx+x(1+xy+x^2y^2)dy=0$ **Rpta.** $\frac{2xy+1}{2x^2y^2}=\ln Ky$

(28) $(y-xy^2)dx-(x+x^2y)dy=0$ **Rpta.** $\ln(\frac{x}{y})-xy=C$

(29) $(y-xy^2+x^2y^3)dx+(x^3y^2-x^2y)dy=0$ **Rpta.** $2\ln x+x^2y^2-2xy=K$

(30) $\frac{dy}{dx}=\frac{1+xy^3}{1+x^3y}$ sug: $x+y=u$, $x\,y=v$ **Rpta.** $x^2y^2-1=K(x+y)^2$

(31) $\frac{dy}{dx}=\frac{e^y}{2y-xe^y}$ **Rpta.** $y^2=xe^y+C$

(32) $\frac{dy}{dx}=\operatorname{tg}\;(x+y)$ **Rpta.** $x-y-\operatorname{Ln}|\operatorname{sen}(x+y)+\cos(x+y)|=C$

(33) $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\ln(2x+y+3)+1}-2$ **Rpta.** $(2x+y+3)\operatorname{Ln}|2x+y+3|=x+C$

(34) $\frac{dy}{dx} = x^2 + y - 1$, sug: $z = x^2 + 2x + y$ **Rpta.** $2x + x^2 + y + 1 = Ke^x$

(35) $(x^2 - y^4)\frac{dy}{dx} = xy$, sug: x = uy **Rpta.** $2y^5 = -3x^2 + Ky^2$

(36) (3x – 2y + 1)dx + (3x – 2y + 3) dy = 0 **Rpta.** 5(x+y + C) = 2 Ln |15x – 10y + 11|

(37) $y' = \frac{1}{2}\text{tg}^2(x + 2y)$ **Rpta.** 4y – 2x + sen (2x + 4y) = C

(38) $y' = \sqrt{2x + 3y}$ **Rpta.** $6\sqrt{2x+3y} - 4\ln(3\sqrt{2x+3y} + 2) - 9x = C$

(39) $y' = \sqrt{y + \text{sen}\, x} - \cos x$, sug: $z = \sqrt{y + \text{sen}\, x}$ **Rpta.** $\sqrt{y + \text{sen}\, x} = \frac{x}{2} + C$

(40) $\sqrt{x + y + 1}\, y' = \sqrt{x + y - 1}$

Rpta. $u^2 + 2u - u\sqrt{u^2 - 1} + \ln|u + \sqrt{u^2 - 1}| = 4x + C$; u = x + y

(41) $(x + y - 2 + \frac{1}{x})dx + (2 - x - y)dy = 0$ **Rpta.** $2\ln x - 4x + 4y - (x + y)^2 = k$

(42) $(2x - 2y + xe^x)dx - (2x - 2y - 1)dy = 0$ **Rpta.** $(x - 1)e^x + (x - y^2) + y = C$

(43) [sen x - tg (x -2y)] dx + 2 tg (x - 2y) dy = 0 **Rpta.** - cos x + Ln cos (x - 2y) = C

(44) $(1 - xy + x^2y^2)dx + (x^3y - x^2)dy = 0$ **Rpta.** $2\ln x + x^2y^2 - 2xy = C$

(45) $(y^5 arc.\text{sen}\sqrt{\frac{x}{1+x}} - y^4 arc.\text{tg}\sqrt{x})dx + dy = 0$

Rpta. $\sqrt{x}\; arc.\text{tg}\sqrt{x} - \ln\sqrt{1+x} + \ln(\frac{y-1}{y}) + \frac{6y^2 + 3y + 2}{6y^3} = C$

(46) $2yy' = y^2 + x^2 - 2x$ **Rpta.** $y^2 = ce^x - x^2$

(47) $y' + \operatorname{sen}^2(x+y) = 0$ **Rpta.** $\operatorname{tg}(x+y) = x + C$

(48) $y' = (x+y)\ln(x+y) - 1$ **Rpta.** $\ln|x+y| = ce^x$

(49) $2(x^2 y + \sqrt{1+x^4 y^2})dx + x^3 dy = 0$ **Rpta.** $x^2(x^2 y + \sqrt{1+x^4 y^2}) = C$

(50) $y^2 arc.\operatorname{tg} x + y^3 arc.\sec\sqrt{x^2+1} + \dfrac{dy}{dx} = 0$

(51) $xy(x\,dy + y\,dx) = 6y^3 dy$, cuando x = 2, y = 1 sug. z = xy **Rpta.** $y^2(x^2 - 3y^2) = 1$

(52) $x^2(x\,dx + y\,dy) = (x^2 + y^2)dx$, cuando x = 1, y = 2

sug. $z = x^2 + y^2$ **Rpta.** $(x^2 + y^2)(10 - 9x) = 5x$

(53) $dx + dy = (x+y)(1+\dfrac{y}{x})^2(x\,dy - y\,dx)$

sug. z = x + y, $\omega = \dfrac{y}{x}$ **Rpta.** $(2y + cx)(x+y)^2 + x = 0$

(54) $(x^2 + y^2)(x\,dy + y\,dx) - xy(x\,dy + y\,dx) = 0$

sug. $z = x^2 y^2$, ω = xy **Rpta.** $x^2 y^2 = C(x^2 + y^2)$

(55) $y^2(x^2+2)dx + (x^3 + y^3)(y\,dx - x\,dy) = 0$ **Rpta.** $\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{x}{y} + \dfrac{y^2}{2x^2} - \ln x = C$

(56) (6x – 3y + 2)dx – (2x – y – 1) dy = 0 **Rpta.** 3x - y + C = 5 Ln |2x - y + 4|

(57) $\dfrac{dy}{dx} = (x+y-3)^2 - 2(x+y-3)$ **Rpta.** $\dfrac{1}{x+y-4} = x + C$

(58) $\dfrac{dy}{dx} = -2 + e^{2x-y+1}$ **Rpta.** $x + e^{-2x-y+1} = C$

(59) x dy = y (xy + cos π) dx

60 $\dfrac{dy}{dx} = (\dfrac{2x-3y+4}{3x-2y-1})^2$

(61) $(1-x^2y)dx + x^2(y-x)dy = 0$ sug. z = x - y **Rpta.** $y^2 - 2xy + 2x^2 + \frac{2}{x} = k$

(62) $y' = (8x+2y)^2 + 2(8x+2y)+1$ **Rpta.** arc tg (4x + y) = 4x + k

2.3. OTRAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS.-

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales

(1) $\cos y' = 0$

Solución

Como $\cos y' = 0 \Rightarrow y' = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}(2n+1)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\pi}{2}(2n+1) \Rightarrow dy = \frac{\pi}{2}(2n+1)dx$, integrando

$\int dy = \int \frac{\pi}{2}(2n+1)dx + K$, de donde se tiene: $y = \frac{\pi}{2}(2n+1)x + K$, $n \in Z$

(2) $e^{y'} = 1$

Solución

$e^{y'} = 1$, tomando logaritmo se tiene $y' = 0$, $\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow$ y = C, C constante

(3) $\ln y' = x$

Solución

$\ln y' = x \Rightarrow y' = e^x \Rightarrow dy = e^x dx$

integrando $\int dy = \int e^x dx + C$ de donde se tiene: $y = e^x + C$

(4) $x^2 y' \cos y + 1 = 0$, $y \to \frac{16\pi}{3}$; $x \to +\infty$

Solución

$x^2 y' \cos y + 1 = 0 \Rightarrow \cos y.y' + \frac{1}{x^2} = 0$ de donde $\cos y.dy + \frac{dx}{x^2} = 0$, integrando

$\int \cos y\ dy + \int \frac{dx}{x^2} = c$ de donde se tiene: $\operatorname{sen} y - \frac{1}{x} = C$, como $y \to \frac{16\pi}{3}$ cuando $x \to +\infty$

$\Rightarrow C = \operatorname{sen}\frac{16\pi}{3}$, por lo tanto: $\operatorname{sen} y - \frac{1}{x} = \operatorname{sen}(\frac{16\pi}{3})$

5) $\operatorname{tg} y' = x$

Solución

Como $\operatorname{tg} y' = x \Rightarrow y' = \operatorname{arctg} x + n\pi$, $n \in z$

dy = (arc.tg x + n π) dx, integrando $\int dy = \int (arc.\operatorname{tg} x + n\pi)dx + C$ de donde se tiene:

$y = x\,arc.\operatorname{tg} x - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + n\pi x + C$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales.

1) $e^{y'} = x$ **Rpta.** y = x (ln x − 1) + C

2) $\operatorname{tg} y' = 0$ **Rpta.** y = π n x + C

3) $e^{y'} = e^{4y'} y' + 1$, y es acotada para $x \to +\infty$ **Rpta.** y = 0

4) $\operatorname{sen} y' = x$ **Rpta.** $y = x\,arc.\operatorname{sen} x - \sqrt{1 - x^2} + n\pi x$, x, n ∈ Z

5) $x^2 y' + \cos 2y = 1$, $y \to \frac{16\pi}{3}$, cuando $x \to +\infty$ **Rpta.** $y = arc.\operatorname{tg}(\frac{2}{x} + \frac{1}{\sqrt{3}}) + 3\pi$

6) $(x+1)y' = y - 1$, y es acotada, para $x \to +\infty$ **Rpta.** y = 1

7) $y' = 2x(\pi + y)$, y es acotada, para $x \to \infty$ **Rpta.** y = -π

8) $x^3 y' - \text{sen}\, y = 1$, $y \to 5\pi$, $x \to \infty$ **Rpta.** $y = 2arc.\text{tg}(1 - \frac{1}{2x^2}) + \frac{9}{2}\pi$

9) $y = \ln(\frac{dy}{dx})$ **Rpta.** y = - ln(C – x)

10) $(1 + x^2)y' - \frac{1}{2}\cos^2 2y = 0$, $y \to \frac{7}{2}\pi$, $x \to -\infty$

Rpta. $y = \frac{1}{2} arc.\text{tg}(\frac{\pi}{2} + arc.\text{tg}\, x) + \frac{7}{2}\pi$

2.4. ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS HOMOGÉNEAS.-

a. Función Homogénea: Diremos que la función f (x,y) es homogénea de grado k x e y, sí y sólo sí, cumple con la condición siguiente:

$$\boxed{f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k f(x, y)}$$

Ejemplo: Determinar cuales de las siguientes funciones son homogéneas.

1) $f(x, y) = x^2 y - 4y^3$ es homogénea de grado 3 en x e y

2) $f(x, y) = y^2 \text{tg}\frac{x}{y}$ es homogénea de grado 2 en x e y.

3) $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 - y^3}$ es homogénea de grado 1 en x e y

4) $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{xy}$ es homogénea de grado cero en x e y

5) $f(x, y) = x^2 + \text{sen}\, x.\cos y$, no es homogénea.

6) $f(x, y) = e^x$, no es homogénea.

b. Ejercicios Propuestos:

Determinar si las siguientes funciones son homogéneas o no.

① $f(x,y)=e^{\frac{x}{y}}$

② $f(x,y)=(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}$

③ f(x,y) = x - 5y + 6

④ $f(x,y)=x\operatorname{sen}\frac{y}{x}-y\operatorname{sen}\frac{x}{y}$

⑤ $f(x,y)=\dfrac{yx^2+xy^2}{3x^2-4y^3}$

⑥ $f(x,y)=x^3-xy+y^3$

⑦ f(x,y) = x Ln x - y Ln y

⑧ f(x,y) = x Ln x - x Ln y

⑨ $f(x,y)=(x^2+y^2)e^{\frac{2x}{y}}+4xy$

⑩ $f(x,y)=x\operatorname{arctg}(\frac{y}{x})+y\operatorname{arctg}(\frac{x}{y})$

c. Definición:

Diremos que una ecuación diferencial ordinaria de primer orden y de primer grado de la forma:

$$\boxed{M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0}$$

es homogénea si M y N son funciones homogéneas del mismo grado en x e y.

Ejemplo: Las siguientes ecuaciones diferenciales ordinaria son homogéneas.

① $(x^3-y^3)dx+y^2x\,dy=0$

② $x\dfrac{dy}{dx}=y+2xe^{-\frac{y}{x}}$

③ $(x^3+y^2\sqrt{x^2+y^2})dx-xy\sqrt{x^2+y^2}\,dy=0$

④ $(\sqrt{x^2-y^2}-y\operatorname{arcsen}(\frac{y}{x}))dx=x\cos(\frac{y}{x})dy$

d. Solución de una Ecuación Diferencial Homogéneas.

Consideremos una ecuación diferencial ordinaria homogénea.

$$\boxed{M(x,y)\,dx+N(x,y)dy=0} \quad \text{... (1)}$$

entonces: $M(\lambda x, \lambda y) = \lambda^K M(x,y)$ y $N(\lambda x, \lambda y) = \lambda^K N(x,y)$ ... (2)

esto es porque la ecuación diferencial (1) es homogénea, haciendo; $\lambda = \frac{1}{x}$ en la ecuación (2) se tiene:

$$M(1,\frac{y}{x}) = \frac{1}{x^K} M(x,y) \Rightarrow M(x,y) = x^k M(1,\frac{y}{x})$$

$$M(x,y) = x^K M(1,\frac{y}{x}) = x^K M(1,u) = x^K \psi(u), \quad \text{donde } u = \frac{y}{x}$$

es decir: $M(x,y) = x^K \varphi(u)\,,\quad u = \frac{y}{x}$ ... (3)

$$N(1,\frac{y}{x}) = \frac{1}{x^K} N(x,y) \Rightarrow N(x,y) = x^K N(1,\frac{y}{x})$$

$$N(x,y) = x^K N(1,(\frac{y}{x})) = x^K N(1,u) = x^K N(1,u) = x^K \psi(u)\,,\quad u = \frac{y}{x}$$

es decir: $N(x,y) = x^K \psi(u)\,,\quad u = \frac{y}{x}$ ... (4)

como $y = ux \Rightarrow dy = udx + xdu$ ... (5)

reemplazando (3), (4), (5) en (1) se tiene:

$x^k \varphi(u)dx + x^K \psi(u)(u\,dx + x\,du) = 0$, simplificando

$\varphi(u)dx + \psi(u)(udx + xdu) = 0$, agrupando y separando la variable se tiene:

$\frac{dx}{x} + \frac{\psi(u)}{\varphi(u) + u\psi(u)} du = 0$, que es una ecuación diferencial de variable separable.

Análogamente se hace para $\lambda = \frac{1}{y}\,,\quad u = \frac{x}{y}$

e) Ejercicios Desarrollados

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales.

1. $(x^2+3xy+y^2)dx-x^2dy=0$

Solución

Sea y = ux $\Rightarrow$ dy = udx + xdu, reemplazando en la ecuación diferencial.

$(x^2+3x^2u+x^2u^2)dx-x^2(u\,dx+x\,du)=0$, simplificando

$x^2(u^2+2u+1)dx-x^3du=0$, para x ≠ 0 se tiene:

$(u^2+2u+1)dx-x\,du=0$ de donde separando la variable $\dfrac{dx}{x}-\dfrac{du}{(u+1)^2}=0$, integrando

se tiene: $\displaystyle\int\frac{dx}{x}-\int\frac{du}{(u+1)^2}=C$, de donde $Lnx+\dfrac{x}{y+x}=C$

2. $x\dfrac{dy}{dx}=y+\sqrt{y^2-x^2}$

Solución

A la ecuación diferencial dada expresaremos así:

$(y+\sqrt{y^2-x^2})dx-xdy=0$ ... (1)

Sea y = ux $\Rightarrow$ dy = udx + xdu ... (2)

reemplazando (2) en (1) se tiene:

$(ux+\sqrt{u^2x^2-x^2})dx-x(udx+xdu)=0$, agrupando se tiene:

$x\sqrt{u^2-1}dx-x^2du=0$, para x ≠ 0 y además u ≠ ±1, se tiene: $\dfrac{dx}{x}-\dfrac{du}{\sqrt{u^2-1}}=0$,

integrando $\displaystyle\int\frac{dx}{x}-\int\frac{du}{\sqrt{u^2-1}}=k$, efectuando y simplificando: $2Cy=C^2x^2+1$

(3) (x - y Lny + yLnx)dx + x(Lny - Lnx)dy = 0

Solución

A la ecuación diferencial podemos escribir en la forma:

$$(x - y\ln(\frac{y}{x}))dx + x\ln(\frac{y}{x})dy = 0 \qquad \text{... (1)}$$

Sea y = ux ⇒ dy = udx + xdu ... (2)

reemplazando (2) en (1) se tiene:

(x - ux Lnu)dx + x Ln(u) (udx + xdu) = 0, agrupando y simplificando

dx + x Ln(u)du = 0, separando la variable: $\frac{dx}{x} + \ln u\, du = 0$,

integrando $\int\frac{dx}{x} + \int Ln(u)du = C,$

efectuando y simplificando (x - y) Lnx + y Lny = Cx + y

(4) $(x - y\,\text{arctg}(\frac{y}{x}))dx + x\,\text{arctg}(\frac{y}{x})dy = 0$

Solución

Sea y = u x ⇒ dy = udx + xdu, reemplazando en la ecuación diferencial se tiene:

(x - ux arctgu)dx + x arctgu (udx + xdu) = 0,

simplificando y separando las variables se tiene: $\frac{dx}{x} + \text{arctg}\, u\, du = 0$, integrando

$$\int\frac{dx}{x} + \int arc.\text{tg}u du = \ln C \Rightarrow \ln x + u\,arc.\text{tg}\,u - \frac{1}{2}\ln(1+u^2) = \ln C$$

Como $u = \frac{y}{x}$ entonces $2y.\text{arctg}(\frac{y}{x}) = x\ln(\frac{x^2+y^2}{x^4})C^2$

(5) $xe^{\frac{x}{y}}\,dx + ye^{\frac{y}{x}}\,dy = 0$

Solución

Sea y = ux ⇒ dy = udx + xdu, reemplazando en la ecuación diferencial dada se tiene:

$xe^{\frac{1}{u}}\,dx + uxe^{u}(u\,dx + x\,du) = 0$, agrupando y simplificando $(e^{\frac{1}{u}} + u^2e^{u})dx + xue^{u}du = 0$, separando la variable.

$$\frac{dx}{x} + \frac{ue^{u}du}{e^{\frac{1}{u}} + u^2e^{u}} = 0 \quad \text{integrando.} \quad \ln x = -\int^{u} \frac{te^{t}dt}{e^{\frac{1}{t}} + t^2e^{t}} \quad \text{como} \quad u = \frac{y}{x}$$

entonces ∴ $\ln x = -\int_{a}^{\frac{y}{x}} \frac{te^{t}\,dt}{e^{\frac{1}{t}} + t^2e^{t}}$

(6) $(y\cos(\frac{y}{x}) + x\,\text{sen}(\frac{y}{x}))dx = \cos(\frac{y}{x})dy$

Solución

Sea y = ux ⇒ dy = udx + xdu, reemplazando en la ecuación diferencial dada se tiene:

(ux cos u + x sen u)dx = x cos u (u dx + x du).

Agrupando y simplificando, se tiene: sen u dx = x cos u du, separando la variable

$$\frac{dx}{x} = c\,\text{tg}\,u\,du \quad \text{integrando,} \quad \int\frac{dx}{x} = \int c\,\text{tg}\,u\,du + \ln k \;\Rightarrow\; \ln x = \ln \text{sen}\,u + \ln k$$

x = k sen u, como $u = \frac{y}{x} \;\Rightarrow\; x = k\,\text{sen}\frac{y}{x}$

f. EJERCICIOS PROPUESTOS.

I. Resolver las siguientes Ecuaciones Diferenciales.

(1) $(4x^2 + xy - 3y^2)dx + (-5x^2 + 2xy + y^2)dy = 0$

Rpta. $\ln x + \frac{2}{3}\ln\left|\frac{y}{x} - 1\right| + \frac{3}{4}\ln\left|\frac{y}{x} - 2\right| - \frac{5}{12}\ln\left|\frac{y}{x} + 2\right| = c$

(2) $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\frac{\phi(y/x)}{\phi'(y/x)}$ **Rpta.** $x=k\phi(\frac{y}{x})$

(3) $xy'=2(y-\sqrt{xy})$ **Rpta.** $16xy=(y+4x-cx^2)^2$

(4) $(x\cos ec(\frac{y}{x})-y)dx+xdy=0$ **Rpta.** $\ln kx=\cos(\frac{y}{x})$

(5) $xy'=y+2xe^{-\frac{y}{x}}$ **Rpta.** $\ln(x^2k)=e^{\frac{y}{x}}$

(6) $dy=(\frac{y}{x}-\cos ec^2\frac{y}{x})dx$ **Rpta.** $2y-x\,\text{sen}(\frac{2y}{x})+4x\ln x=kx$

(7) $2(2x^2+y^2)dx-xy\,dy=0$ **Rpta.** $x^4=c^2(4x^2+y^2)$

(8) $x^2y'=4x^2+7xy+2y^2$ **Rpta.** $x^2(y+2x)=c(y+x)$

(9) $y\;dx=(x+\sqrt{y^2-x^2})dy$ **Rpta.** $\text{arcsen}(\frac{x}{y})=\ln(ky)$

(10) $\frac{dy}{dx}=\frac{y(2x^3y^3)}{x(2x^3-3y^3)}$ **Rpta.** $y^3=cxe^{-\frac{2x^3}{3y^3}}$

(11) $x\;dy-y\;dx=\sqrt{x^2+y^2}\;\;dx$ **Rpta.** $y+\sqrt{x^2+y^2}=cx^2$

(12) $y(x^2+xy-2y^2)dx+x(3y^2-xy-x^2)dy=0$ **Rpta.** $2y^2\ln(\frac{y^3}{x^2})+2xy+x^2=cy^2$

(13) $xy^2dy+(x^3-y^3)dx=0$ **Rpta.** $y^3=-3x^3\ln x+cx^3$

(14) $(6x^2-7y^2)dx-14xy\,dy=0$ **Rpta.** $2x^3-7xy^2=c$

(15) $y'=\frac{2xy}{3x^2-y^2}$ **Rpta.** $c(y^2-x^2)=y^3$

(16) $xy' = \sqrt{y^2 - x^2}$ **Rpta.** $y + \sqrt{y^2 - x^2} = cx^3 e^{\frac{y(y+\sqrt{y^2-x^2})}{x^2}}$

(17) $ax^2 + 2bxy + cy^2 + y'(bx^2 + 2cxy + f\,y^2) = 0$ **Rpta.** $f\,y^3 + 3cxy^2 + 3bx^2 y + ax^3 = k$

(18) $y\,dx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0$ **Rpta.** $\sqrt{\frac{x}{y}} + Lny = c$

(19) $(x\sqrt{x^2 + y^2} - y^2)dx + xydy = 0$ **Rpta.** $x\ln|x| + \sqrt{x^2 + y^2} = cx$

(20) $(x + (x-y)e^{\frac{y}{x}})dx + xe^{\frac{y}{x}}dy = 0$ **Rpta.** $x(1 + e^{\frac{y}{x}}) = k$

(21) $(x + y\,\text{sen}(\frac{y}{x}))dx - x\,\text{sen}(\frac{y}{x})dy = 0$ **Rpta.** $\ln x + \cos(\frac{y}{x}) = c$

(22) $x^3 y' = y^3 + 3xy^2 + 4x^2 y + x^3$ **Rpta.** $y = \frac{x}{\sqrt{c - 2\ln x}} - x$

(23) $(2xy + x^2)y' = 3y^2 + 2xy$ **Rpta.** $y^2 + xy = cx^3$

(24) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \text{sen}(\frac{y}{x})$ **Rpta.** $\cos ec(\frac{y}{x}) - c\,\text{tg}(\frac{y}{x}) = kx$

(25) $2xy'(x^2 + y^2) = y(y^2 + 2x^2)$ **Rpta.** $y^2 = cxe^{x^2/y^2}$

(26) $x^2 y' = 3(x^2 + y^2)\,\text{arctg}(\frac{y}{x}) + xy$ **Rpta.** $y = x\,\text{tg}(kx^3)$

(27) $xy^2 dy - (x^3 + y^3)dx = 0$ **Rpta.** $y^3 = x^3(3\ln x + c)$

(28) $x\,\text{sen}(\frac{y}{x})\frac{dy}{dx} = y\,\text{sen}(\frac{y}{x}) + x$ **Rpta.** $\cos(\frac{y}{x}) + \ln(cx) = 0$

(29) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \sqrt{\frac{y^2}{x^2} - 1}$ **Rpta.** $y + \sqrt{y^2 - x^2} = kx^2$

(30) $y^2dx+(x\sqrt{y^2-x^2}-xy)dy=0$ **Rpta.** $y^2(x-2c)+c^2x=0$

(31) $2x^3\dfrac{dy}{dx}+(y^3-x^2y)=0$ **Rpta.** $xy^2=c(x^2+y^2)$

(32) $x^2y'-y^2+xy=x^2$ **Rpta.** $y=\dfrac{x}{c-\ln x}+x$

(33) $x^2y'=y^2+3xy+2x^2$ **Rpta.** y = x tg (Ln x + c) - x

(34) $(x\,\text{sen}(\frac{y}{x})-y\cos(\frac{y}{x}))dx+x\cos(\frac{y}{x})dy=0$ **Rpta.** $x\,\text{sen}(\frac{y}{x})=k$

(35) $y\sqrt{x^2+y^2}\,dx-x(x+\sqrt{x^2+y^2})dy=0$ **Rpta.** $cx-\sqrt{x^2+y^2}=x\ln(\sqrt{x^2+y^2}-x)$

(36) $x\dfrac{dy}{dx}=y(\ln y-\ln x)$ **Rpta.** $\ln(\frac{y}{x})=1+cx$

(37) $y\,dx+x(\ln(\frac{y}{x})-2)dy=0$ **Rpta.** $y=c(1+\ln(\frac{x}{y}))$

(38) $(x\cos(\frac{y}{x})+y\,\text{sen}(\frac{y}{x}))y\,dx+(x\cos(\frac{y}{x})-y\,\text{sen}(\frac{y}{x}))x\,dy=0$ **Rpta.** $xy\cos(\frac{y}{x})=c$

(39) $(x+ye^{\frac{y}{x}})dx-xe^{\frac{y}{x}}dy=0$ **Rpta.** y = x Ln (Ln |x| + C)

(40) $y(\ln(\frac{y}{x})+1)dx-x\ln(\frac{y}{x})dy=0$ **Rpta.** $\ln x-\frac{1}{2}\ln^2(\frac{y}{x})=c$

(41) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ **Rpta.** $\ln x+c=\displaystyle\int\frac{(u^2+1)du}{1-u-u^2-u^3}$, $u=\dfrac{y}{x}$

(42) $(x^3+y^2\sqrt{x^2+y^2})dx-xy\sqrt{x^2+y^2}\,dy=0$ **Rpta.** $(x^2+y^2)^{3/2}=x^3Ln(kx^3)$

(43) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}+arc.\text{tg}\ (y/x)$ **Rpta.** $\ln x=\displaystyle\int\frac{du}{\text{arctg}\,u}+c$, $u=\dfrac{y}{x}$

(44) $\sqrt{xy}\ dx = (x - y + \sqrt{xy})dy$ **Rpta.** $\sqrt{x-y}(\sqrt{x}-\sqrt{y}) = ke^{\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}}$

(45) $\frac{x}{y}\frac{dy}{dx} + \frac{3x^2 - y^2}{3y^2 - x^2} = 0$ **Rpta.** $(x^2 + y^2)^2 = k\,xy$

(46) $x\cos(\frac{y}{x})\frac{dy}{dx} = y\cos(\frac{y}{x}) - x$ **Rpta.** $x = ke^{-\text{sen}(\frac{y}{x})}$

(47) $\frac{x}{y}\frac{dy}{dx} + \frac{2x^3 - x^2y - y^3}{2y^3 - xy^2 - x^3} = 0$ **Rpta.** $x^3 + y^3 = xy(x + y + c)$

(48) $(\sqrt{x^2 - y^2} - y\,\text{arcsen}(\frac{y}{x}))dx + x\,\text{arcsen}(\frac{y}{x})dy = 0$ **Rpta.** $\ln x + \frac{1}{2}(\text{arcsen}(\frac{y}{x}))^2 = k$

(49) $(x\,\text{tg}(\frac{y}{x}) + y)dx - x\,dy = 0$ **Rpta.** $\text{sen}(\frac{y}{x}) = kx$

(50) $(\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y})dx + (\sqrt{x-y} - \sqrt{x+y})dy = 0$ **Rpta.** $\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = c$

(51) $(2x\,\text{tg}\frac{y}{x} + y)dx = x\,dy$ **Rpta.** $x^2 = k\,\text{sen}(\frac{y}{x})$

(52) $(4x^2 + 3xy + y^2)dx + (4y^2 + 3xy + x^2)dy = 0$ **Rpta.** $(x^2 + y^2)^3(x + y)^2 = c$

(53) $x\frac{dy}{dx} - y = \frac{x}{\text{arctg}(\frac{y}{x})}$ **Rpta.** $\frac{y}{x}\text{arctg}(\frac{y}{x}) = \ln k\sqrt{x^2 + y^2}$

(54) $xy'\ln\frac{y}{x} = x + y\ln\frac{y}{x}$ **Rpta.** $\ln x = \frac{y}{x}(\ln(\frac{y}{x}) - 1) + c$

(55) $(x + \text{sen}(\frac{y}{x}))dx - x\,\text{sen}(\frac{y}{x})dy = 0$ **Rpta.** $\ln x + \cos\frac{y}{x} = c$

(56) $y(x^2 + xy - 2y^2)dx + x(3y^2 - xy - x^2)dy = 0$ **Rpta.** $2y^2\ln(\frac{y^3}{x^2}) + 2xy + x^2 = cy^2$

(57) $(x^3 + y^2\sqrt{x^2+y^2})dx - xy\sqrt{x^2+y^2}\,dy = 0$ **Rpta.** $(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} = x^3 \ln cx^3$

(58) $(2x\,\text{sen}\frac{y}{x} + 2x\,\text{tg}\frac{y}{x} - y\cos\frac{y}{x} - y\sec^2\frac{y}{x})dx + (x\cos\frac{y}{x} + x\sec^2\frac{y}{x})dy = 0$

Rpta. $x^2(\text{sen}\frac{y}{x} + \text{tg}\frac{y}{x}) = c$

(59) $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+xy+y^2}{x^2}$ **Rpta.** $\text{arctg}\frac{y}{x} = \ln x + c$

(60) $x(x^2+y^2)dy = y(x^2+y\sqrt{x^2+y^2}+y^2)dx$ **Rpta.** $y+\sqrt{x^2+y^2} = cx^2 e^{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y}}$

(61) $xy^3dy = (2y^4+x^4)dx$ **Rpta.** $kx^8 = x^4 + y^4$

(62) $\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2-xy+y^2}$ **Rpta.** $(x-y)e^{\frac{x}{y}} = c$

(63) $\frac{dy}{dx} = \frac{6x^2-5xy-2y^2}{6x^2-8xy+y^2}$ **Rpta.** $(y-x)(y-3x)^9 = c(y-2x)^{12}$

(64) $x\frac{dy}{dx} = y - \sqrt{x^2+y^2}$ **Rpta.** $y+\sqrt{x^2+y^2} = c$

(65) $x\frac{dy}{dx} = y + 2xe^{-y/x}$ **Rpta.** $e^{\frac{y}{x}} = \ln kx^2$

(66) Demostrar que $(x+y)^{a+b}(x-y)^{a-b} = k$ es la solución de la ecuación diferencial (ax - by) dx + (bx - ay) dy = 0

(67) (x - y) (4x + y) dx + x (5x - y) dy = 0 **Rpta.** $x(y+x)^2 = c(y-2x)$

(68) $(3x^2-2xy-3y^2)dx = 4xy\,dy$ **Rpta.** $(y-x)(y+3x)^3 = cx^3$

(69) $(x - y\,\text{arctg}\frac{y}{x})dx + x\,\text{arctg}\frac{y}{x}dy = 0$ **Rpta.** $2y\,\text{arctg}\frac{y}{x} = x\ln\frac{c^2(x^2+y^2)}{x^4}$

(70) $(y^3 - x^3)dx = xy(x\,dx + y\,dy)$ **Rpta.** $2x^2\ln(x+y) = cx^2 + 2xy - y^2$

(71) $4x^2 + xy - 3y^2 + (-5x^2 + 2xy + y^2)\frac{dy}{dx} = 0$ **Rpta.** $(y-x)^8(y-2x)^9 = c(y+2x)^5$

(72) $x^3y\frac{dy}{dx} = x^4 + 3x^2y^2 + y^4$ **Rpta.** $y^2 = -x^2(1 + \frac{1}{\ln kx^2})$

(73) $(\sqrt{xy} - x)dx + ydy = 0$ **Rpta.** $\ln x + \frac{y}{x} - 2\sqrt{\frac{y}{x}} = c$

(74) $xy\frac{dy}{dx} = 2x^2 + 3xy + 2y^2$

(75) $(3xy + y^2)dx + (x^2 + xy)dy = 0$

II. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales con las condiciones iniciales dadas.

(1) $(y - \sqrt{x^2+y^2})dx - x\,dy = 0$, $y(\sqrt{3}) = 1$ **Rpta:** $x^2 = 9 - 6y$

(2) $(xy' - y)\,\text{arctg}(\frac{y}{x}) = x$, $y(1) = 0$ **Rpta:** $\sqrt{x^2+y^2} = e^{\frac{y}{x}\,\text{arctg}(\frac{y}{x})}$

(3) $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - 2xy - x^2}{y^2 + 2xy - x^2}$, $y(1) = -1$ **Rpta:** $y = -x$

(4) $x\frac{dy}{dx} = xe^{\frac{y}{x}} + y$, $y(1) = 0$ **Rpta:** $\ln x + e^{-\frac{y}{x}} = 1$

(5) $\frac{dy}{dx} = \frac{2xy - y^2}{2xy - x^2}$, $y(1) = 2$ **Rpta:** $xy(y - x) = 2$

(6) $(x\cos^2(\frac{y}{x}) - y)dx + x\,dy = 0$, $y(1) = \frac{\pi}{4}$ **Rpta:** $\text{tg}(\frac{y}{x}) = \ln(\frac{e}{x})$

(7) $y^2 dx + (x^2 + 3xy + 4y^2)dy = 0$, y (2) = 1 **Rpta:** 4 (2y + x) ln x = 2y – x

(8) $y(x^2 + y^2)dx + x(3x^2 - 5y^2)dy = 0$, y (2) = 1 **Rpta:** $2y^5 - 2x^2y^3 + 3x = 0$

(9) $(3x^2 - 2y^2)y' = 2xy$, y (0) = -1 **Rpta:** $x^2 = 2y^2(y+1)$

(10) $(x^2 + 2xy - 2y^2)dx + (y^2 + 2xy - 2x^2)dy = 0$, y (0) = 3 **Rpta:** $y^2 - xy + x^2 = 3(y+x)$

(11) $(y^2 - 3x^2)dy + 2xy\,dx = 0$, y (0) = 1 **Rpta:** $y^3 = y^2 - x^2$

(12) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y + x\cos^2(\frac{y}{x})}{x}$, $y(1) = \dfrac{\pi}{4}$ **Rpta:** $1 + \ln x = \operatorname{tg}(\dfrac{y}{x})$

(13) $\dfrac{dy}{dx} = \sec(\dfrac{y}{x}) + (\dfrac{y}{x})$, y(2) = π **Rpta:** y = x arc.sen (ln 2x – 1)

(14) $(x^3 + y^3)dx - xy^2dy = 0$, y (1) = 0 **Rpta:** $y^3 = 3x^3 \ln x$

(15) $(3x^2 + 9xy + 5y^2)dx - (6x^2 + 4xy)dy = 0$, y (0) = -6 **Rpta:** $3x^4 + 4(y^2 + 3x - 3x^2) = 0$

(16) $(x^2 - 3y^2)x + 2xy\,dy = 0$, y (2) = 2, **Rpta:** $y = x\sqrt{1 - \dfrac{3x}{8}}$

(17) $(x^4 + y^4)dx = 2x^3y\,dy$, y (1) = 0 **Rpta:** $y^2 = (\dfrac{\ln|ex| - 1}{\ln|ex|})x^2$

(18) $(x^2 + y^2)dx + xy\,dy = 0$, y (1) = -1 **Rpta:** $x^4 + 2x^2y^2 = 3$

(19) $(x^3 + y^3)dx = 2xy^2dy$, y (2) = 1 **Rpta:** $y^3 = x^3 - \dfrac{1}{4}(7\sqrt{2x}x)$

(20) $\dfrac{dy}{dx} = 4 + \dfrac{y}{x} + (\dfrac{y}{x})^2$, y(1) = 2 **Rpta:** $\operatorname{arctg}(\dfrac{y}{2x}) - 2\ln|x| = \dfrac{\pi}{4}$

(21) $x\frac{dy}{dx}=xe^{\frac{y}{x}}+y$, $y(1)=0$ **Rpta:** $y=-x\ln|1-\ln x|$

(22) $(x^4+6x^2y^2+y^4)dx+4xy(x^2+y^2)dy=0$, $y(1)=0$ **Rpta:** $x^5+10x^3y^2+5xy^4=1$

(23) $\frac{dy}{dx}=\frac{2xye^{(\frac{x}{y})^2}}{y^2+y^2e^{(\frac{x}{y})^2}+2x^2e^{(\frac{x}{y})^2}}$ **Rpta:** $y=k(1+e^{(\frac{x}{y})^2})$

(24) $(2xy+y^2)dx-2x^2dy=0$, $y=e$, $x=e$ **Rpta:** $2x+y\ln x=3y$

(25) $(x-3y\,\text{sen}\frac{y}{x})dx+3x\,\text{sen}\frac{y}{x}dy=0$, $y(1)=\frac{\pi}{4}$

(26) Resolver la ecuación diferencial $(2x^2+3xy+2y^2)dx-xy\,dy=0$ de tal modo que la solución pasa por el punto P(1,0).

(27) $xy\frac{dy}{dx}=y^3-x^3$, $y(1)=2$

(28) $\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}=\cosh(\frac{y}{x})$, $y(1)=0$

(29) $y\,dx+[y\cos(\frac{x}{y})-x]dy=0$, $y(0)=2$

2.5. ECUACIONES DIFERENCIALES REDUCIBLES A HOMOGÉNEAS.-

Las ecuaciones diferenciales de la forma siguiente:

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}\right)} \qquad \ldots (1)$$

No son homogéneas, porque tanto en el numerador como en el denominador aparecen dos constantes c y c', estas constantes se pueden eliminar mediante una traslación, transformando a la ecuación (1) en una ecuación diferencial homogénea, para esto consideremos las ecuaciones:

$$\boxed{L_1: ax+by+c=0 \ \wedge \ L_2: a'x+b'y+c'=0} \qquad \text{... (2)}$$

donde el punto de intercepción es (h, k). Si trasladamos el origen de coordenadas al punto (h,k) las ecuaciones de (2) se transforman en:

$az'+b\omega = 0 \wedge a'z + b'\omega = 0$ y haciendo el cambio x = z + h, y = ω + k

de donde dx = dz, dy = dω, se tiene de (1)

$$\boxed{\frac{d\omega}{dz} = f\left(\frac{az+b\omega}{a'z+b'\omega}\right) = f\left(\frac{a+b(\frac{\omega}{z})}{a'+b'(\frac{\omega}{z})}\right) = F\left(\frac{\omega}{z}\right)} \qquad \text{... (3)}$$

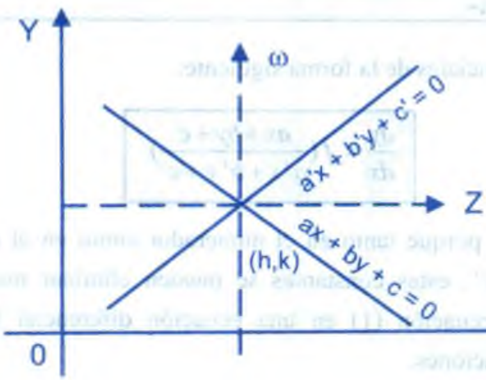
que es una ecuación diferencial homogénea.

Cuando $L_1: ax+by+c=0$; $L_2: a'x+b'y+c'=0$ son paralelos no se aplica este método, sin embargo se tiene:

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \Rightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \lambda \Rightarrow a = \lambda\ a',\ b = \lambda\ b',\ \text{de donde se tiene:}$$

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}\right) = f\left(\frac{\lambda(a'x+b'y)+c}{a'x+b'y+c'}\right) = g(a_2x+b_2y)$$

Que es una ecuación diferencial reducible a variable separable.



OBSERVACIÓN:

Otra forma de transformar a una ecuación diferencial homogénea, las ecuaciones diferenciales que no son homogéneas, es mediante la sustitución de la variable $y = Z^{\alpha}$, ocurriendo esto cuando todos los términos de la ecuación son del mismo grado, atribuyendo el grado 1 a la variable x, el grado α a la variable y, y el grado α -1 a la derivada $\frac{dy}{dx}$. Además se puede transformar a homogénea mediante sustituciones adecuadas de acuerdo al problema.

Ejemplos.- Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales.

1. (x - 4y - 9) dx + (4x + y - 2) dy = 0

Solución

Sea $L_1:\ x-4y-9=0 \ \wedge\ L_2:\ 4x+y-2=0$, como $L_1 \not\parallel L_2$

$\Rightarrow\ \exists p\,(h, k) \in L_1 \cap L_2$, y para esto resolvemos el sistema

$\begin{cases} x-4y-9=0 \\ 4x+y-2=0 \end{cases} \Rightarrow\ x = 1,\ y = -2$, es decir P(1, -2)

Consideremos $x = z + h$, $y = \omega + k$ de donde

$x = z + 1$, $y = \omega - 2$, además $dx = dz$, $dy = d\omega$

reemplazando en la ecuación diferencial dada: $(z - 4\omega)\,dz + (4z + \omega)\,d\omega = 0$ **... (1)**

que es una ecuación diferencial homogénea.

Sea $z = u\omega \Rightarrow dz = u\,d\omega + \omega\,du$ **... (2)**

reemplazando (2) en (1) y simplificando se tiene:

$(u^2+1)d\omega + (u-4)\omega du = 0$, separando la variable $\frac{d\omega}{\omega} + \frac{u-4}{u^2+1}du = 0$, integrando

$$\int \frac{d\omega}{\omega} + \int \frac{u-4}{u^2+1}du = C \ \Rightarrow\ \ln \omega^2(u^2+1) - 8\operatorname{arctg} u = k \quad \textbf{... (3)}$$

Como $z = u\,\omega \Rightarrow u = \frac{z}{\omega} = \frac{x-1}{y+2}$ reemplazando en (3)

$$\ln[(x-1)^2 + (y+2)^2] - 8\,\mathrm{arctg}(\frac{x-1}{y+2}) = k$$

(2) $\frac{dy}{dx} = \frac{x+3y-5}{x-y-1}$

Solución

Sean $L_1 : x+3y-5=0 \;\wedge\; L_2 : x-y-1=0$, como $L_1 \not\parallel L_2$ entonces:

$\exists$ p (h,k) $\in L_1 \cap L_2$, y para esto resolvemos el sistema.

$$\begin{cases} x+3y-5=0 \\ x-y-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow p(2,1)$$

Consideremos $x = z + 2,\ y = \omega + 1,\ dx = dz,\ dy = d\omega$ **... (1)**

a la ecuación diferencial dada expresaremos así:

$(x + 3y - 5)\,dx - (x - y - 1)\,dy = 0$ **... (2)**

reemplazando (1) en (2) y simplificando: $(z + 3\,\omega)\,dz - (z - \omega)\,d\omega = 0$ **... (3)**

es una ecuación diferencial homogénea:

Sea $\omega = u\,z \Rightarrow d\omega = u\,dz + z\,du$, de donde al reemplazar en (3) y separando la variable, se tiene: $\frac{dz}{z} + \frac{(u-1)du}{u^2+2u+1} = 0$, integrando

$$\int \frac{dz}{z} + \int \frac{(u-1)du}{u^2+2u+1} = K \Rightarrow \ln C(x+y-3) = -2(\frac{x-2}{x+y-3})$$

(3) $4xy^2 dx + (3x^2 y - 1)dy = 0$

Solución

Sea $y = z^{\alpha} \Rightarrow dy = \alpha z^{\alpha-1} dz$, reemplazando en la ecuación diferencial se tiene:

$4x\,z^{2\alpha} dx + (3x^2 z^{2\alpha-1} - z^{\alpha-1})\alpha\,dz = 0$ **... (1)**

Luego $2\alpha + 1$ es el grado de $4xz^{2\alpha}$

$2\alpha + 1$ es el grado de $3x^2 z^{2\alpha-1}$

$\alpha - 1$ es el grado de $z^{\alpha-1}$

y para que la ecuación (1) sea homogénea debe cumplirse:

$2\alpha + 1 = \alpha - 1 \Rightarrow \alpha = -2$, como $y = z^{\alpha} \Rightarrow y = z^{-2} \Rightarrow dy = -2z^{-3}dz$

$4xz^{-4}dx + (3x^2 z^{-2} - 1)(-2z^{-3})dz = 0$, de donde

$4xz\,dx - 2(3x^2 - z^2)dz = 0$, que es una ecuación diferencial homogénea.

Sea $z = ux \Rightarrow dz = u\,dx + x\,du$, reemplazando en la ecuación diferencial homogénea se tiene: $4x^2 u\,dx - 2(3x^2 - u^2 x^2)(u\,dx + x\,du) = 0$

de donde simplificando y separando la variable se tiene:

$\frac{dx}{x} + \frac{u^2 - 3}{u^3 - u}du = 0$, integrando se tiene:

$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{u^2 - 3}{u^3 - u}du = C \Rightarrow \ln x + 3\ln u - \ln(u^2 - 1) = C$

como $u = \frac{z}{x}$, $y = z^{-2}$ se tiene: $y(1 - x^2 y)^2 = K$

(4) $(y^4 - 3x^2)dy = -xy\,dx$

Solución

Sea $y = z^{\alpha}, \alpha \in R \Rightarrow dy = \alpha z^{\alpha-1}dz$

reemplazando en la ecuación diferencial dada: $xz^{\alpha}dx + (z^{5\alpha-1} - 3x^2 z^{\alpha-1})\alpha\,dz = 0$ ... (1)

para que la ecuación (1) sea homogénea debe cumplirse

$\alpha + 1 = 5\alpha - 1 = \alpha + 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$

Como $\quad y = z^{\alpha} \quad \Rightarrow \quad y = z^{1/2} \quad \Rightarrow \quad dy = \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}} dz$ ... **(2)**

reemplazando (2) en (1) y simplificando se tiene: $\;2x\,z\,dx + (z^2 - 3x^2)dz = 0$ ... **(3)**

que es una ecuación diferencial homogénea.

Sea $\quad z = ux \quad \Rightarrow \quad dz = udx + xdu$ ... **(4)**

reemplazando (4) en (3) simplificando y separando la variable

$$\frac{dx}{x} + \frac{u^2 - 3}{u^3 - u} du = 0, \quad \text{integrando} \quad \int \frac{dx}{x} + \int \frac{u^2 - 3}{u^3 - u} du = C \;\Rightarrow\; \ln x + \ln(\frac{u^3}{u^2 - 1}) = C$$

como $\quad u = \frac{z}{x}\,,\quad y = \sqrt{z}\quad$ se tiene: $\qquad \therefore \quad x^2 = y^4 + Ky^6$

5) $\quad$ y cos x dx + (2y − sen x) dy = 0

Solución

Sea $\;$ z = sen x $\;\Rightarrow\;$ dz = cos x dx, reemplazando en la ecuación diferencial dada se tiene:

$$y\,dz + (2y - z)\,dy = 0 \qquad \text{... (1)}$$

Que es una ecuación diferencial homogénea.

Sea $\qquad y = u\,z \quad \Rightarrow \quad dy = u\,dz + z\,du$ ... **(2)**

reemplazando (2) en (1), simplificando y separando la variable se tiene:

$$\frac{dz}{z} + \frac{2u - 1}{2u^2} du = 0\,, \quad \text{integrando} \quad \int \frac{dz}{z} + \int \frac{2u - 1}{2u^2} du = C\,, \quad \text{de donde} \quad 2y \ln y + \operatorname{sen} x = 2\,cy$$

6) $\quad (2x^2 + 3y^2 - 7)x\,dx - (3x^2 + 2y^2 - 8)y\,dy = 0$

Solución

$u = x^2 \;\Rightarrow\;$ du = 2x dx, $\;\; v = y^2 \Rightarrow\;$ dv = 2y dy; reemplazando en la ecuación diferencial dada.

$$(2u+3v-7)\frac{du}{2}-(3u+2v-8)\frac{dv}{2}=0\text{, de donde}$$

$(2u + 3v - 7)\,du - (3u + 2v - 8)\,dv = 0$ **... (1)**

Sean $L_1 : 2u+3v-7=0 \ \wedge \ L_2 : 3u+2v-8=0$

como $L_1 \nparallel L_2 \Rightarrow \exists\, p(h,k) \in L_1 \cap L_2$ y para esto resolvemos el sistema siguiente

$$\begin{cases} 2u+3v-7=0 \\ 3u+2v-8=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=2 \\ v=1 \end{cases} \Rightarrow p(2,1)$$

Sean $u = z + 2$, $v = \omega + 1$ reemplazando en (1)

$(2z + 3\omega)\,dz - (3z + 2\omega)\,d\omega = 0$ **... (2)** que es homogénea.

Sea $\omega = zn \Rightarrow d\omega = z\,dn + n\,dz$, reemplazando en (1), simplificando y separando la variable se tiene: $2\frac{dz}{z}+\frac{2n+3}{n^2-1}dn=0$, integrando

$$\int 2\frac{dz}{z}+\int\frac{2n+3}{n^2-1}dn=K \Rightarrow \ln z^2(n^2-1)+\frac{3}{2}\ln\left|\frac{n-1}{n+1}\right|=K$$

como $n=\frac{\omega}{z}$, $\omega=v-1=y^2-1$, $z=u-2=x^2-2$

$$\therefore \quad \ln\left|y^4-x^4+4x^2-2y^2-3\right|+\frac{3}{2}\ln\left|\frac{y^2-x^2+1}{y^2+x^2-3}\right|=K$$

EJERCICIOS PROPUESTOS.-

I. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales.

① $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y+4}{x-y-6}$ **Rpta.** $\operatorname{arctg}(\frac{y+5}{x-1})=\ln\sqrt{(x-1)^2+(y+5)^2}+C$

② $(x - 2y + 5)dx + (2x - y + 4)dy = 0$ **Rpta.** $y-x-3=K(x+y-1)^3$

3) $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y-1}{x-y+1}$ **Rpta.** $\operatorname{arctg}(\frac{y-1}{x})=\ln\sqrt{x^2+(y-1)^2}+C$

4) $(x+y^3)+6xy^2y'=0$ **Rpta.** $y^3=\frac{cx^{-1/2}-x}{3}$

5) $3x+y-2+y'(x-1)=0$ **Rpta.** (x – 1)(3x + 2y – 1) = K

6) $\frac{dy}{dx}=\frac{2y-x+5}{2x-y-4}$ **Rpta.** $(x+y+1)^3=K(y-x-3)$

7) (-4x + 3y – 7)dx – (x + 1)dy = 0 **Rpta.** $y-2x-3=C(x+1)^3$

8) (2x + 3y)dx + (y + 2)dy = 0 **Rpta.** $(2x+y-4)^2=k(y-x-1)$

9) (6x + 4y – 8)dx + (x + y – 1)dy = 0 **Rpta.** $(y+3x-5)^2=C(t+2x-3)$

10) (3x + 5y + 6)dx = (7y + x + 2)dy **Rpta.** $(7y+3x+6)^7(y-x-2)^4=k(x+2)^6$

11) (3y – 7x + 7)dx – (3x – 7y – 3)dy = 0 **Rpta.** $(x+y-1)^5(x-y-1)^2=C$

12) (2x – 4y)dx + (x + y – 3)dy = 0 **Rpta.** $(y-2x+3)^3=C(y-x+1)^2$

13) (x – y + 3) dx + (3x + y + 1)dy = 0 **Rpta.** $y=1-x+ce^{\frac{2x+2}{x+y-1}}$

14) $\frac{dy}{dx}=\frac{2y-x}{2x-y}$ **Rpta.** $|y-x|=c\,|y+x|^3$

15) $\frac{dy}{dx}=-\frac{4x+3y+15}{2x+y+7}$ **Rpta.** $|y+x+4||y+4x+13|^2=k$

16) (x – 4y – 9)dx + (4x + y – 2)dy = 0 **Rpta.** $\ln((x-1)^2+(y+2)^2)-8\operatorname{arctg}(\frac{x-1}{y+2})=C$

17) (x – 4y – 3)dx – (x – 6y – 5)dy = 0 **Rpta.** $(x-2y-1)^2=C(x-3y-2)$

(18) $(x - 3y + 2)dx + 3(x + 3y - 4)dy = 0$ **Rpta.** $\ln[(x-1)^2 + 9(y-1)^2] - 2\operatorname{arctg}(\frac{x-1}{3(y-1)}) = C$

(19) $(x + 2y - 1)dx - (2x + y - 5)dy = 0$ **Rpta.** $(x - y - 4)^3 = C(x + y - 2)$

(20) $(x + y - 4)dx - (3x - y - 4)dy = 0,\ y(4) = 1$ **Rpta.** $2(x + 2y - 6) = 3(x - y)\ln(\frac{x-y}{3})$

(21) $(2x - 3y + 4)dx + 3(x - 1)dy = 0,\ \ y(3) = 2$ **Rpta.** $3(y-2) = -2(x-1)\ln(\frac{x-1}{2})$

(22) $\frac{dy}{dx} = \frac{x-y+2}{x+y-1}$ **Rpta.** $(2y-3)^2 + 2(2y-3(2x+1) + (2x+1)^2 = K$

(23) $\frac{dy}{dx} = \frac{2x+3y+1}{x-2y+1}$ **Rpta.** $\ln\left|\frac{w^4}{2z^2 + 2xw + w^2}\right| = \operatorname{arctg}\left(\frac{2z-w}{2z+w}\right)$

$w = y - \frac{1}{7},\ \ z = x + \frac{5}{7}$

(24) $(4x + 3y + 2)dx + (5x + 4y + 1)dy = 0$ **Rpta.** $4\ln(x+y-1) = \frac{x+5}{x+y-1} + C$

(25) $(x - 2y + 3)dy + (2x + y - 1)dx = 0$ **Rpta.** $x^2 + xy - y^2 - x + 3y = C$

(26) $(x - y + 4)\,dy + (x + y - 2)\,dx = 0$ **Rpta.** $x^2 + 2xy - y^2 - 4x + 8y = C$

(27) $(4x + 3y - 7)\,dx + (3x - 7y + 4)dy = 0$ **Rpta.** $4x^2 + 6xy - 7y^2 - 14x + 8y = C$

(28) $\frac{dy}{dx} = \frac{2x+3y+1}{3x-2y-5}$ **Rpta.** $\ln|(x-1)^2 + (y+1)^2| - 3\operatorname{arctg}(\frac{y+1}{x-1}) = C$

(29) $(5x + 2y + 1)\,dx + (2x + y + 1)\,dy = 0$ **Rpta.** $5x^2 + 4xy + y^2 + 2x + 2y = C$

(30) $(x - 2y - 3)\,dx + (2x + y - 1)\,dy = 0$

Rpta. $\ln(x^2 + y^2 - 2x + 2y + 2) + 4\operatorname{arctg}(\frac{y+1}{x-1}) = C$

(31) $(2x - y - 1)\,dx + (3x + 2y - 5)\,dy = 0$

Rpta. $\ln\sqrt{y^2 + xy - 3y - 3x + 3} + \frac{2}{\sqrt{3}}\,arc.\text{tg}\,\frac{2y + x - 3}{\sqrt{3}(x-1)} = C$

(32) $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{x+y}{4x-4}\right)^2$ **Rpta.** $x = 1 + ce^{\frac{4x-4}{x-4y-2}}$

(33) $(9x + 7y - 5)\,dx + (5x + 4y - 3)\,dy = 0$

Rpta. $\ln|14y^2 + 12xy + 9x^2 - 44y - 6x + 41| - \frac{\sqrt{10}}{15}\text{arctg}\left(\frac{\sqrt[3]{10}}{14}\left(\frac{y-2}{x+1} + \frac{3}{7}\right)\right) = C$

(34) $(4x + 11y - 42)\,dx + (11x - 9y - 37)\,dy = 0$ **Rpta.** $4x^2 + 22xy - 9y^2 - 84x - 74y = C$

(35) $\frac{dy}{dx} = \frac{6x + y - 12}{6x - y - 12}$ **Rpta.** $(y - 2x + 4)^4 = C(y - 3x + 6)^3$

(36) $\frac{dy}{dx} = \frac{x + y - 1}{x - y - 1}$ **Rpta.** $(x-1)^2 + y^2 = Ke^{2\,\text{arctg}\left(\frac{y}{x-1}\right)}$

(37) $(4x + 3y + 2)\,dx + (5x + 4y + 1)\,dy = 0$ **Rpta.** $4\ln|x + y - 1| = \frac{5}{x + y - 1} + C$

(38) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(\frac{x + y - 1}{x + 2}\right)^2$ **Rpta.** $2\,\text{arctg}\left(\frac{y-3}{x+2}\right) = \ln(x+2) + K$

(39) $(2x - 3y + 4)\,dx + 3\,(x - 1)\,dy = 0$, cuando $x = 3$, $y = 2$

Rpta. $3(y - 2) = -2(x-1)\ln\left(\frac{x-1}{2}\right)$

II. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales.

(1) $y^3dx + 2(x^2 - xy^2)dy = 0$ **Rpta.** $y^2 = x\ln cy^2$

(2) $(x + y^3)dx + (3y^5 - 3y^2x)dy = 0$ **Rpta.** $\text{arctg}\left(\frac{y^3}{x}\right) = \frac{1}{2}\ln|x^2 + y^6| + c$

③ $(y + y\sqrt{x^2y^4+1})dx + 2x\,dy = 0$ **Rpta.** $\sqrt{x^2y^4+1} = cy^2 + 1$

④ $\frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2y + y^2}{2x^3 + 3xy}$; $y(1) = 2$ **Rpta.** $x^3y^2 + xy^3 = -4$

⑤ $(1 - xy^2)dx - 2x^2y\,dy = 0$ **Rpta.** $xy^2 = \ln x + c$

⑥ $x^2(1 - xy)\frac{dy}{dx} + (1 + xy - x^2y^2) = 0$ **Rpta.** $x^2y^2 - 2xy - 2\ln x = c$

⑦ $(2y^2 - 3x)dx + 2xy\,dy = 0$ **Rpta.** $x^2y^2 - x^3 = c$

⑧ $(y^2 - 3x^2y)dx + x^3dy = 0$ **Rpta.** $y(x - c) = x^3$

⑨ $2(xy^2 + 1)dy + y^3dx = 0$ **Rpta.** $xy^2 + 2\ln y = c$

⑩ $(1 - x^2y)\frac{dy}{dx} + 2xy^2 = 0$ **Rpta.** $1 - 2x^2y = cy^2$

⑪ y (3 – xy) dx + x (2 – xy) dy = 0 **Rpta.** $x^3y^2 = ce^{xy}$

⑫ $(x + 2x^2y)dy + (2y + 3xy^2)dx = 0$ **Rpta.** $x^2y(1 + xy) = c$

⑬ $(x^2y + x)\frac{dy}{dx} + (xy^2 - y) = 0$ **Rpta.** $y = cxe^{-xy}$

⑭ $(x^2 - 2y^3)dx + 3xy^2dy = 0$ **Rpta.** $y^3 = x^2(c - \ln x)$

⑮ $(x + y^3)dx + 6xy^2dy = 0$ **Rpta.** $y^3 = -\frac{x}{3} + Kx^{-\frac{1}{2}}$

⑯ $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y} - \sqrt{x-y}}$ **Rpta.** $x + \sqrt{x^2 - y^2} = c$

⑰ $(2 + 3xy^2)dx - 4x^2y\,dy = 0$ sug. $y = vx^n$ **Rpta.** $2 + 5xy^2 = cx^{\frac{5}{2}}$

(18) $\frac{dy}{dx}=\frac{2y}{x}+\frac{x^3}{y}+x\,\text{tg}(\frac{y}{x^2})$ sug. $y=vx^2$ **Rpta.** $x^2\cos\frac{y}{x^2}+y\,\text{sen}\frac{y}{x}=cx^3$

(19) $\frac{dy}{dx}=\frac{3x^5+3x^2y^2}{2x^3y-2y^3}$ $(sug.\, x=u^p, y=v^q)$ **Rpta.** $\frac{1}{2}\ln|x^6+y^4|+arc.\text{tg}(\frac{x^3}{y^2})=c$

(20) $(x+y)^2(x\,dy-y\,dx)+[y^2-2x^2(x+y)^2](dx+dy)=0$, sug. z = x + y, $u=\frac{y}{x}$

Rpta. $(y-x^2-xy)(x+y)^3=c(y+2x^2+2xy)$

(21) $\frac{dy}{dx}=-\frac{3x^2y+y^2}{2x^3+3xy}$, y(1) = -2 **Rpta.** $x^3y^2+xy^3=-4$

(22) $(y^2-\ln x)dx+xy^3dy=0$, sug. $x=e^u$, $y=\sqrt{z}$

Rpta. $(3-\sqrt{3})\ln|y^2+(1-\sqrt{3})\ln x|+(3+\sqrt{3})\ln|y^2+(1+\sqrt{3})\ln x|=c$

(23) $x^2y\,dx-(x^3+y^5)dy=0$, sug. x = uy **Rpta.** $3y^5-2x^3=cy^3$

(24) $x(x+\sqrt{y})dx+2\sqrt{y}\,dy=0$; sug: $y=u^2$ **Rpta.** $\ln x+4\int_0^{\sqrt{\frac{\sqrt{y}}{x}}}\frac{t^2dt}{4t^3+t+1}=c$

(25) $(3\,\text{tg}\,x-2\cos y)\sec^2x\,dx+\text{tg}\,x\,\text{sen}\,y\,dy=0$ **Rpta.** $\cos y\,\text{tg}^2x=\text{tg}^3x+c$

(26) Pruébese que con la ayuda de la sustitución y = ux, podemos resolver cualquier ecuación de la forma $y^n f(x)dx+H(x,y)(y\,dx-x\,dy)=0$ donde H (x,y) es función homogénea en x e y.

(27) $(x^2y^3+x^4y^4+x^4y+x^2y^4+y^4+y^5)dx-(x^3y^2+x^3+xy^4)dy=0$

Rpta. $x^4y^3+3x^2y^3-3y^3-3y^4+3x^2y^2+x^4=Kxy^3$

(28) $(x^3y^4+x^5y^5+x^5y^2+x^3y^5+y^5+y^7)dx-(x^4y^3+x^6y+xy^6)dy=0$

Rpta. $\frac{x^3}{3}+x-\frac{1}{2x^2}-\frac{y^2}{2x^2}+\frac{x}{y}+\frac{x^3}{3y^3}=c$

(29) Demostrar que la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx}=\frac{Ax+By^n}{y^{n-1}(A'x+B'y^m)}$ se puede transformar en una ecuación diferencial homogénea, haciendo el cambio de variable $u=y^m$.

(30) Demostrar que la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx}=\frac{x^{m-1}(Ay+Bx^m)}{A'y+B'x^m}$, se puede transformar en una ecuación diferencial homogénea, haciendo el cambio de variable $u=y^m$.

(31) $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2-x}{2xy}$, sug: $z=y^2$ **Rpta.** $x=Ke^{-\frac{y^2}{x}}$

(32) $\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2y+x^5}{y-x^3}$, sug: $z=x^3$ **Rpta.** $3y^2-6yx^3-x^6=c$

(33) $(2xy-4x^3)dx-(2y-x^2)dy=0$ **Rpta.** $y^2-x^2y+x^4=c$

(34) $3\frac{dy}{dx}=\frac{y+\frac{x}{y^2}}{3y^3-x}$ **Rpta.** $x^2+2xy^3-3y^6=c$

(35) $(4xy^{\frac{1}{2}}-6y)+(4y^{\frac{1}{2}}-3x)dy=0$, sug. $z=y^{\frac{1}{2}}$ **Rpta.** $x^2-3xy^{\frac{1}{2}}+2y=C$

(36) $2\frac{dy}{dx}=\frac{y^3-xy^5}{xy^2+1}$ **Rpta.** $x^2-\frac{2x}{y^2}-\frac{1}{y^4}=c$

(37) $2\frac{dy}{dx}=-\frac{y+4\sqrt{x}}{x-2y\sqrt{x}}$ **Rpta.** $2x+y\sqrt{x}-y^2=c$

38) $(2x-y^4)dx-4y^3(x+12y^4)dy=0$ **Rpta.** $x^2-xy^4-6y^8=c$

39) $(xy^2+y)dx-x\,dy=0$ **Rpta.** $x^2y+2x=cy$

40) $(x-y^2)dx+2xydy=0,$ **Rpta.** $xe^{y^2/x}=K$

41) $(3x^5+3x^2y^2)dx+(2y^3-2x^3y)dy=0$ **Rpta.** $\ln(x^3+y^2)-2\operatorname{arctg}\frac{y^2}{x^3}=k$

2.6. ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS EXACTAS.-

a) DIFERENCIAL TOTAL:

Si $f: R^2 \to R$, es una función diferenciable en $(x,y)\in R^2$, entonces la diferencial total de f es la función df, cuyo valor está dado por:

$$\boxed{df(x,y)=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy}$$

b) DIFERENCIAL EXACTA:

Una expresión de la forma M(x,y) dx + N(x,y) dy = 0, se denomina exacta si existe una función $f: D\subset R^2 \to R$ tal que:

$$\boxed{df(x,y)=M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy}$$

Es decir, que toda expresión que es la diferencial total de alguna función de x e y se llama diferencial exacta.

c) DEFINICIÓN:

Consideremos la ecuación diferencial.

$$M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0 \qquad \dots(\alpha)$$

Si existe una función z = **f (x,y)** tal que:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=M(x,y) \quad \wedge \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=N(x,y)$$

diremos que la ecuación (α) es una ecuación diferencial exacta.

d) TEOREMA:

La condición necesaria y suficiente para que una ecuación diferencial

M(x,y) dx + N(x,y)dy = 0, sea exacta, es que:

$$\boxed{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}}$$

Ejemplo: La ecuación diferencial ordinaria.

$(e^x \text{ sen } y - 2y \text{ sen } x)dx + (e^x \cos y + 2\cos x)dy = 0$ es exacta porque:

$$M(x,y) = e^x \text{ sen } y - 2y \text{ sen } x \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = e^x \cos y - 2 \text{ sen } x$$

$$N(x,y) = e^x \cos y + 2\cos x \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = e^x \cos y - 2 \text{ sen } x$$

de donde $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}$

e) Solución de una Ecuación Diferencial Exacta:

Consideremos la ecuación diferencial exacta.

$$\boxed{\text{M (x,y) dx + N (x,y) dy = 0}} \quad \textbf{... (1)}$$

Entonces existe una función f (x,y) tal que

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \text{ y } \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N(x,y) \quad \textbf{... (2)}$$

reemplazando (2) en la ecuación (1) se tiene:

$$\boxed{\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = dy = 0} \quad \textbf{... (3)}$$

por otra parte, si z = f(x,y) entonces su diferencial total es:

$$dz = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy \qquad \text{... (4)}$$

Luego al comprobar (3) y (4) se tiene: $dz = 0 \Rightarrow z = c$, es decir $f(x,y) = c$

Que es la solución de la ecuación diferencial.

Como $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$ integramos con respecto a x.

$$f(x,y) = \int M(x,y) + g(y) \qquad \text{... }(\alpha)$$

donde g (y) es la constante de integración, que es una función que depende sólo de la variable y, puesto que la integración es con respecto a x, derivando la ecuación (α) con respecto a y es decir: $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx + g'(y)$

Como $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$ entonces se tiene: $N(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx + g'(y)$

de donde $g'(y) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx$, integrando

$$g(y) = \int [N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx]\ dy + K_1 ....(\beta) \qquad \text{... }(\beta)$$

Reemplazando (β) en (α) se tiene la solución general de la ecuación diferencial (1); en forma análoga se hace para el otro caso cuando se toma $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$ y se integre con respecto a la variable y.

f) **Ejemplos:** Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

1 $(2xy^2 + 2y)dx + (2x^2y + 2x)dy = 0$

Solución

$$\begin{cases} M(x,y) = 2xy^2 + 2y \\ N(x,y) = 2x^2y + 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 4xy + 2 \\ \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 4xy + 2 \end{cases} \text{ de donde } \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

por lo tanto la ecuación diferencial es exacta;

entonces $\exists f(x,y)$, tal que $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$, de donde

$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2xy^2 + 2y$, integrando respecto a x se tiene: $f(x,y) = \int (2xy^2 + 2y)dx + g(y)$

$f(x,y) = x^2y^2 + 2xy + g(y)$ derivando respecto a y.

$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2x^2y + 2x + g'(y)$, pero como $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$

se tiene $N(x,y) = 2x^2y + 2x + g'(y)$

$2x^2y + 2x + g'(y) = 2x^2y + 2x \Rightarrow g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = c$

$f(x,y) = x^2y^2 + 2xy + c \qquad \therefore \quad x^2y^2 + 2xy = K$

2 $(e^x \operatorname{sen} y - 2y \operatorname{sen} x)dx + (e^x \cos y + 2\cos x)dy = 0$

Solución

$$\begin{cases} M(x,y) = e^x \operatorname{sen} y - 2y \operatorname{sen} x \\ N(x,y) = e^x \cos y + 2\cos x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} = e^x \cos y - 2\operatorname{sen} x \\ \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x} = e^x \cos y - 2\operatorname{sen} x \end{cases}$$

de donde $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}$, por lo tanto la ecuación diferencial es exacta, entonces existe una función f(x,y) tal que $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$. Luego tenemos

$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = e^x \operatorname{sen} y - 2y \operatorname{sen} x$, integrando respecto a x.

$$f(x,y)=\int(e^x \operatorname{sen} y-2y\operatorname{sen} x)dx+g(y)$$

$f(x,y)=e^x \operatorname{sen} y+2y\cos x+g(y)$, derivando respecto a y.

$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}=e^x \cos y+2\cos x+g'(y)$, como $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}=N(x,y)$

entonces $N(x,y)=e^x \cos y+\cos x+g'(y)$

$e^x \cos y+2\cos x+g'(y)=e^x \cos y+2\cos x \Rightarrow g'(y)=0 \Rightarrow g(y)=c$

Luego $f(x,y)=e^x \operatorname{sen} y+2y\cos x+c$ $\quad e^x \operatorname{sen} y+2y\cos x=K$

3) $(2xy^3+y\cos x)dx+(3x^2y^2+\operatorname{sen} x)dy=0$

Solución

$$\begin{cases} M(x,y)=2xy^3+y\cos x \\ N(x,y)=3x^2y^2+\operatorname{sen} x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}=6xy^2+\cos x \\ \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}=6xy^2+\cos x \end{cases}$$

de donde $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}$, por lo tanto la ecuación diferencial es exacta, entonces, existe una función f (x,y) tal que $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=M(x,y)$. Luego tenemos:

$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=2xy^3+y\cos x$, integrando respecto a x.

$f(x,y)=\int(2xy^3+y\cos x)dx+g(y)$, de donde

$f(x,y)=x^2y^3+y\operatorname{sen} x+g(y)$, derivando respecto a y.

$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}=3x^2y^2+\operatorname{sen} x+g'(y)$, como $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}=N(x,y)$

entonces $N(x,y)=3x^2y^2+\operatorname{sen}x+g'(y)$; de donde

$3x^2y^2+\operatorname{sen}x+g'(y)=3x^2y^2+\operatorname{sen}x \Rightarrow g'(y)=0 \Rightarrow g(y)=c$

Luego $f(x,y)=x^2y^3+y\operatorname{sen}x+c$ $\therefore\ x^2y^3+y\operatorname{sen}x=K$

4) $$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)dx+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2}\right)dy=0$$

Solución

$$\begin{cases} M(x,y)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y} \\ N(x,y)=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{1}{y}-\dfrac{x}{y^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\dfrac{-xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}-\dfrac{1}{y^2} \\ \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}=\dfrac{-xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}-\dfrac{1}{y^2} \end{cases}$$

de donde $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}$, por lo tanto la ecuación diferencial es exacta, entonces existe una función f (x,y) tal que $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=M(x,y)$. Luego tenemos:

$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$, integrando respecto a x.

$$f(x,y)=\int\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)dx+g(y)$$

$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}+\ln x+\dfrac{x}{y}+g(y)$, derivando respecto a y.

$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}-\dfrac{x}{y^2}+g'(y)$ como $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}=N(x,y)$

entonces $N(x,y)=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}-\dfrac{x}{y^2}+g'(y)$; de donde

$$\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x}{y^2}+g'(y)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2} \Rightarrow g'(x)=0 \quad \Rightarrow \quad g(y)=\ln y+c$$

Luego $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}+\ln x+\frac{x}{y}+\ln y+c$ $\qquad \therefore \quad \sqrt{x^2+y^2}+\ln xy+\frac{x}{y}=K$

5 $\qquad (\text{sen } y+y\,\text{sen } x+\frac{1}{x})dx+(x\cos y-\cos x+\frac{1}{y})dy=0$

Solución

$$\begin{cases} M(x,y)=\text{sen } y+y\,\text{sen } x+\frac{1}{x} \\ N(x,y)=x\cos y-\cos x+\frac{1}{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\cos y+\text{sen } x \\ \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=\cos y+\text{sen } x \end{cases}$$

de donde $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$, por lo tanto la ecuación diferencial es exacta, entonces existe una función f (x,y) tal que $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=M(x,y)$.

Luego tenemos $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\text{sen } y+y\,\text{sen } x+\frac{1}{x}$, integrando respecto a x.

$$f(x,y)=\int(\text{sen } y+y\,\text{sen } x+\frac{1}{x})dx+g(y)$$

$f(x,y)=x\,\text{sen } y-y\cos x+\ln x+g(y)$, derivando respecto a y.

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=x\cos y-\cos x+g'(y)$ como $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=N(x,y)$, entonces

$N(x,y)=x\cos y-\cos x+g'(y)$, de donde

$$x\cos y-\cos x+g'(y)=x\cos y-\cos x+\frac{1}{y} \Rightarrow g'(y)=\frac{1}{y} \Rightarrow g(y)=\ln y+c$$

Luego f (x,y) = x sen y – y cos x + ln x + ln y + c

$\therefore$ x sen y – y cos x + ln xy = K

6 $$\left(\frac{y}{1+x^2}+arc.\operatorname{tg} y\right)dx+\left(\frac{x}{1+y^2}+arc.\operatorname{tg} x\right)dy=0$$

Solución

$$\begin{cases} M(x,y)=\dfrac{y}{1+x^2}+arc.\operatorname{tg} y \\ N(x,y)=\dfrac{x}{1+y^2}+arc.\operatorname{tg} x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\dfrac{1}{1+x^2}+\dfrac{1}{1+y^2} \\ \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}=\dfrac{1}{1+y^2}+\dfrac{1}{1+x^2} \end{cases}$$

de donde $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}$, por lo tanto la ecuación diferencial es exacta, entonces existe una función f (x,y) tal que $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=M(x,y)$.

Luego tenemos: $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\dfrac{y}{1+x^2}+\operatorname{arctg} y$ integrando respecto a x.

$f(x,y)=\int\left(\dfrac{y}{1+x^2}+arc.\operatorname{tg} y\right)dx+g(y)$, efectuando.

f (x,y) = y arc.tg x + x arc. tg y + g (y), derivando respecto a y.

$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}=arc.\operatorname{tg} x+\dfrac{x}{1+y^2}+g'(y)$. Como $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}$

entonces $N(x,y)=\operatorname{arctg} x+\dfrac{x}{1+y^2}+g'(y)$, de donde

$$\operatorname{arctg} x+\frac{x}{1+y^2}+g'(y)=\frac{x}{1+y^2}+\operatorname{arctg} x \quad \Rightarrow \quad g'(y)=0 \quad \Rightarrow \quad g(y)=c$$

Luego f (x,y) = y arc.tg x + x arc.tg y + c $\qquad \therefore$ y arc.tg x + x arc.tg y = K

g. EJERCICIOS PROPUESTOS.

I. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales en caso de ser exactas:

1. $(2xy - \operatorname{tg} y)dx + (x^2 - x\sec^2 y)dy = 0$ **Rpta:** $x^2 y - x\operatorname{tg} y = K$

2. $(\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y - xe^y)dy = (e^y + \cos x \cos y)dx$ **Rpta:** $xe^y + \cos y \operatorname{sen} x = K$

3. $(y + y\cos xy)\,dx + (x + x\cos xy)\,dy = 0$ **Rpta:** $xy + \operatorname{sen} xy = K$

4. $(\frac{y}{x} + 6x)dx + (Lnx - 2)dy = 0$ **Rpta:** $y\ln x + 3x^2 - 2y = K$

5. $(\cos 2y - 3x^2 y^2)dx + (\cos 2y - 2x\operatorname{sen} 2y - 2x^3 y)dy = 0$

   Rpta: $\frac{\operatorname{sen} 2y}{2} + x\cos 2y - x^3 y^2 = c$

6. $e^x(x^2 e^x + e^x + xy + y)dx + (xe^x + y)dy = 0$

   Rpta: $xye^x + \frac{y^2}{2} + \frac{e^{2x}}{4}(2x^2 - 2x + 3)x = c$

7. $(1 + y^2 + xy^2)dx + (x^2 y + y + 2xy)dx = 0$ **Rpta:** $2x + y^2(1+x)^2 = c$

8. $(3x^2 \operatorname{tg} y - \frac{2y^3}{x^3})dx + (x^3 \sec^2 y + 4y^3 + \frac{3y^2}{x^2})dy = 0$ **Rpta:** $x^3 \operatorname{tg} y + y^4 + \frac{y^3}{x^2} = c$

9. $(2x + \frac{x^2 + y^2}{x^2 y})dx = \frac{x^2 + y^2}{xy^2})dy$ **Rpta:** $x^3 y + x^2 - y^2 = cxy$

10. $(\frac{\operatorname{sen} 2x}{y} + x)dx + (y - \frac{\operatorname{sen}^2 x}{y^2})dy = 0$ **Rpta:** $\frac{\operatorname{sen}^2 x}{y} + \frac{x^2 + y^2}{2} = c$

11. $(\frac{xy}{\sqrt{1+x^2}} + 2xy - \frac{y}{x})dx + (\sqrt{1+x^2} + x^2 - Lnx)dy = 0$

    Rpta: $y\sqrt{1+x^2} + x^2 y - yLnx = c$

(12) $(y-x^3)dx+(x+y^3)dy=0$ **Rpta:** $4xy-x^4+y^4=c$

(13) (y + y cos xy) dx + (x + x cos xy) dy = 0 **Rpta:** xy + sen xy = c

(14) $(x-1)^{-1}ydx+[\ln(2x-2)+\frac{1}{y}]dy=0$ **Rpta:** y ln | 2x – 2 | + ln y = c

(15) $(3x^2+6xy^2)dx+(6x^2y+4y^3)dy=0$ **Rpta:** $x^3+3x^2y^2+y^4=c$

(16) $(9x^2+y-1)-(4y-1)\frac{dy}{dx}=0$ **Rpta:** $3x^3+xy-x-2y^2=c$

(17) (y sen x – sen y) dx – (x cos y + cos x) dy = 0 **Rpta:** x sen y + y cos x = c

(18) $(3x^2+3xy^2)dx+(3x^2y-3y^2+2y)dy=0$ **Rpta:** $x^3+\frac{3}{2}x^2y^2-y^3+y^2=c$

(19) $\frac{2x}{y}dy+(2\ln 5y+\frac{1}{x})dx=0$ **Rpta:** ln x + 2x ln y = c

(20) $e^{x^2}(dy+2xydx)=3x^2dx$ **Rpta:** $ye^{x^2}=x^3+c$

(21) $e^{2x}(dy+2ydx)=x^2dx$ **Rpta:** $3ye^{2x}=x^3+c$

(22) $y^3\operatorname{sen}2x\,dx-3y^2\cos^2x\,dy=0$ **Rpta:** $y^3(1+\cos 2x)=c$

(23) $(ye^{xy}\cos 2x-2e^{xy}\operatorname{sen}2x+2x)dx+(xe^{xy}\cos 2x-3)dy=0$

Rpta: $e^{xy}\cos 2x+x^2-3y=c$

(24) $(ax^2+2bxy+cy^2)dx+(bx^2+2cxy+y^2)dy=0$ **Rpta:** $ax^3+3bx^2y+3cy^2+y^3=c$

(25) $(x^2+ye^{2y})dx+(2xy+x)e^{2y}dy=0$ **Rpta:** $x^3+3xye^{2y}=K$

(26) (sen x + sen y) dx + (x cos y + cos y) dy = 0 **Rpta:** (x + 1) sen y - cos x = K

(27) $e^x(y^3+xy^3+1)dx+3y^2(xe^x-6)dy=0$ **Rpta:** $xe^x y^3+e^x-6y^3=c$

(28) $4x^3-e^{xy}(y+xy')=0$ **Rpta:** $x^4-e^{xy}=c$

(29) $dx=\dfrac{ydx}{1-x^2y^2}+\dfrac{x}{1-x^2y^2}dy$ **Rpta:** $\dfrac{1+xy}{1-xy}=Ke^{2x}$

(30) $(3x^2+6xy-y^2)dx+(3x^2-2xy+2y^2)dy=0$ **Rpta:** $x^3+3x^2y-xy^2+y^3=c$

(31) $[\ln(x-y)+\dfrac{x+y}{x-y}]dx+[\ln(x-y)-\dfrac{x+y}{x-y}]dy=0$ **Rpta:** $(x+y)\ln(x-y)=c$

(32) $(\dfrac{y}{x}+\ln y)dx+(\dfrac{x}{y}+\ln x)dy=0$ **Rpta:** $y\ln x+x\ln y=c$

(33) $\sec x(\operatorname{tg} x.\operatorname{tg} y+y\sec x)dx+(\sec x.\sec^2 y+\operatorname{tg} x)dy=0$ **Rpta:** $\sec x.\operatorname{tg} y+y\operatorname{tg} x=c$

(34) $(1+\operatorname{tg}(xy))dx+(\sec(xy).\operatorname{tg}(xy)+x\sec^2(xy)).(x\,dy+y\,dx)=0$

Rpta: $x+\sec(xy)+x\operatorname{tg}(xy)=c$

(35) $(5x^4-9x^2y^2+5y^4)dx+2xy(10y^2-3x^2)dy=0$ **Rpta:** $x^5-3x^3y^2+5xy^4=K$

(36) $(1+\ln xy)dx+(1+\dfrac{x}{y})dy=0$ **Rpta:** $x\ln(xy)+y=K$

(37) $(ye^x+e^y)dx+(e^x+xe^y)dy=0$ **Rpta:** $ye^x+xe^y=K$

(38) $y(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{(x-y)^2})dx+x(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{(x-y)^2})dy=0$ **Rpta:** $\dfrac{xy}{2}+\dfrac{y}{x-y}=K$

(39) $y(e^{xy}+y)dx+x(e^{xy}+2y)dy=0$ **Rpta:** $e^{xy}+xy^2=K$

(40) $\dfrac{y}{x}dy-(\dfrac{y^2}{2x^2}+x)dx=0$ **Rpta:** $y^2-x^3=cx$

(41) $(xy^2 - y)dx + x(xy-1)dy = 0$ **Rpta:** $\ln(Kxy) = -\frac{1}{xy}$

(42) (cos x. cos y – ctg x) dx – sen x.sen y dy = 0 **Rpta:** sen x cos y = ln (K sen x)

(43) $2ydx + 3xdy = \frac{dx}{xy^3} - \frac{dy}{y^4}$ **Rpta:** $x^2y^3 = \frac{x}{y} + c$

(44) (2x + y cos xy) dx + x cos xy dy = 0 **Rpta:** $x^2 + \text{sen}(xy) = c$

(45) $(2xy + 1 + \ln x)dx + x^2 dy = 0$ **Rpta:** x (xy + ln x) = K

(46) $(2ye^{2x} + 2x\cos y)dx + (e^{2x} - x^2 \text{ sen } y)dy = 0$ **Rpta:** $ye^{2x} + x^2\cos y = c$

(47) $(2xy + x^3)dx + (x^2 + y^2)dy = 0$ **Rpta:** $\frac{x^4}{4} + \frac{y^3}{3} + x^2y = c$

(48) $(2xe^y + y^2e^x + 2x)dx + (x^2e^y + 2ye^x)dy = 0$ **Rpta:** $x^2e^y + y^2e^x + x^2 = c$

(49) $(e^x \text{ sen } y - 2y\text{ sen } x)dx + (e^x\cos y + 2\cos x)dy = 0$ **Rpta:** $e^x \text{ sen } y + 2y\cos x = c$

(50) $(ye^{xy}\cos 2x - 2e^{xy}\text{ sen } 2x + 2x)dx + (xe^{xy}\cos 2x - 3)dy = 0$

Rpta: $e^{xy}\cos 2x + x^2 - 3y = c$

(51) $(2xy^2 + 2y)dx + (2x^2y + 2x)dy = 0$ **Rpta:** $x^2y^2 + 2xy = c$

(52) $(x^2 + y^2 + 2x)dx + 2xy\, dy = 0$ **Rpta:** $\frac{x^3}{3} + xy^2 + x^2 = c$

(53) $(x^3 - 3xy^2 + 2)dx - (3x^2y - y^2)dy = 0$ **Rpta:** $\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2y^2}{2} + 2x + \frac{y^3}{3} = c$

(54) $\frac{2xdx}{y^3} + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0$ **Rpta:** $x^2 - y^2 = cy^3$

(55) $yx^{y-1}dx + x^y \ln x\, dy = 0$ **Rpta:** $x^y = c$

(56) $(\operatorname{sen} y + y \operatorname{sen} x + \frac{1}{x})dx + (x\cos y - \cos x + \frac{1}{y})dy = 0$ **Rpta:** x sen y – y cos x + ln xy = c

(57) $\frac{y + \operatorname{sen} x.\cos^2 xy}{\cos^2 xy}dx + (\frac{x}{\cos^2 xy} + \operatorname{sen} y)dy = 0$ **Rpta:** tg xy – cos x – cos y = c

(58) $(\frac{1}{y}\operatorname{sen}\frac{x}{y} - \frac{y}{x^2}\cos(\frac{y}{x}) + 1)dx + (\frac{1}{x}\cos(\frac{y}{x}) - \frac{x}{y^2}\operatorname{sen}(\frac{x}{y}) + \frac{1}{y^2})dy = 0$

Rpta: $\operatorname{sen}(\frac{y}{x}) - \cos(\frac{x}{y}) + x - \frac{1}{y} = c$

(59) $(1 + e^{\frac{x}{y}})dx + e^{\frac{x}{y}}(1 - \frac{x}{y})dy = 0$ **Rpta:** $x + ye^{\frac{x}{y}} = c$

(60) $cx(2x^2 + y^2)dx + y(x^2 + 2y^2)dy = 0$ **Rpta:** $x^4 + x^2y^2 + y^4 = c$

(61) [n cos (nx + my) - m sen (mx + ny)]dx + [m cos (nx + my) - n sen (mx + ny)] dy = 0

Rpta: sen (nx + my) + cos (mx + ny) = c

(62) $(x+3)^{-1}\cos y dx - (\operatorname{sen} y.\ln(5x+15) - \frac{1}{y})dy = 0$ **Rpta:** cos y . ln (5x + 15) + ln y = c

(63) $\frac{y^2 - 2x^2}{xy^2 - x^3}dx + \frac{2y^2 - x^2}{y^3 - x^2y}dy = 0$ **Rpta:** $x^2y^2(x^2 - y^2) = c$

(64) $\frac{3y}{x^2 + 3x}dx + (2y\ln(\frac{5x}{x+3}) + 3\operatorname{sen} y)dy = 0$ **Rpta:** $y^2\ln(\frac{5x}{x+3}) - 3\cos y = c$

(65) $(\cos 2y - 3x^2y^2)dx + (\cos 2y - 2x\operatorname{sen} 2y - 2x^3y)dy = 0$

Rpta: $2x\cos 2y - 2x^3y^2 + \operatorname{sen} 2y = c$

(66) $(\frac{y}{x} - \ln y)dx + (\ln x - \frac{x}{y})dy = 0$ **Rpta:** y ln x – x ln y = c

(67) $(x^3+e^x \operatorname{sen} y+y^3)dx+(3xy^2+e^x\cos y+y^3)dy=0$

Rpta: $x^4+y^4+4xy^3+4e^x \operatorname{sen} y=K$

(68) $[\ln(\ln(x-y))+\frac{1}{\ln(x-y)}.\frac{x}{x-y}]dx-[\frac{1}{\ln(x-y)}.\frac{x}{x-y}]dy=0$ **Rpta:** x ln (ln (x – y)) = K

(69) $\frac{dy}{dx}=\frac{x-y\cos x}{\operatorname{sen} x+y}$ **Rpta:** $x^2-y^2-2y\operatorname{sen} x=c$

(70) $(x^2+\frac{y}{x})dx+(\ln x+2y)dy=0$ **Rpta:** $x^3+3y\ln x+3y^2=c$

II. Resolver las ecuaciones diferenciales con las condiciones iniciales dadas.

(1) $3y(x^2-1)dx+(x^3+8y-3x)dy=0$, y (0) = 1 **Rpta:** $xy(x^2-3)=4(1-y^2)$

(2) $(1-xy)^{-2}dx+[y^2+x^2(1-xy)^{-2}]dy=0$, cuando x = 2, y =1

Rpta: $xy^4-y^3+5xy-3x=5$

(3) $(xy^2+x-2y+3)dx+x^2y\,dy=2(x+y)dy$, cuando x = 1, y = 1

Rpta: $(xy-2)^2+(x-3)^2=2y^2+15$

(4) $(x+e^{\frac{x}{y}})dx+e^{\frac{x}{y}}(1-\frac{x}{y})dy=0$, y(0) = 2 **Rpta:** $\frac{x^2}{2}+ye^{\frac{x}{y}}=2$

(5) $\frac{2x}{y^3}dx+\frac{y^2-3x^2}{y^4}dy=0$, $y|_{x=1}=1$ **Rpta:** y = x

(6) (4x – 2y + 3) dx + (5y – 2x +7) dy , y (1) = 2 **Rpta:** $4x^2-4xy+5y^2+6x=5$

(7) $(2x\operatorname{sen} y+2x+3y\cos x)dx+(x^2\cos y+3\operatorname{sen} x)dy=0$ cuando $x=\frac{\pi}{2}$, y = 0

Rpta: $x^2\operatorname{sen} y+x^2+3y\operatorname{sen} x=\frac{\pi^2}{4}$

(8) $(ye^{2x}-3xe^{2y})dx+(\frac{e^{2x}}{2}-3x^2e^{2y}-e^y)dy=0$, y(1) = 0

Rpta: $ye^{2x}-3x^2e^{2y}-2e^y+5=0$

(9) $(2xy-3)dx+(x^2+4y)dy=0$, y (1) = 2, **Rpta:** $x^2y-3x+2y^2=7$

(10) $(2y\operatorname{sen}x\cos x+y^2\operatorname{sen}x)dx+(\operatorname{sen}^2x-2y\cos x)dy=0$, y (0) = 3

Rpta: $y^2\cos x-y\operatorname{sen}^2x=9$

(11) $\frac{3-y}{x^2}dx+\frac{y^2-2x}{xy^2}dy=0$, y(-1) = 2 **Rpta:** $-3y+2x+y^2=2xy$

(12) $(3x^2y^2-y^3+2x)dx+(2x^3y-3xy^2+1)dy=0$, y (-2) = 1

III.

(1) Demostrar que la ecuación diferencial homogénea (Ax + By) dx + (Cx + Dy) dy = 0 es exacta sí y solo sí B = C.

(2) Demostrar que la ecuación homogénea $(Ax^2+Bxy+Cy^2)+(Dx^2+Exy+Fy^2)dy=0$ es exacta sí y solo sí B = 2D y E = 2 C.

(3) Determinar los valores de a y b para que la ecuación diferencial sea exacta y resolverla

a) $(y+x^3)dx+(ax+by^3)dy=0$ **Rpta:** a = 1, b ∈ R

b) $axy\,dx+(x^2+\cos y)dy=0$ **Rpta:** a = 2, x ≠ 0

c) $xy^3dx+ax^2y^2dy=0$ **Rpta:** $a=\frac{3}{2}$

d) $(ax+b)y\,dx+(x^2+x+\frac{1}{y})dy=0$ **Rpta:** a = 2, b = 3

e) $ax(y-\cos y)dx + x^2(1+\operatorname{sen} y)dy = 0$ **Rpta:** a = 2

f) $(xy^2 + bx^2 y)dx + (x+y)x^2 dy = 0$ **Rpta:** b = 3

g) $(ye^{2xy} + x)dx + bxe^{2xy}dy = 0$ **Rpta:** b = 1

4. $(2xy - 3x^2)dx + (x^2 + y)dy = 0$ **Rpta:** $x^2 y - x^3 + \dfrac{y^2}{2} = C$

5. $y(2xy^2 - 3)dx + (3x^2 y^2 - 3x + 4y)dy = 0$ **Rpta:** $y(x^2 y^2 - 3x + 2y) = C$

6. (x + sen y – cos y)dx + x (sen y + cos y)dy = 0 **Rpta:** $x^2 + 2x(\operatorname{sen} y - \cos y) = C$

7. $x(3xy - 4y^3 + 6)dx + (x^3 - 6x^2 y^2 - 1)dy = 0$ **Rpta:** $x^3 y - 2x^2 y^3 + 3x^2 - y = C$

8. $(\operatorname{sen} y + 2x\cos^2 y)dx + x\cos y(2x\operatorname{sen} y + 1)dy = 0$ **Rpta:** $x\operatorname{sen} y - x^2\cos^2 y = C$

9. $(xy^2 + y - x)dx + x(xy+1)dy = 0$ **Rpta:** $x^2 y^2 + 2xy - x^2 = C$

10. $2x(3x + y - ye^{-x^2})dx + (x^2 + 3y^2 + e^{-x^2})dy = 0$ **Rpta:** $x^2 y + y^3 + 2x^3 + ye^{-x^2} = C$

2.7. FACTOR DE INTEGRACIÓN.-

Consideremos la ecuación diferencial de la forma:

$$\boxed{M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0} \quad \text{... (1)}$$

Si la ecuación (1) no es exacta, se puede transformar en exacta, eligiendo una función u que pueda depender tanto de x como de y de tal manera que la ecuación

$$\boxed{u(x,y)\,M(x,y)dx + u(x,y)\,N(x,y)dy = 0} \quad \text{... (2)}$$

sea exacta, entonces a la función u(x,y) se llama factor integrante o factor de integración.

Como la ecuación (2) es exacta, entonces se cumple

$$\frac{\partial u(x,y)M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial u(x,y)N(x,y)}{\partial x}\text{, de donde}$$

$$M(x,y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}+u(x,y)\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=N(x,y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}+u(x,y)\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

de donde agrupando se tiene:

$$\boxed{M(x,y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}-N(x,y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=(\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial M(x,y)}{\partial y})u(x,y).} \quad \ldots (3)$$

Para determinar el factor integrante consideremos los siguientes casos:

1er. Caso: Si u es una función sólo de x.

entonces $\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=0$. Luego de la ecuación (3) resulta:

$$-N(x,y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=(\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial M(x,y)}{\partial y})u(x)$$

$$N(x,y)\frac{du(x,y)}{dx}=(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x})u(x)$$

$$\frac{du(x)}{u(x)}=\frac{1}{N(x,y)}(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}) \text{ integrando}$$

$$\int\frac{du(x)}{u(x)}=\int\frac{1}{N(x,y)}(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x})dx=\int f(x)dx$$

donde $f(x)=\frac{1}{N(x,y)}(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x})$

Como $\int\frac{du(x)}{u(x)}=\int f(x)dx \Rightarrow \ln u(x)=\int f(x)dx$ $\therefore$ $\boxed{u(x)=e^{\int f(x)dx}}$

2do. Caso: Si u es una función sólo de y, entonces $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=0$

Luego de la ecuación (3) resulta:

$$M(x,y)\frac{\partial u(y)}{\partial y}=(\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial M(x,y)}{\partial y})u(y) \text{ , de donde}$$

$$\frac{du(y)}{u(y)}=-\frac{1}{M(x,y)}\left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right)dy=g(y)dy$$

donde $g(y)=-\frac{1}{M(x,y)}\left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right)$

$\frac{du(y)}{u(y)}=g(y)dy$ integrando se tiene: $\int\frac{du(y)}{u(y)}=\int g(y)dy \Rightarrow \ln u(y)=\int g(y)dy$

$$\therefore \boxed{u(y)=e^{\int g(y)dy}}$$

3er. Caso: En muchos ejercicios el factor integrante está dado en un producto de dos funciones f(x) y g(y), es decir, u(x,y) = f(x)g(y) que reemplazando en la ecuación (3) se tiene:

$$M(x,y)\frac{\partial(f(x).g(y))}{\partial y}-N(x,y)\frac{\partial(f(x).g(y))}{\partial x}=\left(\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\right)f(x).g(y)$$

$$M(x,y).f(x).g'(y)-N(x,y).f'(x).g(y)=\left(\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\right)f(x)g(y)$$

esta expresión es lo mismo escribir en la forma:

$$\left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right)f(x)g(y)=N(x,y)f'(x)g(y)-M(x,y)f(x)g'(y)$$

$$\boxed{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=N(x,y)\frac{f'(x)}{f(x)}-M(x,y)\frac{g'(y)}{g(y)}} \qquad \textbf{... (4)}$$

donde M y N son funciones conocidas, de la ecuación (4) por inspección se puede determinar las funciones f(x) y g(y).

4to. Caso: Para ciertos ejercicios su factor integrante es de la forma $u(x,y)=x^n y^m$, donde n y m se determinan mediante la condición necesaria y suficiente de las ecuaciones diferenciales exacta.

a. Ejemplos: Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales.

1) $(1-x^2y)dx + x^2(y-x)dy = 0$

Solución

$$\begin{cases} M = 1 - x^2 y \\ N = x^2(y-x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial y} = -x^2 \\ \dfrac{\partial N}{\partial x} = -3x^2 + 2xy \end{cases}$$

como $\dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial x}$, la ecuación diferencial no es exacta.

Sea $f(x) = \dfrac{1}{N}(\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}) = \dfrac{-x^2 - (-3x^2 + 2xy)}{x^2(y-x)} = -\dfrac{2}{x}$

el factor integrante es $u(x) = e^{\int f(x)dx} = e^{\int -\frac{2}{x}dx}$

$$u(x) = e^{-2\ln x} = \frac{1}{x^2} \Rightarrow u(x) = \frac{1}{x^2}$$

al multiplicar a la ecuación diferencial por $u(x) = \dfrac{1}{x^2}$

es decir: $(\dfrac{1}{x^2} - y)dx + (y-x)dy = 0$, que es exacta.

En efecto: $\begin{cases} M = \dfrac{1}{x^2} - y \\ N = y - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial y} = -1 \\ \dfrac{\partial N}{\partial x} = -1 \end{cases}$ como $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ la ecuación diferencial es exacta.

$\Rightarrow \exists$ f(x,y) tal que $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M$, de donde $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \dfrac{1}{x^2} - y$, integrando respecto a x.

$$f(x,y) = \int (\frac{1}{x^2} - y)dx + g(y) = -\frac{1}{x} - xy + g(y)$$

$f(x,y) = -\frac{1}{x} - xy + g(y)$, derivando respecto a y.

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -x + g'(y)$, como $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N$ entonces

$N = -x + g'(y) \Rightarrow -x + g'(y) = y - x \Rightarrow g'(y) = y \Rightarrow g(y) = \frac{y^2}{2} + C$

Luego $f(x,y) = -\frac{1}{x} - xy + \frac{y^2}{2} + C$ $\therefore \quad xy^2 - 2x^2y - 2 = Kx$

2 $\frac{y}{x}dx + (y^3 - \ln x)dy = 0$

Solución

$$\begin{cases} M = \frac{y}{x} \\ N = y^3 - \ln x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{1}{x} \\ \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{1}{x} \end{cases}$$; como $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$, la ecuación diferencial no es exacta.

Sea $g(y) = -\frac{1}{M}(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}) = -\frac{1}{\frac{y}{x}}(\frac{1}{x} - (-\frac{1}{x}))$

$g(y) = -\frac{x}{y}(\frac{2}{x}) = -\frac{2}{y} \Rightarrow g(y) = -\frac{2}{y}$

Luego el factor integrante es, $u(y) = e^{\int g(y)dy} = e^{\int -\frac{2dy}{y}}$

$u(y) = e^{-2\ln y} = \frac{1}{y^2}$, que multiplicado a la ecuación diferencial dada se tiene:

$\frac{1}{xy}dx + (y - \frac{\ln x}{y^2})dy = 0$, que es exacta,

En efecto: $$\begin{cases} M = \frac{1}{xy} \\ N = y - \frac{\ln x}{y^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{1}{xy^2} \\ \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{1}{xy^2} \end{cases}$$

Como $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, la ecuación diferencial es exacta

$\Rightarrow \exists\ f(x,y)$, tal que $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M$, de donde $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{xy}$ integrando respecto a x.

$f(x,y) = \int \frac{dx}{xy} + g(y) = \frac{\ln x}{y} + g(y)$ derivando

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -\frac{\ln x}{y^2} + g'(y)$. Como $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N$, entonces

$N = -\frac{\ln x}{y^2} + g'(y)$ de donde se tiene:

$$-\frac{\ln x}{y^2} + g'(y) = y - \frac{\ln x}{y^2} \Rightarrow g'(y) = y \Rightarrow g(y) = \frac{y^2}{2} + C$$

Luego $f(x,y) = \frac{\ln x}{y} + \frac{y^2}{2} + C$ $\qquad \therefore\ \frac{\ln x}{y} + \frac{y^2}{2} = K$

3) $(xy + x^2 y + y^3)dx + (x^2 + 2y^2)dy = 0$

Solución

$$\begin{cases} M = xy + x^2 y + y^3 \\ N = x^2 + 2y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial M}{\partial y} = x + x^2 + 3y^2 \\ \frac{\partial N}{\partial x} = 2x \end{cases}$$

Como $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ la ecuación diferencial no es exacta.

Sea u (x,y) = f (x) . g (y) un factor integrante para esto, empleamos la ecuación (4)

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = N\frac{f'(x)}{f'(x)} - M\frac{g'(y)}{g'(y)}$$

$$x+x^2+3y^2-2x=(x^2+2y^2)\frac{f'(x)}{f(x)}-(xy+x^2y+y^3)\frac{g'(y)}{g(y)}$$

$$x^2+3y^2-x=(x^2+2y^2)\frac{f'(x)}{f(x)}-(xy+x^2y+y^3)\frac{g'(y)}{g(y)}$$

$$\begin{cases}\dfrac{f'(x)}{f(x)}=2\\[2mm] \dfrac{g'(y)}{g(y)}=\dfrac{1}{y}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\ln f(x)=2x\\ \ln g(y)=\ln y\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}f(x)=e^{2x}\\ g(y)=y\end{cases}$$

Como $u(x,y)=f(x).g(y)=ye^{2x}$ factor integrante ahora multiplicamos a la ecuación diferencial por el factor integrante $u(x,y)=ye^{2x}$.

$$ye^{2x}(xy+x^2y+y^3)dx+ye^{2x}(x^2+2y^2)dy=0$$

es una ecuación diferencial exacta, es decir:

$$\begin{cases}M=ye^{2x}(xy+x^2y+y^3\\ N=ye^{2x}(x^2+2y^2)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{\partial M}{\partial y}=e^{2x}(2xy+2x^2y+4y^3)\\[2mm] \dfrac{\partial N}{\partial x}=e^{2x}(2xy+2x^2y+4y^3)\end{cases}$$

Como $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$, la ecuación diferencial es exacta.

$\Rightarrow \exists\ f(x,y)$, tal que $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=M$, de donde.

$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=ye^{2x}(xy+x^2y+y^3)$ integrando respecto a x.

$$f(x,y)=\int ye^{2x}(xy+x^2y+y^3)dx+g(y)=\frac{y^2}{2}\int d(e^{2x}(x^2+y^2))+g(y)$$

$f(x,y)=\dfrac{y^2}{2}e^{2x}(x^2+y^2)+g(y)$ derivando respecto a y.

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = ye^{2x}(x^2+2y^2)+g'(y)$. Como $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N$ entonces.

$N = ye^{2x}(x^2+2y^2)+g'(y)$, de donde

$y = e^{2x}(x^2+2y^2)+g'(y) = ye^{2x}(x^2+2y^2)$, simplificando $g'(y)=0 \Rightarrow$ g(y) = C

Luego $f(x,y) = \frac{y^2e^{2x}}{2}(x^2+y^2)+C$ $\therefore\ y^2e^{2x}(x^2+y^2)=k$

(4) $2y\,dx - x\,dy = xy^3dy$

Solución

$2y\,dx-(x+xy^3)dy=0$ **... (1)**

$\begin{cases} M = 2y \\ N = -(x+xy^3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial M}{\partial y} = 2 \\ \frac{\partial N}{\partial x} = -1-y^3 \end{cases}$ como $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$, la ecuación diferencial no es exacta.

Sea $u(x,y) = x^m y^n$ un factor integrante, entonces.

$2x^m y^{n+1}dx - (x^{m+1}y^n + x^{m+1}y^{n+3}dy = 0$

para que sea exacta debe cumplirse $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

$\begin{cases} M = 2x^m y^{n+1} \\ N = -(x^{m+1}y^n + x^{m+1}y^{n+3}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial M}{\partial y} = 2(n+1)x^m y^n \\ \frac{\partial N}{\partial x} = -(m+1)(x^m y^n + x^m y^{n+3}) \end{cases}$

igualando tenemos $2(n+1)x^m y^n = -(m+1)x^m y^n - (m+1)x^m y^{n+3}$

Luego: $\begin{cases} 2(n+1) = -(m+1) \\ -(m+1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = -1 \\ m = -1 \end{cases}$

por lo tanto el factor integrante es $u(x,y)=\frac{1}{xy}$ que al multiplicar a la ecuación (1) se

tiene: $\frac{2}{x}dx-(\frac{1}{y}+y^2)dy=0$, que es exacta, en efecto:

$$\begin{cases} M=\frac{2}{x} \\ N=-(\frac{1}{y}+y^2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial M}{\partial y}=0 \\ \frac{\partial N}{\partial x}=0 \end{cases}$$ entonces $\exists\ f(x,y)$ tal que $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=M$

de donde $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\frac{2}{x}$, integrando respecto a x.

$f(x,y)=\int\frac{2}{x}dx+g(y)=2\ln x+g(y)$ derivando

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=g'(y)$, pero como $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=N$ entonces

$$N=g'(y)\ \Rightarrow\ -(\frac{1}{y}+y^2)=g'(y)\ \Rightarrow\ g(y)=-(\ln y+\frac{y^3}{3})+C$$

Luego $f(x,y)=2\ln x-\ln y-\frac{y^3}{3}+c$ $\therefore\ 2\ln x-\ln y-\frac{y^3}{3}=K$

5 $e^x dx+(e^x c\,\text{tg}\ y+2y\cos ec y)dy=0$

Solución

$$\begin{cases} M=e^x \\ N=e^x c\,\text{tg}\ y+2y\cos ec y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial M}{\partial y}=0 \\ \frac{\partial N}{\partial x}=e^x\cot y \end{cases}$$

Como $\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$ la ecuación diferencial es exacta, Sea $g(y) = -\frac{1}{M}(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}) = -\frac{0 - e^x c\,tg\, y}{e^x}$

g(y) = ctg y $\Rightarrow$ $u(y) = e^{\int g(y)dy} = e^{\int c\,tg\, y dy}$

$u(y) = e^{\ln(\text{sen}\, y)} = \text{sen}\, y$ $\Rightarrow$ u (y) = sen y

ahora multiplicamos a la ecuación diferencial por u (y) = sen y, es decir:

$e^x \text{ sen } y\, dx + (e^x \cos y + 2y) dy = 0$, que es una ecuación diferencial exacta.

en efecto: $\begin{cases} M = e^x \text{ sen } y \\ N = e^x \cos y + 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial M}{\partial y} = e^x \cos y \\ \frac{\partial N}{\partial x} = e^x \cos y \end{cases}$

Como $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ la ecuación diferencial es exacta.

entonces $\exists$ $f(x,y)$ tal que $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M$ de donde

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = e^x \text{ sen } y$, integrando respecto a x.

$f(x,y) = \int e^x \text{ sen } y dx + g(y) = e^x \text{ sen } y + g(y)$ derivando

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = e^x \cos y + g'(y)$, pero como $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N$ entonces

$N = e^x \cos y + g'(y)$ de donde se tiene:

$e^x \cos y + g'(y) = e^x \cos y + 2y \Rightarrow g'(y) = 2y \Rightarrow g(y) = y^2 + C$

Luego $f(x,y) = e^x \text{ sen } y + y^2 + C$ $\therefore$ e^x sen $+ y^2 = K$

6. (x cos y – y sen y) dy + (x sen y + y cos y) dx = 0

Solución

$$\begin{cases} M = x\operatorname{sen} y + y\cos y \\ N = x\cos y - y\operatorname{sen} y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial y} = x\cos y + \cos y - y\operatorname{sen} y \\ \dfrac{\partial N}{\partial x} = \cos y \end{cases}$$

Como $\dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial x}$ la ecuación diferencial no es exacta.

Sea $f(x) = \dfrac{1}{N}(\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}) = \dfrac{x\cos y + \cos y - y\operatorname{sen} y - \cos y}{x\cos y - y\operatorname{sen} y} = 1$

Luego el factor de integración es $u(x) = e^{\int f(x)dx} = e^x$ ahora a la ecuación diferencial, lo multiplicamos por el factor integrante $u(x) = e^x$, es decir:

$$(e^x x\cos y - e^x y\operatorname{sen} y)dy + (xe^x \operatorname{sen} y + ye^x \cos y)dx = 0$$

que es una ecuación diferencial exacta, en efecto.

$$\begin{cases} M = e^x x\operatorname{sen} y + e^x y\cos y \\ N = e^x x\cos y - e^x y\operatorname{sen} y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial y} = xe^x \cos y + e^x \cos y - ye^x \operatorname{sen} y \\ \dfrac{\partial N}{\partial x} = xe^x \cos y + e^x \cos y - ye^x \operatorname{sen} y \end{cases}$$

Como $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ la ecuación diferencial es exacta.

entonces $\exists$ $f(x,y)$ tal que $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M$, de donde

$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = xe^x \operatorname{sen} y + ye^x \cos y$ integrando respecto a x.

$$f(x,y) = \int (xe^x \operatorname{sen} y + ye^x \cos y)dx + g(y)$$

$f(x,y) = xe^x \text{ sen } y - e^x \text{ sen } y + ye^x \cos y + g(y)$ derivando

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = xe^x \cos y - e^x \cos y + e^x \cos y - ye^x \text{ sen } y + g'(y)$$

$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = xe^x \cos y - ye^x \text{ sen } y + g'(y)$, pero como $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N$

$N = xe^x \cos y - ye^x \text{ sen } y + g'(y)$, de donde se tiene:

$xe^x \cos y - ye^x \text{ sen } y + g'(y) = xe^x \cos y - e^x y \text{ sen } y \;\Rightarrow\; g'(y) = 0 \;\Rightarrow\;$ g (y) = C.

Luego $f(x,y) = xe^x \text{ sen } y - e^x \text{ sen } y + ye^x \cos y + C$

$$\therefore \quad xe^x \text{ sen } y - e^x \text{ sen } y + ye^x \cos y = K$$

Observación: Veremos un caso particular de factor integrante, por ejemplo, hallar un factor integrante $u = \varphi(x + y^2)$ de la ecuación diferencial $(3y^2 - x)dx + (2y^3 - 6xy)dy = 0$ y luego resolver la ecuación.

Solución

$$\begin{cases} M = 3y^2 - x \\ N = 2y^3 - 6xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial y} = 6y \\ \dfrac{\partial N}{\partial x} = -6y \end{cases} \text{ como } \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

La ecuación no es exacta, ahora calculamos el factor integrante de la forma $u = \varphi(x + y^2) = \varphi(z)$ donde $z = x + y^2 \Rightarrow \dfrac{\partial z}{\partial x} = 1$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2y$

Como $\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x} = N\dfrac{\partial u}{u\partial x} - M\dfrac{\partial u}{u\partial y}$ entonces

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = N\frac{\partial \ln(u)}{\partial x} - M\frac{\partial \ln u}{\partial y} \quad \text{... (1)}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \ln u}{\partial x} = \dfrac{d\ln u}{dz}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{d\ln u}{dz} \\ \dfrac{\partial \ln u}{\partial y} = \dfrac{d\ln u}{dz}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2y\dfrac{d\ln u}{dz} \end{cases} \quad \text{... (2)}$$

reemplazando (2) en (1) se tiene:

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = N\frac{d\ln u}{dz} - M\,2y\frac{d\ln u}{dz} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = (N - 2yM)\frac{d\ln u}{dz}$$

$$6y + 6y = (2y^3 - 6xy - 6y^3 + 2xy)\frac{d\ln u}{dz} \Rightarrow 12y = -4y(y^2 + x)\frac{d\ln u}{dz}$$

$$\frac{d\ln u}{dz} = -\frac{3}{y^2 + x} = -\frac{3}{z} \quad \text{entonces} \quad d(\ln u) = -3\frac{dz}{z}$$

integrando se tiene: $\ln u = -3\ln z = \ln z^{-3}$; levantando el logaritmo $u = \dfrac{1}{z^3} = \dfrac{1}{(y^2 + x)^3}$,

multiplicando a la ecuación diferencial se tiene:

$\dfrac{3y^2 - x}{(y^2 + x)^3}dx + \dfrac{2y^3 - 6xy}{(y^2 + x)^3}dy = 0$ es una ecuación diferencial exacta. La solución se

obtiene agrupando, tenemos $d(\dfrac{x - y^2}{(x - y^2)^2}) = 0$ integrando $\dfrac{x - y^2}{(x + y^2)^2} = C$

$$\therefore\ x - y^2 = c(x + y^2)^2$$

a. Combinación Integrable.

En una ecuación diferencial M (x,y) dx + N (x,y) dy = 0, para encontrar un factor de integración en muchos casos es dificultoso, sin embargo mediante el reconocimiento de ciertas diferenciales exactas comunes, se puede obtener la solución en forma mucho más práctica, a esta forma de agrupamiento de los términos de una ecuación diferencial denominaremos combinación integrable. Esta forma de resolver las ecuaciones diferenciales es mucho más rápido, sin embargo requiere de un buen conocimiento de diferenciales y una cierta pericia en determinar cómo deben agruparse los términos y para esto daremos algunas sugerencias de diferenciales exactas.

1° $x\,dy + y\,dx = d(xy)$

2° $xdx \pm ydy = \frac{1}{2}d(x^2 \pm y^2)$

3° $\frac{xdy - ydx}{x^2} = d(\frac{y}{x})$

4° $\frac{xdy - ydx}{y^2} = d(-\frac{x}{y})$

5° $\frac{xdy - ydx}{xy} = d(\ln(\frac{y}{x}))$

6° $\frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = d(\text{arctg}(\frac{y}{x}))$

7° $\frac{xdy - ydx}{x^2 - y^2} = \frac{1}{2}d(\ln(\frac{x+y}{x-y}))$

8° $\frac{xdy - ydx}{(x-y)^2} = \frac{1}{2}d(\frac{x+y}{x-y})$

9° $\frac{xdy - ydx}{x\sqrt{x^2 - y^2}} = d(arc.\text{sen}(\frac{y}{x}))$

10° $\frac{ydx - xdy}{(x+y)^2} = \frac{1}{2}d(\frac{x-y}{x+y})$

11° $\frac{x\,dy + y\,dx}{x^2y^2} = d(-\frac{1}{xy})$

12° $\frac{dx + dy}{x+y} = d(\ln(x+y))$

13° $\frac{xdy + ydx}{xy} = d(\ln(xy))$

Ejemplos: Resolver las ecuaciones diferenciales siguientes:

① $(x^2 + y^2)(x\,dy + y\,dx) = xy(x\,dy - y\,dx)$

Solución

La ecuación diferencial dada expresaremos así:

$\frac{xdy + ydx}{xy} = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$, de acuerdo a las sugerencias 6° y 13° se tiene:

$dLn(xy) = d(\text{arctg}(\frac{y}{x}))$ integrando se tiene:

$\int d\ln(xy) = \int d(\text{arctg}(\frac{y}{x}))dx + C$, de donde $\ln(xy) = \text{arctg}(\frac{y}{x}) + C$

(2) $3y\,dx + 2x\,dy + 4xy^2 dx + 3x^2 y\,dy = 0$

Solución

Multiplicando a la ecuación dada por $x^2 y$, es decir:

$3x^2 y^2 dx + 2x^3 y\,dy + 4x^3 y^3 dx + 3x^4 y^2 d = 0$

de acuerdo a la sugerencia 1° se tiene: $d(x^3 y^2) + d(x^4 y^3) = 0$ integrando se tiene:

$\int d(x^3 y^2) + \int (dx^4 y^3) = C$ de donde $\therefore\quad x^3 y^2 + x^4 y^3 = C$

(3) $xdy - ydx = x^2\sqrt{x^2 - y^2}\,dx$

Solución

A la ecuación diferencial dada, escribiremos así:

$\dfrac{xdy - ydx}{x\sqrt{x^2 - y^2}} = xdx$, de acuerdo a la sugerencia 9° se tiene:

$d(\text{arcsen}(\dfrac{y}{x})) = d(\dfrac{x^2}{2})$ integrando se tiene: $\int d(\text{arcsen}(\dfrac{y}{x})) = \int d(\dfrac{x^2}{2}) + C$, de donde

$$\therefore\quad \text{arcsen}\,\frac{y}{x} = \frac{x^2}{2} + C$$

(4) $x^3 dy - x^2 y\,dx = x^5 y\,dx$

Solución

A la ecuación diferencial dada expresaremos: $xdy - ydx = x^3 ydx$, para $x \neq 0$

$\dfrac{xdy - ydx}{xy} = x^2 dx$, de acuerdo a la sugerencia 5° se tiene: $d\ln(\dfrac{y}{x}) = d(\dfrac{x^3}{3})$ integrando.

$\int dLn(\dfrac{y}{x}) = \int d(\dfrac{x^3}{3}) + C$, de donde $\therefore\quad \ln(\dfrac{y}{x}) = \dfrac{x^3}{3} + C$

5 $\sqrt{y^2-1}(1-y\sqrt{x^2-1})dx+\sqrt{x^2-1}(1-x\sqrt{y^2-1})dy=0$

Solución

La ecuación diferencial dada expresaremos así:

$$\sqrt{y^2-1}dx-y\sqrt{x^2-1}\sqrt{y^2-1}dx+\sqrt{x^2-1}dy-x\sqrt{x^2-1}\sqrt{y^2-1}dy=0$$

$$\sqrt{y^2-1}dx+\sqrt{x^2-1}dy-\sqrt{x^2-1}\sqrt{y^2-1}(ydx+xdy)=0$$

$\dfrac{dx}{\sqrt{x^2-1}}+\dfrac{dy}{\sqrt{y^2-1}}-(ydx+xdy)=0,$ de acuerdo a las sugerencias del 1° se tiene:

$\dfrac{dx}{\sqrt{x^2-1}}+\dfrac{dy}{\sqrt{y^2-1}}-d(xy)=0$, integrando $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}-\int\frac{dy}{\sqrt{y^2-1}}-\int d(xy)=C$

de donde: $\ln|x+\sqrt{x^2-1}|-\ln|y+\sqrt{y^2-1}|-xy=C$ ... **(1)**

por lo tanto (1) expresaremos así: arccoshx - arccoshy = xy + C, de donde

cosh (arccosh x – arccosh y) = cosh (xy + C)

xy + senh (arccosh x). senh (arccosh y) = cosh (xy + C)

además se sabe que , $senhx=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ Luego se tiene:

$$xy+\left(\frac{e^{\text{arccos}\,hx}-e^{-\text{arccos}\,hx}}{2}\right)\left(\frac{e^{\text{arcsen}\,hy}-e^{-\text{arcsen}\,hy}}{2}\right)=\cosh(xy+C)$$

6 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y(xy+1)}{y(1-x^2)-x}$. Para x = 1; y = -2

Solución

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y(xy+1)}{y(1-x^2)-x}\Rightarrow [y(1-x^2)-x]dy=y(xy+1)dx$$

$y\,dy - yx^2dy = xy^2dx + y\,dx$, agrupando $y\,dy - (yx^2dy + xy^2dx) = x\,dy + y\,dx$

mediante la sugerencia de 1° se tiene: $ydy - d(\frac{x^2y^2}{2}) = d(xy)$ integrando

$\int ydy - \int d(\frac{x^2y^2}{2}) = \int d(xy) + K$, de donde $y^2 - x^2y^2 = 2xy + C$

para x = 1, y = -2, se tiene 4 - 4 = -4 + C $\Rightarrow$ C = 4

Luego la solución particular es: $(1 - x^2)y^2 - 2xy = 4$

(7) $(y + x(x^2 + y^2))dx + (y(x^2 + y^2) - x)dy = 0$

Solución

A la ecuación diferencial expresaremos así:

$y\,dx + x(x^2 + y^2)dx + y(x^2 + y^2)dy - xdy = 0$, ahora agrupamos

$-\frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} + xdx + ydy = 0$, mediante la sugerencia de 2° y 6° se tiene:

$-d(arc.\operatorname{tg}(\frac{y}{x})) + \frac{1}{2}d(x^2 + y^2) = 0$, integrando $-\int d(\operatorname{arctg}(\frac{y}{x})) + \frac{1}{2}\int d(x^2 + y^2) = C$

$\therefore \quad -2\operatorname{arctg}(\frac{y}{x}) + x^2 + y^2 = K$

(8) $arc.\text{sen}\, ydx + \frac{x + 2\sqrt{1 - y^2}\cos y}{\sqrt{1 - y^2}}dy = 0$

Solución

A la ecuación diferencial dada expresaremos así: $arc.\text{sen}\, ydx + \frac{xdy}{\sqrt{1 - y^2}} + 2\cos ydy = 0$

d (x .arc.sen y) + 2 cos y dy = 0, integrando

$$\int d(x \arcsin y) + \int 2\cos y\,dy = C$$ de donde x arc.sen y + 2 sen y = C

b. EJERCICIOS PROPUESTOS.

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

1. $(xy^3+1)dx + x^2y^2dy = 0$ **Rpta.** $2x^3y^3+3x^2=c$

2. $y^2dx + x^2dy - 2xy\,dy = 0$ **Rpta.** $xy - y^2 = Kx$

3. $(x^2+y)dx - x\,dy = 0$ **Rpta.** $x^2 - y = Kx$

4. $(2xy^2-3y^3)dx + (7-3xy^2)dy = 0$ **Rpta.** $x^2y - 3xy^2 - 7 = Ky$

5. $y\,dx + (2x - ye^y)dy = 0$ **Rpta.** $xy^2 - y^2e^y + 2ye^y - 2e^y = K$

6. $(y^4+x^3)dx + 8xy^3dy = 0$ **Rpta.** $\sqrt{x}(7y^4+x^3) = K$

7. $(5x^3+3xy+2y^2)dx + (x^2+2xy)dy = 0$ **Rpta.** $x^5 + x^3y + x^2y^2 = K$

8. $x^2y^2dx + (x^3y+y+3)dy = 0$ **Rpta.** $\dfrac{x^3y^3+y^3}{3} + \dfrac{3y^2}{2} = c$

9. $x^2dx - (x^3y^2+y^2)dy = 0$ **Rpta.** $e^{-y^3}(x^3+3) = c$

10. $(xy^2+x^2y^2+3)dx + x^2y\,dy = 0$ **Rpta.** $e^{2x}(x^2y^2+3) = c$

11. $e^x(x+1)dx + (e^y y - xe^x)dy = 0$ **Rpta.** $2xe^{x-y} + y^2 = c$

12. $(x - x^2y)dy - y\,dx = 0$ **Rpta.** $2y - xy^2 - cx = 0$

13. $(5x^3y^2+2y)dx + (3x^4y+2x)dy = 0$ **Rpta.** $x^5y^3 + x^2y^2 = c$

14. $(e^x + xe^y)dx + xe^y dy = 0$ **Rpta.** $e^{x+y} + \displaystyle\int_0^x \frac{e^{2t}}{t}dt = K$

(15) $(3x^2y+2xy+y^3)dx+(x^2+y^2)dy=0$ **Rpta.** $(3x^2y+y^3)e^{3x}=c$

(16) $dx+(\frac{x}{y}-\text{sen } y)dy=0$ **Rpta.** xy + y cos y - sen y = c

(17) $y\,dx+(2xy-e^{-2y})dy=0$ **Rpta.** $xe^{2y}-\ln|y|=c$

(18) $(x^2+y^2+2x)dx+2y\,dy=0$ **Rpta.** $x^2+y^2=ce^{-x}$

(19) $(3x^2-y^2)dy-2xy\,dx=0$ **Rpta.** $\frac{x^2}{y^3}-\frac{1}{y}=c$

(20) $(xy-1)dx+(x^2-xy)dy=0$ **Rpta.** $xy-\ln|x|-\frac{y^2}{2}=c$

(21) $2y(x^2-y+x)dx+(x^2-2y)dy=0$ **Rpta.** $y(x^2-y)=ce^{-2x}$

(22) $y(4x+y)dx-2(x^2-y)dy=0$ **Rpta.** $2x^2+xy+2y\ln|y|=cy$

(23) $(2y^2+3xy-2y+6x)dx+x(x+2y-1)dy=0$ **Rpta.** $x^2(y^2+xy-y+2x)=c$

(24) $y^2dx+(3xy+y^2-1)dy=0$ **Rpta.** $y^2(y^2+4xy-2)=c$

(25) $2y(x+y+2)dx+(y^2-x^2-4x-1)dy=0$ **Rpta.** $x^2+2xy+y^2+4x+1=cy$

(26) $2(2y^2+5xy-2y+4)dx+x(2x+2y-1)dy=0$ **Rpta.** $x^4(y^2+2xy-y+2)=c$

(27) $3(x^2+y^2)dx+x(x^2+3y^2+6y)dy=0$ **Rpta.** $x(x^2+3y^2)=ce^{-y}$

(28) y (8x - 9y) dx + 2x (x - 3y) dy = 0 **Rpta.** $x^3y(2x-3y)=c$

(29) y (1 + xy) dx – x dy = 0 **Rpta.** $x^2+\frac{2x}{y}=c$

(30) dx + (x tg y – 2 secy) dy = 0 **Rpta.** x secy – 2 tg y = c

(31) $(x^4 \ln x - 2xy^3)dx + 3x^2y^2dy = 0$ **Rpta.** $y^3 + x^3(\ln|x| - 1) = cx^2$

(32) $(x + y^2)dx - 2xy\,dy = 0$ **Rpta.** $x\ln|x| - y^2 = cx$

(33) $(2x^2y + 2y + 5)dx + (2x^3 + 2x)dy = 0$ **Rpta.** 5 arc.tg x + 2xy = c

(34) (x + sen x + sen y) dx + cos y dy = 0

Rpta. $2e^x \operatorname{sen} y + 2e^x(x - 1) + e^x(\operatorname{sen} x - \cos x) = c$

(33) $(1 + xy)dx + x(\frac{1}{y} + x)dy = 0$ **Rpta.** $K = xye^{xy}$

(36) (sec x + y tg x) dx + dy = 0 **Rpta.** y sec x + tg x = c

(37) $2(x + y(\sec^2 x + \operatorname{tg} x)dx + \operatorname{tg} x\,dy = 0$ **Rpta.** $(x + y)\operatorname{tg}^2 x = c$

(38) $\frac{y}{x}dx + (y^3 - \ln x)dy = 0$ **Rpta.** $\frac{y^2}{2} + \frac{\ln|x|}{y} = c$

(39) $\operatorname{sen} x(2 + 3y\operatorname{sen}^2 x)dx + \sec x\,dy = 0$ **Rpta.** $ye^{\frac{3}{4}\operatorname{sen}^2 x} + 2\int(\operatorname{sen} x\cos x)e^{\frac{3}{4}\operatorname{sen}^4 x}dx + c$

(40) $y\operatorname{sen} xydx - (\frac{\cos xy}{y} - x\operatorname{sen} xy)dy = 0$ **Rpta.** y cos xy = c

(41) (x cos y - y sen y) dy + (x sen y + y cos y) dx = 0

Rpta. $(x\operatorname{sen} y - y\cos y - \operatorname{sen} y)e^x = c$

(42) $\frac{1}{x}dx - (1 + xy^2)dy = 0$ **Rpta.** $e^y(y^2 - 2y + 2 + \frac{1}{x}) = c$, $u = \frac{e^y}{x}$

(43) $(x^2 + 2x + y)dx + (1 - x^2 - y)dy = 0$ **Rpta.** $e^{x-y}(x^2 + y) = c$, $u = e^{x-y}$

(44) (cos x – sen x + sen y) dx + (cos x + sen y + cos y) dy = 0

Rpta. $e^{x+y}(\cos x + \operatorname{sen} y) = c$, $u = e^{x+y}$

45) $(\frac{\operatorname{sen} y}{y} - 2e^{-x}\operatorname{sen} x)dx + \frac{\cos y + 2e^{-x}\cos x}{y}dy = 0$

Rpta. $e^{x}\operatorname{sen} y + 2y\cos x = c$, $u = ye^{x}$

46) $(-3y^4 + x^3 y)dx + (xy^3 - 3x^4)dy = 0$ **Rpta.** $y^3 + x^3 = cx^{\frac{9}{4}} y^{\frac{9}{4}}$, $y = x^m y^n$

47) $y(2x^2 + y)dx + x(y - x^2)dy = 0$ **Rpta.** $\frac{x^2}{y} + \ln xy = C$

48) $2y\,dx + 3x\,dy = 3x^{-1}dy$ **Rpta.** $y^3(x^2 - 1) = c$

49) $x\,dy + 2y\,dx = x^3 y^3 dy$ **Rpta.** $x^2 y(x^2 + c) + 2 = 0$

50) $y(4xy + 3)\,dx + x(3xy + 2)\,dy = 0$ **Rpta.** $x^4 y^3 + x^3 y^2 = C$

51) $4x\,dy - 3y\,dx = y^{-3} x\,dx$ **Rpta.** $2y^4 + x = cx^3$

52) $y\,dx + 2x\,dy = x^3 y\,dx$ **Rpta.** $3\ln(xy^2) = x^3 + c$

53) $y\,dx - 2x\,dy = xy^5 dy$ **Rpta.** $5\ln(xy^{-2}) = y^5 + c$

54) $(\operatorname{sen} x - x\cos x)dx + 2(\frac{x^2}{y^2} - \frac{x\operatorname{sen} x}{y})dy = 0$

Rpta. $2xy - y^2\operatorname{sen} x = cx$, $u(x,y) = x^{-2}y^2$

55) $3y\,dx - 2x\,dy = x^4 y^2 dx$ **Rpta.** $11x^{\frac{3}{2}} - yx^{\frac{11}{2}} = cy$

56) $3y\,dx + 4x\,dy = 5x^2 y^{-3} dx$ **Rpta.** $x^3(y^4 - x^2) = c$

57) $(4xy^2 + 6y)dx + (5x^2 y + 8x)dy = 0$ **Rpta.** $x^3 y^4(xy + 1) = c$

58) $[y^2 - 2x^2(x+y)^2 - y(x+y)^2]dx + [y^2 - 2x^2(x+y)^2 + x(x+y)^2]dy = 0$

59) $(2y + 3x^2 y^3)dx + (3x + 5x^3 y^2)dy = 0$, $u(x,y) = x^{-9}y^{-13}$

60) $(2xe^{y}+y^2e^{x}+2x)dx+(x^2e^{y}+2^{y}e^{x})dy=0$ **Rpta.** $x^2e^{y}+y^2e^{x}+x^2=c$

61) $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2-y^2-2y}{y^2-x^2-2x}$ **Rpta.** $(x+y)e^{x+y}=c(x-y)$

62) $xdy-ydx=x\sqrt{x^2-y^2}\,dy$ **Rpta.** y = x - sen (y + c)

63) $y\,dx=(2x^2y^3-x)dy$, y (1) = 1 **Rpta.** $xy^3-2xy+1=0$

64) $\frac{dy}{dx}=\frac{e^{x}y}{e^{x}+2y}$, y(0) = 1 **Rpta.** $e^{x}=y(1+2\ln y)$

65) $[y^4(x^3+x^2-2x+1)+(x^2y+y^3+xy^2)]dx-(x^3+xy^2+x^2y)dy=0$

Rpta. $(3x^4+4x^3-12x^2+12x)y^3+12xy^2+6x^2y+4x^3=cy^3$

66) $x\,dy-y\,dx=x^2ydy$ **Rpta.** $2y=xy^2+c$

67) $(x-2y^3)dy=y\,dx$ **Rpta.** $x=cy-y^3$

68) $x\,dy+y\,dx=3x^2dx$, y (2) = 1 **Rpta.** $xy=x^3-6$

69) $x^2D_xy-xy=x^2-y^2$, y (1) = 0 **Rpta.** $x+y=x^2(x-y)$

70) $x\,dy-y\,dx+(y^2-1)dy=0$ **Rpta.** $y^2-x+1=cy$

71) $x\,dy+y\,dx=x^2y\,dy$ **Rpta.** $x^{-1}y^{-1}+\ln y=c$

72) y (2 + xy) dx + x (1 + xy) dy = 0 **Rpta.** $x^2ye^{xy}=K$

73) $\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{xdy-ydx}{x^2}=0$ **Rpta.** $\sqrt{x^2+y^2}+\frac{y}{x}=c$

74) $\frac{dy}{dx}=\frac{e^{y}}{2y-xe^{y}}$ **Rpta.** $y^2=xe^{y}+c$

(75) $x\,dy = (x^2 + y^2 + y)dx$ **Rpta.** $y = x\,tg\,(x + c)$

(76) $e^x(y^3 + xy^3 + 1)dx + 3y^2(xe^x - 6)dy = 0$ **Rpta.** $xe^x y^3 + e^x - 6y^3 = c$

(77) $x\,dy + y\,dx = y^2 dx$ **Rpta.** $y\,(1 + cx) = 1$

(78) $x\,dy - y\,dx + (x^2 + y^2)dx = 0$ **Rpta.** $y = x\,tg\,(c - x)$

(79) $3xdy = 2ydx - xy\cos x\,dx$ **Rpta.** $x^2 = cy^3 e^{\text{sen}\,x}$

(80) $e^x(x+1)dx + (ye^y - xe^x)dy = 0$ **Rpta.** $2xe^{x-y} + y^2 = c$

(81) $x\,dy - y\,dx = (1 + y^2)dy$ **Rpta.** $-\frac{x}{y} = -\frac{1}{y} + y + c$

(82) $x\,dy = (x^5 + x^3 y^2 + y)dx$ **Rpta.** $arc.\,\text{tg}\,(\frac{x}{y}) = -\frac{x^4}{4} + c$

(83) $(\frac{2x}{y} - \frac{y}{x^2 + y^2})dx + (\frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{x^2}{y^2})dy = 0$ **Rpta.** $\frac{x^2}{y^2} + arc.\,\text{tg}(\frac{y}{x}) = c$

(84) $x\,dy - y\,dx = 2x^2 y^2 dy$, $y\,(1) = -2$ **Rpta.** $3y - 2xy^3 - 10x = 0$

(85) $y(2x + y^3)dx - x(2x - y^3)dy = 0$ **Rpta.** $\frac{x^2}{y^2} + xy = c$

(86) $y(x^3 - y^5)dx - x(x^3 + y^5)dy = 0$ **Rpta.** $x^4 = y^4(c + xy)$

(87) $(x^3 y^3 + 1)dx + x^4 y^2 dy = 0$ **Rpta.** $x^3 y^3 = -3\ln(xc)$

(88) $y(y^3 - x)dx + x(y^3 + x)dy = 0$ **Rpta.** $2xy^3 - x^2 = cy^2$

(89) $x^2(x + y)^2(dx + dy) = m(x\,dy - y\,dx)$ **Rpta.** $x(x + y)^3 = 3my$

(90) $(2x^2 + y^2 - 3)(x\,dy + y\,dx) = (xy)^3(4x\,dx + 2y\,dy)$ **Rpta.** $(xy)^{-2} + 2\ln(2x^2 + y^2 - 3) = c$

(91) $x\,dy - y\,dx = y^3(x^2+y^2)dy$ **Rpta.** $arc.\text{tg}\dfrac{y}{x} = \dfrac{y^4}{4} + c$

(92) $y(x^4-y^2)dx + x(x^4+y^2)dy = 0$ **Rpta.** $y(3x^4+y^2) = cx^3$

(93) $y(x^3e^{xy}-y)dx + x(y+x^3e^{xy})dy = 0$ **Rpta.** $2x^2e^{xy}+y^2 = cx^2$

(94) $y^2(1-x^2)dx + x(x^2y+2x+y)dy = 0$ **Rpta.** $x^2y+x+y = cxy^2$

(95) $y(x^2y^2-m)dx + x(x^2y^2+n)dy = 0$ **Rpta.** $x^2y^2 = 2\ln(\dfrac{cx^m}{y^n})$

(96) $x\,dx + y\,dy = (x^2+y^2)^3(x\,dy - y\,dx)$ **Rpta.** $6arc.\text{tg}(\dfrac{y}{x}) + \dfrac{1}{(x^2+y^2)^3} = c$

(97) $y\,dx - x\,dy = (x^2+y^2)^2(x\,dx + y\,dy)$ **Rpta.** $arc.\text{tg}(\dfrac{x}{y}) = \dfrac{1}{4}(x^2+y^2)^2 + c$

(98) $xdy - ydx = \sqrt{4x^2+9y^2}\,(4xdx+9ydy)$ **Rpta.** $\text{arctg}\dfrac{3y}{2x} = 6(4x^2+9y^2)^{\frac{1}{2}} + C$

(99) y (2 – 3xy) dx – x dy = 0 **Rpta.** $x^2(1-xy) = cy$

(100) $y(2x+y^2)dx + x(y^2-x)dy = 0$ **Rpta.** $x(x+y^2) = cy$

(101) $2x^5y' = y(3x^4+y^2)$ **Rpta.** $x^4 = y^2(1+cx)$

(102) $(x^ny^{n+1}+ay)dx + (x^{n+1}y^n+bx)dy = 0$

Rpta. si n ≠ 0, $x^ny^n = n\ln(cx^{-a}y^{-b})$, si n = 0, $xy = cy^{-a}y^{-b}$

(103) $(x^{n+1}y^n+ay)dx + (x^ny^{n+1}+ax)dy = 0$

Rpta. si n ≠ 1, $(n-1)(xy)^{n-1}(x^2+y^2-c) = 2a$, si n = 1, $x^2+y^2-c = -2a\ln(xy)$

(104) $x\,dy + y\,dx = xy^3dx$ **Rpta.** $\dfrac{1}{(xy)^2} = \dfrac{2}{x} + c$

105) $x\,dy - y\,dx = (xy)y^2 dy$ **Rpta.** $2\ln(\frac{y}{x}) = y^3 + c$

106) $x\,dy - y\,dx = (x^2 + xy - 2y^2)dx$ **Rpta.** $\ln(\frac{x+2y}{x-y}) = 3x + c$

107) $y(ydx - xdy) + 3\sqrt{y^4 - x^4}\,(ydx + xdy) = 0$

108) $ye^{-\frac{x}{y}}dx - (xe^{-\frac{x}{y}} + y^3)dy = 0$ **Rpta.** $e^{-\frac{x}{y}} + \frac{y^2}{2} = c$

109) $e^x(\cos y\,dx - \operatorname{sen} y\,dy) = 0$ **Rpta.** $e^x \cos y = c$

110) $(x\sqrt{x^2+y^2} + y)dx + (y\sqrt{x^2+y^2} + x)dy = 0$ **Rpta.** $\frac{(x^2+y^2)^{3/2}}{3} + xy = K$

111) $\frac{2\cos(xy)}{\operatorname{sen}(xy)}(xdy + ydx) + e^{\operatorname{sen} x}.e^{\operatorname{sen} y}(\cos xdx + \cos ydy) = 0$

Rpta. $2\ln(\operatorname{sen}(xy)) + e^{\operatorname{sen} x}.e^{\operatorname{sen} y} = c$

112) $(3x^2 \ln x + x^2 + y)dx + x\,dy = 0$ **Rpta.** $xy + x^3 \ln x = c$

113) $y(\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{1}{x\sqrt{x^2-y^2}})dx + (\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}} - \frac{x}{x^2+y^2})dy = 0$

Rpta. $\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \operatorname{arcsen}\frac{y}{x} = K$

114) y [sen (x + y) + x cos (x + y)] dx + x [sen (x + y) + y cos (x + y)] dy = 0

Rpta. xy sen (x + y) = c

115) $e^{xy}(ydx + xdy) + \frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}(xdx - ydy) + \sqrt{x^2-y^2}\,dy = 0$ **Rpta.** $e^{xy} + y\sqrt{x^2-y^2} = c$

116) $xy^2(x^6 - y^6)(2y\,dx + 3x\,dy) = 24x^2y^3(x^5dx - y^3dy)$ **Rpta.** $x^2y^3 = (x^6 - y^6)^4 K$

117) [2xy sen (x + y) + y sec (x + y)] dx + [2xy sen (x + y) + x sec (x + y)] dy = 0

Rpta. $\operatorname{sen}^2(x+y)+\ln(xy)=c$

118) $2y\,dx - x\,dy = xy^3 dy$ **Rpta.** $3\ln(x^2y^{-1}) = y^3 + c$

119) $ydx + xdy = \sqrt{x^2+y^2}\,(xdx + ydy)$ **Rpta.** $3xy = (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} + c$

120) Probar que si $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = N\frac{k}{x}$ entonces x^k es un factor integrante de M(x,y) dx + N (x,y) dy = 0

121) Demostrar que si la ecuación diferencial (axy – b)y dx + (cxy – d)x dy = 0 es dividida entre xy [(axy - b) - (cxy - d)] entonces es exacta.

122) Resolver la ecuación diferencial usando el factor de integración

$$u(x,y) = [xy(2x+y)]^{-1},\ (3xy+y^2) + xy(2x+y)\frac{dy}{dx} = 0$$

123) $y[2(x+y) + (1+x^2)\operatorname{arctg} x]dx + (x^3 + 2x^2y + x + 2y)\operatorname{arctg} x\,dy = 0$

124) Considerando una ecuación diferencial de la forma

$$[y + x\,f(x^2+y^2)]dx + [y\,f(x^2+y^2) - x]dy = 0$$

a) Demostrar que una ecuación diferencial de esta forma no es exacta.

b) Demostrar que $\frac{1}{x^2+y^2}$ es un factor integrante de una ecuación diferencial de esta forma.

125) Resolver la ecuación diferencial $[y + x(x^2+y^2)^2]dx + [y(x^2+y^2)^2 - x]dy = 0$

Rpta. $4arc.\operatorname{tg}\frac{x}{y} + (x^2+y^2)^2 = K$

126) $y(x^2+y^2-1)dx+x(x^2+y^2+1)dy=0\ ,\ \ u=\dfrac{1}{x^2+y^2}$ **Rpta.** $xy+\text{arctg}(\dfrac{y}{x})=c$

127) $(x^2+y^2+1)dx-2xy\,dy=0\ ,\ \ u(x,y)=\varphi(y^2-x^2)$

Rpta. $1+y^2-x^2=cx\ ,\ \ u_1=\dfrac{1}{(1+y^2-x^2)^2}\ ,\ \ u_2=\dfrac{1}{x^2}$

128) $x\,dx+y\,dy+x\,(x\,dy-y\,dx)=0,\ \ u=\varphi\,(x^2+y^2)$

Rpta. $\dfrac{y-1}{\sqrt{x^2+y^2}}=c\ ,\ u=\dfrac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}}$

129) $(3y^2-x)dx+(2y^3-6xy)dy=0\ ,\ u=\varphi(x+y^2)$

Rpta. $(x+y^2)^2c=x-y^2,\ u=\dfrac{1}{(x^2+y^2)^3}$

130) $(y-xy^2\ln x)dx+x\,dy=0\ ,\ u=\varphi\,(xy)$ **Rpta.** $2+xy\ln^2 y=cxy\ ,\ \ u=\dfrac{1}{x^2y^2}$

131) $(xy^2-y)dx+(xy-1)x\,dy=0$ **Rpta.** $\ln(Kxy)=-\dfrac{1}{xy}$

132) $(\dfrac{1}{x-y}+\dfrac{y}{x^2+y^2})dx+(\dfrac{1}{y-x}-\dfrac{x}{x^2+y^2})dy=0$ **Rpta.** $\ln|x-y|-\text{arctg}\,\dfrac{y}{x}=c$

133) $[y+x(x^2+y^2)]dx+[y(x^2+y^2)-x]dy=0$ **Rpta.** $x^2+y^2-2\,\text{arctg}\,\dfrac{y}{x}=K$

134) $x(1-\sqrt{x^2+y^2})dx+ydy=0$ **Rpta.** $\sqrt{x^2+y^2}=\dfrac{x^2}{2}+c$

135) $(7x^4y-3y^8)dx+(2x^5-9xy^7)dy=0$ **Rpta.** $x^7y^2-x^3y^9=K$

136) $arc.\text{sen}\,ydx+\dfrac{x+2\sqrt{1-y^2}\,\cos y}{\sqrt{1-y^2}}dy=0$ **Rpta.** x arc.sen y + 2 sen y = c

137) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y^3-x^3-x^2y+xy^2+2x}{x^3-xy^2+x^2y-y^3+2y}$ **Rpta.** $K(x^2-y^2)=e^{\frac{(x+y)^2}{2}}$

138 Aplicando el ejercicio 122 resolver: $(y^4 + x^3)dx + 8xy^3 dy = 0$

Rpta. $x^{\frac{1}{2}}(7y^4 + x^3) = c$

139 $(5x^3 + 3xy + 2y^2)dx + (x^2 + 2xy)dy = 0$ **Rpta.** $x^5 + x^2 y + x^2 y^2 = c$

140 Demostrar que $\frac{1}{Mx + Ny}$, donde Mx + Ny ≠ 0, es un factor integrante de la ecuación diferencial homogénea M (x,y) dx + N (x,y) dy = 0

141 Demostrar que $\frac{1}{Mx + Ny}$, donde Mx - Ny ≠ 0, es un factor integrante para la ecuación diferencial M (x,y) dx + N(x,y) dy = y f (xy) dx + x g (xy) dy

142 $(x^4 + y^4)dx - xy^3 dy = 0$ **Rpta.** $y^4 = 4x^4 \ln x + cx^4$

143 $y^2 dx + (x^2 - xy - y^2)dy = 0$ **Rpta.** $(x - y)y^2 = c(x + y)$

144 $(y^2 - xy)dx + x^2 dy = 0$ **Rpta.** $x = Ke^{\frac{x}{y}}$

145 $(x^3 - y^3)dx + xy^2 dy = 0$ **Rpta.** $y^3 + 3x^3 \ln kx = 0$

146 $(x^3 - 3xy^2)dx + (y^3 - 3x^2 y)dy = 0$ **Rpta.** $x^4 - 6x^2 y^2 + y^4 = c$

147 $y(x + 3y)dx + x^2 dy = 0$ **Rpta.** $x^2 y = c(2x + 2y)$

148 $y(2x^3 - x^2 y + y^3)dx - x(2x^3 + y^3)dy = 0$ **Rpta.** $2x^2 y \ln(cx) = 4x^3 - y^3$

149 $y(x^2 + y^2)dx + x(3x^2 - 5y^2)dy = 0$, y (2) = 1 **Rpta.** $2y^5 + 2x^2 y^3 + 3x = 0$

150 $(2\frac{x}{y} - \frac{y}{x^2 + y^2})dx + (\frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{x^2}{y^2})dy = 0$ **Rpta.** $\frac{x^2}{y} + \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = c$

151 $y(x^2 + y^2 + 2)dx + x(2 - 2x^2 y^2)dy = 0$ **Rpta.** $x = cy^2 e^{\frac{1}{x^2 y^2}}$

(152) $y(2xy+1)dx + x(1+2xy-x^3y^3)dy = 0$ **Rpta.** $y = ce^{-\frac{3xy+1}{3x^3y^3}}$

(153) $\frac{dy}{dx} = \frac{y - xy^2 - x^3}{x + x^2y + y^3}$ **Rpta.** $x^2 + y^2 + 2\,\text{arctg}\,\frac{y}{x} = K$

(154) Demuéstrese que la ecuación diferencial $x^{pq}(\alpha y dx + \beta x dy) + x^r y^s(\gamma y dx + \delta x dy) = 0$ donde p, q, r, s, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ son constantes conocidas, tienen un factor integrante de la forma $x^a y^b$ en que a y b son constantes adecuadas.

(155) $(x^2y + 2y^4)dx + (x^3 + 3xy^3)dy = 0$ **Rpta.** $5x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} + 12x^{10}y^{15} = c$

(156) Demuéstrese que $\frac{dy}{dx} = \frac{y(y^2 - x^2 - 1)}{x(y^2 - x^2 + 1)}$ puede resolverse efectuando una transformación a coordenadas polares r y θ en la cual x = r cos θ, y = r sen θ y hallar su solución.

Rpta. $x^2 + cxy + y^2 = 0$

(157) Si ϕ es un factor integrante de la ecuación diferencial M (x,y) dx + N (x,y) dy = 0, demostrar que ϕ satisface a la ecuación de derivados parciales.

$$M(x,y)\frac{\partial\phi}{\partial y} - N\frac{\partial\phi}{\partial x} + \phi\left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right) = 0$$

(158) Demuéstrese que si la ecuación diferencial M (x,y) dx + N (x,y) dy = 0 es tal que $\frac{1}{xM - yN}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = F(xy)$ es decir una función del producto, entonces $e^{\int F(u)du}$ es un factor integrante siendo u = xy.

(159) $(y^2 + xy + 1)dx + (x^2 + xy + 1)dy = 0$ **Rpta.** $e^{xy}(x+y) = c$

(160) $(x^3 + xy^2 + y)dx - x\,dy = 0$ **Rpta.** $x^2 - 2\,\text{arctg}\,\frac{y}{x} = c$

161) $(x-\sqrt{x^2+y^2})dx+(y-\sqrt{x^2+y^2})dy=0$ **Rpta.** $\sqrt{x^2+y^2}=x+y+c$

162) $(x^3+y)dx+(x^2y-x)dy=0$ **Rpta.** $x^3+xy^2-2y=cx$

163) $(x^2+y^2+y)dx+(x^2+y^2-x)dy=0$ **Rpta.** $x+y-\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}=c$

164) $(x-x^2-y^2)dx+(y+x^2+y^2)dy=0$ **Rpta.** $\ln|x^2+y^2|+2y-2x=c$

165) $(x^2y+y^3-x)dx+(x^3+xy^2-y)dy=0$ **Rpta.** $\ln(x^2+y^2)=2xy+c$

166) $(xy^2+x\operatorname{sen}^2 x-\operatorname{sen} 2x)dx-2y\,dy=0$ **Rpta.** $x^2-2\ln(y^2+\operatorname{sen}^2 x)=c$

167) $(5xy+4y^2+1)dx+(x^2+2xy)dy=0$ **Rpta.** $4x^5y+4x^4y^2+x^4=c$

168) $(3+y+2y^2\operatorname{sen}^2 x)dx+(x+2xy-y\operatorname{sen} 2x)dy=0$

Rpta. $y^2\operatorname{sen} 2x=c+2x(3+y+y^2)$

169) $\cos\theta(1+2r\cos^2\theta)dr+r\operatorname{sen}\theta(1-r\cos^2\theta)d\theta=0$ **Rpta.** $r^2\cos^2\theta+r=c.\cos\theta$

170) $(r^2\operatorname{sen}\theta-\operatorname{tg}\theta)dr+r\sec\theta(\sec\theta+r^2\operatorname{tg}\theta)d\theta=0$ **Rpta.** $r^2\sec\theta+\operatorname{tg}\theta=rc$

171) $(x^3+xy^2+y)dx+(y^3+x^2y+x)dy=0$ **Rpta.** $(x^2+y^2)^2=c-4xy$

172) $(x^3+xy^2-y)dx+(y^3+x^2y+x)dy=0$ **Rpta.** $2\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}=c-x^2-y^2$

173) $(y^2\cos x-y)dx+(x+y^2)dy=0$ **Rpta.** $y^2-x=y(c-\operatorname{sen} x)$

174) $(x+x^3\operatorname{sen} 2y)dy-2y\,dx=0$ **Rpta.** $x^2(c+\cos 2y)=2y$

175) $(2y\operatorname{sen} x-\cos^3 x)dx+\cos x\,dy=0$ **Rpta.** $y=(x+c)\cos^2 x$

176) $(2x+2xy^2)dx+(x^2y+2y+3y^3)dy=0$ **Rpta.** $(x^2+y^2)\sqrt{1+y^2}=c$

177) Probar que si $\frac{Nx - My}{xM - yN} = R$, donde R depende sólo de xy, entonces la ecuación diferencial Mdx + Ndy, tiene un factor integrante de la forma M (xy), Hallar una fórmula general para este factor integrante.

178) Hallar un factor integrante y resolver la ecuación diferencial

$$(2y^3 + 2x^2 y - by)dx - (2x^3 + 2xy^2 - 2bx)dy = 0$$

179) $(x+y)^2(x\,dy - y\,d) + [y^2 - 2x^2(x+y)^2](dx+dy) = 0$

180) Encontrar la solución general de la ecuación $(xy - x^2)dx + (xy - y^2)dy = 0$, aplicando un factor integrante de la forma u = φ(y – x) **Rpta.** $x^2 - y^2 = c$

181) Resolver la ecuación diferencial $y(2xy+1)dx + (x + 2x^2 y - x^4 y^3)dy = 0$, sabiendo que u es factor de la forma $u = \frac{1}{Mx - Ny}$, donde Mx – Ny ≠ 0.

Rpta. $\frac{1}{x^2 y^2} + \frac{1}{3x^3 y^3} + \ln y = c$

182) Resolver la ecuación diferencial $(3x + \frac{6}{y})dx + (\frac{x^2}{y} + \frac{3y}{x})dy = 0$ encontrando un factor integrante de la forma u = φ(x – y). **Rpta.** $x^3 y + y^3 + 3x^2 = c$

183) $2x - y\,\text{sen}(xy) + (3y^2 - x\,\text{sen}\,xy)\frac{dy}{dx} = 0$ **Rpta.** $x^2 + y^3 - \text{sen}\,xy = k$

184) $ye^{xy} - 8x + (2y + xe^{xy})\frac{dy}{dx} = 0$ **Rpta.** $e^{xy} - 4x^2 + 2y^2 = c$

2.8. ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE PRIMER ORDEN.-

Consideremos la ecuación diferencial ordinaria:

$$\boxed{a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_2(x)y=f(x)} \quad \text{... (1)}$$

donde a_1, a_2 y f son funciones solamente de x ó constantes.

Suponiendo que $a_1(x) \neq 0$, entonces, dividiendo a la ecuación (1) por $a_1(x)$ se tiene $\frac{dy}{dx}+\frac{a_2(x)}{a_1(x)}y=\frac{f(x)}{a_1(x)}$, de donde se tiene:

$$\boxed{\frac{dy}{dx}+p(x)y=Q(x).} \quad \text{... (2)}$$

a la ecuación (2) llamaremos ecuación diferencial lineal de primer orden en y.

Si Q(x) = 0, la ecuación (2) toma la forma:

$$\boxed{\frac{dy}{dx}+p(x)y=0} \quad \text{... (3)}$$

a la ecuación (3) llamaremos ecuación diferencial lineal homogénea y es una ecuación diferencial de variable separable y su solución es:

$$\boxed{y=Ke^{-\int p(x)dx}}$$

Si $Q(x) \neq 0$, la ecuación (2) es decir:

$\boxed{\frac{dy}{dx}+p(x)y=Q(x)}$ llamaremos ecuación diferencial lineal no homogénea.

Como $Q(x) \neq 0$, la ecuación (2) no es exacta.

Luego hallaremos un factor de integración para su solución.

Si I(x) es un factor integrante sólo de x a la ecuación (2) lo expresaremos así:

[p(x) y – Q(x)] dx + dy = 0, al multiplicar por I(x).

I(x) [p(x) y – Q(x)] dx + I(x) dy = 0, es una ecuación diferencial exacta,

por lo tanto: $\frac{\partial I(x)(p(x)y-Q(x))}{\partial y}=\frac{\partial I(x)}{\partial x}$, efectuando:

$I(x)p(x)=\frac{dI(x)}{dx}$, de donde agrupando $\frac{dI(x)}{I(x)}=p(x)dx$, integrando con respecto a x.

$\int\frac{dI(x)}{I(x)}=\int p(x)dx \Rightarrow \ln I(x)=\int p(x)dx$ de donde:

$I(x)=e^{\int p(x)dx}$, el factor de integración

ahora multiplicamos a la ecuación diferencial.

$(p(x)y-Q(x))dx+dy=0$ por $I(x)=e^{\int p(x)dx}$

$e^{\int p(x)dx}[p(x)y-Q(x)]dx+e^{\int p(x)dx}dy=0$ agrupando

$e^{\int p(x)dx}p(x)ydx+e^{\int p(x)dx}dy=e^{\int p(x)dx}Q(x)dx$

$d(e^{\int p(x)dx}y)=e^{\int p(x)dx}Q(x)dx$, integrando: $e^{\int p(x)dx}y=\int e^{\int p(x)dx}Q(x)dx+c$, de donde:

$$\boxed{y=e^{-\int p(x)dx}[\int e^{\int p(x)dx}Q(x)dx+c]}$$

Que es la solución general de la ecuación (2)

a. Ejemplos: Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales.

1 $\frac{dy}{dx}+2y=x^2+2x$

Solución

$\frac{dy}{dx}+2y=x^2+2x$, de donde p (x) = 2, $Q(x)=x^2+2x$

Como la solución general es: $y=e^{-\int p(x)dx}[\int e^{\int p(x)dx}Q(x)dx+c]$

$y=e^{-\int 2dx}[\int e^{\int 2dx}(x^2+2x)dx+c]$ efectuando.

$y=e^{-2x}[\int e^{2x}(x^2+2x)dx+c]$ integrando por partes se tiene: $y=\frac{2x^2+2x-1}{4}+ce^{-2x}$

(2) $x\ln x\frac{dy}{dx}-y=x^3(3\ln|x|-1)$

Solución

A la ecuación diferencial escribiremos así: $\frac{dy}{dx}-\frac{1}{x\ln x}y=\frac{x^2(3\ln|x|-1)}{\ln x}$, ecuación lineal en y. Como la solución general de la ecuación es:

$y=e^{-\int p(x)dx}[\int e^{\int p(x)dx}Q(x)dx+c]$ reemplazando

$$y=e^{-\int -\frac{dx}{x\ln|x|}}[\int e^{\int -\frac{dx}{x\ln|x|}}\frac{x^2(3\ln|x|-1)}{\ln|x|}dx+c]$$

$y=e^{\ln(\ln|x|)}(\int e^{-\ln(\ln|x|)}\frac{x^2(3\ln|x|-1)}{\ln|x|}dx+c)$, simplificando

$y=\ln|x|(\int\frac{x^2(3\ln|x|-1)}{\ln^2|x|}dx+c)$, poniendo bajo un diferencial

$y=\ln|x|(\int d(\frac{x^3}{\ln|x|})+c)=\ln|x|(\frac{x^3}{\ln|x|}+c)$ $\therefore$ $y=x^3+c.\ln|x|$

(3) $\frac{dy}{dx}+\phi'(x)y-\phi(x)\phi'(x)=0$

Solución

A la ecuación diferencial expresaremos así: $\frac{dy}{dx}+\phi'(x)y=\phi(x)\phi'(x)$

Como la solución general es: $y=e^{-\int p(x)dx}(\int e^{\int p(x)dx}Q(x)dx+c)$ reemplazando

$$y=e^{-\int\phi'(x)dx}(\int e^{\int\phi'(x)dx}\phi(x)\phi'dx+c)$$

$y=e^{-\phi(x)}\int e^{\phi(x)}\phi(x)\phi'(x)dx+c)$ integrando por partes.

$$\begin{cases} u=\phi(x) \\ dv=e^{\phi(x)}\phi'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\phi'(x) \\ v=e^{\phi(x)} \end{cases}$$

$y=e^{-\phi(x)}(\phi(x)e^{\phi(x)}-e^{\phi(x)}+c)$ $\therefore$ $y=\phi(x)-1+c.e^{-\phi(x)}$

4) $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x\operatorname{sen}y+2\operatorname{sen}2y}$

Solución

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x\operatorname{sen}y+2\operatorname{sen}2y} \Rightarrow \frac{dx}{dy}=x\operatorname{sen}y+2\operatorname{sen}2y$$

$\frac{dx}{dy}=-(\operatorname{sen}y)x=2\operatorname{sen}2y$, ecuación lineal en x.

$x=e^{-\int-\operatorname{sen}ydy}(\int e^{\int-\operatorname{sen}ydy}2\operatorname{sen}2ydy+c)$, calculando la integral

$x=e^{-\cos y}(\int e^{\cos y}2\operatorname{sen}2ydy+c)$ de donde

$x=e^{-\cos y}(4\int e^{\cos y}\operatorname{sen}y.\cos ydy+c)$ integrando por partes.

$x = e^{-\cos y}(-4\cos y e^{\cos y} + 4e^{\cos y} + c)$, simplificando $\therefore \quad x = 8\operatorname{sen}^2 \dfrac{y}{2} + ce^{-\cos y}$

5) $\dfrac{dy}{dx} - yc\operatorname{tg} x = 2x - x^2 c\operatorname{tg} x\,, \quad y(\dfrac{\pi}{2}) = \dfrac{\pi^2}{4} + 1$

Solución

La solución general de la ecuación diferencial es:

$$y = e^{-\int -c\operatorname{tg} x\,dx}\left[\int e^{\int -c\operatorname{tg} x\,dx}(2x - x^2 c\operatorname{tg} x)dx + c\right], \text{ efectuando la integral}$$

$$y = e^{Ln\operatorname{sen} x}\left(\int e^{-Ln\operatorname{sen} x}(2x - x^2 c\operatorname{tg} x)dx + c\right), \quad \text{simplificando}$$

$$y = \operatorname{sen} x\left(\int \frac{2x - x^2 c\operatorname{tg} x}{\operatorname{sen} x}dx + c\right) \quad \text{integrando}$$

$$y = \operatorname{sen} x(x^2 + \cos ecx + c) = x^2 + c\operatorname{sen} x\,, \quad \text{para} \quad x = \frac{\pi}{2}, \quad y = \frac{\pi^2}{4} + 1$$

$$\frac{\pi^2}{4} + 1 = \frac{\pi^2}{4} + c \quad \Rightarrow \quad c = 1, \text{ por lo tanto } \therefore \; y = x^2 + \operatorname{sen} x$$

6) $(1+x^2)\ln(1+x^2)\dfrac{dy}{dx} - 2xy = \ln(1+x^2) - 2x\operatorname{arctg} x$ donde $y \to -\dfrac{\pi}{2}$ cuando $x \to \infty$

Solución

A la ecuación diferencial expresaremos así:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2x}{(x^2+1)\ln(x^2+1)}y = \frac{1}{1+x^2} - \frac{2x\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)\ln(1+x^2)}$$

La solución general de la ecuación diferencial es:

$$y = e^{-\int \frac{-2xdx}{(x^2+1)\ln(x^2+1)}}\left[\int e^{\int \frac{-2xdx}{(x^2+1)\ln(x^2+1)}}\left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{2x\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)\ln(1+x^2)}\right)dx + c\right]$$

$$y = e^{\ln(\ln(1+x^2))}\left[\int e^{-\ln(\ln(x^2+1))}\left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{2x\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)\ln(1+x^2)}\right)dx + c\right]$$

$$y = \ln(1+x^2)\left[\int\left[\frac{1}{(1+x^2)\ln(1+x^2)} - \frac{2x\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)\ln^2(1+x^2)}\right]dx + c\right]$$

$$y = \ln(1+x^2)\left[\int d\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{\ln(1+x^2)}\right) + c\right] = \ln(1+x^2)\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{\ln(1+x^2)} + c\right)$$

$y = \operatorname{arctg} x + x\ln(1+x^2)$ de donde $c = \dfrac{y}{\ln(1+x^2)} - \dfrac{\operatorname{arctg} x}{\ln(1+x^2)}$ para $y \to \dfrac{-\pi}{2}$, $x \to \infty$

$c = \dfrac{-\frac{\pi}{2}}{\infty} - \dfrac{-\frac{\pi}{2}}{\infty} = 0 - 0 = 0 \Rightarrow c = 0.$ Luego la solución particular es: $y = \operatorname{arctg} x$

7) $\dfrac{dy}{dx} - 2xy = \cos x - 2x \operatorname{sen} x$, donde y es una función acotada, cuando $x \to \infty$

Solución

$\dfrac{dy}{dx} - 2xy = \cos x - 2x \operatorname{sen} x$, la solución general es:

$y = e^{-\int -2x\,dx}\left[\int e^{\int -2x\,dx}(\cos x - 2x \operatorname{sen} x)dx + c\right]$, simplificando

$y = e^{x^2}\left[\int e^{-x^2}(\cos x - 2x \operatorname{sen} x)dx + c\right]$, poniendo bajo un diferencial

$$y = e^{x^2}\left(\int d(e^{-x^2}\operatorname{sen} x) + c\right) = e^{x^2}\left(e^{-x^2}\operatorname{sen} x + ce^{x^2}\right))$$

$y = \operatorname{sen} x + ce^{x^2}$, como sen x varía entre -1 y 1 además y es acotado

Cuando $x \to \infty$ y $c =$, por lo tanto $y = \operatorname{sen} x$

8) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{e^y - x}$

Solución

A la ecuación diferencial expresaremos así: $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{e^y-x} \Rightarrow \frac{dx}{dy}=e^y-x$ de donde:

$\frac{dx}{dy}+x=e^y$, ecuación diferencial lineal en x cuya solución general es:

$x=e^{-\int dy}[\int e^{\int dy}e^y\,dy+c]$, integrando tenemos:

$x=e^{-y}[\int e^{2y}dy+c]=e^{-y}(\frac{e^{2y}}{2}+c)$ por lo tanto $x=\frac{e^y}{2}+ce^{-y}$

b. EJERCICIOS PROPUESTOS.

I. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales.

1. $x\,\text{tg}^2\,y\,dy+x\,dy=(2x^2+\text{tg}\,y)dx$ **Rpta.** tg y = x (2senx + c)

2. $\frac{dy}{dx}-e^x y=\frac{1}{x^2}\text{sen}\frac{1}{x}-e^x\cos\frac{1}{x}$ **Rpta.** $y=\cos\frac{1}{x}+ce^{e^x}$

3. $x\,\text{sen}\,\theta\,d\theta+(x^3-2x^2\cos\theta+\cos\theta)dx$ **Rpta.** $\cos\theta=\frac{x}{2}+cxe^{-x^2}$

4. $x^2dy+xy\,dx=8x^2\cos^2x\,dx$ **Rpta.** $xy=2x^2+2x\,\text{sen}\,2x+\cos 2x+c$

5. $(x^5+3y)dx-x\,dy=0$ **Rpta.** $y=x^3(\frac{x^2}{2}+c)$

6. $dy=x^{-5}(4x^4y+3x^4y^{-1}+256y^7+768y^5+864y^3+432y+81y^{-1})dx$

7. $\frac{dy}{dx}-y.c\,\text{tg}\,x=\frac{\text{sen}(2x)}{2}$ **Rpta.** $y=K\,\text{sen}\,x+\text{sen}^2\,x$

8. cos y . dx = (x sen y + tg y) dy **Rpta.** x = K secy - secy . Ln cosy

(9) $(2x\frac{dy}{dx}+y)\sqrt{1+x}=1+2x$ **Rpta.** $y=\frac{c}{\sqrt{x}}+\sqrt{1+x}$

(10) $x(1-x^2)\frac{dy}{dx}-y+ax^3=0$ **Rpta.** $y=ax+\frac{cx}{\sqrt{1-x^2}}$

(11) $(y^2-1)dx=y(x+y)dy$ **Rpta.** $x=\sqrt{y^2-1}(Ln(y+\sqrt{y^2-1})+C)-y$

(12) $(1+y^2)dx=(\sqrt{1+y^2}\operatorname{sen} y-xy)dy$ **Rpta.** $x\sqrt{1+y^2}+\cos y=c$

(13) $\frac{dy}{dx}+y\cos x=\operatorname{sen} x\cos x$ **Rpta.** $y=ce^{-\operatorname{sen} x}+\operatorname{sen} x-1$

(14) $\frac{dy}{dx}(x\cos y+a\operatorname{sen} 2y)=1$ **Rpta.** $x=ce^{\operatorname{sen} y}-2a(1+\operatorname{sen} y)$

(15) $\frac{dy}{dx}+y=\operatorname{sen} x$ **Rpta.** $y=ce^{-x}+\frac{1}{2}(\operatorname{sen} x-\cos x)$

(16) $\frac{dy}{dx}+xy=2x$ **Rpta.** $y=ce^{-\frac{x^2}{2}}+2$

(17) $x^2dy-\operatorname{sen} 2x\,dx+3xy\,dx=0$ **Rpta.** $4x^3y+2x\cos 2x=c\operatorname{sen} 2x$

(18) $\frac{dy}{dx}=\frac{3+xy}{2x^2}$ **Rpta.** $y=c\sqrt{x}-\frac{1}{x}$

(19) $x\frac{dy}{dx}+\frac{y}{1+x}=1-x^2$ **Rpta.** $y=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2}+c(1+\frac{1}{x})$

(20) $(x+y)^2(x\,dy-y\,dx)+[y^2-2x^2(x+y)^2](dx+dy)=0$

Rpta. $(y-x^2-xy)(x+y)^3=K(y+2x^2+2xy)$

(21) $(x^2+1)dy=(x^3+xy+x)dx$ **Rpta.** $y=x^2+1+c\sqrt{x^2+1}$

22) $\frac{dy}{dx}=\frac{1-xy}{1-x^2}$ **Rpta.** $y=x+c\sqrt{1-x^2}$

23) $x(\frac{dy}{dx}-y)=x-y$ **Rpta.** $xy=ce^x-x-1$

24) $2x\,dy=(y-3x^2\ln x)dx$ **Rpta.** $y=\frac{2x^2}{3}-x^2 Lnx+c\sqrt{x}$

25) $\frac{dy}{dx}+x\operatorname{sen}x=\frac{y}{x}$ **Rpta.** y = x cos x + cx

26) $\frac{dy}{dx}=\frac{2y+(2x-1)e^x}{2x+1}$ **Rpta.** $y=e^x+c(2x+1)$

27) $\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}=\frac{x-y}{x-2}$ **Rpta.** (x – 2) y = x (x + c)

28) $\frac{dy-(x+1)ydx}{x^2+4x+2}=dx$ **Rpta.** $y=ce^{x+\frac{x^2}{2}}-x-3$

29) $(x^2+2x-1)y'-(x+1)y=x-1$ **Rpta.** $y=c\sqrt{x^2+2x-1}+x$

Sug. para la integral $d(\frac{f}{g})=\frac{gdf-fdg}{g^2}$

30) $(x+1)dy-[2y+(x+1)^4]dx=0$ **Rpta.** $y=c(x+1)^2+\frac{1}{2}(x+1)^4$

31) $x\ln x.\frac{dy}{dx}-(1+\ln(x))y+\frac{\sqrt{x}}{2}(2+\ln x)=0$ **Rpta.** $y=cx\ln x+\sqrt{x}$

32) $y'-y=2xe^{x+x^2}$ **Rpta.** $y=e^{x+x^2}+ce^x$

33) $xy'=y+x^2\operatorname{sen}x$ **Rpta.** y = -x cos x + cx

(34) $x(x-1)y'+y=x^2(2x-1)$ **Rpta.** $y=\frac{cx}{x-1}+x^2$

(35) $y'\cos y+\operatorname{sen} y=x+1$ **Rpta.** $\operatorname{sen} y=x+ce^{-x}$, sug. $z=\operatorname{sen} y$

(36) $y'+\operatorname{sen} y+x\cos y+x=0$ **Rpta.** $\operatorname{tg}\frac{y}{2}=ce^{-x}-x+1$

sug: $\operatorname{sen} 2y=2\operatorname{sen} y\cos y$, $\cos^2 y=\frac{1+\cos 2y}{2}$

(37) $y'-\frac{n}{x+1}y=e^x(x+1)^n$ **Rpta.** $y=(x+1)^n(c+e^x)$

(38) $(y^3-y)dx+(xy^2-x-y^2+1)dy=0$ **Rpta.** $x(y^2-1)=y^2+1+cy$

(39) $x\frac{dy}{dx}+y(xc\operatorname{tg} x+1)=c\operatorname{tg} x$ **Rpta.** $(xy-1)\operatorname{sen} x=c$

(40) $(x+\operatorname{sen} y-1)dy+\cos y\,dx=0$ **Rpta.** $x(\sec y+\operatorname{tg} y)=y+c$

(41) $(e^y-2xy)y'=y^2$ **Rpta.** $xy^2=e^y+c$

(42) $y-xy'=y'y^2e^y$ **Rpta.** $x=ye^y+cy$

(43) $x\frac{dy}{dx}-3y=x^4$ **Rpta.** $y=x^4+cx^3$

(44) $y'+yc\operatorname{tg} x=2x\cos ecx$ **Rpta.** $y=x^2\cos ecx+c.\cos ecx$

(45) $y'+y=\frac{1}{1+e^{2x}}$ **Rpta.** $y=e^{-x}\operatorname{arctg} e^x+ce^{-x}$

(46) $y'+y=2xe^{-x}+x^2$ **Rpta.** $y=x^2e^{-x}+x^2-2x+2+ce^{-x}$

(47) $(1+x^2)dy+2xy\,dx=c\operatorname{tg} x\,dx$ **Rpta.** $y=\frac{\ln(\operatorname{sen} x)}{1+x^2}+\frac{c}{1+x^2}$

(48) $(x^5+3y)dx - x\,dy = 0$ **Rpta.** $2y = x^5 + cx^3$

(49) $2(2xy+4y-3)dx + (x+2)^2 dy = 0$ **Rpta.** $y = \dfrac{2}{x+2} + \dfrac{c}{(x+2)^4}$

(50) $(2xy + x^2 + x^4)dx - (1+x^2)dy = 0$ **Rpta.** $y = (1+x^2)(c + x - \operatorname{arctg} x)$

(51) $(y - \cos^2 x)dx + \cos x\,dy = 0$ **Rpta.** $y(\sec x + \operatorname{tg} x) = c + x - \cos x$

(52) $(y - x + xy \operatorname{ctg} x)\,dx + x\,dy = 0$ **Rpta.** $xy \operatorname{sen} x = c + \operatorname{sen} x - x\cos x$

(53) $2y(y^2 - x)dy = dx$ **Rpta.** $x = y^2 - 1 + ce^{-y^2}$

(54) $(1+xy)dx - (1+x^2)dy = 0$ **Rpta.** $y = x + c(1+x^2)^{\frac{1}{2}}$

(55) $dx - (1 + 2x \operatorname{tg} y)\,dy = 0$ **Rpta.** $2x\cos^2 y = y + c + \operatorname{sen} y \cos y$

(56) $(1+\cos x)y' = \operatorname{sen} x(\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x.\cos x - y)$ **Rpta.** $y = (1 + \cos x)(c + x - \operatorname{sen} x)$

(57) $y'' + \dfrac{y'}{x-1} = x - 1$ **Rpta.** $y = \dfrac{1}{6}(x-1)^3 + K_1(x-1)^2 + K_2$

(58) $(x^2+1)y' - (1-x)^2 y = xe^{-x}$ **Rpta.** $y = \dfrac{ce^x - (2x+1)e^{-x}}{4(x^2+1)}$

(59) $x\operatorname{sen} x\dfrac{dy}{dx} + (\operatorname{sen} x + x\cos x)y = xe^x$ **Rpta.** $y = \dfrac{e^x(x-1)+c}{x\operatorname{sen} x}$

(60) $x\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{\sqrt{1-x^2}} = (1+\sqrt{1-x^2})e^x$ **Rpta.** $y = (\dfrac{1+\sqrt{1-e^x}}{x})(e^x + c)$

(61) $(1+\operatorname{sen} x)\dfrac{dy}{dx} + (2\cos x)y = \operatorname{tg} x$ **Rpta.** $y = \dfrac{\operatorname{sen} x + \ln(1-\operatorname{sen} x) + c}{(1+\operatorname{sen} x)^2}$

(62) $x(x+1)y' + y = x(x+1)^2 e^{-x^2}$ **Rpta.** $y = \dfrac{1}{2}(1+\dfrac{1}{x})(c - e^{-x^2})$

(63) $y'-(\operatorname{tg} x)y = e^{\operatorname{sen} x}$ para $0 < x < \frac{\pi}{2}$ **Rpta.** $y = \sec x.e^{\operatorname{sen} x} + \cos ecx$

(64) $y + 2xy = xe^{-x^2}$ **Rpta.** $y = \frac{x^2}{2}e^{-x^2} + ce^{-x^2}$

(65) $\frac{dy}{dx} + my = e^{-mx}$ **Rpta.** $y = xe^{-mx} + ce^{-mx}$

(66) $\frac{dy}{dx} + (\operatorname{sen} x)y = Kx$ **Rpta.** $y = ce^{\cos x} + Ke^{\cos x}\int e^{tg(t)}dt$

(67) $(1-x^2)\frac{dy}{dx} + xy = Kx$ **Rpta.** $y = K + c\sqrt{1+x^2}$

(68) $\frac{dy}{dx} + \frac{2x}{x^2+1}y = x$ **Rpta.** $y = \frac{x^4 + 2x^2 + c}{4(x^2+1)}$

(69) $y' = \frac{y}{2y\ln y + y - x}$ **Rpta.** $x = y\ln y + \frac{c}{y}$

(70) $x(x^3+1)y' + (2x^3-1)y = \frac{x^3-2}{x}$ **Rpta.** $y = \frac{cx}{x^3+1} + \frac{1}{x}$

(71) $y' + x\operatorname{sen} 2y = xe^{-x^2}\cos^2 y$ **Rpta.** $\operatorname{tg} y = (c + \frac{x^2}{2})e^{-x^2}$, sug: $z = \operatorname{tg} y$

(72) $xy' = x - y + \operatorname{tg} x$ **Rpta.** xy cos x = c + cos x + x sen x

(73) (sen x . sen y + tg x) dx – cos x cos y dy = 0 **Rpta.** cos x . sen y = ln (cosec x)

(74) $x\,sen\,x.y' + (sen\,x + x\cos x)y = sen\,x.\cos x - x$ **Rpta.** $y = \frac{K\operatorname{sen} x}{x} + \cos x$

(75) $(2x-1)y' - 2y = \frac{1-4x}{x^2}$ **Rpta.** $y = c(2x-1) + \frac{1}{x}$

76 $y' + \operatorname{sen} x . y = 2xe^{\cos x}$ **Rpta.** $y = (x^2 + c)e^{\cos x}$

77 $x^2 dy + xy\,dx = 8x^2 \cos 2x\,dx$ **Rpta.** $xy = 2x^2 + 2x \operatorname{sen} 2x + \cos 2 + c$

78 dy + 2ydx = sen 3x . dx **Rpta.** $y = \frac{1}{13}(2\operatorname{sen} 3x - 3\cos 3x) + ce^{-2x}$

79 dx – x dy = ln y dy **Rpta.** $x + \ln y = e^{y} \int \frac{e^{-y}}{y} dy$

80 (sen x + cos y)dx + cos x dx – sen y dy = 0 **Rpta.** $\operatorname{sen} x + \cos y = ce^{-x}$

81 $(x^2 + x + 1)yy' + (2x+1)y^2 = 2x - 1$ **Rpta.** $y^2(x^2 + x + 1)^2 = x^4 + \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 - 4x + n$

82 $\int \phi(\alpha x) d\alpha = n\phi(x)$ **Rpta.** $\phi(x) = c.e^{\frac{n-1}{n}}$

83 (1 + 2x . ctg y)dy = dx **Rpta.** $x = \operatorname{sen}^2 y(c - c\operatorname{tg} y)$

84 $f(x)dy + 2yf'(x)dx = f(x).f'(x)dx$ **Rpta.** $3y = f(x) + c.(f(x))^{-2}$

85 $f^2(y)\frac{dx}{dy} + 3f(y)f'(y)x = f'(y)$ **Rpta.** $2x.f^3(y) = f^2(y) + c$

86 $\cos x . y'' + \sec x . y' + (\sec x . \operatorname{tg} x + \cos x)y = 2\sec^2 x . \operatorname{tg} x$

Rpta. $y = \cos x + c.e^{-\operatorname{tg} x} \int_0^x e^{\operatorname{tg}(t)} dt + K$

87 $\cos x\,dy + 3y \operatorname{sen} x\,dx - \cos^2 x\,dx = 0$ **Rpta.** $y \sec^3 x = 2\operatorname{tg} x + c$

88 $\cos x \frac{dy}{dx} + \operatorname{sen} x = 1 - y$ **Rpta.** y (secx + tgx) = x + c

89 $y' \operatorname{sen} x = y\cos x + \operatorname{sen}^2 x$ **Rpta.** y = (x + c) senx

(90) $xyy'+y^2 = \operatorname{sen} x$ **Rpta.** $x^2y^2 = 2\operatorname{sen} x - 2x\cos x + c$, sug. $x = y^2$

(91) $x(x^2+1)y'+2y = (x^2+1)^3$ **Rpta.** $x^2y = \frac{1}{4}(x^2+1)^3 + c(x^2+1)$

(92) $y' = 1 + 3y\operatorname{tg} x$ **Rpta.** $3y\cos^3 x = c + 3\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^3 x$

(93) $(x+a)y' = bx - ny$, a, b, n constante, n ≠ 0, n ≠ -1

Rpta. $n(n+1)y = b(nx-a) + c(x+a)^{-n}$

(94) (cos 2y - sen x) dx - 2 tg x sen 2y dy = 0 **Rpta.** $\operatorname{sen} x\cos 2y - \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} = c$

(95) $(3x^2+1)y' - 2xy = 6x$ **Rpta.** $y = -3 + k(x^2 + 1)$

(96) $(x^2+1)y'+xy = (1-2x)\sqrt{x^2+1}$ **Rpta.** $y = \frac{x - x^2 + c}{\sqrt{x^2+1}}$

(97) $x\frac{dy}{dx} + \frac{y}{\sqrt{2x+1}} = 1 + \sqrt{2x+1}$ **Rpta.** $y = (\frac{z+1}{z-1})[2z - 2\ln|z+1| + c]$, $z = \sqrt{2x+1}$

(98) $\operatorname{sen} x\cos x\frac{dy}{dx} + y = \operatorname{tg}^2 x$ **Rpta.** y = 1 + k ctg x

(99) $x^2dy + (2xy - x + 1)dx = 0$ **Rpta.** $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{x} + \frac{c}{x^2}$

(100) $xy' + (1+x)y = e^{-x}$ **Rpta.** $y = e^{-x}(1 + \frac{c}{x})$

(101) $y' + \frac{y}{1-x} = x^2 - x$ **Rpta.** $y = (1-x)(c - \frac{x^2}{2})$

(102) $y' = \frac{2y}{1+x} + (1+x)^3$ **Rpta.** $y = (x+1)^2[x + \frac{x^2}{2} + c]$

(103) $x\,dy = (2y + 3x^4 + x^2)dx$ **Rpta.** $y = x^2[\frac{3x^2}{2} + \ln x + c]$

(104) $y'+2xy+x=e^{-x^2}$

(105) $\frac{dy}{dx}+xy-x^2+x^3(y-x)^2=1$

(106) $\frac{dy}{dx}+y\operatorname{tg}x=e^{-x}(\operatorname{tg}x-1)$

(107) $(5y-2x^3y^{\frac{3}{2}})dx+x^4y^{\frac{1}{2}}dy=0$

(108) Supongamos que ϕ es una función con derivada continua en $0 \le x \le 1$ que satisface $\phi'(x)-2\phi(x)\le 1$ y $\phi(0)=1$ probar que $\phi(x)\le\frac{3}{2}e^{2x}-\frac{1}{2}$

(109) $y''+(\operatorname{tg}x)y'+\sec^2 x.y)=\cos x$ **Rpta.** y = cos x [ln|sec x|+ c.Ln|sec x + tg x |+ k]

(110) $(ny+(x+1)^{n+1}e^x)dx-(x+1)dy=0$ **Rpta.** $y=(x+1)^n e^x+c(x+1)^n$

(111) $(x^2+2x+\operatorname{sen}(x^2+y^2)+2x\cos(x^2+y^2)dx+2y\cos(x^2+y^2)dy=0$

(112) $dy+(4x^2y-x^2e^{-x^3})dx=0$

(113) $\operatorname{sen}(2x)\frac{dy}{dx}+2\operatorname{sen}^2 x.y=2\operatorname{sen}x$

(114) $y'+(\frac{1}{x-2})y=3x$, y(3) = 4

II. **Hallar la solución particular de la ecuación diferencial con las condiciones dadas.**

(1) $\frac{dy}{dx}+\frac{2}{x}y=\frac{\cos x}{x^2}$, y(π) = 0, x > 0 **Rpta.** $y=\frac{\operatorname{sen}x}{x^2}$

(2) $xy'+y-e^x=0$, y (a) = b **Rpta.** $y=\frac{e^x+ab-e^a}{x}$

(3) $y'-\frac{y}{1-x^2}-1-x=0$, y(0) = 0 **Rpta.** $y=\frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2}+arc.\operatorname{sen}x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

(4) $y'-y\operatorname{tg}x=\frac{1}{\cos x}$, y(0) = 0 **Rpta.** $y=\frac{x}{\cos x}$

(5) $y'-(1+\frac{3}{x})y=x+2$, y(1) = e – 1 **Rpta.** $y=x^3e^x-x$

(6) $x\dfrac{dy}{dx}-2y=x^2+x$, $y(1)=1$ **Rpta.** $y=x^2\ln x+2x^2-x$

(7) $y\dfrac{dy}{dx}-2x=3y^2-2$, $y(1)=1$ **Rpta.** $x=3y^2\ln y+1$

(8) $y\,dx-4x\,dy=y^6dy$, $y(4)=1$ **Rpta.** $2x=y^4(y^2+7)$

(9) $y'-2xy=\cos x-2x\operatorname{sen}x$, y es una función acotada cuando $x\to\infty$ **Rpta.** $y=\operatorname{sen}x$

(10) $2\sqrt{x}\,y'-y=-\operatorname{sen}\sqrt{x}-\cos\sqrt{x}$, y es acotada cuando $x\to+\infty$ **Rpta.** $y=\cos\sqrt{x}$

(11) $y'-y\ln 2=2^{\operatorname{sen}x}(\cos x-1)\ln 2$, y es acotada cuando $x\to+\infty$ **Rpta.** $y=2^{\operatorname{sen}x}$

(12) $2x^2y'-xy=2x\cos x-3\operatorname{sen}x$, $y\to 0$, cuando $x\to+\infty$ **Rpta.** $y=\dfrac{\operatorname{sen}x}{x}$

(13) $y'\operatorname{sen}x-y\cos x=-\dfrac{\operatorname{sen}^2x}{x^2}$, $y\to 0$, cuando $x\to\infty$ **Rpta.** $y=\dfrac{\operatorname{sen}x}{x}$

(14) $y'-e^xy=\dfrac{1}{x^2}\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}-e^x\cos\dfrac{1}{x}$, $y\to 2$, cuando $x\to-\infty$ **Rpta.** $y=e^{e^x}+\cos\dfrac{1}{x}$

(15) $y'-y\ln x=-(1+2\ln x)x^{-x}$, $y\to 0$, cuando $x\to+\infty$ **Rpta.** $y=x^{-x}$

(16) $L\dfrac{di}{dt}+Ri=E$, donde L, R, E son constantes, $i(0)=0$ **Rpta.** $i=\dfrac{E}{R}(1-e^{-\frac{Rt}{L}})$

(17) $\dfrac{di}{dt}+Ri=E.\operatorname{sen}\omega t$, cuando $t=0$, $i=0$

Rpta. $i=EZ^{-2}(R.\operatorname{sen}\omega t-\omega L\cos\omega t+\omega Le^{-\frac{Rt}{L}})$ donde $Z^2=R^2+\omega^2L^2$

(18) $(3x^4y-1)dx+x^5dy=0$, $y(1)=1$ **Rpta.** $x^4y=2x-1$

(19) $(y' + y\,\text{tg}\,x) = \text{sen}\,2x$, $y(0) = 2$ **Rpta.** $y = 4\cos x - 2\cos^2 x$

(20) $\dfrac{dx}{dt} + x = e^{2t}$, $x(0) = 1$ **Rpta.** $y = \dfrac{e^{2t}}{3} + \dfrac{2e^{-t}}{3}$

2.9. ECUACIONES DIFERENCIALES DE BERNOULLI.-

Las Ecuaciones diferenciales de la forma:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} + p(x)y = Q(x)y^n \; ; \; n \neq} \quad \ldots (1)$$

Se conoce con el nombre de Ecuación Diferencial de Bernoulli.

La ecuación (1) no es una ecuación diferencial lineal.

Luego para resolver la ecuación (1), primero se transforma a una ecuación diferencial lineal, mediante el procedimiento siguiente:

1° A la ecuación (1) se multiplica por y^{-n}, es decir: $y^{-n}\dfrac{dy}{dx} + p(x)y^{1-n} = Q(x)$

2° A la ecuación diferencial del 1° paso se multiplica por (1 - n), es decir:

$$(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx} + (1-n)p(x)y^{1-n} = (1-n)Q(x)$$

3° Sea $z = y^{1-n} \Rightarrow \dfrac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n}\dfrac{dy}{dx}$

4° Se reemplaza el 3° paso en el 2° paso, es decir: $\boxed{\dfrac{dy}{dx} + (1-n)p(x)z = (1-n)Q(x)}$

Que es una ecuación diferencial lineal en z de primer orden y la solución es conocida de acuerdo a 2.11.

a. Ejemplos: Resolver las ecuaciones diferenciales siguientes:

① $2x\frac{dy}{dx}+2y=xy^3$

Solución

A la ecuación diferencial dada expresaremos así: $\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y=\frac{y^3}{2}$; multiplicando por y^{-3}

$y^{-3}\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y^{-2}=\frac{1}{2}$; multiplicando por (1 - n) es decir por -2.

$$-2y^{-3}\frac{dy}{dx}-\frac{2}{x}y^{-2}=-1 \qquad \text{... (1)}$$

Sea $z=y^{-2} \Rightarrow \frac{dz}{dx}=-2y^{-3}\frac{dy}{dx}$ reemplazando en (1)

$\frac{dz}{dx}-\frac{2}{x}z=-1$, ecuación diferencial lineal en z, y la solución general es:

$z=e^{-\int -\frac{2}{x}dx}[\int e^{\int -\frac{2}{x}dx}(-1)dx+c]$ efectuando $z=e^{2\ln x}[-\int e^{-2\ln x}dx+c]$

$$\therefore \quad y^{-2}=x+c.x^2$$

② $\frac{dy}{dx}=\frac{x}{x^2y+y^3}$

Solución

$\frac{dy}{dx}=\frac{x}{x^2y+y^3} \Rightarrow \frac{dx}{dy}=\frac{x^2y+y^3}{x}$, de donde $\frac{dy}{dx}-xy=y^3x^{-1}$, multiplicando por x.

$x\frac{dy}{dx}-yx^2=y^3$, multiplicando por (1 - n) o sea por 2.

$$2x\frac{dy}{dx}-2yx^2=2y^3 \qquad \text{... (1)}$$

Sea $z = x^2 \Rightarrow \frac{dz}{dx} = 2x\frac{dx}{dy}$ reemplazando en (1)

$\frac{dz}{dy} - 2yz = 2y^3$, ecuación diferencial lineal en z, y la solución general es:

$$z = e^{-\int -2y\,dy}\left[\int e^{\int -2y\,dy} 2y^3 dy + c\right] = e^{y^2}\left[\int e^{-y^2} 2y^3 dy + c\right]$$ integrando por partes.

$z = e^{y^2}[-y^2e^{-y^2} - e^{-y^2} + c]$ simplificando $\therefore\ (x^2 + y^2 + 1)e^{-y^2} = c$

3. $y^2(y^6 - x^2)y' = 2x$

Solución

$y^2(y^6 - x^2)y' = 2x \Rightarrow 2x\frac{dx}{dy} = y^2(y^6 - x^2)$ de donde $\frac{dx}{dy} + \frac{y^2}{2}x = \frac{y^8}{2}x^{-1}$

multiplicando por x: $x\frac{dx}{dy} + \frac{y^2}{2}x^2 = \frac{y^8}{2}$

multiplicando por (1 - n) o sea por 2 se tiene: $2x\frac{dx}{dy} + y^2x^2 = y^8$ ... (1)

Sea $z = x^2 \Rightarrow \frac{dz}{dy} = 2x\frac{dx}{dy}$ reemplazando en (1)

$\frac{dz}{dy} + y^2z = y^8$ ecuación diferencial lineal en z, y la solución general es:

$z = e^{-\int y^2 dy}\left[\int e^{\int y^2 dy} y^8 dy + c\right]$, integrando se tiene: $z = e^{-\frac{y^3}{3}}\left[\int e^{\frac{y^3}{3}} y^8 dy + c\right]$

integrando por partes $z = e^{-\frac{y^3}{3}}[9(\frac{y^6}{9} - \frac{2y^3}{3} + 2)e^{\frac{y^3}{3}} + c]$ simplificando

$$\therefore\ x^2 = y^6 - 6y^3 + 18 + ce^{-\frac{y^3}{3}}$$

4 $\quad ydx+(x-\frac{x^3y}{2})dy=0$

Solución

A la ecuación diferencial dada expresaremos así: $\frac{dx}{dy}+\frac{1}{y}x=\frac{x^3}{2}$, multiplicando por x^{-3}

$$x^{-3}\frac{dx}{dy}+\frac{1}{y}x^{-2}=\frac{1}{2} \Rightarrow 2x^{-3}\frac{dx}{dy}+\frac{2}{y}x^{-2}=1$$

Sea $z=x^{-2} \Rightarrow \frac{dz}{dy}=-2x^{-3}\frac{dx}{dy}$ reemplazando.

$-\frac{dz}{dy}+\frac{2}{y}z=1 \Rightarrow \frac{dz}{dy}-\frac{2}{y}z=-1$ ecuación lineal en z, Luego la solución es:

$z=e^{-\int -\frac{2}{y}dy}[\int e^{\int -\frac{2}{y}dy}(-1)dy+c]$, integrando $z=e^{2\ln y}[-\int e^{-2\ln y}dy+c]$, simplificando

$$z=y^2[-\int\frac{dy}{y^2}+c] \qquad \therefore \quad x^{-2}=y+cy^2$$

5 $\quad 3x\,dy=y(1+x\operatorname{sen}x-3y^3\operatorname{sen}x)dx$

Solución

$3x\,dy=y(1+x\operatorname{sen}x-3y^3\operatorname{sen}x)dx$ expresaremos así:

$3x\frac{dy}{dx}=y(1+x\operatorname{sen}x-3y^3\operatorname{sen}x)$ de donde

$\frac{dy}{dx}-\frac{1+x\operatorname{sen}x}{3x}y=-(\frac{\operatorname{sen}x}{x})y^4$, multiplicando por y^{-4}

$$y^{-4}\frac{dy}{dx}-\frac{1+x\operatorname{sen}x}{3x}y^{-3}=-\frac{\operatorname{sen}x}{x}$$

Sea $z = y^{-3} \Rightarrow -\frac{dz}{3dx} = y^{-4}\frac{dy}{dx}$ reemplazando.

$$-\frac{dz}{3dx} - \frac{1 + x\operatorname{sen} x}{3x} z = -\frac{\operatorname{sen} x}{x} \Rightarrow \frac{dz}{dx} + \frac{1 + x\operatorname{sen} x}{x} z = 3\frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

que es una ecuación diferencial lineal en z, cuya solución general es:

$$z = e^{-\int \frac{1+x\operatorname{sen} x}{x}dx}\left[\int e^{\int \frac{1+x\operatorname{sen} x}{x}dx} 3\frac{\operatorname{sen} x}{x}dx + c\right], \text{ integrando}$$

$$z = e^{\ln x + \cos x}\left[\int e^{\ln x - \cos x}\frac{3\operatorname{sen} x}{x}dx + c\right], \text{ simplificando } z = \frac{e^{\cos x}}{x}\left[3\int e^{-\cos x}\operatorname{sen} x dx + c\right]$$

$$z = \frac{e^{\cos x}}{x}[3e^{-\cos x} + c] \qquad \therefore \quad y^{-3} = \frac{3}{x} + \frac{c.e^{\cos x}}{x}$$

⑥ $3x\frac{dy}{dx} - 2y = \frac{x^3}{y^2}$

Solución

A la ecuación diferencial expresaremos así: $\frac{dy}{dx} - \frac{2}{3x}y = x^2 y^{-2}$, multiplicando por y^2

$$y^2\frac{dy}{dx} - \frac{2}{3x}y^3 = x^2 \qquad \ldots (1)$$

Sea $z = y^3 \Rightarrow \frac{dz}{dx} = 3y^2\frac{dy}{dx}$, reemplazando en (1)

$\frac{dz}{3dx} - \frac{2}{3x}z = x^2 \Rightarrow \frac{dz}{dx} - \frac{2}{x}z = 3x^2$, ecuación lineal en z, cuya solución general es:

$$z = e^{-\int -\frac{2dx}{x}}\left[\int e^{\int -\frac{2dx}{x}} 3x^2 dx + c\right] = e^{2\ln x}\left[\int e^{-2\ln x} 3x^2 dx + c\right]$$

de donde $y^3 = x^2(x + c) \Rightarrow y^3 = x^3 + cx^2$

7) $(2xy^3 - y)dx + 2x\,dy = 0$

Solución

A la ecuación diferencial escribiremos en la forma:

$$2x\frac{dy}{dx} + 2xy^3 - y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} - \frac{1}{2x}y = -y^3$$

multiplicando por y^{-3} se tiene: $\quad y^{-3}\frac{dy}{dx} - \frac{1}{2x}y^{-2} = -1$ ... **(1)**

Sea $z = y^{-2} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = -2y^{-3}\frac{dy}{dx}$ reemplazando en (1)

$$-\frac{dz}{2dx} - \frac{1}{2x}z = -1 \Rightarrow \frac{dz}{dx} + \frac{1}{x}z = 2 \text{ ecuación lineal}$$

Cuya solución general es: $\quad z = e^{-\int\frac{dx}{x}}[\int e^{\int\frac{dx}{x}}2dx + c]$

$$z = e^{-\ln x}[\int e^{\ln x}2\,dx + c] \Rightarrow z = \frac{1}{x}[x^2 + c] \Rightarrow y^{-2} = x + \frac{c}{x}$$

8) $2y = \frac{dy}{dx} + y^2 c\operatorname{tg} x = \cos ecx$

Solución

A la ecuación diferencial expresaremos en la forma:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{c\operatorname{tg} x}{2}.y = \frac{\cos ecx}{2}y^{-1}, \text{ multiplicando por y.}$$

$$y\frac{dy}{dx} + \frac{c\operatorname{tg} x}{2}.y^2 = \frac{\cos ecx}{2} \quad \text{... (1)}$$

Sea $\quad z = y^2 \Rightarrow \frac{dz}{dx} = 2y\frac{dy}{dx}$ reemplazando en (1)

$$\frac{dz}{2dx} + \frac{c\operatorname{tg} x}{2}z = \frac{\cos ecx}{2} \Rightarrow \frac{dz}{dx} + c\operatorname{tg} x.z = \cos ecx$$

que es una ecuación diferencial lineal en z, cuya solución general es:

$$z = e^{-\int \operatorname{ctg} x dx}[\int e^{\int \operatorname{ctg} x dx} \operatorname{cosec} x\, dx + c] = e^{-\ln(\operatorname{sen} x)}[\int e^{\ln(\operatorname{sen} x)} \operatorname{cosec} x\, dx + c]$$

$$z = \operatorname{cosec} x[x + c] \Rightarrow y^2 = x \operatorname{cosec} x + c.\operatorname{cosec} x.$$

b. EJERCICIOS PROPUESTOS.

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales.

1. $(x^2 + y^2 + 1)dy + xy\, dx = 0$ **Rpta.** $y^4 + 2x^2y^2 + 2y^2 = K$

2. $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x+1} = -\frac{1}{2}(x+1)^3 y^2$ **Rpta.** $\frac{1}{y^2} = \frac{(x+1)^4}{2} + C(x+1)^2$

3. $(x^2 + 1)y' = xy + x^2y^2$ **Rpta.** $\frac{1}{y} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}(\frac{1}{2}\ln|x + \sqrt{1+x^2}| - x\sqrt{1+x^2} + c)$

4. $\frac{dy}{dx} = \frac{4\operatorname{sen}^2 y}{x^5 + x \operatorname{tg} y}$ **Rpta.** $x^4(K - \ln \operatorname{tg} y) = \operatorname{tg} y$

5. $(x^2 + y^2 + (y + 2x)x^{-1})dy = (2(x^2 + y^2) + (y + 2x)x^{-2} y)dx$

   Rpta. $(y - 2x)^2 = -\frac{2y}{x} + 10 \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ sug: y= u x

6. $(xy^2)' = (xy)^3(x^2 + 1)$ **Rpta.** $y = \frac{45}{45c\sqrt{x} - 5x^5 - 9x^3}$

7. $dy - y \operatorname{sen} x\, dx = y \ln(ye^{\cos x})dx$ **Rpta.** $y = -e^{Ke^x - \cos x}$

8. $(x + y^3) + 6xy^2y' = 0$ **Rpta.** $y^3 = -\frac{x}{3} + c.x^{-\frac{1}{2}}$

9. $(xy^2 + x \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} 2x)dx - 2y\, dy = 0$ **Rpta.** $y^2 = \operatorname{sen}^2 x + c.e^{\frac{x^2}{2}}$

(10) $\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x-2}y=5(x-2)\sqrt{y}$ **Rpta.** $y^{\frac{1}{2}}=c(x-2)^{-\frac{1}{2}}+(x-2)^2$

(11) $3y^2\frac{dy}{dx}+\frac{y^3}{x+1}-8(x+1)=0$, $y(0)=0$ **Rpta.** $y^3(x+1)=\frac{8}{3}[(x+1)^3-1]$

(12) $\frac{dy}{dx}=-\frac{y^3}{e^{2x}+y^2}$ **Rpta.** $y^2=(c-2\ln|y|)e^{2x}$ sug: $z=e^{2x} \Rightarrow dx=\frac{dz}{2z}$

(13) $2\cos y\,dx-(x\operatorname{sen} y-x^3)dy=0$ **Rpta.** $\sec y = x^2(c+\operatorname{tg} y)$

(14) $dy+\frac{1}{x}y\,dx=3x^2y^2dx$ **Rpta.** $xy(c-\frac{3x^2}{2})=1$

(15) $dy+y\,dx=2xy^2e^xdx$ **Rpta.** $1=ye^x(c-x^2)$

(16) $3\frac{dy}{dx}+\frac{3}{x}y=2x^4y^4$ **Rpta.** $x^{-3}y^{-3}+x^2=c$

(17) $x^{-1}dx=(x\operatorname{sen} y-1)dy$ **Rpta.** $\frac{1}{x}=ce^y+\frac{1}{2}(\operatorname{sen} y+\cos y)$

(18) $\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2}{x^3+y+1}$ **Rpta.** $x^3=c.e^y-y-2$

(19) $8xy'-y=-\frac{1}{y^3\sqrt{x+1}}$ **Rpta.** $y^4=c\sqrt{x}+\sqrt{x+1}$

(20) $2\operatorname{sen} x.\frac{dy}{dx}+y\cos x=y^3(x\cos x-\operatorname{sen} x)$ **Rpta.** $\frac{1}{y^2}=x+K.\operatorname{sen} x$

(21) $x\frac{dy}{dx}+\frac{y}{\ln x}=\frac{x(x+\ln x)}{y^2\ln x}$

Rpta. $y=[3x+\frac{3}{2}(\frac{x^2-6x}{\ln x})-\frac{3}{2}(\frac{x^2-12x}{\ln x^2})+\frac{1}{4}(\frac{3x^2-72x+c}{(\ln x)^3})]^{\frac{1}{3}}$

(22) $(x-1)\dfrac{dy}{dx}-2y=\sqrt{(x^2-1)y}$ **Rpta.** $y=[(1-x)(c+\dfrac{1}{2}\ln(x+\sqrt{x^2-1})-\sqrt{x^2-1})]^2$

(23) $dx+x.c\operatorname{tg}y.dy=\dfrac{x\operatorname{sen}y\cos y}{x^2\operatorname{sen}^2 y+1}dy$ **Rpta.** $x^2\operatorname{sen}^2 y+2\ln(x\operatorname{sen}y)=\operatorname{sen}^2 y+c$

(24) $dx+(\dfrac{2}{y})xdy=2x^2y^2dy$ **Rpta.** $x^{-1}y^{-2}=c-2y$

(25) $dx-2xy\ \ dy=6x^3y^2e^{-2y^2}dy$ **Rpta.** $x^{-2}e^{2y^2}=c-4y^3$

(26) $(12e^{2x}y^2-y)dx=dy$, y (0) = 1 **Rpta.** $y^{-1}e^{-x}=13-12e^x$

(27) $x\dfrac{dy}{dx}+y=y^2\ln x$ **Rpta.** cxy + y (ln x + 1) = 1

(28) $2xy\dfrac{dy}{dx}-y^2+x=0$ **Rpta.** $y^2=x\ln(\dfrac{k}{x})$

(29) $ye^y=(y^3+2x\ \ e^y)y'$ **Rpta.** $x=y^2(c-e^{-y})$

(30) $xy^3dx=(x^2y+2)dy$ **Rpta.** $x^2=1-\dfrac{2}{y}+c.e^{-\frac{2}{y}}$

(31) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{4x^3y}{x^4+y^2}$ **Rpta.** $x^4=y^2+cy$

(32) $x^3dy+3x^2dx=2\cos y\,dy$ **Rpta.** $x^3=\operatorname{sen}y+\cos y+ce^{-y}$

(33) $x^3dx-(x^4+y^3)dy=0$ **Rpta.** $x^3=\operatorname{sen}y+\cos y+c.e^{-y}$

(34) $yy'+y^2=\cos x$ **Rpta.** $y^2=c.e^{-2x}+\dfrac{2}{5}\operatorname{sen}x+\dfrac{4}{5}\cos x$

(35) $y'=5x^2y^5+\dfrac{y}{2x}$ **Rpta.** $y^{-4}=\dfrac{c}{x^2}-4x^3$

(36) $\cos x\dfrac{dy}{dx} - y\,\text{sen}\,x + y^2 = 0$ **Rpta.** $\dfrac{1}{y} = \text{sen}\,x + K.\cos x$

(37) $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{x}{y}$ **Rpta.** $ye^{\frac{x^2}{2y^2}} = c$

(38) $2\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y(2x+3y^2)}{x^2}$ **Rpta.** $x^2 = (c-3x)y^2$

(39) $\cos x.\dfrac{dy}{dx} = y\,\text{sen}\,x + y^2\,\text{tg}\,x$ **Rpta.** $y = \dfrac{2\cos x}{K.\cos^2 x - 1}$

(40) $x\dfrac{dy}{dx} - y = 2x^2 y(y^2 - x^2)$ **Rpta.** $x^2 = (1 + c.e^{x^4})y^2$

(41) $(4 - x^2 + y^2)dx + 4y\,dy = 0$, $y(2) = 1$ **Rpta.** $y^2 = (x-2)^2 + e^{1-\frac{x}{2}}$

(42) $y' = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2 - a^2}$ **Rpta.** $x^2 + y^2 - a^2 = cy$

(43) $3y' + \dfrac{x^2 + a^2}{x(x^2 - a^2)}y = \dfrac{x(3x^2 - a^2)}{x^2 - a^2}.\dfrac{1}{y^2}$ **Rpta.** $y^3 = \dfrac{cx}{x^2 - a^2} + x^2$

(44) $y\,dx = (y^3 - x)dy$ **Rpta.** $4xy = y^4 + c$

(45) $(x^2 - 1)dy - y(2x - 3y)dx = 0$ **Rpta.** $x^2 - 1 = y(3x + c)$

(46) $y\,dx + (x^2 y^4 - 3x)dy = 0$ **Rpta.** $7y^3 = x(y^7 + c)$

(47) $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{2y}{3x} + \dfrac{x^2 + 2}{3}y^4 = 0$ **Rpta.** $y^{-3} = \dfrac{x^3}{5} + \dfrac{2x}{3} + 4x^2$

(48) $x^2\dfrac{dy}{dx} - xy + y^3 e^x = 0$ **Rpta.** $x^2 = y^2(2e^x + c)$

(49) $xy^2 y' + y^3 = x\cos x$ **Rpta.** $y^3 = 3\,\text{sen}\,x + \dfrac{9\cos x}{x} - \dfrac{18\,\text{sen}\,x}{x^2} - \dfrac{18\cos x}{x^3} + \dfrac{c}{x^4}$

(50) $6y^2dx - x(ax^3 + y)dy = 0$ **Rpta.** $(2x^3 - y)^2 = cyx^6$

(51) $2x^3y' = y(y^2 + 3x^2)$ **Rpta.** $y^2(c-x)x^3$

(52) $2y\,dx + x(x^2 \ln y - 1)dy = 0$ **Rpta.** $y(1 + x^2 - x^2 \ln y) = cx^2$

(53) $2xyy' = y^2 - 2x^3$, $y(1) = 2$ **Rpta.** $y^2 = x(5 - x^2)$

(54) $(y^4 - 2xy)dx + 3x^2dy = 0$, $y(2) = 1$ **Rpta.** $x^2 = y^3(x+2)$

(55) $(2y^3 - x^3)dx + 3xy^2dy = 0$, $y(1) = 1$ **Rpta.** $5x^2y^3 = x^5 + 4$

(56) $(x^2 + 6y^2)dx - 4xy\,dy = 0$, $y(1) = 1$ **Rpta.** $2y^2 = x^2(3x - 1)$

(57) $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 \operatorname{sen} x - y\cos^2 x}{\operatorname{sen} x.\cos x}$ **Rpta.** $y = (\operatorname{sen} x.\ln|\operatorname{cosec} 2x + c\operatorname{tg} 2x| + \operatorname{sen} x)^{-1}$

(58) $(x^2+1)\sqrt{y}\,y' = xe^{\frac{3x}{2}} + (1-x)^2 y\sqrt{y}$ **Rpta.** $y = e^x(\frac{1}{2} + c(x^2+1)^{-\frac{3}{2}})^{\frac{2}{3}}$

(59) $y' - 4y = 2e^x y^{\frac{1}{2}}$, $y(0) = 2$, **Rpta.** $y = (\sqrt{2}e^{2x} + e^{2x} - e^x)^2$

(60) $y' - y = -y^2(x^2 + x + 1)$, $y(0) = 1$ **Rpta.** $y = \frac{1}{x^2 - x + 2 - e^{-x}}$

(61) $xy' - 2y = 4x^3 y^{\frac{1}{2}}$, $y(1) = 0$ **Rpta.** $y = (x^3 - x)^2$

(62) $xy' + y = x^2y^2 \ln x$, $y(1) = \frac{1}{2}$ **Rpta.** $y = \frac{1}{x^2 + x - x^2 \ln x}$

(63) $y' = \frac{y\psi'(x) - y^2}{\psi(x)}$ donde $\psi(x)$ es una función dada **Rpta.** $y = \frac{\psi(x)}{x + c}$

(64) $y^{n-1}(ay' + y) = x$ **Rpta.** $ny^n = ce^{-\frac{nx}{a}} + nx - a$

(65) $xdx = (\frac{x^2}{y} - y^3)dy$ **Rpta.** $x^2 = y^2(c - y^2)$

(66) $y' + \frac{y}{x+1} + y^2 = 0$ **Rpta.** $y = \frac{1}{(1+x)[c + \ln|1+x|]}$

(67) $xdy - 2ydx = \frac{x^8 y^{-2}}{3}[3(yx^{-2})^2 + 2yx^{-2}]dx$ **Rpta.** $6yx^{-2} - 4\ln|3yx^{-2} + 2| = 3x^2 + c$

(68) $y - y'\cos x = y^2 \cos x(1 - \operatorname{sen} x)$ **Rpta.** $y = \frac{\operatorname{tg} x + \sec x}{c + \operatorname{sen} x}$

(69) $yy' + y^2 \operatorname{tg} x = \cos^2 x$ **Rpta.** $y^2 = (2x + c)\cos^2 x$

(70) $\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = \frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$ **Rpta.** $y = (\frac{c + \ln|\cos x|}{x} + \operatorname{tg} x)^2$

(71) $2xyy' + (1+x)y^2 = e^x, \quad y(1) = \sqrt{e}$ **Rpta.** $y = (\frac{e^x + e^{2-x}}{2})^{\frac{1}{2}}$

(72) $3\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x+1} = \frac{x}{y^2}$ **Rpta.** $12(x+1)^2 y^3 = 3x^4 + 8x^3 + 6x^2 + c$

(73) $\frac{dy}{dx} - xy = y^{\frac{1}{2}} x e^{x^2}$ **Rpta.** $3y^{\frac{1}{2}} = e^{x^2} + ce^{\frac{x^2}{4}}$

(74) $y^3 \frac{dy}{dx} + xy^4 = xe^{-x^2}$ **Rpta.** $e^{2x^2} y^4 = 2e^{x^2} + c$

(75) $(1 - x^2)\frac{dy}{dx} + xy = x(1 - x^2)y^{1/2}$, $y(0) = 1$ **Rpta.** $3y^{\frac{1}{2}} + 1 - x^2 = 4(1 - x^2)^{\frac{1}{4}}$

(76) $2y\,dx = (x^2 y^4 + x)dy$, $y(1) = 1$ **Rpta.** $10x = (9 + xy^4)y^{\frac{1}{2}}$

(77) $xy' + y = y^2 \ln x$ **Rpta.** $y(1 + \ln x + cx) = 1$

(78) $xy' - 4y - x^2\sqrt{y} = 0$ **Rpta.** $y = \frac{x^4}{2}\ln^2|xK|$

(79) $(x+1)dy = y[y(x+1)\ln(x+1) - 1]dx$, $y = \frac{1}{e}$, $x = \frac{1}{e}$

Rpta. $2y^{-1}(x-1)^{-1} = 3 - [\ln(x+1)]^2$

(80) $\frac{dy}{dx} - y\operatorname{tg}x + y^2\cos x = 0$ **Rpta.** y (x + c) = secx

(81) $ydy - \frac{ay^2}{x^2}dx = \frac{bdx}{x^2}$ **Rpta.** $y^2 = c.e^{-2a/x} - \frac{b}{a}$

(82) x dy = y (xy – y) dx **Rpta.** $xe^{\frac{1}{xy}} = c$

(83) $2x^2\frac{dy}{dx} + y = 4y^3$ **Rpta:** $y^2 = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{c + 4e^{\frac{1}{x}}}$

(84) $(e^y - 2xy)y' = y^2$ **Rpta:** $xy^2 = e^y + c$

(85) $xy' + y = x^4y^3$ **Rpta:** $\frac{1}{y^2} = -x^4 + cx^2$

(86) $y - xy' = y'y^2e^y$ **Rpta:** $x = ye^y + cy$

(87) $xy^2y' + y^3 = x\cos x$ **Rpta:** $y^3 = 3\operatorname{sen}x + \frac{9\cos x}{x} - \frac{18\operatorname{sen}x}{x^2} - \frac{18\cos x}{x^3} + cx^{-3}$

(88) $dy + (4y - 8y^{-3})x\,dx = 0$ **Rpta:** $y = [2 + c.e^{-8x^2}]^{\frac{1}{4}}$

(89) $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{2x} = \frac{x}{y^3}$, y(1) = 2 **Rpta:** $x^2y^4 = x^4 + 15$

(90) $y\,dx = (3x + y^3 - y^2)dy$; y (1) = -1 **Rpta:** $x = y^2[1 + y\ln(-y)]$

(91) $\frac{dy}{dx} = 5x^2y^5 + \frac{y}{2x}$ **Rpta:** $u = \frac{c}{x^2} - 4x^3$, $y = \frac{1}{\sqrt[4]{u}}$

(92) $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{x^2y + y^3}$ **Rpta:** $(x^2 + y^2 + 1)e^{-y^2} = c$

(93) $3xy' + y + x^2y^4 = 0$ **Rpta:** $y^{-3} = x^2 + cx$

(94) $(3\,\text{sen}\, y - 5x)dx + 2x^2 c\,\text{tg}\, y\,dy = 0$ **Rpta:** $x^3(\text{sen}\, y - x)^2 = c.\text{sen}^2\, y$

(95) $y'\,\text{tg}\, x.\text{sen}\, 2y = \text{sen}^2\, x + \cos^2 y$ **Rpta:** $(\text{sen}^2\, x + 3\cos^2\, y)\,\text{sen}\, x = c$

(96) $\cos y.\text{sen}\, 2x\,dx + (\cos^2 y - \cos^2 x)dy = 0$ **Rpta:** $\cos^2 x(1 + \text{sen}\, y) = \cos y(y + c - \cos y)$

(97) y (x tg x + ln y) dx + tg x dy = 0 **Rpta:** sen x . ln y = x cos x – sen x + c

(98) $yy' + y^2\,\text{tg}\, x = \cos^2 x$ **Rpta:** $y^2 = (2x + c)\cos^2 x$

(99) $\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 c\,\text{tg}\, x + \text{sen}\, x\cos x}{2y}$ **Rpta:** $y^2 + \text{sen}\, x = c.\text{sen}^3\, x$

(100) $\frac{dx}{dt} + \frac{t+1}{2t}x = \frac{t+1}{xt}$ **Rpta:** $x^2 = \frac{4 + e^{-t}c}{2}$

(101) $ydx + (xy^2 + x - y)dy = 0$ **Rpta:** $x = \frac{1 + c.e^{\frac{y^2}{2}}}{2}$

(102) $y' - \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{4}{\sqrt{1+x^2}}\text{arctg}\, xy^{1/2}$ **Rpta:** $\sqrt{y} = \sqrt{1+x^2}[\text{arctg}^2\, x + c]$

(103) $y^3\sec^2 x\,dx - (1 - 2y^2\,\text{tg}\, x)dy = 0$ **Rpta:** $y^2\,\text{tg}\, x = \ln|cy|$

(104) $x^2y\,dx + (3x^4 - y^3)dy = 0$ **Rpta:** $15x^4y^{12} = 4y^{15} + c$

105) $y\,dx = x(1+xy^4)dy$ **Rpta:** $y(5+xy^4)=cx$

106) $\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{tg} y . c\operatorname{tg} x - \sec y . \cos x$ **Rpta:** sen y + sen x . ln (c sen x) = 0

107) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^3}{1-2xy^2}$, y(0) = 1 **Rpta:** $xy^2 - \ln|y| = 0$

108) $x\dfrac{dy}{dx} - y = x^K y^n$ **Rpta:** $(n+K-1)y^{1-n} = (1-n)x^K + c.x^{1-n}$, $n \neq 1$, $K + n \neq 1$

$x^K = K\ln\left|\dfrac{cy}{x}\right|$, n = 1, $K \neq 0$; $y = cx^2$, n = 1, K = 0,

$y^{1-n} = (1-n)x^{1-n}\ln|cx|$, $n \neq 1$, K + n = 1

109) $(x^3 + \cos^2 x + 2x^2y^2 + \operatorname{sen}^2 x)dx + 2x^3 y\,dy = 0$ **Rpta:** $x^2y^2 = -\dfrac{x^3}{3} - \ln x + c$

110) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(x+1)\ln x - x(3x+4)y^3}{(x^3+2x^2-1)y^2}$

111) $\dfrac{\operatorname{sen} 2x}{6}y' + y = (1+\cos x)y^{\frac{2}{3}}$

112) $(x^2+x+1)yy' + (2x+1)y^2 = 2x-1$

113) $2(1-x^2)y' - (1-x^2)y = xy^3e^{-x}$

114) $[y\cos x - y^3(x\cos x - \operatorname{sen} x)]dx + 2\operatorname{sen} x\,dy = 0$

115) $xy' - 3y = 2x$, y(1) = 0

116) $(xy^2 + x^2y^2 + 3)dx + (x^2y)dy = 0$

117) $3y^2y' + \dfrac{y^3}{x+1} - 8x + 8 = 0$

118) $2\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y^2}$, y(1) = 1

119) $xy(1+xy^2)\dfrac{dy}{dx} = 1$, y(1) = 0

120) $3(1+x^2)\dfrac{dy}{dx} = 2xy(y^3-1)$

2.10. ECUACIÓN DIFERENCIAL DE RICCATI.-

Consideremos la ecuación diferencial de la forma:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = P(x)y + Q(x)y^2 + R(x)} \qquad \ldots (1)$$

donde P (x) , Q(x) y R(x) son funciones sólo de x.

A la ecuación (1) se conoce con el nombre de ecuaciones diferenciales de "RICCATI". Estas ecuaciones diferenciales no se puede resolver por métodos hasta este momento estudiados, pero sin embargo si se conoce una solución particular, se puede hallar la solución de la ecuación diferencial suponiendo que y = ψ (x) sea una solución particular entonces se puede hallar la solución de la ecuación diferencial, haciendo y = ψ (x) + z, donde z es una función incógnita, que se va ha determinar con la ayuda de la ecuación diferencial.

Es decir: $y = \psi(x) + z \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = \psi'(x) + \frac{dz}{dx}$, reemplazando en la ecuación (1) se tiene:

$$\psi'(x) + \frac{dz}{dx} = P(x)(\psi(x)+z) + Q(x)(\psi(x)+z)^2 + R(x) \qquad \ldots (2)$$

Agrupando los términos de la ecuación (2)

$$\frac{dz}{dx} - P(x) + 2Q(x)\psi(x))z - Q(x)z^2 + (\psi'(x) - P(x)\psi(x) - Q(x)\psi^2(x) - R(x)) = 0 \ldots (3)$$

Como y = ψ (x) es una solución de la ecuación diferencial de "RICCATI" entonces se tiene:

$$\psi'(x) - P(x)\psi(x) - Q(x)\psi^2(x) - R(x) = 0 \qquad \ldots (4)$$

de las ecuaciones (4) y (3) se tiene: $\boxed{\frac{dz}{dx} - (P(x) + 2Q(x)\psi(x))z = Q(x)z^2}$ ... (5)

Luego la ecuación (5) es una ecuación diferencial de Bernoulli y la solución de estas ecuaciones ha sido estudiado en (2.12).

a. Ejemplos: Resolver las ecuaciones diferenciales siguientes:

1) $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}y+\frac{1}{x^2}y^2-1$, donde una solución es y = ψ (x) = x

Solución

Sea y = ψ (x) + z = x + z, la solución de la ecuación diferencial dada, donde z es una función por determinarse, entonces $\frac{dy}{dx}=1+\frac{dz}{dx}$, reemplazando en la ecuación diferencial dada.

$1+\frac{dz}{dx}=\frac{1}{x}(x+z)+\frac{1}{x^2}(x+z)^2-1$ simplificando

$\frac{dz}{dx}-\frac{3}{x}z=\frac{1}{x^2}z^2$, ecuación diferencial de Bernoulli

$\frac{dz}{dx}-\frac{3}{x}z=\frac{1}{x^2}z^2$, multiplicando por z^{-2}

$z^{-2}\frac{dz}{dx}-\frac{3}{x}z^{-1}=\frac{1}{x^2}$, multiplicando por (1 - n) o sea por -1

$$-z^{-2}\frac{dz}{dx}+\frac{3}{x}z^{-1}=-\frac{1}{x^2} \quad \text{... (1)}$$

$$\text{Sea} \quad \omega=z^{-1} \Rightarrow \frac{d\omega}{dx}=-z^{-2}\frac{dz}{dx} \quad \text{... (2)}$$

reemplazando (2) en (1) se tiene: $\frac{d\omega}{dx}+\frac{3}{x}z=-\frac{1}{x^2}$ ecuación lineal en ω.

y la solución general es: $\omega=e^{-\int\frac{3}{x}dx}[\int e^{\int\frac{3}{x}dx}(\frac{-dx}{x^2})+c]$ calculando la integral

$$\omega=e^{-3\ln x}[-\int e^{3\ln x}\frac{dx}{x^2}+c]=\frac{1}{x^3}(-\frac{x^2}{2}+c)$$

$$\frac{1}{z}=-\frac{1}{2x}+\frac{c}{x^3}=\frac{2c-x^2}{2x^3} \Rightarrow z=\frac{2x^3}{2c-x^2}$$

Luego la solución general es y = x + z $\quad \therefore\ y=\frac{2cx+x^3}{2c-x^2}$

(2) $\frac{dy}{dx}=x+(\frac{1}{x}-x^2)y+y^2$, donde una solución es $y=\psi(x)=x^2$

Solución

Sea $y=x^2+z$, la solución de la ecuación diferencial dada, donde z es una función por determinarse, entonces $\frac{dy}{dx}=2x+\frac{dz}{dx}$ reemplazando en la ecuación diferencial dada.

$$2x+\frac{dz}{dx}=x+(\frac{1}{x}-x^2)(x^2+z)+(x^2+z)^2 \text{ simplificando}$$

$$\frac{dz}{dx}-(\frac{1}{x}+x^2)z=z^2 \text{ ecuación de Bernoulli}$$

multiplicando a la ecuación diferencial por z^{-2}

$$z^{-2}\frac{dz}{dx}-(\frac{1}{x}+x^2)z^{-1}=1;\text{ de donde } \omega=z^{-1} \text{ se tiene:}$$

$$\frac{d\omega}{dx}=z^{-2}\frac{dz}{dx}, \text{ reemplazando obtenemos}$$

$$-\frac{d\omega}{dx}-(\frac{1}{x}+x^2)\omega=1 \Rightarrow \frac{d\omega}{dx}+(\frac{1}{x}+x^2)\omega=-1$$

es una ecuación lineal en ω cuya solución es: $\omega=e^{-\int(\frac{1}{x}+x^2)dx}[\int e^{\int(\frac{1}{x}+x^2)dx}(-dx)+c]$

$$z^{-1}=e^{\ln x-\frac{x^2}{3}}[-\int e^{\ln x-\frac{x^2}{3}}dx+c] \Rightarrow z^{-1}=xe^{-\frac{x^3}{3}}[-\int e^{\frac{x^3}{3}}x\,dx+c]$$

b. EJERCICIOS PROPUESTOS.

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales.

1. $\frac{dy}{dx}=y^2-\frac{1}{x}y+1-\frac{1}{4x^2}$, una solución es $\varphi(x)=\frac{1}{2x}+\operatorname{tg}x$

Rpta: $y=\frac{1}{2x}+\frac{K\operatorname{sen}x+\cos x}{K\cos x-\operatorname{sen}x}$

2. $x^3y'=x^2y+y^2-x^2$, una solución es $\varphi(x)=x$ **Rpta:** $y=\frac{2cxe^{\frac{2}{x}}+x}{2ce^{\frac{2}{x}}-1}$

3. $x(x-1)\frac{dy}{dx}-(2x+1)y+y^2+2x=0$, una solución es $\varphi(x)=x$ **Rpta:** $y=\frac{x^2+c}{x+c}$

4. $y'-xy^2+(2x-1)y=x-1$, una solución es $\varphi(x)=1$ **Rpta:** $y=1+\frac{1}{1-x+ce^{-x}}$

5. $y'-\operatorname{sen}^2x.y^2+\frac{1}{\operatorname{sen}x\cos x}y+\cos^2x=0$, una solución es $\varphi(x)=\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}$

Rpta: $y=\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}(1+(c.e^{-\operatorname{sen}^2x}-\frac{1}{2})^{-1})$

6. $y'+y^{2x}-(1+2e^x)y+e^{2x}=0$, una solución es $y=e^x$

7. $y'+xy^2-2x^2y+x^3=x+1$, una solución es $\varphi(x)=x-1$

8. $\frac{dy}{dx}=-8xy^2+4x(4x+1)y-(8x^3+4x^2-1)$ una solución es $\varphi(x)=x$

Rpta: $y=[2+ce^{-2x^2}]^{-1}+x$

9. $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+x^3y^2-x^5$ una solución es $\varphi(x)=x$ **Rpta:** $c.e^{\frac{2}{5}x^5}=\frac{y-x}{y+x}$

(10) $\frac{dy}{dx}+y^2 \operatorname{sen} x=\frac{2\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$ una solución es $y=\frac{1}{\cos x}$ **Rpta:** $y=\sec x+\frac{3\cos^2 x}{c-\cos^3 x}$

(11) $\frac{dy}{dx}=3y+y^2-4$, una solución es $\varphi(x)=1$ **Rpta:** $y=\frac{c+4e^{5x}}{c-e^{5x}}$

(12) $y'=x+(1-2x)y-(1-x)y^2$ una solución es $\varphi(x)=1$ **Rpta:** $y=1+\frac{1}{x+ce^x}$

(13) $\frac{dy}{dx}=(1-x)y^2+(2x-1)y-x$, una solución es $\varphi(x)=1$

Rpta: $y=(x-2+ce^{-x})^{-1}+1$

(14) $\frac{dy}{dx}=\frac{2\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x+y^7}{2\cos x}$, una solución es $\varphi(x)=\operatorname{sen} x$

Rpta: $y=\operatorname{sen} x+(K\cos x-\frac{1}{2}\operatorname{sen} x)^{-1}$

(15) $y'=-\frac{1}{x^2}-\frac{y}{x}+y^2$, una solución es $\varphi(x)=\frac{1}{x}$ **Rpta:** $y=x^{-1}+2x(x^2+2x)^{-1}$

(16) $y'=1+x^2-2xy+y^2$ una solución es $\varphi(x)=x$ **Rpta:** $y=x+(c-x)^{-1}$

(17) $\frac{dy}{dx}=-y^2+xy+1$ una solución es $\varphi(x)=x$

(18) $\frac{dy}{dx}=e^{2x}-ye^x+e^{-x}y^2$, una solución es $y=e^x$ **Rpta:** $y=e^x-\frac{\exp(2x-e^x)}{c+\exp(x-e^x)}$

2.11. ECUACIONES DIFERENCIALES DE LAGRANGE Y CLAIROUTS.-

a) Las ecuaciones diferenciales de Lagrange son de la siguiente forma:

$$\boxed{y=x\,f(y')+g(y')} \qquad \ldots (1)$$

Para resolver la ecuación diferencial de Lagrange se transforma en otra ecuación diferencial lineal en x como función de P, haciendo $\frac{dy}{dx}=P$ de donde dy = P dx

Luego se sustituye $\frac{dy}{dx}=P$ en la ecuación; (1)

$$y = x\,f(P) + g(P) \qquad \text{... (2)}$$

diferenciando la ecuación (2) se tiene: $dy = f(P)dx + x\,f'(P)dp + g'(P)dp$ ... (3)

reemplazando en la ecuación (3), dy = Pdx se tiene:

$$Pdx = f(P)dx + x\,f'(P)dp + g'(P)dp \qquad \text{... (4)}$$

La ecuación (4) se puede expresar en la forma: $\frac{dx}{dp}+\frac{f(P)}{f(P)-P}x=-\frac{g'(P)}{f(P)-P}$

Que es una ecuación diferencial lineal en x, cuya solución general es x = φ(P,c) donde Pds un parámetro y la solución general de la ecuación (1) se dá en forma paramétrica.

$$\boxed{\begin{cases} x=\varphi(P,c) \\ y=\varphi(P,c)f(P)+g(P)\end{cases},\ \text{P es un parámetro}}$$

b) Las ecuaciones diferenciales de Clairouts son de la siguiente forma:

$$\boxed{y = xy' + g(y')}$$

La solución de la ecuación diferencial de Clairouts se obtiene siguiendo el mismo procedimiento del caso de la ecuación diferencial de Lagrange.

c) **Ejemplos:** Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales.

1. $2y = xy' + y'\ln y'$

Solución

A la ecuación diferencial expresaremos en la forma: $y = x\frac{y'}{2}+\frac{y'\ln y'}{2}$ ... (1)

Sea $y' = \frac{dy}{dx} = P \Rightarrow$ dy = P dx, reemplazando en (1)

$y = x\frac{P}{2} + \frac{P\ln P}{2}$, diferenciando se tiene:

$dy = \frac{P}{2}dx + \frac{x}{2}dp + \frac{\ln P}{2}dp + \frac{dp}{2}$, reemplazando dy = p dx

$pdx = \frac{P}{2}dx + \frac{x}{2}dp + \frac{\ln P}{2}dp + \frac{dp}{2}$, simplificando

$\frac{dx}{dp} - \frac{1}{P}x = \frac{\ln P + 1}{P}$, que es una ecuación diferencial lineal.

cuya solución de ésta ecuación es: $x = e^{-\int -\frac{dp}{p}}[\int e^{\int -\frac{dp}{p}} \frac{\ln P + 1}{P} dp + c] = -\ln P - 2 + pc$

y la solución general de la ecuación diferencial es: $\begin{cases} x = pc - \ln P - 2 \\ y = \frac{c}{2}p^2 - P \end{cases}$, P es un parámetro

(2) $y = 2xy' + \text{sen}\, y'$

Solución

Sea $y' = \frac{dy}{dx} = P \Rightarrow$ dp = p dx, reemplazando en la ecuación diferencial se tiene:

y = 2xp + senP, diferenciando se tiene: dy = 2xdp + 2pdx + cosPdp,

reemplazando dy = pdx, pdx = 2xdp + 2pdx + cos Pdp, simplificando

$\frac{dx}{dp} + \frac{2}{P}x = -\frac{\cos P}{P}$, que es una ecuación lineal cuya solución de ésta ecuación es:

$x = e^{-\int \frac{2dp}{p}}[\int e^{\int \frac{2dp}{p}}(-\frac{\cos P}{P})dp + c] - \frac{\cos P}{P} - \text{sen}\, P + \frac{c}{P^2}$

de donde la solución general de la ecuación diferencial es:

$$\begin{cases} x = -\dfrac{\cos P}{P^2} - \operatorname{sen} P + \dfrac{c}{P^2} \\ y = \dfrac{2c}{P} - \dfrac{2\cos P}{P} - \operatorname{sen} P \end{cases}, \text{ P es un parámetro}$$

(3) $y = xy' + \dfrac{a}{y'^2}$

Solución

Sea $y' = \dfrac{dy}{dx} = P \Rightarrow$ dy = p dx, reemplazando en la ecuación diferencial se tiene:

$y = xp + \dfrac{a}{P^2}$, diferenciando ambos miembros

$dy = xdp + pdx - \dfrac{2a}{P^3}dp$, reemplazando dy = pdx

$$pdx = xdp + pdx - \frac{2a}{P^3}dp \Rightarrow (x - \frac{2a}{P^3})dp = 0$$

de donde $x = \dfrac{2a}{P^3} \vee$ dp = 0 $\Rightarrow$ P = c Luego $\begin{cases} x = \dfrac{2a}{c^3} \\ y = xc + \dfrac{a}{c^2} \end{cases}$

(4) $y = xy' + y'^2$

Solución

Sea $y' = \dfrac{dy}{dx} = P \Rightarrow$ dy = p dx reemplazando en la ecuación dada: $y = xp + P^2$, diferenciando $\Rightarrow$ dy = xdp + pdx + 2pdp al sustituir dy = pdx se tiene:

pdx = xdp + pdx + 2pdp $\Rightarrow$ (x + 2p) dp = 0 de donde

$$\begin{cases} x + 2P = 0 \\ dp = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = -2P \\ P = c \end{matrix} \text{ donde } \begin{cases} x = -2c \\ y = xe + c^2 \end{cases}$$

d. EJERCICIOS PROPUESTOS.

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales

① $y = 2xy' + \ln y'$ **Rpta.** $\begin{cases} x = \dfrac{c}{P^2} - \dfrac{1}{P} \\ y = \dfrac{2c}{P} + LnP - 2 \end{cases}$

② $y = x(1 + y') + y'^2$ **Rpta.** $\begin{cases} x = 2(1 - P) + ce^{-P} \\ y = 2(1 - P) + ce^{-P}(1 + P) + P^2 \end{cases}$

③ $y = -xy'^2 + y'^2 + 1$ **Rpta.** $y = 1 + (c - \sqrt{1 - x})^2$

④ $y = 2xy' - 2y' + 1$ **Rpta.** $(y - 1)^2 = c(x - 1)$

⑤ $y = 2xy'^2 + y'$ **Rpta.** $\begin{cases} x(2P - 1)^2 = \ln P - 2P + c \\ y = 2xp^2 + P \end{cases}$

⑥ $y = \dfrac{3}{2}xy' + e^{y'}$ **Rpta.** $\begin{cases} x = \dfrac{c}{P^3} - 2e^P(\dfrac{1}{P} - \dfrac{2}{P^2} + \dfrac{2}{P^3}) \\ y = \dfrac{3c}{2P^2} - 2e^P(1 - \dfrac{3}{P} + \dfrac{3}{P^2}) \end{cases}$

⑦ $y = xy'^2 - \dfrac{1}{y'}$ **Rpta.** $\begin{cases} x = \dfrac{cp^2 + 2p - 1}{2p^2(P - 1)^2} \\ y = \dfrac{cp^2 + 2p - 1}{2(P - 1)^2} - \dfrac{1}{P} \end{cases}$

⑧ $y = (x + 1)y'^2$ **Rpta.** $\begin{cases} x = \dfrac{2p - p^2 + c}{(P - 1)^2} \\ y = (x + 1)P \end{cases}$

⑨ $y = x \operatorname{sen} y' + \cos y'$ **Rpta.** $\begin{cases} x \exp(\displaystyle\int_0^t \frac{\cos u\, du}{\operatorname{sen} u - u}) = \displaystyle\int_0^t \frac{\operatorname{sen} u\, du}{\operatorname{sen} u - u} \exp(\displaystyle\int_0^u \frac{\cos x}{\operatorname{sen} z - z} dz) du \\ y = x \operatorname{sen} P + \cos P \end{cases}$

(10) $y = 2xy' - 2y' + 1$ **Rpta.** $(y-1)^2 = c(x-1)$

(11) $yy'^2 + (2x-1)y' = y$ **Rpta.** $y^2 = 2(1+2c)(x+c)$

(12) $y = -xy'^2 + y'^2 + 1$ **Rpta.** $y = 1 + (c - \sqrt{1-x})^2,\ y = 1$

(13) $y = (y'-1)x + ay' + b$ **Rpta.** $y = (x + a) \ln (x + a) + c (x + a) + b - x$

(14) $y = mxy' + ay' + b$ **Rpta.** $m (y - b) = (1 - m) (mx + a) \ln (mx + a)$

(15) $y + xy' = y'^2$ **Rpta.** $\begin{cases} x = \dfrac{2p}{3} + cp^{-\frac{1}{2}} \\ y = -xp + P^2 \end{cases}$

(16) $y'^3 - xy' + 2y = 0$ **Rpta.** $\begin{cases} x = P(c-3P) \\ 2y = P^2(c-4P) \end{cases}$

(17) $2y'^2 + xy' - 2y = 0$ **Rpta.** $\begin{cases} x = 4P\ln(pc) \\ y = P^2[1 + 2\ln(pc)] \end{cases}$

(18) $2y'^3 + xy' - 2y = 0$ **Rpta.** $\begin{cases} x = 2P(3P+c) \\ 2y = P^2(4p+c) \end{cases}$

(19) $y = xy' + y'^2$ **Rpta.** $y = cx + c^2$

(20) $y = xy' - 3y'^3$ **Rpta.** $y = cx - 3c^3$

(21) $y = xy' + \dfrac{1}{y'}$ **Rpta.** $y = cx + \dfrac{1}{c}$

(22) $y = xy' + \dfrac{ay'}{\sqrt{1+y'^2}}$ **Rpta.** $y = cx + \dfrac{ac}{\sqrt{1+c^2}},\ x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

(23) $y = xy' + a\sqrt{1+y'^2}$ **Rpta.** $y = cx + a\sqrt{1+c^2},\ x^2 + y^2 = a^2$

24) $y = xy' + \dfrac{a}{y'^2}$ **Rpta.** $y = xc + \dfrac{a}{c^2}$

25) $y = xy' + \text{sen}\, y'$ **Rpta.** $y = cx + \text{sen}\, c$

26) $y' = \ln(xy' - y)$ **Rpta.** $y = cx - e^c$

27) $y = xy' - y'^2$ **Rpta.** $y = cx - c^2$

28) $y = xy' + \sqrt{1 - y'^2}$ **Rpta.** $y = cx + \sqrt{1 - c^2}$

29) $y = xy' - e^{y'}$ **Rpta.** $y = cx - e^c$

30) $y = xy' + \dfrac{1}{\sqrt{y' - 1}}$ **Rpta.** $y = cx + \dfrac{1}{\sqrt{c - 1}}$

31) $y = xy' - \sqrt{1 - y'^2} - \arccos y'$ **Rpta.** $y = cx + \sqrt{1 - c^2} - c.\arccos c$

32) $y + y'^2 = y'x$ **Rpta.** $y = cx - c^2$

33) $y = xy' + a\sqrt[3]{1 - y'^3}$ **Rpta.** $y = cx + a\sqrt[3]{1 - c^3}$

34) $xy' - y = \ln y'$ **Rpta.** $y = cx - \ln c$

35) $y = xy' - 3y'^3$ **Rpta.** $y = cx - 3c^3$

36) $y = (x + 1)y' + y'^2$ **Rpta.** $y = cx + c + c^2$

37) $y = xy' + y' - y'^2$ **Rpta.** $y = cx + c - c^2$

38) $y = (x + 1)y' - 1$ **Rpta.** $y = cx + c - 1$

39) $y = xy' + \sqrt{1 + y'}$ **Rpta.** $y = cx + \sqrt{1 + c}$

40) $(y - \sqrt{1 + y'^2})dx - xdy = 0$ **Rpta.** $y = cx + \sqrt{1 + c^2}$

2.12. ECUACIONES DIFERENCIALES NO RESUELTAS CON RESPECTO A LA PRIMERA DERIVADA.-

1° Ecuación de primer orden y de grado n con respecto a y´

Las ecuaciones diferenciales de primer orden y de grado n con respecto a y' son de la siguiente forma:

$$\boxed{(y')^n + P_1(x,y)(y')^{n-1} + P_2(x,y)(y')^{n-2} + P_{n-1}(x,y)y' + P_n(x,y) = 0} \quad \dots (1)$$

Para encontrar la solución de estas ecuaciones diferenciales, se resuelve la ecuación (1) con respecto a y´; como la ecuación (1) es de grado n, entonces se puede tener:

$$y' = f_1(x,y),\ y' = f_2(x,y),\ y' = f_3(x,y),\ \dots,\ y' = f_K(x,y),\ (K = n) \quad \dots (2)$$

que son las soluciones reales de la ecuación (1)

Luego el conjunto de las soluciones de la ecuación (2) es:

$$\varphi_1(x,y,c_1) = 9,\ \varphi_2(x,y,c_2) = 0,\ \dots,\ \varphi_K(x,y,c_K) = 0$$

donde $\varphi_i(x,y,c_i) = 0$, i = 1,2,..., K es la solución de la ecuación diferencial $y' = f_i(x,y)$ c, i=1,2,...K y que representa la solución general de la ecuación (1).

2° Ecuaciones diferenciales de la forma f(y, y') = 0

Cuando en esta ecuación diferencial se puede despejar y' se obtiene ecuaciones diferenciales de variable separable, por lo tanto nuestro interés está en los demás casos.

a) Si en la ecuación diferencial $f(y, y') = 0$ se puede despejar y es decir:

$$y = \varphi(y') \quad \dots (1)$$

entonces para obtener la solución se introduce un parámetro $y' = \frac{dy}{dx} = P$ en la ecuación (1), es decir: $y = \varphi(P)$ ... (2)

ahora diferenciando la ecuación (2) se tiene: $dy = \varphi'(P)dp$ ... **(3)**

Como $\frac{dy}{dx} = P \Rightarrow$ dy = p dx que al sustituir en (3)

se tiene: $p\,dx = \varphi'(P)dp$ de donde $dx = \frac{\varphi'(P)}{P}dp \Rightarrow x = \int \frac{\varphi(P)}{P}dp + c$

y la solución de la ecuación diferencial se ha dado en forma paramétrica:

$$\boxed{\begin{cases} x = \int \frac{\varphi'(P)}{P}dp + c \\ y = \varphi(P) \end{cases}}$$

b) Si en la ecuación diferencial $f(y, y') = 0$, no se puede despejar ni y, ni y', pero estas últimas pueden expresarse en forma paramétricas mediante algún parámetro t.

$$y = \varphi(t); \quad y' = \varphi(t) \quad (P = \frac{dy}{dx})$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \varphi(t) \Rightarrow dy = \varphi(t)dx$$

Como $y = \varphi(t) \Rightarrow dy = \varphi(t)dt$, de donde

$$\varphi(t)dx = \varphi(t)dt \Rightarrow dx = \frac{\varphi'(t)dt}{\varphi(t)} \quad \text{de donde} \quad x = \int \frac{\varphi'(t)dt}{\varphi(t)} + c$$

y la solución de la ecuación diferencial es dada en forma paramétrica.

$$\begin{cases} x = \int \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}dt + c \\ y = \varphi(t) \end{cases}$$

3° Ecuaciones diferenciales de la forma f(x, y') = 0

Si en la ecuación diferencial $f(x, y') = 0$, se puede despejar x es decir:

$$x = \varphi(y') \quad \text{... (1)}$$

de donde para obtener la solución se hace $y' = P$ de donde en la ecuación (1) se tiene: $x = \varphi(P) \Rightarrow dx = \varphi(P)\,dp$ **... (2)**

Además $\frac{dy}{dx} = P \Rightarrow dx = \frac{dy}{P}$ **... (3)**

de (2) y (3) se tiene $\frac{dy}{P} = \varphi'(P)dp$ de donde $dy = P\varphi'(P)dp \Rightarrow y = \int P\varphi'(P)dp$

Luego la solución general de la ecuación diferencial es dada en forma paramétrica:

$$\begin{cases} x = \varphi(P) \\ y = \int P\varphi'(P)dp \end{cases}$$

a. Ejemplos: Resolver las siguientes ecuaciones.

1) $y'^2 - (2x+y)y' + (x^2+xy) = 0$

Solución

$y'^2 - (2x+y)y' + (x^2+xy) = 0$, despejando y' se tiene:

$$y' = \frac{2x+y \pm \sqrt{(2x+y)^2 - 4(x^2+xy)}}{2} = \frac{2x+y \pm y}{2} \text{ de donde}$$

$$\begin{cases} y_1' = x+y \\ y_2' = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = ce^x - x - 1 \\ y_2 = \frac{x^2}{2} + c \end{cases}$$

2) $xy'^2 + 2xy' - y = 0$

Solución

$xy'^2 + 2xy' - y = 0$, despejando y' se tiene: $y' = \frac{-2x \pm \sqrt{4x^2 + 4xy}}{2x}$ simplificando

$y' = -1 \pm \frac{\sqrt{x+y}}{\sqrt{x}}$ de donde $z^2 = x+y$

$$2z\frac{dz}{dx}=1+y' \Rightarrow y'=2z\frac{dz}{dx}-1 \quad \text{de donde} \quad 2z\frac{dz}{dx}-1=-1\pm\frac{z}{\sqrt{x}} \Rightarrow 2z\frac{dz}{dx}=\pm\frac{z}{\sqrt{x}}$$

$$2dz=\pm\frac{dx}{\sqrt{x}} \quad \text{integrando} \quad z=\pm\sqrt{x}+c$$

$$\sqrt{x+y}=\pm\sqrt{x}+c \Rightarrow x+y=x+c^2\pm 2c\sqrt{x}$$

$$y-c^2=\pm 2c\sqrt{x} \Rightarrow (y-K)^2=4Kx$$

3) $y=y'^2\, c^{y'}$

Solución

Sea $y'=P \Rightarrow$ dy = pdx, remplazando en la ecuación dada

$$y=p^2e^p \Rightarrow dy=(2pe^p+p^2e^p)dp\,, \text{ de donde } \quad p\,dx=(2pe^p+p^2e^p)dp$$

$$dx=(2e^p+pe^p)dp\,, \text{ integrando} \quad x=e^p+pe^p+c$$

$$\therefore \begin{cases} x=e^p+pe^p+c \\ y=p^2e^p \end{cases}$$

4) $y^{\frac{2}{5}}+y'^{\frac{2}{5}}=a^{\frac{2}{5}}$

Solución

Sea $\begin{cases} y=a\cos^5 t \\ y'=a\operatorname{sen}^5 t=P \end{cases}$

$$dx=\frac{dy}{P}=-\frac{5a\cos^4 t\operatorname{sen} t}{a\operatorname{sen}^5 t}dt=-5c\operatorname{tg}^4 t dt$$

$$dx=-5c\operatorname{tg}^4 t dt \quad \text{integrando} \quad x=\frac{5c\operatorname{tg}^3 t}{3}-5c\operatorname{tg} t+5t+c$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{5c\operatorname{tg}^3 t}{3}-5c\operatorname{tg} t+5t+c \\ y=a\cos^5 t \end{cases}$$

5) $y^4 - y'^4 - yy'^2 = 0$

Solución

Sea $y' = yt$ reemplazando en la ecuación $y^4 - y^4t^4 - y^3t^2 = 0 \Rightarrow y - yt^4 - t^2 = 0$

$y(1-t^4) = t^2 \Rightarrow y = \dfrac{t^2}{1-t^4}$ diferenciando $dy = \dfrac{2t^5 + 2t}{(1-t^4)^2}dt$ **... (1)**

como $y' = P \Rightarrow y = \dfrac{P}{t}$ puesto que $y' = yt$

$\dfrac{P^4}{t^4} - P^4 - \dfrac{P^3}{t} = 0 \Rightarrow P = \dfrac{t^3}{1-t^4}$ Como $P = \dfrac{dy}{dx}$

$$dy = \frac{t^3}{1-t^4}dx \qquad \textbf{... (2)}$$

de (1) y (2) se tiene: $\dfrac{t^3dx}{1-t^4} = \dfrac{2t^5+2t}{(1-t^4)^2}dt \Rightarrow dx = \dfrac{2(t^4+1)dt}{(t^4-1)t^2}$ integrando

$$x = -2\int\left(\frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{C}{t+1} + \frac{D}{t-1} + \frac{Et+F}{t^2+1}\right)dt)$$

$$\begin{cases} x = -\dfrac{2}{t} + \ln\left|\dfrac{t+1}{t-1}\right| - 2\operatorname{arctg} t + c \\ y = \dfrac{t^2}{1-t^4} \end{cases}$$

6) $x = \ln y' + \operatorname{sen} y'$

Solución

Sea $y' = P \Rightarrow dx = \dfrac{dy}{P}$

x = ln P + sen P diferenciando se tiene: $dx = \dfrac{dp}{P} + \cos p.dp$ Como $dx = \dfrac{dy}{P}$

$\frac{dy}{P} = \frac{dp}{P} + \cos p dp \Rightarrow dy = dp + P \cos p dp.$ integrando

y = P + P sen P + cos P + c $\quad \therefore \begin{cases} x = \ln P + \operatorname{sen} P \\ y = P + P \operatorname{sen} P + \cos P + c \end{cases}$

b. EJERCICIOS PROPUESTOS.

Resolver los siguientes ejercicios.

1) $y'^2 - 2yy' = y^2(e^x - 1)$ **Rpta.** ln (K y) = x ± 2 $e^{x/2}$

2) $x^2y'^2 + 3xyy' + 2y^2 = 0$ **Rpta.** xy = c, $x^2y = K$

3) $xy'^2 - 2yy' + x = 0$ **Rpta.** $y = \frac{cx^2}{2} + \frac{1}{2c}$, $y = \pm x$

4) $y'^2 - 2y' - 8x^2 = 0$ **Rpta.** $y = 2x^2 + c$, $y = -x^2 + K$

5) $y'^3 + (x+2)e^y = 0$ **Rpta.** $4e^{-\frac{y}{3}} = (x+2)^{\frac{4}{3}} + c$

6) $y'^3 - yy'^2 - x^2y' + x^2y = 0$ **Rpta.** $y = \frac{x^2}{2} + c$, $y = -\frac{x^2}{2} + K$, $y = Ae^x$

7) $y'^4 - (x+2y+1)y'^3 + (x+2y+2xy)y'^2 - 2xyy' = 0$

Rpta. $y = c_1$, $y = x + c_2$, $2y = x^2 + c_3$, $y = c_4e^{2x}$

sug: $y'(y'-1)(y'-x)(y'-2y) = 0$

8) $xyy'^2 + (x^2 + xy + y^2)y' + x^2 + xy = 0$ **Rpta:** $2xy + x^2 - c = 0$, $x^2 + y^2 = c$

9) $(x^2 + x)y'^2 + (x^2 + x - 2xy - y)y' + y^2 - xy = 0$ **Rpta:** y = c (x + 1), y = -x – ln c x

10) $x^2y'^2 + xyy' - 6y^2 = 0$ **Rpta:** $y = cx^2$, $y = \frac{c}{x^3}$

(12) $xy'^2+(y-1-x^2)y'-x(y-1)=0$ **Rpta:** $2y-x^2=c$, $xy-x=c$

(12) $yy'^2+(x-y)y'-x=0$ **Rpta:** $y=x+c$, $y^2+x^2=C$

(13) $xy'^2-2yy'+4x=0$ **Rpta:** $y+\sqrt{y^2-x^2}=cx^2(y+\sqrt{y^2-x^2})=c$

(14) $y'^4-(x+2y+1)y'^3+(x+2y+2xy)y'^2-2xy.y'=0$

Rpta: $y=c$, $y-x=c$, $2y-x^2=c$, $y=ce^{2x}$

(15) $xyy'^2+(x^2+xy+y^2)y'+x^2+xy=0$ **Rpta:** $2xy+x^2-c=0$, $x^2+y^2-c=0$

(16) $(x^2+x)y'^2+(x^2-x-2xy-y)y'+y^2-xy=0$ **Rpta:** $y-c(x+1)=0$, $y+x\ln(cx)=0$

(17) $x^2y'^2+xyy'-6y^2=0$ **Rpta:** $y-cx^2=0$, $y=cx^{-3}$

(18) $xy'^2+(y-x^2-1)y'-x(y-1)=0$ **Rpta:** $2y-x^2+c=0$, $xy-x+c=0$

(19) $xy'^2-2yy'+4x=0$ **Rpta:** $cy=x^2+c^2$

(20) $3x^4y'^2-xy'-y=0$ **Rpta:** $xy=c(3cx-1)$

(21) $y=a(\frac{dy}{dx})^2+b(\frac{dy}{dx})^3$, a, b constantes. **Rpta:** $\begin{cases} x=2ap+\dfrac{3bp^2}{2}+c \\ y=P\ln P \end{cases}$

(22) $y=y'\ln y'$ **Rpta:** $\begin{cases} x=\dfrac{(\ln P+1)^2}{2}+c \\ y=P\ln P \end{cases}$

(23) $y=y'(1+y'\cos y')$ **Rpta:** $\begin{cases} x=\ln P+\operatorname{sen} P+P.\cos P+c \\ y=P+P^2\cos P \end{cases}$

(24) $y=(y'-1)e^{y'}$ **Rpta:** $\begin{cases} x=e^P+c \\ y=(P-1)e^P,\ y=-1 \end{cases}$

(25) $y = \text{arcsen}\, y' + \ln(1+y'^2)$ **Rpta:** $\begin{cases} x = 2\,\text{arctg}\, P - \ln\left|\dfrac{1+\sqrt{1-P^2}}{P}\right| + c \\ y = \text{arcsen}\, P + \ln(1+P^2) \end{cases}$

(26) $y' = e^{\frac{y'}{y}}$ **Rpta:** $\begin{cases} x = \ln(\ln P) + \dfrac{1}{\ln P} + c \\ y = \dfrac{P}{\ln p} \end{cases}$

(27) $y'^2 + e^{y} = 2$ **Rpta:** $\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \ln\left|\dfrac{P-\sqrt{2}}{P+\sqrt{2}}\right| + c \\ y = \ln(2-P^2) \end{cases}$

(28) $y^{\frac{2}{3}} + y'^{\frac{2}{3}} = 1$ **Rpta:** $\begin{cases} x = 3t + 3c\,\text{tg}\, t + c \\ y = \cos^3 t \end{cases}$

(29) $x = y'^2 - 2y'^2 + 2$ **Rpta:** $\begin{cases} x = P^2 - 2p + 2 \\ y = \dfrac{2}{3}P^3 - P^2 + c \end{cases}$

(30) $x(1+y'^2) = 1$ **Rpta:** $y + c = \pm(\sqrt{x-x^2} + \text{arcsen}\sqrt{x})$

(31) $y'^2 x = e^{\frac{1}{y'}}$ **Rpta:** $\begin{cases} x = \dfrac{e^{\frac{1}{P}}}{P^2} \\ y = \dfrac{e^{\frac{1}{P}}(P+1)}{P} + c \end{cases}$

(32) $x(1+y'^2)^{\frac{3}{2}} = a$ **Rpta:** $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = -a\,\text{sen}^3 t + c \end{cases}$

(33) $x = y' + \text{sen}\, y'$ **Rpta:** $\begin{cases} x = P + \text{sen}\, P \\ y = \dfrac{P^2}{2} + P\,\text{sen}\, P + \cos P + c \end{cases}$

(34) $x\sqrt{1+y'^2} = y'$ **Rpta:** $\begin{cases} x = \dfrac{P}{\sqrt{1+P^2}} \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{1+P^2}} + c \end{cases}$

(35) $x = y'^3 - y'$ **Rpta:** $\begin{cases} x = P^3 - P \\ y = \dfrac{3P^4}{4} - \dfrac{P^2}{2} + c \end{cases}$

2.13. SOLUCIONES SINGULARES.-

Consideremos una ecuación diferencial de la forma: $F(x, y, y') = 0$ **... (1)**

Llamaremos solución singular a $y = \varphi(x)$ de la ecuación (1) si en cada punto se infringe la propiedad de unicidad, es decir, si por cada uno de sus puntos (x_0, y_0) además de esta solución pasa también otra solución que tiene en el punto (x_0, y_0) la misma tangente que la solución $y = \varphi(x)$, pero no coincide esta última en ningún entorno del punto (x_0, y_0) arbitrariamente pequeño.

A la gráfica de una solución singular se denomina curva integral singular de la ecuación (1).

Si $F(x, y, y') = 0$ y sus derivados parciales $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ y $\dfrac{\partial F}{\partial y'}$, son continuas con respecto a todos sus argumentos x, y, y'.

Entonces cualquier solución singular de la ecuación (1).

También satisface a la ecuación: $\dfrac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} = 0$ **... (2)**

Por lo tanto para hallar las soluciones singulares de la ecuación (1) se elegirá y′ entre las ecuaciones (1) y (2) obteniendo la ecuación.

$\psi(x,y) = 0$ **... (3)**

A la ecuación (3) se denomina P - discriminante de la ecuación (1) y la curva determinada por la ecuación (3) se denomina curva P - discriminante (C.P.D.) siempre ocurre que una curva P - discriminante se descompone en unas cuántas ramas, en este caso debe averiguarse si cada una de estas ramas por separado es solución de la ecuación (1) si es afirmativo se debe comprobar si es solución singular, es decir, si se infringe la unicidad en cada uno de sus puntos.

Llamaremos envolvente de una familia de curvas. $\phi(x, y, c) = 0$ **... (4)**

a la curva que en cada uno de sus puntos es tangente a una de las curvas de la familia (4) siendo cada segmento de la misma tangente a una infinidad de curvas de la familia (4).

Si la solución (4) es la integral general (1), la envolvente de la familia de curvas (4), en caso que exista, será una curva integral singular de esta ecuación.

En efecto, en los puntos de la envolvente los valores x, y, y' coinciden con los valores correspondientes de la curva integral que es tangente a la envolvente en el punto (x,y), por lo tanto en cada punto de la envolvente los valores x, y, y' satisfacen a la ecuación $F(x, y, y') = 0$ es decir la envolvente es una curva integral.

Además en cada punto de la envolvente se infringe la unicidad, puesto que por cada punto de la misma pasan al menos dos curvas integrales en una misma dirección, la envolvente y la curva integral de la familia (4) que es tangente a ésta en el punto considerado.

En consecuencia, la envolvente es una curva integral singular, además por el curso de análisis matemático se conoce que la envolvente forma parte de la curva c - discriminante (C.C.D.) determinada por el sistema de ecuaciones:

$$\boxed{\begin{cases} \phi(x, y, c) = 0 \\ \dfrac{\partial \phi(x, y, c)}{\partial c} = 0 \end{cases}} \quad \text{... (5)}$$

Una rama de la curva c - discriminante es envolvente, cuando en ella se cumple las condiciones siguientes.

1° Que las derivadas parciales $\frac{\partial\phi}{\partial x},\frac{\partial\phi}{\partial y}$ existan y sus módulos están acotados.

$$|\frac{\partial\phi}{\partial x}|\leq M \ , \ |\frac{\partial\phi}{\partial y}|\leq N \quad \text{donde M y N son constantes}$$

2° $\frac{\partial\phi}{\partial x}\neq 0$ ó sino $\frac{\partial\phi}{\partial y}\neq 0$

Observaciones

a) Las condiciones 1° y 2° solamente son suficientes, por lo cual pueden ser envolventes también las ramas de la curva c - discriminante en las que no se cumple algunas de estas condiciones.

b) En el caso general, el P - discriminante contiene:

i) A la envolvente (E)

ii) Al lugar geométrico de los puntos de contacto al cuadrado (C^2)

iii) Al lugar geométrico de los puntos cúspides (ó de retroceso) (R)

$$\boxed{\Delta p = E.C^2.R}$$

c) El c - discriminante contiene:

i) A la envolvente (E)

ii) Al lugar geométrico de los puntos Anocdales al cuadrado (A^2)

iii) Al lugar geométrico de los puntos cuspidales (o de retroceso) al cubo (R^3)

$$\boxed{\Delta c = E.A^2.R^3}$$

Entre todos los lugares geométricos solamente la envolvente es solución (singular) de la ecuación diferencial.

Esta figura tanto en la curva P - discriminante como en la curva c - discriminante a la primera potencia, circunstancia que facilita la averiguación de la solución singular.

a) Ejemplos:

1. Encontrar la solución general y también la solución singular, si ella existe, de la ecuación:
$(\frac{dy}{dx})^2 + 4x^5\frac{dy}{dx} - 12x^4 y = 0$

Solución

Sea $\frac{dy}{dx} = P \Rightarrow dy = pdx$

$p^2 + 4x^5 p - 12x^4 y = 0$ diferenciando

$$2p\,dp + 20x^4 p\,dx + 4x^5 dp - 48x^3 y\,dx - 12x^4 dy = 0$$

$$2pdp + 20x^4 pdx + 4x^5 dp - 48x^3(\frac{p^2 + 4x^5 p}{12x^4})dx - 12x^4 pdx = 0$$

$$(2p + 4x^5)dp + 20x^4 pdx - 4\frac{(p^2 + 4x^5 p)}{x}dx - 12x^4 pdx = 0$$

$$(2p + 4x^5)dp + 8x^4 pdx - \frac{4p^2}{x}dx - 16x^4 pdx = 0$$

$$(2p + 4x^5)dp - (\frac{4p^2}{x} + 8x^4 p)dx = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x(p + 2x^5)\frac{dp}{dx} - 4p(p + 2x^5) = 0$$

$$(p + 2x^5)(x\frac{dp}{dx} - 2p) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (p + 2x^5) = 0 \quad \vee \quad x\frac{dp}{dx} - 2p = 0$$

Si $x\frac{dp}{dx} = 2p \Rightarrow \frac{dp}{p} = \frac{2dx}{x} \Rightarrow \ln p = 2\ln x + \ln K \Rightarrow \ln p = \ln Kx^2 \Rightarrow P = Kx^2$

reemplazando $p = Kx^4$ en la ecuación $p^2 + 4x^5 p - 12x^4 y = 0$

se tiene $K2x^4 + 4Kx^7 = 12x^4 y \Rightarrow K^2 + 4Kx^3 = 12y$

$\therefore \quad K(K + 4x^3) = 12y$ solución general.

Si $p+2x^5=0 \Rightarrow p=-2x^5$ reemplazando este valor en la ecuación dada tenemos:

$4x^{10}-8x^{10}=12x^4 \Rightarrow 3y=-x^6$ solución singular.

(2) Encontrar la solución general y también la solución singular, si ella existe, de la ecuación:
$x^3(\frac{dy}{dx})^2+x^2y\frac{dy}{dx}+1=0$

Solución

Sea $\frac{dy}{dx}=p \Rightarrow dy=pdx$, reemplazando en la ecuación dada

$x^3p^2+x^2py+1=0 \Rightarrow y=-xp-\frac{1}{x^2p}$ diferenciando

$dy=-xdp-pdx+\frac{2dx}{x^3p}+\frac{dp}{p^2x^2}$; pero dy = pdx

$pdx=-xdp-pdx+\frac{2dx}{x^3p}+\frac{dp}{p^2x^2} \Rightarrow (2p-\frac{2}{x^3p})dx+(x-\frac{1}{p^2x^2})dp=0$

$x(1-\frac{1}{p^2x^3})\frac{dp}{dx}+2p(1-\frac{1}{x^3p^2})=0 \Rightarrow (1-\frac{1}{x^3p^2})(x\frac{dp}{dx}+2p)=0$

$1-\frac{1}{x^3p^2}=0 \ \vee \ x\frac{dp}{dx}+2p=0$

Si $x\frac{dp}{dx}+2p=0 \Rightarrow \frac{dp}{p}+2\frac{dx}{x}=0$

ln p + 2 ln x = ln K $\Rightarrow \ln px^2=\ln K \Rightarrow px^2=K \Rightarrow p=\frac{K}{x^2}$

reemplazando en la ecuación $x^3p^2+x^2py+1=0$

$\frac{K}{x^2}+Ky+1=0 \Rightarrow K^2+Kxy+x=0$ solución general.

Si $1-\frac{1}{x^3p^2}=0 \Rightarrow p^2=\frac{1}{x^3} \Rightarrow p=x^{-\frac{3}{2}}$ reemplazando

en la ecuación $x^3p^2+x^2py+1=0$ se tiene $1+x^2x^{-\frac{3}{2}}y+1=0 \Rightarrow 2+\sqrt{x}\,y=0$

$y=-\frac{2}{\sqrt{x}} \Rightarrow y^2x-4=0$ solución singular

3. Encontrar la solución general y también la solución singular, si ella existe, de la ecuación: $x(\frac{dy}{dx})^3-2y(\frac{dy}{dx})^2-16x^2=0$

Solución

Sea $\frac{dy}{dx}=p \Rightarrow dy=pdx$

$xp^3-2yp^2-16x^2=0 \Rightarrow y=\frac{xp}{2}-\frac{8x^2}{p^2}$

diferenciando $dy=\frac{x}{2}dp+\frac{p}{2}dx-\frac{16x}{p^2}dx+\frac{16x^2}{p^3}dp$

Como $dy=pdx \Rightarrow pdx=\frac{x}{2}dp+\frac{p}{2}dx-\frac{16x}{p^2}dx+\frac{16x^2dp}{p^3}$

$(\frac{x}{2}+\frac{16x^2}{p^3})dp-(\frac{p}{2}+\frac{16x}{p^2})dx=0$, factorizando $x(\frac{1}{2}+\frac{16x}{p^3})\frac{dp}{dx}-p(\frac{1}{2}+\frac{16x}{p^3})=0$

$(\frac{1}{2}+\frac{16x}{p^3})(x\frac{dp}{dx}-p)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}+\frac{16x}{p^3}=0 \vee x\frac{dp}{dx}-p=0$

Si $x\frac{dp}{dx}-p=0 \Rightarrow \frac{dp}{p}-\frac{dx}{x}=0$ integrando

$\ln p-\ln x=\ln K \Rightarrow \ln\frac{p}{x}=\ln K \Rightarrow p=Kx$

reemplazando en la ecuación $y = \frac{xp}{2} - \frac{8x^2}{p^2}$

se tiene $y = \frac{Kx^2}{2} - \frac{8x^2}{K^2x^2} \Rightarrow y = \frac{Kx^2}{2} - \frac{8}{K^2}$

$\therefore \quad 2K^2y = K^3x^2 - 16$ es la solución general

Si $\frac{1}{2} + \frac{16x}{p^3} = 0 \Rightarrow \frac{16x}{p^3} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{p^3}{16x} = -2$

$p^3 = -32x \Rightarrow p = -2\sqrt[3]{4}x^{\frac{1}{3}}$ reemplazando en la ecuación

$y = \frac{xp}{2} - \frac{8x^2}{p^2}$ se tiene $y = \frac{x(-2\sqrt[3]{4}x^{\frac{1}{3}})}{2} - \frac{8x^2}{4\sqrt[3]{16}x^{\frac{2}{3}}} \Rightarrow y = -\sqrt[3]{4}x^{\frac{4}{3}} - \frac{2x^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{2}}$

$y = -(\frac{3x^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{2}}) \Rightarrow 2y^3 = -27x^4 \qquad \therefore \quad 2y^3 + 27x^4 = 0$ solución singular

b. EJERCICIOS PROPUESTOS.

Encontrar la solución general (S.G) y también la solución singular (S.S.) si ella existe de las siguientes ecuaciones diferenciales.

1. $y = x\frac{dy}{dx} - 2(\frac{dy}{dx})^2$ **Rpta:** S.G.: $y = kx - 2k^2$; S. S.: $8y = x^2$

2. $y^2(\frac{dy}{dx})^2 + 3x\frac{dy}{dx} - y = 0$ **Rpta:** S.G.: $y^3 + 3kx - k^2 = 0$;S.G.: $9x^2 + 4y^3 = 0$

3. $x(\frac{dy}{dx})^2 - 2y\frac{dy}{dx} + 4x = 0$ **Rpta:** S.G.: $k^2x^2 - ky + 1$; S.S.: $y^2 - 4x^2 = 0$

(4) $x(\frac{dy}{dx})^2-2y\frac{dy}{dx}+x+2y=0$ **Rpta:** S.G.: $2x^2+2k(x-y)+k^2=0$

S.S.: $x^2+2xy-y^2=0$

(5) $(1+y'^2)y^2-4yy'-4x=0$ **Rpta:** S.S.: $y^2=4x+4$

(6) $y'^2-4y=0$ **Rpta:** S.S.: y = 0

(7) $y'^3-4xyy'+8y^2=0$ **Rpta:** S.S.: $y=0,\quad y=\frac{4}{27}x^3$

(8) $y'^2-y^2=0$ **Rpta:** No hay S.S.

(9) $(\frac{dy}{dx})^2+x^3\frac{dy}{dx}-2x^2y=0$ **Rpta:** S.G.: $k^2+kx^2=2y$; S.S.: $8y=-x^4$

(10) $2x(\frac{dy}{dx})^3-6y(\frac{dy}{dx})^2+x^4=0$ **Rpta:** S.G.: $2k^3x^3=1-6k^2p$; S.S.: $2y=x^2$

(11) $(\frac{dy}{dx})^2-x\frac{dy}{dx}+y=0$ **Rpta:** S.G.: $y=kx-k^2$; S.S.: $4y=x^2$

(12) $y=x\frac{dy}{dx}+K(\frac{dy}{dx})^2$ **Rpta:** S.G.: $y=kx+k^2c$; S.S.: $x^2=-4ky$

(13) $x^8(\frac{dy}{dx})^2+3x\frac{dy}{dx}+9y=0$ **Rpta:** S.G.: $x^3(y+k^2)+k=0=0$; S.S.: $4x^6y=1$

(14) $x(\frac{dy}{dx})^2-2y\frac{dy}{dx}+4x=0$ **Rpta:** S.G.: $x^2=k(y-k)$; S.S.: y = 2x, y = -2x

(15) $3x^4(\frac{dy}{dx})^2-x\frac{dy}{dx}-y=0$ **Rpta:** S.G.: xy = k (3 kx – 1) S.S.: $12x^2y=-1$

(16) $x(\frac{dy}{dx})^2+(x-y)\frac{dy}{dx}+1-y=0$ **Rpta:** S.G.: $xk^2+(x-y)k+1-y=0$

S.S.: $(x+y)^2=4x$

(17) $x^6(\frac{dy}{dx})^3 - 3x\frac{dy}{dx} - 3y = 0$ **Rpta:** S.G.: $3xy = k(xk^2 - 3)$; S.S.: $9x^3y^2 = 4$

(18) $y = x^6(\frac{dy}{dx})^3 - x(\frac{dy}{dx})$ **Rpta:** S.G.: $kxy = k(k^2x - 1)$; S.S.: $27x^3y^2 = 4$

(19) $x(\frac{dy}{dx})^4 - 2y(\frac{dy}{dx})^3 + 12x^3 = 0$ **Rpta:** S.G.: $2k^3y = k^4x^2 + 12$; S.S.: $3y^2 = \pm 8x^3$

(20) $x(\frac{dy}{dx})^3 - y(\frac{dy}{dx}) + 1 = 0$ **Rpta:** S.G.: $xk^3 - yk^2 + 1 = 0$; S.S.: $4y^3 = 27x^2$

(21) $x(\frac{dx}{dy})^2 + y\frac{dx}{dy} = 3y^4$ **Rpta:** S.G.: $3y = k(1 + kxy)$; S.S.: $12xy^2 = -1$

(22) $x(\frac{dy}{dx})^3 - 2y(\frac{dy}{dx})^2 + 4x^2 = 0$ **Rpta:** S.G.: $x^2 = 4k(y - 8k^2)$; S.S.: $8y^3 = 27x^4$

(23) $4x^5(\frac{dy}{dx})^2 + 12x^4y\frac{dy}{dx} + 9 = 0$ **Rpta:** S.G.: $x^3(2ky - 1) = k^2$; S.S.: $x^3y^2 = 1$

(24) $(\frac{dy}{dx} + 1)^2(y - x\frac{dy}{dx}) = 1$ **Rpta:** S.G.: $(k+1)^2(y - kx) = 1$

S.S.: $4(x+y)^3 = 27x^2$

(25) $4y(\frac{dy}{dx})^2 - 2x\frac{dy}{dx} + y = 0$ **Rpta:** S.G.: $kx = y^2 + k^2$; S.S.: $x = \pm 2y$

CAPÍTULO III

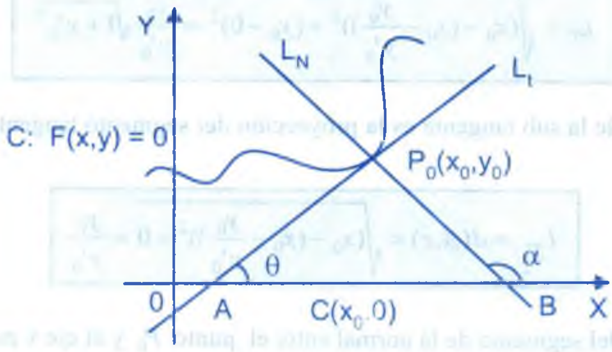
3. APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES.-

3.1. PROBLEMAS GEOMÉTRICOS.-

Consideremos una curva C descrita por la ecuación

$$\boxed{C : F(x, y) = 0}$$

y tomemos un punto $P_0(x_0, y_0)$ de la curva C



La pendiente de la recta tangente es: $mL_t = \frac{dy}{dx}\Big|_{P_0} = y'_0$

y la ecuación de la recta tangente es: $\boxed{L_t : y - y_0 = y'_0(x - x_0)}$ ... (1)

La pendiente de la recta normal es: $mL_N = -\frac{1}{mL_t} = -\frac{1}{y'_0}$

y la ecuación de la recta normal es: $\boxed{L_N : y - y_0 = -\frac{1}{y'_0}(x - x_0)}$ ... (2)

ahora calculamos el punto de intersección de la recta tangente con el eje x.

Sea $A \in L_t \cap$ *eje* $x \Rightarrow y = 0$, de la ecuación de la tangente se tiene:

$$-y_0 = y'_0(x - x_0) \Rightarrow x = x_0 - \frac{y_0}{y'_0} \quad \text{de donde} \quad A(x_0 - \frac{y}{y'_0}, 0)$$

También calcularemos el punto de intersección de la recta normal y el eje x.

Sea $B \in L_N \cap$ *eje* $x \Rightarrow y = 0$, de la ecuación (2) se tiene:

$$-y_0 = -\frac{1}{y'_0}(x - x_0) \Rightarrow x = x_0 + y_0 y'_0 \quad \text{de donde} \quad B(x_0 + y_0 y'_0, 0)$$

La longitud del segmento de la tangente entre el punto P_0 y el eje x es $L_T = d(A, P)$

$$\boxed{L_T = \sqrt{(x_0 - (x_0 - \frac{y_0}{y'_0}))^2 + (y_0 - 0)^2} = \frac{y_0}{y'_0}\sqrt{1 + y'^2_0}}$$

La longitud de la sub tangente es la proyección del segmento tangente AP_0 sobre el eje x es decir:

$$\boxed{L_{S_t} = d(A, c) = \sqrt{(x_0 - (x_0 - \frac{y_0}{y'_0}))^2 + 0} = \frac{y_0}{y'_0}}$$

La longitud del segmento de la normal entre el punto P_0 y el eje x es: $L_N = d(B, P_0)$

$$\boxed{L_N = \sqrt{(x_0 - (x_0 + y_0 y'_0))^2 + (y_0 - 0)^2} = y_0\sqrt{1 + y'^2_0}}$$

La longitud de la sub normal es la proyección del segmento normal $\overline{BP_0}$ sobre el eje x, es decir

$$\boxed{LS_N = d(C, B) = \sqrt{(x_0 + y_0 y'_0 - x_0)^2 + (0 - 0)^2} = y_0 y'_0}$$

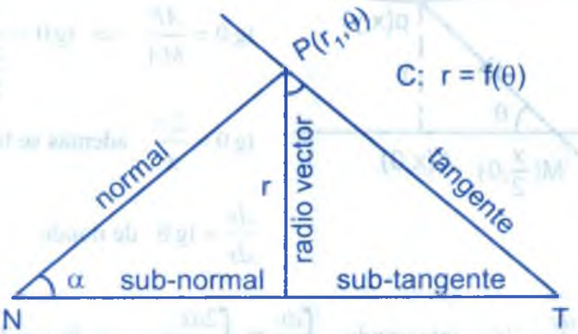
Generalizando estas longitudes en cualquier punto p(x,y) de la curva

C: F (x,y) = 0 se tiene:

$L_T = \frac{y}{y'}\sqrt{1+y'^2}$	=	longitud de la tangente
$LS_T = \frac{y}{y'}$	=	longitud de la sub tangente
$L_N = y\sqrt{1+y'^2}$	=	longitud de la normal
$LS_N = yy'$	=	longitud de la sub normal

para el caso en que la curva está dado en coordenadas polares. Consideremos la curva:

C: $r = f(\theta)$ y $P(r,\theta) \in C$ entonces:



$\operatorname{tg}\alpha = r\frac{d\theta}{dr}$, donde α es el ángulo comprendido entre el radio vector y la parte de la tangente dirigida hacia el origen de la curva.

$r\operatorname{tg}\alpha = r^2\frac{d\theta}{dr}$, es la longitud de la sub tangente polar.

$rc\operatorname{tg}\alpha = \frac{dr}{d\theta}$, es la longitud de la sub normal polar

$r\operatorname{sen}\alpha = r^2\frac{d\theta}{ds}$, es la longitud de la perpendicular desde el polo a la tangente.

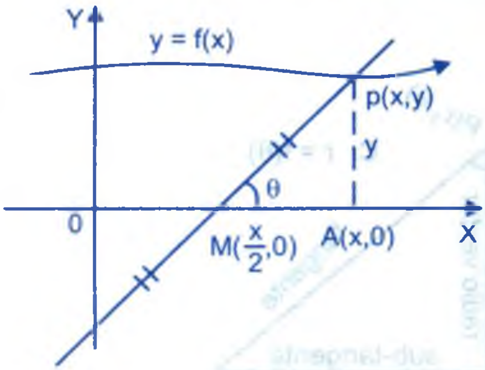
$ds = \sqrt{(dr)^2 + r^2(d\theta)^2} = \sqrt{r^2 + (\frac{dr}{d\theta})^2}\, d\theta$ es un elemento de longitud de arco.

$\frac{r^2 d\theta}{2}$, es un elemento de área.

a. PROBLEMAS RESUELTOS

(1) Hallar la ecuación de las curvas, tales que la parte de cada tangente, comprendida entre el eje Y, y el punto de tangencia, queda dividido en dos partes iguales por el eje de las X.

Solución



En el Δ M A P rectángulo se tiene:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{AP}{MA} \Rightarrow \operatorname{tg}\theta = \frac{y}{\frac{x}{2}}$$

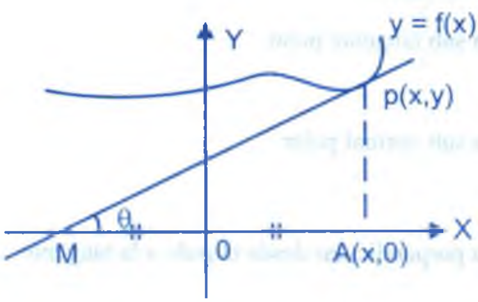
$\operatorname{tg}\theta = \frac{2y}{x}$, además se tiene

$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\theta$ de donde

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = 2dx \quad \text{integrando} \quad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{2dx}{x} + c \Rightarrow \ln y = 2\ln x + c \Rightarrow y = Kx^2$$

(2) Hallar la ecuación de las curvas, tales que la parte de cada tangente, comprendida entre el eje de las x y el punto de tangencia, está dividido en dos partes iguales por el eje de las y.

Solución



En el Δ M A P se tiene:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{AP}{MA} = \frac{y}{2x}$$

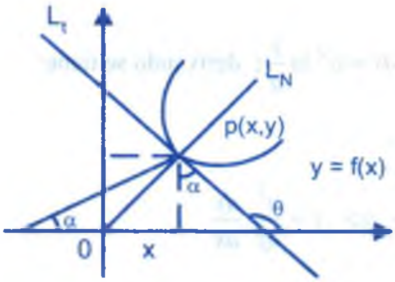
Como $\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{2x}$

Además $\frac{dy}{dx}=\operatorname{tg}\theta \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{y}{2x} \Rightarrow \frac{dy}{y}=\frac{dx}{2x}$, integrando se tiene:

$$\ln y=\frac{\ln x}{2}+c \Rightarrow y^2=Kx$$

(3) La tangente en cualquier punto de una curva y la recta que une ese punto con el origen forman un triángulo isósceles con base en el eje de las x. Hallar la ecuación de la curva sabiendo que pasa por el punto (2,2)

Solución



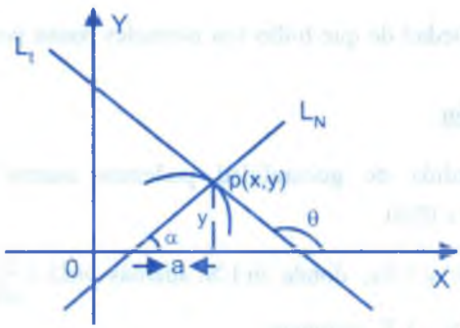
Como $L_N \perp L_t \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha.\operatorname{tg}\theta=-1 \Rightarrow \operatorname{tg}\theta=-c\operatorname{tg}\alpha=-\frac{y}{x}$

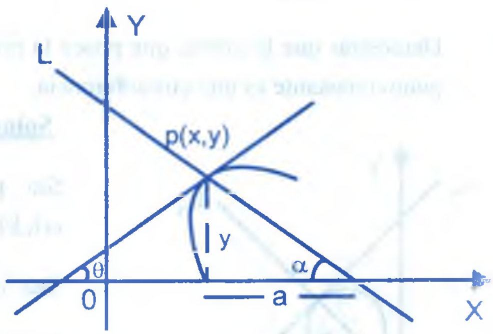
además $\frac{dy}{dx}=\operatorname{tg}\theta=-ct\alpha \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$, de donde

$\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}=0$, integrando $\ln xy=\ln k$, es decir: $C: xy=k$

pero $(2,2)\in C \to k=4, \quad \therefore \quad xy=4$

(4) Hallar la ecuación de una curva tal que, si en un punto cualquiera de ella, se trazan la normal y la ordenada, el segmento que ambos interceptan sobre el eje de las x es una constante a.





Se conoce que $\frac{dy}{dx}=\operatorname{tg}\theta=\pm c\operatorname{tg}\alpha$ para $c\operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{y}$

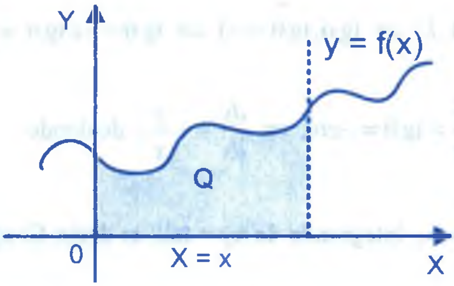
Luego $\frac{dy}{dx} = \pm c\,\text{tg}\,\alpha \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \pm\frac{a}{y}$, de donde

y dy = ± a dx integrando se tiene: $y^2 \pm 2ax = c$

(5) Hallar una curva para la cual el área a Q, limitada por la curva, el eje OX y las dos ordenadas.

x = 0, x = x, sea una función dada de y: $Q = a^2 \ln\frac{y}{a}$

Solución



$Q = \int_0^x y\,dx = a^2 \ln\frac{y}{a}$; derivando se tiene:

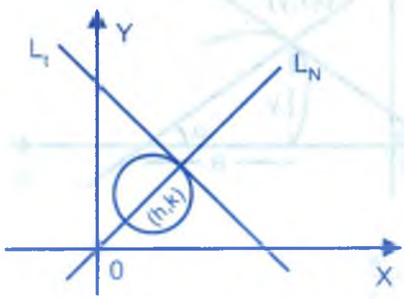
$$y = a^2 \frac{\frac{dy}{dx}}{\frac{a}{\frac{y}{a}}} \Rightarrow y = \frac{a^3}{ay}.\frac{dy}{dx}$$

entonces: $dx - \frac{a^2}{y^2}dy = 0$, integrando se tiene: $x + \frac{a^2}{y} = c \Rightarrow \frac{a^2}{y} = c - x$

de donde $y = \frac{a^2}{c - x}$ (hipérbolas)

(6) Demostrar que la curva, que posee la propiedad de que todas sus normales pasan por un punto constante es una circunferencia.

Solución



Sin pérdida de generalidad podemos asumir que c(h,k) = c (0,0).

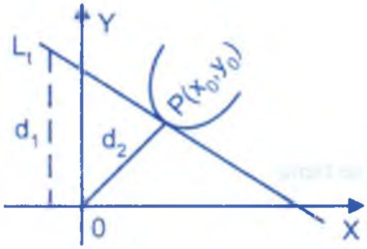
Sea LN: y = bx, donde m LN, además $mLt = \frac{dy}{dx}$ y como LN ⊥ LT, entonces:

$mL_N = -\frac{1}{mL_t} = -\frac{dx}{dy}$ es decir que $b = -\frac{dx}{dy}$, como y = bx $\Rightarrow$ $b=\dfrac{y}{x}$ de donde $\dfrac{y}{x}=-\dfrac{dx}{dy}$ $\Rightarrow$ y dx + x dx = 0 integrando

$x^2+y^2=R$

(7) Hallar la curva para la cual, la razón del segmento interceptado por la tangente en el eje OY, al radio vector es una cantidad constante positiva.

Solución



Por dato se tiene: $\dfrac{d_1}{d_2}=c$ La ecuación de la recta tangente es: $L_t:\ y-y_0=m(x-x_0)$, de donde

$L_t:\ y=y'(x_0).x-y'(x_0)x_0+y_0$

para x = 0 se tiene $d_1=y_0-y'(x_0)\ \ x_0$ además $d_2=\sqrt{x_0^2+y_0^2}$, luego :

$$\frac{y_0-y'(x_0)x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}=c\text{ , generalizando se tiene: }\frac{y-y'x}{\sqrt{x^2+y^2}}=c$$

$$y-xy'=c\sqrt{x^2+y^2}\quad\Rightarrow\quad(c\sqrt{x^2+y^2}-y)dx+xdy=0$$

Sea y = ux $\Rightarrow$ dy = udx + xdu

$(c\sqrt{x^2+u^2x^2}-ux)dx+x(udx+xdu)=0$, para x $\neq$ 0

$(c\sqrt{1+u^2}-u)dx+udx+xdu=0\quad\Rightarrow\quad c\sqrt{1+u^2}\,dx+xdu=0$, separando las variables.

$c\dfrac{dx}{x}+\dfrac{du}{\sqrt{1+u^2}}=0$ integrando $c\ln(x)+\ln(u+\sqrt{1+u^2})=\ln k$

$\ln x^c(u+\sqrt{1+u^2})=\ln k\quad\Rightarrow\quad x^c(u+\sqrt{1+u^2})=k$, de donde : $x^c(\dfrac{y}{x}+\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{x})=k$

$y+\sqrt{x^2+y^2}=kx^{1-c}\quad\Rightarrow\quad\sqrt{x^2+y^2}=kx^{1-c}-y$, elevando al cuadrado

$$x^2+y^2=k^2x^{2(1-c)}-2kyx^{1-c}+y^2\text{ , de donde }\ y=\frac{1}{2}kx^{1-c}-\frac{1}{k}x^{1+c}$$

(8) Hallar la línea para la cual la subnormal en cualquier punto sea a la suma de la abscisa y la ordenada como la ordenada de este punto es a la abscisa.

Solución

Sea P (x,y) un punto cualquiera de la línea.

La subnormal en el punto P(x,y) es $y\dfrac{dy}{dx}$

Luego de acuerdo a las condiciones del problema se tiene:

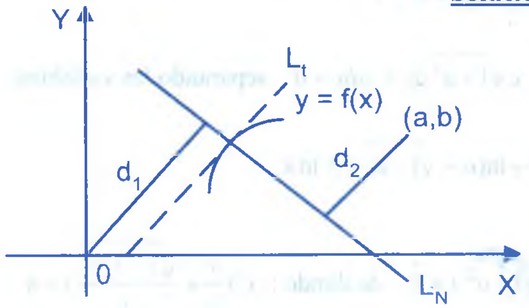
$$x\frac{dy}{dx}=x+y\ \Rightarrow\ (x+y)dx-x\,dy=0$$

xdy – ydx = xdx de donde $\dfrac{xdy-ydx}{x^2}=\dfrac{dx}{x}$

$$d\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{dx}{x}\ \text{ integrando }\ \frac{y}{x}=\ln(xc)\ \Rightarrow\ y=x\ln(xc)$$

(9) Hallar la línea para la cual la distancia que media entre la normal en cualquier punto suyo el origen de coordenadas y la que media entre la misma normal y el punto (a,b) están en razón constante e igual a k.

Solución



Sea $L_t:\ y=mx+A\ \Rightarrow\ mL_N:y=-\dfrac{x}{m}+c$

$$d_1=\frac{|\pm c|}{\sqrt{1+\frac{1}{m^2}}}\ \text{ y }\ d_2=\frac{|b+\frac{a}{m}-c|}{\sqrt{1+\frac{1}{m^2}}}$$

condición del problema: $\dfrac{d_1}{d_2}=k$ de donde $d_1=kd_2$ considerando c positivo se tiene: $\dfrac{c}{\sqrt{1+\dfrac{1}{m^2}}} = k\dfrac{(b+\dfrac{a}{m}-c)}{\sqrt{1+\dfrac{1}{m^2}}} \Rightarrow c = k(b+\dfrac{a}{m}-c)$ como $y = -\dfrac{x}{m}+c \Rightarrow c = y+\dfrac{x}{m}$

Luego: $y+\dfrac{x}{m} = k(b+\dfrac{a}{m}-y-\dfrac{x}{m})$

my + x = k (bm + a – my – x) $\Rightarrow$ [ak – (k + 1) x] + [kb – (k + 1) y] m = 0

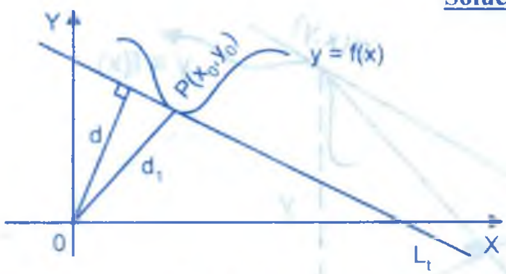
$[ak-(k+1)x]+[kb-(k+1)y]\dfrac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow$ [ak – (k + 1) x] dx + [kb – (k + 1) y] dy = 0

integrando: $akx - \dfrac{k+1}{2}x^2 + kby - \dfrac{k+1}{2}y^2 = c_1$

$$x^2+y^2-\frac{2k}{k+1}(ax+by) = c$$

(10) Hallar la curva que posee la propiedad de que la magnitud de la perpendicular bajada del origen de coordenadas a la tangente sea igual a la abscisa del punto de contacto.

Solución



Por dato del problema se tiene: $d = x_0$

además m $L_t|_p = y'(x_0)$, y la ecuación de la recta tangente es: $L_t: y - y_0 = mL_t(x - x_0)$

Es decir: $t: xy'(x_0) - y + y_0 - yx_0 . y'(x_0) = 0$

$d(0, L_t) = \dfrac{|y_0 - x_0 y'(x_0)|}{\sqrt{[y'(x_0)]^2+1}}$, por condición del problema se tiene: $d(0, L_t) = x_0$

$\dfrac{|y_0 - x_0 y'(x_0)|}{\sqrt{1+[y'(x_0)]^2}} = x_0$ generalizando en cualquier punto

$\dfrac{|y - xy'|}{\sqrt{1+(y')^2}} = x \Rightarrow |y - xy'| = \sqrt{1+(y')^2}\,x$

$y^2 - 2xyy' + x^2y'^2 = x^2 + x^2y'^2$ de donde $y^2 - x^2 - 2xyy' = 0 \Rightarrow (y^2 - x^2)dx - 2xydy = 0$

Sea $y = ux \Rightarrow dy = udx + xdu$

$(u^2x^2 - x^2)dx - 2x^2u(udx - xdu) = 0$ para $x \neq 0$

$(u^2 - 1)dx - 2u^2dx - 2uxdu = 0 \Rightarrow -(u^2 + 1)dx - 2uxdx = 0$, separando las variables.

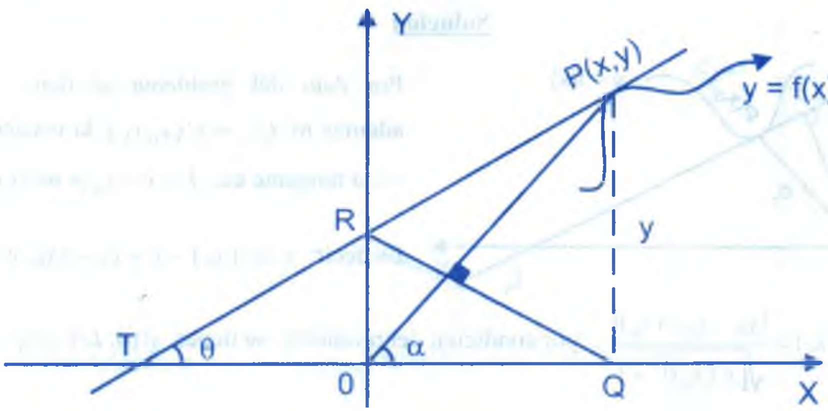
$\frac{dx}{x} + \frac{2udu}{u^2 + 1} = 0$ integrando $\ln x + \ln(u^2 + 1) = \ln k$

de donde se tiene: $\ln x(u^2 + 1) = \ln k \Rightarrow x(u^2 + 1) = k$

reemplazando u se tiene: $x(\frac{y^2}{x^2} + 1) = k \Rightarrow x^2 + y^2 = kx$

(11) Dada la figura adjunta, determinar todas las curvas para las cuales $\overline{PR}$ es tangente y al mismo tiempo es $\overline{QR}$ ortogonal al radio vector $\overline{OP}$

Solución



$$tg\,\theta = \frac{\overline{OR}}{\overline{TO}} = -\frac{\overline{OR}}{\overline{OT}} \Rightarrow Y' = -\frac{\overline{OR}}{\overline{OT}} \Rightarrow \overline{OT} = -\frac{\overline{OR}}{Y'} \quad \ldots (1)$$

$$tg\,\alpha = \frac{y}{x} \Rightarrow RQ:\ y = -\frac{1}{tg\,\alpha}(x - x) = -\frac{x}{y}(x - x) \Rightarrow y = -\frac{y}{x}(x - x)$$

$$RQ \wedge eje\ y \Rightarrow x=0 \Rightarrow y=\frac{x^2}{y} \Rightarrow \overline{OR}=\frac{x^2}{y} \qquad \text{... (2)}$$

de (1) y (2) se tiene: $\overline{OT}=-\frac{x^2}{yy'}$ ... (3)

$T: y-y_0=y'(x-x_0)$

$$T \wedge eje\ y \Rightarrow x=0 \Rightarrow \overline{OR}=y-xy' \qquad \text{... (4)}$$

de (2) y (4) se tiene: $\frac{x^2}{y}=y-xy' \Rightarrow (x^2-y^2)dx+xydy=0$

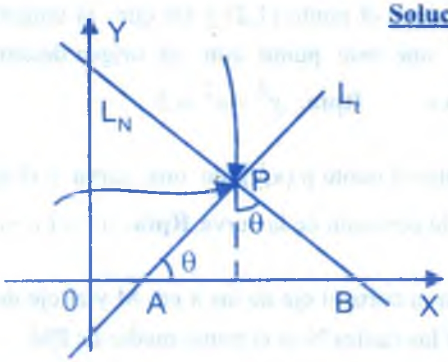
Sea $y=ux \Rightarrow dy=udx+xdu$

$$(x^2-u^2x^2)dx+x^2u(u\,dx+x\,du)=0 \Rightarrow (1-u^2)dx+u^2dx+xudu=0$$

$dx+ux\,du=0 \Rightarrow \frac{dx}{x}+udu=0$, integrando $\ln x+\frac{u^2}{2}=c \Rightarrow \ln x^2+\frac{y^2}{x^2}=k$

12 Calcular la curva para la cual la longitud de la porción de la normal comprendida entre la curva y el eje X es proporcional al cuadrado de la ordenada.

Solución



$\overline{PB}$ = segmento normal con longitud.

$$L=\left|yy'\sqrt{1+y'^{-2}}\right|$$

condición del problema $L=ky^2$ entonces

$$(yy'\sqrt{1+y'^{-2}})^2=k^2y^4 \Rightarrow y^2y'^2+y^2=k^2y^4$$

$$y'^2-1=k^2y^2 \Rightarrow y'=\sqrt{k^2y^2+1}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{k^2y^2+1}}=dx \quad \text{integrando} \quad \frac{1}{k}\ln|ky+\sqrt{k^2y^2+1}|=x+c$$

$$\frac{1}{k}\ln|y+\sqrt{y^2+\frac{1}{k^2}}|=x+c_1 \Rightarrow \ln|y+\sqrt{y^2+\frac{1}{k^2}}|=kx+kc_1 \Rightarrow y+\sqrt{y^2+\frac{1}{k^2}}=Ae^{kx}$$

b. PROBLEMAS PROPUESTOS.

1. La normal en el punto p(x.y) de una curva corta el eje de las x en M y al eje de las y en N. Hallar la ecuación de las curvas para las cuales p es el punto medio de MN.

Rpta. $y^2 - x^2 = k$

2. Determinar una curva tal que si por un punto M de ellas se traza la tangente $\overline{MA}$ a la parábola $y^2 = 2px$, la tangente $\overline{MT}$ a la curva buscada es paralela a OA.

Rpta. $\begin{cases} x=\omega\left(c+\dfrac{2p}{3\omega^3}\right) \\ y=\dfrac{\omega}{2}\left(c+\dfrac{2p}{3\omega^3}\right)+\dfrac{p}{\omega} \end{cases}$ $,\omega=\dfrac{dy}{dx}$

3. El eje de las x, la tangente y la ordenada en cada punto de una curva forman un triángulo de área constante k. Hallar la ecuación de la curva, obteniendo los valores correspondientes de k y de la constante de integración, suponiendo que pasa por los puntos (0,4) y (1,2). **Rpta.** y + xy – 4 = 0

4. Hallar la ecuación de la curva que pasa por el punto (1,2) y tal que la tangente en un punto cualquiera p y la recta que une este punto con el origen determinan el ángulo complementario con el eje de las x. **Rpta.** $y^2 - x^2 = 3$

5. La parte de la normal comprendida entre el punto p (x,y) de una curva y el eje de las x tiene una longitud constante k. Hallar la ecuación de la curva. **Rpta.** $y^2 + (x-c)^2 = k^2$

6. La normal en el punto p (x,y) de una curva corta al eje de las x en M y al eje de las y en N. Hallar la ecuación de las curvas, para las cuales N es el punto medio de PM.

Rpta. $y^2 + 2x^2 = k$

7. Las normales en todo punto de una curva pasan por un punto fijo. Hallar la ecuación de la curva. **Rpta.** $(x-h)^2 + (y-k)^2 = R$

(8) Hallar la ecuación de una curva, tal que el área comprendida entre la curva, el eje de las x, una ordenada fija y una ordenada variable, sea proporcional a la diferencia entre estas ordenadas. **Rpta.** $y = Ae^{\frac{x}{k}}$

(9) El área del sector formado por un arco de una curva y los dos radios que van desde el origen a sus extremos, es proporcional a la diferencia de esos radios. Hallar la ecuación de la curva. **Rpta.** $\ell(\theta + c) + 2k = 0$

(10) El arco de una curva es proporcional a la diferencia de los radios trazados desde el origen a sus extremos. Hallar la ecuación de la curva. **Rpta.** $\ln(\ell) = \dfrac{\theta + c}{\sqrt{k^2 + 1}}$

(11) El área limitada por y = f(s), el eje de las x, y dos ordenadas es igual al producto de las ordenadas. Comprobar que f(x) = 0 es la única solución.

(12) El área limitada por el eje de las x, una curva y dos ordenadas es igual al valor medio de las ordenadas multiplicado por la distancia entre ellas. Hallar la ecuación de la curva.

Rpta. $y - y_0 = c(x - x_0), y = y_0$

(13) Hallar la línea que pase por el punto (2,3) y cuya propiedad sea la siguiente: el segmento de cualquier tangente suya comprendido entre los ejes de coordenadas se divide en dos partes iguales en el punto de contacto. **Rpta.** xy = 6

(14) Hallar la ecuación de una curva tal que la suma de los intersectos de la tangente en cualquier punto es una constante k. **Rpta.** y = cx + kc

(15) La tangente a una curva en cualquier punto, forma con los ejes de coordenadas un triángulo de área 2k. Hallar la ecuación de tal curva. **Rpta.** $y = cx \pm \dfrac{ck}{\sqrt{1 + c^2}}$

(16) Por cada punto de una curva se trazan paralelos a los ejes para formar un rectángulo con dos lados sobre los ejes. Hallar la ecuación de la curva sabiendo que cada rectángulo de esta clase queda en dos partes cuyas áreas son el doble una de la otra.

Rpta. $y^2 = cx$ ó $x^2 = cy$

(17) Hallar la ecuación de la curva cuya normal en cualquier punto pasa por el origen.

Rpta. $x^2 + y^2 = c^2$

(18) Si el producto de las distancias de los puntos (-a,0) y (a,0) a la tangente de una curva en cualquier punto en una constante k. Hallar la ecuación de dicha curva.

Rpta. $y = cx \pm \sqrt{k + (k + a^2)c^2}$

(19) Hallar una curva que pasa por el punto (0,-2) de modo que el coeficiente angular de la tangente en cualquier de sus puntos sea igual a la ordenada del mismo punto, aumentada tres veces. **Rpta.** $y = -2e^{3x}$

(20) Hallar la línea que pase por el punto (2,0) y cuya propiedad sea la siguiente: el segmento de la tangente entre el punto de contacto y el eje de ordenadas tiene la longitud constante e igual a dos. **Rpta.** $y = \sqrt{4 - x^2} + 2 \ln \left| \frac{2 - \sqrt{4 - x^2}}{x} \right|$

(21) Hallar la curva para la cual la pendiente de la tangente en cualquier punto es n veces mayor que la pendiente de la recta que une este punto con el origen de coordenadas.

Rpta. $y = kx^n$

(22) Hallar todas las líneas para las cuales el segmento de la tangente comprendida entre el punto de contacto y el eje de las abscisas se divide en dos partes iguales en el punto de intersección con el eje de ordenadas. **Rpta.** parábolas $y^2 = cx$

(23) Encontrar las curvas cuyas subnormales son constantes. **Rpta.** $y^2 = 2kx + c$

(24) Hallar todas las líneas para las cuales la subtangencias sea proporcional a la abscisa del punto de contacto. **Rpta.** $y^k = cx$

(25) Empleando coordenadas rectangulares, hallar la forma del espejo si los rayos que parten de un punto dado, al reflejarse, son paralelos a una dirección dada. **Rpta.** $y^2 = 2cx + c^2$

(26) Hallar la curva para la cual la longitud del segmento interceptado en el eje de ordenadas por la normal a cualquiera de sus punto, es igual a la distancia desde este punto al origen de coordenadas. **Rpta.** $y=\frac{1}{2}(cx^2-\frac{1}{c})$

(27) Hallar la curva para la cual el producto de la abscisa de cualquiera de sus puntos por la magnitud del segmento interceptado en el eje O y por la normal, es igual al duplo del cuadrado de la distancia desde este punto al origen de coordenadas. **Rpta.** $x^2+y^2=cx^4$

(28) Hallar la línea que pase por el punto (a,1) y cuya subtangente tenga la longitud constante a. **Rpta.** $y=\frac{e(x-a)}{q}$

(29) Hallar la línea para la cual la longitud de la normal sea la magnitud constante a.

Rpta. $(x-c)^2+y^2=a^2$

(30) Hallar la curva cuya tangente forma con los ejes coordenadas un triángulo de área constante $S=2a^2$. **Rpta.** $xy=\pm a^2$

(31) Hallar la línea para la cual la suma de las longitudes de la tangente y de la subtangente en cualquier punto suyo sea proporcional al producto de las coordenadas del punto de contacto. **Rpta.** $y=\frac{1}{k}\ln|c(k^2x^2-1)|$

(32) Hallar la curva por la cual el segmento de la tangente comprendido entre los ejes coordenadas tiene una longitud constante a. **Rpta.** $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$

(33) Encontrar la curva que pasa por el punto (1,2) cuya normal en cualquier punto (excepto en x = 0) se biseca por el eje x. **Rpta.** $y^2+2x^2=6$

(34) Hallar una curva que pase por el punto (0,1) y que la subtangente sea igual a la suma de las coordenadas del punto de contacto. **Rpta.** $y=e^{\frac{x}{y}}$

(35) En todo punto P en una curva, la proyección de la normal sobre el eje x y la abscisa de P son de longitud igual. Encontrar la curva que pasa por un punto (2,3).

Rpta. $y^2 - x^2 = 5$ ó $x^2 + y^2 = 13$

(36) Hallar la línea para la cual el cuadrado de la longitud de un segmento recortado por cualquier tangente del eje de ordenadas, sea igual al producto de las coordenadas del punto de contacto. **Rpta.** $x = ce^{\pm 2\sqrt{\frac{x}{y}}}$

(37) Hallar la curva, sabiendo que la suma de los segmentos que intercepta la tangente a la misma en los ejes de coordenadas es constante e igual a 2a. **Rpta.** $y = (\sqrt{2a} \pm \sqrt{x})^2$

(38) La suma de las longitudes de la normal, y de la subnormal es igual a la unidad. Hallar la ecuación de la curva, sabiendo que esta por el origen de coordenadas. **Rpta.** $y^2 = 1 - e^{-x}$

(39) Encontrar la curva en el punto (0,2) tal que la proyección de la tangente sobre el eje x siempre tenga la longitud 2. **Rpta.** $y^2 = 4e^{\pm x}$

(40) Hallar la curva, para la cual, ángulo formado por la tangente con el radio vector del punto de contacto es constante. **Rpta.** $r = ce^{a\psi}$

(41) Hallar la línea por la cual la ordenada inicial de cualquier tangente es igual a la subnormal correspondiente. **Rpta.** x = y ln (cy)

(42) Encontrar la familia de curvas que tienen las siguientes propiedades: la perpendicular del origen a la tangente y abscisa de tangencia son de igual longitud. **Rpta.** $x^2 + y^2 = cx$

(43) Encontrar la curva que pasa por el punto (2,1) tal que la intersección del eje X con la tangente es el doble de la ordenada del punto de tangencia. **Rpta.** $y^2 = e^{2-(\frac{x}{y})}$

(44) Hallar la curva, sabiendo, que el área comprendida entre los ejes de coordenadas, esta curva y la ordenada de cualquier punto situado en ella, es igual al cubo de esta ordenada. **Rpta.** $3y^2 - 2x = k$

(45) Hallar la curva, para la cual, el segmento que intercepta la tangente en el eje OX, es igual a la longitud de la propia tangente. **Rpta.** $x^2 + (y-b)^2 = b^2$

(46) Hallar la línea para la cual la ordenada inicial de cualquier tangente sea dos unidades de escala menor que la abscisa del punto de contacto. **Rpta.** y = cx – x ln |x| - 2

(47) Hallar la curva, para la cual, el segmento de tangente, comprendido entre los ejes de coordenadas se divide en dos partes iguales por la parábola $y^2 = 2x$. **Rpta.** $y^2 + 16x = 0$

(48) Encontrar las curvas para las cuáles cada normal y sus intersección con x tiene la misma longitud. **Rpta.** $x^2 + y^2 = cx$

(49) Hallar las curvas en el plano XY para las cuales, el segmento de cada tangente, comprendido entre los ejes de coordenadas, es bisecado por el punto de tangencia. **Rpta.** xy = c

(50) Hallar las curvas en el plano XY para las cuáles, la pendiente de las normales en todos sus puntos es igual a la razón de la abscisa a la ordenada. **Rpta.** xy = c

(51) Hallar la línea para la cual la longitud de su normal sea proporcional el cuadrado de la ordenada. El coeficiente de proporcionalidad es igual a k. **Rpta.** $y = \frac{1}{2k}[e^{kx+c} + e^{-(kx+c)}]$

(52) Hallar la curva, para la cual, la normal a cualquiera de sus puntos es igual a la distancia desde este punto hasta el origen de coordenadas. **Rpta.** $y^2 - x^2 = c$ ó $x^2 + y^2 = c$

(53) Hallar la línea para la cual el área comprendida entre el eje de abscisa, la misma línea y dos ordenadas una de las cuáles es constante y la otra variable, sea igual a la relación del cubo de la ordenada variable a la abscisa variable. **Rpta.** $(2y^2 - x^2)^3 = cx^2$

(54) Hallar la ecuación de las curvas que corta al eje de abscisas en x = 1 y que tiene la siguiente propiedad: la longitud de la subnormal en cada punto de la curva es igual al promedio aritmético de las coordenadas en este punto. **Rpta.** $(x+2y)(x-y)^2 = 1$

(55) Una curva que se halla en el primer cuadrante pasa por el punto A(0,1), si la longitud del arco comprendido entre A(0,1) y un punto de la curva p(x,y) es numéricamente igual al área limitada por la curva, el eje X, el eje Y y la coordenada del punto p(x,y). Encontrar la ecuación de la curva. **Rpta.** $y=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$

(56) La normal en cada punto de una curva y la recta que un dicho punto con el origen de coordenadas forma un triángulo isósceles cuya base está en el eje de abscisas. Hallar la ecuación de la curva. **Rpta.** $x^2-y^2=c$

(57) Hallar la ecuación de la familia de curvas en el plano XY de tal manera que el triángulo formado por la recta tangente a la curva, al eje de las abscisa y la recta vertical que pasa por el punto de tangencia siempre tiene una área igual a la suma de los cuadrados de las coordenadas del punto de tangencia. **Rpta.** $\ln cy=\dfrac{2}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}(\dfrac{x+4y}{\sqrt{15}x})$

(58) Hallar la curva para lo cual el segmento de tangente comprendida entre los ejes coordenados se divide en partes iguales por la parábola $y^2=2x$. **Rpta.** $y^2+16x=0$

(59) Hallar la línea para la cual el área del rectángulo construido sobre la abscisa de cualquier punto y sobre la ordenada inicial de la tangente en ese punto es una magnitud constante e igual a (a^2). **Rpta.** $y=\pm\dfrac{a^2}{2x}+xc$

(60) Encontrar la ecuación de una curva tal que si se traza una normal en un punto M cualquiera de ella encuentra al eje x en el punto P, y la línea que une los puntos medios de $\overline{MP}$ describe una parábola de ecuación $y^2=36x$.

(61) Hallar la ecuación de la curva que pasa por el punto (1,0) y goza de la siguiente propiedad: "si por un punto cualquiera P de ella se traza la tangente geométrica y la normal respectiva, la tangente corta el eje Y en T y la normal corta al eje x en N resulta TN perpendicular a, OP, siendo O el origen de coordenadas. **Rpta.** $x^2+y^2=x$

(62) Hallar la ecuación de la curva que pasa por el punto (2,1) y para la cual el área del triángulo que forma el eje X de abscisas, la tangente a la curva en cualquiera de los puntos y el radio vector de dicho punto, sea constante e igual a 4 unidades cuadradas.

Rpta. $x = \frac{4}{y} - 2y$

(63) Determinar la ecuación de una curva que pasa por (1,1) y tenga la siguiente propiedad: por un punto P de ella se traza la recta tangente y la recta normal de modo que la primera corta al eje de las y en el punto A y la segunda al eje de las X en el punto B, cumpliéndose la siguiente condición $\overline{OA} = \overline{OB}$, donde O es el origen de coordenadas.

Rpta. $\ln(x^2 + y^2) + 2\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = c$

(64) Supongamos que un halcón H, se encuentra en el punto (1,0) y divisa una paloma Q en el origen volando en dirección del eje Y, con una velocidad V, el halcón vuela inmediatamente en dirección de la paloma con una velocidad w = 2V ¿Cuál es la trayectoria que debe seguir el halcón y en que punto alcanzaría a la paloma?

Rpta. $y = (\frac{x}{3}).(\frac{x}{a})^{\frac{1}{2}} - (ax)^{\frac{1}{2}} + \frac{2a}{3}$ ecuación trayectoria $(0, \frac{2a}{3})$ es el punto pedido.

(65) Determinar la ecuación de la familia de curvas que gozan de la siguiente propiedad: El área del trapecio por lo ejes coordenados, la tangente en un punto cualquiera de la curva y la ordenada del punto de tangencia sea siempre igual a, b unidades cuadradas. **Rpta.** $3(cx^3 - xy) = 2b$

(66) El triángulo formado por la tangente a la curva, el eje de las abscisas y la recta vertical que pasa por el punto de tangencia siempre tiene un área igual a la suma de los cuadrados de las coordenadas del punto de tangencia.

(67) El área del triángulo formado por la tangente a la curva, el eje de abscisas y la normal a la curva es igual a la mitad del valor de la abscisas de intersección de la recta tangente.

(68) La normal en cada punto de una curva y la recta que une dicho punto con el origen de coordenadas forma un triángulo isósceles cuya base está en el eje de abscisas. Hallar la ecuación de la curva.

(69) Hallar la ecuación de la curva que pasa por el punto (3,5), que tiene la siguiente propiedad: "La normal en cualquiera de sus puntos y la recta que une el punto considerado con el origen de coordenadas forman un triángulo isósceles con base en el eje de abscisas". **Rpta:** $y^2 - x^2 = 16$

(70) Sea una curva C en que la tangente y la normal de la curva C en un punto P(x,y) corten al eje X en A y A_1 y al eje Y en B y B_1 respectivamente. Además considere el punto E (x,0) y θ el ángulo que forma AP con el eje X. Considere a los segmentos como distancias dirigidas. Determine la ecuación de la curva si el área del triángulo PEA_1 es igual a una constante k. **Rpta:** $y^3 = 6kx + c$

(71) Hallar la curva cuya propiedad consiste en que el producto del cuadrado de la distancia entre cualquiera de sus puntos y el origen de coordenadas por el segmento separado en el eje de las abscisa de ese punto. **Rpta:** $y^4 + 2x^2y^2 = c$

(72) Encontrar la ecuación de la curva que pasa por el punto (2, 4) y es tal que: "La abscisa del centro de gravedad de la figura plana limitada por los ejes coordenados, la curva y por la ordenada de cualquiera de sus puntos, sea igual a $\frac{3}{4}$ de la abscisa de este punto".

Rpta: $y = x^2$

(73) Encontrar la ecuación de una curva tal que si se traza una normal en un punto M cualquiera de ella encuentra al eje X en el punto P, y la línea que une los puntos medios de $\overline{MP}$ describe una parábola de ecuación $y^2 = ax$ **Rpta:** $y^2 = ax + a^2 + c_1 e^{\frac{x}{a}}$

(74) Encontrar la ecuación de la curva que pasa por el punto (1, 3) para la cual: "La ordenada PN de cualquier punto P(x,y) corta a la recta 2x + y – 10 = 0 en un punto Q y si sobre PN tomemos un punto M tal que PM = NQ entonces la recta OM resulta paralela a la recta tangente a la curva en P". **Rpta:** y = 2x ln x + 10 – 7x

(75) Hallar la ecuación de la curva que pasa por el punto (4, 8) y es tal que: "La tangente de la curva en un punto P(x, y) cualquiera de ella corta al eje X en un punto M equidistante del punto P y del punto A(0,4)". **Rpta:** $\frac{x^2}{y} + \frac{16}{y} + y = c$

(76) Se dá un punto sobre el eje Y, M (0,b); se pide calcular la ecuación de una curva que goza de la siguiente propiedad: "Si un punto P(x,y) cualquiera de la curva, se traza una tangente a la curva, esta corta al eje X en el punto R, que equidista de M y P, además la curva pasa por el punto (7,5). **Rpta:** $x^2+y^2+b^2=y(\frac{74+b^2}{5})$

(77) Hallar la ecuación de las curvas para las que el radio de curvatura proyectado sobre el eje X, es el doble de la abscisas. Haga el correspondiente gráfico.

Rpta: $y=\frac{1}{c_1^2}\sqrt{x(c_1-x)}+\frac{1}{c_1}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{c_1-x}}+c_2$

(78) Si $X(t)=\int_0^t (t-s)e^{-(t-s)}e^s ds$. Calcular el valor de: $X''(t)+2X'(t)+X(t)$

(79) Determinar la curva tal que:

a) Cuya subnormal es la media aritmética de la abscisa y la ordenada del punto de ésta curva. **Rpta:** $(y-x)^2(x+2y)=c$

b) Cuya subtangente es la media aritmética de la abscisa y la ordenada del punto de ésta curva. **Rpta:** $(y-x)^2=ky$

(80) Hallar la curva para la cual el segmento de tangente comprendida entre los ejes coordenadas se divide en partes iguales por la parábola $y^2=2x$. **Rpta:** $y^2+16x=0$

(81)

a) Graficar y hallar la ecuación diferencial de las curvas tales que la tangente en un punto cualesquiera M forme un ángulo θ con el eje OX y que se verifique $\theta-\phi=\frac{\pi}{4}$, siendo ϕ el ángulo que Om forme con OX.

b) Resolver la ecuación diferencial hallada en (a).

c) Hallar, partiendo de la ecuación diferencial, la relación entre el radio de curvatura en M y OM.

(82) Sea Q el punto de corte de la tangente a una curva en P(x,y) y el eje Y. Si la circunferencia cuyo diámetro es $\overline{QP}$ pasa por un punto fijo F(a,0). Hallar la ecuación y resolver. Graficar.

(83) La normal en un punto P de una curva encuentra al eje X en Q. Encontrar la ecuación de la curva si pasa por el punto (0,b) y si el lugar geométrico del punto medio de $\overline{PQ}$ es $y^2 = kx$.

(84) Sea A el punto de corte de la tangente a una curva en P(x,y) y el eje Y, si la circunferencia cuyo diámetro es $\overline{AP}$, pasa por un punto fijo (a,0). Hallar la ecuación de la curva.

3.2. TRAYECTORIAS ORTOGONALES.-

Consideremos una familia de curvas planas.

$$\boxed{f(x,y,c)=0} \quad \text{... (1)}$$

donde cada valor del parámetro c representa una curva.

Los problemas que se presentan en los campos tales como Electrostática, Hidrodinámica y termodinámica es de encontrar una familia de curvas que dependen de un parámetro k.

$$\boxed{g(x,y,k)=0} \quad \text{... (2)}$$

Con la propiedad que cualquier curva de (1) al interceptar a cada curva de la familia (2) las rectas tangentes a las curvas sean perpendiculares.

a las familias de las curvas (1) y (2) se denominan trayectorias ortogonales.

Observación. Como ejemplo veremos los casos siguientes:

1. En el campo Electrostático, a una familia de curvas se denomina curvas Equipotenciales y la otra familia de curvas denominan líneas de fuerza.

2. En el campo Hidrodinámico, a una familia de curvas se denomina curvas de potencial de velocidad y otra familia se denomina líneas de corriente o líneas de flujo.

3. En el campo Termodinámico a una familia de curvas se denomina líneas isotermas y a la otra familia de curvas denomina líneas de flujo de calor. Si se tiene la familia de curvas (1), para encontrar la familia de curvas (2), primero se encuentra la ecuación diferencial de la familia dada en (1) y despejamos y´obteniendo.

$$y' = F(x, y) \qquad \textbf{... (3)}$$

Como la pendiente de las trayectorias ortogonales debe ser la inversa negativa de la pendiente (3) es decir: $\boxed{y' = -\dfrac{1}{F(x,y)}}$ **... (4)**

Luego las trayectorias ortogonales de la familia dada se obtiene resolviendo la ecuación diferencial (4).

a. Ejemplos

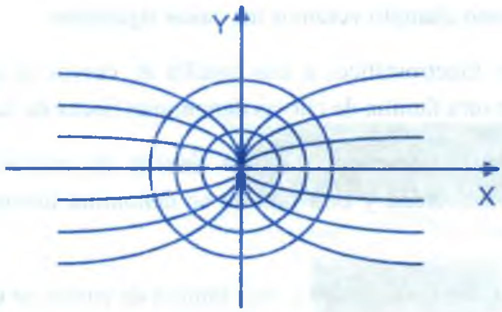
1. Encontrar las trayectorias ortogonales de todas las parábolas con vértice en el origen y foco sobre el eje X.

Solución

La ecuación de la familia de parábola es de la forma: $y^2 = 4px$, p ≠ 0

$\dfrac{y^2}{x} = 4p$ diferenciando se tiene: $\dfrac{2xydy - y^2dx}{x^2} = 0 \Rightarrow$ 2x dy – y dx = 0

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{2x}$ y la ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales son: $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2x}{y}$ de donde 2x dx + y dy = 0 resolviendo esta ecuación diferencial se obtiene $x^2 + \dfrac{y^2}{2} = c$, c ≠ 0 luego las trayectorias ortogonales a la familia de parábolas son las elipses de centro en el origen.

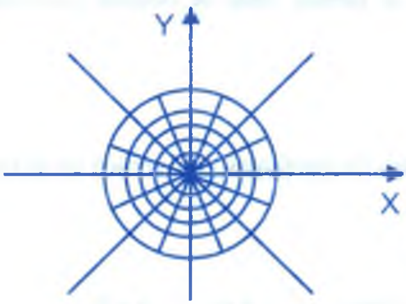


(2) Encontrar las trayectorias ortogonales de la familia de circunferencias de centro en el origen de coordenadas.

Solución

La ecuación de la familia de circunferencias de centro en el origen es de la forma: $x^2 + y^2 = c$, su ecuación diferencial se obtiene diferenciando.

se tiene x dx + y dy = 0 $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$



y la ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales es $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ resolviendo esta ecuación se obtiene: $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln y = \ln kx \Rightarrow y = kx$,

Luego las trayectorias ortogonales a la familia de circunferencias son la familia de rectas y = kx.

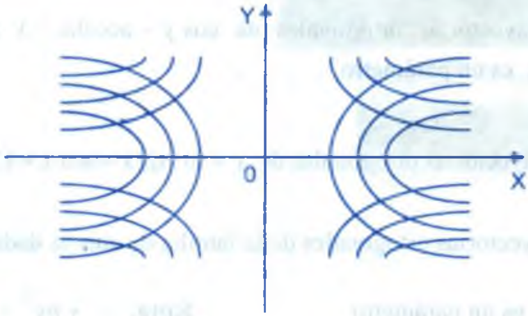
(3) Encontrar las trayectorias ortogonales de todas las hipérbolas equiláteras de centro en el origen de coordenadas.

Solución

La ecuación que corresponde a una familia de hipérbolas es: $x^2 - y^2 = c$, $c \neq 0$, su ecuación diferencial se obtiene diferenciando a la ecuación. xdx - ydy = 0 de donde $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$, y la ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales es:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y} \Rightarrow \frac{dy}{y}+\frac{dx}{x}=\ln k\,,$$

de donde $\ln yx = \ln k \Rightarrow xy = k$ ecuación de la familia de las trayectorias ortogonales.



(4) Encontrar las trayectorias ortogonales de las circunferencias que pasan por el origen con centro en el eje X.

Solución

La ecuación que corresponde a esta familia de circunferencias es: $x^2+y^2=cx$, su ecuación diferencial se obtiene diferenciando a la ecuación

$2xy\frac{dy}{dx}=y^2-x^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{y^2-x^2}{2xy}$ y la ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales es: $\frac{dy}{dx}=\frac{2xy}{y^2-x^2}$ resolviendo esta ecuación

$2xydx-x^2dy=-y^2dy \Rightarrow \frac{2xydx-x^2dy}{y^2}=-dy \Rightarrow d(\frac{x^2}{y})=-dy$ integrando se tiene

$\frac{x^2}{y}=-y+k \Rightarrow x^2+y^2=ky$ ecuación que corresponde a las trayectorias ortogonales que son circunferencias con centro en el eje Y.

b. EJERCICIOS PROPUESTOS.

(1) Encuéntrese la trayectoria ortogonal que pase por (1,2) de la familia $x^2+3y^2=cy$

Rpta: $y^2=x^2(3x+1)$

(2) Encontrar las trayectorias ortogonales de $ax^2 + y^2 = kx$ donde a es un parámetro fija y k es una constante. **Rpta:** $y = c[(a-2)x^2 - y^2]$, $a \neq 2$; $ye^{\frac{x^2}{y^2}} = c$ para $a = 2$

(3) Encontrar las trayectorias ortogonales de cos y – acoshx = k senhx, donde a es una constante fija y k es un parámetro.

(4) Probar que las trayectorias ortogonales de $y = \ln|\operatorname{tg}(x + \operatorname{sen} x + k)|$ es $2\operatorname{senh} x + \operatorname{tg}\frac{x}{2} = c$

(5) Encontrar las trayectorias ortogonales de la familia de curvas dadas.

a) $y = ax^n$, a es un parámetro **Rpta:** $x^2 + ny^2 = k$

b) $x^2 + \frac{y^2}{2} = a^2$ **Rpta:** $y^2 = 2bx$

c) $x^2 - \frac{y^2}{3} = a^2$ **Rpta:** $xy^3 = b$

d) $x^2 - xy + y^2 = c$ **Rpta:** $x - y = k(x + y)^3$

(6) Encontrar las trayectorias ortogonales, que pasan através del punto especificado, de cada una de las siguientes familias de curvas.

a) $y^2 = kx, (-2,3)$ **Rpta:** $2x^2 + y^2 = 17$

b) $y^2 = x^2 + ky, (1,-2)$ **Rpta:** $x^3 + 3xy^2 = 13$

c) $y^2 = 2x + 1 + ke^{2x}, (o,e)$ **Rpta:** $x = y^2[1 - \ln y]$

(7) Encontrar las trayectorias ortogonales de la familia de elipses con centro en (0,0) y dos vértices en (1,0) y (-1,0) **Rpta:** $x^2 + y^2 = 2Ln(kx)$

(8) Encontrar las trayectorias ortogonales de las siguientes familias de curvas.

a) $(x-1)^2+y^2+kx=0$ **Rpta:** $x^2+y^2-1=cy$

b) $x^2=y^2+ky^3$ **Rpta:** $3x^2+y^2=cx$

c) $y^2=cx^3$ **Rpta:** $2x^2+3y^2=k^2$

d) $e^x+e^{-y}=c$ **Rpta:** $e^y-e^{-x}=k$

e) $y=ce^{-x}$ **Rpta:** $y=\sqrt{2x+k}$

f) y = tg x + c **Rpta:** $y=-\frac{x}{2}-\frac{\text{sen }2x}{4}+k$

g) $x^2+3y^2=ky$ **Rpta:** $y^2-x^2=cx^3$

h) y = k(sec x + tg x) **Rpta:** $y^2=2(c-\text{sen }x)$

9. Hallar las trayectorias ortogonales de la familia de circunferencias que pasan por los puntos P(0.-3) y Q (0,0). Hacer la gráfica para ambas familias.

Rpta: $\frac{x^2}{2y+3}+y-3\ln|2y+3|=c$

10. Encontrar las trayectorias ortogonales de la familia de curvas $y=x\,\text{tg}\frac{1}{2}(y+k)$

Rpta: $x^2+y^2=ce^x$

11. Hallar las trayectorias ortogonales de la familia de curvas $P^2=k(P\,\text{sen}\,\theta-1)$

12. Encontrar la ecuación de la familia de trayectorias ortogonales a la familia de curvas $r=4a\cos\theta\,\text{tg}\,\theta$ **Rpta:** $r^2=\frac{b^2}{\cos^2\theta+2\,\text{sen}^2\theta}$

13. La temperatura de una placa delgada está dada por $T(x,y)=e^{-y}\cos x$. Encontrar la ecuación de las líneas de flujo de calor. **Rpta:** y = ln |sen x| + k

14. Hallar las trayectorias ortogonales a la familia de circunferencia que pasan por los puntos (0,0) y (2,0). **Rpta:** $x^2+y^2+k(1-x)=0$

(15) Hallar la ecuación de la familia de trayectoria ortogonales a todas las circunferencias que pasan por el origen de coordenadas y cuyo centro está en la recta y = x.

Rpta: $x^2 + y^2 = (y - x)k$

(16) Hallar las trayectorias ortogonales de la familia de curvas que satisface la siguiente propiedad; la recta tangente a las curvas en cualquier punto P, es la bisectriz del ángulo determinado por la recta vertical que pasa por P y la recta que une P con el origen de coordenadas.

Rpta: $y = \frac{x^2 c}{2} + c$

(17) Hallar el valor de "m" de modo que $x^m + y^m + 25 = kx$ sea las trayectorias ortogonales de las circunferencias $x^2 + y^2 - 2cy = 25$

Rpta: m = 2

(18) Una familia de curvas goza de la siguiente propiedad: si por un punto cualquiera P(x,y), de cualquiera de las curvas que componen la familia, se traza la recta normal, el segmento de normal comprendido entre los ejes coordenados tiene una longitud constante de 4 unidades de longitud; se pide hallar la ecuación de la curva, que pasa por el punto (4,0) y es ortogonal a la familia de curva que se menciona.

(19) Hallar la ecuación de la familia de trayectoria ortogonal a la familia de curvas, que cumple la propiedad "si por un punto cualquiera de las curvas de la familia, se trazan la recta tangente y normal a la curva, el área del triángulo formado por las rectas tangente y normal con el eje Y es igual a $\frac{kx^2}{2}$ donde k es la ordenada del punto, en que la tangente intercepta al eje Y.

(20) Demostrar que la familia de trayectorias de la familia $(x-y)(2x+y)^2 = kx^6$ con una rotación de 90° en el origen está dado por $(x+y)(x-2y)^2 = cy^6$.

(21) Hallar la ecuación de la curva que pasa por el punto P(2,1) y para la cual el área del triángulo que forman el eje X, la tangente a la curva en cualquiera de sus puntos y el radio vector de dicho punto es una constante e igual a ku^2.

(22) Determinar una curva tal que si por un punto M de ella se traza la tangente $\overline{MA}$ a la parábola $y^2 = 2px$, la tangente a la curva buscada es paralela a $\overline{CA}$.

(23) Determinar una curva tal que si por un punto M de ella se traza la tangente $\overline{MA}$ a la parábola $y^2 = 2px$, la tangente $\overline{MT}$ a la curva buscada es paralela a $\overline{OA}$.

(24) Encontrar las trayectorias ortogonales a la familia de curvas definida por $(x-1)^2 + y^2 + kx = 0$

(25) Encontrar las trayectorias ortogonales de la familia $y = x\,\mathrm{tg}\frac{1}{2}(y+k)$

(26) Hallar la curva que pasa por el punto $(1,1)$ y corta a las parábolas semicúbicas $y^2 = kx^3$

(27) Encontrar las trayectorias ortogonales de y = ln tg(x + senx + k)

(28) Hallar la familia de curvas ortogonales a la familia de circunferencia que pasan por el origen y con centro en el eje Y.

(29) Hallar las trayectorias ortogonales de la función de curvas $C: 2ay^2 = x(x^2 + y^2)$ donde a > 0 es una constante.

(30) Hallar las trayectorias ortogonales a la familia de curvas $y = 2ax^2 + 1$

(31) Hallar las trayectorias ortogonales de la familia de curvas $x^2 - ay^2 = 1$

(32) Determinar las trayectorias ortogonales de la familia de curvas $(-a-x)y^2 = x^2(x-3a)$

(33) Hallar las trayectorias ortogonales de la familia de curvas que satisfacen la siguiente propiedad: "La recta tangente a una de la curva en un punto cualquiera P, es la bisectriz del ángulo determinado por la recta vertical que pasa por P y la recta que une P con el origen de coordenadas".

(34) Hallar la ecuación de las trayectorias ortogonales de la familia de curvas que satisfacen la propiedad: "Si por un punto cualquiera P(x,y) de una de las curvas se trazan la recta tangente y la recta normal a ella, entonces el área del triángulo formado por la recta tangente, el eje X, y la recta normal es siempre igual a $-\frac{y}{y'}$".

35) Una familia de curvas goza de la siguiente propiedad: "Si por un punto cualquiera P(x,y), de cualquiera de las curvas que componen la familia, se traza la recta normal, el segmento de normas comprendido entre los ejes coordenados tiene una longitud e igual a 6 unidades". Se pide hallar la ecuación de la curva que pasa por el punto (6,0) y es ortogonal a la familia de curvas que se menciona.

3.3. CAMBIO DE TEMPERATURA.-

La ley de enfriamiento de Newton establece, que la rapidez de cambio de temperatura de un cuerpo en cualquier tiempo t, es proporcional a la diferencia de las temperaturas del cuerpo y del medio circundante en el tiempo t. Consideremos a T la temperatura del cuerpo en el tiempo t y a Tm la temperatura del medio circundante y a T_0 temperatura inicial del cuerpo (t = 0).

Como la variación de la temperatura puede ser que aumente o disminuya.

Luego de acuerdo a la Ley de enfriamiento de Newton se expresa mediante la ecuación diferencial.

$\frac{dT}{dt} = k(T - Tm)$ ó $\frac{dT}{dt} = -K(T - Tm)$ ya sea que aumente o disminuya, donde k es el factor de proporcionalidad.

Si $\frac{dT}{dt} = -k(T - Tm) \Rightarrow \frac{dT}{dt} + KT = kTm$ que es una ecuación diferencial lineal de primer orden y su solución es: $T = e^{-kt}[\int e^{kt}.kTm\,dt + c]$ de donde $T = Tm + Ae^{-kt}$

además se debe cumplir que para t = 0, $T = T_0$. Luego $T = Tm + (T_0 - Tm)e^{-kt}$

3.4. DESCOMPOSICIÓN, CRECIMIENTO Y REACCIONES QUÍMICAS.-

La rapidez de descomposición de una sustancia radiactiva en un tiempo particular t es proporcional a la cantidad presente en ese tiempo.

La rapidez de crecimiento del número de bacterias en una solución es proporcional al número de bacterias presente. Si S representa la masa de una sustancia radiactiva presente en el tiempo t, o el número de bacterias presente en una solución en el tiempo t, entonces la Ley de descomposición y de crecimiento, esta expresado por $\frac{dS}{dt} = -KS$ para la descomposición y $\frac{dS}{dt} = KS$ para el crecimiento, en donde K es un factor de proporcionalidad.

Como $\frac{dS}{dt} = KS$, las variables s y t son separables. Luego: $\frac{dS}{s} = kdt$, integrando

ln (s) = kt + c $\Rightarrow$ $S = Ae^{kt}$ que es la solución general. Si S_0 representa a la cantidad inicial es decir: $S = S_0$, cuando t = 0, $S_0 = A$

Problemas Resueltos

1. Según la Ley de Newton, la velocidad de enfriamiento de un cuerpo en el aire es proporcional a la diferencia en la temperatura T del cuerpo y la temperatura Tm del aire. Si la temperatura del aire es de 20°C y el cuerpo se enfría en 20 minutos desde 100°C a 60°C.¿En cuanto tiempo su temperatura descenderá hasta 30°C?

Solución

Sean T = temperatura del cuerpo ; Tm = Temperatura del aire = 20°C

T_0 = Temperatura inicial

La descripción matemática es: $\frac{dT}{dt} = -k(T - Tm)$

y la solución de acuerdo a lo descrito es: $T = Tm + (T_0 - Tm)e^{-kt}$

para t = 20° , T = T_0 = 60°C Entonces:

$60=20+(100-20)e^{-20k} \Rightarrow 40 = 80e^{-20K} \Rightarrow K = +\frac{\ln 2}{20}$

por lo tanto $T = 20 + 80e^{-(\frac{\ln 2}{20})t} \Rightarrow T = 20 + 80e^{\ln 2^{-\frac{t}{20}}} \Rightarrow T = 20 + 80.2^{-\frac{t}{20}}$

para t = ? $T = 30°C$

$$30 = 20 + 80.2^{-t/20}$$

$\frac{1}{8} = 2^{-\frac{t}{20}}$ $\qquad 2^{-3} = 2^{-\frac{t}{20}}$ $\qquad t = 60'$

(2) Determinar el camino S recorrido por un cuerpo durante el tiempo t. Si su velocidad es proporcional al trayecto, sabiendo que en 10 seg. el cuerpo recorre 100 mts. y en 15 segs. 200 mts.

Solución

Sean S = el camino recorrido ; t = tiempo en segundos ; $V = \frac{ds}{dt}$ = velocidad del cuerpo

La descripción matemática es: $\frac{ds}{dt} = ks$

La solución de la ecuación diferencial es: $S = Ae^{kt}$, para t = 10 seg. S = 100 mts.

reemplazando se tiene: $100 = Ae^{10k} \Rightarrow A = \frac{100}{10K}$ ... (1)

para t = 15 seg. S = 200 mts., reemplazando se tiene: $200 = Ae^{15k} \Rightarrow A = \frac{200}{e^{15k}}$ ... (2)

igualando (1) y (2) se tiene: $K = \frac{\ln(2)}{5}$, reemplazando en (1) o en (2) se tiene: A = 25.

Luego el camino recorrido es: $S = 25.2^{\frac{t}{5}}$

(3) Cierta cantidad de una sustancia indisoluble que contiene en sus poros 2 Kgr. de sal se somete a la acción de 30 litros de agua. Después de 5 minutos se disuelve 1 Kgr. de sal. Dentro de cuanto tiempo se disolverá el 99% de la cantidad inicial de sal?

Solución

Sea S = cantidad de sal por disolverse

La descripción matemática es: $\frac{ds}{dt} = ks$, k factor de proporcionalidad

La solución de la ecuación diferencial es:

$S = Ae^{kt}$, determinaremos A. para t = 0, s = 2 kgr. $\Rightarrow$ A = 2

Luego $S = 2e^{kt}$, determinaremos k, para t = 5 min. s = 1 kgr. $\Rightarrow$ $k = \frac{1}{5}\ln(\frac{1}{2})$

por lo tanto $S = 2e^{\frac{t}{5}\ln(\frac{1}{2})}$ $\Rightarrow$ $S = 2(\frac{1}{2})^{\frac{t}{5}}$

para determinar t, se tiene que buscar el 99% de s es decir: S = 1.98 kgr.

entonces: $1.98 = 2(\frac{1}{2})^{\frac{t}{5}}$ $\Rightarrow$ $0.99 = (\frac{1}{2})^{\frac{t}{5}}$. Luego: $t = \frac{5\ln(0.99)}{\ln(\frac{1}{2})}$ min.

4 Un termómetro que marca 18°F, se lleva a un cuarto cuya temperatura es de 70°F, un minuto después la lectura del termómetro es de 31°F. Determínese las temperaturas medidas como una función del tiempo y en particular encontrar la temperatura que marca el termómetro cinco minutos después que se lleva al cuarto.

Solución

Sean T = temperatura del cuerpo ; Tm = temperatura del cuarto = 70°F

La descripción matemática es: $\frac{dT}{dt} = K(T - Tm)$, K es el factor de proporcionalidad. La solución de la ecuación diferencial es: $T = T_m + (T_0 - T_m)e^{kt}$ para determinar k se tiene:

t = 1 min., T = 31°, Tm = 70°F

Luego $31 = 70 + (18 - 70)e^k \Rightarrow e^k = \frac{39}{52}$ de donde $k = \ln(\frac{39}{52}) = \ln(\frac{3}{4})$

por lo tanto: $T = 70 - 52e^{t\ln(\frac{3}{4})}$

para t = 5 min. T = ? se tiene: $T = 70 - 52(\frac{3}{4})^5 \approx 58°F$, $\therefore$ T $\approx$ 58°F

(5) A la 1 p.m. un termómetro que marca 70°F, es trasladado al exterior donde el aire tiene una temperatura de - 10°F a las 1.02 p.m. la temperatura es de 26°F a las 1.05 p.m. el termómetro se lleva nuevamente adentro donde el aire está 70°F, ¿Cuál es la lectura del termómetro a las 1.09 p.m.?

Solución

Sean T = temperatura del cuerpo ; Tm = temperatura del aire = -10°F

La descripción matemática es: $\frac{dT}{dt} = K(T - Tm)$, k el factor de proporcionalidad

La solución de la ecuación diferencial es: $T = T_m + Ae^{kt}$ para t = 0, $T = T_0$ se tiene:

$T = T_m + (T_0 - T_m)e^{kt}$ esto es a la 1p.m. y a la 1.02 p.m. t = 2, t = 26°F

$26 = -10 + 80e^{2k} \Rightarrow k = \frac{1}{2}\ln(\frac{9}{20})$

Luego $T = -10 + 80e^{\frac{t}{2}\ln(\frac{9}{80})}$ es decir $T = -10 + 80(\frac{9}{20})^{\frac{t}{2}}$

a la 1.05 p.m., t = 5 min. se tiene: $T = -10 + 80(\frac{9}{20})^{\frac{5}{2}} \Rightarrow T = 0.88°F$

(6) Supóngase que una reacción química se desarrolla con la ley de descomposición si la mitad de la sustancia A ha sido convertida al finalizar 10 seg. Encuéntrese en cuánto tiempo se transforma nueve décimos de la sustancia.

Solución

Sea x = cantidad de la sustancia A

La descripción matemática es: $\frac{dx}{dt} = -kx$

La solución de la ecuación diferencial es: $x = Be^{kt}$, determinaremos B.

para t = 0, $x = x_0 \Rightarrow B = x_0 \Rightarrow x = x_0 e^{-kt}$

Determinaremos k, para esto se tiene: t = 10 seg. $x = \frac{x_0}{2}$. Entonces:

$$\frac{x_0}{2} = x_0 e^{-10k} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-10k} \Rightarrow k = \frac{\ln(2)}{10}$$

Es decir, $x = x_0 e^{-\frac{t}{10}\ln(2)}$, ahora para t = ?, $x = \frac{9x_0}{10}$

entonces: $\frac{9x_0}{10} = x_0 e^{-\frac{t}{10\ln(2)}} \Rightarrow \frac{9}{10} = 2^{-\frac{t}{10}}$

$$\ln\frac{9}{10} = -\frac{t}{10}\ln(2) \Rightarrow t = -\frac{10\ln(\frac{9}{10})}{\ln(2)} \approx 33seg.$$ Luego: t = 33 seg.

7. La conversión de una sustancia B sigue la Ley de descomposición. Si sólo una cuarta parte de la sustancia ha sido convertida después de diez segundos. Encuéntrese cuanto tardan en convertir $\frac{9}{10}$ de la sustancia.

Solución

Sea x = cantidad de sustancia B. Según los datos del problema se tiene:

x	x_0	$\frac{3x_0}{4}$	$\frac{x_0}{10}$
t	0	10	t

La descripción matemática es: $\frac{dx}{dt} = -kx$, k factor de proporcionalidad

La solución es: $\int_{\frac{x_0}{10}}^{\frac{3x_0}{4}} \frac{dx}{x} = -x_0 \int_0^{10} dx \Rightarrow k = -\frac{1}{10}\ln(\frac{3}{4})$

$$\int_{x_0}^{10} \frac{dx}{x} = -k\int_0^{10} dt \Rightarrow t = \frac{10\ln(\frac{1}{10})}{\ln(\frac{3}{4})} = 80seg. \qquad \therefore \quad t = 80 \text{ seg.}$$

(8) Una cierta sustancia radiactiva tiene una vida media de 38 horas. Encontrar que tanto tiempo toma el 90% de la radiactividad para disiparse.

Solución

Sea x = cantidad de la sustancia radiactiva. Según los datos del problema se tiene:

x	x_0	$\frac{x_0}{2}$	$\frac{9x_0}{10}$
t	0	38	t

La descripción matemática es: $\frac{dx}{dt} = -kx$, k factor de proporcionalidad

La solución es: $\int_{x_0}^{\frac{x_0}{2}} \frac{dx}{x} = -k\int_0^{38} dt \Rightarrow k = \frac{\ln(2)}{38}$

$$\int_{x_0}^{\frac{9x_0}{10}} \frac{dx}{x} = -\frac{\ln(2)}{38}\int_0^{t} dt \Rightarrow t = -\frac{38\ln(\frac{9}{10})}{\ln(2)} \qquad \therefore \quad t = 126 \text{ años}$$

(9) Una población bacteriana B se sabe que tiene una taza de crecimiento proporcional a B misma, si entre el medio día y las 2 p.m. la población se triplica. A que tiempo, si no se efectúa ningún control, B será 100 veces mayor que el medio día?

Solución

Sea x = cantidad de la población bacteriana B. Según datos del problema se tiene:

x	x_0	$3x_0$	$100x_0$
t	0	2	t

La descripción matemática es: $\frac{dx}{dt} = kx$, k factor de proporcionalidad.

La solución de la ecuación es: $\int_{x_0}^{3x_0} \frac{dx}{x} = k\int_0^2 dt \Rightarrow k = \frac{\ln(3)}{2}$

$\int_{x_0}^{100x_0} \frac{dx}{x} = \frac{\ln 3}{2}\int_0^t dt \Rightarrow t = \frac{2\ln(100)}{\ln(3)} \approx 8.38 hrs.$ $\therefore$ t = 8.38 horas.

(10) Se sabe que un cierto material radiactivo decae a una velocidad proporcional a su cantidad de material presente. Un bloque de ese material tiene originalmente una masa de 100 gr. y cuando se le observa después de 20 años, su masa ha disminuido a 80 grs. Encuentre una expresión para la masa de ese material como función del tiempo. Encuentre también la vida media del material.

Solución

Sea x (t) = cantidad de sustancia radiactiva en cualquier t la descripción matemática es:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -kx(t)$$

Resolviendo la ecuación se tiene: $x(t) = Ae^{-kt}$ determinaremos la constante A, para esto se tiene:

Para t = 0, x (t) = 100 gr. $\Rightarrow$ A = 100, Luego reemplazando se tiene: $x(t) = 100e^{-kt}$

determinaremos la constante k, para esto se tiene:

para t = 20 años, x (20) = 80 entonces: $80 = 100e^{-20k} \Rightarrow k = \frac{1}{20}\ln(\frac{5}{4})$

Luego $x(t) = 100\exp[-\frac{t}{20}\ln(\frac{5}{4})]$

(11) Un isótopo radiactivo del carbono, conocido como carbono 14 obedece a la Ley del decaimiento radiactivo $\frac{dQ(t)}{dt} = KQ$, donde Q(t) denota la cantidad de carbono 14 presente en el tiempo t.

a) Determínese K, si la vida media del carbono 14 es de 5568 años.

b) Si Q_0 representa la cantidad de carbono 14, presente al tiempo t = 0. Encuentre una expresión para Q como función del tiempo.

c) En años recientes se ha hecho posible hacer medidas que conducen a conocer la razón $\frac{Q(t)}{Q_0}$ para algunos restos de maderas y plantas que contienen cantidades residuales de carbono 14. Los resultados de a, y b, pueden usarse entonces para determinar el tiempo pasado desde la muerte de estos restos, esto es, el período durante el cual ha tenido lugar el decaimiento. Encuentre una expresión para t en términos de Q, Q_0 y K. Encuéntrese el intervalo desde que principió el decaimiento, sí el valor actual de $\frac{Q}{Q_0}$ es 0.20.

Solución

El carbono 14, obedece a la Ley de decaimiento radiactivo.

$\frac{dQ(t)}{dt} = KQ(t)$ y la solución de esta ecuación

es: $Q(t) = ce^{kt}$ de donde para t = 0, $Q(0) = Q_0$

$c = Q_0$ Luego $Q(t) = Q_0 e^{kt}$

a) Determinaremos k, para esto se tiene que:

La vida media del carbono es 5,568 años es decir:

para t = 5,568 $Q(t) = \frac{Q_0}{2}$ entonces: $\frac{Q_0}{2} = Q_0 e^{5.568x}$

$$k = \frac{\ln(2)}{5,568} \approx -1.245x10^{-4} \quad \Rightarrow \quad k = -1.245 + 10^{-4}$$

b) Hallaremos Q como función del tiempo.

Q(t)	Q_0
t	0

de la parte (a), se tiene: $Q(t) = Q_0 e^{KT}$ ó $Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t\ln(2)}{5.568}} \Rightarrow Q(t) \approx Q_0^{-(1.245x10^{-4})t}$

c) Hallaremos una expresión para t en términos de: Q, Q_0 y K

de la parte b) se tiene $Q = Q_0 e^{-\frac{t\ln(2)}{5.568}}$

$$\ln(Q) = \ln(Q_0) - \frac{t}{5.568}\ln(2) \Rightarrow \frac{t\ln(2)}{5,568} = \ln\frac{Q_0}{Q} \Rightarrow t = \frac{5,568}{\ln(2)}\ln(\frac{Q_0}{Q})$$

$$t = -\frac{5,568}{\ln(2)}\ln(\frac{Q}{Q_0}) = \frac{5,568}{\ln(2)}\ln(0.20) \text{ de donde } t = \frac{5,568}{\ln(2)}\ln(5) = 12,930 \text{ años}$$

"**Isótopo.-** Cuerpo que tiene igual número atómico y ocupa el mismo lugar que otro en la tabla periódica de los elementos, pero que se distinguen de aquel por la diferente constitución y peso de sus átomos".

12 Un cuerpo cuya temperatura es de 30°C requiere de 2 minutos, para descender su temperatura a 20°C, si es colocado en un medio refrigerante con temperatura constante de 10°C. Cuanto tiempo tardará el mismo cuerpo para bajar su temperatura de 40°C a 35°C, si ahora el medio está a la temperatura constante de 15°C?

Solución

Llamemos: T = Temperatura del cuerpo en el instante t.

T_m = Temperatura del medio exterior (refrigerante)

T_0 = Temperatura inicial del cuerpo (t = 0)

Suponiendo que se cumpla la Ley de Newton, para el intercambio de temperaturas, entonces:

$\frac{dT}{dt} = -K(T - Tm)$ donde K es el factor de proporcionalidad.

La solución para la ecuación diferencial es: $T = T_m + ce^{-kt}$

determinaremos c, para esto se tiene: para t = 0, $T = T_0$, $C = T_0 - T_m$

por lo tanto: $T = T_m + (T_0 + T_m)e^{-kt}$ determinaremos k, para esto se tiene:

t = 2 min. T = 20°C, $T_0 = 30°C$, $T_m = 10°C$ de donde $T = T_m + (T_0 + T_m)e^{-kt}$

$20 = 10 + (30 - 10)e^{-2k}$, que al despejar k se tiene: k ≈ 0.348

por lo tanto: $T = T_m + (T_0 + T_m)e^{-0.348T}$

de donde al despejar t se tiene: t ≈ 0.64 minutos.

13) Una sustancia radiactiva A se descompone dando lugar a una sustancia radiactiva B, la que a su vez se desintegra para dar un producto estable C, según el esquema siguiente:

$$A \rightarrow B \rightarrow C$$

En el instante t = 0, se tiene 10 mgrs. de A, mientras que B y C no se tiene cantidad alguna. La vida media (es decir el tiempo que debe transcurrir para que la cantidad original de sustancia se reduzca a la mitad) de A es de 2 horas, mientras que la de B es 1 hora, ¿Cuál es el valor de B y C después de 2 horas?

Solución

Llamemos m_1, m_2 y m_3 a las cantidades de sustancias radiactivas de A, B y C respectivamente en el instante t.

Entonces la ecuación diferencial que gobierna a: m_1 es: $\frac{dm_1}{dt} = -K_1 m_1$ **... (1)**

cuya solución es conocida: $m_1 = m_0.e^{-k_1 t}$ **... (2)**

siendo $K_1 = \frac{\ln(2)}{t}$ con T = 2 horas es la vida media y $m_{01} = 10$ mgrs. es la cantidad inicial de A. Para la sustancia B, la ecuación es: $\frac{dm_2}{dt} = -K_2 m_2 + K_1 m_1$ **... (3)**

y para la sustancia C es: $\frac{dm_3}{dt} = K_2 m_2$ **... (4)**

estas ecuaciones se resuelven del modo siguiente: de (2) en (3) se tiene:

$$\frac{dm_2}{dt} + K_2 m_2 = K_1 m_{01} e^{-k_1 t}$$

y la solución de esta ecuación es: $m_2 = \frac{k_1 m_{01}}{k_2 - k_1} e^{-K_1 t} + ce^{-k_2 t}$, c constante de integración

usando las condiciones iniciales de que en : t = 0, $m_2 = 0 \Rightarrow c = -\frac{k_1 m_{01}}{k_2 - k_1}$

por lo tanto: $$m_2 = \frac{k_1 m_{01}}{k_2 - k_1}[e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}] \quad \text{... (5)}$$

ahora de (5) en (4) se tiene: $$\frac{dm_3}{dt} = \frac{k_2 k_1}{k_2 - k_1}[e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}]$$

integrando directamente, usando la condición inicial de que en t = 0, $m_3 = 0$ se tiene:

$$m_3 = m_{01}.[1 - \frac{k_2 e^{-k_1 t} - k_1 e^{-k_2 t}}{k_2 - k_1}] \quad \text{... (6)}$$

finalmente podemos reemplazar valores numéricos en:

(5) y (6) con $k_1 = \frac{\ln(2)}{\tau 1} = \frac{\ln(2)}{2}$ y $k_2 = \frac{\ln(2)}{\tau 2} = \ln(2)$ y $m_{01} = 10$ mgrs.

obteniéndose: $m_2 = 2.5$ mgrs.; $m_3 = 2.5$ mgrs. y también de (2), $m_1 = 5$ mgrs.

EJERCICIOS PROPUESTOS.-

1) Supongamos que la razón a que se enfría un cuerpo es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la temperatura del aire que lo rodea un cuerpo originalmente a 120°F se enfría hasta 100°F en 10 minutos en aire a 60°F. Encontrar una expresión para la temperatura del cuerpo en un instante cualquiera t. **Rpta:** $T = 60 + 60(\frac{2}{3})^{\frac{t}{10}} \quad \forall t$

(2) Para una sustancia C, la velocidad de variación con el tiempo es proporcional al cuadrado de la cantidad X de sustancia no convertida. Sea k el valor numérico de la cantidad de sustancia no convertida en el tiempo t = 0. Determinar X, ∀ t ≥ 0

Rpta: $X = \dfrac{x_0}{1 + x_0 kt} \quad \forall t \geq 0$

(3) Un químico desea enfriar desde 80°C hasta 60°C una sustancia contenido en un matraz se coloca el dispositivo en un recipiente amplio por el que circula agua a 15°C. Se observa que después de 2 minutos la temperatura ha descendido a 70°C. Estimar el tiempo total de enfriamiento. **Rpta:** t = 4.45 minutos.

(4) Un termómetro que marca 75°F se lleva fuera donde la temperatura es de 20°F. Cuatro minutos después el termómetro marca 30°F. Encontrar:

a) La lectura del termómetro siete minutos después de que este ha sido llevado al exterior y,

b) El tiempo que le toma el termómetro caer desde 75°F hasta más o menos medio grado con respecto a la temperatura del aire. **Rpta:** T = 23°, t = 11 minutos.

(5) Dentro de cuanto tiempo la temperatura de un cuerpo calentado hasta 100°C descenderá hasta 30°C. Si la temperatura del local es de 20°C y durante los primeros 20 minutos el cuerpo en cuestión se enfría hasta 60°C. **Rpta:** t = 60 minutos.

(6) Si el 45% de una sustancia radiactiva se desintegra en 200 años. ¿Cuál es su vida media? En cuanto tiempo se desintegrará 60% de la cantidad original?. **Rpta:** t = 319.4 años

(7) Se tienen dos recipientes con soluciones a temperaturas constantes, la primera a 30°C y la segunda a 25°C un termómetro que marca la temperatura de la primera solución es puesto en contacto con la segunda, cuatro minutos después marca 27°C más adelante el termómetro es puesto nuevamente en contacto con la primera solución, 10 minutos después del comienzo del experimento el termómetro indica 28°C, ¿Cuándo fue llevado el termómetro del segundo al primer recipiente? **Rpta:** t = 4.73 minutos.

(8) Un cierto material radiactivo tiene una vida media de dos horas. Encuentre el intervalo de tiempo requerido para que una cantidad dada de este material decaiga hasta un décimo de su masa original. **Rpta:** $t = \dfrac{2\ln(10)}{\ln(2)}$ horas

(9) Suponer que una gota de lluvia esférico se evapora a una velocidad proporcional a su área superficial. Si originalmente el radio es de 3 mm., 1 hora después se ha reducido a 2 mm. Encontrar una expresión para el radio de la gota como función del tiempo.

Rpta: r = 3 - t mm, 0 < t < 3

(10) El azúcar se disuelve en el agua con una rapidez proporcional a la cantidad que queda sin diluir. Si 30 lbs. de azúcar se reduce a 10 lbs. en 4 horas. ¿En cuánto tiempo se habrá diluido el 95% del azúcar? **Rpta:** $t = \dfrac{4\ln(20)}{\ln(3)}$

(11) El radiactivo tiene una vida promedio de 5600 años aproximadamente. ¿En cuántos años desciende el 20% de su cantidad original? ¿Al 10%? **Rpta:** $t = \dfrac{-5600\ln(0.20)}{\ln(2)}$

(12) El radio se descompone con una velocidad proporcional a la cantidad de radio presente. Supóngase que se descubre que en 25 años aproximadamente 1.1% de una cierta cantidad de radio se ha descompuesto. Determínese aproximadamente que tanto tiempo tomará el radio para que se descomponga la mitad de la cantidad original. **Rpta:** 1,566.7 años

(13) Dos sustancias A y B se convierten en un sólo compuesto C, en el laboratorio se ha mostrado que para estas sustancias se cumple la siguiente ley de conversión. La velocidad de variación con el tiempo de la cantidad x del compuesto C es proporcional al producto de las cantidades de las sustancias no convertidas A y B, supóngase que las unidades de medida se eligen de tal forma que una unidad del compuesto C está formado de la combinación de una unidad A con una unidad B. Si el tiempo t = 0, hay "a" unidades de sustancia A,"b", unidades de sustancia B y ninguna del compuesto C presente. Muéstrese que la ley de conversión puede expresarse con la ecuación $\dfrac{dx}{dt} = k(a-x)(b-x)$ resolver esta ecuación con la condición inicial dada. **Rpta:** $x = \dfrac{ab[\exp(a-b)kt-1]}{b\exp(a-b)kt-a}$, $a \neq b$

(14) Cierta cantidad de sustancia, que contenía 3 kgrs. de humedad, se colocó en una habitación de $100 m^3$ de volumen donde el aire tenía al principio el 25% de humedad. El aire saturada, a esta temperatura, contiene 0.12 kgr. de humedad por $1m^3$, si durante el primer día la sustancia perdió la mitad de su humedad. ¿Qué cantidad de humedad quedará al finalizar el segundo día? **Rpta:** $0.82kg$. $Sug. \dfrac{ds}{dt} = ks(s+6)$

(15) La salmuera de un primer recipiente pasa a otro, a razón de 2 decalitros/min., y la salmuera del segundo recipiente pasa al primero a razón de 1 decalitro/min. En un principio hay 1 hectolitro de salmuera, conteniendo 20 kgrs. de sal, en el primer recipiente, y 1 hectolitro de agua en el segundo recipiente. Cuanta sal contendrá el primer recipiente al cabo de 5 minutos. Se supone que en todo momento es homogénea la mezcla de sal y agua en cada recipiente. **Rpta:** $6\frac{2}{3}\,kgr.$

(16) Salmuera que contiene 2 kgr. de sal por decalitro entre un primer tanque a razón de 2 decalitros/min. del primer tanque pasa la salmuera a un segundo tanque a razón de 3 decalitros/min., y sale de éste segundo tanque a razón de 3 decalitros/min. En un principio, el primer tanque contiene 1 hectolitro de salmuera con 30 kgrs. de sal, y el segundo tanque contiene 1 hectolitro de agua pura. Suponiendo las soluciones homogéneas en cada tanque. Hallar la cantidad de sal en el segundo tanque al cabo de 5 minutos. **Rpta:** 19.38 kgr.

(17) Se ha descubierto que una bola de naftalina que tenía originalmente un radio de $\frac{1}{4}$ de pulgadas, tiene un radio de $\frac{1}{8}$ de pulgada al cabo de un mes. Suponiendo que se evapore a un índice proporcional a su superficie. Encuéntrese el radio en función del tiempo; después de cuántos meses más desaparecerá por completo.

Rpta: r = (2 – t) 8 después de 1 mes más.

(18) El Presidente y el primer Ministro piden café y reciben tazas a igual temperatura y al mismo tiempo. El Presidente agrega inmediatamente una pequeña cantidad de crema fría; pero no se toma café hasta 10 min. después. El primer Ministro espera 10 min. y, luego añade la misma cantidad de crema fría y comienza a tomarse su café. ¿Quién tomará el café más caliente? **Rpta:** El Presidente.

(19) Supongamos que un elemento radiactivo dado A, se descompone en un segundo elemento B y que, a su vez B se descompone en un tercer elemento, C. Si la cantidad de A presente inicialmente es de X_0, si las cantidades de A y B presentes en un momento posterior son X y Y respectivamente y si K_1, K_2 son las constantes de rapidez de esas dos reacciones.

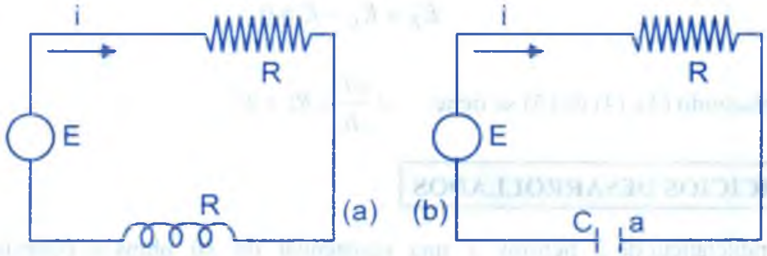
Encuéntrese y en función de t. **Rpta:** $S: K_1 \neq K_2 y = \dfrac{K_1 t_0}{K_2 - K_1}(e^{-k_1 t} - e^{-k_0 t})$

(20) Se desea enfriar una solución contenida en un matraz y que está a 90º C. Se coloca el dispositivo en un recipiente amplio por el que circula agua a 18º C y se observa que después de 2 min. la temperatura desciende 10º C. Halle el tiempo total de enfriamiento.

(21) Se mezclan "a" grs. de sustancia A y "b" grs. de sustancia B para formar el compuesto X con m partes en peso de A y n partes de B. Encontrar la cantidad de X formado durante el tiempo t.

3.5. APLICACIONES A LOS CIRCUITOS ELÉCTRICOS SIMPLES.-

Consideremos circuitos eléctricos simples compuestos de un resistor y un inductor o condensador en serie con una fuente de fuerza electromotriz (f.e.m.), a estos circuitos mostraremos en la figura a) y b) y su funcionamiento es simple de entender.



Ahora estableceremos las relaciones siguientes.

1° Una fuerza electromotriz (f.e.m) E (Volts) producido casi siempre por una batería o un generador, hace fluir una carga eléctrica Q (coulombios) y produce una corriente I (Amperios). La corriente se define como la rapidez de flujo de la carga Q y puede escribirse: $I = \dfrac{dQ}{dt}$ **... (1)**

2° Un resistor de resistencia R (ohms) es una componente del circuito que se opone a la corriente y disipa energía en forma de calor. Produce una caída de voltaje que está dada por la ley de ohm. $E_R = RI$ **... (2)**

3° Un inductor de inductancia L (henrios) se opone a cualquier cambio en la corriente produciendo una caída de voltaje de: $E_L = L\dfrac{dI}{dt}$ **... (3)**

4° Un condensador de capacitancia C (farandios) acumula o carga. Al hacerlo se resiste al flujo adicional de carga, produciendo una caída de voltaje de: $E_c = \frac{Q}{c}$ ... (4)

Las cantidades R, L y C son generalmente constantes dependientes de los componentes específicos del circuito; E puede ser constante o una función del tiempo. El principio fundamental que gobierna estos circuitos es la ley de los voltajes de Kirchoff. "La suma algebraica de todas las caídas de voltaje alrededor de un circuito cerrado es cero".

En el circuito de la figura (a), el resistor y el inductor produce caídas de voltaje E_R y E_L, respectivamente, pero la f.e.m. produce un aumento de voltaje E. (es decir, una caída de voltaje de -E). Entonces la ley de los voltajes de Kirchhoff da:

$$E_R + E_L - E = 0 \quad \text{... (5)}$$

reemplazando (3), (4) en (5) se tiene: $L\frac{dI}{dt} + RI = E$

EJERCICIOS DESARROLLADOS

1) Una inductancia de 2 henrios y una resistencia de 10 ohms se conecta en serie con una f.e.m. de 100 volts, si la corriente es cero cuando t = 0. ¿Cuál es la corriente después de 0.1 seg?

Solución

Como L = 2, R = 10 y E = 100 entonces la ecuación que gobierna es:

$L\frac{dI}{dt} + RI = E$ reemplazando tenemos: $2\frac{dI}{dt} + 10I = 100$ simplificando

$\frac{dI}{dt} + 5I = 50$ ecuación lineal en I.

$$I(t) = e^{-5\int dt}\left[\int e^{\int 5dt}\, 50\, dt + c\right] = e^{-5t}\left[\int 50e^{5t} dt + c\right]$$

$I(t) = e^{-5t}[10e^{5t} + c] \Rightarrow I_{(t)} = 10 + c.e^{-5t}$ Como I(0) = 0

$0 = 10 + c \Rightarrow c = -10 \qquad \therefore \quad I_{(t)} = 10(1 - e^{-5t})$

ahora para t = 0.1 $\Rightarrow$ $I(0.1) = 10(1 - e^{-0.5}) = 3.93$ amp.

(2) Un circuito en serie consiste de una resistencia de 120 ohms. y una inductancia de $\frac{6}{\pi}$ henrios un generador de cc. de 220 voltios, se encuentra en serie con un generador de c.a. de 220 voltios (frecuencia de 60 ciclos) y de combinación conectada a un circuito por medio de un interruptor. Encontrar:

a) La corriente en el tiempo t después que se ha cerrado el interruptor.

b) La corriente después de $\frac{1}{20\pi}$ seg.

c) La corriente en estado permanente (o estacionaria)

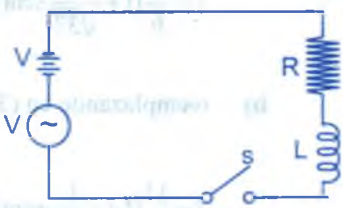
d) El voltaje en la inductancia y el voltaje en la resistencia cuando $t = \frac{1}{20\pi}$ seg.

<u>Solución</u>

Datos: $V_0 = 220$ voltios ; $V = V_0 \text{ sen } \omega t = 220 \text{ sen } \omega t$

W $= 2\pi$ f = 120 rad/seg. ; R = 120 ohms.

$L = \frac{6}{\pi}$ henrios



a) La ecuación que gobierna la corriente en el circuito al cerrar el interruptor S, es dado por la segunda Ley de Kirchoff.

$$L\frac{di}{dt} + R = V_0 + V = V_0(1 + \text{sen } wt) \Rightarrow \frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = \frac{V_0}{L}(1 + \text{sen } wt) \qquad \textbf{... (1)}$$

La solución de esta ecuación diferencial es:

$$i = V_0\left[\frac{1}{R} + \frac{R \text{ sen } wt - Lw \cos wt}{R^2 + L^2 w^2}\right] + ce^{-\frac{R}{L}t} \qquad \textbf{... (2)}$$

aplicamos ahora la condición inicial, evidente de que para t = 0 $\Rightarrow$ i = 0

$$c = V_0\left[\frac{1}{R} - \frac{Lw}{R^2 + L^2w^2}\right]$$ y reemplazando en (2)

$$i = \frac{V_0}{R} + \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + L^2}}\left[\frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2w^2}}\operatorname{sen} wt - \frac{Lw}{R^2 + L^2w^2}\cos wt\right] + V_0\left(\frac{Lw}{R^2 + L^2w^2} - 1\right)e^{-\frac{R}{Lt}}$$

definimos el ángulo θ del modo siguiente:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{LW}{R}, \quad \cos\theta = \frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2w^2}}, \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{Lw}{\sqrt{R^2 + L^2w^2}}$$

entonces: $$i = \left(\frac{V_0}{R}\right) + \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + L^2w^2}}\operatorname{sen}(wt - \theta) + V_0\left(\frac{Lw}{R^2 + L^2w^2} - \frac{1}{R}\right)e^{\frac{Rt}{L}} \quad \dots (3)$$

que es la solución final.

Reemplazando los valores numéricos dados, en (3)

$$i = \frac{11}{6}\left[1 + \frac{1}{\sqrt{37}}\operatorname{sen}(120\pi t - \operatorname{arctg} 6)\frac{31}{37}e^{-20\pi t}\right] \quad \dots (4)$$

b) reemplazando en (3) $t = \dfrac{1}{20\pi}$ seg.

$$i = \frac{11}{6}\left[1 + \frac{1}{\sqrt{37}}\operatorname{sen}(6 - \operatorname{arctg} 6)\frac{31}{37}e^{-1}\right] \approx 0.969 \text{ amp.}$$

observe que el argumento de la serie es dado en radianes

c) La corriente permanente (o estacionaria) corresponde a t muy grande, entonces $e^{-20\pi t}$ y por lo tanto la ecuación (4) se reduce.

$$i = \frac{11}{6}\left[1 + \frac{1}{\sqrt{37}}\operatorname{sen}(120\pi t - \operatorname{arctg} 6)\right]$$

d) $V_R = iR = 0.969 x 120 \approx 116.3$ voltios.

$$V_L = L\frac{di}{dt} = \frac{220}{\sqrt{37}}[6\cos(120\pi t - arc.\text{tg}\,6) + \frac{31}{\sqrt{37}}e^{-20\pi t}]t = \frac{1}{20\pi} \qquad \therefore \; V_L \approx 42.3 \text{ vlts.}$$

(3) En un circuito RC el condensador tiene una carga inicial q_0 y la resistencia R varía linealmente de acuerdo a la ecuación. $R = k_1 + k_2 t$, con $k_1 > 0$ y $k_2 > 0$

La segunda Ley de Kirchoff, que suponemos válida pese a que R no es constante asegura que: $Ri + \frac{q}{c} = E_0$ esto es: $(k_1 + k_2 t)\frac{dq}{dt} + \frac{1}{c}q = E_0$

Encontrar i cuando t = 0.3 segundos.

Si $q_0 = 2$ coulombios, $k_1 = 1$, $k_2 = 0{,}1$, c = 0.05 farandios, $E_0 = 50$ voltios

Solución

De la ecuación dada se tiene: $\frac{dq}{dt} + \frac{1}{c(k_1 + k_2 t)}q = \frac{E_0}{k_1 + k_2 t}$ y la solución de esta ecuación diferencial es:

$$q = e^{-\int \frac{dt}{c(k_1 + k_2 t)}}[\int e^{\int \frac{dt}{c(k_1 + k_2 t)}} \frac{E_0}{k_1 + k_2 t}dt + C_0]$$

$$q = e^{-\frac{1}{ck_2 \ln(k_1 + k_2 t)}}[\int e^{\frac{1}{ck_2 \ln k_1 + k_2 t)}} \frac{E_0}{k_1 + k_2 t}dt + C_0]$$

$$q = [k_1 + k_2 t]^{-\frac{1}{ck_2}}[\int (k + kt)^{-\frac{1}{ck_k}} E_0 dt + C_0] \Rightarrow q = CE_0 + k_1^{\frac{1}{ck_2}}(q_0 - CE_0)(k_1 + k_2 t)^{-\frac{1}{ck_2} - 2}$$

y derivando para hallar la corriente eléctrica. $i = \frac{dq}{dt} = (k_1)^{\frac{1}{ck_2}}(E_0 - \frac{q_0}{C})(k_1 + k_2 t)^{-(\frac{1}{ck_2}+1)}$

ahora reemplazando los valores numéricos:

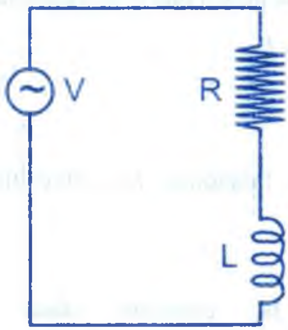
t = 0.3 seg. $q_0 = 2$ coul, $k_1 = 1$, $k_2 = 0.1$, c = 0.05 farad. $E_0 = 50$ voltios

encontrándose: i ≈ 0.0244 amperios

(4) Hallar la intensidad de corriente que circula por un circuito RL impulsada por la fuerza electromotriz: $V = V_0 e^{-2t}\cos 2t$ cuando L = 0.4 henrios.

$$R = 5 \text{ ohmios}, \; V_0 = 100 \text{ voltios}, \; i = 0 \text{ para } t = 0$$

Solución



De acuerdo a la segunda ley de Kirchoff, la corriente en el circuito es gobernada por la ecuación:

$Ri + L\frac{di}{dt} = V$ y reemplazando $V = V_0 e^{-2t}\cos 2t$

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = (\frac{V_0}{L})e^{-2t}\cos 2t$$

reemplazando los valores numéricos: $\frac{R}{L} = 12.5\frac{ohm}{henrios}$ y $\frac{V_0}{L} = 250\frac{voltios}{henrios}$

entonces $\frac{di}{dt} + 12.5i = 250e^{-2t}\cos 2\pi t$ y la solución de esta ecuación es:

$$i = e^{-12.5t}[\int e^{12.5t}\,250e^{-2t}\cos 2\,dt + c]$$

siendo C una constante de integración efectuando la integral se tiene:

$$i = e^{-12.5t}[250e^{10.5t}\frac{[10.5\cos 2\pi t + 2\pi \operatorname{sen} 2\pi t]}{[(10.5)^2 + (2\pi)^2]} + C]$$

$$i = 1.66e^{-2t}\,10.5\cos 2\pi t + 2\pi \operatorname{sen} 2\pi t + ce^{-12.5t}$$

usando ahora las condiciones iniciales de que para t = 0, i = 0, entonces: C = -17.43

Por tanto: $i = 1.66[10.5\cos 2\pi t + 2\pi \operatorname{sen} 2\pi t]e^{-2t} - 17.43e^{-12.5t}$

(5) Se introduce una f.e.m. en un circuito que contiene en serie una resistencia de 10 ohsms. y un condensador no cargado cuya capacidad es de $5x10^{-4}$ faradios. Encontrar la corriente y la carga en el condensador cuando: t = 0.01 seg.

a) Si V = 100 voltios **b)** Si V = 100 sen 120 t volts.

Solución

La ecuación para el circuito se obtiene de la segunda Ley de Kirchoff. $Ri + \frac{q}{c} = V$

$$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC}q = V \quad (\text{se usa } i = \frac{dq}{dt})$$

y la solución de esta ecuación diferencial es:

$$q = e^{-\frac{t}{RC}}\left[\int \frac{e^{\frac{t}{RC}}V}{R}dt + c\right] \quad \textbf{... (1)}$$

Siendo C_0 una constante de integración

a) Si V = 100 voltios constantes, entonces en (1) e integrando. $q = VC + C_0 e^{-\frac{t}{RC}}$

y usando la condición inicial de que para t = 0, q = 0, se halla C_0, luego:

$$q = VC[1 - e^{-\frac{t}{RC}}] \quad \textbf{... (2)}$$

y la corriente eléctrica i es dado por: $i = \frac{dq}{dt} = \frac{V}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$ **... (3)**

reemplazando valores numéricos en (2) y (3) para t = 0.01 seg. se encuentra:

q ≈ 0.043 coul. ; i ≈ 1.35 amp.

b) Si V = 100sen20πt volt. entonces reemplazando en (1) e integrando y a la vez reemplazando los valores numéricos salvo, t se tiene:

$q = 0.0022(5\,\text{sen}\,120\pi t - 30\pi\cos 120\pi t) + C_0 e^{-200t}$ y usando la condición:

t = 0 ⇒ q = 0 se halla $C_0 = 0.0207$, de modo que:

$$q = 0.0022(5\,\text{sen}\,120\pi t - 30\pi\cos 120\pi t) + 0.0207 e^{-200t}$$

$$i = \frac{dq}{dt} = 0.83(5\cos 120\pi t + 3\pi \operatorname{sen} 120\pi t) - 4.14e^{-200t}$$

y para t = 0.01 seg. se tiene: q = 0.0131 coul. ; i = -8.5 amperios.

el signo menos en i indica que el sentido de la corriente en el circuito es contraria al caso (a)

6) Una f.e.m. de 100 voltios se introduce en un circuito que contiene en serie una resistencia de 10 ohsms y un condensador no cargado cuya capacitancia es de $5x10^{-4}$ faradios. Cuando se ha alcanzado el estado permanente (o estacionario), se desconecta la f.e.m. del circuito. Encontrar la corriente y la carga del condensador 0.01 seg. después de la desconexión de la f.e.m.

Solución

Este problema en su primera parte es decir cuando está conectado V, es igual a la parte (a) del problema anterior y por lo tanto se cumple:

$$q = VC[1 - e^{-\frac{t}{RC}}] \ , \quad i = (\frac{V}{R})e^{-\frac{t}{RC}}$$

el estado permanente (o estacionario se cumple cuando t es un tiempo muy grande y entonces: $e^{-\frac{t}{RC}}$ tiende a cero, por tanto los valores finales de carga y corriente serán:

q = VC = 0.05 Coulb., i = 0.

En la segunda parte, cuando se desconecta la fuente en f.e.m. V del circuito (instante inicial t = 0, H) se tiene: para t = 0 ⇒ $q = q_0 = 0.05$ coulb. y la ecuación para el circuito de acuerdo a la segunda ley de Kirchoff, con V = 0 será:

$$Ri + \frac{q}{c} = 0 \text{ es decir: } \frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC}q = 0 \text{, de donde:}$$

$$\int_{q_0}^{q} \frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC}\int_0^t dt \Rightarrow \ln(\frac{q}{q_0}) = -\frac{t}{Rc} \Rightarrow q = q_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad \text{... (1)}$$

$$i = \frac{dq}{dt} = -\frac{q_0}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \qquad \textbf{... (2)}$$

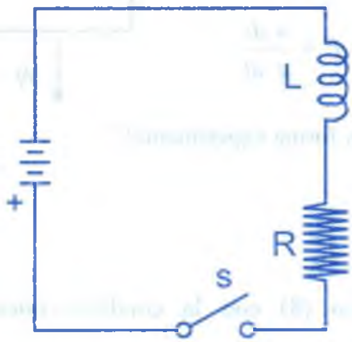
Reemplazando los valores numéricos en (1) y (2) para: $t = 0.01$ seg. se encuentre

$q = 0.00677$ coul, $i = -1.354$

El signo menos en i se refiere a que ahora el sentido de la corriente es contrario al caso en que la fuente de f.e.m. estaba conectada al circuito.

(7) Una inductancia de 1 henry y una resistencia de 100 ohms. están conectadas en serie con una fuente constante E (volts.) por medio de un interruptor. El interruptor se cierra y 0.01 seg. más tarde la corriente es 0.5 amp. Encontrar E.

Solución



Cuando se cierra el interruptor la ecuación diferencial para la corriente de acuerdo a la segunda ley de Kirchoff es: $L\frac{di}{dt} + Ri = E$, de donde $\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = \frac{E}{L}$

Luego la solución de esta ecuación diferencial.

$$i = e^{-(\frac{R}{L})t} \left[\int e^{(\frac{R}{L})t} \frac{E}{L} dt + C \right]$$

Siendo C constante de integración de donde: $i = \frac{E}{R} + Ce^{-(\frac{R}{L})t}$ por condiciones iniciales se tiene: para $t = 0$, $i = 0$ $\Rightarrow$ $C = -\frac{E}{R}$ por tanto: $i = \frac{E}{R}[1 - e^{-(\frac{R}{L})t}]$

aquí reemplazando los valores para $t = 0.01$ seg. $i = 0.5$ amp., junto con el resto de valores numéricos y despejando E: $E = \frac{50}{1 - e^{-1}} \approx 79.4$ volts.

(8) En el movimiento de un objeto a través de un cierto medio (aire a ciertas presiones es un ejemplo) el medio efectúa una fuerza de resistencia proporcional al cuadrado de la velocidad del objeto móvil, supóngase que el cuerpo cae por acción de la gravedad, a través de tal medio. Si t representa el tiempo y v la velocidad positiva hacia abajo, y g es la aceleración de la gravedad constante usual, y w el peso del cuerpo, usando la ley de Newton, fuerza igual a masa por aceleración, concluir que la ecuación diferencial del movimiento es: $\frac{w}{g}\frac{dv}{dt} = w - kv^2$, donde kv^2 es la magnitud de la fuerza de resistencia efectuada por el medio.

Solución

La descripción matemática es: $\frac{dv}{dt} = -kv^2$, además $F = w - kv^2$

para F = m.a, también $a = \frac{dv}{dt}$ y $m = \frac{w}{g}$ Luego: $F = \frac{w}{g}\frac{dv}{dt}$

Por lo tanto se tiene: "fuerza viscosa es obtenida en forma experimental".

$$\frac{w}{g}\frac{dv}{dt} = w - kv^2$$

(9) Resuélvase la ecuación diferencial del ejercicio (8) con la condición inicial que $v = v_0$ cuando t = 0 introducir la constante $a^2 = \frac{w}{k}$ para simplificar las fórmulas.

Solución

Como la ecuación diferencial es: $(\frac{w}{g})\frac{dv}{dt} = w - kv^2 \Rightarrow (\frac{w}{g})\frac{dv}{w - kv^2} = dt$

$$(\frac{w}{gk})\frac{dv}{\frac{w}{k} - v^2} = dt\text{, como } a^2 = \frac{w}{k} \text{ se tiene: } \frac{a^2 dv}{a^2 - v^2} = gdt \Rightarrow a^2\int\frac{dv}{a^2 - v^2} = gt + c_1$$

$$\frac{a}{2}\ln(\frac{a+v}{a-v}) = gt + c_1 \Rightarrow \ln(\frac{a+v}{a-v}) = \frac{2gt}{a} + k$$

$$\frac{a+v}{a-v}=ce^{2\frac{gt}{a}} \quad \text{para } t=0,\ v=v_0$$

$$\frac{a+v_0}{a-v_0}=c \quad \Rightarrow \quad \text{para } t\geq 0;\ \frac{a+v}{a-v}=\frac{a+v_0}{a-v_0}\exp(\frac{2gt}{a})$$

(10) Hay medios que oponen una fuerza de resistencia al paso de los cuerpos que los atraviesa proporcional a la primera potencia de la velocidad. Para tales medios plantear y resolver problemas similares a los ejercicios 8 y 9, excepto que, por conveniencia, debe escogerse una constante $b=\frac{w}{k}$ para reemplazar a la constante a^2 del ejercicio 9. Mostrar que b tiene las dimensiones de una velocidad.

Solución

La descripción matemática es: $\frac{dv}{dt}=-kv$, además F = ma de donde:

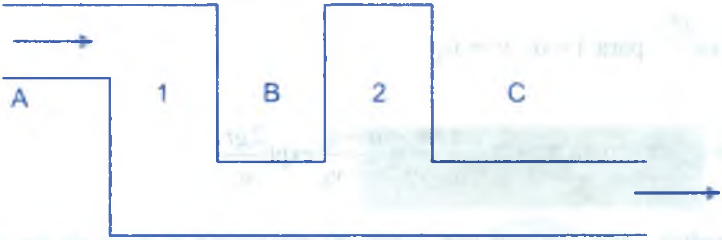
$$(\frac{w}{g})\frac{dv}{dt}=w-kv \quad \Rightarrow \frac{wdv}{w-kv}=gdt\text{, integrando } \frac{w}{k}\int\frac{dv}{\frac{w}{k}-v}=\int gdt+c_1 \quad \text{pero } b=\frac{w}{k}$$

$$b\int\frac{dv}{b-v}=\int g\,dt+c_1 \quad \Rightarrow \ln(b-v)=-\frac{gt}{b}+c_1 \quad \Rightarrow \quad b-v=ce^{-\frac{gt}{b}}$$

para $t=0,\ v=v_0$ se tiene: $b-v_0=c$

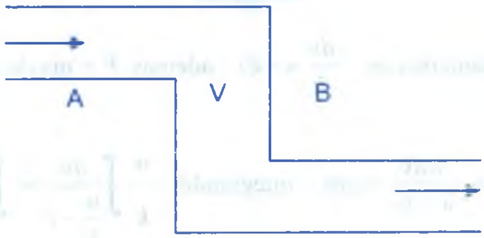
Luego $v=b-ce^{-\frac{gt}{b}} \Rightarrow v=b-(b-v_0)e^{-\frac{gt}{b}} \Rightarrow v=b+(v_0-b)e^{-\frac{gt}{b}}$, $t>0$

(11) Dos corrientes están conectados mediante una cañería, tal como se muestra en la figura adjunta. Cada uno contiene 50 lts. de solución, con 10 gr. de soluto al tanque No, 1 y 5 grs. al tanque No. 2. Se abren las tres cañerías, haciéndose entrar agua a través de A. Por A, B y C circula líquido a razón de 2 litros/min. Encontrar la cantidad de soluto de ambos recipiente después de 30 minutos (las soluciones se mantienen homogéneas mediante agitadores).



Solución

Antes de proceder a resolver el problema consideremos el caso más simple de un sólo recipiente de v litros de agua en el que se encuentra una mezcla de agua y sal (soluto). Se accionan simultáneamente las llaves de A y B haciéndose ingresar agua pura por A a razón de 5 litros/min. y se extrae solución por B en la misma proporción, para describir la cantidad de sal (soluto) x en función del tiempo se razona del modo siguiente:



Consideremos un intervalo de tiempo muy pequeño Δt minutos, entonces:

S Δ t = cantidad de solución que sale por B en Δ t minutos.

$\frac{X}{V}$ = concentración uniforme de sal en la solución (gr/lts)

$(\frac{X}{V})S\Delta t$ = cantidad de sal que sale por B en t minutos por tanto la variación de sal el recipiente Δx durante el Δt es dado por: $\Delta x = -(\frac{S}{V})X\Delta t$

Luego $\frac{x}{t} = -(\frac{S}{V})X$ y en el límite en que $\Delta t \to 0$:

$\frac{dx}{dt} = -(\frac{S}{V})X$ que será la ecuación que gobierna X en el recipiente:

Si en el lugar de agua pura entra una solución salina con una concentración constante de c gr/lts por B, un análisis similar conduce fácilmente a la ecuación diferencial:

$$\frac{dx}{dt} = SC - \frac{S}{V}X \qquad \text{... (2)}$$

Usando estas ideas es inmediato plantear el problema dado:

Llamemos: V_1 = volumen del recipiente No. 1.

X_1 = Cantidad de soluto del recipiente No. 1 en el instante t.

X_2 = Cantidad de soluto del recipiente No. 2 en el instante t.

V_2 = Volumen del recipiente No. 2.

entonces se cumple: $$\frac{dx_1}{dt} = -(\frac{S}{V_1})X_1 \qquad \text{... (3)}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = (\frac{S}{V_1})X_1 - (\frac{S}{V_2})X_2 \qquad \text{... (4)}$$

La ecuación (3) se puede integrar directamente reemplazando:

$\frac{S}{V_1} = 0.004\frac{1}{\text{min.}}$ y usando la condición inicial que

para $t = 0,\ X_1 = X_{01} = 10grs.$ de soluto

Luego: $X_1 = 10e^{-0.04t}$ gr. de soluto ... (5)

reemplazando (5) en (4) con $\frac{S}{V_2} = 0.04\frac{1}{\text{min.}}$

$\frac{dx_2}{dt} + 0.04x_2 = 0.4e^{-0.04t}$ de donde la solución es: $x_2 = e^{-0.04t}[\int(e^{0.04t})(0.4e^{-0.04t})dt + c]$

donde C es una constante de integración, integrando esta ecuación, usando la condición inicial de que para t = 0, $X_2 = x_{02} = 5$ grs. se tiene: $x_2 = (0.4t + 5)e^{-0.04t}$ **... (6)**

finalmente reemplazando en (5) y (6).

t = 30 minutos se encuentra: $X_1 = 3.01$ gr. de soluto y $X_2 = 5.12$ gr. de soluto

EJERCICIOS PROPUESTOS.-

1. Supongamos que el circuito RL de la figura (a) tiene los valores dados para la resistencia, la inductancia, la f.e.m. y la corriente inicial.

   Halle una fórmula para la corriente en cualquier tiempo t y calcule la corriente después de un segundo.

   a) R = 10 ohms., L = 1 henrios, E = 12 volts., I(0) = 0 amp.

   b) R = 8 ohms., L = 1 henrios, E = 6 volts., I(0) = 1 amp.

   c) R = 50 ohms., L = 2 henrios, E = 100 volts., I(0) = 0 amp.

   d) R = 10 ohms., L = 5 henrios, E = 10sen t, volts., I(0) = 1 amp.

   e) R = 10 ohms., L = 10 henrios, E = e^t volts., I(0) = 0 amp.

2. Use la resistencia, la capacitancia, la f.e.m. y la carga inicial dada para el circuito R C de la figura (b). Halle una expresión para la carga en cualquier tiempo t.

   a) R = 1 ohms., C = 1 farad., E = 12 volts., Q(0) = 0 coulomb.

   b) R = 10 ohms., C = 0.001 farad., E = 10 cos 60 t volts, Q(0) = 0 coulomb.

   c) R = 1 ohms., C = 0.01 farad., E = sen 60 t volts., Q(0) = 1 coulomb.

   d) R = 100 ohms., C = 10^{-4} farad., E = 100 volts., Q(0) = 1 coulomb.

   e) R = 200 ohms., C = $5x10^{-5}$ farad., E = 1000 volts., Q(0) = 1 coulomb.

3. Se conecta en serie una inductancia de 1 henry y una resistencia de 2 ohms, con una batería de $6e^{-0.0001t}$ volts. inicialmente no fluye ninguna corriente. ¿Cuándo llegará la corriente a 0.5 amperios?

(4) Una resistencia variable $R=\frac{1}{5+t}$ ohms. y una capacitancia de $5+10^{-6}$ farad. se conecta en serie con una f.e.m. de 100 volts. ¿Cuál es la carga del condensador después de un minuto si Q(0)= 0?

(5) Halle la corriente de estado estacionario, si se conecta en serie una resistencia de 2,000 ohms. y una capacitancia de $3\,x10^{-6}$ farad. con un alternador de 120 cos 2t volts.

(6) Un condensador de capacitancia $4\,x10^{-4}$ faradios descarga a través de una resistencia de 100 ohms, si al corriente es 1 amp. al final de 0.01 seg. ¿Cuál era la carga inicial del condensador?. ¿Cuanta resistencia debe sacarse del circuito para obtener la mitad de la corriente en el mismo tiempo? **Rpta:** q = 0.0487 coulomb., R = 2.49 ohms.

(7) Un condensador sin carga, de capacitancia c (farads) se descarga una fuente de voltaje constante a través de una resistencia R (ohms) ¿Cuando será la corriente (amps) igual en magnitud a la carga (coulomb) del condensador? **Rpta:** $t=Rc\ln(\frac{Rc+1}{Rc})seg$

(8) Una f.e.m. de 100 sen 120πt volts. se introduce en un circuito que contiene en serie una resistencia de 100 ohms. y un condensador con capacitancia de $5\,x10^{-4}$ faradios se tiene una carga inicial en el condensador al tiempo t = 0, cuando la f.e.m. se introduce, tal que la corriente en el tiempo cero es 1 amp. (positiva) encontrar la corriente 0.1 seg. más tarde. **Rpta:** 0.181 amp.

(9) Una resistencia de 10 ohms. se conecta en serie con una inductancia de L henrios. El circuito está conectado por medio de un interruptor a una fuente constante de E voltios si la corriente alcanza las $\frac{3}{4}$ de su valor de estado permanente en 0.1 seg. Encontrar L.

Rpta: 0.721 henrios.

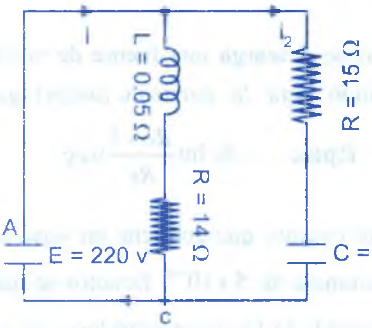
(10) Un cierto relevador (o interruptor magnético que está diseñado de manera que cierre un circuito cuando se aplica 60 voltios a sus terminales (es decir, cuando y = 60 voltios). La bobina del relevador tiene una inductancia de $\frac{1}{2}$ henry y opera de una fuente de 120 voltios c - c. Si el circuito se cierra 0.05 seg. después de conectado a la fuente. Encontrar:

a) La resistencia del relevador. **b)** La corriente cuando se cierra el circuito.

Despreciar la resistencia de los puntos. **Rpta:** **a)** R = 6.95 ohms.

b) i = 8.63 amperios.

(11) Una bobina de impedencia que tiene una resistencia de 14 ohmios y una inductancia de 0.05 henrios, y una rama que tiene una resistencia no inductiva de 15 ohmios y un condensador de capacidad 10^{-4} faradios en serie, están conectados en paralelo a través de los terminales de una f.e.m. de 220 voltios. Hallar las expresiones en función del tiempo para la carga del condensador, la corriente en la bobina de impedencia, la corriente en la resistencia no inductiva y la corriente total. Ver figura.



Rpta: $q = 0.022(1 - e^{-\frac{2.000t}{3}})$; $i_2 = \frac{44}{3} e^{-\frac{2.000t}{3}}$

$$i_1 = 15.71(1 - e^{-28^\circ t})$$

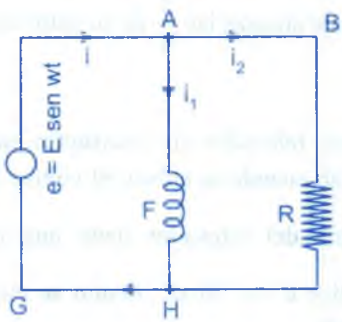
$$i = i_1 + i_2 = 15.71(1 - e^{-28^\circ t}) + \frac{44}{3} e^{-\frac{2.000t}{3}}$$

(12) Para el sistema representado en la figura No. 1 obtener mediante la ley de la corriente en el punto A, $i = i_1 + i_2$ y por la ley de la f.e.m. aplicando a los circuitos A R H G y A B H G. $L = \frac{di_1}{dt} = E \operatorname{sen} wt$, $Ri_2 = E \operatorname{sen} wt$ resolver estas ecuaciones para i_1, i_2 e i en función de t, determinar una constante de integración teniendo en cuenta la condición i = 0 cuando t = 0.

Rpta: $i_2 = \frac{E}{R} \operatorname{sen} wt$

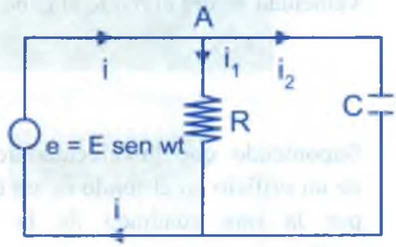
$$i_1 = \frac{E}{Lw}(1 - \cos wt)$$

$$i = i_1 + i_2$$



(13) De la figura No. 2, deducir las leyes de Kirchoff. $i = i_1 + i_2$, $Ri_1 = E \text{ sen } wt$

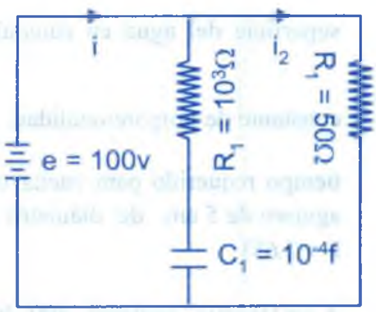
$\frac{1}{c}\int i_2\,dt = \frac{q}{c} = E \text{ sen } wt$, Hallar q, i_1, i_2 e y en función de t.



Rpta: $i_1 = \frac{E}{R}\text{sen } wt$, $q = cE \text{ sen } wt$

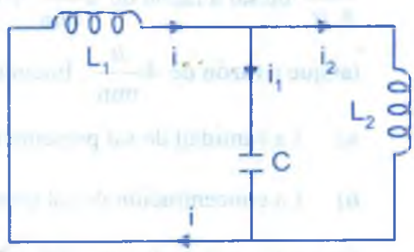
$i_2 = cEw\cos wt$; $i = i_1 + i_2$

(14) Deducir para el sistema indicado en la figura, tres ecuaciones aplicando las leyes de Kirchoff, supóngase que la carga del condensador es nula cuando t = 0 y dedúzcase que siempre $i_2 = 2$ amperios y que $i_1 = \frac{1}{10}e^{-10t}$, teniendo tanto rápidamente a cero.

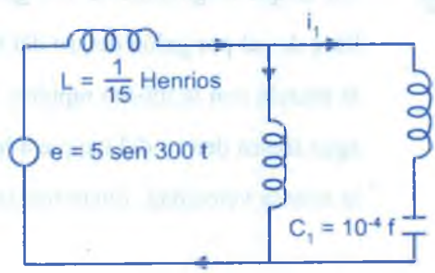


(15) Si al principio la carga del condensador de la figura indicada es q_0 e $i_1 = 0$. Demostrar que $q = q.\cos\sqrt{\frac{L_1 + L_2}{cL_1 x L_2}}\,t$

"Observación e = 0".



(16) Hallar i en función del tiempo t en el sistema representado en la figura indicada, si con cero todas las corrientes iniciales y la carga del condensador.



(17) Un punto material de masa igual a 1 gr. se mueve en línea recta debido a la acción de una fuerza que es directamente proporcional al tiempo, calculando desde el instante t = 0, e inversamente proporcional a la velocidad del punto. En el instante t = 10 seg. La velocidad tendrá el punto al cabo de un minuto del comienzo del movimiento?

Rpta: $V = 10\sqrt{725}\,\frac{cm}{seg}$ Sug. $\frac{dv}{dt} = 20\frac{t}{v}$

(18) Suponiendo que la velocidad de gasto de agua (volumen por unidad de tiempo) a través de un orificio en el fondo de un tanque sea proporcional al producto del área del orificio por la raíz cuadrada de la profundidad del agua, la ecuación diferencial es: $A\frac{dh}{dt} = -KB\sqrt{h}$, donde h (m) es la profundidad del agua y A (m^2) es el área de la superficie del agua en cualquier tiempo t (seg.) y $B(m^2)$ es el área del orificio. La constante de proporcionalidad, $K(\frac{m^{\frac{1}{2}}}{seg})$ se puede determinar empíricamente. Encontrar el tiempo requerido para vaciar un tanque cúbico de 1.20 m. por lado. El tanque tiene un agujero de 5 cm. de diámetro en el fondo y originalmente está lleno de agua (tomar k = 2.65) **Rpta:** t ≈ 10.2 minutos.

(19) A un tanque contiene 400 lts. de agua fresca, se le incorpora salmuera que contiene $\frac{1}{8}\frac{kg}{lt}$ de sal a razón de $8\frac{lt}{\min}$ y la mezcla mantenida uniforme por agitación, abandona el tanque a razón de $4\frac{lt}{\min}$. Encontrar:

a) La cantidad de sal presente cuando el tanque contiene 500 lts. de salmuera.

b) La concentración de sal en el tanque al final de 1 hora.

(20) Un tanque originalmente 100 galones de agua fresca. Se vierte agua que contiene media libra de sal por galón dentro del tanque a una velocidad de $2\frac{gal}{\min}$, y se permite que salga la mezcla con la misma rapidez. Después de diez minutos se para el proceso, se vierte agua fresca dentro del tanque a la velocidad de $2\frac{gal}{\min}$, dejando salir también la mezcla a la misma velocidad. Encontrar la cantidad de sal en el tanque al final de los 20 minutos.

Rpta: $Q = 5 - e^{-0.2}(1 - e^{9.2})lb$

(21) Un tanque con capacidad de 500 galones contiene originalmente 200 galones de agua con 100 libras de sal en solución. Se introduce dentro del tanque agua que contiene una libra de sal por galón, a la velocidad de $3\frac{gal}{\min}$ y se permite que la mezcla fluye afuera del tanque a una velocidad de $2\frac{gal}{\min}$. Encuéntrese la cantidad de sal en el tanque para cualquier tiempo (en libras por galón), anterior al instante cuando la solución principia a exceder la capacidad del tanque. $Q = 200 + t - \frac{100(200)^2}{(200+t)^2}$ libras, $t < 300$

(22) Un cuerpo de masa constante m se proyecta verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial V_0 suponiendo que la atracción gravitacional de la tierra es constante, y despreciando todas las otras fuerzas que actúan sobre el cuerpo, encontrar:

a) La máxima altura alcanzada por el cuerpo.

b) El tiempo en el que se alcanza la máxima altura.

c) El tiempo que tarda el cuerpo en retornar al punto de partida.

Rpta: **a)** $\frac{V_0^2}{2g}$ **b)** $\frac{V_0}{g}$ **c)** $\frac{2V_0}{g}$

(23) Un cuerpo es dejado caer verticalmente hacia abajo, con un velocidad inicial V_0 en un medio que ofrece una resistencia proporcional a la magnitud de la velocidad. Encuéntrese una relación entre la velocidad v y el tiempo t; y también la velocidad límite v_1 que alcanza después de un largo tiempo. **Rpta:** $V = \frac{mg}{K} + (V_0 - \frac{mg}{K})e^{-\frac{kt}{m}}$

(24) Un objeto de masa m se deja caer desde el reposo en un medio que ofrece una resistencia proporcional a la magnitud de la velocidad. Encuéntrese el intervalo de tiempo que transcurre antes de que la velocidad del objeto alcance el 90% de su valor límite.

Rpta: $t = \frac{m}{K}\ln 10$

(25) Un hombre y un bote de motor pesan juntos 320 libras . Si el empuje del motor es equivalente de 10 lb. en la dirección de movimiento que si la resistencia del agua al movimiento es numéricamente igual a dos veces la velocidad en Ps/seg. y si el bote está inicialmente en reposo encontrar:

a) La velocidad del bote al tiempo t. **b)** La velocidad límite.

Rpta: **a)** $b = 5(1-e^{-0.2t})\frac{Ps}{seg}$ **b)** $\lim\limits_{t\to\infty} V = 5\frac{Ps}{seg}$

(26) Un cuerpo con masa m es lanzado verticalmente hacia abajo con una velocidad inicial V_0 es un medio que ofrece una resistencia proporcional a la raíz cuadrada de la magnitud de la velocidad. Encuéntrese la relación entre la velocidad V y el tiempo t; así como la velocidad límite. **Rpta:** $2\frac{m}{K}(\sqrt{V_0}-\sqrt{V})+2\frac{m^2 g}{K^2}$; $\ln\left|\frac{mg-K\sqrt{V_0}}{mg-K\sqrt{V}}\right| = t$; $V_1 = (\frac{mg}{K})^2$

(27) Un cuerpo de masa m cae desde el reposo en un medio que ofrece una resistencia proporcional al cuadrado de la velocidad. Encuéntrese la relación entre la velocidad v y el tiempo t, así como la velocidad límite. **Rpta:** $V = (\frac{mg}{K})\frac{e^2\sqrt{\frac{kg}{m}}t-1}{e^2\sqrt{\frac{kg}{m}}t+1}$; $\lim\limits_{t\to\infty} = \sqrt{\frac{mg}{K}}$

(28) Comenzó a nevar una mañana y la nieve siguió cayendo continuamente durante todo el día. Al medio día, un quitanieves comenzó a limpiar una carretera a un ritmo constante, en términos del volumen de nieve retirado a cada hora. El quitanieves limpió 2 millas para las 2 de la tarde y una milla más para las 4 de la tarde ¿Cuando comenzó a trabajar?

Rpta: $(\sqrt{5}-1)$ antes del medio día.

(29) Un depósito contiene 100 gl. de agua pura. A partir del tiempo t = 0 se introduce salmuera que contiene 1 lb. de sal, por galón a razón de 1 gal. por minuto, la mezcla se mantiene uniforme ya que se resuelve al mismo ritmo ¿Cuando habrá 50 lb. de sal disuelta en el depósito? **Rpta:** Después de 100 en 2 minutos.

30) Un gran depósito contiene 100 gl. de salmuera en la que están disueltas 200 lb. de sal. A partir del tiempo t = 0, se introduce agua pura a razón de 3 galones por minuto y la mezcla (que se mantiene uniforme resolviéndola) sale del depósito a razón de 2 gl. por minuto. ¿Cuanto tiempo se necesitará para reducir la cantidad de sal que hay en el depósito a razón de 2 gl. por min. ¿Cuánto tiempo se necesitará para reducir la cantidad de sal que hay en el depósito de 100 lb.? **Rpta:** $100(\sqrt{2}-1)$ min.

3.6. APLICACIONES A LA ECONOMÍA.-

Para el planteamiento de las ecuaciones diferenciales aplicadas a la economía, es necesario dar algunos conceptos de los términos económicos.

a) **Costo.-** Sea "y" el costo total de producir y comercializar "x" unidades de una mecánica, está dado por la función y = F(x), Entonces:

El costo promedio por unidad es: $\boxed{\dfrac{y}{x}=\dfrac{F(x)}{x}}$

Si la producción total se incrementa en una cantidad Δ x a partir de un cierto nivel "x" y si el correspondiente incremento en costo Δ y, entonces el incremento promedio del costo por unidad de incremento en la producción es $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Luego el costo marginal definiremos por: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{dy}{dx}=F'(x)$, es decir que el costo marginal es la derivada del costo total y = F(x).

b) **Ingreso.-** Sea y = f (x) cualquier función de demanda donde "y" representa el precio unitario y "x" el número de unidades.

El ingreso total R es el producto de "x" por "y" es decir:

$$\boxed{R = x\,y = x\,f(x)}$$

El ingreso marginal con respecto a la demanda es la derivada del ingreso total con respecto a x.

$$\frac{dR}{dx}=R'(x)$$

c) Elasticidad.- La elasticidad de punto de la función y = f(x) en el punto x está dado como la razón del cambio proporcional y con respecto al cambio unitario x.

$$\frac{Ey}{Ex}=\frac{\frac{dy}{y}}{\frac{dx}{x}}=\frac{x}{y}\frac{dy}{dx}$$

d) Renta Nacional, Consumo y Ahorro.- Se llama función de consumo a la relación entre la recta nacional (total) disponible y el consumo nacional (total).

Luego la función consumo expresaremos mediante la ecuación:

$$\boxed{c = f(x)}$$

donde c representa el consumo nacional total y "x" la renta nacional (total), entonces la propensión marginal al consumos es: $\boxed{\frac{dc}{dx}=f'(x)}$

mediante una análisis teórico se tiene, la renta nacional es igual l consumo más el ahorro la cual se expresa.

$$\boxed{x = c + s}$$

La propensión marginal al consumo es: $\frac{dc}{dx}=f'(x)$

La propensión marginal del ahorro es: $\frac{ds}{dx}=1-\frac{dc}{dx}$

Ejemplos.

1. La relación entre el precio P y la cantidad demandada X es tal que la tasa de disminución en la demanda, a medida que el precio aumenta, es proporcional a la cantidad demanda e inversamente proporcional a la suma del precio más una constante. Encontrar la función de demanda si. $P = P_0$ cuando $X = X_0$.

Solución

Sea X = X(P) la función de la demanda, de acuerdo al problema la descripción matemática es: $\frac{dX}{dp}=\frac{bx}{p+a}$ de donde $\frac{dx}{x}=\frac{dp}{p+a}$ integrando

$$\ln X=\ln(p+a)^b c \Rightarrow X=(p+a)^b c \Rightarrow C=\frac{X}{(p+a)^b}$$, ahora para $P_0=P$, $X=X_0$

Luego la función de demanda es: $X=\frac{X_0(P+a)^b}{(P_0+a)^b}$

(2) La tasa de incremento del costo total y, a medida que crece el número X de unidades fabricadas, es proporcional a la suma de las unidades fabricadas más una constante e inversamente proporcional el costo total. Hallar la función de costo si $y=y_0$ cuando x = 0, graficar la relación hallada.

Solución

Sean X = unidades fabricadas.

Y = Y(x) costo total de las unidades fabricadas,

de acuerdo al problema la descripción matemática es:

$\frac{dy}{dx}=\frac{a(x+b)}{y}$, de donde y dy = a (x + b) dx

$\frac{y^2}{2}=\frac{a(x+b)^2}{2}+C$, determinaremos C para esto:

$y=y_0$ cuando x = 0 $\Rightarrow \frac{y_0^2}{2}=ab^2+C \Rightarrow C=\frac{y_0^2}{2}-\frac{ab^2}{2}$ Es decir:

$$\frac{y^2}{2}=\frac{a(x+b)^2}{2}+\frac{y_0^2}{2}-\frac{ab^2}{2} \Rightarrow y^2=ax^2+2ab^2+y_0^2 \Rightarrow y=\sqrt{ax^2+2ab^2+y_0^2}$$

(3) Supóngase que una suma de dinero está colocado a un interés que se acumula continuamente. Si la cantidad es S_0. ¿Cuándo el capital alcanzará la suma $S=2S_0$ si el grado de interés anual es 3%, 4%, 5%?

Solución

Llamemos: S(t) = inversión en cualquier momento ; S(0)= inversión original, K= interés

La descripción matemática es: $\frac{dS(t)}{dt} = KS(t) \Rightarrow S(t) = Ae^{kt}$

determinaremos A, para esto se tiene: para t = 0 $\Rightarrow$ S (0) = A,

luego $S(T) = S(0)e^{kt}$, para un interés del 2%, (k = 0.02),

S (t) = 2S (0) , $2S(0) = S(0)e^{0.02t}$ $\Rightarrow$ ln (2) = 0.02 t

$t = \frac{\ln(2)}{0.02} \Rightarrow t = 34.66$, para un interés del 3%, k = 0.03

$t = \frac{\ln(2)}{0.03} \Rightarrow t = 23.10$, para un interés del 4%, k = 0.04

$t = \frac{\ln(2)}{0.04} \Rightarrow t = 17.33$, para un interés del 5%, k = 0.05

$t = \frac{\ln(2)}{0.05} \Rightarrow t = 32.19$ años

(4) Un cierto hombre tiene una fortuna que aumenta a una velocidad proporcional al cuadrado de su riqueza presente. Si tenía un millón de pesos hace un año, y ahora tiene dos millones. ¿Cuánto tendrá dentro de seis meses?. ¿Dentro de dos años?.

Solución

Sea S (t) = fortuna del hombre. La descripción matemática es:

$S'(t) = KS^2(t)$, que resolviendo se tiene: $-\frac{1}{S(t)} = Kt + C$, encontraremos C.

para t = 0, S (0) = S, luego $C = -\frac{1}{S(0)}$, entonces $-\frac{1}{S(t)} = Kt - \frac{1}{S(0)}$

$$k = \frac{1}{tS(0)} - \frac{1}{tS(t)}. \quad \text{Como} \quad \frac{1}{S(t)} = \frac{1}{S(0)} - kt$$

$$\frac{1}{S(t)} = \frac{1 - kt(S(0))}{S(0)} \Rightarrow S(t) = \frac{S(0)}{1 - ktS(0)}$$

además $S(0) = 1x1000^6$ pesos = cantidad original

S (t) = cantidad actual en t años.

$$\text{Como} \quad K = \frac{1}{tS(0)} - \frac{1}{tS(t)} = \frac{1}{1x10^6} - \frac{1}{2x10^6} = \frac{1}{2}10^{-6}$$

a) A los 6 meses = 0.5 años.

Si hace un año tenía 10^6 pesos, entre seis meses ha transcurrido t =1+0.5 = 1.5 años.

$$S(1.5) = \frac{10^6}{1 - \frac{10^{-6}}{2}.10^6(1.5)} = \frac{10^6}{1 - \frac{3}{4}} = 4.10^6 \Rightarrow S(1.5) = 4´000.000 \text{ de pesos}$$

b) A los 2 años, S (2) = ? para t = 2 años

$$S(2) = \frac{10^6}{1 - \frac{10^{-6}}{2}.10^6.2} = \frac{10^6}{0} = \infty \Rightarrow S(2) = \infty \text{ pesos}$$

5. Un fabricante ha encontrado que el cambio en el costo de distribución D, a medida que aumenta las ventas S, es igual a una constante multiplicada por las ventas, m es otra constante Si D = 0, cuando S = 0. Hallar D como una función de S y diagramar la relación obtenida.

Solución

Sean D = costo de distribución D , S = las ventas

$\frac{dD}{dS}$ = cambio en el costo de distribución D a medida que aumenta las ventas S. Según el problema, la descripción matemática es:

$\frac{dD}{dS} = aS + b$ de donde: $dD = (aS + b)\,dS$ integrando $D = \frac{aS^2}{2} + bS + C$

PROBLEMAS PROPUESTOS.-

(1) La razón del incremento de las ventas S, a medida que crece la gestión de propaganda X es igual a una constante menos las ventas divididas por una constante más la gestión de propaganda. Hallar la relación entre las ventas y gestión de prop..ganda, si $S = S_0$ cuando X = 0 graficar la relación obtenida. **Rpta:** $S = S_0 - \frac{a - S_0 x}{b}$

(2) Supóngase que la tasa de incremento en el costo de ordenar y sostener y, a medida que crece la magnitud de la orden S, es igual a la relación entre la suma de los cuadrados del costo y la magnitud, dividida por el doble producto del costo y el tamaño. Hallar la relación entre el costo de ordenar y sostener y el tamaño de la orden si y = 3 cuando s = 1 graficar la relación obtenida. **Rpta:** $y = (85 + s^2)^{\frac{1}{2}}$

(3) La relación entre el ingreso R y la cantidad demandada X es tal que la tasa de incremento en el ingreso, a medida que aumenta la cantidad demandada, es igual al doble del cubo del ingreso menos el cubo de la cantidad demandada, todo dividido por el triple del producto de la cantidad demandada y el cuadrado del ingreso. Encontrar la relación entre el ingreso y la cantidad demandada si R = 0 cuando X = 10, graficar la relación obtenida. **Rpta:** $R = (10x^2 - x^3)^{\frac{1}{3}}$

(4) La relación entre el costo de fabricación por cada ítem M y el número de clases de ítem fabricados N es tal que la tasa de incremento del costo de fabricación, a medida que aumenta el número de las clases de ítem, es igual a la razón del costo por ítem más el número de clases de ítem dividido por el número de clases de ítem. Hallar la relación entre el costo de fabricación por ítem y el número de clases de ítem fabricados si $N = M_0$ cuando N = 1. **Rpta:** $M = N(M_0 + \ln N)$

(5) La relación entre el costo de operar un almacén de depósito y el número de galones de aceite almacenados en el depósito está dado por $\frac{dy}{dx} = Kx + a$ donde y es el costo mensual de operar el depósito (en dólares) y x es el número de galones de aceite almacenados. Si $y = y_0$ (costo fijo) cuando x = 0, hallar y como función de x, y graficar.

Rpta: $y = \frac{kx^2}{2} + ax + c$

(6) La relación entre la utilidad neta P y el gasto de propaganda x es tal que la tasa de incremento de la utilidad neta a medida que crece el gasto de propaganda, es proporcional a la diferencia entre una constante y la utilidad neta. Hallar la relación entre la utilidad neta y el gasto de propaganda, si $P = P_0$ cuando x = 0 y graficar.

Rpta: $P = a - (a - P_0)e^{-kx}$

(7) La razón del incremento en el costo y a medida que crece el número de unidades fabricados x es igual del doble del cuadrado del costo menos el cuadrado del número de unidades dividido por el producto del costo y el número de unidades. Hallar la relación entre el costo y el número de unidades fabricadas si y = 3 cuando x = 1.

Rpta: $y = \sqrt{8x^4 + x^2}$

(8) La razón de crecimiento del volumen de ventas S, a medida que el precio P decrece. es proporcional al volumen de ventas e inversamente proporcional a la diferencia entre el precio y una constante. Hallar la relación entre el volumen de ventas y el precio, si $S = S_0$ cuando $P = P_0$.

Rpta: $S = S_0(\frac{P_0 - b}{P - b})^a$

(9) La relación entre la utilidad neta P y el gasto de propaganda X es tal que la tasa de incremento de la utilidad neta, a medida que crece el gasto de propaganda es proporcional a la diferencia entre una constante y la utilidad neta. Hallar la relación entre la utilidad neta y el gasto de propaganda, si $P = P_0$ cuando x = 0. **Rpta:** $P = a - (a - P_0)e^{-kx}$

(10) La relación entre el costo promedio "y" y el número de unidades producidas "x" es tal que el cambio en el costo promedio, a medida que crece el número de unidades es igual a la relación del número menos el costo promedio, dividido por el número de unidades. Determinar la relación entre el costo promedio y el número de unidades producidas, si $\bar{y}=\frac{9}{2}$ cuando x = 1, graficar la relación obtenida. **Rpta:** $\bar{y}=\frac{x}{2}+\frac{4}{x}$

(11) El arrendamiento de un apartamento (dos alcobas, muebles "estándar") en un colegio varía con la distancia del apartamento al campus. Supóngase que esta relación está dada por:

$$\frac{dy}{dx}=-(\frac{K}{x}+a),\quad 1\le x\le 10$$

en que "y" es el arrendamiento mensual (en dólares) y "x" es la distancia (en millas), K y a son una constantes, si y = 225 cuando x = 1. Hallar "y" como una función de "x" y diagramar la relación obtenida. **Rpta:** y = 225 + a – ax – K lnx

CAPÍTULO IV

4. ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR.-

En las ecuaciones diferenciales de orden superior consideraremos dos tipos especiales:

1° caso: Las ecuaciones diferenciales de la forma: $\boxed{\frac{d^n y}{dx^n} = f(x)}$ **... (1)**

donde f (x) es una función sólo de x.

La solución de la ecuación (1) se obtiene por integración sucesivas, es decir:

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \int f(x)\,dx + c_1$$

$$\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = \int [\int f(x)\,dx + c_1]dx + c_2$$

.

.

.

$$y = \iint [.... \int f(x)dx + c_1 ....]dx + c_n$$

2° caso: Las ecuaciones diferenciales de la forma: $\boxed{\frac{d^2 y}{dx^2} = g(y)}$ **... (2)**

donde g es una función solo de y.

para obtener la solución de la ecuación (2) se hace del modo siguiente:

$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy}.\frac{dy}{dx} = y'\frac{dy'}{dy}$, pero como

$\frac{d^2y}{dx^2}=g(y)$ entonces $y'\frac{dy'}{dy}=g(y)$, de donde

$y'dy'=g(y)dy$ integrando se tiene: $\int y'dy'=\int g(y)dy+c_1 \Rightarrow \frac{y'^2}{2}\int g(y)dy+c_1$

$y'=\sqrt{2[\int g(y)dy+c_1]}$ separando las variables

$dy=\sqrt{2[\int g(y)dy+c_1]}dx$, de donde $\int\frac{dy}{\sqrt{2[\int g(y)dy+c_1]}}=\int dx+c_2$

en forma similar si se tiene $\frac{d^3y}{dx^3}=g(y)$

se deduce que $\frac{d^3y}{dx^3}=y'[y'\frac{d^2y'}{d^2y}+(\frac{dy'}{dy})^2]$

3° caso: Las ecuaciones diferenciales de la forma. $\boxed{F(x,y^{(k)},\ y^{(k+1)},...,y^{(n)})=0}$ **... (3)**

donde la ecuación (3) no contiene a y, se puede rebajar el orden de la ecuación tomando como nueva función incógnita la derivada de orden inferior de la ecuación dada, ó sea $y^{(k)}=z$. Obteniéndose la ecuación $F(x,z,z',...,z^{(n-k)})=0$

a) Ejemplos.- Resolver las siguientes diferenciales.

1) $\frac{d^3y}{dx^3}=xe^x$

Solución

$$\frac{d^3y}{dx^3}=xe^x \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}=\int xe^x dx+c_1=xe^x-e^x+c_1$$

$$\frac{dy}{dx}=\int(xe^x-e^x+c_1)dx+c_2=xe^x-2e^x+c_1x+c_2$$

$$y=\int(xe^x-2e^x+c_1x+c_2)dx+c_3 \Rightarrow y=xe^x-3e^x+\frac{c_1x^2}{2}+c_2x+c_3$$

2) $\frac{d^2y}{dx^2}+ay=0$

Solución

Como $\frac{d^2y}{dx^2}=y'\frac{dy'}{dy} \Rightarrow y'\frac{dy'}{dy}+ay=0 \Rightarrow y'dy'+ay\,dy=0$, integrando se tiene:

$$\int y'dy'+\int a^2y\,dy=c_1 \Rightarrow \frac{y'^2}{2}+a^2\frac{y^2}{2}=c_1$$

$$y'=\sqrt{2c_1-a^2y^2} \Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{2c_1-a^2y^2}}=dx$$

$$\frac{1}{a}\text{arcsen}\frac{ay}{\sqrt{2c_1}}=x+x_2 \Rightarrow \text{arcsen}(\frac{ay}{\sqrt{2c_1}})=ax+ac_2$$

$$\frac{ay}{\sqrt{2c_1}}=\text{sen}(ax+ac_2) \Rightarrow y=K_1\,\text{sen}\,ax+K_2\cos ax$$

3) $xy''=y'\ln(\frac{y'}{x})$

Solución

$$y'=z \Rightarrow xz'=z\ln(\frac{z}{x}) \Rightarrow z'=\frac{z}{x}\ln\frac{z}{x}$$

es una ecuación homogénea z = ux de donde dz = udx + xdu entonces

$$dz=\frac{z}{x}\ln(\frac{z}{x})dx \Rightarrow \text{u dx + x du = u ln u dx}$$

x du = (u ln y u – u) dx, separando la variable.

$$\frac{du}{u\ln u-u}=\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln(\ln u-1)=\ln cx \Rightarrow \ln u-1=cx \Rightarrow \ln u=1+cx$$

$$u=e^{1-cx} \Rightarrow \frac{z}{x}=e^{1+cx} \Rightarrow z=xe^{1+cx}$$

$$\frac{dy}{dx} = xe^{1+cx} \Rightarrow dy = xe^{1+cx}dx \quad \text{integrando} \quad y = \frac{x}{c}e^{1+cx} - \frac{1}{c^2}e^{1+cx} + k$$

(4) Resolver $xy'(yy''-(y')^2 - y(y')^2) = x^4y^3$

Solución

Sea: $y = e^{\int Z(x)dx} \Rightarrow y' = Z(x)e^{\int Z(x)dx} \wedge y'' = Z'(x)e^{\int Z(x)dx} + (Z(x))^2 e^{\int Z(x)dx}$

Luego: $XZ(x)e^{\int Z(x)dx}[e^{\int Z(x)dx}(z'(x)e^{\int Z(x)dx} + (z(x))^2 e^{\int Z(x)dx}) - (z(x))^2 e^{2\int Z(x)dx}]$

$$-e^{\int Z(x)dx}(z(x))^2 e^{2\int Z(x)dx} = x^4 e^{3\int Z(x)dx}$$

$$e^{3\int Z(x)dx}[xz(x)z'(x) + x(z(x))^3 - x(z(x))^3 - (z(x))^2] = x^4 e^{3\int Z(x)dx}[xz(x)z'(x) - (z(x))^2] = x^4$$

$z'(x) - (\frac{1}{x})z(x) = x^3(z(x))^{-1}$. Ecuación Diferencial de Bernoulli en z con n = -1

$$\Rightarrow z^2 = e^{-2\int \frac{1}{x}dx}[2e^{2\int \frac{1}{x}dx} x^3 dx + c] = x^2(x^2 + c) \Rightarrow z = x\sqrt{x^2 + c}$$

$$\therefore \quad y = e^{\int x\sqrt{x^2+c}dx} = e^{\frac{1}{3}(x^2+c)^{\frac{3}{2}}}$$

(5) $y^2 y''' - 3yy'y'' + 2(y')^3 + \frac{y}{x}(yy'' - (y')^2) = \frac{y^3}{x^2}$

Solución

Sea: $y = e^{\int z(x)dx} \Rightarrow y' = z(x)e^{\int z(x)dx} \wedge y'' = z'(x)e^{\int z(x)dx} + z^2 e^{\int z(x)dx} \wedge$

$$y''' = z''e^{\int z dx} + zz'e^{\int z dx} + 2ze^{\int z dx}z' + z^3 e^{\int z dx}$$

Reemplazando en la Ecuación Diferencial dada:

$$e^{2\int z\,dx}(z''e^{\int z\,dx}+3zz'e^{\int z\,dx}+z^3e^{\int z\,dx})-(3e^{2\int z\,dx})(z'e^{\int z\,dx}+z^2e^{\int z\,dx})+2z^3e^{3\int z\,dx}+$$

$$[x^{-1}e^{\int z\,dx}(e^{\int z\,dx}(z'e^{\int z\,dx}+z^2e^{\int z\,dx}))-z^2e^{2\int z\,dx}]=x^{-2}e^{3\int z\,dx}$$

$$e^{3\int z\,dx}[z''+3zz'+^3-3zz'-3z^3+2z^3+x^{-1}z'+x^{-1}z^2-x^{-1}z^2]=x^{-2}e^{3\int z\,dx} \Rightarrow z''+\frac{1}{x}z'=x^{-2}$$

Sea: $t=z' \Rightarrow t'=z''$

Luego la ecuación diferencial es de la forma: $t'+\frac{1}{x}t=x^{-2}$ ecuación diferencial en t

$$\Rightarrow t=e^{-\int\frac{1}{x}dx}[e^{\int\frac{1}{x}dx}+x^{-2}dx+c]=x^{-1}(\int x^{-1}dx+c)=\frac{\ln x}{x}+\frac{c}{x}$$

$$\Rightarrow z=\int\frac{\ln x}{x}dx+c\int\frac{dx}{x} \qquad \therefore \quad y=e^{\int(\ln^2 x+\ln x)dx}$$

(6) $y=y'\operatorname{tg}x-(y')^2\sec^2 x$

Solución

Sea: $z=\operatorname{sen}x \Rightarrow z'=(\cos x)\frac{dx}{dy}$; $(z'=\frac{dz}{dy})$

$$\Rightarrow y=\frac{1}{x'}(\frac{z}{z'}x')-(\frac{1}{x'})^2(\frac{x'}{z'})^2 \Rightarrow y=\frac{z}{z'}-\frac{1}{(z')^2} \Rightarrow y(z')^2-zz'+1=0$$

Sea: $z'=P \Rightarrow P^2-zp+1=0$ de donde

$$P^2+2yP\frac{dp}{dy}-P\frac{dz}{dy}-z\frac{dp}{dy}=0 \Rightarrow P^2+2yP\frac{dp}{dy}-P^2-z\frac{dp}{dy}=0$$

$$\frac{dp}{dy}(2yP-z)=0 \Rightarrow \frac{dp}{dy}=0 \Rightarrow P=c_1 \Rightarrow z=c_1y+c_2 \qquad \therefore \quad \operatorname{sen}x=c_1y+c_2$$

$\Rightarrow$ en: $yc_1^2-(\operatorname{sen}x)c_1+1=0$ es decir: $c_1^2y-c_1\operatorname{sen}x+1=0$

$$2yP - z = 0 \quad \Rightarrow \quad P = \frac{z}{2y} \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{z} = \frac{dy}{2y}$$ integrando se tiene:

$$\ln z = \frac{1}{2}\ln y + \ln K \quad \Rightarrow \quad z = Ky^{\frac{1}{2}} \qquad \therefore \quad \operatorname{sen}^2 x = K_1 y$$

7) $xyy'' - x(y')^2 - yy' = 0$

Solución

Sea: $y' = yz \quad \Rightarrow \quad y'' = y'z + yz' = yz^2 + yz'$, es decir: $y'' = y(z^2 + z')$

Reemplazando en la ecuación diferencial

$xy^2(z^2 + z') - xy^2z^2 - y^2z = 0$ de donde $xz^2 + xz' - xz^2 - z = 0$

$xz' - z = 0$ de donde $\frac{dz}{z} - \frac{dx}{x} = 0$ integrando $\ln z - \ln x = \ln c_1$ es decir: $\frac{z}{x} = c_1$

Como: $z = \frac{y'}{y} \Rightarrow \frac{y'}{yx} = c_1 \Rightarrow \frac{dy}{y} = c_1 x dx$ integrando se tiene $\ln y = \frac{c_1}{2}x^2 + c_2$

$$y = k_1 e^{k_2 x^2}$$

8) $x^2yy'' = (y - xy')^2$

Solución

Sea: $y' = yz \quad \Rightarrow \quad y'' = y(z^2 + z') \quad \Rightarrow \quad x^2y^2 = (z^2 + z') = [y - xy(z)]^2$

es $y^2[x^2z^2 + z^2 + z] = y^2[1 - xz]^2 \quad \Rightarrow \quad x^2z^2 + x^2z' = 1 + x^2z^2 - 2xz$

$$z' + \frac{2}{x}z = \frac{1}{x^2} \quad \Rightarrow \quad z = e^{-\int \frac{2}{x}dx}\left[\int e^{\int \frac{2}{x}dx}.\frac{1}{x^2}dx + c\right]$$ integrando

$$z = x^2[x + c] \quad \Rightarrow \quad \frac{y'}{y} = x^{-1} + cx^{-2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = (x^{-1} + cx^{-2})dx$$

$\ln y = \ln x + \frac{c_1}{x} + c_2 \quad \Rightarrow \quad y = xke^{\frac{c_1}{x}}$ La solución: $y = c_2 e^{\frac{1}{3}(x^2 + c_1)^{3/2}}$

Observación.- Cuando la ecuación diferencial es homogénea para la función y sus derivadas, la sustitución $y' = yz$ ó $y = e^{\int z\,dx}$ reduce el orden de una ecuación diferencial una unidad.

(9) $4x^2 yy' = 9xy^2 + 6x + 54y^6 + 108y^4 + 72y^2 + 16$

Solución

$$4x^2 yy' = 3x(3y^2 + 2) + 2(3y^2 + 2)^3$$

Sea: $z = 3y^2 + 2 \Rightarrow z' = 6yy' \Rightarrow \Rightarrow \dfrac{2}{3}x^2 z' = 3xz + 2z^3 \Rightarrow z' - \dfrac{9}{2x}z = \dfrac{3}{x^2}z^3$.

Bernoulli en z con: n = 3

$$z^{-2} = e^{2\int -\frac{9}{2x}dx}\left[-2\int e^{-2\int -\frac{9}{2x}dx} \frac{3}{x^2}dx + c\right] = x^{-9}(-6.\frac{x^8}{8} + c) \Rightarrow z^{-2} = -\frac{3}{4}x^{-1} + cx^{-9}$$

ecuación: $(3y^2 + 2)^2 = \dfrac{1}{-\frac{3}{4}x^{-1} + cx^{-9}} \Rightarrow (3y^2 + 2)^2 = \dfrac{4x^9}{-3x^8 + 4c}$

$$\therefore \quad (3y^2 + 2)^2(-3x^8 + 4c) - 4x^9 = 0$$

(10) $xyy'' + x(y')^2 = 2yy'$

Solución

Sea: $y' = yz \Rightarrow y'' = y(z^2 + z') \Rightarrow xy^2(z^2 + z') + xy^2 z^2 = 2y^2 z$

$2xz^2 + xz' - 2z = 0 \Rightarrow z' - \dfrac{2}{x}z = -2z^2$ Bernoulli con n = 2

$\dfrac{dz}{z} - \dfrac{2dx}{x} = 0$, integrando se tiene: $\ln z - 2\ln x = \ln c \Rightarrow z = cx^2$

Pero: $z = \dfrac{y'}{y} \Rightarrow \dfrac{dy}{y} = cx^2 dx$ integrando se tiene: $\ln y = \dfrac{c}{3}x^3 + c_1$ $\quad \therefore \quad y = k_1 e^{k_2 x^3}$

(11) $yy''-2yy'\ln y-y'^2=0$

Solución

Sea: $P=y' \Rightarrow y''=P\dfrac{dp}{dy} \Rightarrow yP\dfrac{dp}{dy}-2yP\ln y-P^2=0$, factorizando se tiene:

$$P(y\frac{dp}{dy}-2\ln y-P)=0 \quad \Rightarrow \quad P=0 \;\Rightarrow\; y=c_1$$

ó $\dfrac{dp}{dy}-\dfrac{1}{y}P=2\ln y$; lineal en P

Luego: $P=e^{\int\frac{dy}{y}}[\int e^{-\int\frac{dy}{y}}.2\ln y\,dy+c_1]=y[\frac{2}{2}\ln^2 y+c_1]$

$\dfrac{dy}{dx}=y\ln^2 y+c_1 y$ integrando $\displaystyle\int\frac{dy}{y\ln^2 y+c_1 y}=dx$

$$\int\frac{dy}{y\ln^2 y+c_1 y}=dx \quad \Rightarrow \quad \operatorname{arctg}(\frac{\ln y}{c_1})=x+c_2 \quad \Rightarrow \quad \ln y=c_1\operatorname{tg}(x+c_2)$$

b. EJERCICIOS PROPUESTOS.

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales.

(1) $\dfrac{d^2x}{dt^2}=t^2$ **Rpta:** $x=\dfrac{t^4}{12}+c_1t+c_2$

(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}=xe^{-x}$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$ **Rpta:** $y=(x+2)e^{-x}+x-1$

(3) $\dfrac{d^4y}{dx^4}=\cos^2 x$, $y(0)=\dfrac{1}{32}$, $y'(0)$, $y''(0)=\dfrac{1}{8}$, $y'''(0)=0$

Rpta: $y=\dfrac{x^4}{48}+\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{\cos 2x}{32}$

④ $\frac{d^3y}{dx^3} = x\,\text{sen}\,x,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=0$ **Rpta:** $y = x\cos x - 3\,\text{sen}\,x + x^2 + 2x$

⑤ $y'' = 2\,\text{sen}\,x\cos^2 x - \text{sen}^3 x$ **Rpta:** $y = \frac{\text{sen}^3 x}{3} + c_1x + c_2$

⑥ $y''' = xe^{-x},\quad y(0)=0,\quad y'(0)=2,\quad y''(0)=2$ **Rpta:** $y = -(x+3)e^{-x} + \frac{3x^2}{2} + 3$

⑦ $y'' = (2y+3) - 2y'^2 = 0$ **Rpta:** $\frac{1}{2}\ln(2y+3) = c_1x + c_2$

⑧ $1 + y'^2 = yy''$ **Rpta:** $y = K\cosh(\frac{x+c}{K})$

⑨ $yy'' - y'^2 = 0,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=2$ **Rpta:** $y = e^{2x}$

⑩ $yy'' - y'^2 = y^2\ln y$ **Rpta:** $\ln y = c_1e^x + c_2e^{-x}$

⑪ $y(1-\ln y)y'' + (1+\ln y)y'^2 = 0$ **Rpta:** $y = e^{\frac{x+c_2}{x+c_1}}$

⑫ $y''(1+y) = y'^2 + y'$ **Rpta:** $\ln[c_1(y+1)-1] = c_1(x+c_2)$

⑬ $y'' = \frac{y'}{\sqrt{y}}$ **Rpta:** $x = \sqrt{y} - \frac{c_1}{2}\ln(2\sqrt{y}+c_1) + c_2$

⑭ $y'' - \frac{y'}{x-1} = x(x-1),\quad y(2)=1,\quad y'(2)=-1$

Rpta: $y = \frac{1}{24}(3x^4 - 4x^3 - 36x^2 + 72x + 8)$

⑮ $(1-x^2)y'' - xy' = 2$ **Rpta:** $y = (\text{arcsen}\,x)^2 + c_1\,\text{arcsen}\,x + c_2$

⑯ $(1+x^2)y'' + 1 + y'^2 = 0$ **Rpta:** $y = (1+\frac{1}{c_1^2})\ln(1+c_1x) - \frac{x}{c_1} + c_2$

(17) $y'''(x-1)-y''=0,\quad y(2)=2,\quad y'(2)=1,\quad y''(2)=1$

Rpta: $y=\frac{1}{6}(x^3-3x^2+6x+4)$

(18) $y^2\cos x(\cos x+2yy')=2y\operatorname{sen}x(\cos x+2yy')y'-4yy'\cos x$ sug: $y^2=z,\quad \operatorname{sen}x=\omega$

(19) $y''-y'^2+yy'^3=0,\ y(0)=1,\ y'(0)=1$ **Rpta:** $y^2-2y-2e^{x-y}=2x-3$

(20) Hallar la ecuación de una curva que satisface a la ecuación diferencial: $yy''=2(y')^2+y^2$ y tenga pendiente $\sqrt{3}$ en el punto $(0,1)$ **Rpta:** $2y=\sec(x+\frac{\pi}{3})$

(21) $(y''+y')e^x+(\cos x+x^2)y'+(2x-\operatorname{sen}x)y=-\operatorname{sen}x+2x$

(22) $2yy''-3y'^2=4y^2$

(23) $xy'(yy''-y'^2)-yy'^2=x^4y^3$

(24) $y^2y'''-3yy'y''+2y'^3+\frac{x}{y}(yy''-y'^2)=\frac{y^3}{x^2}$

(25) $\frac{d^3y}{dx^3}=x+\operatorname{sen}x$

(26) $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{a+bx}{x^2}$

(27) $x\frac{d^2y}{dx^2}=1+x^2$

(28) $y'''=x\ln x,\quad y(1)=y'(1)=y''(1)=0$

(29) $y'''=x+\cos x$

(30) $y'''=\frac{x}{(x+2)^5},\quad y(1)=y'(1)=y''(1)=0$

(31) $y''=ae^y$

(32) $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{a}{y^3}$

(33) $y^3,\quad y''=-1,\quad y(1)=1,\quad y'(1)=0$

(34) $y''=e^{2y},\quad y(0)=0,\quad y'(0)=1$

(35) $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{3}{2}y^2,\quad y'(1)=y(1)=1$

(36) $2\frac{d^2y}{dx^2}=e^y,\quad y'(0)=-1,\quad y(0)=0$

(37) $y''=-\frac{1}{2y^3}$

38) $y''y^3 = 1, \quad y = 1, \quad y' = 1 \text{ para } x = \frac{1}{2}$

39) $yy'' - y'^2 = \frac{yy'}{1+x}$

40) $y'' = \operatorname{sen} y \cos y, \quad y(0) = \frac{\pi}{2}, \quad y'(0) = -1$

41) $yy'' - y'^2 = y^2 y'$

42) $y''' = xe^{-x^2}, \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$

43) $(y'+2)e^{-y}y'' = 1$

44) $y'' - y'^2 + yy'^3 = 0$

45) $y = y' \operatorname{tg} x - y'^2 \sec x$

46) $x^2 y''^2 - x^2 y' y''' - y'^2 = 0$

47) $(x^2 + y^2)y'' = (1 + y'^2)(xy' - y)$

48) $a^2 y''^2 = 1 + y'^2, \quad \pm(x + c_2) = a \ln[\frac{y + c_1 + \sqrt{(y + c_1)^2 - a^2}}{a}]$ ó $y + c_1 = \pm a \cosh(\frac{x + c_2}{2})$

49) $\frac{d^2y}{dx^2} = \sec^2 y . \operatorname{tg} y, \quad y' = -1, \quad x = \ln 2, \quad y = \frac{\pi}{4}$

50) $\cos^3 y \frac{d^2y}{dx^2} = \operatorname{sen} y, \quad y' = \sqrt{2}, \quad y = 0, \quad x = 0$

CAPÍTULO V

5. ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE ORDEN n

Las ecuaciones diferenciales lineales de orden n son de la forma siguiente:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\dots+a_0(x)y=R(x) \qquad \dots(1)$$

donde $a_0,a_1,a_2,\dots,a_n$ y R son funciones solo de x ó constante.

La ecuación diferencial (1) se puede escribir en la forma:

$$F(x,y',y'',\dots,y^{(n)})=0 \qquad \dots(2)$$

La ecuación (2) nos indica que están relacionadas, la variable independiente x, la variable dependiente y, y las derivadas $y',y'',\dots,y^{(n)}$

Si en la ecuación (1) la función R(x) = 0, se obtiene:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\dots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=0 \qquad \dots(3)$$

A la ecuación diferencial (3) se denomina ecuación diferencial lineal homogénea.

Si en la ecuación (1), la función R (x) ≠ 0, la ecuación diferencial (1) se denomina ecuación diferencial lineal no homogénea.

Si y_1,y_2 son soluciones de la ecuación diferencial (3) y si c_1 y c_2 son constantes arbitrarias, entonces $y=c_1y_1+c_2y_2$ es una solución de la ecuación (3).

Como y_1, y_2 son soluciones de la ecuación (3) entonces:

$$a_n(x)y_1^{(n)}+a_{n-1}(x)y_1^{(n-1)}+...+\ a_1(x)y'_1+\ a_0(x)y_1=0$$

$$a_n(x)y_2^{(n)}+a_{n-1}(x)y_2^{(n-1)}+...+\ a_1(x)y'_2+\ a_0(x)y_2=0$$

sumando y agrupando se tiene:

$$a_n(x)(c_1y_1^{(n)}+c_2y_2^{(n)})+a_{n-1}(x)(c_1y_1^{(n-1)}+c_2y_2^{(n-1)})+a_0(x)(c_1y_1+c_2y_2)=0$$

$$a_n(x)(c_1y_1+c_2y_2)^{(n)}+a_{n-1}(x)(c_1y_1+c_2y_2)^{(n-1)}+a_0(x)(c_1y_1+c_2y_2)=0$$

entonces $c_1y_1+c_2y_2$ es una solución de la ecuación diferencial (3)

En general si, y_i, i = 1, 2,..., n son soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea de (3) y si c_i, i = 1, 2,..., n son constantes, entonces $y=c_1y_1+c_2y_2+...+c_ny_n$, es una solución de la ecuación diferencial (3).

5.1 INDEPENDENCIA LINEAL DE LAS FUNCIONES.-

Consideremos un sistema finito de n funciones: $f_1(x), f_2(x),...., f_n(x)$ definidas en algún intervalo (a,b), diremos que estas funciones son linealmente independientes si existen $\alpha_1,\alpha_2,....\alpha_n$ escalares tal que:

$$\alpha_1f_1(x)+\alpha_2f_2(x)+...+\alpha_nf_n(x)=0 \text{ entonces } \alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_n=0$$

Si alguno de los $\alpha_1,\alpha_2,....,\alpha_n$ es diferente de cero, entonces diremos que $f_1,f_2,....,f_n$ son funciones linealmente dependientes.

Ejemplos: Averiguar si las funciones dadas son linealmente independientes.

1) $f_1(x)=x$, $f_2(x)=2x$, $f_3(x)=x^2$

Solución

Por determinar si $\alpha_1f_1(x)+\alpha_2f_2(x)+\alpha_3f_3(x)=0$ entonces $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$.

Luego $\alpha_1x+\alpha_2 2x+\alpha_3x^2=0$, derivando

$\alpha_1 + +2\alpha_2 + 2\alpha_3 x = 0$, derivando nuevamente.

$$2\alpha_3 = 0 \Rightarrow \alpha_3 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = -2\alpha_2$$

Como $\alpha_3 = 0$ y $\alpha_1 = -2\alpha_2 \Rightarrow f_1(x)$, $f_2(x)$ y $f_3(x)$ no son linealmente independientes.

5.2. EL WRONSKIANO.-

Suponiendo que las n funciones: $f_1(x), f_2(x),..., f_n(x)$ son diferenciables cada uno al menos (n – 1) veces en un intervalo a < x < b. entonces de la ecuación $c_1 f_1 + c_2 f_2 + ... + c_n f_n = 0$ por diferenciación sucesiva se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} c_1 f_1 + c_2 f_2 + ... + c_n f_n = 0 \\ c_1 f'_1 + c_2 f'_2 + ... + c_n f'_n = 0 \\ c_1 f''_1 + c_2 f''_2 + ... + c_n f''_n = 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_1 f_1^{(n-1)} + c_2 f_2^{(n-1)} + ... + c_n f_n^{(n-1)} = 0 \end{array}\right| \quad ... (\alpha)$$

Consideraremos a (α) como un sistema de ecuaciones en $c_1, c_2, ..., c_n$

El sistema de ecuaciones (α) no tiene solución, excepto cuando todos los $c_1, c_2, ..., c_n$ son ceros.

Si el determinante de los coeficientes de $c_1, c_2, ..., c_n$ no es nulo es decir:

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & ... & f_n \\ f'_1 & f'_2 & ... & f'_n \\ f''_1 & f''_2 & ... & f''_n \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & ... & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = 0,$$ entonces diremos que las funciones:

$f_1(x), f_2(x),..., f_n(x)$ son linealmente independientes, al determinante de los coeficientes del sistema (α) denotaremos por W, es decir:

$$W = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f'_1 & f'_2 & \cdots & f'_n \\ f''_1 & f''_2 & \cdots & f''_n \\ . & & & \\ . & & & \\ . & & & \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Llamaremos el Wronskiano de las funciones: $f_1(x), f_2(x),..., f_n(x)$

Ejemplo N°1: Demostrar que las funciones: e^x, e^{2x}, e^{3x} son linealmente independiente.

Solución

$$W = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & e^{3x} \\ e^x & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ e^x & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix} = 2e^{6x}, \ \forall x \in R$$

entonces las funciones e^x, e^{2x}, e^{3x}, son linealmente independiente.

Ejemplo N°2: Demostrar que las funciones $e^x, \cos x, \operatorname{sen} x$ son linealmente independiente.

Solución

$$W = \begin{vmatrix} e^x & \cos x & \operatorname{sen} x \\ e^x & -\operatorname{sen} x & \cos x \\ e^x & -\cos x & -\operatorname{sen} x \end{vmatrix} = 2e^{2x} \neq 0, \ \forall x \in R$$

Entonces las funciones $e^x, \cos x, \operatorname{sen} x$ son linealmente independiente.

Ejemplo N°3: Hallar el Wronskiano de las funciones: $f_1(x) = x$, $f_2(x) = \dfrac{1}{x}$

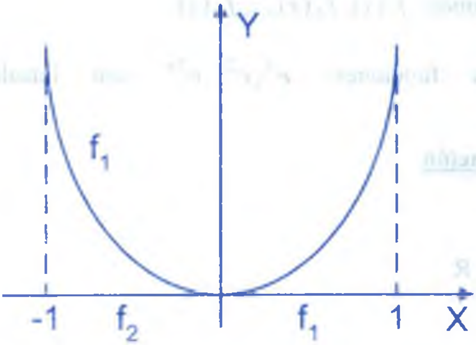
Solución

$$W = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f'_1(x) & f'_2(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & \frac{1}{x} \\ 1 & -\frac{1}{x} \end{vmatrix} = -\frac{1}{x} - \frac{1}{x} = -\frac{2}{x} \quad \text{para } x \neq 0$$

Luego $W = -\frac{2}{x}$; para $x \neq 0$

OBSERVACIÓN

Que el Wronskiano $W \neq 0$, para que las funciones sean linealmente independiente es una condición necesaria pero no suficiente, por ejemplo las funciones:



$$f_1(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad -1 < x < 0 \\ 0 & si \quad 0 < x < 1 \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} 0 & si \quad -1 < x < 0 \\ x^2 & si \quad 0 < x < 1 \end{cases}$$

son linealmente independiente y su Wranskiano es cero.

Este sistema de funciones es linealmente independiente puesto que para

$\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, se cumple la identidad: $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 = 0$. En efecto:

Si $x \in [-1,0] \Rightarrow \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) = 0$

$x^2 + \alpha_2 .0 = 0 \Rightarrow \alpha_1 .x^2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$

Si $x \in [0,1] \Rightarrow \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) = 0$

$\alpha_1 .0 + \alpha_2 .x^2 = 0 \Rightarrow \alpha_2 .x^2 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0$. Luego $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$

Consideremos el Wronskiano en [-1,0] y en [0,1]

$$W = \begin{vmatrix} x^2 & 0 \\ 2x & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad W = \begin{vmatrix} 0 & x^2 \\ 0 & 2x \end{vmatrix} = 0. \quad \text{Por lo tanto: } W[f_1, f_2] = 0 \quad \text{en } [-1, 1]$$

EJERCICIOS PROPUESTOS.-

I. Obténgase el Wronskiano de las siguientes funciones indicadas:

1) $1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$ para n > 1 **Rpta:** W = 0! 1! ... (n - 1)!

2) e^{mx}, e^{nx}, donde m y n son enteros y m ≠ n **Rpta:** $W = (n-m)e^{(m+n)x}$

3) senhx, coshx **Rpta:** W = -1

4) x, xe^x **Rpta:** $W = x^2e^x$

5) $e^x \operatorname{sen} x, e^x \cos x$ **Rpta:** $W = -e^{2x}$

6) $\cos^2 x,\ 1+\cos 2x$ **Rpta:** W = 0

7) e^{-x}, xe^{-x} **Rpta:** $W = e^{-2x}$

8) $e^x, 2e^x, e^{-x}$ **Rpta:** W = 0

9) 2, cos x, cos 2x **Rpta:** $W = -8\operatorname{sen}^3 x$

10) $e^{-3x}\operatorname{sen} 2x, e^{-3x}\cos 2x$ **Rpta:** $W = -2e^{-6x}$

II. Mediante el Wronskiano, demostrar que cada uno de los siguientes conjuntos son linealmente independiente.

1) $1, e^{-x}, 2e^{2x}$

2) ln x, x ln x

3) $x^{\frac{1}{2}}, x^{\frac{1}{3}}$

4) $e^{ax}\operatorname{sen} bx, e^{ax}\cos bx,\ b \neq 0$

5) $1, \operatorname{sen}^2 x, 1-\cos x$

6) $\ln\frac{x-1}{x+1}, 1$

7) $\sqrt{1-x^2},\ x$

8) $\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos^2 x$

9) x^2, x^4, x^8

10) e^x, x^{ex}, x^2e^x

III. Demostrar que las funciones dadas son linealmente independiente y su Wronskiano es cero, construir las gráficas de estas funciones.

① $f_1(x)=\begin{cases}0 & si \quad 0<x<2\\ (x-2)^2 & si \quad 2<x<4\end{cases}$, $f_2(x)=\begin{cases}(x-2)^2 & si \quad 0<x<2\\ 0 & si \quad 2<x<4\end{cases}$

② $f_1(x)=\begin{cases}x^3 & si \quad -2<x<0\\ 0 & si \quad 0<x<1\end{cases}$, $f_2(x)=\begin{cases}0 & si \quad -2<x<0\\ x^2 & si \quad 0<x<1\end{cases}$

③ $f_1(x)=x^2,\ f_2(x)=x\,|\,x\,|,\ -1<x<1$

IV.

① Demostrar que el Wronskiano de las funciones: $e^{k_1x}e^{k_2x}\ldots e^{k_nk}$ es

$$e^{(k_1+k_2+\ldots+k_n)x}\begin{vmatrix}1 & 1 & \ldots & 1\\ k_1 & k_2 & \ldots & k_n\\ k_1^2 & k_2^2 & \ldots & k_n^2\\ \vdots & & & \\ k_1^{n-1} & k_2^{n-1} & \ldots & k_n^{n-1}\end{vmatrix}$$

② Demostrar que las funciones: $e^{2x}, xe^{2x}, e^{2x}\operatorname{sen}x, e^{2x}\cos x$ son linealmente independiente.

③ Demostrar que el Wronskiano de las funciones: $x^{\alpha}, x^{\beta}, x^{\gamma}$ es:

$$x^{\alpha+\beta+\gamma-3}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ \alpha & \beta & \gamma\\ \alpha(\alpha-1) & \beta(\beta-1) & \gamma(\gamma-1)\end{vmatrix}$$

5.3. ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES HOMOGÉNEAS DE COEFICIENTES CONSTANTES.-

Las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de coeficientes constantes son de la forma:

$$a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0 \qquad \dots (1)$$

donde $a_0, a_1, \dots, a_n$ son constantes.

Para resolver estas ecuaciones diferenciales, primero consideramos el polinomio característico de la forma siguiente:

$$P(r) = a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_1 r + a_0 = 0$$

Como el polinomio característico P(r) = 0 es de grado n entonces se puede obtener las siguientes raíces $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$ los cuales pueden ser, reales distintos, reales de multiplicidad o números complejos.

Luego para dar la solución de la ecuación (1) consideremos los siguientes casos:

1° Caso Cuando las raíces de la ecuación polinómica P(r) = 0 son reales y distintos:

$r_1 < r_2 < \dots < r_n$ entonces el sistema fundamental de soluciones de la ecuación (1) tiene la forma siguiente $e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, \dots, e^{r_n x}$, y la solución general de la ecuación diferencial lineal homogénea (1) es:

$$y_g = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \dots + c_n e^{r_n x}$$

2° Caso Cuando las raíces de la ecuación polinómica P(r) = 0 alguna de las raíces son de multiplicidad, consideremos $r_1 = r_2 = \dots = r_k = r$ y donde r es la raíz de multiplicidad k, y n − k son las demás raíces y distintas.

Luego el sistema fundamental de soluciones tiene la siguiente forma:

$$e^{rx}, xe^{rx}, x^2 e^{rx}, \dots, x^{k-1} e^{rx}, e^{r_{k+1} x}, \dots, e^{r_n x}$$

y la solución general de la ecuación diferencial (1) es:

$$\boxed{y_g = c_1e^{rx} + c_2xe^{rx} + c_3x^2e^{rx} + \dots + c_kx^{k-1}e^{rx} + c_{k+1}e^{r_{k+1}x} + \dots + c_ne^{r_nx}}$$

3°Caso Cuando las raíces de la ecuación polinómica P(r) = 0 alguna de estas raíces son complejas: $r_1 = \alpha_1 + i\beta_1$, $r_2 = \alpha_1 - i\beta_1$, $r_3 = \alpha_2 + i\beta_2$, $r_4 = \alpha_2 - i\beta_2$

y las demás raíces supongamos que sean reales y distintas.

Luego el sistema fundamental de soluciones son de la forma siguiente:

$$e^{\alpha_1x}\cos\beta_1x, e^{\alpha_1x}\operatorname{sen}\beta_1x, e^{\alpha_2x}\cos\beta_2x, e^{\alpha_2x}\operatorname{sen}\beta_2x, e^{r_5x}, \dots, e^{r_nx}$$

y la solución general de la ecuación diferencial (1) es:

$$\boxed{y_g = c_1e^{\alpha_1x}\cos\beta_1x + c_2e^{\alpha_1x}\operatorname{sen}\beta_1x + c_3e^{\alpha_2x}\cos\beta_2x + c_4e^{\alpha_2x}\operatorname{sen}\beta_2x + c_5e^{r_5x} + \dots + c_ne^{r_nx}}$$

a. Ejemplos: Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales

1) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - y = 0$

Solución

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial $\dfrac{d^2y}{dx^2} - y = 0$ es

$P(r) = r^2 - 1 = 0$, y sus raíces $r_1 = 1$, $r_2 = -1$, de donde el sistema fundamental de soluciones es: e^{r_1x}, e^{r_2x} es decir e^x, e^{-x} y la solución general es: $y_g = c_1e^x + c_2e^{-x}$

2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$

Solución

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial.

$\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$ es $P(r) = r^2 - 3r + 2 = 0$

de donde $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, luego el sistema fundamental de soluciones es: e^x, e^{2x} y la solución general $y_g = c_1e^x + c_2e^{2x}$

③ $y''-4y'+4y=0$

Solución

El polinomio característico a la ecuación diferencial:

$y''-4y'+4y=0$ es $P(r)=r^2-4r+4=0$ de donde r = 2 de multiplicidad 2.

Luego el sistema fundamental de soluciones es: e^{2x} , xe^{2x} y la solución general es:

$$y_g=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}$$

④ $y''+y=0$

Solución

El polinomio característico de la ecuación diferencial:

$y''+y=0$ es $P(r)=r^2+1=0$ de donde: $r_1=i$, $r_2=-i$.

Luego el sistema fundamental de soluciones es: cos x, sen x, y la solución general es:

$$y_g=c_1\cos x+c_2\operatorname{sen} x$$

⑤ $y''+y'+y=0$

Solución

El polinomio característico a la ecuación diferencial.

$y''+y'+y=0$, es $P(r)=r^2+r+1=0$, de donde $r_1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $r_2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

Luego el sistema de solución es: $e^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x$, $e^{-\frac{x}{2}}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x$ y la solución general es:

$$y_g=c_1e^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_2e^{-\frac{x}{2}}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

⑥ $y'''-2y''-y'+2y=0$

Solución

El polinomio característico a la ecuación diferencial es:

$P(r) = r^3 - 2r^2 - r + 2 = 0$, de donde: $r_1 = -1$, $r_2 = 1$, $r_3 = 2$, luego

el sistema fundamental de soluciones es: e^{-x}, e^x, e^{2x} y la solución general es:

$y_g = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + c_3 e^{2x}$

(7) $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$

Solución

El polinomio característico de la ecuación diferencial es:

$P(r) = r^3 + 3r^2 + 3r + 1 = 0$, de donde $r_1 = -1$ de multiplicidad 3, luego el sistema fundamental de soluciones es: $e^{-x}, xe^{-x}, x^2 e^{-x}$ y la solución general es:

$$y_g = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + c_3 x^2 e^{-x}$$

(8) $y''' - y'' + y' - y = 0$

Solución

El polinomio característico de la ecuación diferencial es:

$P(r) = r^3 - r^2 + r - 1 = 0$, de donde: $r_1 = 1$, $r_2 = i$, $r_3 = -i$, luego el sistema fundamental de soluciones es: e^x, cos x, sen x, y la solución general es:

$y_g = c_1 e^x + c_2 \cos x + c_3 \operatorname{sen} x$

(9) $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$

Solución

El polinomio característico a la ecuación diferencial es:

$P(r) = r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = 0$, de donde: $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, $r_3 = 3$, luego el sistema fundamental de soluciones es: e^x, e^{2x}, e^{3x} y la solución general es:

$y_g = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}$

(10) $y^{iv} - y = 0$

Solución

El polinomio característico de la ecuación diferencial es:

$P(r) = r^4 - 1 = 0$, de donde: $r_1 = -1$, $r_2 = 1$, $r_3 = i$, $r_4 = -i$, luego el sistema fundamental de soluciones es: e^{-x}, e^x, cos x, sen x y la solución general es:

$$y_g = c_1e^{-x} + c_2e^x + c_3\cos x + c_4 \operatorname{sen} x$$

(11) $y^{iv} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = 0$

Solución

El polinomio característico de la ecuación diferencial es:

$P(r) = r^4 - 4r^3 + 6r^2 - 4r + 1 = 0$, de donde: r = 1 de multiplicidad 4, luego el sistema fundamental de soluciones es: e^x, xe^x, x^2e^x, x^3e^x y la solución general es:

$$y_g = c_1e^x + c_2xe^x + c_3x^2e^x + c_4x^3e^x$$

(12) $y^{iv} - 8y'' + 16y = 0$

Solución

El polinomio característico a la ecuación diferencial es:

$P(r) = r^4 - 8r^2 + 16 = 0$, de donde: $(r^2 - 4)^2 = 0$

$r_1 = -2$ de multiplicidad 2 ; $r_2 = 2$ de multiplicidad 2

Luego el sistema fundamental de soluciones es: e^{-2x}, xe^{-2x}, e^{2x}, xe^{2x} y la solución general es: $y_g = c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x} + c_3e^{2x} + c_4xe^{2x}$

(13) $y^{iv} + 2y'' + y = 0$

Solución

El polinomio característico a la ecuación diferencial es:

$P(r)=r^4+2r^2+1=0$, de donde: $r_1=i$ de multiplicidad 2 y $r_2=-i$ de multiplicidad 2

Luego el sistema fundamental de soluciones es: cos x, xcosx, senx, xsenx y la solución general es: $y_g=c_1\cos x+c_2x\cos x+c_3\,\text{sen}\,x+c_4x\,\text{sen}\,x$

14) $$\frac{d^6y}{dx^6}+6\frac{d^4y}{dx^4}+9\frac{d^2y}{dx^2}+4y=0$$

Solución

El polinomio característico de la ecuación diferencial es:

$P(r)=r^6+6r^4+9r^2+4=0$, de donde:

$r_1=i$ de multiplicidad 2 ; $r_2=-i$ de multiplicidad 2 ; $r_3=2i$, $r_4=-2i$

De acuerdo al tercer caso, el sistema fundamental de soluciones es: cos x, sen x, x cos x, x sen x, cos 2x, sen 2x y la solución general es:

$$y_g=c_1\cos x+c_2\,\text{sen}\,x+c_3x\cos x+c_4x\,\text{sen}\,x+c_5\cos 2x+c_6\,\text{sen}\,2x$$

b) EJERCICIOS PROPUESTOS.-

1) $\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}+2y=0$ **Rpta:** $y=c_1e^x+c_2e^{2x}$

2) $\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}+4y=0$ **Rpta:** $y=e^{2x}(c_1x+c_2)$

3) $\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$ **Rpta:** $y=c_1\cos x+c_2\,\text{sen}\,x$

4) $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+y=0$ **Rpta:** $y=e^{-\frac{x}{2}}[c_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_2\,\text{sen}\,\frac{\sqrt{3}}{2}x]$

5) $\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+2y=0$ **Rpta:** $y=e^{-x}(c_1\cos x+c_2\,\text{sen}\,x)$

(6) $y'''-2y''-y'+2y=0$ **Rpta:** $y=c_1e^{x}+c_2e^{-x}+c_3e^{2x}$

(7) $y'''+3y''-3y'+y=0$ **Rpta:** $e^{-x}(c_1+c_2x+c_3x^2)=y$

(8) $y'''-y''+y'-y=0$ **Rpta:** $y=c_1e^{x}+c_2\cos x+c_3\operatorname{sen}x$

(8) $y'''-y=0$ **Rpta:** $y=c_1e^{x}+e^{-\frac{x}{2}}[c_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_3\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}]$

(10) $y^{iv}-y=0$ **Rpta:** $y=c_1e^{x}+c_2e^{-x}+c_3\cos x+c_4\operatorname{sen}x$

(11) $y^{iv}-4y'''+6y''-4y'+y=0$ **Rpta:** $y=e^{x}(c_1+c_2x+c_3x^2+c_4x^3)$

(12) $6y'''-y''-6y'+y=0$ **Rpta:** $y=c_1e^{x}+c_2e^{-x}+c_3e^{x/6}$

(13) $y'''-y''-3y'-y=0$ **Rpta:** $y=c_1e^{-x}+c_2e^{(1+\sqrt{2})x}+c_3e^{(1-\sqrt{2})x}$

(14) $y^{vi}-y=0$

Rpta: $y=c_1e^{x}+c_2e^{-x}+e^{\frac{x}{2}}[c_3\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_4\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x]+e^{-\frac{x}{2}}[c_5\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_6\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x]$

(15) $\dfrac{d^3y}{dx^3}-2\dfrac{d^2y}{dx^2}-3\dfrac{dy}{dx}=0$ **Rpta:** $y=c_1+c_2e^{-x}+c_3e^{3x}$

(16) $\dfrac{d^3y}{dx^3}+4\dfrac{d^2y}{dx^2}+4\dfrac{dy}{dx}=0$ **Rpta:** $y=c_1+(c_2+c_3x)e^{-2x}$

(17) $\dfrac{d^4y}{dx^4}=y$ **Rpta:** $y=c_1e^{x}+c_2e^{-x}+c_3\cos x+c_4\operatorname{sen}x$

(18) $\dfrac{d^4y}{dx^4}+2\dfrac{d^2y}{dx^2}+y=0$ **Rpta:** $y=(c_1+c_2x)\cos x+(c_3+c_4x)\operatorname{sen}x$

(19) $\dfrac{d^4y}{dx^4}+3\dfrac{d^2y}{dx^2}-4y=0$ **Rpta:** $y=c_1e^{x}+c_2e^{-x}+c_3\cos 2x+c_4\operatorname{sen}2x$

(20) $\dfrac{d^4y}{dx^4}-2\dfrac{d^3y}{dx^3}+\dfrac{d^2y}{dx^2}=0$ **Rpta:** $y=c_1+c_2x+(c_3+c_4x)e^x$

(21) $2\dfrac{d^3y}{dx^3}-\dfrac{d^2y}{dx^2}-2\dfrac{dy}{dx}+y=0$ **Rpta:** $y=c_1e^x+c_2e^{-x}+c_3e^{\frac{x}{2}}$

(22) $2\dfrac{d^3y}{dx^3}-7\dfrac{dy}{dx}+2y=0$ **Rpta:** $y=c_1e^{2x}+c_2e^{(-1+\frac{\sqrt{2}}{2})x}+c_3e^{(-1-\frac{\sqrt{2}}{2})x}$

(23) $\dfrac{d^4y}{dx^4}-14\dfrac{d^2y}{dx^2}+y=0$ **Rpta:** $y=c_1e^{(2+\sqrt{3})x}+c_2e^{(2-\sqrt{3})x}+c_3e^{(-2+\sqrt{3})x}+c_4e^{(-2-\sqrt{3})x}$

(24) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+k^2y=0$ **Rpta:** y = A coskx + B senkx

(25) $\dfrac{d^2y}{dx^2}-2\dfrac{dy}{dx}+4y=0$ **Rpta:** $y=e^x(A\cos\sqrt{3}x+B\,\text{sen}\,\sqrt{3}x)$

(26) $4\dfrac{d^4y}{dx^4}+5\dfrac{d^2y}{dx^2}-9y=0$ **Rpta:** $y=c_1e^x+c_2e^{-x}+c_3\cos\dfrac{3}{2}x+c_4\,\text{sen}\,\dfrac{3}{2}x$

(27) $\dfrac{d^4y}{dx^4}+4y=0$ **Rpta:** $y=e^x(c_1\cos x+c_2\,\text{sen}\,x)+e^{-x}(c_3\cos x+c_4\,\text{sen}\,x)$

(28) $\dfrac{d^4y}{dx^4}-2\dfrac{d^3y}{dx^3}+\dfrac{d^2y}{dx^2}+2\dfrac{dy}{dx}-2y=0$

Rpta: $y=c_1e^x+c_2e^{-x}+e^x(c_3\cos x+c_4\,\text{sen}\,x)$

(29) $\dfrac{d^5y}{dx^5}+2\dfrac{d^3y}{dx^3}+10\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{dy}{dx}+10y=0$

Rpta: $y=c_1e^{-2x}+c_2\cos x+c_3\,\text{sen}\,x+e^x(c_4\cos 2x+c_5\,\text{sen}\,2x)$

(30) $2y''-3y'+y=0$ **Rpta:** $y=c_1e^{\frac{x}{2}}+c_2e^x$

(31) $y''-9y'+9y=0$ **Rpta:** $y=c_1e^{\frac{(9+3\sqrt{5})x}{2}}+c_2e^{\frac{(9-3\sqrt{5})x}{2}}$

(32) $y''+y'-2y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=1$ **Rpta:** $y=e^x$

(33) $y''-6y'+9y=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=2$ **Rpta:** $y=2xe^{3x}$

(34) $y''+8y'-9y=0$, $y(1)=1$, $y'(1)=0$ **Rpta:** $y=\frac{1}{10}e^{-9(x-1)}+\frac{9}{10}e^{x-1}$

(35) $y''+4y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=1$ **Rpta:** $y=\frac{1}{2}\operatorname{sen}2x$

(36) $y''+4y'+5y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$ **Rpta:** $y=e^{-2x}\cos x+2e^{-2x}\operatorname{sen}x$

(37) $y'''-y''-y'+y=0$ **Rpta:** $y=c_1e^x+c_2xe^x+c_3e^{-x}$

(38) $y^{iv}-5y''+4y=0$ **Rpta:** $y=c_1e^x+c_2e^{-x}+c_3e^{2x}+c_4e^{-2x}$

(39) $y^{vi}-3y^{iv}+3y''-y=0$ **Rpta:** $y=c_1e^x+c_2xe^x+c_3x^2e^x+c_4e^{-x}+c_5xe^{-x}+c_6x^2e^{-x}$

(40) $y^v-3y^{iv}+3y'''-3y''+2y'=0$ **Rpta:** $y=c_1+c_2e^x+c_3e^{2x}+c_4\cos x+c_5\operatorname{sen}x$

(41) $y^{iv}-8y'=0$ **Rpta:** $y=c_1+c_2e^{2x}+e^{-x}(c_3\cos\sqrt{3}x+c_4\operatorname{sen}\sqrt{3}x)$

(42) $y^{viii}+8y^{iv}+16y=0$

Rpta: $y=e^x[(c_1+c_2x)\cos x+(c_3+c_4x)\operatorname{sen}]+e^{-x}[(c_5+c_6x)\cos x+(c_7+c_8x)\operatorname{sen}x]$

(43) $y^{iv}+6y'''+9y''=0$ **Rpta:** $y=c_1+c_2x+(c_3+c_4x)e^{-3x}$

(44) $4y'''-3y'+y=0$ **Rpta:** $y=c_1e^{-x}+(c_2+c_3x)e^{\frac{x}{2}}$

(45) $4y^{iv}-4y'''-23y''+12y'+36y=0$ **Rpta:** $y=(c_1+c_2x)e^{2x}+(c_3+c_4x)e^{-\frac{3x}{2}}$

(46) $y^v-y'''=0$ **Rpta:** $y=c_1+c_2x+c_3x^2+c_4e^x-c_5e^{-x}$

(47) $y^{iv} - 2y''' - 3y'' + 4y' + 4y = 0$ **Rpta:** $y = (c_1 + c_2 x)e^{-x} + (c_3 + c_4 x)e^{2x}$

(48) $y^{iv} + 2y''' - 6y'' - 16y' - 8y = 0$ **Rpta:** $y = (c_1 + c_2 x)e^{-2x} + c_3^{(1+\sqrt{3})x} + c_4 e^{(1-\sqrt{3})x}$

(49) $y''' - 3y' - 2y = 0$ cuando x = 0, y = 0, $y' = 9$, $y'' = 0$ **Rpta:** $y = 2e^{2x} + (3x - 2)e^{-x}$

(50) $y^{iv} + 3y''' + 2y'' = 0$ cuando x = 0, y = 0, $y' = 4$, $y'' = -6$ **Rpta:** $y = 2(x + e^{-x} - e^{-2x})$

(51) $y''' + y'' - y' - y = 0$, cuando x = 0, y = 1, cuando x = 2, y = 0 y también cuando x → ∞, y → 0. **Rpta:** $y = \frac{1}{2}(2 - x)e^{-x}$

(52) $y'' - 6y' + 25y = 0$ **Rpta:** $y = e^{3x}(c_1 \cos 4x + c_2 \operatorname{sen} 4x)$

(53) $y'' - y = 0$, cuando x = 0, $y = y_0$, $y' = 0$ **Rpta:** $y = y_0 \cosh x$

(54) $y'' + y = 0$, cuando x = 0, $y = y_0$, $y' = 0$ **Rpta:** $y = y_0 \cos x$

(55) $y''' + 5y'' + 17y' + 13y = 0$, cuando x = 0, y = 0, $y' = 1$, $y'' = 6$

Rpta: $y = e^{-x} - e^{-2x} \cos 3x$

(56) $\dfrac{d^2x}{dt^2} + k^2 x = 0$, k real cuando t = 0, x = 0, y $\dfrac{dx}{dt} = v_0$ **Rpta:** $x = (\dfrac{V_0}{K}) \operatorname{sen} kt$

(57) $y''' + y'' + 4y' + 4y = 0$, cuando x = 0, y = 0, $y' = -1$, $y'' = 5$ **Rpta:** $y = e^{-x} - \cos 2$

(58) $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 2b\dfrac{dx}{dt} + k^2 x = 0$, $k > b > 0$ cuando t = 0, x = 0 y $\dfrac{dx}{dt} = v_0$

Rpta: $x = (\dfrac{v_0}{a})e - bt \operatorname{sen} at$ donde: $a = \sqrt{k^2 - b^2}$

(59) $y''' + 6y'' + 12y' + 8y = 0$, cuando x = 0, y = 1, $y' = -2$, $y'' = 2$

(60) $y^{iv} + 2y''' + 4y'' - 2y' - 5y = 0$ **Rpta:** $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + c_3 e^{-x} \cos 2x + c_4 e^{-x} \operatorname{sen} 2x$

(61) $y'''-2y''+2y'=0$ **Rpta:** $y=c_1+c_2e^x\cos x+c_3e^x\operatorname{sen}x$

(62) $y^{viii}+8y^{iv}+16y=0$

Rpta: $y=e^x[(c_1+c_2x)\cos x+(c_3+c_4x)\operatorname{sen}x]+e^{-x}[(c_5+c_6x)\cos x+(c_7+c_8x)\operatorname{sen}x]$

(63) $y^{iv}-4y'''+4y''=0$ **Rpta:** $y=c_1+c_2x+c_3e^{2x}+c_4xe^{2x}$

(64) $y^{iv}-y''=0$ **Rpta:** $y=c_1+c_2x+c_3e^x+c_4e^{-x}+c_5\cos x+c_6\operatorname{sen}x$

(65) $y^{iv}-8y=0$ **Rpta:** $y=c_1+c_2e^{2x}+e^{-x}[c_3\cos\sqrt{3}x+c_4\operatorname{sen}\sqrt{3}x]$

(66) $2y'''-4y''-2y'+4y=0$ **Rpta:** $y=c_1e^x+c_2e^{2x}+c_3e^{-x}$

(67) $y'''-3y'-y=0$ **Rpta:** $y=c_1e^x+c_2xe^x+c_3x^2e^x$

(68) $y^{iv}-5y''+4y=0$ **Rpta:** $y=c_1e^x+c_2e^{-x}+c_3e^{2x}+c_4e^{-2x}$

(69) $y''-3y'''+3y''-y=0$ **Rpta:** $y=c_1e^x+c_2xe^x+c_3x^2e^x+c_4e^{-x}+c_5xe^{-x}+c_6x^2e^{-x}$

(70) $y^{vi}+y=0$

Rpta: $y=c_1\cos x+c_2\operatorname{sen}x+e^{\sqrt{3}/2x}(c_3\cos\frac{x}{2}+c_4\operatorname{sen}\frac{x}{2})+e^{-\sqrt{3}/2x}(c_5\cos\frac{x}{2}+c_6\operatorname{sen}\frac{x}{2})$

(71) $y^{v}-3y^{iv}+3y'''-3y''+2y'=0$ **Rpta:** $y=c_1+c_2e^x+c_3e^x+c_4e^{-x}+c_5\cos x+c_6\operatorname{sen}x$

(72) $y'''+y'=0$, $y''(0)=1$, $y''(0)=1$, y(0) = 0 **Rpta:** y = 2 - 2 cos x + sen x

(73) $y'''-y''+y'-y=0$ **Rpta:** $y=A\cos x+B\operatorname{sen}x+ce^x$

(74) $y'''+y'=0$ **Rpta:** y = A cos x + B sen x + c

(75) $y'''-y''-y'+y=0$ **Rpta:** $y=(c_1+c_2x)e^x+c_3e^{-x}$

(76) $y'''-6y''+12y'-8y=0$ **Rpta:** $y=(c_1+c_2x+c_3x^2)e^{2x}$

(77) $y'''-6y''+11y'-6y=0$ **Rpta:** $y=c_1e^{x}+c_2e^{2x}+c_3e^{3x}$

(78) $y''-12y'+35y=0$ **Rpta:** $y=c_1e^{5x}+c_2e^{7x}$

(79) $y^{iv}-8y'''+42y''-104y'+169y=0$ **Rpta:** $y=e^{2x}[(c_1+c_2x)\operatorname{sen}3x+(c_3+c_4x)\cos 3x]$

(80) $9y''-30y'+25y=0$ **Rpta:** $y=(c_1+c_2x)e^{\frac{5x}{3}}$

(81) $y^{iv}-6y'''+7y''+6y'-8y=0$ **Rpta:** $y=c_1e^{x}+c_2e^{-x}+c_3e^{2x}+c_4e^{4x}$

(82) $y''-4y'+2y=0$ **Rpta:** $y=e^{\frac{2x}{3}}[c_1\operatorname{sen}\frac{\sqrt{2}}{3}x+c_2\cos\frac{\sqrt{2}}{3}x]$

(83) $y'''-2y''+3y'-6y=0$ **Rpta:** $y=c_1e^{2x}+c_2\operatorname{sen}\sqrt{3}x+c_3\cos\sqrt{3}x$

(84) $y^{iv}-4y'''+5y''-4y'+4y=0$ **Rpta:** $y=(c_1+c_2x)e^{2x}+c_3\operatorname{sen}x+c_4\cos x$

(85) $y'''+9y'=0$ **Rpta:** $y=c_1\cos 3x+c_2\operatorname{sen}3x+c_3$

(86) $y^{iv}-13y''+36y=0$ **Rpta:** $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}+c_3e^{3x}+c_4e^{-3x}$

(87) $y^{iv}+2y'''+y''=0$ **Rpta:** $y=c_1+c_2x+c_3e^{-x}+c_4xe^{-x}$

(88) $y^{iv}=8y''-16y$ **Rpta:** $y=(c_1+c_2x)e^{2x}+(c_4+c_3x)e^{-2x}$

(89) $y'''-13y'-12y=0$ **Rpta:** $y=c_1e^{-x}+c_3e^{-3x}+c_3e^{4x}$

(90) $y^{iv}+y=0$ **Rpta:** $y=e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}(c_1\cos\frac{x}{\sqrt{2}}+c_2\operatorname{sen}\frac{x}{\sqrt{2}})+e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}(c_3\cos\frac{x}{\sqrt{2}}+c_4\operatorname{sen}\frac{x}{\sqrt{2}})$

(91) $64y^{VIII}+48y^{VI}+12y^{IV}+y''=0$

Rpta: $y=(c_1+c_2x+c_3x^2)\cos\frac{x}{2}+(c_4+c_5x+c_6x^2)\operatorname{sen}\frac{x}{2}+c_7x+c_8$

92) $y^{(n)}+\frac{n}{1}y^{(n-1)}+\frac{n(n-1)}{1.2}y^{(n-2)}+...+\frac{n}{1}y'+y=0$

Rpta: $y=e^{-x}(c_1+c_2x+c_3x^2+...+c_nx^{n-1})$

93) $y'''=y'$, $y(0)=2$, $y'(0)=0$, $y''(0)=-1$ **Rpta:** $y=1+\cos x$

94) $4\frac{d^2x}{dt^2}-20\frac{dx}{dt}+25x=0$ **Rpta:** $x=(c_1+c_2t)e^{2.5t}$

95) $y^{vi}+8y^{iv}+16y''=0$ **Rpta:** $y=c_1+c_2x+(c_3+c_4x)\cos 2x+(c_5+c_6x)\operatorname{sen}2x$

96) $y^{iv}+4y'''+8y'+4y=0$ **Rpta:** $y=e^{-x}[(c_1+c_2x)\cos x+(c_3+c_4x)\operatorname{sen}x]$

97) $y^{iv}+4y'''+5y''+4y'+y=0$

Rpta: $y=c_1e^{\frac{-3+\sqrt{5}}{2}x}+c_2e^{\frac{-3-\sqrt{5}}{2}x}+c_3e^{-x/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_4e^{-x/2}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x$

98) $y^{vi}+4y^{iv}+4y''=0$ **Rpta:** $y=c_1+c_2x+(c_3+c_4x)\cos\sqrt{2}x+(c_5+c_6x)\operatorname{sen}\sqrt{2}x$

99) $y'''-2y''+4y'-8y=0$ **Rpta:** $y=c_1e^{2x}+c_2\cos 2x+c_3\operatorname{sen}2x$

100) $y'''+2y''=0$, cuando $x=0$, $y=-3$, $y'=0$, $y''=12$

5.4. ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES NO HOMOGÉNEAS DE COEFICIENTES CONSTANTES.-

Las ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas con coeficientes constantes son de la forma siguiente:

$$\boxed{a_n\frac{d^ny}{dx^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+...+a_1\frac{dy}{dx}+a_0y=R(x)} \quad ...(1)$$

donde $a_n, a_{n-1},..., a_0$ son constantes reales.

Para obtener la solución general de las ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas de coeficientes constantes, primero se determina la solución general de la ecuación diferencial lineal homogénea Y_g, y después se busca una solución particular cualquiera de la ecuación diferencial no homogénea Y_p, y la solución general de la ecuación diferencial lineal no homogénea es igual a la suma de la solución general de la ecuación diferencial homogénea más la solución particular de la ecuación diferencial no homogénea, es decir:

$$\boxed{Y = Y_g + Y_p}$$

Es decir que el problema se reduce a encontrar una solución particular Y_p de la ecuación diferencial lineal no homogénea. Cuando la función R(x) de la ecuación (1) tiene la forma:

$$R(x) = e^{\alpha x}[(P_n(x)\cos(\beta x) + Q_m(x)\operatorname{sen}(\beta x)]$$

donde $P_n(x)$ y $Q_m(x)$ son polinomios de grado n y m respectivamente, entonces la solución particular Y_p de la ecuación (1) es de la forma:

$$\boxed{Y_p = x^s e^{\alpha x}[\tilde{P}_K(x)\cos(\beta x) + \tilde{Q}_K(x)\operatorname{sen}(\beta x)]}$$

donde K = máx {n,m} y s es el orden de multiplicidad de la raíz r = $\alpha \pm i\beta$; $\tilde{P}_K(x)$ y $\tilde{Q}_K(x)$ son polinomios en x de grado K, de coeficientes indeterminados, para determinar la solución particular de la ecuación diferencial no homogénea.

Consideremos los siguientes casos:

1° Caso: Cuando el segundo miembro de la ecuación diferencial (1) es la función $R(x) = P_n(x)$ entonces:

a) Si r = 0, no es raíz de la ecuación característica P(r) = 0, entonces la solución particular es:

$$\boxed{Y_p = \tilde{P}_n(x)}$$

b) Si r = 0, es raíz de la ecuación característica P(r) = 0 entonces la solución particular es:

$$\boxed{Y_p = x^s \tilde{P}_n(x)}$$

donde s es la multiplicidad de r = 0

2° Caso: Cuando el segundo miembro de la ecuación diferencial (1) es la función $R(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$ donde α es real, entonces:

a) Si r = α no es raíz de la ecuación característica P(r) = 0 entonces la solución particular es:

$$\boxed{Y_p = e^{\alpha x} \tilde{P}_n(x)}$$

b) Si r = α es raíz de la ecuación característica P(r) = 0, entonces la solución particular es:

$$\boxed{Y_p = x^s e^{\alpha x} \tilde{P}_n(x)}$$

donde s es la multiplicidad de r = α

3° Caso: Cuando el segundo miembro de la ecuación diferencial (1) es la función $R(x) = P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\,\text{sen}\,\beta x$ donde $P_n(x)$ y $Q_m(x)$ son funciones polinómicas de grado n y m respectivamente, entonces:

a) Si r = ± iβ no son raíces de la ecuación característica P(r) = 0 entonces la solución particular de la ecuación diferencial es:

$$\boxed{Y_p = \tilde{P}_K(x)\cos(\beta x) + \tilde{Q}_K(x)\,\text{sen}(\beta x)}$$

donde K = máx {n,m}

b) Si r = ± iβ es raíz de la ecuación característica P(r) = 0, entonces la solución particular de la ecuación diferencial es:

$$\boxed{Y_p = x^s\left[(\tilde{P}_K(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_K(x)\,\text{sen}\,\beta x)\right]}$$

donde K = máx {n,m} y s es la multiplicidad de r = ± iβ

4° Caso: Cuando el segundo miembro de la ecuación diferencial (1) es la función $R(x) = e^{\alpha x}[P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\operatorname{sen}\beta x]$ donde $P_n(x)$ y $Q_m(x)$ son funciones polinómicas de grado n y m respectivamente, entonces:

a) Si $r = \alpha \pm i\beta$ no es raíz de la ecuación característica $P(r) = 0$ entonces la solución particular de la ecuación diferencial es:

$$\boxed{Y_p = e^{\alpha x}[(\tilde{P}_K(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_K(x)\operatorname{sen}\beta x)]}$$

donde K = máx {n,m}

b) Si $r = \alpha \pm i\beta$ es raíz de la ecuación característica $P(r) = 0$ entonces la solución particular de la ecuación diferencial es.

$$\boxed{Y_p = x^s e^{\alpha x}[(\tilde{P}_K(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_K(x)\operatorname{sen}\beta x)]}$$

donde K = máx {n,m} y s es la multiplicidad de $r = \alpha \pm i\beta$

a) **Ejemplos:** Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales.

1) $$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} = 3$$

Solución

Sea $P(r) = r^2 + 3r = 0$ la ecuación característica donde $r_1 = 0$, $r_2 = -3$, luego la solución general de la ecuación diferencial homogénea o solución complementaria es:

$$Y_g = c_1 + c_2\, e^{-3x}$$

para la solución particular se obtiene de acuerdo a la parte b) del 1° Caso, es decir: $Y_p = Ax$

Como $Y_p = Ax \Rightarrow Y_p' = A \Rightarrow Y_p'' = 0$, reemplazando en la ecuación

de donde $0 + 3A = 3 \Rightarrow A = 1$, por lo tanto $Y_p = x$ y la solución general de la ecuación diferencial no homogénea es: $Y = Y_g + Y_p$

es decir: $y = c_1 + c_2 e^{-3x} + x$

(2) $\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}-15y=-(15x^2+4x+13)$

Solución

Sea $P(r)=r^2-2r-15=0$ el polinomio característico, de donde: $r_1=-3$ y $r_2=5$, luego la solución complementaria o solución general de la ecuación diferencial homogénea es: $y_g=c_1e^{-3x}+c_2e^{5x}$

Para la solución particular de la ecuación diferencial no homogénea, se obtiene de acuerdo a la primera parte del primer caso es decir: $y_p=Ax^2+Bx+C$

de donde $y_p'=2Ax+B \Rightarrow y_p''=2A$, que reemplazando en la ecuación diferencial dada se tiene:

$$2A-4Ax-2B-15Ax^2-15Bx-15C=-(15x^2+4x+13)$$

$$-15Ax^2-(4A+15B)x+2A-2B-15C=-(15x^2+4x+13)$$

de donde por identidad se tiene:

$$\begin{cases}-15A=-15\\-(4A+15B)=-4\\2A-2B-15C=-13\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}A=1\\B=0\\C=1\end{cases}. \quad \text{Luego: } y_p=x^2+1$$

por lo tanto la solución general de la ecuación es: $y=y_g+y_p$

es decir: $y=c_1e^{-3x}+c_2e^{5x}+x^2+1$

(3) $\frac{d^4y}{dx^4}-3\frac{d^2y}{dx^2}-4y=-4x^5+390x$

Solución

El polinomio característico es: $P(r)=r^4-3r^2-4=0$ de donde:

$r_1=-2$, $r_2=2$, $r_3=i$ y $r_4=-i$

y la solución complementaria o solución general de la ecuación homogénea es:

$y_g = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{2x} + c_3 \cos x + c_4 \operatorname{sen} x$

Para la solución particular se debe tener en cuenta la primera parte del 1° Caso de donde se tiene: $y_p = Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F$, de donde derivando y reemplazando en la ecuación diferencial dada se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} -4A = -4 \\ -4B = 0 \\ -60A - 4C = 0 \\ -36B - 4D = 0 \\ 120A - 18C - 4E = 390 \\ 24B - 12D - 4F = 0 \end{array}\right\} \text{ de donde } \left\{\begin{array}{l} A = 1 \\ C = -15 \\ B = D = E = F = 0 \end{array}\right.$$

Luego $y_p = x^5 - 15x^3$ y la solución general es:

$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{2x} + c_3 \cos x + c_4 \operatorname{sen} x + x^5 - 15x^3$

4) $y'' + 3y' = e^x$

Solución

El polinomio característico es $P(r) = r^2 + 3r = 0$, de donde $r_1 = 0$, $r_2 = -3$, luego la solución complementaria de la ecuación diferencial homogénea es:

$y_g = c_1 + c_2 e^{-3x}$ y de acuerdo a la parte a, del segundo caso la solución particular es:

$y_p = Ae^x$ de donde $y_p' = Ae^x \Rightarrow y_p'' = Ae^x$

como $y'' + 3y' = e^x \Rightarrow Ae^x + 3Ae^x = e^x \Rightarrow A = \frac{1}{4}$

Luego la solución particular $y_p = \frac{e^x}{4}$ y la solución general de la ecuación no homogénea es: $y = y_g + y_p$ es decir: $y = c_1 + c_2 e^{-3x} + \frac{e^x}{4}$

(5) $y''-4y'=xe^{4x}$

Solución

El polinomio característico es: $P(r)=r^2-4r=0$ de donde $r_1=0$, $r_2=4$, luego la solución general de la ecuación diferencial homogénea es: $y_g=c_1+c_2e^{4x}$ y de acuerdo a la parte b, del segundo caso se tiene la solución particular de la forma:

$$y_p=x(Ax+B)e^{4x}$$

Es decir: $y_p=(Ax^2+Bx)e^{4x}$ y la solución general de la ecuación diferencial no homogénea es: $y=y_g+y_p$

(6) $y''+y=\text{sen}\,x-\cos x$

Solución

El polinomio característico es: $P(r)=r^2+1=0$, de donde: $r_1=i$, $r_2=-i$. Luego la solución complementaria de la ecuación diferencial homogénea es: $y_g=c_1\cos x+c_2\,\text{sen}\,x$

La solución particular de acuerdo a la parte b, del 3er. caso es de la forma:

$$y_p=x(A\cos x+B\,\text{sen}\,x)$$

Es decir: $y_p=Ax\cos x+Bx\,\text{sen}\,x$ y la solución general de la ecuación diferencial no homogénea es: $y=y_g+y_p$ es decir: $y=c_1\cos x+c_2\,\text{sen}\,x+Ax\cos x+Bx\,\text{sen}\,x$

(7) $y''-4y'+8y=e^{2x}(\text{sen}\,2x-\cos 2x)$

Solución

El polinomio característico es: $P(r)=r^2-4r+8=0$, de donde:

$r_1=2+2i$, $r_2=2-2i$, luego la solución general de la ecuación diferencial homogénea es: $y_p=xe^{2x}(A\cos 2x+B\,\text{sen}\,2x)$ de donde $y=y_g+y_p$

(8) $y''-y'-2y=e^x+e^{-2x}$

Solución

El polinomio característico es: $P(r)=r^2-r-2=0$, de donde: $r_1=-1$, $r_2=2$

Luego la solución general de la ecuación diferencial homogénea es:

$y_g=c_1e^{-x}+c_2e^{2x}$ y de acuerdo a la parte a, del 2do. caso la solución particular es de la forma: $y_p=Ae^x+Be^{-2x}$

(9) $y'''-4y'=xe^{2x}+\operatorname{sen}x+x^2$

Solución

El polinomio característico es: $P(r)=r^3-4r=0$, de donde: $r_1=0$, $r_2=-2$, $r_3=-2$, luego la solución general de la ecuación diferencial homogénea es: $y_g=c_1+c_2e^{-2x}+c_3e^{2x}$ y de acuerdo al 1er y 2do. y 3er. caso la solución particular es de la forma:

$$y_p=x(Ax+B)e^{2x}+C\cos x+D\operatorname{sen}x+x(Ex^2+Kx+G)$$

$$y_p'=2(Ax^2+Bx)e^{2x}+(2Ax+B)e^{2x}-C\operatorname{sen}x+D\cos x+3Ex^2+2Fx+G$$

$$y_p'''=8(Ax^2+Bx)e^{2x}+12(2Ax+B)e^{2x}+12Ae^{2x}+C\operatorname{sen}x-D\cos x+6E$$

reemplazando en la ecuación diferencial e igualando coeficientes se tiene:

12A + 8B = 0	- 5D = 0	6E - 4G = 0
16A = 1	- 12E = 1	
5C = 1	- 8F = 0	

de donde: $A=\frac{1}{16}$, $B=\frac{3}{32}$, $G=\frac{1}{5}$, $D=F=0$, $E=-\frac{1}{12}$, $G=-\frac{1}{8}$, Es decir:

$$y_p=\frac{e^{2x}}{32}(2x^2-3x)+\frac{\cos x}{5}-\frac{x^3}{12}-\frac{x}{8}$$

Por lo tanto la solución general de la ecuación diferencial no homogénea es: $y=y_g+y_p$

(10) $y''+2y'+2y=e^{-x}\cos x+xe^{-x}$

<u>**Solución**</u>

El polinomio característico es: $P(r)=r^2+2r+2=0$ de donde $r_1=-1+i$, $r_2=-1-i$, luego la solución general de la ecuación diferencial homogénea es:

$y_g=e^{-x}(c_1\cos x+c_2\operatorname{sen} x)$ y de acuerdo al 2do. y 4to. caso la solución particular es:

$$y_p=xe^{-x}(A\cos x+B\operatorname{sen} x)+(Cx+D)e^{-x}$$

derivando y reemplazando en la ecuación diferencial e igualando coeficientes se tiene que: $A=0,\ B=\frac{1}{2},\ C=1,\ D=0$ es decir: $y_p=\frac{x}{2}e^{-x}\operatorname{sen} x+xe^{-x}$ y la solución general de la ecuación diferencial no homogénea es: $y=y_g+y_p$

b. EJERCICIOS PROPUESTOS.

I.- Resolver las ecuaciones diferenciales siguientes:

(1) $\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}=x^2$ **Rpta:** $y=c_1+c_2e^x-\frac{x^3}{3}-x^2-2x$

(2) $\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}-5y=5x$ **Rpta:** $y=c_1e^{-x}+c_2e^{5x}-x+\frac{4}{5}$

(3) $\frac{d^3y}{dx^3}-\frac{dy}{dx}=x+1$ **Rpta:** $y=c_1+c_2e^x-c_3e^{-x}-\frac{x^2}{2}-x$

(4) $\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}+4y=4(x-1)$ **Rpta:** $y=e^{2x}(c_1x+c_2)+x$

(5) $\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+2y=2(x+1)^2$ **Rpta:** $y=e^{-x}(c_1\cos x+c_2\operatorname{sen} x)+x^2$

(6) $y'''+y''+y'+y=x^2+2x-2$ **Rpta:** $y=c_1e^{-x}+c_2\cos x+c_3\operatorname{sen} x+x^2-4$

(7) $y^{iv}+4y''=8(6x^2+5)$ **Rpta:** $y=c_1x+c_2+c_3\cos 2x+c_4\operatorname{sen} 2x+x^2(x^2+2)$

(8) $y'''-3y''+3y'-y=(2+x)(2-x)$ **Rpta:** $y=e^x(c_1x^2+c_2x+c_3)+x^2+6x+8$

(9) $2y''-9y'+4y=18x-4x^2$ **Rpta:** $y=c_1e^{\frac{x}{2}}+c_2e^{4x}+1-x^2$

(10) $y^{iv}-2y''+y=x^2-5$ **Rpta:** $y=e^x(c_1x+c_2)+e^{-x}(c_3x+c_4)+x^2-1$

(11) $y^{iv}-3y''+2y'=6x(x-3)$ **Rpta:** $y=c_1+e^x(c_2x+c_3)+c_4e^{-2x}+x^3$

(12) $\dfrac{d^2y}{dx^2}-2\dfrac{dy}{dx}+5y=25x^2+12$ **Rpta:** $y=e^x(c_1\cos 2x+c_2\operatorname{sen} 2x)+2+4x+5x^2$

(13) $\dfrac{d^2y}{dx^2}-2\dfrac{dy}{dx}=12x-10$ **Rpta:** $y=c_1+c_2e^{2x}+2x-x^2$

(14) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{dy}{dx}-2y=2x,\ \ y(0)=0,\ \ y'(0)=1$ **Rpta:** $y=e^x-\dfrac{e^{-2x}}{2}-x-\dfrac{1}{2}$

(15) $y'''+4y'=x\ ,\ \ y(0)=y'(0)=0\ ,\ \ y''(0)=1$ **Rpta:** $y=\dfrac{3}{16}(1-\cos 2x)+x^2$

(16) $y^{iv}+2y''+y=3x+4\ ,\ \ y(0)=y'(0)=0\ ,\ \ y''(0)=y'''(0)=1$

Rpta: $y=(x-4)\cos x-(\dfrac{3}{2}x+4)\operatorname{sen} x+3x+4$

(17) $y^{iv}+y'''=x$ **Rpta:** $y=c_1+c_2x+c_3x^2+c_4e^{-x}+e^{\frac{x}{2}}(c_5\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+c_6\operatorname{sen}\dfrac{\sqrt{3}}{2}x)+\dfrac{x^4}{24}$

(18) $y''+2y'+3y=9x$ **Rpta:** $y=c_1e^{-x}\cos\sqrt{2}x+c_2e^{-x}\operatorname{sen}\sqrt{2}x+3x-2$

(19) $y''+y'-2y=14x+2x-2x^2$ **Rpta:** $y=c_1e^x+c_2e^{-2x}+x^2-6$

(20) $y''+y=x^2+2\ ,\ \ y(0)=y'(0)=2$ **Rpta:** $y=x^2+2\operatorname{sen} x$

(21) $y'' + y' + y = x^4 + 4x^3 + 12x^2$ **Rpta:** $y = c_1 e^{-x/2} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2 e^{-x/2} \operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x + x^4$

(22) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 2x^2 - 3x - 17$ **Rpta:** $y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2)e^x - 2x^2 - 9x + 2$

(23) $y'' - 6y' + 9y = 2x^2 - x + 3$ **Rpta:** $y = (c_1 + c_2 x)e^{3x} + \frac{2}{9}x^2 + \frac{5}{27}x + \frac{11}{27}$

(24) $y' + 4y' - 5y = 1$ **Rpta:** $y = c_1 e^x + c_2 e^{-5x} - 0.2$

(25) $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 2x + 3$ **Rpta:** $y = (c_1 + c_2 x)e^x + c_3 e^{2x} - x - 4$

(26) $y^v + y''' = x^2 - 1$ **Rpta:** $y = \frac{x^5}{60} - \frac{x^3}{2} + c_1 x^2 + c_2 x + c_3 + c_4 \cos x + c_5 \operatorname{sen} x$

(27) $y''' - y' = 3(2 - x)$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = 1$ **Rpta:** $y = e^x + x^3$

(28) $y''' - y' = x$ **Rpta:** $c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x} - \frac{x^2}{2} = y$

(29) $y'' - 2y' + y = -2$ **Rpta:** $y = (c_1 + c_2 x)e^{-x} - 2$

(30) $y'' + 9y - 9 = 0$ **Rpta:** $y = c_1 \operatorname{sen} 3x + c_2 \cos 3x + 1$

(31) $y''' + y'' = 1$ **Rpta:** $y = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x} + \frac{x^2}{2}$

(32) $5y''' - 7y'' - 3 = 0$ **Rpta:** $y = c_1 + c_2 x + c_3 e^{\frac{7x}{5}} - \frac{3x^2}{14}$

(33) $y^{iv} - 6y''' + 6 = 0$ **Rpta:** $y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 e^{6x} + \frac{x^3}{6}$

(34) $3y^{iv} + y''' = 2$ **Rpta:** $y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 e^{-\frac{x}{3}} + \frac{x^3}{3}$

(35) $y^{iv} - 2y''' - 2y' + y = 1$ **Rpta:** $y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + (c_3 + c_4 x)e^x - 1$

(36) $y''+2y'+2y=1+x$ **Rpta:** $y=e^{-x}(c_1 \operatorname{sen} x+c_2\cos x)+\frac{x}{2}$

(37) $7y''-y'=14x$ **Rpta:** $y=c_1+c_2e^{\frac{x}{7}}-7x^2-98x$

(38) $y'''-y''+y'=x^2+x$ **Rpta:** $y=c_1e^{\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_2e^{\frac{x}{2}}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+x$

(39) $y''-4y'+4y=x^2$ **Rpta:** $y=(c_1+c_2x)e^{2x}+\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}+\frac{3}{8}$

(40) $y''+8y'=8x$ **Rpta:** $y=c_1+c_2e^{-8x}+\frac{x^2}{2}-\frac{x}{8}$

(41) $y''-2y'+y=x^3$ **Rpta:** $y=(c_1+c_2x)e^{x}+x^3+6x^2+18x+24$

(42) $y^{IV}+y''=x^2+x$ **Rpta:** $y=c_1+c_2x+c_3\cos x+c_4\operatorname{sen} x+\frac{x^4}{12}+\frac{x^3}{6}-x^2$

(43) $y''-6y'+9y=x^2-x+3,\ \ y(0)=\frac{4}{3},\ \ y'(0)=\frac{1}{27}$ **Rpta:** $y=(1-3x)e^{3x}+\frac{x^2}{9}+\frac{x}{27}+\frac{1}{3}$

(44) $y'''-y=2x,\ \ y(0)=y'(0)=0,\ \ y''(0)=2$ **Rpta:** $y=-\frac{4}{\sqrt{3}}e^{-\frac{x}{2}}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x+2x$

(45) $y''-4y'+4y=x^2$ **Rpta:** $y=(c_1+c_2x)e^{2x}+\frac{1}{8}(2x^2+4x+3)$

(46) $y''-y'+y=x^3+6$ **Rpta:** $y=e^{\frac{x}{2}}(c_1\cos x\frac{\sqrt{3}}{2}+c_2\operatorname{sen} x\frac{\sqrt{3}}{2})+x^3+3x^2$

(47) $y''-y=2-x^2$, y(0) = 2, $y'(0)=0$

(48) $y''+6y'+10y=x^4+2x^2+2$

(49) $y'''+3y''+3y'+y=x^4+4x^3+10x^2+20x+1$

II.- Hallar la solución general de las ecuaciones diferenciales:

1. $y'' - 7y' + 12y = -e^{4x}$ **Rpta:** $y = c_1e^{3x} + c_2e^{4x} - xe^{4x}$

2. $y'' - 2y' + y = 2e^{x}$ **Rpta:** $y = e^{x}(c_1 + c_2x + x^2)$

3. $y'' = xe^{x} + y$ **Rpta:** $c_1e^{x} + c_2e^{-x} + \dfrac{(x^2 - x)e^{x}}{4}$

4. $y'' - 4y' + 4y = xe^{2x}$ **Rpta:** $y = (c_1 + c_2x + \dfrac{x^3}{6})e^{2x}$

5. $y'' - 6y' + 9y = e^{x}$ **Rpta:** $y = (c_1 + c_2x)e^{3x} + \dfrac{e^{x}}{4}$

6. $y'' - 3y' - 4y = 30e^{x}$ **Rpta:** $y = c_1e^{4x} + c_2e^{-x} - 5e^{x}$

7. $y'' - 3y' - 4y = 30e^{4x}$ **Rpta:** $y = (c_1 + 6x)e^{4x} + c_2e^{-x}$

8. $y'' - y = 8xe^{x}$ **Rpta:** $y = c_1e^{-x} + e^{x}(c_2 - 2x + 2x^2)$

9. $y^{iv} - y = e^{-x}$ **Rpta:** $y = c_1e^{x} + (c_2 - \dfrac{x}{4})e^{-x} - c_3\cos x + c_4 \operatorname{sen} x$

10. $y'' + y = 10e^{2x}$ cuando x = 0, y = 0 $\wedge$ $y' = 0$ **Rpta:** $y = 2(e^{2x} - \cos x - 2\operatorname{sen} x)$

11. $y'' + 3y' - 10y = 6e^{4x}$ **Rpta:** $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-5x} + \dfrac{e^{4x}}{3}$

12. $y'' + 10y' + 25y = 14e^{-5x}$ **Rpta:** $y = c_1e^{-5x} + c_2e^{-5x} + 7x^2e^{-5x}$

13. $y'' - y' - 6y = 20e^{-2x}$ **Rpta:** $y = c_1e^{3x} + c_2e^{-2x} - 4xe^{-2x}$

14. $2y'' - 4y' - 6y = 3e^{2x}$ **Rpta:** $y = c_1e^{3x} + c_2e^{-x} - \dfrac{e^{2x}}{2}$

15. $2y'' + y' - y = 2e^{x}$ **Rpta:** $y = c_1e^{-x} + c_2e^{\frac{x}{2}} + e^{x}$

(16) $y''+a^2y=e^x$ **Rpta:** $y=c_1\cos ax+c_2\,\text{sen}\,ax+\dfrac{e^x}{a^2+1}$

(17) $y''+4y'+2y=xe^{-2x}$ **Rpta:** $y=y_g-\dfrac{x}{2}e^{-2x}$

(18) $6y''+2y'-y=7x(x+1)e^x$ **Rpta:** $y=y_g+(x^2-3x+\dfrac{30}{7})e^x$

(19) $y'''-2y''+10y'=3xe^x$ **Rpta:** $y=y_g+\dfrac{x-1}{3}e^x$

(20) $y''-y'+\dfrac{y}{4}=xe^{\frac{x}{2}}$ **Rpta:** $y=c_1e^{\frac{x}{2}}+c_2e^{\frac{x}{2}}+y_p$

(21) $y''-y'=6x^5e^x$ **Rpta:** $y=c_1+(x^6-6x^5+30x^4-102x^3+360x^2-720x+c_2)e^x$

(22) $y''-y=2e^x$ **Rpta:** $y=c_1e^{-x}+c_2e^x+xe^x$

(23) $y''-4y'+3y=4e^{3x}$ **Rpta:** $y=c_1e^{3x}+c_2e^x+2xe^{3x}$

(24) $y''+2y'+y=e^{-2x}$ **Rpta:** $y=(c_1+c_2x)e^{-x}+e^{-2x}$

(25) $3y^{iv}+8y'''+6y''=(x^3-6x^2+12x-24)e^{-x}$

Rpta: $y=c_1+c_2x+e^{-\frac{4}{3}x}[c_3\,\text{sen}\dfrac{\sqrt{2}}{3}+c_4\cos\dfrac{\sqrt{2}}{3}x]+(x^3-6x^2+12x)e^{-x}$

(26) $\dfrac{d^2y}{dx^2}-2\dfrac{dy}{dx}+y=2e^{2x}$ **Rpta:** $y=(c_1+mc^2x)e^x+2e^{2x}$

(27) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+2\dfrac{dy}{dx}=3xe^x$ **Rpta:** $y=c_1+c_2e^{-2x}+xe^x-\dfrac{4}{3}e^x$

(28) $y''-2ky'+k^2y=e^x$, k ≠ 1 **Rpta:** $y=(c_1+c_2x)e^{kx}+\dfrac{e^x}{(k-1)^2}$

(29) $y''-4y'+3y=9e^{-3x}$ **Rpta:** $y=c_1e^{-3x}+c_2e^{-x}-\frac{9}{2}xe^{-3x}$

(30) $y''+3y'=3xe^{-3x}$ **Rpta:** $y=c_1+c_2e^{-3x}-(\frac{x^2}{2}+\frac{x}{3})e^{-3x}$

(31) $y''+5y'+6y=10(1-x)e^{-2x}$ **Rpta:** $y=c_1e^{-3x}+c_2e^{-2x}+(20x-5x^2)e^{-2x}$

(32) $y''+y'+y=(x+x^2)e^x$ **Rpta:** $y=e^{-\frac{x}{2}}(c_1\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_2\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x)+(\frac{x^2}{3}-\frac{x}{3}+\frac{1}{3})e^x$

(33) $y''-3y'+2y=xe^x$ **Rpta:** $y=c_1e^{2x}+(c_2-x-\frac{x^2}{2})e^x$

(34) $y''+y'-2y=x^2e^{4x}$ **Rpta:** $y=c_1e^x+c_2e^{-2x}+\frac{e^{4x}}{18}(x^2-x+\frac{7}{18})$

(35) $y''-3y'+2y=(x^2+x)e^{3x}$ **Rpta:** $y=c_1e^x+c_2e^{2x}+\frac{e^{3x}}{5}(x^2-x+2)$

(36) $y^{IV}-2y'''-2y'+y=e^x$ **Rpta:** $y=c_1e^x+c_2xe^{2x}+c_3\cos x+c_4\operatorname{sen}x+\frac{x^2}{4}e^x$

(37) $y''-5y'+6y=(12x-7)e^{-x}$, $y(0)=y'(0)=0$ **Rpta:** $y=e^{2x}-e^{3x}+xe^{-x}$

(38) $y''-2y'-3y=(x-2)e^x$ **Rpta:** $y=c_1e^{3x}+c_2e^{-x}+(-\frac{x}{4}+\frac{1}{2})e^x$

(39) $y''-5y'+6=(x+1)^2e^{-2x}$ **Rpta:** $y=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}+(\frac{x^2}{20}+\frac{29}{200}x+\frac{441}{4000})e^{-2x}$

(40) $4y''-4y'+y=(x-1)e^{\frac{x}{2}}$ **Rpta:** $y=e^{\frac{x}{2}}(c_1x+c_2)+x^2(\frac{x}{24}-\frac{1}{8})e^{\frac{x}{2}}$

(41) $y''-2y'+y=(x+1)e^x$ **Rpta:** $y=e^x(c_1x+c_2)+x^2(\frac{x}{6}+\frac{1}{2})e^x$

(42) $y'''+2y''=(4x^2+6x-1)e^{2x}$ **Rpta:** $y=c_1+c_2x+c_3e^{-2x}+\frac{x}{4}(x-1)e^{2x}$

43 $y''-4y=6e^{x}$, y(0) = -1, $y'(0)=0$

44 $y'''+y'-10y=29e^{4x}$

45 $y''+4y'+5y=10e^{-3x}$, cuando x = 0, y = 0, $y'=0$

III.- Resolver las ecuaciones diferenciales siguientes:

1. $y''+y=3\operatorname{sen}2x+x\cos x$ **Rpta:** $y=c_1\cos x+c_2\operatorname{sen}x-\frac{x}{3}\cos 2x-\frac{5}{9}\operatorname{sen}2x$

2. $y''+y=\cos x-\operatorname{sen}x$ **Rpta:** $y=c_1\cos x+c_2\operatorname{sen}x+\frac{x}{2}(\cos x+\operatorname{sen}x)$

3. $y''+9y=\cos 3x$ **Rpta:** $y=c_1\operatorname{sen}3x+c_2\cos 3x+\frac{x}{6}\operatorname{sen}3x$

4. $y''+y'-6y=\operatorname{sen}x.\cos x$ **Rpta:** $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-3x}-\frac{1}{104}(5\operatorname{sen}2x+\cos 2x)$

5. $y''+2y'+y=\operatorname{sen}2x$ **Rpta:** $y=e^{-x}(c_1+c_2x)-\frac{1}{25}(3\operatorname{sen}2x+4\cos 2x)$

6. $y''-4y'+5y=\cos x+\operatorname{sen}x$ **Rpta:** $y=e^{2x}(c_1\cos x+c_2\operatorname{sen}x)+\frac{\cos x}{4}$

7. $y^{iv}-y=\operatorname{sen}x-2\cos x$ **Rpta:** $y=c_1e^{x}+c_2e^{-x}+c_3\cos x+c_4\operatorname{sen}x+\frac{x}{4}(\cos x+2\operatorname{sen}x)$

8. $\frac{d^2y}{dx^2}+y=\operatorname{sen}x$ **Rpta:** $y=c_1\cos x+c_2\operatorname{sen}x-\frac{x}{2}\cos x$

9. $\frac{d^2y}{dx^2}+4y=\cos x$ **Rpta:** $y=c_1\cos 2x+c_2\operatorname{sen}2x+\frac{\cos x}{3}$

10. $\frac{d^4y}{dx^4}-2\frac{d^2y}{dx^2}+y=5\operatorname{sen}2x$ **Rpta:** $y=(c_1+c_2x)e^{x}+(c_3+c_4x)e^{-x}+\frac{sen\ 2x}{5}$

11. $\frac{d^2y}{dx^2}+9y=4x\operatorname{sen}x$ **Rpta:** $y=c_1\cos 3x+c_3\operatorname{sen}3x+\frac{x}{2}\operatorname{sen}x-\frac{\cos x}{8}$

12. $y''+4y'-2y=8\operatorname{sen}2x$ **Rpta:** $y=c_1e^{-(\sqrt{6}+2)x}+c_2e^{(\sqrt{6}-2)x}\ \frac{12\operatorname{sen}2x+16\cos 2x}{25}$

(13) $y''+y=4x\cos x$ **Rpta:** $y=c_1\cos x+c_2\,\text{sen}\,x+x^2\,\text{sen}\,x+x\cos x$

(14) $y''-2my'+m^2y=\text{sen}(nx)$ **Rpta:** $y=(c_1+c_2x)e^{mx}+\dfrac{(m^2-n^2)\text{sen}(nx)+2mn\cos nx}{(m^2+n^2)^2}$

(15) $y''+a^2y=2\cos(mx)+3\,\text{sen}(mx)$, $m\neq a$

Rpta: $y=c_1\cos(ax)+c_2\,\text{sen}(ax)+\dfrac{2\cos(mx)+3\,\text{sen}(mx)}{a^2-m^2}$

(16) $4y''+8y'=x\,\text{sen}\,x$ **Rpta:** $y=c_1+c_2e^{-2x}-(\frac{x}{20}-\frac{7}{50})\text{sen}\,x-(\frac{x}{10}+\frac{1}{50})\cos x$

(17) $y''+y=x^2\,\text{sen}\,x$ **Rpta:** $y=(c_1+\frac{x}{4}-\frac{x^3}{6})\cos x+(c_2+\frac{x^2}{4})\text{sen}\,x$

(18) $y'''-y=\text{sen}\,x$ **Rpta:** $y=c_1e^x+e^{-\frac{x}{2}}(c_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_3\frac{\sqrt{3}}{2}x)+\frac{1}{2}(\cos x-\text{sen})$

(19) $y''+y=2\cos x$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$ **Rpta:** $y=\cos x+x\,\text{sen}\,x$

(20) $y''+4y=\text{sen}\,x$, $y(0)=y'(0)=1$ **Rpta:** $y-\cos 2x+\frac{1}{3}(\text{sen}\,2x+\text{sen}\,x)$

(21) $y''+4y=4(\text{sen}\,2x+\cos 2x)$, $y(\pi)=y'(\pi)=2$

Rpta: $y=3\pi\ \cos 2x+\frac{1}{2}\text{sen}\,2x+x(\text{sen}\,2x-\cos 2x)$

(22) $y''+4y=-12\,\text{sen}\,2x$ **Rpta:** $Y=A\cos 2x+B\,\text{sen}\,2x+3x\cos 2x$

(23) $y''+y=-9\cos 2x$, $y(0)=2$, $y'(0)=1$ **Rpta:** $y=\text{sen}\,x-\cos x+3\cos 2x$

(24) $y''+2y'+2y=-2\cos 2x-4\,\text{sen}\,2x$, $y(0)=1$, $y'(0)=1$ **Rpta:** $y=e^{-x}\,\text{sen}\,x+\cos 2x$

(25) $y''+2y'+2y=2\,\text{sen}\,2x-4\cos 2x$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$. **Rpta:** $y=2e^{-x}\,\text{sen}\,x+\text{sen}\,2x$

(26) $y''+4y'+3y=4\,\text{sen}\,x+8\cos x$, $y(0)=3$, $y'(0)=-1$. **Rpta:** $y=3e^{-x}+2\,\text{sen}\,x$

(27) $y''+y=2\cos x$ **Rpta:** $y=c_1\operatorname{sen}x+c_2\cos x+x\operatorname{sen}x$

(28) $y''-3y'+2y=14\operatorname{sen}2x-18\cos 2x$ **Rpta:** $y=c_1e^{x}+c_2e^{2x}+\operatorname{sen}2x+3\cos 2x$

(29) $y''+k^2y=\operatorname{sen}(bx)$, $k\neq b$ **Rpta:** $y=c_1\operatorname{sen}(kx)+c_2\cos(kx)+\dfrac{\operatorname{sen}(bx)}{k^2-b^2}$

(30) $y''-7y'+6y=\operatorname{sen}x$ **Rpta:** $y=c_1e^{6x}+c_2e^{x}+\dfrac{5\operatorname{sen}x+7\cos x}{74}$

(31) $y''+2y'+5y=-\dfrac{17}{2}\cos 2x$ **Rpta:** $y=e^{-x}(c_1\cos 2x+c_2\operatorname{sen}2x)-\dfrac{\cos 2x}{2}-2\operatorname{sen}2x$

(32) $y''+y'+\operatorname{sen}2x=0$, $y(\pi)=y'(\pi)=1$ **Rpta:** $y=\dfrac{1}{3}\operatorname{sen}2x-\dfrac{\operatorname{sen}x}{3}-\cos x$

(33) $y''-4y'+3y=2\cos x+4\operatorname{sen}x$ **Rpta:** $y=c_1e^{x}+c_2e^{3x}+\cos x$

(34) $y'''-y''+y'-y=4\operatorname{sen}x$ **Rpta:** $y=c_1e^{x}+(c_2+x)\cos x+(c_3-x)\operatorname{sen}x$

(35) $y''+y=2\cos x$, $y(0)=0$, $y(\pi)=0$ **Rpta:** $y=(c+x)\operatorname{sen}x$

(36) $y''-4y'+3y=20\cos x$ **Rpta:** $y=c_1e^{x}+c_2e^{3x}+2\cos x-4\operatorname{sen}x$

(37) $y''+y'-2y=-6(\operatorname{sen}2x+3\cos 2x)$, $y(0)=2$, $y'(0)=2$

(38) $y''+y=-60\operatorname{sen}4x$, $y(0)=8$, $y'(0)=14$

(39) $y''+4y'+5=8(\operatorname{sen}3x-3\cos 3x)$, $y(0)=1$, $y'(0)=-7$.

IV.- Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales.

(1) $\dfrac{d^2y}{dx^2}-3\dfrac{dy}{dx}=2e^{2x}\operatorname{sen}x$ **Rpta:** $y=c_1+c_2e^{3x}-\dfrac{3}{5}e^{2x}\operatorname{sen}x-\dfrac{e^{2x}}{5}\cos x$

(2) $4y''-5y'+y=e^{x}(\operatorname{sen}2x-\cos 2x)$ **Rpta:** $y=c_1e^{x}+c_2e^{x/4}+\dfrac{e^{x}}{146}(-11\operatorname{sen}2x+5\cos 2x)$

③ $y''' + y'' - 2y = e^{-x}(2\cos x + x \operatorname{sen} x)$

Rpta: $y = c_1 e^{x} + e^{-x}(c_2 \cos x + c_3 \operatorname{sen} x) - \dfrac{xe^{-x}}{2} \operatorname{sen} x$

④ $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \operatorname{sen} x$ **Rpta:** $y = e^{-2x}(c_1 x + c_2) - e^{-2x} \operatorname{sen} x$

⑤ $y'' + 4y' + 5y = e^{-2x} \cos x$ **Rpta:** $y = e^{-2x}(c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x) + \dfrac{xe^{-2x}}{2} \operatorname{sen} x$

⑥ $y'' - 2y' + 2y = e^{x} \cos x$ **Rpta:** $y = e^{x}(c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x) + \dfrac{xe^{x}}{2} \operatorname{sen} x$

⑦ $y''' + 4y'' - 12y' = 8e^{2x} \cos x \operatorname{sen} x$

Rpta: $y = c_1 + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-6x} - \dfrac{1}{68} e^{2x}(5 \operatorname{sen} 2x + 3\cos 2x)$

⑧ $y'' + 2y' + y = e^{x} \cos x$ **Rpta:** $y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + \dfrac{e^{x}}{25}(3\cos x + 4 \operatorname{sen} x)$

⑨ $y'' + 2y' + 5y = e^{x} \operatorname{sen} 2x$ **Rpta:** $y = e^{-x}(c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x) - \dfrac{xe^{-x}}{4} \cos 2x$

⑩ $y'' - y' = e^{x} \operatorname{sen} x$ **Rpta:** $y = c_1 + c_2 e^{x} - \dfrac{e^{x}}{2}(\operatorname{sen} x + \cos x)$

⑪ $y'' + 2y' + y = x^2 e^{x} \cos x$ **Rpta:** $y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}(-x^2 \cos x + 4x \operatorname{sen} x + 6\cos x)$

⑫ $y''' - 3y'' + 3y' - y = e^{x} \cos 2x$ **Rpta:** $y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2)e^{x} - \dfrac{e^{x}}{8} \operatorname{sen} 2x$

V.- Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales.

① $y'' + 9y = x^2 e^{3x} + 6$ **Rpta:** $y = c_1 \cos 3x + c_2 \operatorname{sen} 3x + \dfrac{1}{18}(x^2 - \dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{9})e^{3x} + \dfrac{2}{3}$

② $y'' + 2y' = 3 + 4 \operatorname{sen} 2x$ **Rpta:** $y = c_1 + c_2 e^{-2x} + \dfrac{3x}{2} - \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{2} - \dfrac{\cos 2x}{2}$

(3) $y''+4y=x^2+3e^x$, $y(0)=0$, $y'(0)=2$

Rpta: $y=\frac{7}{10}\operatorname{sen}2x-\frac{19}{40}\cos 2x+\frac{x^2}{4}-\frac{1}{8}+\frac{3}{5}e^x$

(4) $y''-2y'+y=xe^x+4$, $y(0)=y'(0)=1$ **Rpta:** $y=4xe^x-3e^x+\frac{x^3}{6}e^x+4$

(5) $2y''+3y'+y=x^2+3\operatorname{sen}x$ **Rpta:** $y=c_1e^{-x}+c_2e^{-\frac{x}{2}}+(x^2-6x+14)-\frac{3}{10}\operatorname{sen}x-\frac{9}{10}\cos x$

(6) $y''+y'+y=\operatorname{sen}^2 x$ **Rpta:** $y=c_1e^{-x/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_2e^{-\frac{x}{2}}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}-\frac{\operatorname{sen}2x}{13}+\frac{3\cos 2x}{26}$

(7) $y''+y'+y=2\operatorname{senh}x$ **Rpta:** $y=c_1e^{-x/2}\cos\frac{\sqrt{15}}{2}x+c_2e^{-\frac{x}{2}}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{15}}{2}x+\frac{e^x}{6}-\frac{e^{-x}}{4}$

(8) $y''-y'-2y=\cosh 2x$ **Rpta:** $y=c_1e^{-x}+c_2e^{2x}+\frac{xe^{2x}}{6}+\frac{e^{-2x}}{8}$

(9) $y''+2y'+5y=e^{-x}(2x+\operatorname{sen}2x)$

Rpta: $y-e^{-x}(c_1\cos 2x+c_2\operatorname{sen}2x)-\frac{xe^{-x}}{4}.\cos 2x+\frac{x}{2}e^{-x}$

(10) $y^{v}-y^{iv}=xe^x-1$ **Rpta:** $y=\frac{x^4}{24}+c_1x^3+c_2x^2+c_3x+c_4+(\frac{x^2}{2}-4x+c_5)e^x$

(11) $y'''-4y'=xe^{2x}+\operatorname{sen}x+x^2$

Rpta: $y=c_1+c_2e^{2x}+c_3e^{-2x}+\frac{\cos x}{5}-\frac{x^3}{12}-\frac{x}{8}+\frac{e^{2x}}{2}(2x^2-3x)$

(12) $y''+2y'+2y=e^{-x}\cos x+xe^{-x}$

Rpta: $y=\frac{x}{2}e^{-x}\operatorname{sen}x+xe^{-x}+e^{-x}(c_1\cos x+c_2\operatorname{sen}x)$

(13) $y^{iv} + 2y''' + 2y'' + 2y' + y = xe^{x} + \dfrac{\cos x}{2}$

Rpta: $y = (\dfrac{x}{8} - \dfrac{1}{4})e^{x} + (c_1 + c_2 x)e^{-x} + (c_3 - \dfrac{x}{8})\cos x + c_4 \operatorname{sen} x$

(14) $y'' + y' = \cos^2 x + e^{x} + x^2$ **Rpta:** $y = c_1 + c_2 e^{-x} + (\dfrac{x^3}{3} - x^2 + 2x) + \dfrac{e^{x}}{2} + \dfrac{\operatorname{sen} x}{20} - \dfrac{\cos 2x}{10}$

(15) $y^{v} + 4y''' = e^{x} + 3\operatorname{sen} 2x + 1$

Rpta: $y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 \cos 2x + c_5 \operatorname{sen} 2x + \dfrac{e^{x}}{5} + \dfrac{x^3}{24} + \dfrac{3x}{32}\operatorname{sen} 2x$

(16) $y'' - y' = x^2 - e^{-x} + e^{x}$ **Rpta:** $y = c_1 + c_2 e^{-x} + \dfrac{x^3}{3} - x^2 + 2x + xe^{-x} + \dfrac{x}{2}$

(17) $y'' - 3y' = 1 + e^{x} + \cos x + \operatorname{sen} x$ **Rpta:** $y = c_1 + c_2 e^{3x} - \dfrac{x}{3} - \dfrac{e^{x}}{2} + \dfrac{\cos x - 2\operatorname{sen} x}{5}$

(18) $y'' - 4y' = 4x + \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x$

Rpta: $y = (c_1 + c_2 x)e^{x} + x + 1 + \dfrac{1}{25}(4\cos x + 3\operatorname{sen} x) + \dfrac{\cos 2x}{8}$

(19) $y'' - 4y' + 5y = 1 + \cos^2 x + e^{2x}$

Rpta: $y = (c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + 1)e^{2x} + \dfrac{3}{10} + \dfrac{\cos 2x}{130} - \dfrac{4\operatorname{sen} 2x}{65}$

(20) $y''' - 2y + 4y = e^{x}\cos x + x^2 + \operatorname{sen} 2x$

Rpta: $y = c_1 e^{-2x} + (c_2 \cos x + c_3 \operatorname{sen} x)e^{x} + \dfrac{1}{8}(2x^2 + 2x + 1) +$

$$+ \frac{1}{40}(\operatorname{sen} 2x + 3\cos 2x) + \frac{xe^{x}}{20}(3\operatorname{sen} x - \cos x)$$

(21) $y'' + 2y' = 3 + 4\operatorname{sen} 2x$ **Rpta:** $y = c_1 + c_2 e^{-2x} + \dfrac{3x}{2} - \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{2} - \dfrac{\cos 2x}{2}$

(22) $y''-2y'+y=xe^{x}+4$, $y(0)=1$, $y'(0)=1$ **Rpta:** $y=4xe^{x}-3e^{x}+\frac{x^{3}e^{x}}{6}+4$

(23) $2y''+3y'+y=x^{2}+3\operatorname{sen}x$ **Rpta:** $y=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}+\frac{e^{x}}{25}(3\cos x+4\operatorname{sen}x)$

(24) $y''-8y'+15y=(15x^{2}+14x+1)+e^{x}$ **Rpta:** $y=c_1e^{3x}+c_2e^{5x}+(x+1)^{2}+\frac{e^{x}}{8}$

(25) $y'''+4y'+4y=e^{-2x}+8(x+1)$ **Rpta:** $y=c_1+e^{-2x}(c_2x+c_3)+x^{2}-\frac{x^{2}e^{-2x}}{4}$

(26) $y^{iv}-y'''+y''=12x^{2}-24x+e^{-x}$

Rpta: $y=c_1+c_2x+e^{\frac{x}{2}}[c_3\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_4\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x]+(x^{4}-12x^{2})+\frac{e^{-x}}{3}$

(27) $y^{iv}-8y''+16y=x\operatorname{senh}x(2x)$

Rpta: $y=e^{2x}(c_1x+c_2)+e^{-2x}(c_3x+c_4)+x^{2}e^{2x}(\frac{x}{192}-\frac{1}{128})-x^{3}e^{-2x}(\frac{x}{192}+\frac{1}{128})$

(28) $y'''-y'=(x+e^{x})^{2}$ **Rpta:** $y=c_1+c_2e^{x}+c_3e^{-x}+\frac{e^{2x}}{6}-x(\frac{x^{2}}{3}+2)+\frac{x}{2}(x-3)e^{x}$

(29) $y'''+y''+y'+y=x\cosh(-x)$

Rpta: $y=c_1e^{-x}+c_2\cos x+c_3\operatorname{sen}x+\frac{e^{x}}{8}(x-3/2)+\frac{x}{8}(x+2)e^{-x}$

(30) $y'''+2y''+y'=\operatorname{sen}x+2\cos 2x$

Rpta: $y=c_1+e^{-x}(c_2x+c_3)-\frac{\operatorname{sen}x}{2}-\frac{1}{25}.(3\operatorname{sen}2x+4\cos 2x)$

VI.- Dar la forma de la solución particular de las siguientes ecuaciones diferenciales

(1) $y''-4y'=x^{2}e^{2x}$ **Rpta:** $y_p=xe^{2x}(Ax^{2}+Bx+C)$

(2) $y''+9y=\cos 2x$ **Rpta:** $y_p=A\cos 2x+B\operatorname{sen}2x$

(3) $y''-4y'+4y=\operatorname{sen}2x+e^{2x}$ **Rpta:** $y_p=A\cos 2x+B\operatorname{sen}2x+cx^2e^{2x}$

(4) $y''+2y'+2y=e^x\operatorname{sen}x$ **Rpta:** $y_p=e^x(A\cos x+B\operatorname{sen}x)$

(5) $y''-5y'+6y=(x^2+1)e^x+xe^{2x}$ **Rpta:** $y_p=e^x(Ax^2+Bx+C)+xe^{2x}(Dx+E)$

(6) $y''-2y'+5y=xe^x\cos 2x-x^2e^x\operatorname{sen}2x$

Rpta: $y_p=xe^x[(Ax^2+Bx+C)\cos 2x+(Dx^2+Ex+F)\operatorname{sen}2x]$

(7) $y''+3y'=2x^4+x^2e^{-3x}+\operatorname{sen}3x$

Rpta: $y_p=x(A_1x^4+A_2x^3+A_3x^2+A_4x+A_5)+x(B_1x^2+B_2x+B_3)e^{-3x}+D\operatorname{sen}3x+E\cos 3x$

(8) $y''+y=x(1+\operatorname{sen}x)$ **Rpta:** $y_p=A_1x+A_2+x(B_1x+B_2)\operatorname{sen}x+x(D_1x+D_2)\cos x$

(9) $y''+5y'+6y=e^x\cos 2x+e^{2x}(3x+4)\operatorname{sen}x$

Rpta: $y_p=e^x(A\cos 2x+B\operatorname{sen}2x)+(D_1+D_2x)e^{2x}\operatorname{sen}x+(E_1x+E_2)e^{2x}\cos x$

(10) $y''+2y'+2y=3e^{-x}+2e^{-x}\cos x+4e^{-x}x^2\operatorname{sen}x$

Rpta: $y_p=Ae^{-x}+x(B_1x^2+B_2x+B_3)e^{-x}\cos x+x(C_1x^2+C_2x+C_3)e^{-x}\operatorname{sen}x$

(11) $y''+3y'+2y=e^x(x^2+1)\operatorname{sen}2x+3e^x\cos x+4e^x$

Rpta: $y_p=(A_1x^2+A_2x+A_3)e^x\operatorname{sen}2x+(B_1x^2+B_2x+B_3)e^x\cos 2x+$
$+e^{3x}(D\cos x+E\operatorname{sen}x)+Fe^x$

(12) $y''+4y'=x^2\operatorname{sen}2x+(6x+7)\cos 2x$

Rpta: $y_p=x(A_1x^2+A_2x+A_3)\operatorname{sen}2x+(B_1x^2+B_2x+B_3)\cos 2x$

(13) $y''-4y'+4y=2x^2+4xe^{2x}+x\operatorname{sen}2x$

Rpta: $y_p=A_1x^2+A_2x+A_3+x^2(B_1x+B_2)e^{2x}+(C_1x+C_2)\operatorname{sen}2x+(D_1x+D_2)\cos 2x$

(14) $y''-4y'+4=x(2e^{2x}+x\operatorname{sen}x)$

(15) $y''+2y'+2y=x^2-3xe^{-2x}\cos 5x$

(16) $y'''-3y'-2y=e^{x}(1+xe^{x})$

(17) $y^{iv}+5y''+4y=2\cos x$

(18) $y''-4y'+8y=e^{2x}(1+\operatorname{sen}2x)$

(19) $y'''-y''+y=2(x+2e^{-x})$

(20) $y'''+3y''-4y=9xe^{-2x}+4x$

5.5. MÉTODO DE VARIACIÓN DE PARÁMETRO.-

Consideremos una ecuación diferencial no homogénea de coeficientes constante de tercer orden.

$$\boxed{\frac{d^3y}{dx^3}+a_1\frac{d^2y}{dx^2}+a_2\frac{dy}{dx}+a_3y=f(x)} \quad \textbf{... (1)}$$

donde a_1, a_2, a_3 son constantes y f (x) es una función sólo de x ó constante.

Suponiendo que la solución general de la ecuación diferencial homogénea es:

$$y_g=c_1y_1+c_2y_2+c_3y_3$$

Luego la solución particular de la ecuación (1) es:

$$y_p=u_1y_1+u_2y_2+u_3y_3$$

donde u_1, u_2, u_3 son funciones incógnitas que satisfacen a las condiciones siguientes.

$$\boxed{\begin{cases} u_1'y_1+u_2'y_2+u_3'y_3=0 \\ u_1'y_1'+u_2y_2'+u_3y_3'=0 \\ u_1'y_1''+u_2'y_2''+u_3'y_3''=f(x) \end{cases}} \quad \textbf{... (2)}$$

La ecuación (2) es un sistema de ecuaciones en u_1, u_2, u_3, el método consiste en:

1ro Escribir la solución general de la ecuación diferencial homogénea.

$$y_g=c_1y_1+c_2y_2+c_3y_3$$

2^{do} Reemplazar c_1, c_2, c_3 por las funciones incógnitas u_1, u_2, u_3 obteniendo la solución particular de la ecuación (1).

$$\boxed{y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3}$$

3^{ro} Formar el sistema bajo las condiciones de la ecuación (2).

4^{to} Por medio de integración obtenemos u_1, u_2 y u_3.

a) Ejemplos.- Resolver las ecuaciones diferenciales siguientes:

1 $\frac{d^2y}{dx^2} + y = \cos ec\ x$

Solución

Hallaremos la solución general de la ecuación homogénea para esto se tiene:

$p(r) = r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r_1 = i,\ r_2 = -i$ de donde $y_g = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$

la solución particular de la ecuación diferencial es: $y_p = u_1 \cos x + u_2 \operatorname{sen} x$, tal que

$$\begin{cases} u_1' \cos x + u_2' \operatorname{sen} x = 0 \\ u_1' \operatorname{sen} x + u_2' \cos x = \cos ec\ x \end{cases}; \text{ de donde}$$

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \operatorname{sen} x \\ \cos ecx & \cos x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{vmatrix}} = -1 \Rightarrow u_1' = -1 \Rightarrow u_1 = -x$$

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\operatorname{sen} x & \cos ecx \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{vmatrix}} = c\operatorname{tg} x \Rightarrow u_2' = c\operatorname{tg} x \Rightarrow u_2 = \ln(\operatorname{sen} x)$$

$$y_p = -x \cos x + \operatorname{sen} x . \ln(\operatorname{sen} x)$$

La solución general de la ecuación diferencial es:

$$y = y_g + y_p = c_1 \cos x + c_2 \text{ sen } x - x\cos x + \text{sen } x.\ln(\text{sen } x)$$

$$\therefore \quad y = c_1 \cos x + c_2 \text{ sen } x - x\cos x + \text{sen } x.\ln(\text{sen } x)$$

(2) $y'' + 4y = 4\sec^2 x$

Solución

Hallaremos la solución general de la ecuación diferencial homogénea, para esto se tiene:

$P(r) = r^2 + 4 = 0 \;\Rightarrow\; r_1 = 2i\,,\; r_2 = -2i$ por lo tanto $y_g = c_1 \cos 2x + c_2 \text{ sen } 2x$

la solución particular de la ecuación diferencial es: $y_p = u_1 \cos 2x + u_2 \text{ sen } 2x$, tal que

$$\begin{cases} u_1' \cos 2x + u_2' \text{ sen } 2x = 0 \\ -2u_1' \text{ sen } 2x + 2u_2' \cos 2x = 4\sec^2 x \end{cases} \quad \ldots (\alpha)$$

reemplazando el sistema (α) se tiene:

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \text{sen } 2x \\ 4\sec^2 x & 2\cos 2x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos 2x & \text{sen } 2x \\ -2\text{ sen } 2x & 2\cos 2x \end{vmatrix}} = \frac{-4\sec^2 x \text{ sen } 2x}{2} = -2\sec^2 x.\text{sen } 2x \;\Rightarrow\; u_1 = 4Ln(\cos x)$$

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} \cos 2x & 0 \\ -2\text{ sen } 2x & 4\sec^2 x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos 2x & \text{sen } 2x \\ -2\text{ sen } 2x & 2\cos 2x \end{vmatrix}} = \frac{4\sec^2 x.\cos 2x}{2}$$

$$u_2' = 2\sec^2 x(\cos^2 x - \text{sen}^2 x) = 2 - 2\,\text{tg}^2 x \;\Rightarrow\; u_2 = 4x - 2\,\text{tg } x$$

Como $y_p = u_1 \cos x + u_2 \text{ sen } 2x$, al reemplazar se tiene:

$$\therefore \quad y_p = 4\cos 2x.\ln(\cos x) + (4x - 2\,\text{tg } x)\text{ sen } 2x$$

Luego la solución general de la ecuación diferencial dada es: $y = y_g + y_p$

(3) $\frac{d^2y}{dx^2}+y=\sec^2 x$

Solución

Hallaremos la solución general de la ecuación diferencial homogénea, para esto se tiene:

$P(r)=r^2+1=0 \quad\Rightarrow\quad r_1=i\ ,\ r_2=-i\ ;$ de donde $y_g=c_1\cos x+c_2\operatorname{sen} x$

la solución particular de la ecuación diferencial es $y_p=u_1\cos x+u_2\operatorname{sen} x$, donde u_1,u_2 son funciones incógnitas, que cumplen la condición siguiente:

$$\begin{cases} u_1'\cos x+u_2'\operatorname{sen} x=0 \\ -u_1'\operatorname{sen} x+u_2'\cos x=\sec^2 x\end{cases} \quad \ldots (\alpha)$$

resolviendo el sistema (α) se tiene:

$$u_1'=\frac{\begin{vmatrix} 0 & \operatorname{sen} x \\ \sec^2 x & \cos x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x\end{vmatrix}}=-\operatorname{tg} x.\sec x \quad\Rightarrow\quad u_1=-\sec x$$

$$u_2'=\frac{\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\operatorname{sen} x & \sec^2 x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x\end{vmatrix}}=\sec x \quad\Rightarrow\quad u_2=\ln(\sec x+\operatorname{tg} x)$$

Como $y_p=u_1\cos x+u_2\operatorname{sen} x$ reemplazando se tiene: $y_p=-1+\operatorname{sen} x\ln|\sec x+\operatorname{tg} x|$

y la solución general de la ecuación diferencial es: $y=y_g+y_p$

(4) $\frac{d^2y}{dx^2}+y=\cos ecx.c\operatorname{tg} x$

Solución

Hallaremos la solución general de la ecuación diferencial homogénea, para esto se tiene:

$P(r)=r^2+1=0 \quad\Rightarrow\quad r_1=i\ ,\ r_2=-i$. Por lo tanto $y_g=c_1\cos x+c_2\operatorname{sen} x$

la solución particular de la ecuación diferencial es $y_p = u_1 \cos x + u_2 \operatorname{sen} x$, donde u_1, u_2 son funciones incógnitas, que cumplen la condición siguiente:

$$\begin{cases} u_1' \cos x + u_2' \operatorname{sen} x = 0 \\ -u_1' \operatorname{sen} x + u_2' \cos x = \cos ec x . c \operatorname{tg} x \end{cases} \quad \dots (\alpha)$$

resolviendo el sistema (α) se tiene:

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \operatorname{sen} x \\ \cos ec x c \operatorname{tg} x & \cos x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{vmatrix}} = -c \operatorname{tg} x \Rightarrow u_1 = -\ln(\operatorname{sen} x)$$

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\operatorname{sen} x & \cos ec x . c \operatorname{tg} x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{vmatrix}} = c \operatorname{tg}^2 x \Rightarrow u_2 = -c \operatorname{tg} x - x$$

Luego $y_p = -\cos x . \ln|\operatorname{sen} x| - (c \operatorname{tg} x + x) \operatorname{sen} x$ y la solución general de la ecuación diferencial es: $y = y_g + y_p$

b. EJERCICIOS PROPUESTOS.

1. $\dfrac{d^2 y}{dx^2} + y = c \operatorname{tg} x$ **Rpta:** $y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x . \ln|\cos ec\, x - c \operatorname{tg} x|$

2. $\dfrac{d^2 y}{dx^2} + y = \sec x$ **Rpta:** $y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + x \operatorname{sen} x + \cos x . \ln|\cos x|$

3. $\dfrac{d^2 y}{dx^2} + 4y = 4c \operatorname{tg} 2x$ **Rpta:** $y = c_1 \operatorname{sen} 2x + c_2 \cos 2x + \operatorname{sen} 2x . \ln|\cos ec 2x - c \operatorname{tg} 2x|$

4. $y'' + 2y' + 2y = e^{-x} \sec x$ **Rpta:** $y = e^{-x}(c_1 + x) \operatorname{sen} x + e^{-x}[c_2 + \ln(\cos x)] \cos x$

$y'' + 4y' + 4y = x^{-2} e^{-2x}$ **Rpta:** $y = e^{-2x}[c_1 - 1 + c_2 x - \ln x]$

(6) $y''+y=\operatorname{tg}^2 x$ **Rpta:** $y=y_g+\operatorname{sen} x.\ln|\sec x+\operatorname{tg} x|-\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{2\cos x}-1$

(7) $y''+y=\sec^2 x.\csc x$ **Rpta:** $y=y_g-\operatorname{sen} x.\ln(\csc 2x-c\operatorname{tg} 2x)$

(8) $y''-2y'+y=e^{2x}(e^x+1)^{-2}$ **Rpta:** $y=y_g+e^x\ln(1+e^x)$

(9) $y''-3y'+2y=\dfrac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$ **Rpta:** $y=y_g+e^x\operatorname{arctg}(e^{-x})-\dfrac{e^{2x}}{2}\ln(1+e^{-2x})$

(10) $y''+y=\sec^3 x$ **Rpta:** $y=y_g+\dfrac{\sec x}{2}$

(11) $y''+y=\operatorname{tg} x$ **Rpta:** $y=y_g-\cos x.\ln(\sec x+\operatorname{tg} x)$

(12) $y''-y=e^{-2x}\operatorname{sen}(e^{-x})$ **Rpta:** $y=y_g-\operatorname{sen} e^{-x}-e^x\cos e^{-x}$

(13) $y''-3y'+2y=\cos(e^{-x})$ **Rpta:** $y=y_g-e^{2x}\cos(e^{-x})$

(14) $9y''+y=\sec(\dfrac{x}{3})$ **Rpta:** $y=[c_1+\dfrac{x}{3}]\operatorname{sen}\dfrac{x}{3}+[c_2+\ln(\cos\dfrac{x}{3})]\cos\dfrac{x}{3}$

(15) $y''-y=\operatorname{sen}^2 x$ **Rpta:** $y=c_1e^x+c_2e^{-x}-\dfrac{2}{5}-\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{5}$

(16) $y''-y=x^2e^{\frac{x^2}{2}}$ **Rpta:** $y=c_1e^x+c_2e^{-x}+e^{\frac{x^2}{2}}$

(17) $y''-2y'+2y=3x+e^x\operatorname{tg} x$

Rpta: $y=(c_1\operatorname{sen} x+[c_2-\ln(\sec x+\operatorname{tg} x)]\cos x)e^x+\dfrac{3x}{2}+\dfrac{3}{2}$

(18) $y''+y=x\cos x$ **Rpta:** $y=(c_1+\dfrac{x^2}{4})\operatorname{sen} x+(c_2+\dfrac{x}{4})\cos x$

(19) $y'''-7y'-6y=26e^{-2x}\cos x$ **Rpta:** $y=c_1e^{-x}+(c_2+2\operatorname{sen} x+3\cos x)e^{-2x}+c_3e^{3x}$

(20) $y''+3y'+2y=\text{sen}(e^x)$ **Rpta:** $y=c_1e^{-x}+(c_2+\text{sen}\,e^x)e^{-2x}$

(21) $y''+4y=\sec 2x$ **Rpta:** $y=A\cos 2x+B\,\text{sen}\,2x+\dfrac{\cos 2x}{4}.\ln(\cos 2x)+\dfrac{x}{2}\text{sen}\,2x$

(22) $y''+2y'+y=e^{-x}\ln(x)$ **Rpta:** $y=(c_1+c_2x)e^{-x}+x^2e^{-x}(\dfrac{1}{2}\ln(x)-\dfrac{3}{4})$

(23) $y''+4y'+4y=\dfrac{e^{-2x}}{x^2}$ **Rpta:** $y=c_1e^{-2x}+c_2xe^{-2x}-e^{-2x}\ln x-e^{-2x}$

(24) $y''-2y'+y=-e^x\,\text{sen}\,x$ **Rpta:** $y=(c_1+c_2x)e^x-\cos x.e^x$

(25) $y''-4y'+4y=(3x^2+2)e^x$ **Rpta:** $y=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}+(3x^2+12x+20)e^x$

(26) $y'''-y''-y'+y=4xe^x$ **Rpta:** $y=c_1e^{-x}+(c_2+c_3x)e^x+(\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{4})e^x$

(27) $y'''-y'=\text{sen}\,x$ **Rpta:** $y=c_1+c_2e^{-x}+c_3e^x+\dfrac{\cos x}{2}$

(28) $y'''-3y''-y'+3y=1+e^x$ **Rpta:** $y=c_1e^x+c_2e^{-x}+c_3e^{3x}-\dfrac{2}{3}e^{-3x}-e^{-2x}$

(29) $y'''-2y''=4(x+1)$ **Rpta:** $y=c_1+c_2x+c_3e^{2x}-(\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{3}{2}x^2+\dfrac{3}{2}x+\dfrac{3}{4})$

(30) $y'''-3y'-2y=9e^{-x}$ **Rpta:** $y=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}+c_3e^{2x}-\dfrac{3x^2}{2}e^{-x}$

(31) $y'''-7y'+6y=2\,\text{sen}\,x$ **Rpta:** $c_1e^x+c_2e^{2x}+c_3e^{-3x}+\dfrac{1}{25}(4\cos x+3\,\text{sen}\,x)$

(32) $y'''-y'=\text{sen}\,x$ **Rpta:** $y=c_1+c_2e^{-x}+c_3e^x+\dfrac{\cos x}{2}$

(33) $y^{iv}-y''=2xe^x$ **Rpta:** $y=c_2+c_3x+c_4e^{-x}+(\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{5}{2}x+c_1)e^x$

(34) $y''-5y'+6y = 2e^{x}$ **Rpta:** $y = y_g + e^{x}$

(35) $y'-y'-2y = 2e^{-x}$ **Rpta:** $y = y_g - \frac{2x}{3}e^{-x}$

(36) $y''+4y = 3\csc 2x\ ,\ 0 < x < \frac{\pi}{2}$ **Rpta:** $y = y_g + \frac{3}{4}\operatorname{sen} 2x.\ln(\operatorname{sen} 2x) - \frac{3}{2}x\cos 2x$

(37) $y''+4y'+4y = \frac{e^{-2x}}{x^2},\quad x > 0$ **Rpta:** $y = c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x} - e^{-2x}\operatorname{in} x - e^{-2x}$

(38) $y''+2y'+y = 3e^{-x}$ **Rpta:** $y = y_g + \frac{3x^2}{2}e^{-x}$

(39) $y'''-y' = x$ **Rpta:** $y = A + Be^{x} + ce^{-x} - \frac{x^2}{2}$

(40) $y''-2y'+y = x^2 + 1$ **Rpta:** $y = e^{x}(c_1x + c_2) + (x^2 + 4x + 7)$

(41) $y''-4y'+4y = e^{2x} + e^{-2x}$ **Rpta:** $y = e^{2x}(c_1x + c_2) + \frac{e^{-2x}}{16} + \frac{x^2}{2}e^{2x}$

(42) $y'''-2y''-3y' = 9(x+1)$ **Rpta:** $y = c_1 + c_2e^{3x} + c_3e^{-x} - \frac{x}{2}(3x+2)$

(43) $y'''+2y''-y' = \cosh(x)$ **Rpta:** $y = c_1e^{x} + c_2e^{-x} + c_3e^{-2x} + \frac{x}{12}e^{x} - \frac{x}{4}e^{-x}$

(44) $y''-8y'+12y = 4x\operatorname{senh} 2x$ **Rpta:** $y = c_1e^{2x} + c_2e^{6x} - \frac{x}{8}(2x+1) - \frac{1}{128}(8x+3)e^{-2x}$

(45) $y'''+y''-y'-y = \operatorname{senh} x$ **Rpta:** $y = c_1e^{x} + c_2e^{-x} + c_3xe^{-x} + \frac{x}{8}e^{x} + \frac{x^2}{8}e^{-x}$

(46) $y''+5y'+6y = (x+1)^2$ **Rpta:** $y = c_1e^{-2x} + c_2e^{-3x} - \frac{1}{1.8}(18x^2 + 6x + 7)$

(47) $y''+5y'+6y=(x+1)^2$ **Rpta:** $y=c_1e^{-2x}+c_2e^{-3x}-\frac{1}{1.8}(18x^2+6x+7)$

(48) $y''+4y'-5y=12\cosh x$ **Rpta:** $y=c_1e^{x}+c_2e^{-5x}+xe^{x}-\frac{3}{4}e^{-x}$

(49) $y'''-2y''-y'+2y=(x+1)^2$ **Rpta:** $y=c_1e^{-x}+c_2e^{x}+c_3e^{2x}+\frac{1}{4}(2x^2+6x+9)$

(50) $y'''+3y''-y'-3y=e^{x}+e^{-3x}$ **Rpta:** $y=c_1e^{x}+c_2e^{-x}+c_3e^{-3x}+\frac{x}{8}e^{x}+\frac{x}{8}e^{-3x}$

(51) $y'''-3y''+3y'-y=e^{x}+1$ **Rpta:** $y=c_1e^{x}+c_2xe^{x}+c_3x^2e^{x}+\frac{x^3e^{x}}{6}$

(52) $y''+2y'+2y=\text{sen}\,2x+\cos 2x$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$

Rpta: $y=e^{-x}+(\frac{3}{10}\cos x+\frac{11}{10}\text{sen}\,x)+\frac{\text{sen}\,2x}{10}-\frac{3}{10}\cos 2x$

(53) $y''-y'-2y=e^{3x}$, $y(0)=1$, $y'(0)=2$ **Rpta:** $y=\frac{e^{-x}}{12}+\frac{2e^{2x}}{3}+\frac{e^{3x}}{4}$

(54) $y''+2y'-3y=1+xe^{x}$ **Rpta:** $y=y_g+\frac{1}{16}(2x^2-x)e^{x}-\frac{1}{3}$

(55) $y''+4y=3x\cos 2x$ **Rpta:** $y=y_g+Ax\cos 2x+Bx\,\text{sen}\,2x$

(56) $y''+y'-2y=2x-40\cos 2x$ **Rpta:** $y=c_1e^{x}+c_2e^{-2x}-\frac{x}{2}\cos x$

(57) $y''+3y'+2y=1+3x+x^2$ **Rpta:** $y=c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}+\frac{x^2}{2}$

(58) $y'''+y''-4y'-4y=3e^{-x}-4x-6$ **Rpta:** $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}+(c_3-x)e^{-x}+x+\frac{1}{2}$

5.6. ECUACIONES DIFERENCIALES DE EULER.-

Las ecuaciones diferenciales de Euler son de la forma:

$$\boxed{a_n x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0} \quad \dots (\alpha)$$

donde $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ son constantes.

Para resolver la ecuación diferencial (α) se transforma a una ecuación diferencial homogénea de coeficientes constantes, mediante la sustitución.

$$x = e^t \Rightarrow t = \ln x, \text{ además } \frac{dx}{dt} = e^t$$

también $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = e^{-t} \dfrac{dy}{dt}$ de donde $\boxed{\dfrac{dy}{dt} = e^{-t} \dfrac{dy}{dt}}$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'/dt}{dx/dt} = e^{-t} \frac{dy'}{dt} = e^{-t} \frac{d}{dt}\left(e^{-t} \frac{dy}{dt}\right)$$

$\dfrac{d^2 y}{dx^2} = e^{-t}\left(e^{-t} \dfrac{dy}{dt} + e^{-t} \dfrac{d^2 y}{dt^2}\right)$ de donde $\boxed{\dfrac{d^2 y}{dx^2} = e^{-2t}\left(\dfrac{d^2 y}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt}\right)}$

en la misma forma se hace los cálculos si la ecuación diferencial es de orden 3, 4, etc.

También son ecuaciones diferenciales de Euler las ecuaciones de la forma siguiente:

$$\boxed{a_n (ax+b)^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} (ax+b)^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 (ax+b) \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0} \quad \dots (\beta)$$

Para obtener la solución de la ecuación diferencial (β) se transforma en forma similar al caso anterior mediante la sustitución:

$$ax + b = e^t \Rightarrow t = \ln(ax+b). \qquad \text{Además } \frac{dx}{dt} = \frac{e^t}{a}$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=ae^{-t}\frac{dy}{dt}$$ de donde se tiene $$\boxed{\frac{dy}{dt}=ae^{-t}\frac{dy}{dt}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy'}{dx}=\frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=ae^{-t}\frac{dy'}{dt}=ae^{-t}\frac{d}{dt}(ae^{-t}\frac{dy}{dt})=a^2e^{-t}(e^{-t}\frac{dy}{dt}+e^{-t}\frac{d^2y}{dt^2})$$

de donde: $$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2}=a^2e^{-2t}[\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}]}$$

Las ecuaciones diferenciales no homogéneas de Euler son de la forma:

$$\boxed{a_nx^n\frac{d^ny}{dx^n}+a_{n-1}x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+....+a_1x\frac{dy}{dx}+a_0y=x^{\alpha}P_m(\ln(x))} \quad ...(\gamma)$$

donde m es el grado de $P_m(\ln(x))$

Para resolver la ecuación diferencial (γ) se transforma en forma similar a los casos anteriores.

a. Ejemplos.- Resolver las ecuaciones diferenciales siguientes:

1. $$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}-y=0$$

Solución

Sea $x=e^t \Rightarrow$ t = lnx, además $\frac{dy}{dx}=e^{-t}\frac{dy}{dt}$; $\frac{d^2y}{dx^2}=e^{-2t}(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt})$

reemplazando en la ecuación diferencial.

$$e^{2t}.e^{-2t}(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt})+e^t.e^{-t}\frac{dy}{dt}-y=0$$, simplificando

$$\frac{d^2y}{dt^2}-y=0$$, ecuación diferencial homogénea de coeficientes constantes.

Sea $P(r) = r^2 - 1 = 0 \Rightarrow r_1 = 1,\ r_2 = -1$.

Luego la solución es $y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$, de donde $y = c_1 x + \dfrac{c_2}{x}$

(2) $(x+2)^2 y'' + 3(x+2)y' - 3y = 0$

Solución

Sea $x+2 = e^t \Rightarrow$ t = ln (x + 2) además: $\dfrac{dy}{dx} = e^{-t}\dfrac{dy}{dt}$; $\dfrac{d^2y}{dt^2} = e^{-2t}(\dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt})$

Reemplazando en la ecuación diferencial se tiene:

$$e^{2t}.e^{-2t}(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}) + 3e^t.e^{-t}\frac{dy}{dt} - 3y = 0$$

de donde al simplificar se tiene: $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 2\dfrac{dy}{dx} - 3y = 0$, que es una ecuación diferencial homogénea de coeficientes constantes:

Sea $P(r) = r^2 + 2r - 3 = 0$, de donde: $r_1 = -3$, $r_2 = 1$

Luego la solución es: $y(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^t$ $\qquad \therefore\ y = \dfrac{c_1}{(x+2)^3} + c_2(x+2)$

(3) $x^2 y'' + xy' + y = x(6 - \ln x)$

Solución

Sea $x = e^t \Rightarrow$ t = ln (x) además: $\dfrac{dy}{dx} = e^{-t}\dfrac{dy}{dt}$; $\dfrac{d^2y}{dt^2} = e^{-2t}(\dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt})$

Reemplazando en la ecuación diferencial se tiene:

$e^{2t}.e^{-2t}(\dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt}) + e^t.e^{-t}\dfrac{dy}{dt} + y = e^t(6-t)$, al simplificar se tiene:

$\dfrac{d^2y}{dt^2} + y = (6-t)e^t$, ecuación diferencial no homogénea de coeficientes constantes:

Sea $P(r)=r^2+1=0$, de donde: $r_1=i$, $r_2=-i$

Luego la solución complementaria es:

$y_g=c_1\cos t+c_2 \operatorname{sen} t$ y la solución particular es:

$$y_p=(At+B)e^t \Rightarrow y_p'=Ae^t+(At+B)e^t \Rightarrow y_p''=2Ae^t+(At+B)e^t$$

como $\frac{d^2y}{dt^2}+y=(6-t)e^t$ entonces $2Ae^t+2(At+B)e^t+(At+B)e^t=(6-t)e^t$

$2At+2A+2B=6-t \Rightarrow A=-\frac{1}{2},\ B=\frac{7}{2}$

Luego $y_p=-\frac{t}{2}+\frac{7}{2}$, y la solución general es: $y(t)=y_g+y_p=c_1\cos t+c_2 \operatorname{sen} t-\frac{t}{2}+\frac{7}{2}$

$$\therefore \qquad y=c_1\cos(\ln x)+c_2 \operatorname{sen}(\ln x)-\frac{1}{2}(\ln x-7)$$

4) $(2x+1)^2 y'''+2(2x+1)y''+y'=0$

Solución

Sea $2x+1=e^t \Rightarrow t=\ln(2x+1)$, además: $\frac{dy}{dx}=2e^{-t}\frac{dy}{dt}$; $\frac{d^2y}{dx^2}=4e^{-2t}(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt})$

Reemplazando en la ecuación diferencial dada:

$$e^{2t}.8e^{-3t}(\frac{d^3y}{dt^3}-3\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt})+2e^t.4e^{-2t}(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt})+2e^{-t}\frac{dy}{dt}=0$$

$$8e^{-t}[\frac{d^3y}{dt^3}-3\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}]+8e^{-t}[\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}]+2e^{-t}\frac{dy}{dt}=0$$

$$4[\frac{d^3y}{dt^3}-3\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}]+4[\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}]+\frac{dy}{dt}=0 \Rightarrow 4\frac{d^3y}{dt^3}-8\frac{d^2y}{dt^2}+5\frac{dy}{dt}=0$$

Sea $P(r)=4r^3-8r^2+5r=0$, de donde: $r_1=0,\ r_2=1+\frac{i}{2},\ r_3=1-\frac{i}{2}$

y la solución general de esta ecuación es: $y(t)=c_1+c_2e^t\cos\frac{t}{2}+c_3e^t\,\text{sen}\,\frac{t}{2}$

$$\therefore\quad y=c_1+c_2(2x+1)\cos(\frac{\ln(2x+1)}{2})+c_3(2x+1)\,\text{sen}(\frac{\ln(2x+1)}{2})$$

EJERCICIOS PROPUESTOS.-

Resolver los siguientes ejercicios:

(1) $x^2y''+2xy'-2y=0$ **Rpta:** $y=c_1\,|x|+c_2\,|x|^{-2}$

(2) $x^2y''+xy'+9y=0$ **Rpta:** $y=c_1\,\text{sen}(3\ln|x|)+c_2\cos(3\ln|x|)$

(3) $4x^2y''-8xy'+9y=0$ **Rpta:** $y=c_1x^{\frac{3}{2}}+c_2x^{\frac{3}{2}}\ln x$

(4) $x^2y''-3xy'+7y=0$ **Rpta:** $y=c_1x^2\cos\sqrt{3}\ln x+c_2x^2\,\text{sen}\,\sqrt{3}\ln x$

(5) $x^2y''+xy'-p^2y=0$, p es una constante. **Rpta:** $y=c_1\,|x|^p+c_2\,|x|^{-p}$, $p\neq 0$

(6) $x^3y'''-2x^2y''-17xy'-7y=0$ **Rpta:** $y=|x|^{-1}(c_1+c_2\ln|x|)+c_3\,|x|^7$

(7) $x^3y'''+4x^2y''-2y=0$ **Rpta:** $y=c_1\,|x|^{-1}+c_2\,|x|^{\sqrt{2}}+c_3\,|x|^{-\sqrt{2}}$

(8) $2x^2y''+xy'-y=0$ **Rpta:** $y=c_1x+\frac{c_2}{\sqrt{x}}$

(9) $x^3y'''-3x^2y''+6xy'-6y=0$ **Rpta:** $y=c_1x+c_2x^2+c_3x^3$

(10) $x^2y''+3xy'+y=0$ **Rpta:** $y=\frac{1}{x}(c_1+c_2\ln|x|)$

(11) $x^2y''+2xy'+6y=0$ **Rpta:** $y=\frac{1}{\sqrt{x}}[c_1\cos(\frac{\sqrt{23}}{2}\ln(x))+c_2\,\text{sen}(\frac{\sqrt{23}}{2}\ln(x))]$

(12) $xy''+y'=0$ **Rpta:** $y=c_1+c_2\ln|x|$

(13) $(2x+1)^2y''-2(2x+1)y'+4y=0$ **Rpta:** $y=c_1(2x+1)+c_2(2x+1)\ln(2x+1)$

(14) $x^2y'''-3xy''+3y'=0$ **Rpta:** $y=c_1+c_2x^2+c_3x^4$

(15) $(x+1)^2y'''-12y'=0$ **Rpta:** $y=c_1+\dfrac{c_2}{(x+1)^2}+c_3(x+1)^5$

(16) $y''+\dfrac{4y'}{x}+\dfrac{2}{x^2}y=0$ **Rpta:** $y=\dfrac{c_1}{x}+\dfrac{c_2}{x^2}$

(17) $y''-\dfrac{1}{x}y'+\dfrac{y}{x^2}=0$ **Rpta:** $y=x(c_1\ln x+c_2)$

(18) $y''+\dfrac{5}{x}y'+\dfrac{5}{x^2}y=0$ **Rpta:** $y=\dfrac{1}{x^2}[c_1\cos(\ln(x))+c_2\,\mathrm{sen}(\ln(x))]$

(19) $9y''+\dfrac{3}{x}y'+\dfrac{y}{x^2}=0$ **Rpta:** $y=x^{\frac{1}{3}}(c_1\ln x+c_2)$

(20) $y''+\dfrac{4}{x}y'+\dfrac{3}{x^2}y=0$ **Rpta:** $y=x^{-\frac{3}{2}}[c_1\cos(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ln(x))+c_2\,\mathrm{sen}(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ln(x))]$

(21) $y'''+\dfrac{4}{x}y''+\dfrac{8y'}{x^2}+\dfrac{y}{x^3}=0$ **Rpta:** $y=c_1x^{-1}+c_2\cos(\ln x)+c_3\,\mathrm{sen}(\ln x)$

(22) $y'''+\dfrac{4y''}{x}+\dfrac{y'}{x^2}+\dfrac{y}{x^3}=0$ **Rpta:** $y=c_1x+x^{-1}(c_2\ln x+c_3)$

(23) $y'''+\dfrac{y'}{x^2}-\dfrac{y}{x^3}=0$ **Rpta:** $y=x[c_1(\ln(x))^2+c_2\ln(x)+c_3]$

(24) $y'''+\dfrac{3y''}{x}+\dfrac{y'}{x^2}+\dfrac{y}{x^3}=0$ **Rpta:** $y=c_1x^{-1}+x^{\frac{1}{2}}[c_1\cos(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ln x)+c_2\,\mathrm{sen}(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ln x)]$

(25) $y''+\dfrac{5}{x-1}y'+\dfrac{4}{(x-1)^2}y=0$ **Rpta:** $y=(x-1)^{2}[c_1\ln(x-1)+c_2]$

(26) $y''+\dfrac{7y'}{x-2}+\dfrac{12y}{(x-2)^2}=0$ **Rpta:** $y=x^{-3}[c_1\cos(\sqrt{3}\ln(x-2)+c_2\,\text{sen}(\sqrt{3}\ln(x-2))]$

(27) $4y''+\dfrac{y}{(x-a)^2}=0$ **Rpta:** $y=\sqrt{x-a}\,[c_1\ln(x-a)+c_2]$

(28) $y''+\dfrac{y'}{x+a}-\dfrac{8y}{(x+a)^2}=0$ **Rpta:** $y=c_1(x+a)^4+c_2(x+a)^{-2}$

(29) $y'''+\dfrac{3y''}{x+a}+\dfrac{y'}{(x+a)^2}-\dfrac{y}{(x+a)^3}=0$

Rpta: $y=c_1(x+a)+(x+a)^{-\frac{1}{2}}[c_2\cos(\frac{3}{2}\ln(x+a))+c_3\,\text{sen}(\frac{3}{2}\ln(x+a))]$

(30) $x^2y''-xy'+y=2x$ **Rpta:** $y=x[c_1+c_2\ln(x)+c_3\ln^2(x)]$

(31) $x^2y''+4xy'+2y=2\ln x$ **Rpta:** $y=\dfrac{c_1}{x}+\dfrac{c_2}{x^2}+Lnx-\dfrac{3}{2}$

(32) $x^2y''-xy'-3y=-\dfrac{16\ln x}{x}$ **Rpta:** $y=\dfrac{1}{x}(c_1+c_2x^4+\ln(x)+2\ln^2(x))$

(33) $x^2y''+xy'+9y=\text{sen}(\ln x^3)$ **Rpta:** $y=y_g-\dfrac{1}{6}(\ln(x))\cos(\ln x^3)$

(34) $x^3y'''+4x^2y''+xy'+y=x$ **Rpta:** $y=y_g+\dfrac{x}{2}$

(35) $x^2y''+4xy'+2y=2\ln^2x+12x$ **Rpta:** $y=\dfrac{c_1}{x}+\dfrac{c_2}{x^2}+\ln^2x-3\ln x+2x+7$

(36) $x^2y''+xy'-y=x^m$, $|m|\neq 1$ **Rpta:** $y=\dfrac{x^m}{m^2-1}+c_1x+\dfrac{c_2}{x}$

(37) $x^2y''-2xy'+2y=x^2-2x+2$ **Rpta:** $y=c_1x+c_2x^2+1+(x^2+2x)\ln x$

(38) $x^2\dfrac{dy}{dx^2}+x\dfrac{dy}{dx}-y=0$ **Rpta:** $y=c_1x+\dfrac{c_2}{x^2}$

(39) $\dfrac{d^2y}{dx^2}-\dfrac{2}{x}\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{2y}{x^2}=x\ln(x)$ **Rpta:** $y=c_1x+c_2x^2+\dfrac{x^3}{2}(\ln(x))-\dfrac{3x^3}{4}$

(40) $x^2y''-2xy'+2y=0$ **Rpta:** $y=c_1x+c_2x^2$

(41) $x^2y''-6y=0$ **Rpta:** $y=c_1x^3+c_2x^2$

(42) $x^2y''+\dfrac{y}{4}=0$ **Rpta:** $y=(c_1+c_2\ln(x))\sqrt{x}$

(43) $x^2y''-xy'+y=0$ **Rpta:** $y=[c_1+c_2\ln(x)]x$

(44) $x^2y''-4xy'+4y=0$, $y(1)=4$, $y'(1)=13$ **Rpta:** $y=x+3x^4$

(45) $x^2y''-3xy'+3y=0$, $y(1)=0$, $y'(1)=-2$ **Rpta:** $y=x-x^3$

(46) $x^2y''-3xy'+4y=0$, $y(1)=1$, $y'(1)=3$ **Rpta:** $y=(1+\ln(x))x^2$

(47) $x^3y'''+x^2y''-2xy'+2y=0$ **Rpta:** $y=\dfrac{c_1}{x}+c_2x+c_3x^2$

(48) $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+3x\dfrac{dy}{dx}+y=0$ **Rpta:** $y=(c_1+c_2\ln x)\dfrac{1}{x}$

(49) $y''=\dfrac{2y}{x^2}$ **Rpta:** $y=c_1x^2+\dfrac{c_2}{x}$

(50) $x^2y''-4xy'+6y=x$ **Rpta:** $y=c_1x^3+c_2x^2+\dfrac{x}{2}$

(51) $(1+x)^2y''+3(1+x)y'+4y=(1+x)^3$ **Rpta:** $y=(x+1)^2[c_1+c_2\ln(x+1)]+(x+1)^2$

52) $x^2y''+xy'+4y=0$ **Rpta:** $y=c_1\cos(2\ln(x)+c_2\operatorname{sen}(2+\ln(x))$

53) $x^2y''+4xy'+2y=0$ **Rpta:** $y=c_1x^{-1}+c_2x^{-2}$

54) $(x-1)^2y''+8(x-1)y'+12y=0$ **Rpta:** $y=c_1(x-1)^{-3}+c_2(x-1)^{-4}$

55) $2x^2y''-4xy'+6y=0$ **Rpta:** $y=c_1|x|^{\frac{3}{2}}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln|x|)+c_2|x|^{\frac{3}{2}}\operatorname{sen}(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln|x|)$

56) $(x-2)^2y''+5(x-2)y'+8y=0$

Rpta: $y=c_1(x-2)^{-2}\cos(2\ln|x-2|)+c_2(x-2)^{-2}\operatorname{sen}(2\ln|x-2|)$

57) $x^2y''+7xy'+5y=x$ **Rpta:** $y=c_1x^{-1}+c_2x^{-5}+c_2x^{-5}+\frac{x}{12}$

58) $x^2y''-3xy'+4y=\ln x$ **Rpta:** $y=c_1x^2+c_2x^2Ln\ x+\frac{1}{4}Ln\ x+\frac{1}{4}$

59) $x^2y''-2xy'+2y=3x^2+2\ln x$ **Rpta:** $y=c_2x+c_2x^2+x^2\ln x+\ln x+\frac{3}{2}$

60) $x^2y''+xy'+4y=\operatorname{sen}(\ln x)$ **Rpta:** $y=c_1\cos(2\ln x)+c_2\operatorname{sen}(2\ln x)+\frac{1}{3}\operatorname{sen}(\ln x)$

61) $3x^2y''+12xy'+9y=0$ **Rpta:** $y=c_1x^{-\frac{3}{2}}\cos(\frac{3}{2}\ln x)+c_2\ln x+c_2x^{-\frac{3}{2}}\operatorname{sen}(\frac{3}{2}\ln x)$

62) $x^2\frac{d^2y}{dx}+4x\frac{dy}{dx}+2y=\cos x+\frac{1}{x}$ **Rpta:** $y=\frac{c_1}{x}+\frac{c_2}{x^2}-\frac{\cos x}{x^2}+\frac{\ln x}{x}$

63) $(x+1)^3y''+3(x+1)^2y'+(x+1)y=6\ln(x+1)$ **Rpta:** $y=\frac{c_1+c_2\ln(x+1)+Ln^3(x+1)}{x+1}$

64) $x^3\frac{d^3y}{dx^3}-3x^2\frac{d^2y}{dx^2}+6x\frac{dy}{dx}-6y=0$ **Rpta:** $y=c_1x+c_2x^2+c_3x^3$

(65) $x^3\dfrac{d^3y}{dx^3}-x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}-6x\dfrac{dy}{dx}+18y=0$ **Rpta:** $y=(c_1+c_2\ln x)x^3+c_3x^{-2}$

(66) $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+x\dfrac{dy}{dx}+4y=2x\ln x,\quad x>0$

Rpta: $y=c_1\operatorname{sen}(\ln x^2)+c_2\cos(\ln x^2)+\dfrac{x\ln x^2}{5}-\dfrac{4x}{25}$

(67) $x^3\dfrac{d^3y}{dx^3}-x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}-2x\dfrac{dy}{dx}-2y=x^3$ **Rpta:** $y=(c_1+c_2\ln x)x+c_3x^2+\dfrac{x^3}{3}$

(68) $(2x-3)^2\dfrac{d^2y}{dx^2}-6(2x-3)\dfrac{dy}{dx}+12y=0$ **Rpta:** $y=c_1(2x-3)+c_2(2x-3)$

(69) $x^2y''-xy'+\dfrac{3}{4}y=0$

(70) $x^3y'''-3x^2y''+6xy'-6y=0$

(71) $xy'''+3y''=0$

(72) $x^3\dfrac{d^3y}{dx^3}+4x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}-5x\dfrac{dy}{dx}-15y=x^3$

(73) $x^2y''+xy'-9y=x^3+1$

(74) $x^3y'''+4x^2y''-8xy'+8y=0$

(75) $x^2y'''+xy''+4y'=1+\cos(2\ln x)$

(76) $(3+x)^3\dfrac{d^3y}{dx^3}+3(3+x)^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+(6+2x)\dfrac{dy}{dx}=0$

CAPÍTULO VI

6. OPERADORES DIFERENCIALES.-

Supongamos que D denota la diferenciación con respecto a x, D^2 la segunda diferenciación con respecto a x y así sucesivamente, es decir, para el entero k positivo.

$$D^k y = \frac{d^k y}{dx^k}$$

Luego a la expresión: $L(D) = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_{n-1} D + a_n$

se le llama OPERADOR DIFERENCIAL DE ORDEN "n"; y es tal que, al aplicarse a cualquier función "y" produce el resultado siguiente:

$$\{L(D)\}(y) = a_0 D^n y + a_1 D^{n-1} y + \ldots + a_{n-1} Dy + a_n y$$

donde los coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ pueden ser funciones de x ó constantes.

Observación.- Dos operadores L_1 y L_2 son iguales si y sólo si producen el mismo resultado sobre alguna función.

es decir: $\boxed{L_1 = L_2 \iff L_1(y) = L_2(y)}$

Observación.- $(L_1 . L_2) y = L_1(L_2(y))$, y si los operadores L_1 y L_2 tienen coeficientes constantes entonces se cumple.

$$L_1 . L_2 = L_2 . L_1$$

6.1. LEYES FUNDAMENTALES DE OPERADORES.-

1. $L_1 + L_2 = L_2 + L_1$
2. $(L_1 + L_2) + L_3 = L_1 + (L_2 + L_3)$
3. $(L_1 . L_2) . L_3 = L_1 . (L_2 . L_3)$
4. $L_1 . (L_2 + L_3) = L_1 . L_2 + L_1 L_3$
5. Si $m, n \in Z^+ \Rightarrow D^{m+n} = D^m . D^n$

6.2. PROPIEDADES.-

Sean m, n, r, k constantes reales r, k $\in z^{+}$, entonces se cumple

1ro $D^{k}(e^{rx}) = r^{k}e^{rx}$

ahora deduciremos el efecto de un operador L sobre e^{mx}.

para esto, Sea: $L(D) = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1}D + a_n$

$$\Rightarrow \{L(D)\}(e^{mx}) = a_0 \; D^n e^{mx} + a_1 D^{n-1}e^{mx} + \dots + \; a_{n-1}De^{mx} + a_n e^{mx}$$

$$= a_0 \; m^n e^{mx} + a_1 m^{n-1} e^{mx} + \dots + a_{n-1} m e^{mx} + a_n e^{mx}$$

$$\underbrace{e^{mx}(a_0 m^n + a_1 m^{n-1} + \dots + a_{n-1} m + a_n)}_{L(m)}$$

Es decir: $\{L(D)\}(e^{mx}) = e^{mx}L(m)$; por lo tanto se tiene:

2do $\{L(D)\}(e^{mx}) = e^{mx}L(m)$

Observación.- Si m es raíz de L (m) = 0, entonces $L(D)e^{mx} = 0$

Determinar el efecto del operador $(D-m)^k$ sobre $x^k e^{mx}$, es decir:

$$(D-m)(x^k e^{mx}) = kx^{k-1}e^{mx} + mx^k e^{mx} - mx^k e^{mx} = kx^{k-1}e^{mx}$$

$$(D-m)^2(x^k e^{mx}) = k(k-1)x^{k-2}e^{mx}$$

$$(D-m)^3(x^k e^{mx}) = k(k-1)(k-2)x^{k-3}e^{mx}$$

.

.

.

$(D-m)^k(x^k e^{mx}) = k!e^{mx} = e^{mx}D^k x^k$, por lo tanto:

3ro $(D-m)^k(x^k e^{mx}) = k!e^{mx}$

Observación.- Si, n > k $\Rightarrow (D-m)^n(x^k e^{mx}) = 0$

4^to^ Para cada función con "n" derivando se cumple: $(D-m)^n(e^{mx}u)=e^{mx}D^n u$

5^to^ Si $L(D)=(D-r)^k\varphi\ (D)$ entonces

$$L(D)(x^k e^{rx})=(D-r)^k\varphi\ (D)(x^k e^{rx})=k!(e^{rx})\varphi\ (D)=k!\varphi\ (r)e^{rx}$$

$$\Rightarrow\ \frac{1}{L(D)}e^{rx}=\frac{x^k e^{rx}}{k!\varphi(r)}$$

Ejemplo. $D(D-2)^3(D+1)y=e^{2x}$

6^to^ Si L es un polinomio $\Rightarrow L(D)(e^{rx}u)=e^{rx}L(D+r)u$

Ejemplo.- $(D-3)^2(D+1)^3(y)=x^2e^{2x}$

6.3. MÉTODOS ABREVIADOS.-

1^ro^ La ecuación $(D-r)^n y=e^{rx}(b_0+b_1x+\ldots\ldots+b_px^p)$, $b_p\neq 0$

tiene una solución particular única de la forma: $y_p=x^n e^{rx}R_p(x)$

donde $R_p(x)$ es un polinomio de grado p, dado por:

$$R_p(x)=\frac{b_0}{1.2.3.\ldots.n}+\frac{b_1x}{2.3.\ldots.(n+1)}+\ldots.+\frac{b_px^p}{(p+1)(p+2)\ldots\ldots(p+n)}$$

2^do^ La ecuación $(D-r)^n y=e^{sx}Q_p(x)$, $r\neq s, r, s\in$ donde $Q_p(x)$ es un polinomio de grado "p"; tiene una solución particular única de la forma:

$$y_p=e^{rx}u \quad \text{donde} \quad u=e^{ax}(b_0+b_1x+\ldots+b_px^p)$$

donde a = s - r y luego aplicamos el método de los coeficientes indeterminados.

3^ro^ La ecuación $(a_0D^n+a_1D^{n-1}+\ldots+a_{n-1}D+a_n)y=R_0$ con R_0 = constante y $a_n\neq 0$; tiene como solución particular a $y_p=\dfrac{R_0}{a_n}$

4to La ecuación $(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + ... + a_k D^{n-k})y = R_0$ con R_0 = constante y $a_k \neq 0$; tiene como solución particular a $y_p = \frac{R_0 x^k}{a_k}$

5to Aplicamos ahora el operador inverso: $\frac{1}{L(D)}$. definido por $\frac{1}{L(D)}(L(D))y = y$ ahora si aplicamos este operador a: $(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + ... + a_n)y = b(x)$ se obtiene:

$$y = \frac{1}{L(D)}.(b(x))$$

es decir: $y = \frac{1}{D - r_1} . \frac{1}{D - r_2} . \frac{1}{D - r_3} ... \frac{1}{D - r_n} b(x)...(*)$

La ecuación (*) se resuelve de acuerdo al siguiente cuadro.

Hacer	Por Resolver	Obtener
$z = \frac{1}{D - r_n} b(x)$	$z' - r_n z = b(x)$	$z = e^{r_n x} \int e^{-r_n x} b(x) dx$
$v = \frac{1}{D - r_n - 1} z(x)$	$v' - r_{n-1} v = z(x)$	$v = e^{r_{n-1} x} \int e^{-r_{n-1} x} z(x) dx$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$y = \frac{1}{D - r_1} w(x)$	$y' - r_1 y = w(x)$	$y = e^{r_1 x} \int e^{-r_1 x} w(x) dx$

Obtenemos $\quad y = e^{r_1 x} \int e^{(r_2 - r_1)x} \int e^{(r_3 - r_2)x} ... \int e^{(r_n - r_{n-1})x} \int e^{-r_n x)x} b(x)(dx)^n$

6to Suponiendo que $f(D) = (D - r_1)(D - r_2)...(D - r_n)$ en el cual los factores son todos distintos, entonces existe el desarrollo de fracciones parciales.

$\frac{1}{f(D)} = \frac{A_1}{D - r_1} + \frac{A_2}{D - r_2} + ... + \frac{A_n}{D - r_n}$, en el que $A_1, ..., A_n$ son constantes. Entonces:

$$y = A_1 e^{r_1 x}\int b(x)e^{-r_1 x}dx + A_2 e^{r_2 x}\int b(x)e^{-r_2 x} + \dots + A_n e^{r_n x}\int e^{-r_n x} b(x)dx$$

al calcular tanto las integrales de 5^{to} , 6^{to} se descartaran las constantes de integración cuando aparecen, de otro modo estaríamos calculando la primitiva en vez de la integral particular de la ecuación diferencial.

7^{to} Una integral particular de una ecuación diferencial lineal F(D)(y) = b(x) con coeficientes constante está dado por $\phi_p = \frac{1}{F(D)}b(x)$ y para ciertas formas de b(x) se abrevian el cálculo de éste operador.

a) Si $b(x) = e^{\alpha x} \Rightarrow \phi_p = \frac{1}{F(D)}e^{\alpha x} = \frac{1}{F(\alpha)}e^{\alpha x};\ F(\alpha) \neq 0$

b) Si $b(x) = \text{sen}(\alpha x + \beta)$ ó $b(x) = \cos(\alpha x + \beta)$ entonces

$$\phi_p = \frac{1}{F(D^2)}\text{sen}(\alpha x + \beta) = \frac{1}{F(-\alpha^2)}\text{sen}(\alpha x + \beta);\ F(-\alpha^2) \neq 0$$

ó $\phi_p = \frac{1}{F(D^2)}\cos(\alpha x + \beta) = \frac{1}{F(-\alpha^2)}\cos(\alpha x + \beta);\ F(-\alpha^2) \neq 0$

c) Si $b(x) = x^p \Rightarrow \phi_p = \frac{1}{F(D)}x^p = (a_0 + a_1 D + a_2 D^2 + \dots + a_p D^p)x^p, a_0 \neq 0$

Obtenido desarrollando $\frac{1}{F(D)}$, según potencias crecientes de D y suprimiendo todos los términos potencias D^p, puesto que $D^n x^p = 0$ para n > p

d) Si $b(x) = e^{\alpha x}R(x) \Rightarrow \phi_p = \frac{1}{F(D)}e^{\alpha x}R(x) =$

e) Si $b(x) = xR(x) \Rightarrow \phi_p = \frac{1}{F(D)}xR(x) = x\frac{1}{F(D)}R(x) - \frac{F'(D)}{(F(D))^2}R(x)$

f) $\frac{1}{F_1(D)F_2(D)}b(x) = \frac{1}{F_1(D)}.\frac{1}{F_2(D)}b(x) \Rightarrow \phi_p\ \frac{1}{F_1(D)}[\frac{1}{F_2(D)}b(x)]$

g) $\dfrac{1}{F(D)}\operatorname{senh}(ax)=\dfrac{F(-D)}{F(a).F(-a)}\operatorname{senh}(ax)$ si F(a) . F(-a) $\neq 0$

h) $\dfrac{1}{F(D)}\cosh(ax)=\dfrac{F(-D)}{F(a).F(-a)}\cosh(ax)$ si F(a) . F(-a) $\neq 0$

i) $\dfrac{1}{(D^2+a^2)^n}\operatorname{sen} ax=\dfrac{x^n}{(2a)^n n!}\operatorname{sen}(ax-\dfrac{n\pi}{2})$

j) $\dfrac{1}{(D^2+a^2)^n}\cos ax=\dfrac{x^n}{(2a)^n n!}\cos(ax-\dfrac{n\pi}{2})$

Observación:

$$\begin{cases} e^{i\beta x}=\cos\beta x+i\operatorname{sen}\beta x \\ e^{-i\beta x}=\cos\beta x-i\operatorname{sen}\beta x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\beta x=\dfrac{e^{i\beta x}+e^{-i\beta x}}{2} \\ \operatorname{sen}\beta x=\dfrac{e^{i\beta x}+e^{-i\beta x}}{2i} \end{cases}$$

$$\begin{cases} e^{\beta x}=\cosh\beta x+\operatorname{senh}\beta x \\ e^{-\beta x}=\cosh\beta x-\operatorname{sen}\beta x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{senh}\beta x=\dfrac{e^{\beta x}-e^{-\beta x}}{2} \\ \cosh\beta x=\dfrac{e^{\beta x}+e^{-\beta x}}{2} \end{cases}$$

a) **Ejemplos.-** Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales.

1 $(D^4-8D^2+16)(y)=xe^{2x}$

Solución

$F(D)=D^4-8D^2+16=0 \Rightarrow r_1=r_2=2,\ r_3=r_4=-2$

Luego la solución general de la ecuación homogénea es:

$\phi c(x)=(c_1+c_1x)e^{2x}+(c_2+c_3x)e^{-2x}$, para la solución particular se tiene:

$\phi_p(x)=\dfrac{1}{F(D)}xe^{2x}=\dfrac{xe^{2x}}{(D-2)^2(D+2)^2}$ donde $r_1=2,\ r_2=2,\ r_3=-2,\ r_4=-2$

$$\phi_p(x)=e^{r_1x}\int e^{(r_2-r_1)x}\int e^{(r_3-r_2)x}\int e^{(r_4-r_3)x}\int e^{-r_4x}b(x)(dx)^4$$

$$\phi_p(x)=e^{2x}\int e^{0}\int e^{-4x}\int e^{0}\int e^{2x}xe^{2x}(dx)^4=e^{2x}\int\int e^{-4x}\int\int xe^{4x}(dx)^4$$

$$=e^{2x}\int\int e^{-4x}.e^{4x}(\frac{x}{16}-\frac{3}{32})(dx)^2=e^{2x}\int\int(\frac{x}{16}-\frac{3}{32})(dx)^2$$

$$\phi_p(x)=e^{2x}(\frac{x^3}{96}-\frac{3x^2}{64})$$

$$\therefore\ y=\phi c(x)+\phi\ p(x)=(c_0+c_1x)e^{2x}+(c_3+c_4x)e^{-2x}+e^{2x}(\frac{x^3}{96}-\frac{3x^2}{64})$$

2) $D(D-1)^3(y)=(x^2+2x)=e^x$

Solución

$P(r)=r(r-1)^3=0 \Rightarrow r_1=0,\ r_2=r_3=r_4=1$, entonces

$\phi c(x)=c_1+(c_2+c_3x+c_4x^2)e^x$; ahora calcularemos la solución particular:

$$\phi p(x)=\frac{1}{D(D-1)^3}(x^2+2x)e^{2x}=\frac{1}{D(D-1)^2}[\frac{1}{D-1}(x^2+2x)e^x] \qquad \textbf{... (1)}$$

haciendo $z=\frac{1}{D-1}(x^2+2x)e^x$ entonces: $\frac{dz}{dx}-z=(x^2+2x)e^x$ cuya solución es

$z=e^{-\int -dx}[\int e^{\int -dx}(x^2+2x)e^xdx]=e^x\int(x^2+2x)dx=(\frac{x^3}{3}+x^2)e^x$ reemplazando en (1)

$$\phi p(x)=\frac{1}{D(D-1)^2}[\frac{x^3}{3}+x^2]e^x=\frac{1}{D(D-1)}[\frac{1}{D-1}(\frac{x^3}{3}+x^2)e^x] \qquad \textbf{... (2)}$$

Sea $z=\frac{1}{D-1}(\frac{x^3}{3}+x^2)e^x$ entonces $\frac{dz}{dx}-z=(\frac{x^3}{3}+x^2)e^x$, cuya solución es:

$z=e^{-\int -dx}[\int e^{\int -dx}(\frac{x^3}{3}+x^2)e^xdx]=e^x[\frac{x^4}{12}+\frac{x^3}{3}]$, reemplazando en (2)

$$\phi p(x)=\frac{1}{D(D-1)}(\frac{x^4}{12}+\frac{x^3}{3})e^x=\frac{1}{D}[\frac{1}{D-1}(\frac{x^4}{12}+\frac{x^3}{3})e^x] \qquad \text{... (3)}$$

Sea $z=\frac{1}{D-1}(\frac{x^4}{12}+\frac{x^3}{3})e^x$ entonces $\frac{dz}{dx}-z=(\frac{x^4}{12}+\frac{x^3}{3})e^x$ cuya solución es:

$z=e^{-\int -dx}[\int e^{\int -dx}(\frac{x^4}{12}+\frac{x^3}{3})e^x dx]=e^x(\frac{x^5}{60}+\frac{x^4}{12})$, reemplazando en (3).

$$\phi_p(x)=\frac{1}{D}(\frac{x^5}{60}+\frac{x^4}{12})e^x \Rightarrow \phi_p(x)=\int(\frac{x^5}{60}+\frac{x^4}{12})e^x dx=\frac{x^5}{60}e^x$$

La solución general de la ecuación es: $\phi(x)=\phi_c(x)+\phi_p(x)$

$$\therefore\ \phi(x)=c_1+(c_2+c_3x+c_4x^2)e^x+\frac{x^5}{60}e^x$$

(3) $(D-1)^3(D-2)^3y=x^2e^{3x}$

Solución

Sea $P(r)=(r-1)^3(r-2)^3=0 \Rightarrow r_1=1$ de multiplicidad 3 y $r_2=2$ de multiplicidad 3

$$y_c=(c_1+c_2+c_3x^2)e^x+(c_4+c_5x+c_6x^2)e^{2x}$$

ahora calcularemos la solución particular.

$$y_p=\frac{1}{(D-1)^3(D-2)^3}x^2e^{3x}=e^{3x}\frac{1}{(D+2)^3(D+1)^3}x^2$$

$$=e^{3x}\frac{1}{(D+2)^3}[\frac{1}{D^3+3D^2+3D+1}x^2]$$

$$y_p=e^{3x}\frac{1}{(D+2)^3}(1-3D+6D^2)x^2=e^{3x}\frac{1}{(D+2)^3}(x^2-6x+12)$$

$$y_p=e^{3x}\frac{1}{D^3+6D^2+12D+8}(x^2-6x+12)$$

$$y_p = e^{3x}(\frac{1}{8} - \frac{3}{16}D + \frac{3}{16}D^2)(x^2 - 6x + 12) \quad \Rightarrow \quad y_p = e^{3x}(\frac{x^2}{8} - \frac{9}{8}x + 3)$$

La solución general es: $\quad y = y_c + y_p$

4 $\quad (D^3 - 4D^2 + 3D)(y) = x^2$

Solución

Sea $\; P(r) = r^3 - 4r + 3r = 0 \;\Rightarrow\; r_1 = 0,\; r_2 = 1,\; r_3 = 3$

de donde $\; \phi_c(x) = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{3x}$; ahora calcularemos la solución particular.

$$\phi_p(x) = \frac{1}{D^3 - 4D^2 + D)}x^2 = \frac{1}{D}(\frac{1}{D^2 - 4D + 1})x^2$$

$$\phi_p(x) = \frac{1}{D}(\frac{1}{3} + \frac{4}{9}D + \frac{13}{27}D^2)x^2 = \frac{1}{D}(\frac{x^2}{3} + \frac{8x}{9} + \frac{26}{27}) \;\Rightarrow\; \phi_p(x) = \frac{x^3}{9} + \frac{4x^2}{9} + \frac{26}{27}x$$

Luego la solución general de la ecuación es: $\quad y = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{3x} + \frac{x^3}{9} + \frac{4x^2}{9} + \frac{26}{27}x$

5 $\quad (D^2 - 1)(y) = x^2$

Solución

Sea $\; P(r) = r^2 - 1 = 0 \;\Rightarrow\; r_1 = 1,\; r_2 = -1$; de donde $\; \phi_c(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$

calculando la solución particular se tiene: $\quad \phi_p(x) = \frac{1}{D^2 - 1}x^2 = (-1 - D^2)x^2 = -x^2 - 2$

Luego la solución general es $\; \phi(x) = \phi_c(x) + \phi_p(x)$

$$\therefore \quad \phi(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - x^2 - 2$$

6 $\quad D^4(D^2 - 1)(y) = x^2$

Solución

Sea $\; P(r) = r^4(r^2 - 1) = 0 \Rightarrow r_1 = 0$ multiplicidad 4 y $\; r_2 = 1,\; r_3 = -1$ de donde

$\phi_c(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3 + c_5e^x + c_6e^{-x}$; ahora calcularemos la solución particular

$$\phi_p(x) = \frac{1}{D^4(D^2-1)}x^2 = \frac{1}{D^4}(-1-D^2)x^2 = \frac{1}{D^4}(-x^2-2)$$

$$\phi_p(x) = \frac{1}{D^3}(-\frac{x^2}{3}-2x) = \frac{1}{D^2}(-\frac{x^4}{12}-x^2) = \frac{1}{D}(-\frac{x^5}{60}-\frac{x^3}{3}) \Rightarrow \phi_p(x) = -\frac{x^6}{360}-\frac{x^4}{12}$$

y la solución general es $\phi(x) = \phi_c(x) + \phi_p(x)$

7. $(D^4 + 10D^2 + 9)(y) = \cos(4x+6) + \operatorname{sen}(2x+3)$

Solución

Sea $P(r) = r^4 + 10r^2 + 9 = 0 \Rightarrow (r^2+1)(r^2+9) = 0$

de donde $r_1 = i,\ r_2 = -i,\ r_3 = 3i,\ r_4 = -3i$ entonces

$y_c = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + c_3 \cos 3x + c_4 \operatorname{sen} 3x$; calculando la solución particular.

$$y_p = \frac{1}{D^4+10D^2+9} = (\cos(4x+6) + \operatorname{sen}(2x+3))$$

$$y_p = \frac{1}{(D^2+1)(D^2+9)}\cos(4x+6) + \frac{1}{(D^2+1)(D^2+9)}\operatorname{sen}(2x+3)$$

$$y_p = \frac{1}{(-16+1)(-16+9)}\cos(4x+6) + \frac{1}{(-4+1)(-4+9)}\operatorname{sen}(2x+3)$$

$y_p = \dfrac{\cos(4x+6)}{105} - \dfrac{1}{15}\operatorname{sen}(2x+3)$; y la solución general es $y = y_c + y_p$

8. $(D^4 + 3D^3 - 15D^2 - 19D + 30)(y) = e^{4x}$

Solución

Sea $P(r) = r^4 + 3r^3 - 15r^2 - 19r + 30 = 0$ de donde

$r_1 = 1,\ r_2 = 3,\ r_3 = -2,\ r_4 = -5$ entonces $y_c = c_1e^x + c_2e^{3x} + c_3e^{-2x} + c_4e^{-5x}$

calculando la solución particular se tiene: $y_p = \dfrac{1}{D^4+3D^3-15D^2-19D+30}e^{4x}$

$$y_p = \frac{1}{(D-1)(D-3)(D+2)(D+5)}e^{4x} = \frac{1}{(4-1)(4-3)(4+2)(4+5)}e^{4x} = \frac{e^{4x}}{162}$$

Luego la solución general de la ecuación es: $y = c_1e^{x} + c_2e^{3x} + c_3e^{-2x} + c_4e^{-5x} + \dfrac{e^{4x}}{162}$

9. $(D^8+39D^6+138D^4+126D^2+900)(y) = \operatorname{sen}(4x+1)+\cos(6x+2)$

Solución

$P(r) = r^8+39r^6+138r^4+126r^2+900 = 0$ de donde

$(r^2+1)(r^2+9)(r^2+4)(r^2+25) = 0 \Rightarrow$ se tiene

$r_1 = i,\ r_2 = -i,\ r_3 = 3i,\ r_4 = -3i,\ r_5 = 2i,\ r_6 = -2i,\ r_7 = 5i,\ r_8 = -5i$

$$y_c = c_1\cos x + c_2\operatorname{sen} x + c_3\cos 3x + c_4\operatorname{sen} 3x + c_5\cos 2x + c_6\operatorname{sen} 2x + c_7\cos 5x + c_8\operatorname{sen} 5x$$

ahora calculando la solución particular:

$$y_p = \frac{1}{D^8+39D^6+138D^4+126D^2+900}[\operatorname{sen}(4x+1)+\cos(6x+2)]$$

$$y_p = \frac{1}{(D^2+1)(D^2+9)(D^2+4)(D^2+25)}\operatorname{sen}(4x+1) +$$

$$+\frac{1}{(D^2+1)(D^2+9)(D^2+4)(D^2+25)}\cos(6x+1)$$

$$y_p = \frac{\operatorname{sen}(4x+1)}{(-16+1)(-16+9)(-16+4)(-16+25)} + \frac{\cos(6x+1)}{(-36+1)(-36+9)(-36+4)(-36+25)}$$

$$y_p = -\frac{1}{11340}\operatorname{sen}(4x+1) + \frac{1}{332640}\cos(6x+1)$$

La solución general es $\phi(x) = y_c + y_p$

(10) $(D^2+3D+2)(y) = x\cos 2x$

Solución

Sea $P(r)=r^2+3r+2=0 \Rightarrow r_1=-1,\ r_2=-2$ entonces $y_c=c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}$

ahora hallaremos la solución particular

$$y_p=\frac{1}{D^2+3D+2}x\cos 2x = x\frac{1}{D^2+3D+2}\cos 2x-\frac{2D+3}{(D^2+3D+2)^2}\cos 2x$$

$$y_p=x\frac{\cos 2x}{D^2+3D+2}-\frac{2D+3}{D^4+6D^3+13D^2+12D+4}.\cos 2x$$

$$y_p=x\frac{1}{-4+3D+2}\cos 2x-\frac{2D+3}{(-4)^2+6(-4)D+13(-4)+12D+4}\cos 2x$$

$$y_p=x\frac{1}{3D-2}\cos 2x+\frac{2D+3}{4(3D+8)}\cos 2x = x\frac{3D+2}{9D^2-4}\cos 2x+\frac{(2D+3)(3D-8)}{4(9D^2-64)}\cos 2x$$

$$y_p=\frac{x}{-40}(3D+2)\cos 2x+\frac{1}{4}(\frac{6D^2-7D-24}{-100})\cos 2x$$

$$y_p=\frac{x}{-20}(3\operatorname{sen} 2x-\cos 2x)+\frac{1}{200}(24\cos 2x-7\operatorname{sen} 2x) \quad \therefore \quad \phi(x)=y_c+y_p$$

(11) $(D^4+8D^2+9)(y)=\cos 3x+e^{2x}$

Solución

Sea $P(r)=r^4+8r^2-9=0 \Rightarrow r_1=1,\ r_2=-1,\ r_3=3i,\ r_4=-3i$

$\phi_c(x)=c_1e^x+c_2e^{-x}+c_3\cos 3x+c_4\operatorname{sen} 3x$; calculando la solución particular se tiene:

$$\phi_p(x)=\frac{1}{D^4+8D^2-9}(\cos 3x+e^{2x})=\frac{1}{(D^2+9)(D^2-1)}\cos 3x+\frac{1}{(D^2+9)(D^2-1)}e^{2x}$$

$\phi_p(x)=\dfrac{1}{D^2+9}\dfrac{\cos 2x}{10}+\dfrac{e^{2x}}{39}$; pero se observa que $\cos 3x=\operatorname{Re}(e^{3ix})$ entonces

$$\phi_p(x)=-\frac{1}{10(D^2+9)}\cos 3x+\frac{e^{2x}}{39}=-\frac{1}{10}\frac{e^{3ix}}{(D+3i)^2+9}+\frac{e^{2x}}{39}$$

$$\phi_p(x)=-\frac{1}{10}\frac{e^{3ix}}{D^2+6iD}+\frac{1}{39}e^{2x}\quad\Rightarrow\quad a_0(D+6i)=1\quad\Rightarrow\quad a_0=\frac{1}{6i}$$

$$\phi_p(x)=\frac{\operatorname{Re}(e^{3ix})}{60i}+\frac{e^{2x}}{39}=x(\frac{i\cos 3x-\operatorname{sen}3x}{60})+\frac{e^{2x}}{39}\quad\Rightarrow\quad \phi_p(x)=-\frac{x\operatorname{sen}3x}{60}+\frac{e^{2x}}{39}$$

Luego la solución general es: $y=\phi_c(x)+\phi_p(x)$

12 $(D+1)(D-2)^3(y)=x^2e^{2x}+xe^x$

Solución

Sea $P(r)=(r+1)(r-2)^3=0\ \Rightarrow\ r_1=-1,\ r_2=2$ multiplicidad 3.

entonces $y_c(x)=c_1e^{-x}+c_2e^{2x}+c_3xe^{2x}+c_4x^2e^{2x}$

calculando la solución particular se tiene:

$$y_p=\frac{1}{(D+1)(D-2)^3}(x^2e^{2x}+xe^x)=\frac{1}{(D+1)(D-2)^2}[\frac{1}{D-2}(x^2e^{2x}+xe^x)]\qquad \text{... (1)}$$

Sea $z=\frac{1}{D-2}(x^2e^{2x}+xe^x)$ de donde: $\frac{dz}{dx}-2z=x^2e^{2x}+xe^x$, ecuación lineal en z.

$$z=e^{-\int -2dx}[\int e^{\int -2dx}(x^2e^{2x}+xe^x)dx]\quad\Rightarrow\quad z=e^{2x}[\int e^{-2x}(x^2e^{2x}+xe^x)dx]$$

$$z=e^{2x}\int(x^2+xe^{-x})dx=e^{2x}(\frac{x^3}{3}-xe^{-x}-e^{-x})=\frac{x^3}{3}e^{2x}-xe^x-e^{2x}\qquad \text{... (2)}$$

reemplazando (2) en (1) se tiene:

$$y_p=\frac{1}{(D+1)(D-2)^2}(\frac{x^3}{3}e^{2x}-xe^x-e^{2x})=\frac{1}{(D+1)(D-2)}[\frac{1}{D-2}(\frac{x^3}{3}e^{2x}-xe^x-e^{2x})]\ \text{... (3)}$$

Sea $z=\frac{1}{D-2}(\frac{x^3}{3}e^{2x}-xe^x-e^{2x})$ de donde

$$\frac{dz}{dx}-2z=\frac{x^3}{3}e^{2x}-xe^x-e^{2x}$$ ecuación lineal en z

$$z=e^{-\int -2dx}[\int e^{\int -2dx}(\frac{x^3}{3}e^{2x}-ex^x-e^{2x})dx]$$

$$z=e^{2x}[\int(\frac{x^3}{3}-xe^{-x}-1)dx]=e^{2x}(\frac{x^4}{12}-xe^{-x}-e^{-x}-x) \quad \text{... (4)}$$

reemplazando (4) en (3) se tiene: $y_p=\frac{1}{(D+1)(D-2)}[\frac{x^4}{12}e^{2x}-xe^x-e^x-xe^{2x}]$

$$y_p=\frac{1}{(D+1)}[\frac{1}{D-2}(\frac{x^4}{12}e^{2x}-xe^x-e^x-xe^{2x})] \quad \text{... (5)}$$

Sea $z=\frac{1}{D-2}(\frac{x^4}{12}e^{2x}-xe^x-e^x-xe^{2x})$ de donde

$$\frac{dz}{dx}-2z=(\frac{x^4}{12}-x)e^{2x}-(x+1)e^x$$ ecuación lineal en z

$$z=e^{-\int -2dx}[\int e^{\int -2dx}[(\frac{x^4}{12}-x)e^{2x}-(x-1)e^x]dx]$$

$$z=e^{-2x}\int(\frac{x^4}{12}-x-(x+1)e^{-x})dx=(\frac{x^5}{60}-\frac{x^2}{2})e^{2x}+(2+x)e^{-x} \quad \text{... (6)}$$

$$y_p=\frac{1}{(D+1)}[(\frac{x^5}{60}-\frac{x^2}{2})e^{2x}+(x+2)e^{-x}]$$

$$\frac{dy_p}{dx}+y_p=(\frac{x^5}{60}-\frac{x^2}{2})e^{2x}+(x+2)e^{-x}$$ lineal en z

$$y_p=e^{-\int dx}[\int e^{dx}[(\frac{x^5}{60}-\frac{x^2}{2})e^{2x}+(x+2)e^{-x}]dx]=e^{-x}[\int[(\frac{x^5}{60}-\frac{x^2}{2})e^{3x}+(x+2)e^{2x}]dx]$$

$y_p=(\frac{x^5}{180}e^{2x}-\frac{x^4}{108}+\frac{x^3}{81})e^{3x}-(\frac{x}{2}+\frac{5}{4})e^x$; La solución general es $y=y_c+y_p$

(13) $(D^2-4D+3)(y)=100x^4e^{3x}+340e^x\cos 2x$

Solución

Sea $P(r)=r^2-4r+3=0 \Rightarrow r_1=1,\ r_2=3$ entonces $y_c=c_1e^x+c_2e^{3x}$

calculando la solución particular se tiene:

$$y_p=\frac{1}{D^2-4D+3}(100x^4e^{3x}+340e^x\cos 2x)=\frac{1}{(D-3)(D-1)}(100x^4e^{3x}+340e^x\cos 2x)$$

$$y_p=100e^{3x}\frac{1}{(D-3+3)(D-1+3)}x^4+340e^x\frac{1}{(D-3+1)(D-1+1)}\cos 2x$$

$$y_p=100e^{3x}\frac{1}{D(D+2)}x^4+340e^x\frac{1}{D(D-2)}\cos 2x$$

$$y_p=100e^{3x}\frac{1}{D}(\frac{1}{2}-\frac{D}{4})x^4+340e^x\frac{1}{D^2-2D}\cos 2x$$

$$y_p=100e^{3x}\frac{1}{D}(\frac{x^4}{2}-x^3)+340e^x(\frac{1}{-4-2D}\cos 2x)$$

$$y_p=100e^{3x}\int(\frac{x^4}{2}-x^3)dx-\frac{340e^x}{2}\frac{(D-2)}{D^2-4}\cos 2x$$

$$y_p=100e^{3x}(\frac{x^5}{10}-\frac{x^4}{4})-170e^x\frac{(D-2)}{-4-4}\cos 2x=100e^{3x}(\frac{x^5}{10}-\frac{x^4}{4})+\frac{65}{4}(D-2)\cos 2x$$

$$y_p=10x^5e^{3x}-25x^4e^{3x}-\frac{65}{4}\cos 2x-\frac{65}{4}\operatorname{sen} 2x$$

La ecuación general es: $y=c_1e^x+c_2e^{3x}+(10x^5-25x^4)e^{3x}-\frac{65}{2}(\operatorname{sen} 2x+\cos 2x)$

(14) $(D^2+D+1)(y)=e^{3x}+6e^x-3e^{-2x}+5$

Solución

Sea $P(r)=r^2+r+1=0 \Rightarrow r_1=-\frac{1+\sqrt{3}i}{2},\ r_2=-\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$ entonces

$\phi_c(x)=(c_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_2\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x)e^{-x/2}$, ahora calcularemos la solución particular

$$\phi_p(x)=\frac{1}{D^2+D+1}(e^{3x}+6e^x-3e^{-2x}+5)=\frac{1}{D^2+D+1}e^{3x}+\frac{6e^x}{D^2+D+1}-\frac{1}{D^2+D+1}e^{-2x}+\frac{5}{D^2+D+1}$$

$$\phi_p(x)=\frac{e^{3x}}{9+3+1}+\frac{6e^x}{1+1+1}-\frac{e^{-2x}}{4-2+1}+5=\frac{e^{3x}}{13}+2e^x-\frac{e^{-2x}}{3}+5$$

$$\phi_p(x)=\frac{e^{3x}}{13}+2e^x-\frac{e^{-2x}}{3}+5$$

$\frac{5}{D^2+D+1}=\frac{5e^0}{D^2+D+1}=\frac{5e^0}{0+01}=5$. Luego la solución general es: $y=\phi_c(x)+\phi_p(x)$

15) $(D^3+D^2+D+1)(y)=e^x+e^{-x}+\operatorname{sen}2x$

Solución

Sea $P(r)=r^3+r^2+r+1=0 \Rightarrow r_1=-1,\ r_2=i,\ r_3=-i$ entonces

$\phi_c(x)=c_1e^{-x}+c_2\cos x+c_3\operatorname{sen}x$

$\phi_p(x)=\frac{1}{D^3+D^2+D+1}(e^x+e^{-x}+\operatorname{sen}2x)$, entonces:

$$\phi_p(x)=\frac{1}{(D^2+1)(D+1)}e^x+\frac{1}{(D^2+1)(D+1)}e^{-x}+\frac{1}{(D^2+1)(D+1)}\operatorname{sen}2x$$

$$\phi_p(x)=\frac{e^x}{4}+\frac{1}{2(D+1)}e^{-x}-\frac{1}{3}\frac{1}{D+1}\operatorname{sen}2x \qquad \text{... (1)}$$

Sea $z=\frac{e^{-x}}{(D+1)} \Rightarrow \frac{dz}{dx}+z=e^{-x}$, cuya solución es:

$$z = e^{-\int dx}\left[\int e^{-\int dx} e^{-x} dx\right] = e^{-x}x \quad \Rightarrow \quad z = xe^{-x} \qquad \textbf{... (2)}$$

reemplazando (2) en (1) se tiene: $\phi_p(x) = \frac{e^x}{4} + \frac{xe^{-x}}{2} - \frac{1}{3}\left(\frac{D-1}{D^2-1}\right)\text{sen}\, 2x$

$$\phi_p(x) = \frac{e^x}{4} + \frac{xe^{-x}}{2} - \frac{1}{3}\frac{(D-1)}{-5}\text{sen}\, 2x = \frac{1}{4}(e^x + 2xe^{-x}) + \frac{1}{15}(2\cos 2x - \text{sen}\, 2x)$$

La solución general es: $\phi(x) = \phi_c(x) + \phi_p(x)$

6.4 SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE EULER MEDIANTE EL OPERADOR D.-

Para resolver las ecuaciones diferenciales de Euler mediante el operador D, se tiene en cuenta el criterio siguiente:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} = D(D-1)y \quad ; \quad x^3\frac{d^3y}{dx^3} = D(D-1)(D-2)y$$

generalizando se tiene: $x^n\frac{d^ny}{dx^n} = D(D-1)(D-2)...(D-n+1); \ n = 1,2,..., y \ x = e^t$

Ejemplo: Resolver la ecuación $x^2y''+xy'+y = x$

Solución

$$x^2y''+xy'+y = x \Rightarrow (D(D-1)+D+1)y = e^t$$

$$(D^2+1)y = e^t \Rightarrow y_p = \frac{1}{D^2+1}e^t = \frac{e^t}{2} \Rightarrow y_p = \frac{x}{2}$$

$$y = c_1\cos x + c_2\,\text{sen}\, x + \frac{x}{2}$$

Ejemplo: Resolver la ecuación $x^2y''-xy'+y = x\ln^3 x$

Solución

$x^2y''-xy'+y=x\ln^3 x$ pasando a operadores

$$(D(D-1)-D+1)y=t^3e^t \quad\Rightarrow\quad (D^2-2D+1)y=t^3e^t$$

cuya solución complementaria es $y_c=c_1e^t+c_2te^t$, $y_c=c_1x+c_2xLnx$

La solución particular es $y_p=\dfrac{1}{(D-1)^2}t^3e^t=e^t\dfrac{1}{D^2}t^3$

$$y_p=e^t\frac{1}{D}\frac{t^4}{4}=e^t\frac{t^5}{20}=x\frac{\ln^5 x}{20}$$

La solución general de la ecuación es: $y=y_c+y_p=c_1x+c_2x\ln x+x\dfrac{\ln^5 x}{20}$

b) EJERCICIOS PROPUESTOS

I. Encuentre una solución particular de:

1. $(D+2)^2y=12xe^{-2x}$ **Rpta:** $y_p=2x^3e^{-2x}$

2. $(D-2)^3y=6xe^{2x}$ **Rpta:** $y_p=\dfrac{x^4}{4}e^{2x}$

3. $(D+3)^3y=15x^2e^{-3x}$ **Rpta:** $y_p=\dfrac{x^5}{4}e^{-3x}$

4. $D^2(D-2)^2y=16e^{2x}$ **Rpta:** $y_p=2x^2e^{2x}$

5. $(D^2-D-2)y=18xe^{-x}$ **Rpta:** $y_p=(3x^2+2x)e^{-x}$

6. $(D-2)^2y=20-3xe^{2x}$ **Rpta:** $y_p=5-\dfrac{x^3}{2}e^{2x}$

7. $(D+1)^2y=e^{-x}+3x$ **Rpta:** $y_p=\dfrac{x^2e^{-x}}{2}+3x-6$

8 $(D^2-4)y = 16xe^{-2x}+8x+4$ **Rpta:** $y_p = -(2x+1)(xe^{-2x}+1)$

9 $(D^2-4D+4)y = 6x^2e^{2x}$ **Rpta:** $y_p = \dfrac{x^4}{2}e^{2x}$

10 $(D-3)^2 y = e^{3x}$ **Rpta:** $y_p = \dfrac{x^2}{2}e^{3x}$

12 $D(D-2)y = e^{2x}$ **Rpta:** $y_p = \dfrac{x}{2}e^{2x}$

12 $D^2(D+1)y = e^{-x}$ **Rpta:** $y_p = xe^{-x}$

13 $(D^2+4D+5)y = 4e^{-2x}\cos x$ **Rpta:** $y_p = 2xe^{-2x}\operatorname{sen} x$

14 $(D^2-4D+13)y = 24e^{2x}\operatorname{sen} 3x$ **Rpta:** $y_p = -4xe^{2x}\cos 3x$

15 $(D^2-3D+2)y = 72xe^{-x}$ **Rpta:** $y_p = 2(6x+5)e^{-x}$

16 $(D^2+4)y = 12(\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x)$ **Rpta:** $y_p = 4\operatorname{sen} x - 3x\cos 2x$

17 $(D^2+4)y = 20(e^x - \cos 2x)$ **Rpta:** $y_p = 4e^x - 5x\operatorname{sen} 2x$

18 $(D^2+16)y = 8(x+\operatorname{sen} x)$ **Rpta:** $y_p = x.(\dfrac{1}{2}-\cos 4x)$

19 $(D^2+4)y = 8\operatorname{sen} x\cos x$ **Rpta:** $y_p = -x\cos 2x$

20 $(D^2+4)y = 8\cos^2 x$ **Rpta:** $y_p = 1 + x\operatorname{sen} 2x$

21 $(D^3+D^2+D+1)y = 2e^{2t}$ **Rpta:** $y_p = \dfrac{2}{15}e^{2t}$

22 $(D-1)^3(D+1)y = -2e^t$ **Rpta:** $y_p = -t^3\dfrac{e^t}{3!}$

(23) $(D^2+4)y = e^{it}$ **Rpta:** $y_p = \frac{e^{it}}{3}$

(24) $(D^4-1)y = 2\,\text{senh}\,t$ **Rpta:** $y_p = \frac{t}{2}.\cosh t$

(25) $D^2(D+2)y = 2+e^{-t/2}$ **Rpta:** $y_p = \frac{t^2}{4}+\frac{16}{4}e^{-\frac{t}{2}}$

(26) $(D^2+1)y = 3t^4$ **Rpta:** $y_p = 3t^4-36t+72$

(27) $(2D+1)y = (t-3)e^{-t}$ **Rpta:** $y_p = (1-t)e^{-t}$

(28) $(D^2-3D+2)y = 2+t$ **Rpta:** $y_p = \frac{1-2t}{4}$

(29) $(D^4+2D^2+1)y = \cos t$ **Rpta:** $y_p = \frac{t^2}{8}.\cos t$

(30) $(D^2+1)y = 3\,\text{sen}\,2t - 2\cos 2t$ **Rpta:** $y_p = -\text{sen}\,2t+\frac{2}{3}\cos 2t$

II. Hallar la solución general de las ecuaciones diferenciales siguientes:

(1) $(D^3-5D^2+8D-4)y = e^{2x}$ **Rpta:** $y = c_1e^x+c_2e^{2x}+c_3xe^{2x}+\frac{x^2}{2}e^{2x}$

(2) $(D^2-3D+2)y = e^x+e^{2x}$ **Rpta:** $y = (c_1-x)e^x+(c_2+x)e^{2x}$

(3) $D^2(D-2)^3y = 48e^{2x}$ **Rpta:** $y = c_1+c_2x+(c_3+c_4x+c_5x^2+2x^3)e^{2x}$

(4) $(D^2+16)y = 14\cos 3x$ **Rpta:** $y = c_1\cos 4x+c_2\,\text{sen}\,4x+2\cos 3x$

(5) $(D^3+3D^2-4)y = xe^{-2x}$ **Rpta:** $y = c_1e^x+c_2e^{-2x}+c_3xe^{-2x}-\frac{1}{18}(x^3+x^2)e^{-2x}$

(6) $(D^2-4D+13)y = 24e^{2x}\cos 3x$ **Rpta:** $y = e^{2x}(c_1\cos 3x+c_2\,\text{sen}\,3x+3\cos x)$

(7) $(D^2-4D+13)y=24e^{2x}\cos 3x$ **Rpta:** $y=e^{2x}(c_1\cos 3x+c_2\operatorname{sen}3x+4x\operatorname{sen}3x)$

(8) $(D^2+4)y=2\cos x\cos 3x$ **Rpta:** $y=c_1\cos 2x+c_2\operatorname{sen}2x+\frac{x}{4}\operatorname{sen}2x-\frac{\cos 4x}{12}$

(9) $(D^2+25)y=\operatorname{sen}5x$ **Rpta:** $y=c_1\cos 5x+c_2\operatorname{sen}5x-0.1x\cos 5x$

(10) $D(D^2+1)y=\operatorname{sen}x$ **Rpta:** $y=c_1+c_2\cos x+(c_3-\frac{x}{2})\operatorname{sen}x$

(11) $(D^2-9D+18)y=e^{e^{-3x}}$ **Rpta:** $y=c_1e^{3x}+(c_2+\frac{e^{e^{-3x}}}{9})e^{6x}$

(12) $D^2(D^2+1)y=\operatorname{sen}x$ **Rpta:** $y=c_1+c_2x+(c_3+\frac{x}{2})\cos x+c_4\operatorname{sen}x$

(13) $(D^2+D+2)y=2(1+x-x^2)$ **Rpta:** $y=c_1e^{x}+c_2e^{-2x}+x^2$

(14) $(D^2-1)y=\operatorname{sen}^2 x$ **Rpta:** $y=c_1e^{x}+c_2e^{-x}-\frac{1}{2}+\frac{\cos 2x}{10}$

(15) $(D^2-1)y=(1+e^{-x})^{-2}$ **Rpta:** $y=c_1e^{x}+c_2e^{-x}-1+e^{-x}\ln(1+e^{x})$

(16) $(D^2-3D+2)y=\operatorname{sen}e^{-x}$ **Rpta:** $y=c_1e^{x}+c_2e^{2x}-e^{2x}\operatorname{sen}e^{-x}$

(17) $(D^2+D+1)y=e^{3x}+6e^{x}-3e^{-2x}+15$ **Rpta:** $y_p=\frac{e^{3x}}{13}+2e^{x}-e^{-2x}+5$

(18) $(D^3+2D^2-6D+8)y=xe^{-3x}$ **Rpta:** $y=c_1e^{x}+c_2e^{4x}+c_3e^{-2x}-\frac{e^{-3x}}{784}(28x+34)$

(19) $(D^3+1)y=\cos x$ **Rpta:** $y=\phi_c(x)+\frac{1}{2}(\cos x-\operatorname{sen}x)$

(20) $(D^2+4)y=\operatorname{sen}2x$ **Rpta:** $y=\phi_c(x)-\frac{x\cos 2x}{4}$

(21) $(D^3+D^2+D+1)y=e^x+e^{-x}+\operatorname{sen}x$

Rpta: $y=\phi_c(x)+\frac{1}{4}(e^x+2xe^{-x})-\frac{x}{4}(\operatorname{sen}x+\cos x)$

(22) $(D^2-1)y=x^2\operatorname{sen}3x$ **Rpta:** $y=c_1e^{-x}+c_1e^{-x}-\frac{25x^2-13}{250}\operatorname{sen}3x-\frac{3x}{25}\cos 3x$

(23) $(D^2+3D+2)y=x\operatorname{sen}2x$ **Rpta:** $y=c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}-\frac{30x-7}{200}\cos 2x-\frac{5x-12}{100}\operatorname{sen}2x$

(24) $D^4(D^2-1)y=x^2$ **Rpta:** $y=\phi_c(x)-\frac{1}{360}(x^6+30x^4)$

(25) $(D^2-2D-1)y=e^x\cos x$ **Rpta:** $y=\phi_c(x)-\frac{e^x\cos x}{3}$

(26) $(D^2-4D+3)y=2xe^{3x}+3e^x\cos 2x$

Rpta: $y=c_1e^x+c_2e^{3x}+\frac{e^{3x}}{2}(x^2-x)-\frac{3}{8}e^x(\cos 2x+\operatorname{sen}2x)$

(27) $(D^3-2D+4)y=x^4+3x^2-5+2$

Rpta: $y=c_1e^{-2x}+e^x(c_2\cos x+c_3\operatorname{sen}x)+\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{2}+\frac{3x^2}{2}-\frac{5x}{2}-\frac{7}{8}$

(28) $(D^2+2)y=x^3+x^2+e^{-2x}+\cos 3x$

Rpta: $y=\phi_c(x)+\frac{1}{2}(x^3+x^2-3x-1)+\frac{e^{-2x}}{6}-\frac{\cos 3x}{7}$

(29) $(D^2+5D+6)y=e^{-2x}\operatorname{sen}^2x(1+2\operatorname{tg}x)$ **Rpta:** $y=\phi_c(x)+e^{-2x}\operatorname{tg}x$

(30) $(D^2+D)(D-2)^3(y)=e^{2x}+e^{-x}\operatorname{sen}3x$

Rpta: $y=c_0+c_1e^{-x}+(c_2+c_3x+c_4x^2)e^{2x}+\frac{x^3}{36}e^{-2x}+\frac{e^{-x}}{7860}(6\cos 3x-3\operatorname{sen}3x)$

(31) $(D^2+6D+9)(y)=2xe^{3x}+9x^2-3$ **Rpta:** $y=(c_0+c_1x)e^{3x}+\frac{x^3}{3}e^{3x}+x^2+\frac{4x}{3}+\frac{1}{3}$

(32) $(D^2+6D+9)(y)=2e^{-2x}\operatorname{sen}x$ **Rpta:** $y=(c_0+c_1x)e^{-3x}-e^{-2x}\cos x$

(33) $(D^3+6D^2+9D)(y)=x^3+e^x$

Rpta: $y=c_0+(c_1+c_2x)e^{3x}+\dfrac{e^x}{4}+\dfrac{x^4}{36}+\dfrac{2x^3}{27}+\dfrac{3x^2}{27}+\dfrac{24}{2165}$

(34) $[(D-1)(3-D)(4+D)(6+D)-40](y)=e^{-x}x\cos(-2x)$

(35) $y^{(12)}+12y^{(10)}+48y^{(8)}+65y^{(6)}+12y^{(4)}+48y^{(2)}+64y=\cos 3x-\operatorname{sen}x$

(36) $(64D^8+48D^6+12D^4+D^2)(y)=\operatorname{sen}(x/2)+\cos(x/2)+e^{-\frac{x}{4}}$

(37) $D^2(D^4-4D^3+6D^2-4D+1)(y)=(x^2+1)(1-e^x)$

(38) $(D^3-D^2-D+1)(y)=7-6x-3x^2+x^3+x^4e^{5x}$

(39) $(D^8-2D^4+1)(y)=(2x-1)\cosh^2 x$ (40) $y^{(100)}+100y=\cos x+x^{100}$

(41) $(D^2+64)^{30}(y)=\cosh x+\cos 8+\operatorname{sen}8x$

(42) $(D-1)^3(D-2)^4(D-3)^3(y)=e^x(2-3x+4x^2)+e^{2x}(3-2x+x^2-x^3)+x^3e^{3x}$

(43) $(D-2)(D^2-2D+5)^2(y)=xe^x\cos 2x$

(44) $(D^2-2D+2)^2(y)=e^x(2x\cos x-6\operatorname{sen}x)+xe^{-x}$

(45) $y^{(5)}+4y^{(4)}+14y^{(3)}+62y^{(2)}+149y^{(1)}+149y+130y=e^x+x$

(46) $y^{VIII}-2y^{IV}+y=\cos 4x+\operatorname{sen}6x$

(47) $y^{VI}+9y^{IV}+24y^{II}+16y=e^{2x}+x^{12}$

(48) $y^{VIII}+13y^{VI}+60y^{IV}+112y^{II}+64y=e^{-4x}+\cos x+\operatorname{sen}x+\cosh 5x$

(49) $y^{IX}+3y^{VIII}+8y^{VII}+16y^{VI}+23y^{V}+29y^{IV}+18y^{III}+20y^{II}+12y^{I}+4y=e^{-x}+4\operatorname{senh}x$

50. $y^{(12)}+21y^{(10)}+147y^{(8)}+344y^{(6)}+21y^{(4)}+147y^{(2)}+343y=4+\cos 2x$

51. $(D^5+2D^3+10D^2+D+10)y=0$

52. $(D^2+1)y=2\sec^3 x$

53. $(D^9-4D)y=6e^{-x}-3e^x$, $y=7$, $Dy=9$, $D^2y=19$ Cuando x = Ln 2

54. $(D^9+4D)y=8\cos 2x+4$

55. $(D^4-D^3-7D^2+3D)y=e^{3x}x^2$

56. $(D^4-2D^3+2D^2-2D+1)y=e^x\cos 2x$

57. $(D^3-D)y=1+x^5$

58. $(3D^4+8D^3+6D^2)y=(x^3-6x^2+12x-24)e^{-x}$

59. $(D^8+8D^4+17)=e^{2x}+\cos 3x$

60. $D^3(D^2+1)^4y=\operatorname{sen}x+\cos x+1$

61. $(D^5+4D^4+14D^3+62D^2+149D+130)y=60e^{100x}$

III. Resolver las ecuaciones diferenciales siguientes:

1. $x^2y''+xy'+4y=\operatorname{sen}(\ln x)$ **Rpta:** $y=c_1\cos(2\ln x)+c_2\operatorname{sen}(2\ln x)+\frac{1}{3}\operatorname{sen}(\ln x)$

2. $x^2y''+7xy'+5y=x$ **Rpta:** $y=\frac{c_1}{|x|}+\frac{c_2}{|x|^5}+\frac{x}{12}$

3. $3x^2y''+12xy'+9y=0$ **Rpta:** $y=\frac{c_1}{|x|^{\frac{3}{2}}}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln|x|)+\frac{c_2}{|x|^{\frac{3}{2}}}\operatorname{sen}(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln|x|)$

4. $x^2y''-3xy'+4y=\ln x$ **Rpta:** $y=c_1x^2+c_2x^2\ln x+\frac{\ln x}{4}+\frac{1}{4}$

5. $(D^4+8D^2+16)^3(y)=\cos 5x+\operatorname{sen}2x+e^{-3x}$

Rpta: $y_g=(c_1+c_2x+c_3x^2+c_4x^3+c_5x^4+c_6x^5)\operatorname{sen}2x$

$$y_p=\frac{\cos 5x}{21^6}+x^6\frac{\operatorname{sen}(2x-3\pi)}{4^6.6!}+\frac{e^{-3x}}{(13)^6}\quad;\quad y=y_g+y_p$$

(6) $x^2y''-2xy'+2y=3x^2+2\ln x$ (7) $x^2y''+xy'+4y=\operatorname{sen}(\ln x)$

(8) $y'''+\dfrac{3y''}{x+a}+\dfrac{y'}{(x+a)^2}-\dfrac{y}{(x+a)^3}=(x+a)^{-1}\cos(3\ln(x+a))$

(9) $x^2y''+4xy'+2y=\cos x+\dfrac{1}{x}$ (10) $x^3y'''+2x^2y''-xy'+y=x^2Lnx$

(11) $x^2y''+xy'+4y=\cos(2\ln x)$ (12) $x^2y''+4xy'+2y=2\ln^2 x+12x$

(13) $(x+1)^3y'''+(x+1)^2y''+3(x+1)y'-8y=\dfrac{x}{(x+1)^{\frac{1}{2}}}$

(14) $(2x+1)^4y''+3(2x+1)^3y'+(2x+1)^2y=6\ln(2x+1)$

(15) $x^3y'''-4x^2y''+8xy'-8y=4\ln x+\cos(\ln x^4)+\operatorname{sen}(2\ln x)$

(16) $x^2y''+xy'+9y=\operatorname{sen}(\ln x^3)+\cos(\ln x^3)$ 17 $x^2y'''+xy''+4y'=1+\cos(2\ln x)$

(18) $x^3D^3y-3x^2D^2y+6xDy-6y=60x^6+12x^{18}$

(19) $x^4y^{IV}-6x^3y^{III}+15x^2y^{II}+9xy'-9y=\cos(\ln x)+x^{-4}+\operatorname{sen}(\ln x^3)$

(20) $(D^4-1)(y)=\cos x+\cos x\operatorname{sen}x+x^3e^x$ (21) $(D^4+8D^2+32)=xe^x+1$

(22) $y^{VI}+9y^{IV}+24y''+16y=e^{2x}+x^7$ (23) $(D^6+1)^2(y)=e^x+x^{24})$

(24) $(3x-1)^3y^{IV}+(3-9x)^2y'''+(3x-1)y''=36x^2-24x+4$

(25) $(D^2+81)^8(y)=\cos(9x+b^3)+\operatorname{sen}(9x+2-b^3)$, donde b es cualquier constante real.

CAPÍTULO VII

7. ECUACIONES DIFERENCIALES DE COEFICIENTES VARIABLES

Las ecuaciones diferenciales de orden n, de coeficientes variables son de la forma:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+...+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=f(x) \quad ...(1)$$

donde $a_0(x), a_1(x),\dots a_n(x), f(x)$ son funciones de variable real x,y continuas en un intervalo.

Suponiendo que $a_n(x)\neq 0$, entonces la ecuación (1) se puede expresar en la forma:

$$\frac{d^n y}{dx^n}+b_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+...+b_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+b_n(x)y=g(x) \quad ...(2)$$

La solución de la ecuación (2) es la suma de la solución general y_g de la ecuación diferencial homogénea correspondiente, más una solución particular de la ecuación diferencial correspondiente.

Si $y_1, y_2,\dots,y_n$ es un sistema fundamental de soluciones de la ecuación (2) entonces la solución particular de la ecuación (2) es:

$$y_p=c_1(x)y_1+c_2(x)y_2+...+c_n(x)y_n \quad ...(\alpha)$$

donde $c_1(x),\dots,c_n(x)$ son funciones incógnitas de x por determinarse.

Para determinar las funciones incógnitas se forma el siguiente sistema:

Sea $c_1(x)y_1+c_2(x)y_2+...+c_n(x)y_n=0$, entonces:

$$(\beta)\begin{cases} y_1 c'_1(x) + y_2 c'_2(x) + \dots + y_n c'_n(x) = 0 \\ y'_1\, c'_1(x) + y'_2\, c'_2(x) + \dots + y'_n\, c'_n(x) = 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_1^{(n-1)} c'_1(x) + y_2^{(n-1)} c_2(x) + \dots + y_n^{(n-1)} c'_n(x) = g(x) \end{cases}$$

al resolver el sistema (β) se obtiene: $\dfrac{dc_i(x)}{dx} = f_i(x),\ i = 1,2,\dots,n$ donde

$c_i = \int f_1(x)dx$, este resultado se sustituye en (α) obteniéndose la solución particular y_p

Veremos para una ecuación de 2do. orden.

$y'' + p(x)y' + Q(x)y = R(x)$, donde y_1, y_2, es un sistema de soluciones.

Luego la solución particular es: $y_p = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2$

donde $c_1(x)$, $c_2(x)$ son funciones por determinarse para esto formaremos el sistema siguiente:

$$\begin{cases} y_1 c'_1(x) + y_2 c'_2(x) = 0 \\ y'_1\, c'_1(x) + y'_2\, c'_2(x) = R(x) \end{cases} \quad \text{de donde } W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = y_1 y'_2 - y'_1 y_2 \quad \text{Entonces}$$

$$c'_1(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ R(x) & y'_2 \end{vmatrix}}{W[y_1, y_2]} = \frac{R(x)y_2}{W[y_1, y_2]} \quad \Rightarrow \quad c_1(x) = -\int \frac{R(x)y_2 dx}{W[y_1, y_2]}$$

$$c'_2(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y'_1 & R(x) \end{vmatrix}}{W[y_1, y_2]} = \frac{R(x)y_1}{W[y_1, y_2]} \quad \Rightarrow \quad c_2(x) = -\int \frac{R(x)y_1 dx}{W[y_1, y_2]}$$

Ejemplo:

1. Resolver la ecuación diferencial siguiente:

$(\cos x - \operatorname{sen} x)y'' + 2\operatorname{sen} x.\, y' - (\operatorname{sen} x + \cos x)y = e^x(\cos x - \operatorname{sen} x)^2$, $\quad y_1 = e^x$, $\quad y_2 = \operatorname{sen} x$

Solución

La ecuación diferencial dada se puede escribir en la forma:

$$y''+\frac{2\operatorname{sen}x}{\cos x-\operatorname{sen}x}y'-\frac{\operatorname{sen}x+\cos x}{\cos x-\operatorname{sen}x}y=e^{x}(\cos x-\operatorname{sen}x)$$

La solución particular es $y_p=c_1(x)y_1+c_2(x)y_2$

donde $c_1(x)$, $c_2(x)$ son funciones incógnitas de x por determinarse:

Luego: $\begin{cases} y_1c'_1(x)+y_2c'_2(x)=0 \\ y'_1\,c'_1(x)+y'_2\,c'_2(x)=e^{x}(\cos x-\operatorname{sen}x) \end{cases}$

$$\begin{cases} e^{x}.c'_1(x)+\operatorname{sen}x.c'_2(x)=0 \\ e^{x}.c'_1(x)+\cos x.c'_2(x)=e^{x}(\cos x-\operatorname{sen}x) \end{cases}$$

$$c'_1(x)=\frac{\begin{vmatrix} 0 & \operatorname{sen}x \\ e^{x}(\cos x-\operatorname{sen}x) & \cos x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{x} & \operatorname{sen}x \\ e^{x} & \cos x \end{vmatrix}}=-\operatorname{sen}x \Rightarrow c_1(x)=\cos x$$

$$c'_2(x)=\frac{\begin{vmatrix} e^{x} & 0 \\ e^{x} & e^{x}(\cos x-\operatorname{sen}x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{x} & \operatorname{sen}x \\ e^{x} & \cos x \end{vmatrix}}=e^{x} \Rightarrow c_2(x)=e^{x}$$

Luego la solución particular es $y_p=e^{x}\cos x+e^{x}\operatorname{sen}x$ y la solución general es:

$$y=c_1e^{x}+c_2\operatorname{sen}x+e^{x}\cos x+e^{x}\operatorname{sen}x$$

(2) Resolver la ecuación diferencial: $xy''-y'-4x^3y=16x^3e^{x^2}$, $y_1=e^{x^2}$, $y_2=e^{-x^2}$

Solución

$y''-\frac{1}{x}y'-4x^2y=16x^2e^{x^2}$; La solución particular es: $y_p=c_1(x)y_1+c_2(x)y_2$

donde $c_1(x), c_2(x)$ son funciones por determinarse:

Luego: $\begin{cases} e^{x^2}c'_1(x)+e^{-x^2}c'_2(x)=0 \\ 2xe^{x^2}c'_1(x)-2xe^{-x^2}c'_2(x)=16x^3e^{x^2} \end{cases}$, de donde se tiene:

$$c'_1(x)=\frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{-x^2} \\ 16x^3e^{x^2} & -2xe^{-x^2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{x^2} & e^{-x^2} \\ 2xe^{x^2} & 2xe^{-x^2} \end{vmatrix}}=4x \Rightarrow c_1(x)=2x^2$$

$$c'_2(x)=\frac{\begin{vmatrix} e^{x^2} & 0 \\ 2xe^{x^2} & 16x^3e^{x^2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{x^2} & e^{-x^2} \\ 2xe^{x^2} & 2xe^{-x^2} \end{vmatrix}}=-4xe^{2x^2} \Rightarrow c_2(x)=-e^{2x^2}$$

Luego $y_p=2x^2e^{x^2}-e^{x^2}$ y la solución general es: $y=c_1e^{x^2}+c_2e^{-x^2}-e^{x^2}+2x^2e^{x^2}$

TEOREMA.- Mostrar que la ecuación diferencial $\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y=0$ se transforma en $\frac{d^2u}{dx^2}+f(x)u=0$, haciendo el cambio de variable y = u(x).v(x), y escogiendo V(x) en forma apropiada

Demostración

Sea y = u v $\Rightarrow$ $\boxed{\frac{dy}{dx}=V\frac{du}{dx}+u\frac{dv}{dx}}$

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2}=v\frac{d^2u}{dx^2}+2\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}+u\frac{d^2v}{dx^2}}$$

ahora reemplazamos en la ecuación diferencial dada.

$$v\frac{d^2u}{dx^2}+2\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}+u\frac{d^2v}{dx^2}+P(x)(v\frac{du}{dx}+u\frac{dv}{dx})+Q(x)uv=0$$

$$v\frac{d^2u}{dx^2}+(\frac{d^2v}{dx^2}+P(x)\frac{dv}{dx}+Q(x)v)u+(P(x)v+2\frac{dv}{dx})\frac{du}{dx}=0$$

$$\boxed{\frac{d^2u}{dx^2}+(\frac{1}{v}\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{P(x)}{v}\frac{dv}{dx}+Q(x))u+(P(x)+\frac{2}{v}\frac{dv}{dx})\frac{du}{dx}=0} \quad \ldots (1)$$

ahora daremos la forma deseada, escogiendo v(x) de modo que $P(x)+\frac{2}{v}\frac{dv}{dx}=0$, de donde $\frac{1}{v}\frac{dv}{dx}=\frac{1}{2}P(x)$ entonces $\ln v=-\frac{1}{2}\int P(x)dx$ de donde $v=e^{-\frac{1}{2}\int P(x)dx}$

Luego la ecuación (1) se reduce a: $\boxed{\frac{d^2u}{dx^2}+(\frac{1}{v}\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{P(x)}{v}\frac{dv}{dx}+Q(x))u=0}$ ... **(2)**

haciendo $f(x)=\frac{1}{v}\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{P(x)}{v}\frac{dv}{dx}+Q(x)$, la ecuación (2)

queda en la forma: $\boxed{\frac{d^2u}{dx^2}+f(x)u=0}$

Ejemplo.- Resolver la ecuación diferencial $x\frac{d^2u}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+xy=0$

Solución

A la ecuación diferencial dada escribiremos así: $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{2}{x}\frac{dy}{dx}+y=0$ ... **(1)**

donde $P(x)=\frac{2}{x}$ y Q(x) = 1; haciendo el cambio y = uv ... **(2)**

donde $v=e^{-\frac{1}{2}\int P(x)dx}=e^{-\int\frac{dx}{x}}=e^{-\ln x}=\frac{1}{x}$

$$f(x)=\frac{v''}{v}+P.\frac{v'}{v}+Q(x)=\frac{\frac{2}{x^3}}{\frac{1}{x}}+\frac{2}{x}(\frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}})+1=\frac{2}{x^2}-\frac{2}{x^2}+1=1$$

como la ecuación (1) se transforma en la forma $\frac{d^2u}{dx^2}+f(x)u=0$ entonces $\frac{d^2u}{dx^2}+u=0$

de donde $P(r)=r^2+1=0$, cuyas raíces son $r_1=i$, $r_2=-i$

La solución es $u=c_1\cos x+c_2 x$ como $y=uv=\frac{u}{x} \Rightarrow u=xy$

$\therefore$ La solución es $xy=c_1\cos x+c_2 \operatorname{sen} x$

Observación: Si y_1 es una solución de la ecuación diferencial $y''+p(x)y'+Q(x)y=R(x)$ se puede determinar la segunda solución y_2 de la ecuación diferencial mediante la expresión: $y_2=v(x)y_1$ donde v(x) es una función por determinar.

Teorema.- Si Y_1 es la solución particular de la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y=0$$

Demostrar que $Y_2=cY_1\int\frac{e^{-\int P(x)dx}}{Y_1^2}dx$ es también solución de la ecuación diferencial

Demostración

Como Y_1 es una solución de la ecuación diferencial entonces

$Y_1''+P(x)Y_1'+Q(x)Y_1=0$ (lo verifica)

de acuerdo a la observación se tiene $Y=Y_1z$ es la solución general donde z es la función incógnita derivando se tiene $Y'=Y_1z'+Y_1'z$

$$Y''=Y_1z''+2Y_1'z'+Y_1''z$$

ahora reemplazando en la ecuación diferencial

$Y_1z''+2Y_1'z'+Y_1''z+P(x)(Y_1z'+Y_1'z)+Q(x)Y_1z=0$

$$Y_1 z''+(2Y_1'+P(x)Y_1)z'+\underbrace{(Y_1''+P(x)Y_1'+Q(x)Y_1)}_{0}z=0$$

$$Y_1 z''+(2Y_1'+P(x)Y_1)z'=0 \quad \Rightarrow \quad z''+(2\frac{Y_1'}{Y_1}+P(x))z'=0 \qquad \text{... (1)}$$

haciendo $z'=u \Rightarrow z''=u'$ reemplazando en (1) se tiene:

$$u'+(\frac{2Y_1'}{Y_1}+P(x)+)u=0 \Rightarrow \frac{u'}{u}=(\frac{2Y_1'}{Y_1}+P(x)) \text{ integrando } \ln u = 2\ln Y_1 \int P(x)dx+c_1$$

$\ln uY_1^2 = \int P(x)dx+c_1$ levantando el logaritmo

$$uY_1^2 = e^{-\int P(x)dx+c_1} = c.e^{-\int P(x)dx} \text{ entonces } u = c\frac{e^{-\int P(x)dx}}{Y_1^2} \text{ pero } u = z'$$

$$z'=c\frac{e^{-\int P(x)dx}}{Y_1^2} \text{ integrando se tiene: } z=c\int\frac{e^{-\int P(x)dx}}{Y_1^2}dx+c_1 \quad \text{como } Y=Y_1 z$$

$$Y=Y_1[c\int\frac{e^{-\int P(x)dx}}{Y_1^2}dx+c_1]=c.Y_1\int\frac{e^{-\int P(x)dx}}{Y_1^2}dx+c_1Y_1$$

Se observa que la segunda solución de la ecuación diferencial es dada por:

$$Y_2=c.Y_1\int\frac{e^{-\int P(x)dx}}{Y_1^2}dx$$

Ejemplo.- Hallar la solución general de la ecuación diferencial

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+2y=0 \text{ donde } Y_1=x \text{ es la solución particular.}$$

Solución

de acuerdo al teorema anterior la segunda solución es: $Y_2=c.Y_1\int\frac{e^{-\int P(x)dx}}{Y_1^2}dx$ ... (1)

Luego a la ecuación diferencial expresaremos en la forma.

$\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{2x}{1-x^2}\frac{dy}{dx}+\frac{2}{1-x^2}y=0$ de donde $P(x)=\frac{-2x}{1-x^2}$, ahora reemplazamos en (1).

$$Y_2=cY_1\int\frac{e^{-\int P(x)dx}}{Y_1^2}dx=cx\int\frac{e^{\int\frac{2x}{1-x^2}dx}}{x^2}dx=cx\int\frac{e^{-\ln(1-x^2)}}{x^2}dx=cx\int\frac{dx}{x^2(1-x^2)}$$

$$Y_2=cx(\int[\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2}(\frac{1}{1-x})+\frac{1}{2}.(\frac{1}{1+x})]dx)$$

$$Y_2=cx[-\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\ln(1-x)+\frac{1}{2}\ln(1+x)]\quad\Rightarrow\quad Y_2=c[-1+\frac{x}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x})]$$

Luego la solución general es $Y=c_1y_1+c_2y_2$ $\quad\therefore\quad Y=c_1x+c_2(-1+\frac{x}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x}))$

Ejemplos:

1) Hallar la segunda solución de la ecuación diferencial: $y''-4xy'+(4x^2-2)y=0$ donde $\phi_1(x)=e^{x^2}$

Solución

Sea $\phi_2(x)=ve^{x^2}$ donde $v'=u$ derivando se tiene: $\phi'_2(x)=v'e^{x^2}+2xve^{x^2}$

$\phi''_2(x)=e^{x^2}v''+4xe^{x^2}v''(4x^2+2)e^{x^2}v$, reemplazando en la ecuación diferencial

$$e^{x^2}v''+4xe^{x^2}v'+(4x^2+2)e^{x^2}v-4xe^{x^2}v'-8x^2e^{x^2}v-2e^{x^2}v=0$$

$$e^{x^2}v''+(4x-4x)e^{x^2}v'+(8x^2-8x^2+2-2)e^{x^2}v=0$$

de donde $e^{x^2}v''=0\ \rightarrow\ v''=0\ \rightarrow\ u'=0$

$$u=1 \text{ pero } v'=u\ \rightarrow\ v'=1\ \rightarrow\ v=x$$

Luego la segunda solución es: $\phi_2(x)=xe^{x^2}$

y la solución general es: $y = c_1 e^{x^2} + c_2 x e^{x^2}$

(2) Resolver la ecuación diferencial: $y''.y' + y e^{2x} = x e^{2x} - 1$, $y_1 = \operatorname{sen} e^x$

Solución

Sea $y_2 = y_1 v$, la segunda solución de la ecuación diferencial homogénea.

$y_2 = \operatorname{sen} e^x . v \Rightarrow y'_2 = v' \operatorname{sen} e^x + \cos e^x . e^x v$

$y''_2 = \operatorname{sen} e^x . v'' + 2e^x \cos e^x . v' + e^x (\cos e^x - e^x \operatorname{sen} e^x) v = 0$

Luego: $\operatorname{sen} e^x . v'' + 2e^x \cos e^x . v' + e^x [\cos e^x - e^x \operatorname{sen} e^x] v = 0$

simplificando se tiene: $\operatorname{sen} e^x . v'' + (2e^x \cos e^x - \operatorname{sen} e^x) v' = 0$, $v' = u$

$\operatorname{sen} e^x . u'' + (2e^x \cos e^x - \operatorname{sen} e^x) u' = 0 \Rightarrow \frac{u'}{u} + 2e^x c\operatorname{tg} e^x - 1 = 0$, integrando se tiene

$\ln u + \ln \operatorname{sen}^2 e^x = x \Rightarrow \ln u . \operatorname{sen}^2 e^x = x \Rightarrow u \operatorname{sen}^2 e^x = e^x$

$$u = e^x \csc^2 e^x \Rightarrow v' = e^x \csc^2 e^x$$

$v = -c\operatorname{tg} e^x$ como $y_2 = \operatorname{sen} e^x . v \Rightarrow y_2 = -\operatorname{sen} e^x . \frac{\cos e^x}{\operatorname{sen} e^x} \Rightarrow y_2 = -\cos e^x$

Luego la solución complementaria es: $y_g = c_1 \operatorname{sen} e^x + c_2 \cos e^x$

Ahora hallaremos y_p por método variación de parámetro:

$$\begin{cases} \operatorname{sen} e^x u'_1 + \cos e^x u'_2 = 0 \\ e^x \cos e^x u'_1 - e^x \operatorname{sen} e^x u'_2 = x e^{2x} - 1 \end{cases}$$

$u'_1 = x e^x \cos e^x - \frac{\cos e^x}{e^x} \Rightarrow u'_1 = x e^x \cos e^x - \frac{\cos e^x}{e^x}$, integrando se tiene:

$$u_1 = x \operatorname{sen} e^x - \int e^x \frac{\operatorname{sen} e^x}{e^x} dx - \int \frac{\cos e^x}{e^x} dx = x \operatorname{sen} e^x - \frac{\cos e^x}{e^x}$$

$u_2 = x \operatorname{sen} e^x + \dfrac{\cos e^x}{e^x}$, como $y_p = u_1 \operatorname{sen} e^x + u_2 \cos e^x$ se tiene: $y_p = x$ al simplificar

Luego la solución general es: $\quad y = x + c_1 \operatorname{sen} e^x + c_2 \cos e^x$

EJERCICIOS PROPUESTOS.-

Resolver las siguientes ecuaciones:

1) $xy'' - y' - 4x^3 y = 16x^3 e^{x^2}$, $y = e^{x^2}$, $y = e^{-x^2}$ **Rpta:** $y = c_1 e^{x^2} + c_2 e^{-x^2} + (2x^2 - 1)e^{x^2}$

2) $x(1 - x\ln x)y'' + (1 + x^2 \ln x)y' - (x+1)y = (1 - x\ln x)^2 e^x$, $y_1 = e^x$, $y_2 = \ln x$

Rpta: $y = c_1 e^x + c_2 \ln x + e^x(x + x\ln x + \ln x)$

3) $x^2(\ln x - 1)y'' + xy' + y = 0$, $y_1 = x$ **Rpta:** $y = c_1 \ln x + c_2 x$

4) $y'' \pm (\operatorname{tg} x - 2c\operatorname{tg} x)y' + 2c\operatorname{tg}^2 x.y = 0$, $y_1 = \operatorname{sen} x$ **Rpta:** $y = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \operatorname{sen}^2 x$

5) $x^2 y'' - xy' - 3y = 5x^4$, $y_1 = \dfrac{1}{x}$ **Rpta:** $y = c_1 x^2 + \dfrac{c_2}{x} + x^4$

6) $x(x-1)y'' - (2x-1)y' + 2y = x^2(2x-3)$, $y_1 = x^2$ **Rpta:** $y = x^3 + c_1 x^2 + c_2(2x-1)$

7) $(x-1)y'' - xy' + y = (x-1)^2.e^x$, $y_1 = e^x$ **Rpta:** $y = c_1 x + c_2 e^x + (\dfrac{x^2}{2} - x)e^x$

8) $y'' - 2xy' + 2y = 0$, $y_1 = x$ **Rpta:** $y_2 = x$

9) $xy'' - (x+1)y' + y = 0$, $y_1 = e^x$

10) $x^2 y'' - 7xy' + 15y = 0$, $y_1 = x^3$

11) $xy'' + 2y' + xy = 0$ **Rpta:** $y = \dfrac{c_1 \cos x}{2} + \dfrac{c_2 \operatorname{sen} x}{2} - \dfrac{\cos x}{2}$

12) $\text{sen}\, x.y'' + 2\cos x.y'.\text{sen}\, x.y = 2\cos 2x$, tal que $y(\frac{\pi}{2}) = 1$, $y'(\frac{\pi}{2}) = 0$

Rpta: $y = \dfrac{1-\cos 2x}{2\,\text{sen}\, x}$

13) $y'' - 4y' - 12y = 0$, $y_1 = e^{6x}$ **Rpta:** $c_1 e^{6x} + c_2 e^{2x}$

14) $x^2 y'' + 2xy' - 2y = 0$, $y_1 = x$ **Rpta:** $y = c_1 x + \dfrac{c_2}{x^2}$

15) $\cos^2 x.\, y'' - \text{sen}\, x \cos x.\, y' - y = \text{sen}\, x$, $y_1 = \sec x$, $y_2 = \text{tg}\, x$

16) $(x^2 D^2 - 2xD + 2)y = x^3 \ln x$, sabiendo que $y_g = c_1 x + c_2 x$ es la solución de la ecuación homogénea

17) $(x^4 - x^3)y'' + (2x^3 - 2x^2 - x)y'\,y = \dfrac{(x-1)^2}{x}$, $y_1 = \dfrac{1}{x}$

18) $xy'' - y' - 4x^3 y = 0$, $y_1 = e^{x^2}$

19) $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$, $y_1 = x$

20) $(2x+1)y'' + (4x-2)y' + 8y = 0$, $Y_1 = e^{mx}$

21) $y'' + y'\,\text{tg}\, x + y\cos^2 x = 0$, $Y_1 = \cos x(\text{sen}\, x)$

22) $x^4 y'' + 2x^3 y' + y = x^{-2}$, $Y_1 = \text{sen}(\frac{1}{x})$

23) $(1+2x)y'' + 4xy' - 4y = 0$, $Y_1 = e^{-7x}$

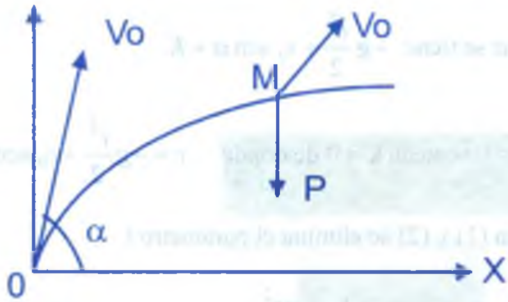
24) $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$

25) $(x+1)^2 y'' - 2(x+1)y' + (x^2 + 2x + 3)y = 0$

7.1. APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN.-

1er Problema.- Trayectoria de un proyectil.-

Consideremos un proyectil de peso p lanzando con un ángulo α sobre el plano vertical. Estudiaremos la forma de una trayectoria, despreciando la resistencia del aire.



A causa de la dirección de la velocidad inicial v_0, el proyectil tiende a elevarse pero como consecuencia de la fuerza vertical de la gravedad p = mg., la trayectoria se curva hacia el suelo, ubiquémonos en el punto M de la trayectoria, al cabo del tiempo t después del lanzamiento, y sean x e y las coordenadas de ese punto. Como se observa en la figura.

Como la única fuerza aplicada al proyectil es la gravedad, proyectamos éste sobre los dos ejes aplicando la fórmula fundamental F = ma:

Sobre el eje horizontal $\quad m\dfrac{d^2x}{dt^2}=0$

Sobre el eje vertical $\quad m\dfrac{d^2y}{dt^2}=-p=-mg.$

Con el signo -, puesto que la fuerza p actúa en sentido contrario al positivo de y, resulta.

$\dfrac{d^2x}{dt^2}=0$, de donde $\dfrac{dx}{dt}=c=v_0\cos\alpha \Rightarrow x=v_0\cos\alpha.t+c$

entonces, para t = 0, x = 0 de donde c = 0

Obteniendo: $\quad x=v_0t\cos\alpha$ ... (1)

También: $\dfrac{d^2y}{dt^2}=-g \Rightarrow \dfrac{dy}{dt}=-gt+c$

para t = 0, y como $\dfrac{dy}{dt}$ que es la proyección vertical de la velocidad v_0 es igual a v_0 es igual a v_0 sen α de donde: $\quad v_0 \operatorname{sen}\alpha=0+c \Rightarrow \dfrac{dy}{dt}=-gt+v_0\operatorname{sen}\alpha$

que al integrar se tiene $-g\dfrac{t^2}{2}+v_0 \text{ sen }\alpha + K$

para t = 0, y = 0 se tiene k = 0 de donde $\quad y=-g\dfrac{t^2}{2}+v_0 \text{ sen }\alpha$ ... **(2)**

de la ecuación (1) y (2) se elimina el parámetro t

$$y=-\frac{1}{2}\frac{gx^2}{v_0^2\cos^2\alpha}+x\,\text{tg}\,\alpha=-ax^2+bx$$

que representa una parábola de eje paralelo al eje y, pasando por un máximo.

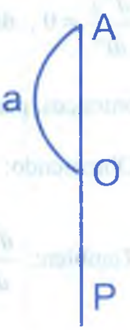
2^{do} Problema.- Problema del resorte vertical.-

Un peso p es atraído por un punto fijo A proporcionalmente a la distancia. Cuando este peso se coloca en "O" a una distancia OA = a y debajo del punto A, la atracción de A sobre el peso p es igual y opuesto al peso p.

Hallar la ecuación del movimiento del peso p.

Suponiendo que se le abandone sin velocidad inicial en el punto A. ¿Cuál es la duración de la oscilación del peso p y cual es su velocidad cuando llegue a O? No se considera resistencia <<del aire.

Llamamos x a la distancia del peso p al origen A, en un instante cualquiera y contemos positivamente hacia abajo se tiene p = mg.



Además la fuerza atractiva hacia A es de la forma -kx, dirigida en sentido inverso al peso, y la ecuación fundamental es:

$\sum$ de las fuerzas = mr, nos da: $\quad mg-kx=m\dfrac{d^2x}{dt^2}$

por otra parte, de acuerdo con el enunciado, se tiene en O $mg=ka \Rightarrow k=\dfrac{mg}{a}$ de donde:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{mg}{a}x=mg \quad\Rightarrow\quad \frac{d^2x}{dt^2}+\frac{g}{a}x=g$$

ecuación fundamental de segundo orden incompleto, cuya solución es:

$$x=M\cos\sqrt{\frac{g}{a}}t+N\,\text{sen}\sqrt{\frac{g}{a}}t+a$$

para t = 0, x = 0, así como $\frac{dx}{dt}$ se tiene M = -a y N = 0 , de donde

$$\begin{cases} x=a-a\cos\sqrt{\frac{g}{a}}t \\ \frac{dx}{dt}=\sqrt{ga}\,\text{sen}\sqrt{\frac{g}{a}}t \end{cases} \qquad \textbf{... (1)}$$

por lo tanto el movimiento x = f(t) es sinusoidal y el peso p oscila de 0 a 2a. el período es

$$T=\frac{2\pi}{r}=\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{a}}}=2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$$

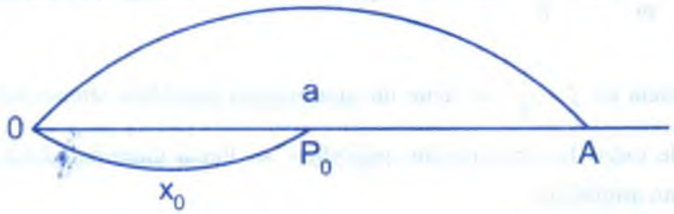
En 0, x = a y de acuerdo a la ecuación (1) se tiene: $T=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}$

de donde la velocidad es $v=\frac{dx}{dt}=\sqrt{ag}$

3er Problema.- Movimiento de un punto atraído o repelido por un centro fijo o, proporcionalmente a la distancia.-

En este problema consideremos dos casos:

a) El primer caso de atracción



Sea P_0 la posición normal de la abscisa x_0, v_0 la velocidad inicial dirigida hacia el entero O, y llamaremos m a la masa del cuerpo.

La fuerza que actúa sobre el cuerpo es: $F = -k^2 x$ (k^2 es una constante positiva)

Como el signo -, puesto que f se dirige en sentido inverso de x.

La fórmula fundamental del movimiento F = ma dá $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -k^2 x$

que haciendo $\omega^2 = \dfrac{k^2}{m}$ se tiene: $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$

ecuación diferencial de segundo orden y su solución es:

x = A cos ωt + B sen ωt que es sinusoidal.

Ahora calculando A y B se tiene: para t = 0, $x = x_0$ se tiene $A = x_0$

Además $v = \dfrac{dx}{dt} = -A\omega \operatorname{sen} \omega t + B\omega \operatorname{sen} \omega t$

y para t = 0, $v = v_0$ se tiene $v_0 = B\omega \Rightarrow B = \dfrac{v_0}{\omega}$

de donde se tiene: $x = x_0 \cos \omega t + \dfrac{v_0}{\omega} \operatorname{sen} \omega t = M \operatorname{sen}(\omega t - \varphi)$

el coeficiente de t es la pulsación ω, de donde el período

T es: $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi \dfrac{\sqrt{m}}{k}$ siendo independiente de las condiciones iniciales.

La frecuencia es $f = \dfrac{1}{T}$, se tiene un movimiento periódico sinusoidal: es decir, el más sencillo de todos los movimiento periódico, se llama también movimiento pendular o movimiento armónico.-

La cantidad x se denomina elongación o amplitud instantánea de la vibración, M es la amplitud de y, φ la fase.

Si en un fenómeno vibratorio, la amplitud instantánea viene dado por: $x = A \operatorname{sen} \omega t$ la velocidad es: $v = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos \omega t$ y la aceleración.

$r = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \operatorname{sen} \omega t = -\omega^2 x$ la fuerza que produce el movimiento (o la fuerza resultante), es, llamado m a la masa del cuerpo en movimiento y "a" a la aceleración:

$$F = ma = -m\omega^2 x = k\omega^2$$

resultando proporcionalmente al cuadrado de la frecuencia.

b) Segundo caso de repulsión

Siendo la fuerza $F = +k^2 x$

La ecuación del movimiento es: $m\frac{d^2x}{dt^2} = F = \frac{d^2x}{dt} - \omega^2 x = 0$, $(\omega^2 = \frac{k^2}{m})$

y la solución de $\frac{d^2x}{dt^2} - \omega^2 x = 0$ es: $x = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$

Con las condiciones del primer caso se calcula A y B obteniendo finalmente:

$$x = x_0\left(\frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2}\right) + \frac{v_0}{\omega}\left(\frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2}\right) \Rightarrow x = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \operatorname{senh} \omega t$$

4^to^ Problema.- Sólido girando alrededor de un eje.-

Sea I el momento de inercia con relación al eje y $\frac{d^2\theta}{dt^2\theta}$ la aceleración angular entonces la fórmula fundamental de los cuerpos que giran alrededor de un eje es:

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = \sum \text{ de los momentos de las fuerzas}$$

Sea θ el ángulo de desviación de la posición de equilibrio y c θ el momento resultante de las fuerzas aplicadas.

Momento que supondremos proporcional al ángulo θ.

Como este momento actúa en sentido inverso al del ángulo θ, es negativo, de donde la ecuación.

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2}=-c\theta \quad\Rightarrow\quad I\frac{d^2\theta}{dt^2}+c\theta=0$$

al resolver la ecuación se tiene: $\theta=\theta_0\,\text{sen}(\sqrt{\frac{c}{I}}\,t-\varphi)$

el movimiento resulta perpendicular ó sinusoidal, y como el coeficiente de t representa la pulsación ω se deduce el período.

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{I}{c}}$$

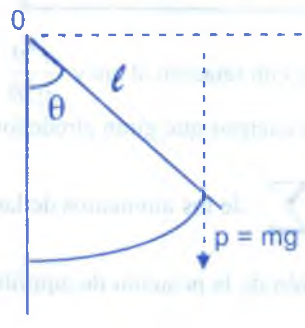
que es independiente de la amplitud.

Esto es lo que se produce cuando el par c θ es debido a la torsión de un hilo elástico y un resorte espiral o un muelle, como ocurre en el balanceo en espiral o un reloj, o en el cuadro móvil de un aparato eléctrico de medida.

7.1.1 APLICACIÓN AL PÉNDULO SIMPLE.-

Tomemos el ángulo θ, el momento de la fuerza p = mg, que tiende a volver al estado de equilibrio, es momento = p . ℓ sen θ = mgℓ sen θ, y si se supone que el ángulo θ es lo bastante pequeño para que se puedan confundir el seno y el ángulo (θ < 1 0° a 2 0°), podrá escribirse.

momento = mg ℓ θ = c θ



Por otra parte, el momento de inercia con respecto al eje es $I = m\ell^2$, el periodo T es, por consiguiente

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{c}} = 2\sqrt{\frac{m\ell^2}{mg\ell}} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

5to Problema.- Oscilaciones forzadas de un sistema oscilante cualquiera. resonancia.-

Considerando el caso general de una masa de peso m, sometida a una fuerza proporcional, con la amplitud x del desplazamiento, dirigida en sentido inverso y sin amortiguación.

La ecuación del movimiento es: $m\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2x, \qquad (k^2 > 0)$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0$$

en consecuencia, el sistema es oscilante y la amplitud instantánea es:

$x = x_0 \operatorname{sen}\sqrt{\frac{k^2}{m}}t$ es decir, una sinusoide sin amortiguar.

Sea $\omega^2 = \frac{k^2}{m}$ y supongamos ahora que este sistema, capaz de oscilar, está sometido a una causa exterior, sinusoidal y de pulsación ω, será pues, una fuerza impuesta que va a actuar sobre el sistema, y si x_0 es la amplitud máxima, la ecuación del movimiento se convierte en:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = k^2x_0 \operatorname{sen}\omega t \qquad \text{... (1)}$$

ecuación de segundo orden, cuya solución es: x = A sen (ωt + φ)

$$\frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \varphi) \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x$$

reemplazando en la ecuación (1) se tiene:

$$-Am\omega^2 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) + k^2 A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) = k^2 x_0 \operatorname{sen}\omega t$$

$A(k^2 - m\omega^2)\operatorname{sen}(\omega t + \varphi) = k^2 x_0 \operatorname{sen}\omega t$, por lo tanto:

$$\begin{cases} Si\ k^2 < m\omega^2 u\omega < \omega_0, A = \dfrac{k^2 x_0}{k^2 - m\omega^2}, & \varphi = 0 \\ Si\ k^2 > m\omega^2 u\omega > \omega_0, A = -\dfrac{k^2 x_0}{m\omega^2 - k^2}, & \varphi = \pi \end{cases}$$

resulta que: para $\omega < \omega_0$ el movimiento está en fase

para $\omega > \omega_0$ el movimiento está en operación

Si $\omega = \omega_0$, A = ∞, hay resonancia: la amplitud del movimiento crece considerablemente, y hay de enornes fuerzas.

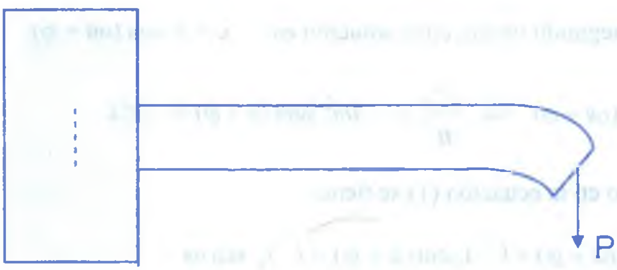
Así la resonancia (mecánica aquí) permite, con fuerzas pequeñas, obtener intensos e incluso violentos efectos.

En radio y con circuitos oscilantes se obtiene efectos análogos, lo que permite corregir intensas y de tensiones muy altas o sobretensiones utilísimas para amplificadores ó emisiones.

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \frac{g}{L}\operatorname{sen}\theta = 0 \quad \text{(cuando } \theta \text{ no es pequeño)}$$

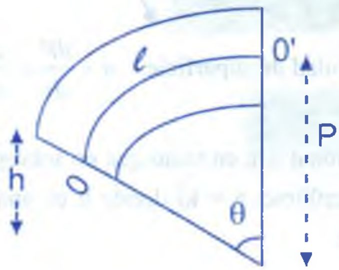
6to Problema.- Establecimiento de la fórmula fundamental de resistencia de materiales (flexión de vigas).

Suponemos una viga horizontal apoyada en dos puntos, pero, por razones de simplicidad y claridad, tomemos antes una viga horizontal sujeta a un extremo y sometido a otro a una fuerza p.



Sea 0 ó la fibra neutra, donde el esfuerzo es nulo, es decir, donde la longitud no cambia, encima la materia se estira y debajo se comprime.

Llamemos, asimilando la viga curvada a un arco de círculo.



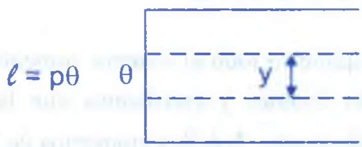
S la sección de la viga.

p el radio de curvatura de la fibra neutra.

l la longitud inicial de la viga.

y la distancia de una fibra cualquiera encima de la línea neutra.

Se tiene para la fibra media.



y para la fibra a la distancia y, de la longitud ha aumentado en $d\ell$

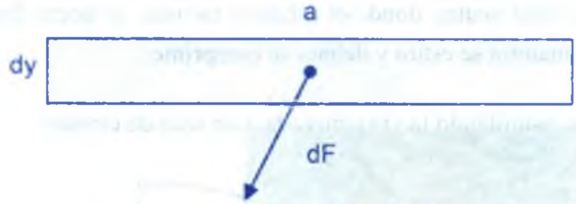
$$\ell + d\ell = (p+y)\theta$$

de donde $d\ell = y\theta = y\dfrac{1}{p}$

el alargamiento unitario i es $i = \dfrac{d\ell}{\ell} = \dfrac{y}{p}$

denominemos "a" el espesor de la viga (perpendicular al plano de la figura) y sea dy un pequeño aumento de y.

Sobre la superficie a.dy se ejerce una fuerza d F.



Sea n el esfuerzo por unidad de superficie. $n = \frac{dF}{ds} = \frac{dF}{ady}$

ahora bien, i es proporcional a n, en tanto que no sobrepasa el límite de elasticidad (la Ley de Hooke), y puede escribirse, n = ki donde k es una constante, que ha sido calificada módulo de elasticidad E.

Sea, por consiguiente n = E i

$$\frac{dF}{ady} = E(\frac{y}{p}) \quad \text{de donde} \quad dF = \frac{aE}{p} ydy \qquad \text{... (1)}$$

es la suma de todos los dF sustituida la parte izquierda de la viga supuesta elevada, y equilibrando con la fuerza de la derecha.

En efecto, estando en equilibrio todo el sistema, tomemos los momentos con respecto al punto "O" de todas las fuerzas, y escribamos que la suma algebraica de todos los momentos es nula, o incluso que: Σ de los momentos de las fuerzas de la izquierda = Σ de los momentos de las fuerzas de la derecha.

Es decir $\int ydF = M$ que se llama también momento de flexión.

Multiplicando la ecuación (1) por y se tiene:

$ydF = \frac{aE}{p} y^2 dy$, integrando $\int_0^h ydF = M = \frac{E}{p} \int ay^2 dy$

ahora bien, $ay^2 dy$ es el momento de inercia de la lámina dy con respecto a la línea neutra y si se llama Y el momento de inercia de la sección s con respecto al eje que pasa por O y por G.

$$I = \int ay^2 dy$$

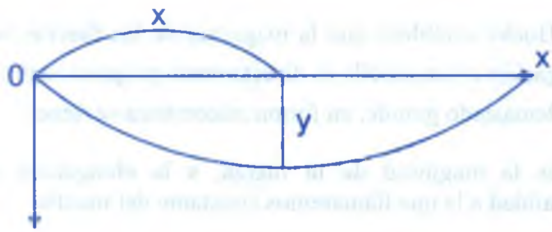
se tendrá $M = \frac{EI}{p}$, por otra parte el radio de curvatura es: $p = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$ pero como las flexiones de las vigas son siempre muy ligeras, y' que es la pendiente, resulta prácticamente nula en cada punto, por lo tanto $p = \frac{1}{y''}$, lo que dá $M = EIy''$

es decir: $$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

Fórmula fundamental de la flexión en resistencia de materiales.

7^{mo} Problema.- Cálculo de la flexión de una viga.-

Consideremos una viga horizontal apoyada en dos puntos en sus extremos, esta viga se va a flexionar, para esto tomemos el eje de la viga como eje de las x y llamemos y la desnivelación vertical de la viga en un punto cualquiera, es decir la flexión.



Si se considera:

I = momento de inercia de la sección de la viga con respecto a su centro de gravedad.

E = el módulo de elasticidad del metal.

M = suma de los momentos de todas las fuerzas situadas a la derecha (o a la izquierda) de la sección considera a la distancia x, comprendido los momentos debidos a la reacciones de los puntos de apoyo.

P = radio de curvatura de la viga, en un punto cualquiera de la abscisa x.

Se tiene la misma fórmula que en el caso de la viga sujeta: $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{E\ I}$

cuya solución da la flexión y en un punto cualquiera.

8vo Problema.- Vibraciones de una masa pendiente de un muelle.-

Para formular la ecuación diferencial de este problema se necesita dos leyes de la física, la segunda de Newton y la ley de Hooke.

La segunda Ley de Newton establece que la variación de la cantidad de movimiento de un cuerpo por unidad de tiempo es proporcional a la fuerza resultante que actúa sobre el cuerpo y su sentido es la de la fuerza resultante.

Expresando en forma matemática es: $\frac{d}{dt}(mv) = KF$

donde m es la masa del cuerpo, v su velocidad, F la fuerza resultante que actúa sobre él, K una constante de proporcionalidad.

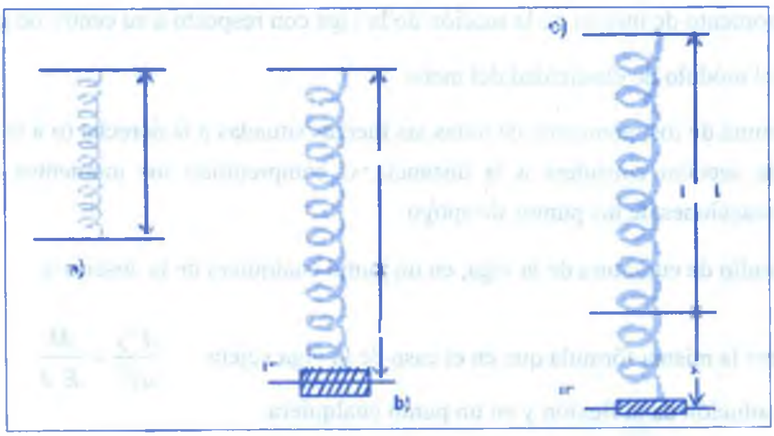
Si m se considera constante $\Rightarrow m\frac{d}{dt} = KF$

de donde F = K m a, donde $a = \frac{dv}{dt}$

La ley de Hooke establece que la magnitud de las fuerzas necesarias para producir una cierta elongación en un muelle es directamente proporcional a la elongación, supuesto que ésta no es demasiado grande, en forma matemática se tiene: $|F| = Ks$

donde F es la magnitud de la fuerza, s la elongación y K es una constante de proporcionalidad a la que llamaremos constante del muelle.

Para formular el problema consideremos lo siguiente:



a) longitud natural L	b) masa en equilibrio, muelle con deformación L + ℓ	c) masa a una distancia x por debajo de posición de equilibrio; longitud del muelle con deformación L + ℓ + x.

Ahora consideremos las fuerzas que actúan sobre la masa m.

1° La fuerza de gravedad $F_1 = mg$ g es la aceleración debido a la gravedad.

2° La fuerza recuperadora del muelle, por la ley de Hooke se tiene $F_2 = -K(x+\ell)$ por ser la fuerza recuperadora F_2 igual a la magnitud pero de sentido opuesto a las fuerzas de gravedad, y que para la posición x = 0, se tiene:

$$-mg = -K(0+\ell) \Rightarrow mg = K\ell \quad \text{por lo tanto} \quad F_2 = -Kx - mg$$

3° La fuerza de resistencia del medio llamado fuerza de amortiguamiento, que se expresa así: $F_3 = -a\dfrac{dx}{dt}$, a > 0

4° Cualesquiera fuerzas exteriores que actúan sobre la masa que será expresado por $F_4 = F(t)$ ahora aplicando la segunda ley de Newton F = ma, donde

$F = F_1 + F_2 + F_3 + F_4$ se tiene: $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = mg - Kx - mg - a\dfrac{dx}{dt} + F(t)$ de donde:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} + Kx = F(t)$$

Que es la ecuación diferencial del movimiento de la masa sujeta al muelle.

9[no] Problema.- Movimiento libre no amortiguado.-

De la ecuación diferencial del movimiento. $m\dfrac{d^2x}{dt^2} + a\dfrac{dx}{dt} + Kx = F(t)$

para el caso del movimiento libre no amortiguado se tiene a = 0 y F(t) = 0 $\forall$ t entonces: $m\dfrac{d^2x}{dt^2}+Kx=0$ si, $\lambda^2=\dfrac{K}{m}$

$\dfrac{d^2x}{dt^2}+\lambda^2x=0$, cuya solución es: $x=c_1\cos\lambda t+c_2\operatorname{sen}\lambda t$

donde c_1,c_2 constantes arbitrarias y para

$x(0)=x_0,\ x'(0)=v_0$ se tiene $c_1=\dfrac{v_0}{\lambda}$, $c_2=x_0$

$$x=\frac{v_0}{\lambda}\cos\lambda t+x_0\operatorname{sen}\lambda t$$

expresaremos en la forma siguiente: $x=c\left(\dfrac{\frac{v_0}{\lambda}}{c}\cos\lambda t+\dfrac{x_0}{c}\operatorname{sen}\lambda t\right)$

donde $c=\sqrt{\left(\dfrac{v_0}{\lambda}\right)^2+x_0^2}>0$ siendo $\dfrac{\frac{v_0}{\lambda}}{c}=-\operatorname{sen}\phi$

$\dfrac{x_0}{c}=\cos\phi$ obteniendo $x=c\cos(\lambda t+\phi)\Rightarrow x=c\cos\left(\sqrt{\dfrac{K}{m}}t+\phi\right)$

por lo tanto el movimiento libre no amortiguado de la masa es un movimiento armónico simple.

10mo Problema.- Movimiento libre amortiguado.-

De la ecuación diferencial del movimiento $m\dfrac{d^2x}{dt^2}+a\dfrac{dx}{dt}+Kx=F(t)$, para el caso del movimiento libre amortiguado se tiene: F(t) = 0 $\forall$ t resultando la ecuación diferencial

$m\dfrac{d^2x}{dt^2}+a\dfrac{dx}{dt}+Kx=0$ de donde $\dfrac{d^2x}{dt^2}+2b\dfrac{dx}{dt}+\lambda^2x=0$ siendo $2b=\dfrac{a}{m}$, $\lambda^2=\dfrac{K}{m}$

para la solución de este problema se presenta tres casos que dependen del signo de $b^2-\lambda^2$.

Caso 1.- Movimiento Oscilatorio Amortiguado.-

Si b < λ entonces la solución es: $x = e^{-bt}[c_1 \operatorname{sen}\sqrt{\lambda^2 - b^2}\,t + c_2 \cos\sqrt{\lambda^2 - b^2}\,t]$

que también se puede expresar en la forma: $x = e^{-bt}\cos[\sqrt{\lambda^2 - b^2}\,t + \phi]$ donde

$c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} > 0$ y φ está determinado por las ecuaciones:

$$-\operatorname{sen}\phi = \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \quad ; \quad \cos\phi = \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}$$

Caso 2.- Amortiguador Crítico.- Si b = λ; La solución es $x = (c_1 + c_2 t)e^{-bt}$

Caso 3.- Amortiguamiento Super Crítico.- Si b > λ

Entonces la solución es: $x = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$

donde $r_1 = -b + \sqrt{b^2 - \lambda^2}$, $r_2 = -b - \sqrt{b^2 - \lambda^2}$

11vo Problema.- Circuitos eléctricos.-

En las aplicaciones de las ecuaciones diferenciales a circuitos en serie contiene una fuerza electromotriz, elementos de resistencia, inducción y capacidad.

Una fuerza electromotriz (por ejemplo una batería o un generador) produce un flujo de corriente en un circuito cerrado y que esta corriente produce lo que se llama caída de tensión (o voltaje).

Para la caída de tensión en cada elemento de resistencia, inducción y capacidad se tiene las tres leyes siguientes:

1° La caída de tensión en un elemento de Resistencia es dado por $E_R = Ri$ donde R es una constante de proporcionalidad llamada resistencia e i la intensidad de la corriente.

2° La caída de tensión en un elemento de inducción es dado por: $E_L = L\dfrac{di}{dt}$ donde L es una constante de proporcionalidad llamada inductancia e i la intensidad de la corriente.

3° La caída de tensión en un elemento de capacidad o condensador es dado por: $E_c = \dfrac{1}{c}q$ donde c es una constante de proporcionalidad llamada capacitancia y q es la carga eléctrica instantánea en el condensador como $i = \dfrac{dq}{dt}$ entonces: $E_c = \dfrac{1}{c}\int i\,dt$

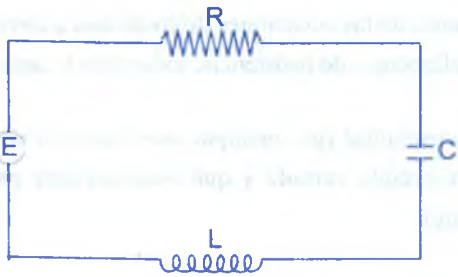
Las leyes fundamentales en el estudio de los circuitos eléctricos son:

a) **Ley de Kirchoff (forma 1).-** La suma algebraica de las caídas instantáneas de tensión, a lo largo de un circuito cerrado en un sentido específico es cero.

b) **Ley de Kirchoff (forma 2).-** La suma de las caídas de tensión en los elementos de inducción, resistencia y capacidad, es igual a la fuerza electromotriz total en un circuito cerrado.

Consideremos el circuito siguiente:

En este diagrama y en los posteriores emplearemos los siguientes símbolos convencionales.



E fuerza electromotriz (batería o generador)

R resistencia

L inductor

C Condensador

Aplicando la ley de Kirchoff, al circuíto y utilizando las leyes de caídas de tensión se obtiene la ecuación: $L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{1}{c}q=E$

Como $i=\frac{di}{dt} \Rightarrow \frac{di}{dt}=\frac{d^2q}{dt^2}$ entonces : $L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{1}{c}q=E$

de esta ecuación se tiene: $L\frac{d^2i}{dt^2}+R\frac{di}{dt}+\frac{1}{c}i=\frac{dE}{dt}$

Por lo tanto se tiene las dos ecuaciones.

Ecuaciones diferenciales para la carga q y la corriente i:

Si el circuito no tiene condensador la ecuación se reduce a: $L\frac{di}{dt}+Ri=E$

y así se tiene inductor, la ecuación se reduce a: $R\frac{dq}{dt}+\frac{1}{c}q=E$

Ejercicios Propuestos.-

1. En el extremo de un muelle espiral sujeto al techo, se coloca un peso de 8 libras. El peso queda en reposo en su posición de equilibrio, en la que el muelle se ha alargado 6 pulgadas. A continuación, el peso se desplaza 3 pulgadas por debajo de la posición de equilibrio y se abandona en $t=0$ con una velocidad inicial de 1 pie/seg., dirigida hacia abajo. Despreciando la resistencia del medio y suponiendo que no existen fuerzas exteriores, determinar la amplitud, periodo y frecuencia del movimiento resultante:

Rpta: Amplitud del movimiento $\sqrt{\frac{5}{8}}$ pie
el periodo $2(\frac{\pi}{8})=\frac{\pi}{4}$ seg.
frecuencia es $\frac{4}{\pi}$ oscilaciones/seg.

(2) En el extremo inferior de un muelle espiral sujeto al techo se suspende un peso de 12 libras. El peso queda en reposo en su posición de equilibrio, en la que el muelle queda alargado 1.5 pulgadas. A continuación se lleva el peso 2 pulgadas por debajo de su posición de equilibrio y se abandona partiendo del reposo en t = 0. Hallar el desplazamiento del peso en función del tiempo. Determinar la amplitud, periodo y frecuencia del movimiento resultante. **Rpta:** $x = \frac{\cos 16t}{6}$, $\frac{1}{6}$ pies, $\frac{\pi}{8}$ oscilaciones/seg.

(3) Al extremo inferior de un muelle espiral suspendido del techo se liga un peso de 4 lbs. El peso queda en su posición de equilibrio en la que el muelle está alargado 6 pulgadas. En el instante t = 0 se golpea el peso de modo que se pone en movimiento con una velocidad inicial de 2 pies/seg. dirigida hacia abajo.

a) Determinar el desplazamiento resultante y la velocidad del peso en función del tiempo.

b) Hallar la amplitud, periodo y frecuencia del movimiento.

c) Determinar los instantes en los que el peso se encuentra 1.5 pulgadas por debajo de su posición de equilibrio y moviéndose hacia abajo.

d) Determinar los instantes en que se encuentra 1.5 pulgadas por debajo de su posición de equilibrio y movimiento hacia arriba.

Rpta: **a)** $x = -\frac{\operatorname{sen} 8t}{4}$ **b)** $\frac{1}{4}$ pies; $\frac{\pi}{4}$ seg, $\frac{4}{\pi}$ oscilaciones/seg.

c) $t = \frac{\pi}{48} + \frac{n\pi}{4}$ $(n = ,0,1,2,...)$ **d)** $t = \frac{5\pi}{48} + \frac{n\pi}{4}$ $(n = ,0,1,....)$

(4) La naturaleza de un muelle espiral es tal que un peso de 225 lbs. le deforma 6 pulgadas. El muelle se encuentra suspendido del techo, a su extremo inferior se liga un peso de 16 lbs. que, a continuación, queda en su posición de equilibrio. Entonces se lleva a una posición 4 pulgadas por debajo de la del equilibrio y se abandona en t = 0 con una velocidad inicial de 2 pies/seg. dirigida hacia abajo.

a) Determinar el desplazamiento resultante como función del tiempo.

b) Hallar la amplitud, período y frecuencia del movimiento resultante.

c) ¿En qué instante atraviesa el peso su posición de equilibrio y cuál es su velocidad en ese instante?

Rpta: **a)** $x = -\dfrac{\operatorname{sen} 10t}{5} + \dfrac{\cos 10t}{3}$ **b)** $\dfrac{\sqrt{34}}{15}$ pies; $\dfrac{\pi}{5}(seg)$, $\dfrac{5}{\pi}$ oscilaciones/seg.

c) 0.103 seg; -3.888 pies/seg.

(5) De un resorte vertical cuya constante de rigidez es igual a 300 Kg/m. se suspende un peso de 118 Kg. Si el peso se levanta 76.6 mm. sobre su posición de equilibrio y luego se le suelta, calcular el instante en que el peso se halla a 38.3 mm. debajo de su posición de equilibrio y moviéndose hacia abajo. Halle también la amplitud, período y frecuencia del movimiento. **Rpta:** $x = 7.66 \operatorname{sen}(5t + \dfrac{3\pi}{2})$, amplitud 7.66 cm

El periodo $\dfrac{2\pi}{5}$, la frecuencia $\dfrac{5}{2\pi}$ ciclos/seg.

(6) Un peso de 1.84 Kg. suspendido de un resorte lo estira 76.5 mm. se tira del peso hasta bajarlo 153 mm. de su posición de equilibrio y luego se le suelta. Suponiendo que el peso actúa una fuerza de amortiguamiento numéricamente igual a 3 v kg. siendo v la velocidad instantánea en m/seg, hallar la ecuación del movimiento del peso después de haberlo soltado. **Rpta:** $x = 0.153\sqrt{2}e^{-8t}\operatorname{sen}(8t + \dfrac{\pi}{4})$

(7) Una masa de 100 gr. se suspende de un extremo de un resorte y el otro extremo se suspende de un soporte fijo dejando que el sistema alcance el reposo. En la posición de equilibrio el resorte se estira 5 cm. La masa se tira 5 cm. hacia abajo y se suelta con una velocidad de 7 cm/seg. Encuentre la ecuación del movimiento de este sistema para las siguientes fuerzas de amortiguamiento.

a) $2.800\dfrac{dx}{dt}\dfrac{gr-cm}{seg^2}$ **b)** $3,500\dfrac{dx}{dt}\dfrac{gr-cm}{seg^2}$

Rpta: **a)** $x = (5 + 77t)e^{-14t}$ **b)** $x = 7e^{-7t} - 2e^{-28t}$

(8) Una masa m se proyecta verticalmente hacia arriba desde "O" con una velocidad inicial v_0. Hallar la altura máxima alcanzada, suponiendo que la resistencia del aire es proporcional a la velocidad. **Rpta:** altura máxima $x = \frac{1}{k}[v_0 - \frac{g}{k}\ln(\frac{g+kv_0}{g})]$

(9) Se ha colocado una cadena sobre una clavija pulida, colgando, de un lado 8 dm. y del otro 12 dm. Hallar el tiempo que la cadena tarda, al resbalar, en caerse.

a) Si se prescinde del rozamiento.

b) Si el rozamiento es igual al peso de 1 dm. de cadena.

Rpta: **a)** $t = \sqrt{\frac{10}{g}}\, arc.\cosh\frac{1}{2}(x+2) = \sqrt{\frac{10}{g}}\ln\frac{x+2+\sqrt{x^2+4x}}{2}$

b) $t = \sqrt{\frac{10}{g}}\ln\frac{2}{3}(x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x})$

(10) En el extremo inferior de un muelle sujeto al techo se fija un peso de 32 libras. El peso queda en reposo en su posición de equilibrio, en la que el alargamiento del muelle es de 2 pies. A continuación se lleva dicho peso 6 pulgadas por debajo de la posición de equilibrio y se abandona t = 0, no existe fuerzas exteriores, pero la resistencia del medio en libras es numéricamente igual a $4\frac{dx}{dt}$, donde $\frac{dx}{dt}$ es la velocidad instantánea en pies por segundo. Determinar el movimiento resultante para el peso pendiente del muelle.

Rpta: $x = \frac{\sqrt{3}}{3}e^{-2t}\cos(2\sqrt{3}t - \frac{\pi}{6})$

(11) Al extremo inferior de un muelle espiral suspendido del techo se sujeta un peso de 8 lbs. que queda en reposo en su posición de equilibrio con el muelle alargado 0.4 pies, se lleva entonces el peso 6 pulgadas por debajo de dicha posición de equilibrio y se abandona en t = 0. La resistencia del medio es, en libras, numéricamente igual a $2\frac{dx}{dt}$ donde $\frac{dx}{dt}$ es la velocidad instantánea en pies por segundo.

a) Escribir la ecuación diferencial del movimiento, así como las condiciones iniciales.

b) Resolver el problema de valores iniciales planteado en la parte a) para determinar el desplazamiento del peso en función del tiempo.

Rpta: **a)** $\frac{1}{4}\frac{d^2x}{dt^2}+2\frac{dx}{dt}+20x=0,\ \ x(0)=\frac{1}{2},\ \ x'(0)=0$

b) $x=e^{-4t}(\frac{\text{sen}\,8t}{4}+\frac{\cos 8t}{2})$

12 En el extremo inferior de un muelle espiral suspendido de un soporte fijo se coloca un peso de 8 lbs. El peso queda en reposo en su posición de equilibrio, posición en la que el muelle se encuentra deformado 6 pulgadas. A continuación se desplaza el peso 9 pulgadas por debajo de dicha posición y se abandona en t = 0. El medio ofrece una resistencia que es, en libras, numéricamente igual a $4\frac{dx}{dt}$, siendo $\frac{dx}{dt}$ la velocidad instantánea en pies por segundo. Determinar el desplazamiento del peso en función del tiempo.

Rpta: $x=(6t+\frac{3}{4})e^{-8t}$

13 Se ha suspendido un peso de 7.26 Kg. cuya constante de rigidez es 7.44 Kg/m. se aplica una fuerza externa dada por F(t) = 10.9 sen10t, $t \geq 0$, se supone que actúa una fuerza de amortiguamiento que expresada en Kg. es numéricamente igual a 5.95 v, siendo v la velocidad instantánea del peso en m/seg. inicialmente el peso se encuentra en reposo en su posición de equilibrio. Halle la posición del peso en cualquier instante.

Rpta: $x=0.2925e^{-1.55t}-0.212e^{-6.45t}-0.0915\,\text{sen}\,10t-0.0813\cos 10t$

14 Se suspende un peso de 14.5 Kg. de un resorte vertical cuya constante de rigidez es 5.95 Kg/m. se aplica una fuerza F(t) = 7.26 sen2t, $t \geq 0$. Suponiendo que cuando t = 0 el cuerpo se encuentra en reposo en su posición de equilibrio y que la fuerza amortiguadora es despreciable, determine la posición y la velocidad del peso en cualquier instante. **Rpta:** x = 0.61 sen 2t – 1.22t cos 2t ; y = 2.44 sen 2t

(15) Una viga horizontal de 2ℓ metros de longitud está apoyada en sus extremos. Hallar la ecuación de su curva y su máxima deformación vertical (flecha) cuando tiene una carga uniformemente distribuida de ω Kg/m.

Rpta: $y = \frac{\omega}{24EI}(4\ell x^3 - x^4 - 8\ell^3 x)$; $-y \ \max = \frac{5\omega\ell^4}{24EI}$

(16) Resolver el problema 15) si actúa, además, una carga de W Kg en medio de la viga.

Rpta: $y = \frac{\omega}{24EI}(4\ell x^3 - x^4 - 8\ell^3 x) + \frac{W}{12EI}(3\ell x^2 - |\ell - x|^3 - 6\ell^2 x + \ell^3)$

$$-y \ \max = \frac{5\omega\ell^4}{24EI} + \frac{W\ell^3}{6EI}$$

(17) Una viga horizontal de ℓ metros de longitud está empotrada en un extremo y libre en el otro. Hallar la ecuación de su curva elástica y la flecha máxima si la carga uniformemente repartida es ω Kg/m. **Rpta:** $y = \frac{\omega}{24EI}(4\ell x^3 - 6\ell^2 x^2 - x^4)$; $-y \ \max = \frac{\omega\ell^4}{8EI}$

(18) Una viga horizontal de ℓ metros de longitud está empotrada en ambos extremos. Hallar la ecuación de la curva elástica y la flecha máxima si tiene una carga uniformemente distribuida de ω Kg/m. **Rpta:** $y = \frac{\omega x^2}{24EI}(2\ell x - \ell^2 - x^2)$, $-y \ \max = \frac{\omega\ell^4}{384EI}$

(19) Resolver el problema 18) si además actúa un peso W Kg. en el punto medio de la viga.

Rpta: $y = \frac{\omega}{24EI}(2\ell x^3 - \ell^2 x^2 - x^4) + \frac{W}{48EI}(\ell^3 - 6\ell^2 x + 9\ell x^2 - 4x^3)$, $\frac{\ell}{2} \le x \le \ell$

$$-y \ \max = \frac{1}{384EI}(\omega\ell^4 + 2W\ell^3)$$

(20) Una viga de longitud 3ℓ está libremente apoyada en los extremos. Hay una carga uniforme ω por unidad de longitud y carga ω aplicada a una distancia ℓ de cada extremo. Tome el origen en el punto medio de la viga y halle la ecuación de la curva elástica y la máxima de flexión.

Rpta: $y = \frac{1}{EI}[\frac{\omega}{2}(\frac{9}{8}\ell^2 x^2 - \frac{x^4}{12})] + \omega(\frac{3}{4}\ell x^2 - \frac{x^3}{6} - \frac{\ell^2 x}{8} + \frac{\ell^3}{48})$, $\frac{\ell}{2} \le x \le \frac{3\ell}{2}$

$$-y \ \max = \frac{1}{384EI}(405\omega\ell^4 + 368\omega\ell^3)$$

(21) Un circuito eléctrico consta de una inductancia de 0.1 henrios, una resistencia de 20 ohmios, y un condensador cuya capacidad es de 25 microfaradios (1 microfaradio = 10^{-6} faradios). Hallar la carga de q y la corriente y en el tiempo t, siendo las condiciones iniciales:

a) q = 0.05 coulombios, $i = \frac{dq}{dt} = 0$, para t = 0

b) q = 0.05 coulombios, i = -0.2 amperios para t = 0

Rpta: **a)** $q = e^{-100t}(0.05\cos 624.5t + 0.008 \operatorname{sen} 624.5t)$; $i = -0.32e^{-100t} \operatorname{sen} 624.5t$

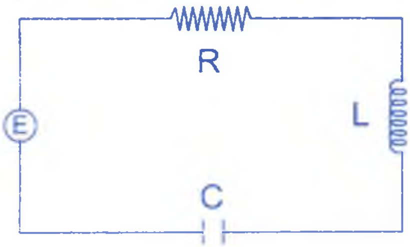
b) $q = e^{-100t}(0.05\cos 624.5t + 0.0077 \operatorname{sen} 624.5t)$

$$i = e^{-100t}(-0.2\cos 624.5t - 32.0 \operatorname{sen} 624.5t)$$

(22) Un circuito consta de una inductancia de 0.05 henrios, una resistencia de 20 ohmios, un condensador cuya capacidad es de 100 microfaradios y una f.e.m. de E = 100 voltios. Hallar i y q siendo las condiciones iniciales q = 0 i = 0 para t = 0.

Rpta: $q = e^{-200t}(-0.01\cos 400t - 0.005 \operatorname{sen} 400t) + 0.01$; $i = 5e^{-200t} \operatorname{sen} 400t$

(23) Sea L = 10 henry (h), R = 250 ohms (r), C = 10^{-3} farads (f) y E = 900 volts. (v) en el circuito de la figura. Suponga que no hay carga presente y que no está fluyendo corriente en el momento t =0 en que se aplica E, calcule la corriente y la carga para todo valor t> 0.



Rpta: $I(t) = 6(e^{-5t} - e^{-20t})$

$$Q(t) = \frac{1}{10}(9 - 12e^{-5t} + 3e^{-20t})$$

(24) En los ejercicios, halle la corriente de estado estacionario en el circuito RLC de la figura de 23) donde:

a) L = 5 henrys, R = 10 ohms, C = 0.1 farad, E = 25 sent volts.

b) L = 10 henrys, R = 40 ohms, C = 0.025 farad, E = 100 cos5t volts.

c) L = 1 henrys, R = 7 ohms, C = 0.1 farad, E = 100 sen10t volts.

d) L = 2.5 henrys, R = 10 ohms, C = 0.08 farad, E = 100 cos5t volts

(25) Halle la corriente transitoria en el circuito RLC de la figura de 23) para los ejercicios de 24).

(26) Dado que L = 1 henrys, R = 1200 ohms, C = 10^{-6} farad, Y(0)=Q(0) = 0 y E = 100 sen 600 t, volts, determine la corriente transitoria y la corriente de esta estacionario.

Rpta: $I_T = \frac{e^{-600t}}{2320}(297\,\text{sen}\,800t - 96\cos 800t)$; $I_E = \frac{1}{580}(24\cos 600t - 27\,\text{sen}\,600t)$

(27) Se conecta una inductancia de L henrios, una resistencia R ohms. y una capacitancia C farads, en serie con una f.e.m. de $E_0\,\text{sen}\,\omega t$ volts. suponga que Q(0) = I(0) = 0 y $4L > R^2C$.

a) Halle la expresión para Q(t) y I(t). **b)** ¿Qué valor de ω producirá resonancia?

Rpta: **b)** $\omega = \frac{\sqrt{\frac{4L}{C} - R^2}}{2L}$

(28) Resuelva el ejercicio 27) para $4L < R^2C$ **Rpta:** **b)** ningún ω produce resonancia.

CAPÍTULO VIII

8. SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE COEFICIENTES CONSTANTES.-

Un sistema de "n" ecuaciones diferenciales lineales de primer orden en las funciones incógnitas. $x_1 = \psi_1(t),\ x_2 = \psi_2(t),\dots,x_n = \psi_n(t)$ es de la forma siguiente:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t,x_1,x_2,\dots,x_n) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(t,x_1,x_2,\dots,x_n) \\ \ \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(t,x_1,x_2,\dots,x_n) \end{cases}$$

NOTACIÓN VECTORIAL

$$x = (x_1,x_2,\dots,x_n) \in V_n\ ,\ f = (f_1,f_2,\dots,f_n),\ \frac{dx}{dt} = f(t,x)$$

donde $x_1 = \psi_1(t),\dots,x_n = \psi_n(t)$ son diferenciables y con derivadas continuas en (a,b) llamadas solución del sistema.

Un sistema de "n" ecuaciones diferenciales lineales de primer orden de "n" funciones incógnitas se puede escribir en la forma: $\dfrac{dx_i}{dt} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}(t) + b_i(t);$

Si $b_i(t) = 0$, el sistema se llama homogénea y si $b_i(t) \neq 0$ el sistema se llama no homogénea. Para resolver un sistema de ecuaciones diferenciales existen los siguientes métodos:

MÉTODO: Reducción de un Sistema a una Ecuación Diferencial de n-Esimo Orden.-

Consideremos un sistema de dos ecuaciones:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + by + f(t) & \ldots (1) \\ \dfrac{dy}{dt} = cx + dy + g(t) & \ldots (2) \end{cases}$$

donde a, b, c ,d, son constantes f(t), g(t) son funciones conocidas: x(t), y(t) son funciones incógnitas de la ecuación (1) despejamos $y = \frac{1}{b}(\frac{dx}{dt} - ax - f(t))$

reemplazando y en (2) se obtiene:

$$\frac{d}{dt}[\frac{1}{b}(\frac{dx}{dt} - ax - f(t))] = cx + \frac{d}{b}(\frac{dx}{dt} - ax - f(t)) + g(t)$$

$$\frac{1}{b}\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{adx}{dt} - \frac{d}{dt}(f(t)) - cx - \frac{d}{b}(\frac{dx}{dt} - ax - f(t)) - g(t) = 0$$

simplificando se tiene: $\boxed{A\frac{d^2x}{dt^2} + B\frac{dx}{dt} + cx = R(t)}$

donde A, B, C son constante que es una ecuación diferencial de coeficientes constantes.

Ejemplo.-

1 Resolver : $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3 - 2y & \ldots (1) \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - 2t & \ldots (2) \end{cases}$

Solución

De (1) se tiene $y = \frac{1}{2}(3 - \frac{dx}{dt})$ Reemplazando en (2):

$$\frac{d}{dt}(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\frac{dx}{dt}) = 2x - 2t \Rightarrow -\frac{1}{2}\frac{d^2x}{dt^2} = 2x - 2t \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 4t$$

es una ecuación no homogénea.

El polinomio general de la ecuación homogénea es: $r^2+4=0 \Rightarrow r_1=2i,\ r_2=-2i.$

La solución general de la ecuación homogénea es: $x_g=c_1\cos 2t+c_2 \operatorname{sen} 2t.$

La solución particular es: $x_p = At+B$

$\overset{\bullet}{x}_p = A \Rightarrow \overset{\bullet\bullet}{x}_p = 0 \Rightarrow 0+4(At+B)=4t$

$4A = A \Rightarrow A=1, B=0 \Rightarrow x_p = t$

La solución general de la ecuación no homogénea es: $x = x_g + x_p = c_1\cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t + t$

② Resolver: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x-2y & \ldots(1) \\ \dfrac{dy}{dt} = x+3y & \ldots(2) \end{cases}$

Solución

De (1) se tiene $y=\frac{1}{2}(x-\frac{dx}{dt})$ reemplazando en (2)

$\frac{d}{dt}[\frac{1}{2}(x-\frac{dx}{dt})] = x+\frac{3}{2}(x-\frac{dx}{dt})$, calculando la derivada

$\frac{1}{2}\frac{dx}{dt}-\frac{1}{2}\frac{d^2x}{dt^2} = x+\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}\frac{dx}{dt}$, al simplificar se tiene: $\frac{d^2x}{dt^2}-4\frac{dx}{dt}+5x=0$

El polinomio característico es $P(r)=r^2-4r+5=0$ de donde $r_1=2+i$, $r_2=2-i$

La solución general es: $x_g = c_1e^{\alpha x}\cos\beta x + c_2 e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x$

es decir: $x_g = c_1e^{2x}\cos x + c_2e^{2x} \operatorname{sen} x$

③ Resolver: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}+3x+y=0 & \ldots(1) \\ \dfrac{dy}{dt}-x+y=0 & \ldots(2) \end{cases}$ $\quad x(0)=y(0)=1$

Solución

de (2) despejamos **x** es decir $x = y + \frac{dy}{dt}$, reemplazando en (1)

$\frac{d}{dt}(y + \frac{dy}{dt}) + 3(y + \frac{dy}{dt}) + y = 0$, efectuando la derivada se tiene: $\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 4y = 0$

Polinomio característico $P(r) = r^2 + 4r + 4 = 0$, de donde r = -2 de multiplicidad 2.

$x = c_1e^{-2t} + c_2te^{-2t}$, $x(0) = 1 \Rightarrow c_1 = 1$, remplazando en (1)

$-2c_1e^{-2t} - 2c_2te^{-2t} + c_2e^{-2t} + 3c_1e^{-2t} + 3c_2te^{-2t} + y(t) = 0$

$c_1e^{-2t} + c_2te^{-2t} + c_2e^{-2t} + y(t) = 0$

$e^{-2t} + c_2te^{-2t} + c_2e^{-2t} + 1 = 0 \Rightarrow 1 + c_2 + 1 = 0 \Rightarrow c_2 = -2$

la solución es $x = e^{-2t} - 2te^{-2t}$, análogamente para $y = e^{-2t}(1 + 2t)$

4 Resolver: $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - \frac{1}{2}y - 3t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{3}{2} & \text{...(1)} \\ \frac{dy}{dt} = 2y - 2t - 1 & \text{...(2)} \end{cases}$

Solución

$\frac{1}{2}y = 3x - \frac{dx}{dt} - 3t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{3}{2}$, reemplazando en (2)

$\frac{3}{2}\frac{dx}{dt} - \frac{1}{2}\frac{d^2x}{dt^2} - 3t - \frac{1}{4} = 12x - 4\frac{dx}{dt} - 12t^2 - 2t + 6 - 2t - 1$, al simplificar

$2\frac{d^2x}{dt^2} - 10\frac{dx}{dt} + 12x = 12t^2 - 8t - 6 \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} - 5\frac{dx}{dt} + 6x = 6t^2 - 4t - 3 \Rightarrow r^2 - 5r + 6 = 0$

$\Rightarrow r = 2, \; r = 3; \; x_g = c_1e^{2t} + c_2e^{3t}$, la solución particular es:

$x_p = At^2 + Bt + c \Rightarrow x'_p = 9At + B \Rightarrow x''_p = 2A$

reemplazando en la ecuación diferencial:

$$2A - 10At - 5B + 6At^2 + 6Bt + 6c = 6t^2 - 4t - 3$$

6A = 6 $\Rightarrow$ A = 1

(-10A + 6B) = -4 $\Rightarrow$ B = 1

2A - 5B + 6C = -3

2 - 5 + 6C = -3

C = 0 $\qquad x = x_g + x_p$

$$x = c_1e^{2t} + c_2e^{3t} + t^2 + t$$

MÉTODO: Matricial para Sistema de Primer Orden con Coeficientes Constantes.-

Consideremos el siguiente sistema:
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots + a_{1n}x_n \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots\dots + a_{nn}x_n \end{cases} \qquad \dots (1)$$

Las soluciones de este sistema de ecuaciones es de la forma:

$x_1 = \beta_1 e^{rt},\ x_2 = \beta_2 e^{rt}, \dots, x_n = \beta_n e^{rt}$, donde β_i, $i = 1,\dots,n$ son constantes

Como
$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \beta_1 e^{rt} \rightarrow \dfrac{dx_1}{dt} = \beta_1 r e^{rt} \\ x_2 = \beta_2 e^{rt} \rightarrow \dfrac{dx_2}{dt} = \beta_2 r e^{rt} \\ \vdots \\ x_n = \beta_n e^{rt} \rightarrow \dfrac{dx_n}{dt} = \beta_n r e^{rt} \end{array}\right\} \qquad \dots (2)$$

Reemplazando (2) en (1) se obtiene:

$$\begin{cases} \beta_1 re^{rt} = a_{11}\beta_1 e^{rt} + a_{12}\beta_2 e^{rt} + \ldots + a_{1n}\beta_n e^{rt} \\ \beta_2 re^{rt} = a_{21}\beta_2 e^{rt} + a_{22}\beta_2 e^{rt} + \ldots + a_{2n}\beta_n e^{rt} \\ . \\ . \\ . \\ \beta_n re^{rt} = a_{n1}\beta_1 e^{rt} + a_{n2}\beta_2 e^{rt} + \ldots + a_{nn}\beta_n e^{rt} \end{cases}$$

simplificando se obtiene:

$$\begin{cases} \beta_1 r = a_{11}\beta_1 + a_{12}\beta_2 + \ldots + a_{2n}\beta_n \\ \beta_2 r = a_{21}\beta_1 + a_{22}\beta_2 + \ldots + a_{2n}\beta_n \\ . \\ . \\ . \\ \beta_n r = a_{n1}\beta_1 + a_{n2}\beta_2 + \ldots + a_{nn}\beta_n \end{cases}$$

$$(\alpha) \begin{cases} (a_{11} - r)\beta_1 + a_{12}\beta_2 + \ldots + a_{1n}\beta_n = 0 \\ a_{21}\beta_1 + (a_{12} - r)\beta_2 + \ldots + a_{2n}\beta_n = 0 \\ . \\ . \\ . \\ a_{n1}\beta_1 + a_{n2}\beta_2 + \ldots + (a_{nn} - r)\beta_n = 0 \end{cases}$$

α es un sistema de ecuaciones homogéneas y tiene solución no nula sí y solo sí:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - r & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & & & \\ . & & & \\ . & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - r \end{vmatrix} = 0$$

Luego P(r) = 0 valores propios del sistema y cada valor de r determinará β_1.

Veremos para el caso de 3 ecuaciones.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + by + cz \\ \dfrac{dy}{dt} = a_1 x + b_1 y + c_1 z \\ \dfrac{dz}{dt} = a_2 x + b_2 y + c_2 z \end{cases}$$

Las soluciones son $x = \lambda e^{rt}$, $y = ue^{rt}$, $z = ne^{rt}$, **donde λ, u, n, r, son constantes.**

$$\begin{cases} x = \lambda e^{rt} \Rightarrow \dfrac{dx}{dt} = \lambda r e^{rt} \\ y = ue^{rt} \Rightarrow \dfrac{dy}{dt} = ue^{rt} \\ z = ne^{rt} \Rightarrow \dfrac{dz}{dt} = ue^{rt} \end{cases} \quad \textbf{... (3)}$$

Reemplazando (3) en (1) se obtiene:

$$\begin{cases} \lambda re^{rt} = a\lambda e^{rt} + bue^{rt} + cne^{rt} \\ ure^{rt} = a_1 \lambda e^{rt} + b_1 ue^{rt} \\ nre^{rt} = a_2 \lambda e^{rt} + b_2 ue^{rt} + c_2 ne^{rt} \end{cases}$$, simplificando se tiene:

$$\begin{cases} \lambda r = a\lambda + bu + cn \\ ur = a_1 \lambda + b_1 u + c_1 n \\ nr = a_2 \lambda + b_2 u + c_2 n \end{cases} \quad \text{igualando a cero} \quad \begin{cases} (a-r)\lambda + bu + cn = 0 \\ a_1 \lambda + (b_1 - r)u + cn = 0 \\ a_2 \lambda + b_2 u + (c_2 - r)n = 0 \end{cases}$$

Luego: $p(r) = \begin{vmatrix} a-r & b & c \\ a_1 & b_1 - r & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 - r \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{p(r)} = 0$

Si r_1, r_2, r_3 son las raíces del polinomio

P(r) = 0 Si $r = r_1$, se resuelve el sistema y se obtiene: λ_1, u_1, n_1

Si $r = r_2$, se resuelve el sistema y se obtiene: λ_2, u_2, n_2

Si $r = r_3$, se resuelve el sistema y se obtiene: λ_3, u_3, n_3

Obteniéndose las soluciones particulares:

$$x_1 = \lambda_1 e^{r_1 t}, \quad y_1 = u_1 e^{r_1 t}, \quad z_1 = n_1 e^{r_1 t}$$

$$x_2 = \lambda_2 e^{r_2 t}, \quad y_2 = u_2 e^{r_2 t}, \quad z_2 = n_2 e^{r_2 t}$$

$$x_3 = x_3 e^{r_2 t}, \quad x_3 = u_3 e^{r_3 t}, \quad z_3 = n_3 e^{r_3 t}$$

La solución general es: $\begin{cases} x = c_1 x_1 + c_2 y_1 + c_3 z_1 \\ y = c_1 x_2 + c_2 y_2 + c_3 z_2 \\ z = c_1 x_3 + c_2 y_3 + c_3 z_3 \end{cases}$

Ejemplos.-

1 Resolver: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y + 3z \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y - z \\ \dfrac{dz}{dt} = y - z \end{cases}$

Solución

$$p(r) = \begin{vmatrix} 2-r & -1 & 3 \\ 1 & 1-r & -1 \\ 0 & 1 & -1-r \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = 1 \\ r_2 = -1 \\ r_3 = 2 \end{cases}$$

2 Resolver: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y + 3z \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y - z \\ \dfrac{dz}{dt} = y - z \end{cases}$

Solución

$$p(r)=\begin{vmatrix} a-r & b & c \\ a_1 & b_1-r & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2-r \end{vmatrix}=0 \quad \text{reemplazando} \quad p(r)=\begin{vmatrix} 2-r & -1 & 3 \\ 1 & 1-r & -1 \\ 0 & 1 & -1-r \end{vmatrix}=0$$

$(2-r)[-1(1-r)(1+r)+1]+(-1-r)+3=0$

$(2-r)[-(1-r^2)+1]+2-r=0 \Rightarrow (2-r)r^2+(2-r)=0 \Rightarrow (r^2+1)(2-r)=0 \Rightarrow r=2$

$\begin{cases} (a-r)\lambda+bu+cn=0 \\ a_1\lambda+(b_1-r)u+c_1n=0 \\ a_2\lambda+b_2u+c_2n=0 \end{cases}$, reemplazando los datos se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} 0\lambda-u+3n=0 \\ \lambda-u-n=0 \\ 0\lambda+u-3n=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} u=3n \\ \lambda=4n,\ n=1 \\ u=3,\ \lambda=4 \end{array}$$

Ejercicios Propuestos.-

Resolver los siguientes ejercicios:

① $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=y+z \\ \dfrac{dy}{dt}=z+x \\ \dfrac{dz}{dt}=x+y \end{cases}$

② $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=y+z \\ \dfrac{dy}{dt}=3x+z \\ \dfrac{dz}{dt}=3x+y \end{cases}$

③ $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=8y \\ \dfrac{dy}{dt}=-2z \\ \dfrac{dz}{dt}=2x+8y-2z \end{cases}$

④ $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=6x-y \\ \dfrac{dy}{dt}=3x+2y \end{cases}$

⑤ $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=3x-4y \\ \dfrac{dy}{dt}=2x-3y \end{cases}$

⑥ $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=2x-y \\ \dfrac{dy}{dt}=9x+2y \end{cases}$

⑦ $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y + t \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 2y + 2t \end{cases}$, $\quad x(0) = -\dfrac{7}{9}$, $\quad y(0) = -\dfrac{5}{9}$

⑧ $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dx}{dt} - \dfrac{dy}{dt} = x + y \end{cases}$, $\quad x(\pi) = -1$, $\quad y(\pi) = 0$

⑨ $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} = e^{-t} - y \\ \dfrac{2dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} = \operatorname{sen} t - 2y \end{cases}$, $\quad x(0) = -2$, $\quad y(0) = 1$

⑩ $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 4y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y \end{cases}$

⑪ $\begin{cases} 2\dfrac{dx}{dt} = 6x - y - 6t^2 - t + 3 \\ \dfrac{dy}{dt} = 2y - 2t - 1 \end{cases}$, $\quad x(0) = 2$, $\quad y(0) = 3$

⑫ $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 3y \\ \dfrac{dy}{dt} = y \end{cases}$

⑬ $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 3y \end{cases}$

⑭ $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 7x + 4y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 3y \end{cases}$

⑮ $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x \\ \dfrac{dy}{dt} = -3x + y \end{cases}$

⑯ $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 3y + e^{t} \\ \dfrac{dy}{dt} = 2y + e^{-t} \end{cases}$

⑰ $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - y + t + 1 \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + y + t - 1 \end{cases}$

⑱ $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 4y + 3te^{t} \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y + e^{t} \end{cases}$

⑲ $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x - 4y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + y \end{cases}$

⑳ $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - 3y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 2y \end{cases}$

21) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 3y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + y \end{cases}$

22) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x + 2y \end{cases}$

23) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} - 2x + 2\dfrac{dy}{dt} = 2 - 4e^{2t} \\ 2\dfrac{dx}{dt} - 3x + 3\dfrac{dy}{dt} - y = 0 \end{cases}$

24) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + 4y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + y \end{cases}$

25) $\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + x - 2\dfrac{dy}{dt} = 2t \\ 2\dfrac{dx}{dt} - x + \dfrac{dy}{dt} - 2y = 7 \end{cases}$

26) $\begin{cases} Dx - (D+1)y = e^{-t} \\ x + (D-1)y = e^{2t} \end{cases}$

27) $\begin{cases} (D+2)x + (D+1)y = t \\ 5x + (D+3)y = t^2 \end{cases}$

28) $\begin{cases} (D+1)x + (2D+7)y = e^t + 2 \\ -2x + (D+3)y = e^t - 1 \end{cases}$

29) $\begin{cases} (D-1)x + (D+3)y = e^{-t} - 1 \\ (D+2)x + (D+1)y = e^{2t} + t \end{cases}$

CAPÍTULO IX

9. RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES MEDIANTE SERIES DE POTENCIAS

Procedimientos.- El método para obtener la solución de una ecuación diferencial en serie de potencias es similar a la técnica de los coeficientes indeterminados para ello se necesita conocer la derivada de una serie de potencias y de las propiedades de series de potencias.

① $$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} x^{n+2} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+2} x^{k+2}$$

② $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n$$

③ $$\sum_{n=k}^{\infty} a_{n+m} x^{n+p} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+m+k} x^{n+p+k}$$

El proceso para obtener la solución en serie de potencia de una ecuación diferencial veremos mediante el siguiente ejemplo.

Hallar la solución en serie de potencias de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} - 2xy = 0$.

Solución

Suponiendo que la solución de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} - 2xy = 0$ ... **(1)**

en serie de potencia es: $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ ... **(2)**

ahora determinaremos los coeficientes c_n, para que (2) converja a una función que satisfaga (1) para esto derivamos (2) término a término, es decir:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \text{entonces} \quad \frac{dy}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$$

ahora reemplazamos en la ecuación diferencial (1):

$$\frac{dy}{dx} - 2xy = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} - 2x \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

enseguida debemos de igualar las potencias y se obtiene aplicando las propiedades de las series de potencias

$$\frac{dy}{dx} - 2xy = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_{n+1} x^n - 2\sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^n = 0\,,$$ ahora igualamos los inicios es decir:

$$\frac{dy}{dx} - 2xy = c_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) c_{n+1} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2c_{n-1} x^n = 0$$

Luego efectuamos la suma de las series $c_1 + \sum_{n=1}^{\infty} ((n+1)c_{n+1} - 2c_{n-1}) x^n = 0$

aplicando el método de los coeficientes indeterminados e igualamos término a término se tiene: $c_1 = 0$

$(n+1)c_{n+1} - 2c_{n-1} = 0$ para $n = 1, 2, 3, \ldots\ldots$

$c_{n+1} = \dfrac{2c_{n-1}}{n+1}$ se llama fórmula de recurrencia

para $n = 1$, $c_2 = \dfrac{2c_0}{2} = c_0$

$n = 2$, $c_3 = \dfrac{2c_1}{3} = 0$

$$n = 3 \quad , \quad c_4 = \frac{2c_2}{4} = \frac{c_2}{2} = \frac{c_0}{2} = \frac{c_0}{2!}$$

$$n = 4 \quad , \quad c_5 = \frac{2c_3}{6} = 0$$

$$n = 5 \quad , \quad c_6 = \frac{2c_4}{6} = \frac{c_0}{2.3} = \frac{c_0}{3!}$$

$$n = 6 \quad , \quad c_7 = \frac{2c_5}{7} = 0$$

$$n = 7 \quad , \quad c_8 = \frac{2c_6}{8} = \frac{c_0}{3!4} = \frac{c_0}{4!}$$

como $\quad y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \ldots$

$$y = c_0 + c_0 x^2 + \frac{c_0}{2!} x^4 + \frac{c_0}{3!} x^6 + \frac{c_0}{4!} x^8 + \ldots$$

$$y = c_0 (1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \ldots) = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$$

Que es la solución de la ecuación diferencial.

9.1. SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN ENTORNO A PUNTOS ORDINARIOS.-

Consideremos la ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$\boxed{a_2(x)\frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0} \qquad \ldots (1)$$

la ecuación (1) se escribe en la forma.

$$\boxed{\frac{d^2 y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0} \qquad \ldots (2)$$

donde $P(x)=\dfrac{a_1(x)}{a_2(x)}$ y $Q(x)=\dfrac{a_0(x)}{a_2(x)}$

para obtener la solución de la ecuación diferencial (1) entorno a puntos ordinarios daremos las siguientes definición.

Función Analítica.- Una función f(x) se dice que es analítica en $x=x_0$, si se puede representar en serie de potencia en $(x-x_0)$ con radio de convergencia R > 0.

Observación General.- Las funciones elementales (todas las funciones que conocemos) se puede escribir como una serie de Taylor y por lo tanto serán analíticas.

Definición.- Se dice que $x=x_0$ es una punto ordinario de la ecuación (1) si P(x) y Q(x) tienen una serie de potencia en $(x-x_0)$ con un radio de convergencia R > 0.

Si un punto no es punto ordinario, se dice que es un punto singular de la ecuación.

Ejemplo.- En la ecuación diferencial $\dfrac{d^2y}{dx^2}+e^x\dfrac{dy}{dx}+(\operatorname{sen}x)y=0$, todo valor finito de x es un punto ordinario. En particular vemos que x = 0 es un punto ordinario puesto que $e^x=1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+...+...$ y $\operatorname{sen}x=x+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+...$convergencia para todo valor finito de x.

Ejemplo.- La ecuación diferencial $x\dfrac{d^2y}{dx^2}+(\operatorname{sen}x)y=0$ tiene un punto ordinario en x = 0 puesto que se puede demostrar que $Q(x)=\dfrac{\operatorname{sen}x}{x}$ tiene el desarrollo en serie de potencias $Q(x)=1-\dfrac{x^2}{3!}+\dfrac{x^4}{5!}-\dfrac{x^6}{7!}+...$ que converge para todos los valores finitos de x.

Ejemplo.- La ecuación diferencial $\dfrac{d^2y}{dx^2}+(\ln x)y=0$, tiene un punto singular en x = 0, puesto que Q(x) = Ln x no tiene un desarrollo en serie de potencia de x.

Observación.- Estudiaremos primeramente el caso en que la ecuación $a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=0$, sus coeficientes son polineales y no tiene factores comunes, un punto $x=x_0$ es.

i) Un punto ordinario sí $a_2(x_0)\neq 0$ **ii)** Un punto singular sí $a_2(x_0)=0$

Ejemplo.-

a) Los puntos singulares de la ecuación diferencial $(x^2-4)y''+2xy'+6y=0$ son las soluciones de $x^2-4=0$ es decir x = ± 2, todos los otros valores finitos de x son puntos ordinarios.

b) Los puntos singulares no necesariamente son números reales. La ecuación $(x^2+4)y''+xy'-y=0$, tiene puntos singulares para las soluciones de $x^2+4=0$ es decir x = ± 2i, todos los otros valores finitos de x, reales ó complejos, son puntos ordinarios.

Notas.- Ahora encontraremos soluciones en serie de potencia entorno a puntos ordinarios para ecuaciones diferenciales de tipo (1) y para esto enunciaremos el siguiente teorema sin demostrarlo.

Teorema.- Si $x=x_0$ es un punto ordinario de la ecuación diferencial $\boxed{a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=0}$, siempre podemos encontrar dos soluciones distintos en serie de potencias, que son de la forma $y=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n$.

Una solución en serie converge por lo menos para $|x-x_0|<R_1$, donde R_1 es la distancia al punto singular más cercano, para resolver una ecuación diferencial de segundo orden $a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=0$, buscamos dos conjuntos diferentes de coeficientes c_n de modo que se tenga dos series de potencias linealmente independientes $y_1(x)$ y $y_2(x)$, ambas desarrolladas entorno al mismo punto ordinario $x=x_0$.

Luego la solución general de la ecuación diferencial es $\boxed{y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)}$

Ejemplo.- Resolver la ecuación diferencial de segundo orden. $\frac{d^2y}{dx^2} - 2xy = 0$

Solución

Nota.- Para simplificar, supondremos que un punto ordinario está siempre localizado en x = 0, ya que si no la está, la sustitución $t = x - x_0$ traslada el valor $x = x_0$ a t = 0.

Si x = 0 es un punto ordinario de la ecuación diferencial entonces $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ es la solución en serie de potencias de la ecuación dada de donde.

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}$$

por lo tanto al reemplazar se tiene: $\frac{d^2y}{dx^2} - 2xy = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} 2c_n x^{n+1} = 0$

ahora debemos de igualar las potencias y para esto se aplica las propiedades de las series de potencias: $\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2c_{n-1}x^n = 0$

Luego igualando los inicios es decir: $1.2.c_2 + \sum_{n=1}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2c_{n-1}x^n = 0$

ahora efectuaremos la suma algebraica de las series

$$1.2.c_2 + \sum_{n=1}^{\infty}((n+2)(n+1)c_{n+2} - 2c_{n-1})x^n = 0$$

aplicando el método de los coeficientes indeterminados e igualando término a término se tiene: $.2\ c_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = 0$

$$(n+2)(n+1)c_{n+2} - 2c_{n-1} = 0 \quad \text{para } n = 1, 2, 3, 4, \ldots$$

La ultima expresión es equivalente a. $c_{n+2}=\dfrac{2c_{n-1}}{(n+2)(n+1)}$, n = 1, 2, 3, ...

ahora iterando se tiene: n = 1, $c_3=\dfrac{2c_0}{2.3}=\dfrac{2c_0}{2.3}$

n = 2, $c_4=\dfrac{2c_1}{3.4}$

n = 3, $c_5=\dfrac{2c_2}{4.5}=0$

n = 4, $c_6=\dfrac{2c_3}{5.6}=\dfrac{2^2c_0}{2.3.5.6}$

n = 5, $c_7=\dfrac{2c_4}{6.7}=\dfrac{2^2c_1}{3.4.6.7}$

n = 6, $c_8=\dfrac{2c_5}{7.8}=0$, etc.

como $y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+c_4x^4+\dots$

$$y=c_0+c_1x+\frac{2c_0}{2.3}x^3+\frac{2c_1}{3.4}x^4+\frac{2^2c_1}{3.4.6.7}x^7+\dots$$

$$y=c_0+\frac{2c_0}{2.3}x^3+\frac{2^2c_0}{2.3.5.6}x^6+\frac{2^3c_0}{2.3.5.6.8.9}x^9+\dots+c_1x+\frac{2c_1}{3.4}x^4+\frac{2^2c_1}{3.4.6.7}x^7+\frac{2^3c_1}{3.4.6.7.9.10}x^{10}+\dots$$

$$y=c_0(1+\frac{2}{2.3}x^3+\frac{2^2}{2.3.5.6}x^6+\frac{2^3}{2.3.5.6.8.9}x^9+\dots)+c_1(x+\frac{2x^4}{3.4}+\frac{2^2}{3.4.6.7}x^7+\frac{2^3}{3.4.6.7.9.10}x^{10}+\dots)$$

Ejemplo.- Resolver la ecuación de segundo orden $\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+y=0$

Solución

de acuerdo a la nota el punto ordinario se torna x = 0 entonces la solución en serie de potencia es $y=\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\sum_{n=1}^{\infty}nc_n x^{n-1} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_n x^{n-2}$ ahora reemplazamos en la ecuación diferencial

$\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+y=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_n x^{n-2}+x\sum_{n=1}^{\infty}nc_n x^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n=0$, ahora ponemos las x en una misma potencia $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)c_{n+2}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}nc_n x^n+\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n=0$

$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+1)(n+2)c_{n+2}+c_n]x^n+\sum_{n=1}^{\infty}nc_n x^n=0$, igualando los inicios de las series se tiene.

$$2c_2+c_0+\sum_{n=1}^{\infty}[(n+1)(n+2)c_{n+2}+c_n]x^n+\sum_{n=1}^{\infty}nc_n x^n=0$$

efectuando la suma algebraica de la serie:

$$2c_2+c_0+\sum_{n=1}^{\infty}[(n+1)(n+2)c_{n+2}+(n+1)c_n]x^n=0$$

aplicando el método de los coeficientes indeterminados e igualando términos a término se tiene.

$$\begin{cases}2c_2+c_0=0\\(n+1)(n+2)c_{n+2}+(n+1)c_n=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c_2=-\frac{c_0}{2}\\c_{n+2}=-\frac{c_n}{n+2}\end{cases}$$

para: n = 1, $c_3=-\frac{c_1}{3}$

$$n = 2, \quad c_4 = -\frac{c_2}{4} = \frac{c_0}{2.4}$$

$$n = 3, \quad c_5 = -\frac{c_3}{5} = \frac{c_1}{3.5}$$

$$n = 4, \quad c_6 = -\frac{c_4}{6} = -\frac{c_0}{2.4.6}$$

$$n = 5, \quad c_7 = -\frac{c_5}{7} = -\frac{c_1}{3.5.7}$$

Generalizando se tiene: $c_{2n} = \frac{(-1)^n c_0}{2.4.6....(2n)}$ y $c_{2n+1} = \frac{(1)^n c_1}{1.3.5.....(2n+1)}$

como $y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + ... + c_{2n} x^{2n} + c_{2n+1} x^{2n+1} + ...$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{c_0 x^{2n}}{2.4.6...(2n)} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n c_1 x^{2n+1}}{1.3.5...(2n+1)}$$

Ejemplo.- Resolver la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = 1 + y^2$, mediante series de potencia de x, sabiendo que y (0) = 0

Solución

Tomamos a $x_0 = 0$ como punto ordinario, por lo tanto la solución es $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, ahora determinaremos los coeficientes c_n, obteniéndose mediante la derivada $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ entonces $\frac{dy}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$, reemplazando en la ecuación dada se tiene:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} = 1 + (\sum_{n=0}^{\infty} c_n xn)^2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n . \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 1$$

$\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k}) x^n = 1$; ahora ponemos las x en una misma potencia.

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}x^n - \sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{k=0}^{n}c_k.c_{n-k})x^n = 1$$; efectuando la suma algebraica de la serie.

$$\sum_{n=0}^{\infty}((n+1)c_{n+1} - \sum_{k=0}^{\infty}c_k.c_{n-k})x^n = 1$$

como se tiene un término independiente en el segundo miembro entonces desarrollamos para n = 0 en la serie: $c_1 - \sum_{k=0}^{0}c_k.c_{-k} + \sum_{n=1}^{\infty}[(n+1)c_{n+1} - \sum_{k=0}^{n}c_k.c_{n-k}]x^n = 1$

aplicamos el método de los coeficientes indeterminados e igualando términos a término

se tiene: $c_1 - c_0^2 = 1$ y $(n+1)c_{n+1} - \sum_{k=0}^{n}c_k.c_{n-k} = 0$

Luego: $\begin{cases} c_1 = 1 + c_0^2 \\ c_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}c_k.c_{n-k} \quad \forall n \geq 1 \end{cases}$, aplicando la condición inicial y(0)= 0 se tiene.

$$y = \sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots$$

$y(0) = c_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_0 = 0$ de donde $c_1 = 1$

para: n = 1, $c_2 = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{1}c_k.c_{1-k} = \frac{1}{2}[c_0.c_1 + c_1.c_0] = 0$

n = 2, $c_3 = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{2}c_k.c_{2-k} = \frac{1}{3}[c_0.c_1 + c_1.c_1 + c_2.c_0] = \frac{1}{3}$

n = 3, $c_4 = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3}c_k.c_{3-k} = \frac{1}{4}[c_0.c_2 + c_1.c_2 + c_2.c_1 + c_3.c_0] = 0$

n = 4, $c_5 = \frac{1}{5}\sum_{k=0}^{4}c_k.c_{4-k} = \frac{1}{5}[c_0.c_4 + c_1.c_3 + c_2.c_2 + c_3.c_1 + c_4.c_0] = \frac{2}{15}$

$$n = 5, \quad c_6 = \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{5} c_k.c_{5-k} = 0$$

$$n = 6, \quad c_7 = \frac{1}{7}\sum_{k=0}^{6} c_k.c_{6-k} = \frac{17}{315}$$

Luego la solución queda en la forma: $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots$

$y = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \ldots$ $\therefore$ y = tg x.

Ejemplo.- Hallar la solución general de la ecuación diferencial $\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} - 3y = 0$

Solución

Tomemos a $x_0 = 0$ como punto ordinario, por lo tanto la solución en serie de potencias alrededor de $x_0 = 0$ es: $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

de donde $\frac{dy}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}$

ahora reemplazamos en la ecuación diferencial dada

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - 2x\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} - 3\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} 2nc_n x^n - 3\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$, poniendo las x en una misma potencia

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2nc_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 3c_n x^n = 0$$

ahora poniendo los inicios iguales se tiene:

$$2c_2 - 3c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2nc_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 3c_n x^n = 0$$

efectuando la suma algebraica de la serie.

$$2c_2 - 3c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[(n+2)(n+1)c_{n+2} - (2n+3)c_n]x^n = 0$$

efectuando el método de los coeficientes indeterminados e igualando término a término.

$$2c_2 - 3c_0 = 0 \;\; y \;\; (n+2)(n+1)c_{n+2} - (2n+3)c_n = 0$$

$$c_2 = \frac{3c_0}{2} \quad y \quad c_{n+2} = \frac{(2n+3)c_n}{(n+2)(n+1)}, \quad \forall\, n \geq 1$$

para $\quad n = 1, \quad c_3 = \dfrac{5c_1}{2.3}$

$$n = 2, \quad c_4 = \frac{7c_2}{3.4} = \frac{3.7}{2.3.4.5}c_0$$

$$n = 3, \quad c_5 = \frac{9c_3}{4.5} = \frac{5.9}{2.3.4.5}c_1$$

$$n = 4, \quad c_6 = \frac{11}{5.6}c_4 = \frac{3.7.11}{2.3.4.5.6}c_0$$

reemplazando en la solución se tiene. $\quad y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 \ldots$

$$y = c_0 + c_1 x + \frac{3}{2}c_0 x^2 + \frac{5c_1}{2.3}x^3 + \frac{3.7}{2.3.4.5}x^4 + \frac{5.9.c_1}{2.3.4.5}x^5 + \frac{3.7.11c_0}{2.3.4.5.6}x^6 + \ldots$$

$$y = c_0(1 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3.7}{2.3.4.5}x^4 + \frac{3.7.11}{2.3.4.5.6}x^6 + \ldots) + c_1(x + \frac{5}{2.3}x^3 + \frac{5.9}{2.3.4.5}x^5 + \ldots)$$

$$y = c_0[1 + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1.3.7\ldots(4n-1)}{(2n)!}x^{2n}] + c_1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1.5.9\ldots.(4n+1)}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

Ejemplo.- Resolver la ecuación diferencial $(x^2+1)\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}-y=0$, mediante series de potencias de x.

Solución

Tomando como punto ordinario a $x_0=0$ entonces la solución es:

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^{n-1} \text{ entonces } \frac{d^2y}{dx^2}=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n-2}$$

ahora reemplazamos a la ecuación diferencial dada.

$$(x^2+1)\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n-2}+x\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^{n-1}-\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^n+x\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n-2}+\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^n-\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=0$$

poniendo las x en una misma potencia.

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)c_{n+2}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^n-\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=0$$

ahora poniendo los inicios iguales se tiene:

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}[(n+1)(n+2)c_{n+2}-c_n]x^n+\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^n=0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^n+2c_2-c_0+\sum_{n=1}^{\infty}[(n+1)(n+2)c_{n+2}-c_n+nc_n]x^n=0$$

$$2c_2-c_0+6.c_3x+\sum_{n=2}^{\infty}[n(n-1)c_n+(n+1)(n+2)c_{n+2}-c_n+nc_n]x^n=0$$

$$2c_2-c_0+6.c_3x+\sum_{n=2}^{\infty}[(n-1)(n+2)c_{n+2}+(n+1)(n-1)c_n]x^n=0$$

aplicando el método de los coeficientes indeterminados e igualando término a término se tiene:

$$\begin{cases} 2c_2 - c_0 = 0 \\ 6c_3 = 0 \\ (n+1)(n+2)c_{n+2} + (n+1)(n-1)c_n = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} c_2 = \dfrac{c_0}{2} \\ c_3 = 0 \\ c_{n+2} = -\dfrac{n-1}{n+2}c_n, \ \forall n \ge 2 \end{array}$$

para n = 2, $c_4 = -\frac{1}{4}c_2 = -\frac{c_0}{2.4} = -\frac{c_0}{2^2.2!}$

n = 3, $c_5 = -\frac{2}{5}c_3 = 0$

n = 4, $c_6 = -\frac{3c_4}{6} = \frac{1.3c_0}{2^3.3!}$

n = 5, $c_7 = -\frac{4c_5}{7} = 0$

n = 6, $c_8 = -\frac{5c_6}{8} = -\frac{1.3.5.c_0}{2^4.4!}$

n = 7, $c_9 = -\frac{6c_7}{9} = 0$

n = 8, $c_{10} = -\frac{7c_8}{10} = \frac{1.3.5.7.c_0}{2^5.5!}$, etc.

como $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \ldots + c_n x^n + \ldots$

$$y = c_1 x + c_0 (1 + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2^2 2!}x^4 + \frac{1.3}{2^3 3!}x^6 - \frac{1.3.5}{2^4 4!}x^8 + \frac{1.3.5.7}{2^5 5!}x^{10} + \ldots)$$

$$y_1(x) = c_0 (1 + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2^2 2!}x^4 + \frac{1.3}{2^3 3!}x^6 - \frac{1.3.5}{2^4 4!}x^8 + \frac{1.3.5.7}{2^5 5!}x^{10} + \ldots)$$

$$y_1(x)=c_0\left(1+\frac{x^2}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1.3.5...(2n-3)}{2^n n!}x^{2n}\right),\ |x|<1$$

$y_2(x)=c_1x$ $\qquad\therefore\qquad$ $y=k_1y_1(x)+k_2y_2(x)$ la solución general.

Ejemplo.- Determinar el valor de r para que la ecuación diferencial $\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+ry=0$, tenga soluciones en series de potencias de x de la forma $y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$

Solución

tomando a $x_0=0$ como punto ordinario entonces la solución es $\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^{n-1}$, entonces $\frac{d^2y}{dx^2}=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n-2}$, ahora reemplazando en la ecuación diferencial dada.

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n-2}-2x\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^{n-1}+r\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=0$$

$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n-2}-\sum_{n=1}^{\infty}2nc_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}rc_nx^n=0$, poniendo las x en una misma potencia

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)c_{n+2}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}2nc_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}rc_nx^n=0$$

$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+1)(n+2)c_{n+2}+rc_n]x^n-\sum_{n=1}^{\infty}2c_nx^n=0$ ahora poniendo los inicios iguales se tiene.

$$2c_2+rc_0+\sum_{n=1}^{\infty}[(n+1)(n+2)c_{n+2}+rc_n]x^n-\sum_{n=1}^{\infty}2nc_nx^n=0$$

efectuando la suma algebraica de las series.

$$2c_2+rc_0+\sum_{n=1}^{\infty}[(n+1)(n+2)c_{n+2}+(r-2n)c_n]x^n=0$$

aplicando el método de los coeficientes indeterminados e igualando término a término se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} 2c_2 + rc_0 = 0 \\ (n+1)(n+2)c_{n+2} + (r-2n)c_n = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = -\dfrac{r}{2}c_0 \\ c_{n+2} = -\dfrac{r-2n}{(n+1)(n+2)}c_n \quad \forall n \geq 1 \end{cases}$$

para n = 1, $c_3 = -\dfrac{r-2}{2.3}c_1$

n = 2, $c_4 = -\dfrac{r-4}{3.4}c_2 = \dfrac{r(r-4)}{2.3.4}c_0$

n = 3, $c_5 = -\dfrac{r-6}{4.5}c_3 = \dfrac{(r-2)(r-6)}{2.3.4.5}c_1$

n = 4, $c_6 = -\dfrac{r-8}{5.6}c_4 = -\dfrac{r(r-4)(r-8)}{2.3.4.5.6}c_0$

n = 5, $c_7 = -\dfrac{r-19}{6.7}c_5 = -\dfrac{(r-2)(r-6)(r-10)}{2.3.4.5.6.7}c_1$, etc.

como $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots + c_n x^n + \ldots$

$$y = c_0 + c_1 x - \frac{r}{2!}x^2 c_0 - \frac{r-2}{3!}c_1 x^3 + \frac{r(r-4)}{4!}c_0 x^4 + \frac{(r-2)(r-6)}{5!}c_1 x^5 -$$

$$\frac{r(r-4)(r-8)}{6!}c_0 x^6 - \frac{r(r-2)(r-6)(r-10)}{7!}c_1 x^7 + \ldots$$

$$y = c_0\left(1 - \frac{r}{2!}x^2 + \frac{r(r-4)}{4!}x^4 - \frac{r(r-4)(r-8)}{6!}x^6 + \ldots\right) +$$

$$+ c_1\left(x - \frac{r-2}{3!}x^3 + \frac{(r-2)(r-6)}{5!}x^5 - \frac{r(r-2)(r-6)(r-10)}{7!}x^7 + \ldots\right)$$

$$y = c_0 \left(1 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{r(r-2)(r-6)(r-10)...(r-(4n+2))}{(2n+1)!} x^{2n+1}\right)$$

$$+ c_1 \left(x + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{r(r-2)(r-6)(r-10)...(r-(4n+2))}{(2n+1)!} x^{2n+1}\right)$$

Los valores de r son para todo $r \neq 0, 2n$, donde $n \in z^+$

Ejemplo.- Resolver la ecuación diferencial $\frac{d^2y}{dx^2} - (x+1)y = 0$ mediante series de potencia de x.

Solución

Sea $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ la solución en serie de potencia de x derivando se tiene

$\frac{dy}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}$ ahora reemplazando en la ecuación diferencial dada.

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - (x+1)\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$; poniendo las x en una misma potencia.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)c_{n+2} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} ((n+1)(n+2)c_{n+2} - c_n) x^n - \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^n = 0$$

$$2c_2 - c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+1)(n+2)c_{n+2} - c_n - c_{n-1}] x^n = 0$$

aplicando el método de los coeficientes indeterminado e igualando término a término se tiene:

$$\begin{cases} 2c_2 - c_0 = 0 \\ (n+1)(n+2)c_{n+2} - c_n - c_{n-1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = \dfrac{c_0}{2} \\ c_{n+2} = \dfrac{c_n + c_{n-1}}{(n+1)(n+2)}, \quad \forall n \geq 1 \end{cases}$$

para simplificar en estos casos, primero podemos elegir $c_0 \neq 0$, $c_1 = 0$, y esto nos dará una solución; la otra solución proviene de elegir $c_0 = 0$, $c_1 \neq 0$.

Para el primer caso se tiene:

para n = 1, $c_3 = \dfrac{c_1 + c_0}{2.3} = \dfrac{c_0}{2.3}$

n = 2, $c_4 = \dfrac{c_2 + c_1}{3.4} = \dfrac{c_2}{3.4} . \dfrac{c_0}{2.3.4} = \dfrac{c_0}{24}$

n = 3, $c_5 = \dfrac{c_3 + c_2}{4.5} = (\dfrac{c_0}{2.3} + \dfrac{c_0}{2})\dfrac{1}{4.5} = \dfrac{c_0}{30}$, etc.

luego una solución en series es: $y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \ldots + c_nx^n + \ldots$

$$y_1 = c_0 + \frac{c_0}{2}x^2 - \frac{c_0}{6}x^3 + \frac{c_0}{24}x^4 + \frac{c_0}{30}x^5 + \ldots = c_0(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{c^5}{30} + \ldots)$$

la otra solución es para $c_0 = 0$, $c_1 \neq 0$.

n = 1, $c_3 = \dfrac{c_0}{2.3} = \dfrac{c_0}{6}$

n = 2, $c_4 = \dfrac{c_2 + c_1}{3.4} = \dfrac{c_1}{3.4} = \dfrac{c_1}{12}$

n = 3, $c_5 = \dfrac{c_3 + c_2}{4.5} = \dfrac{c_1}{2.3.4.5} = \dfrac{c_1}{120}$, etc.

Luego la solución en serie es: $y = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_nx^n = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \ldots + c_nx^n + \ldots$

$$y_2(x)=c_1x+\frac{c_1}{6}x^3+\frac{c_1}{12}x^4+\frac{c_1}{120}x^5+...=c_1(x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{12}+\frac{x^5}{120}+...)$$

La solución general de la ecuación diferencial es.

$$y=c_0(1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{30}+...)+c_1(x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}+...)$$

Ejemplo.- Resolver la ecuación diferencial $(x^2+x)\frac{d^2y}{dx^2}+(x-2)y=0$, mediante series de potencias de x - 1.

Solución

Los puntos ordinarios son $\forall$ $x \neq 0$, $x \neq -1$, en particular es punto ordinario $x_0=1$, entonces la ecuación diferencial admite una solución en serie de potencia $y=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-1)^n$ de donde sus derivadas son $\frac{dy}{dx}=\sum_{n=1}^{\infty}nc_n(x-1)^{n-1}$ y $\frac{d^2y}{dx^2}=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_n(x-1)^{n-2}$, para que el procedimiento sea más sencillo haremos el siguiente cambio de variable.

u = x - 1 $\Rightarrow$ x = u + 1 de donde $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{dy}{du}$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy'}{dx}=\frac{dy'}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{dy'}{du}=\frac{d}{du}(\frac{dy}{du})=\frac{d^2y}{du^2}$$

como: $$\begin{cases}\frac{dy}{dx}=\sum_{n=1}^{\infty}nc_n(x-1)^{n-1}\\ \frac{d^2y}{dx^2}=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_n(x-1)^{n-2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{dy}{du}=\sum_{n=1}^{\infty}nc_nu^{n-1}\\ \frac{d^2y}{du^2}=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nu^{n-2}\end{cases}$$

al reemplazar en la ecuación diferencial $x(x+1)\frac{d^2y}{dx^2}+(x-2)y=0$

$(u+1)(u+2)\dfrac{d^2y}{du^2}+(u-1)y=0$, de donde

$$(u+1)(u+2)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n u^{n-2}+(u-1)\sum_{n=0}^{\infty} nc_n u^n=0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n u^n+3\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n u^{n-1}+2\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n u^{n-2}+(u-1)\sum_{n=0}^{\infty} nc_n u^n=0$$

poniendo en una misma potencia a u.

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n u^n+\sum_{n=1}^{\infty} 3n(n+1)c_{n+1}u^n+\sum_{n=0}^{\infty} 2(n+1)(n+2)c_{n+2}u^n+\sum_{n=0}^{\infty} c_n u^{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty} c_n u^n=0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n u^n+\sum_{n=1}^{\infty} 3n(n+1)c_{n+1}u^n+\sum_{n=0}^{\infty} (2(n+1)(n+2)c_{n+2}-c_n)u^n+\sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1}u^n=0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n u^n+\sum_{n=1}^{\infty} (3n(n+1)c_{n+1}-c_{n-1})u^n+\sum_{n=0}^{\infty} (2(n+1)(n+2)c_{n+2}-c_n)u^n=0$$

ahora poniendo los inicios iguales se tiene.

$$4c_2-c_0+(12c_3+6c_2-c_1+c_0)u+\sum_{n=2}^{\infty} (n(n-1)-1)c_n+c_{n-1}+$$

$$3n(n+1)c_{n+1}+2(n+1)(n+1)c_{n+2})u^n=0$$

aplicando el método de los coeficientes indeterminados e igualando término a término se tiene:

$$\begin{cases} 4c_2-c_0 \\ 12c_3+6c_2-c_1+c_0=0 \\ 3n(n+1)c_{n+1}+2(n+1)(n+2)c_{n+2}+(n(n-1)-1)c_n+c_{n-1}=0 \end{cases}$$

de donde $\quad c_2=\dfrac{c_0}{4} \quad$ y $\quad c_3=\dfrac{1}{12}(c_1-\dfrac{5}{2}c_0)$

$$c_{n+2}=\frac{1}{2(n+1)(n+2)}(-c_{n-1}-(n^2-n-1)c_n-3n(n+1)c_{n+1})\ ,\ \forall\ n\geq 2$$

para n = 2, $c_4=\frac{1}{2.3.4}(\frac{7}{2}c_0-\frac{5}{2}c_1)$

n = 3, $c_5=\frac{1}{2.4.5}(-\frac{107}{24}c_0-\frac{10}{3}c_1)$

n = 4, $c_6=\frac{1}{2.5.6}(-\frac{263}{24}c_0-\frac{421}{48}c_1)$

como la solución en serie será. $y(u)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nu^n=c_0+c_1u+c_2u^2+c_3u^3+c_4u^4+...$

ahora reemplazando los valores de c_n.

$$y(u)=c_0+c_1u+\frac{c_0}{4}u^2+\frac{1}{12}(c_1-\frac{5}{2}c_0)u^3+\frac{1}{24}(\frac{7}{2}c_0-\frac{5}{2}c_1)u^4+$$

$$+\frac{1}{40}(-\frac{107}{24}c_0+\frac{10}{3}c_1)u^5+\frac{1}{60}(-\frac{263}{24}c_0-\frac{421}{48}c_1)u^6+...$$

$$y(u)=c_0(1+\frac{u^2}{4}-\frac{5}{24}u^3+\frac{7}{48}u^4-\frac{107}{960}u^5+...)+c_1(u+\frac{u^3}{12}-\frac{5}{48}u^4+\frac{u^5}{12}+...)$$

como u = x - 1 entonces al sustituir se tiene:

$$y(x)=c_0[1+\frac{(x-1)^2}{4}-\frac{5}{24}(x-1)^3+\frac{7}{48}(x-1)^4-\frac{107}{960}(x-1)^5+...]$$

$$+c_1[(x-1)+\frac{(x-1)^3}{12}-\frac{5}{48}(x-1)^4+\frac{(x-1)^5}{12}+...]$$

Ejemplo.- Hallar la solución de la ecuación diferencial $(1-x)\frac{dy}{dx}+y=1+x$, que satisface la condición inicial y (0) = 0.

Solución

aplicando la serie de Taylor $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ solución en serie ahora derivamos

$\frac{dy}{dx}=\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}$, reemplazando en la ecuación diferencial dada se tiene.

$$(1-x)\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n=1+x \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^n+\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n=1+x$$

poniendo las x en una misma potencia. $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}x^n-\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^n+\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n=1+x$

$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+1)c_{n+1}+c_n]x^n-\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^n=1+x$; ahora poniendo los inicios iguales.

$$c_1+c_0+(2c_2+c_1-c_1)x+\sum_{n=2}^{\infty}[(n+1)c_{n+1}+c_n-nc_n]x^n=1+x$$

$$\begin{cases} c_1+c_0=1 \\ 2c_2=1 \\ (n+1)c_{n+1}+c_n-nc_n=0, \quad \forall\, n\ge 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} c_1=1-c_0 \\ c_2=\frac{1}{2} \\ c_{n+1}=\frac{n-1}{n+1}c_n \end{array}$$

para n = 2, $c_3=\frac{c_2}{3}=\frac{1}{2.3}$

n = 3, $c_4=\frac{2}{4}c_3=\frac{1}{3.4}$

n = 4, $c_5=\frac{3}{5}c_4=\frac{1}{4.5}$

aplicando la condición inicial y(0) = 0 se tiene: $c_0=0$, $c_1=1$, de donde, por lo tanto, si la solución en serie de potencia es

$y(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots + c_n u^n + \ldots$ es decir

$$\therefore \qquad y(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2.3}x^3 + \frac{x^4}{3.4} + \frac{x^5}{4.5} + \ldots$$

$$y(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$$

Ejemplo.- Halla la solución en serie de potencia de la ecuación diferencial $(x^2 - 1)\dfrac{d^2y}{dx^2} + 3x\dfrac{dy}{dx} + xy = 0$ que satisface las condiciones iniciales y(0)= 4, $y'(0) = 6$

<u>Solució.</u>

Tomando a $x_0 = 0$ como punto ordinario, entonces la solución en serie de potencia es $y = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, derivando se tiene $\dfrac{dy}{dx} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}$ y $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \sum\limits_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}$

ahora reemplazamos en la ecuación dada.

$$(x^2 - 1)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + 3x\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} + x\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} 3nc_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} = 0$$

poniendo las x en una misma potencia.

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)c_{n+2} x^n + x\sum_{n=1}^{\infty} 3nc_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^n = 0$$

poniendo los inicios iguales se tiene:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^n - 2c_2 - \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)(n+2)c_{n+2} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} (3nc_n + c_{n-1})x^n = 0$$

$$-2c_2 + (3c_1 + c_0 - 6c_3)x + \sum_{n=2}^{\infty} [(n^2 + 2n)c_n + c_{n-1} - (n+1)(n+2)c_{n-2}]x^n = 0$$

aplicando término a término se tiene: $\begin{cases} -2c_2 = 0 \\ 3c_1 + c_0 - 6c_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} c_2 = 0 \\ c_3 = \frac{1}{6}(c_0 + 3c_1) \end{array}$

$(n^2 + 2n)c_n + c_{n-1} - (n+1)(n+2)c_{n+2} = 0$ para $\forall$ n ≥ 2

de donde $c_{n+2} = \dfrac{c_{n-1} + n(n+2)c_n}{(n+1)(n+2)}$ $\forall$ n ≥ 2

para n = 2, $c_4 = \dfrac{c_1 + 8c_2}{3.4} = \dfrac{c_1}{3.4}$

n = 3, $c_5 = \dfrac{c_2 + 15c_3}{4.5} = \dfrac{3}{4}c_3 = \dfrac{1}{2.4}(c_0 + 3c_1)$

n = 4, $c_6 = \dfrac{c_3 + 24c_4}{5.6} = \dfrac{c_0 + 15c_1}{5.6^2}$

de las condiciones iniciales se tiene $y(0) = c_0 = 4$

$y'(0) = c_1 = 6$ entonces se tiene: $c_0 = 6$, $c_1 = 6$, $c_2 = 0$

$c_3 = \dfrac{11}{3}$, $c_4 = \dfrac{1}{2}$, $c_5 = \dfrac{11}{4}$, $c_6 = \dfrac{47}{90}$

como la solución es: $y(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5 ...$

$$y(x) = 4 + 6x + \frac{11}{3}x^3 + \frac{x^4}{2} + \frac{11}{4}x^5 + \frac{47}{90}x^6 + ...$$

Observación.- El método de solución de las ecuaciones diferenciales por medio de series de potencia, se puede aplicar cuando los coeficientes no son polinomios.

Ejemplo.- Hallar la solución de la ecuación diferencial por medio de series de potencia.

$y'' + (\cos x)y = 0$

Solución

Se conoce que $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$, como $x_0 = 0$ es un punto ordinario entonces la solución en serie de potencia es $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

de donde sus derivados son: $\frac{dy}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}$ y $\frac{d^2y}{dx^2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}$

ahora reemplazamos en la ecuación diferencial dada

$$y'' + (\cos x)y = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + (1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots)\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

$$= (2c_2 + 6c_3 x + 12c_4 x^2 + 20c_5 x^3 + \ldots) +$$

$$+ (1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots)(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots)$$

$$= (c_0 + 2c_2) + (c_1 + 6c_3)x + (-\frac{c_0}{2} + c_2 + 12c_4)x^2 + (20c_5 + c_3 - \frac{c_1}{2})x^3 + \ldots = 0$$

por el método de los coeficientes indeterminados

$$\begin{cases} c_0 + 2c_2 = 0 \\ c_1 + 6c_3 = 0 \\ -\frac{c_0}{2} + c_2 + 12c_4 = 0 \\ -\frac{c_1}{2} + c_3 + 20c_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} c_2 = -\frac{c_0}{2} \\ c_3 = -\frac{c_1}{6} \\ c_4 = \frac{c_0}{12} \\ c_5 = \frac{c_1}{30} \end{array}$$

como $y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + c_5 x^5 \ldots$

$$y = (c_0 - \frac{c_0}{2}x^2 + \frac{c_0}{12}x^4 + \ldots) + (c_1 x - \frac{c_1}{6}x^3 + \frac{c_1}{30}x^5 + \ldots)$$

$$y = c_0(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} + \ldots) + c_1(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{30} + \ldots)$$

Ejemplo.- Hallar la solución de la ecuación diferencial $\frac{d^2y}{dx^2}+y=\operatorname{sen} x$ en serie de potencias que satisface las condiciones iniciales $y(0)=y'(0)=0$.

Solución

como $x_0=0$ es un punto ordinario, entonces suponemos que $y=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ es la solución de la ecuación diferencial dada, de donde sus derivados son $\frac{dy}{dx}=\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}$ y $\frac{d^2y}{dx^2}=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}$, además se conoce $\operatorname{sen} x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, ahora reemplazando en la ecuación diferencial se tiene:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}+\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

a las series del primer miembro ponemos en la misma potencia.

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)c_{n+2}x^n+\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+1)(n+2)c_{n+2}+c_n]x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

La serie del primer miembro lo expresaremos como la suma de una serie de potencias impares de x en una serie de potencias pares de x, puesto que la serie de potencias del segundo miembro contiene solo potencias impares de x.

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(2n+2)(2n+3)c_{2n+3}+c_{2n+1}]x^{2n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}[(2n+1)(2n+2)c_{2n+2}+c_{2n}]x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

por el método de los coeficientes indeterminados se tiene:

$$\begin{cases} c_{2n+3} = \dfrac{1}{(2n+2)(2n+3)}\left[\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!} - c_{2n+1}\right], \ \forall n \geq 0 \\ c_{2n} = \dfrac{c_{2n}}{(2n+1)(2n+2)} \end{cases}$$ fórmula de recurrencia.

para $n = 0$, $c_3 = \dfrac{1}{2.3}[1 - c_1]$, $c_2 = -\dfrac{c_0}{1.2}$

$n = 1$, $c_5 = \dfrac{1}{4.5}\left[-\dfrac{2}{3!} + \dfrac{c_1}{3!}\right]$, $c_4 = \dfrac{(-1)^2 c_0}{1.2.3.4}$

$n = 2$, $c_7 = \dfrac{1}{6.7}\left[\dfrac{3}{5!} - \dfrac{c_1}{5!}\right]$, $c_6 = \dfrac{(-1)^3 c_0}{1.2.3.4.5.6}$

como la solución $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots$

$$y(x) = c_0 + c_1 x + \frac{(-1)}{2!} c_0 x^2 + \frac{1}{3!}[1 - c_1]x^3 + \frac{(-1)^2}{4!} c_0 x^4$$

$$+ \frac{1}{4.5}\left[-\frac{2}{3!} + \frac{c_1}{3!}\right]x^5 + \frac{(-1)^3}{6!} c_0 x^6 + \frac{1}{6.7}\left[\frac{3}{5!} - \frac{c_1}{5!}\right]x^7 + \ldots$$

$$y(x) = c_0\left(1 + \frac{(-1)^1}{2!}x^2 + \frac{(-1)^2}{4!}x^4 + \frac{(-1)^3}{6!}x^6 + \ldots\right)$$

$$+ c_1\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\right) + \left[\frac{x^3}{3!} - \frac{2x^5}{5!} + \frac{3x^7}{7!} + \ldots\right]$$

$$y(x) = c_0 \cos x + c_1 \operatorname{sen} x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad \forall\, x \in R$$

como $y(0) = y'(0) = 0 \Rightarrow c_0 = 0$ y $c_1 = 0$ $\quad \therefore\ y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$

Ejemplo: Hallar la solución de la ecuación diferencial $\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}-2y=e^x$ en serie de potencia que satisface las condiciones iniciales $y(0)=y'(0)=0$.

Solución

como $x_0 = 0$ es un punto ordinario, entonces suponemos que $y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$ es la solución de la ecuación diferencial dada, de donde sus derivadas son:

$\frac{dy}{dx}=\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^{n-1}$, $\frac{d^2y}{dx^2}=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n-2}$ además se tiene: $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, luego al reemplazar en la ecuación diferencial dada se tiene:

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n-2}+x\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^{n-1}-2\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

ahora ponemos en potencias de x iguales.

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)c_{n+2}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^n-\sum_{n=0}^{\infty}2c_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+1)(n+2)c_{n+2}-2c_n]x^n+\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

poniendo los inicios iguales se tiene.

$$2c_2-2c_0+\sum_{n=1}^{\infty}[(n+1)(n+2)c_{n+2}-2c_n+nc_n]x^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

aplicando el método de los coeficientes indeterminados.

$$\begin{cases}2c_2-2c_0=1\\(n+1)(n+2)c_{n+2}-2c_n+nc_n=\frac{1}{n!},\ \forall n\geq 1\end{cases}$$

$$c_2=\frac{1}{2}+c_0$$

$$c_{n+2}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}[\frac{1}{n!}+(2-n)c_n],\ \forall n\geq 1$$

aplicando las condiciones iniciales en la solución $y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=c_0+c_1x+c_2x^2+...$

$y(0)=y'(0)=0=c_0=c_1$ entonces $c_2=\frac{1}{2}$

para n = 1, $c_3=\frac{1}{2.3}[1+c_1]=\frac{1}{2.3}=\frac{1}{3!}$

n = 2, $c_4=\frac{1}{3.4}[\frac{1}{2}+0]=\frac{1}{2.3.4}=\frac{1}{4!}$

n = 3, $c_5=\frac{1}{4.5}[\frac{1}{6}-c_3]=\frac{1}{4.5}[\frac{1}{6}-\frac{1}{6}]=0$

n = 4, $c_6=\frac{1}{5.6}\left[\frac{1}{24}-2c_4\right]=-\frac{1}{6!}$

n = 5, $c_7=\frac{1}{6.7}\left[\frac{1}{120}-5c_5\right]=\frac{1}{7!}$

como la solución es $y=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3...$ $\therefore\ y=\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^7}{7!}+...$

9.1.1 SOLUCIÓN ENTORNO A PUNTOS SINGULARES.-

Se ha estudiado la solución en series de potencias de la ecuación diferencial $a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=0$ en torno a un punto ordinario $x=x_0$ sin mayores dificultades , sin embargo cuando $x=x_0$ es un punto singular no siempre es posible encontrar una solución de la forma $y=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n$; entonces nuestro problema será de encontrar una solución en series de potencias de la forma $y=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^{n+r}$, donde r es una constante que se debe determinar.

9.1.2 PUNTOS SINGULARES REGULARES E IRREGULARES.-

Un punto singular $x = x_0$ de la ecuación diferencial $\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0$ se denomina punto singular regular si $(x - x_0)P(x)$ y $(x - x_0)^2 Q(x)$ son ambas analíticas en x_0, en otros términos $(x - x_0)P(x)$ y $(x - x_0)^2 Q(x)$ tienen una serie de potencia en $(x - x_0)$ con radio de convergencia R > 0.

Un punto singular que no es regular se denomina punto irregular de la ecuación.

Observación: Cuando en la ecuación diferencial $a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0$ los coeficientes son polinomios sin factores comunes, la definición anterior es equivalente a:

Sea $a_2(x_0) = 0$, obtenga P(x) y Q(x) simplificando $\frac{a_1(x)}{a_2(x)}$ y $\frac{a_0(x)}{a_2(x)}$ respectivamente hasta que estas sean fracciones racional irreducible. Si el factor $x - x_0$ es a lo más de primer grado en el denominador de P(x) y a lo más de segundo grado en el denominador de Q(x) entonces $x = x_0$ es un punto singular regular.

Ejemplo: En la ecuación diferencial $(x^2 - 1)^2 \frac{d^2y}{dx^2} + (x - 1)\frac{dy}{dx} + y = 0$, los puntos singulares son x = -1, x = 1, al dividir a la ecuación diferencial entre $(x^2 - 1)^2 = (x + 1)^2 (x - 1)^2$ obtiene $P(x) = \frac{1}{(x - 1)(x + 1)^2}$ y $Q(x) = \frac{1}{(x - 1)^2 (x + 1)^2}$

analizando a P(x) y Q(x) en cada punto singular para que x = -1 sea un punto singular regular, el factor x + 1 puede aparecer a lo sumo elevado a la primera potencia en el denominador de P(x) y a lo sumo elevado a la segunda potencia en el denominador de Q(x) observamos que P(x) y Q(x) no cumple la primera condición por lo tanto concluimos que x = -1 es un punto singular irregular, para que x = 1 sea un punto singular regular, el factor x – 1 puede aparecer a lo sumo elevado a la primera potencia en el denominador de P(x) y a lo más elevado a la segunda potencia en el denominador de Q(x) por lo tanto analizando P(x) y Q(x) ambas verifican la condición, Luego x = 1 es un punto singular regular.

Ejemplo: A la ecuación diferencial $x^2(x+1)^2\frac{d^2y}{dx^2}+(x^2-1)\frac{dy}{dx}+2y=0$ dividimos entre $x^2(x+1)^2$, es decir: $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{x-1}{x^2(x+1)}\frac{dy}{dx}+\frac{2}{x^2(x+1)^2}y=0$

Luego x = 0 es un punto singular irregular, puesto que (x - 0) aparece elevado a la segunda potencia en el denominador de P(x) pero x = -1 si es un punto singular regular.

Ejemplo: A la ecuación diferencial $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+30y=0$ dividimos entre $1-x^2$, es decir: $\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{2x}{(1-x)(1+x)}\frac{dy}{dx}+\frac{30}{(1-x)(1+x)}y=0$

Los puntos x = 1, x = -1 son puntos singulares regulares.

Ejemplo: En la ecuación diferencial $x^3\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+5y=0$ x = 0 es un punto singular irregular puesto que $Q(x)=\frac{5}{x^3}$.

9.2. MÉTODO DE FROBENIUS.-

La solución de las ecuaciones diferenciales $a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=0$ en serie de potencia entorno a un punto singular regular, se obtiene mediante el siguiente teorema debido a "Ferdinand George Frobenius".

Teorema: Si $x=x_0$ es un punto singular regular la ecuación diferencial $a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=0$ existe al menos una solución en series de potencias de la forma $y=(x-x_0)^r\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^{n+r}$ donde el número r es una constante a determinar.

La serie convergerá al menos en algún intervalo $0<|x-x_0|<R$.

Ecuación Indicial: A la ecuación diferencial $a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=0$

escribiremos en la forma $\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y=0$ ...(1)

Si $x=x_0$ es un punto singular de la ecuación diferencial (1), entonces quiere decir que x p(x) y $x^2Q(x)$ son analíticas en $x_0=0$ y en consecuencia admite desarrollo en series de potencias, a la ecuación cuadrática en r dado por $r(r-1)+P_0r+q_0=0$ se denomina "Ecuación Indicial" de la ecuación diferencial (1) donde $P_0=\lim_{x\to0}xP(x)$ y $q_0=\lim_{x\to0}x^2Q(x)$ a los valores r_1 y r_2 de la ecuación indicial se le llama raíces indiciales ó exponentes de la singularidad.

Teorema: Demostrar que la ecuación indicial de la ecuación diferencial $\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y=0$ alrededor del punto singular regular $x_0=0$ es $r(r-1)+P_0r+q_0=0$.

Demostración

como $x_0=0$ es un punto singular regular entonces por el teorema de Frobenius existe una solución en serie de potencias de la forma $y=x^r\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+r}$ ahora calculamos las derivadas $\frac{dy}{dx}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_nx^{n+r-1}$; $\frac{d^2y}{dx^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)x^{n+r-2}$.

por otra parte, como $x_0=0$ es un punto singular regular, entonces x p(x) y $x^2Q(x)$ son analítica $x_0=0$ en consecuencia admiten desarrollo en series de potencias es decir:

$xp(x)=\sum_{n=0}^{\infty}P_nx^n$, $x^2Q(x)=\sum_{n=0}^{\infty}q_nx^n$, donde ambas series convergen en un intervalo $|x|<R$, centrado en $x_0=0$, ahora reemplazando en la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_nx^{n+r-2}+\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}P_nx^n.\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_nx^{n+r-1}+\frac{1}{x^2}\sum_{n=0}^{\infty}q_nx^n\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+r}=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_nx^{n+r-2}+\frac{x^{r-1}}{x}\sum_{n=0}^{\infty}P_nx^n.\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_nx^n+\frac{x^r}{x^2}\sum_{n=0}^{\infty}q_nx^n.\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_nx^{n+r-2}+x^{r-2}\sum_{n=0}^{\infty}[\sum_{n=0}^{\infty}(r+k)c_nP_{n-k}]x^n+x^{r-2}\sum_{n=0}^{\infty}[\sum_{k=0}^{\infty}c_kq_{n-k}]x^n=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+r)(n+r-1)c_n+\sum_{k=0}^{n}(k+r)c_kP_{n-k}+\sum_{k=0}^{n}c_kq_{n-k}]x^{n+r-2}=0$$

por el método de los coeficientes indeterminados se tiene:

$$(n+r)(n+r-1)c_n+\sum_{k=0}^{n}[(k+r)P_{n-k}+q_{n-k}]c_k=0\,,\ \ \forall\ n\geq 0$$

pero n = 0, se tiene; $r(r-1)c_0+(rP_0+q_0)c_0=0$

como $c_0\neq 0$, entonces $r(r-1)+rP_0+q_0=0$.

Que es la ecuación indicial de la ecuación diferencial.

Ejemplo: Resolver la ecuación diferencial $x\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}-y=0$ aplicando el método de Frobenius.

Solución

Sea $x_0=0$ un punto singular regular de la ecuación diferencial entonces por Frobenius la solución en series de potencias es $y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+r}$, cuyas derivadas son

$$\frac{dy}{dx}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_nx^{n+r-1}\qquad y\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_nx^{n+r-2}$$

ahora reemplazamos en la ecuación diferencial dada.

$$x\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-2}+3\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r-1}-\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+r}=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-1}+\sum_{n=0}^{\infty}3(n+r)c_n x^{n+r-1}-\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+r}=0$$

$$x^r[\sum_{n=0}^{\infty}[(n+r)(n+r-1)c_n+3(n+r)c_n]x^{n-1}-\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n]=0$$

$$x^r[\sum_{n=0}^{\infty}[(n+r)((n+r-1)+3)c_n]x^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}c_{n-1}x^{n-1}]=0$$

$$x^r[\frac{r(r+2)c_0}{x}+\sum_{n=1}^{\infty}[(n+r)(n+r+2)c_n-c_{n-1}]x^{n-1}]=0$$

$$\begin{cases} r(r+2)c_0=0 \\ (n+r)(n+r+2)c_n-c_{n-1}=0 \end{cases},\quad \forall\ n\geq 1 \qquad \ldots(\alpha)$$

Luego r(r + 2) = 0 $\Rightarrow$ $r_1=0$, $r_2=-2$.

para $r_1=0$, $c_n=\dfrac{c_{n-1}}{n(n+2)}$ $\forall$ n ≥ 1

para n = 1, $c_1=\dfrac{c_0}{1.3}$

n = 2, $c_2=\dfrac{c_1}{2.4}=\dfrac{c_0}{1.2.3.4}=\dfrac{2c_0}{2!4!}$

n = 3, $c_3=\dfrac{c_2}{3.5}=\dfrac{2c_0}{3!5!}$

n = 4, $c_4=\dfrac{c_3}{4.6}=\dfrac{2c_0}{4!6!}$

.

.

.

$$c_n = \frac{2c_0}{n!(n+2)!}, \quad \forall\ n = 1,2,3,.....$$

por lo tanto una solución en serie es: $Y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2c_0 x^n}{n!(n+2)!} = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^n}{n!(n+2)!}$, para $|x| < \infty$

cuando $r_2 = -2$, la ecuación (α) se transforma en

$$(n-2)n.c_n - c_{n-1} = 0 \quad \forall\ n \geq 1 \quad \Rightarrow \quad c_n = \frac{c_{n-1}}{(n-2)n}$$

para n = 1 y n = 2, $\begin{cases} -c_1 - c_0 = 0 \\ c_2 - c_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_0 = 0 \\ c_1 = 0 \end{cases}$

n = 3, $c_3 = \frac{c_2}{1.3}$

n = 4, $c_4 = \frac{c_3}{2.4} = \frac{c_2}{1.2.3.4} = \frac{2c_2}{2!4!}$

n = 5, $c_5 = \frac{c_4}{3.5} = \frac{2c_2}{3!5!}$

n = 6, $c_6 = \frac{c_4}{3.5} = \frac{2c_2}{3!5!}$

.

.

.

$$c_n = \frac{2c_2}{(n-2)!n!}, \qquad n = 3,4,5...$$

Luego la otra solución es: $y = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2c_2}{(n-2)!n!} x^{n-2}$

9.2.1 CASOS DE RAÍCES INDICIALES.-

Para aplicar el método de Frobenius se distinguen tres casos de acuerdo con la naturaleza de las raíces indiciales; para simplificar, supongamos que r_1 y r_2 son las soluciones reales de la ecuación indicial, donde r_1 es mayor que r_2. La solución en series de potencias de la ecuación diferencial entorno a un punto singular regular lo trataremos en el siguiente teorema.

Teorema.- Sea $x_0 = 0$ un punto singular regular de la ecuación diferencial de segundo orden $\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0$, supongamos que x p(x) y $x^2Q(x)$ son analíticas en el intervalo $|x| < R$ y sean r_1 y r_2 las raíces reales de la ecuación indicial $r(r-1) + P_0 r + q_0 = 0$, donde $r_1 > r_2$, entonces la ecuación diferencial dada tiene dos soluciones linealmente independientes $Y_1(x)$ y $Y_2(x)$, validez para $|x| < R$ donde la primera solución es $Y_1(x) = x^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r_1}$, donde $c_0 = 1$ y la segunda solución $Y_2(x)$ depende de $r_1 - r_2$ es decir:

a) Si $r_1 - r_2$ no es un entero positivo, entonces: $Y_2(x) = x^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r_2}$, donde $b_0 = 1$.

b) Si $r_1 - r_2$ es un entero positivo, entonces: $Y_2(x) = x^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n + cY_1(x)Ln|x|$, donde $b_0 = 1$.

c) Si $r_1 = r_2$, entonces la segunda solución es: $Y_2(x) = Y_1(x)\ln x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, donde $b_0 = 0$.

Nota: En la parte b) del teorema se tiene si $r_1 - r_2$ es un entero la segunda solución se puede obtener en la forma $Y_2(x) = Y_1(x)\int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{Y_1^2(x)}dx$ siempre que $Y_1(x)$ sea una solución conocida de la ecuación diferencial $\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0$.

Ejemplo: Resolver la ecuación diferencial $2x\frac{d^2y}{dx^2}+(x+1)\frac{dy}{dx}+y=0$. aplicando el método de Frobenius.

Solución

como $x_0=0$ es un punto singular regular entonces existe solución en series de potencia de la forma. $y=\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+r}$, donde r es constante por calcularse.

Calculando las derivadas se tiene:

$\frac{dy}{dx}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r-1}$ y $\frac{d^2y}{dx^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-2}$ reemplazando en la ecuación diferencial dada.

$$2x\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-2}+(x+1)\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r-1}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+r}=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}2(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r-1}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+r}=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(2n+2r-1)c_n x^{n+r-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r+1)c_n x^{n+r}=0$$

poniendo las x en potencias iguales se tiene:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(2n+2r-1)c_n x^{n+r-1}+\sum_{n=1}^{\infty}(n+r)c_{n-1}x^{n+r-1}=0\text{ ; poniendo los inicios iguales.}$$

$$r(2r-1)c_0x^{r-1}+\sum_{n=1}^{\infty}(n+r)(2n+2r-1)c_n x^{n+r-1}+\sum_{n=1}^{\infty}(n+r)c_{n-1}x^{n+r-1}=0$$

$$r(2r-1)x^{r-1}+x^{r-1}(\sum_{n=1}^{\infty}[(n+r)(2n+2r-1)c_n+(n+r)c_{n-1}]x^n)=0$$

ahora aplicando el método de los coeficientes indeterminados

$$\begin{cases} r(2r-1)=0 \\ (n+r)(2n+2r-1)c_n+(n+r)c_{n-1}=0 \end{cases} \quad \text{para } n \geq 1.$$

r(2r - 1) = 0 entonces $r_1 = \frac{1}{2}$, $r_2 = 0$.

$$c_n = -\frac{c_{n-1}}{2n+2r-1} \text{ la fórmula de recurrencia.}$$

para $r_1 = \frac{1}{2}$ se tiene $c_n = -\frac{c_{n-1}}{2n}$, n = 1,2,3,4...,

para n = 1, $c_1 = -\frac{c_0}{2.1}$

n = 2, $c_2 = -\frac{c_1}{2.2} = \frac{c_0}{2^2 2!}$

n = 3, $c_3 = -\frac{c_2}{2.3} = -\frac{c_0}{2^3.3!}$

n = 4, $c_4 = -\frac{c_3}{2.4} = \frac{c_0}{2^4.4!}$

$\vdots$

$$c_n = \frac{(-1)^n c_0}{2^n.n!}, \quad n = 1,2,3...$$

$$Y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = x^{\frac{1}{2}}(c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n) = x^{\frac{1}{2}} c_0 (1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!} x^n)$$

$Y_1(x) = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!} x^{n+\frac{1}{2}}$ es la primera solución, para $r_2 = 0$, se tiene la segunda solución, $c_n = -\frac{c_{n-1}}{2n-1}$ para n = 1,2,3,4...

para n = 1, $c_1 = -\frac{c_0}{1}$

n = 2, $c_2 = -\frac{c_1}{3} = \frac{c_0}{1.3}$

n = 3, $c_3 = -\frac{c_2}{5} = -\frac{c_0}{1.3.5}$

n = 4, $c_4 = -\frac{c_3}{7} = \frac{c_0}{1.3.5.7}$

.
.
.

$$c_n = \frac{(-1)^n c_0}{1.3.5...(2n-1)} \quad \text{para n = 1,2,3,...}$$

$$Y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \text{puesto que} \quad r = r_2 = 0$$

$$Y_2(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1.3.5...(2n-1)} x^n \quad \text{para } |x| < \infty$$

Luego la solución general es: $Y(x) = c_1 Y_1(x) + c_2 Y_2(x)$

Ejemplo: Hallar la solución general de la ecuación diferencial $x\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} - y = 0$

Solución

Del ejemplo, el método de Frobenius proporciona solamente una solución de esta ecuación dado por $Y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{n!(n+2)!} x^n = 1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{24} + \frac{x^3}{360} + ...$

de la observación se tiene una segunda solución. $Y_2(x) = Y_1(x) \int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{Y_1^2(x)} dx$

$$Y_2(x)=Y_1(x)\int\frac{e^{-\int\frac{3}{x}dx}}{Y_1^2(x)}dx=Y_1(x)\int\frac{dx}{x^3[1+\frac{x}{3}+\frac{x^2}{24}+\frac{x^3}{360}+...]^2}$$

$$=Y_1(x)\int\frac{dx}{x^3[1+\frac{2}{3}x+\frac{7}{36}x^2+\frac{x^3}{30}+...]}=Y_1(x)\int\frac{1}{x^3}(1-\frac{2}{3}x+\frac{x^2}{4}-\frac{19}{270}x^3+...)dx$$

$$=Y_1(x)\int(\frac{1}{x^3}-\frac{2}{3x^2}+\frac{1}{4x}-\frac{19}{270}+...)dx=Y_1(x)(-\frac{1}{2x^2}+\frac{2}{3x}+\frac{1}{4}\ln x-\frac{19}{270}x+...)$$

$$=\frac{1}{4}Y_1(x)\ln x+Y_1(x)(-\frac{1}{2x^2}+\frac{2}{3x}-\frac{19}{270}x+...)$$

Luego la solución general en el intervalo $0<x<\infty$ es

$$Y(x)=c_1Y_1(x)+c_2[\frac{1}{4}Y_1(x)\ln x+Y_1(x)(-\frac{1}{2x^2}+\frac{2}{3x}-\frac{19}{270}x+....)]$$

Ejemplo: Hallar la solución general de la ecuación diferencial $x\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}-4y=0$

Solución

como $x_0=0$ es un punto singular regular, entonces la solución en series es $y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+r}$, de donde sus derivadas es $\frac{dy}{dx}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_nx^{n+r-1}$ y

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_nx^{n+r-2}$$

ahora reemplazamos en la ecuación diferencial dada

$$x\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_nx^{n+r-2}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_nx^{n+r-1}-4\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+r}=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_nx^{n+r-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_nx^{n+r-1}-\sum_{n=0}^{\infty}4c_nx^{n+r}=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)^2 c_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty}4c_n x^{n+r} = 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)^2 c_n x^{n+r-1} - \sum_{n=1}^{\infty}4c_{n-1}x^{n+r-1} = 0$$

$$r^2 c_0 x^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty}[(n+r)^2 c_n - 4c_{n-1}]x^{n+r-1} = 0$$

$$r^2 c_0 x^{r-1} + x^{r-1}\sum_{n=1}^{\infty}[(n+r)^2 c_n - 4c_{n-1}]x^{n} = 0$$

ahora aplicando el método de los coeficientes indeterminados. $r^2 = 0 \Rightarrow r_1 = 0\,,\ r_2 = 0$

$(n+r)^2 c_n - 4c_{n-1} = 0 \Rightarrow c_n = \dfrac{4c_{n-1}}{(n+r)^2}$ como $r_1 = r_2 = 0$ entonces $c_n = \dfrac{4c_{n-1}}{n^2}$

para n = 1, $c_1 = \dfrac{4c_0}{1^2}$

n = 2, $c_2 = \dfrac{4c_1}{2^2} = \dfrac{4^2 c_0}{(1.2)^2} = \dfrac{4^2 c_0}{(2!)^2}$

n = 3, $c_3 = \dfrac{4c_2}{3^2} = \dfrac{4^3 c_0}{(3!)^2}$

$$c_n = \frac{4^n c_0}{(n!)^2}$$

Luego la solución resulta. $Y_1(x) = c_0 \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{4^n x^n}{(n!)^2}$ para $|x| < \infty$

para obtener la segunda solución linealmente independiente hacemos $c_0 = 1$

como se conoce $Y_2(x) = Y_1(x)\displaystyle\int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{Y_1^2(x)}dx$

$$Y_2(x)=Y_1(x)\int\frac{e^{-\int\frac{dx}{x}}}{Y_1^2(x)}dx=Y_1(x)\int\frac{dx}{x[1+4x+4x^2+\frac{16}{9}x^3+...]^2}$$

$$=Y_1(x)\int\frac{dx}{x[1+4x+24x^2+\frac{16}{9}x^3+...]}=Y_1(x)\int\frac{1}{x}(1-8x+40x^2-\frac{1472}{9}x^3+...)dx$$

$$=Y_1(x)\int(\frac{1}{x}-8+4x-\frac{1472}{9}x^2+...)dx=Y_1(x)[\ln x-8x+2x^2-\frac{1472}{27}x^3+...]$$

$$Y_2(x)=Y_1(x)\ln x+Y_1(x)(-8x+2x^2-\frac{1472}{27}x^3+...)$$

Luego la solución general de la ecuación diferencial es:

$$Y(x)=C_1Y_1(x)\ln x+Y_1(x)(-8x+2x^2-\frac{1472}{27}x^3+...)$$

Ejemplo: Encontrar la solución general de la ecuación diferencial $2x^2\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+(1+x)y=0$ alrededor del primer punto singular regular $x_0=0$.

Solución

como $x_0=0$ es un punto singular regular, entonces la primera solución diferencial dada es: $Y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+r}$, calculando sus derivadas $Y'_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_nx^{n+r-1}$ y

$$Y_1''(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_nx^{n+r-2},$$

ahora reemplazando en la ecuación diferencial dado.

$$2x^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_nx^{n+r-2}-x\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_nx^{n+r-1}+(1+x)\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+r}=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)c_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r+1} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [2(n+r)(n+r-1)c_n - (n+r)c_n + c_n] x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r+1} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(2n+2r-1)c_n x^{n+r} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^{n+r} = 0$$

$$(r-1)(2r-1)c_0 x^r + \sum_{n=1}^{\infty} (n+r-1)(2n+2r-1)c_n x^{n+r} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^{n+r} = 0$$

$$(r-1)(2r-1)c_0 x^r + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+r-1)(2n+2r-1)c_n + c_{n-1}] x^{n+r} = 0$$

aplicando el método de los coeficientes indeterminados.

$$\begin{cases} (r-1)(2r-1)c_0 = 0, \quad c_0 \neq 0 \\ (n+r-1)(2n+2r-1)c_n + c_{n-1} = 0 \end{cases} \text{ entonces } \begin{cases} r_1 = 1, \quad r_2 = \dfrac{1}{2} \\ c_n = -\dfrac{c_{n-1}}{(n+r-1)(2n+2r-1)} \end{cases}$$

$r_1 = 1$ se tiene $c_n = -\dfrac{c_{n-1}}{n(2n+1)}$ para $n \geq 1$

para $n = 1$, $c_1 = -\dfrac{c_0}{1.3}$

$n = 2$, $c_2 = -\dfrac{c_1}{2.5} = \dfrac{c_0}{1.2.3.5}$

$n = 3$, $c_3 = -\dfrac{c_2}{3.7} = -\dfrac{c_0}{1.2.3^2.5.7}$

$n = 4$, $c_4 = -\dfrac{c_3}{4.9} = \dfrac{c_0}{1.2.3^2.4.5.7.9}$

$$n = 5, \quad c_5 = -\frac{c_4}{5.11} = -\frac{c_0}{1.2.3^2.4.5^2.7.9}$$

como $Y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = x^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = x \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

$$Y_1(x) = x\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1.2.3^2.4.5^2.6.7^2.8.9....} x^n\right)$$

$$Y_1(x) = x\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!(2n+1)}\right) \quad \text{para} \quad c_0 = 1 \neq 0 .$$

ahora calculamos la segunda solución.

como $r_1 - r_2 = \frac{1}{2}$ no es un entero entonces de la parte a) del teorema se tiene

$$Y_2(x) = x^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \quad \text{donde} \quad b_0 = 1 .$$

$$b_n = -\frac{b_{n-1}}{(n-\frac{1}{2})2n} = -\frac{b_{n-1}}{n(2n-1)}, \qquad \forall\, n \geq 1$$

para $\quad n = 1, \quad b_1 = -\frac{b_0}{1}$

$$n = 2, \quad b_2 = -\frac{b_1}{2.3} = \frac{b_0}{1.2.3}$$

$$n = 3, \quad b_3 = -\frac{b_2}{3.5} = -\frac{b_0}{1.2.3^2.5}$$

$$n = 4, \quad b_4 = -\frac{b_3}{4.7} = \frac{b_0}{1.2.3^2.4.5.7}$$

$$n = 5, \qquad b_5 = -\frac{b_4}{5.9} = -\frac{b_0}{1.2.3^2.4.5^2.7.9}$$

$$\vdots$$

$$b_n = \frac{(-1)^n b_0}{1.2.3^2.4.5^2.6.7^2.8...} = \frac{(-1)^n b_0}{n!(2n-1)}$$

$$Y_2(x) = x^{\frac{1}{2}}[b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n b_0}{n!(2n-1)}] \quad \text{para} \quad b_0 = 1 \neq 0$$

$$Y_2(x) = x^{\frac{1}{2}}[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!(2n-1)}]$$

Luego la solución general es dado por: $Y(x) = c_1 Y_1(x) + c_2 Y_2(x)$

Ejemplo: Aplicando Frobenius, hallar la solución general de la ecuación diferencial

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = 0$$

Solución

como $x_0 = 0$ es un punto singular regular, entonces la primera solución es: $Y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$, calculando las derivadas $\frac{dy}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)c_n x^{n+r-1}$ y $\frac{d^2y}{dx^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-2}$ reemplazando en la ecuación diferencial dada se tiene: $x\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-2} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)c_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)c_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = 0$$

poniendo las x en igual potencias se tiene: $\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)^2 c_n x^{n+r-1} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^{n+r-1} = 0$

poniendo los inicios iguales.

$$r^2c_0x^{r-1}+\sum_{n=1}^{\infty}(n+r)^2c_nx^{n+r-1}+\sum_{n=1}^{\infty}c_{n-1}x^{n+r-1}=0$$

$$r^2c_0x^{r-1}+x^{r-1}\sum_{n=1}^{\infty}[(n+r)^2c_n+c_{n-1}]x^n=0$$

aplicando el método de los coeficientes indeterminados.

$$\begin{cases} r^2c_0=0 \\ (n+r)^2c_n+c_{n-1}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} r_1=r_2=0 \\ c_n=-\dfrac{c_{n-1}}{(n+r)^2} \end{array}$$

para $r=r_1=r_2=0$, $\quad c_n=-\dfrac{c_{n-1}}{n^2} \quad \forall\ n\geq 1.$

para $\quad n=1,\quad c_1=-\dfrac{c_0}{1^2}$

$n=2,\quad c_2=-\dfrac{c_1}{2^2}=\dfrac{c_0}{2^2}$

$n=3,\quad c_3=-\dfrac{c_2}{3^2}=-\dfrac{c_0}{2^2.3^2}$

$n=4,\quad c_4=-\dfrac{c_3}{4^2}=\dfrac{c_0}{2^2.3^2.4^2}$

.

.

.

$$c_n=\frac{(-1)^nc_0}{(n!)^2}\quad \text{para}\quad c_0=1$$

$$Y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^n}{(n!)^2}$$

ahora calculamos la segunda solución $Y_2(x)$ pero como $r_1=r_2=0$ por la parte c) del teorema se tiene

$$Y_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r}+Y_1(x)\ln x \quad\Rightarrow\quad Y_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n}+Y_1(x)\ln x\,,\quad \text{donde } r=0.$$

$$Y_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n}+\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{(n!)^2}\Big)\ln x\,;$$ calculando las derivadas se tiene:

$$Y_2'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} nb_n x^{n-1}+\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(-1)^n x^{n-1}}{(n!)^2}\Big)\ln x+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{(n!)^2}$$

$$Y_2''(x)=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)b_n x^{n-2}+\Big(\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n-1)(-1)^n x^{n-2}}{(n!)^2}\Big)\ln x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(-1)^n x^{n-2}}{(n!)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(-1)^n x^{n-1}}{(n!)^2}$$

ahora reemplazamos en la ecuación diferencial

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)b_n x^{n-1}+\Big(\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n-1)(-1)^n x^{n-1}}{(n!)^2}\Big)\ln x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(-1)^n x^{n-1}}{(n!)^2}$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(-1)^n x^{n}}{(n!)^2}+\sum_{n=1}^{\infty} nb_n x^{n-1}+\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(-1)^n x^{n-1}}{(n!)^2}\Big)\ln x$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n}}{(n!)^2}+\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n}+\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n}}{(n!)^2}\Big)\ln x=0$$

agrupando las series se tiene:

$$\Big(\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)b_n x^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty} nb_n x^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n}+$$

$$+\Big(\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n-1)(-1)^n x^{n-1}}{(n!)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(-1)^n x^{n-1}}{(n!)^2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n}}{(n!)^2}\Big)\ln x+$$

$$+\Big(\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(-1)^n x^{n-1}}{(n!)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(-1)^n x}{(n!)^2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n}}{(n!)^2}\Big)=0$$

poniendo las x en una misma potencia.

$$(\sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)b_{n+1}x^n + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)b_{n+1}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n) +$$

$$+(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)(-1)^{n+1}x^n}{((n+1)!)^2} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(-1)^{n+1}x^n}{((n+1)!)^2} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{(n!)^2})\ln x$$

$$+(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(-1)^{n+1}x^n}{((n+1)!)^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(-1)^n x^n}{(n!)^2} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{(n!)^2}) = 0$$

$$(\sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)b_{n+1}x^n + \sum_{n=0}^{\infty}((n+1)b_{n+1} + b_n)x^n) +$$

$$+(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)(-1)^{n+1}x^n}{((n+1)!)^2} + \sum_{n=0}^{\infty}(\frac{(n+1)(-1)^{n+1}}{((n+1)!)^2} + \frac{(-1)^n}{(n!)^2})x^n)\ln x +$$

$$+(\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{(n+1)(-1)^{n+1}}{((n+1)!)^2} + \frac{(-1)^n}{(n!)^2})x^n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(-1)^n}{(n!)^2}x^n) = 0$$

poniendo los inicios iguales tenemos

$$(b_1 + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty}((n+1)^2 b_{n+1} + b_n)x^n) + \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2(n+1)(-1)^{n+1}}{((n+1)!)^2} + \frac{(-1)^n}{(n!)^2})x^n.\ln x$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{(n+1)(-1)^{n+1}}{((n+1)!)^2} + \frac{(n+1)(-1)^n}{(n!)^2})x^n = 0$$

$$b_1 + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[(n+1)^2 b_{n+1} + b_n + \frac{n^2+2n}{(n+1)(n!)^2}(-1)^n]x^n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)(-1)^n}{(n+1)(n!)^2}x^n \ln x = 0$$

aplicando el método de los coeficientes indeterminados.

$$\begin{cases} b_1 + b_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad b_1 = -b_0 \\ (n+1)^2 b_{n+1} + b_n + \dfrac{n^2+2n}{(n+1)(n!)^2}(-1)^n = 0 \end{cases} \qquad \text{para} \quad b_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad b_1 = -1$$

$$b_{n+1}=\frac{-1}{(n+1)^2}[b_n+\frac{n^2+2n}{(n+1)(n!)^2}(-1)^n] \qquad \forall\, n\geq 1$$

para $\quad n=1,\quad b_2=-\frac{1}{2^2}[b_1-\frac{3}{2}]=\frac{5}{8}$

$\quad n=2,\quad b_3=-\frac{1}{9}[b_2+\frac{8}{12}]=-\frac{1}{9}[\frac{5}{8}+\frac{2}{3}]=-\frac{31}{216}$

$\quad n=3,\quad b_4=-\frac{1}{16}[b_3-\frac{15}{24}]=-\frac{1}{16}[-\frac{31}{216}-\frac{15}{24}]=\frac{83}{1728}$

$$Y_2(x)=(1-x+\frac{5}{8}x^2-\frac{31}{216}x^3+\frac{83}{1728}x^4+...)+Y_1(x)\ln x$$

Luego la solución general es $Y(x)=c_1Y_1(x)+c_2Y_2(x)$

Ejemplo: Aplicando Frobenius, hallar la solución general de la ecuación diferencial.

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+(x^2-2x)\frac{dy}{dx}+2y=0$$

Solución

como $x_0=0$ es un punto singular regular, la primera solución es $Y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+r}$,

cuyas derivadas son: $\frac{dy}{dx}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_nx^{n+r-1}$ y $\frac{d^2y}{dx^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_nx^{n+r-2}$

reemplazando en la ecuación diferencial dada.

$$x^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_nx^{n+r-2}+(x^2-2x)\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_nx^{n+r-1}+2\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+r}=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_nx^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_nx^{n+r+1}-\sum_{n=0}^{\infty}2(n+r)c_nx^{n+r}+2\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+r}=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+r)(n+r-3)+2]c_nx^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_nx^{n+r+1}=0$$

poniendo las x en una misma potencia.

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+r)(n+r-3)+2]c_n x^{n+r} + \sum_{n=1}^{\infty}(n+r-1)c_{n-1}x^{n+r} = 0$$

poniendo los inicios iguales se tiene.

$$[r(r-3)+2]c_0 x^r + \sum_{n=1}^{\infty}[(n+r)(n+r-3)+2]c_n x^{n+r} + \sum_{n=1}^{\infty}(n+r-1)c_{n-1}x^{n+r} = 0$$

$$[r(r-3)+2]c_0 x^r + x^r\sum_{n=1}^{\infty}([(n+r)(n+r-3)+2]c_n + (n+r-1)c_{n-1})x^n = 0$$

$$[r^2-3r+2]c_0 x^r + x^r\sum_{n=1}^{\infty}[(n+r-1)(n+r-2)c_n + (n+r-1)c_{n-1}]x^n = 0$$

aplicando el método de los coeficientes indeterminados.

$$\begin{cases} r^2-3r+2=0 \quad \Rightarrow \quad r_1=2,\ r_2=1 \\ (n+r-1)(n+r-2)c_n + (n+r-1)c_{n-1} = 0 \end{cases}$$

$$c_n = -\frac{c_{n-1}}{n+r-2} \quad \forall\ n \geq 1$$

$$c_n = -\frac{c_{n-1}}{n}$$

Para $\quad n = 1, \quad c_1 = -\frac{c_0}{1}$

$n = 2, \quad c_2 = -\frac{c_1}{2} = \frac{c_0}{1.2}$

$n = 3, \quad c_3 = -\frac{c_2}{3} = -\frac{c_0}{1.2.3}$

$$n = 4, \quad c_4 = -\frac{c_3}{4} = \frac{c_0}{1.2.3.4}$$

$$\vdots$$

$$c_n = \frac{(-1)^n c_0}{1.2.3.4...n} = \frac{(-1)^n c_0}{n!}$$

como $\quad y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+2} = c_0 x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^{n+2}$

$$y_1(x) = c_0 x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n c_0 x^{n+2}}{n!} = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+2}}{n!}$$

para $\quad c_0 = 1 \neq 0\ ,\ y_1(-1) = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} = x^2 e^{-x}$

ahora calculamos la segunda solución $y_2(x)$

pero como $r_1 - r_2 = 2 - 1 = 1$ es un entero, entonces la solución es

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r_2} + c_0 . y_1(x) \ln x\ , \ \text{donde } b_0 = 1$$

para calcular b_n y c_0 utilizaremos un método alternativo en lugar de usar el método de derivar y reemplazar en la ecuación diferencial.

El método alternativo consiste en lo siguiente:

Sea $Y_2(x) = \frac{\partial}{\partial r}[(r - r_2) t(r_1 x)]\Big|_{r=r_2}$, donde los coeficientes de $Y(r_1 x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$ se mantiene en función de r, de acuerdo a la fórmula de recurrencia. $c_n = -\frac{c_{n-1}}{r+n-2}\ \forall\ n \geq 1$

$$n = 1, \quad c_1 = -\frac{1}{r-1} c_0$$

$$n = 2, \quad c_2 = -\frac{c_1}{r} = \frac{(-1)^2}{r(r-1)}$$

$$n = 3, \quad c_3 = -\frac{c_2}{r+1} = \frac{(-1)^3 c_0}{r(r-1)(r+1)}$$

$$n = 4, \quad c_4 = -\frac{c_3}{r+2} = \frac{(-1)^4 c_0}{r(r-1)(r+1)(r+2)}$$

$$Y(r_1 x) = c_0 x^r + c_1 x^{r+1} + c_2 x^{r+2} + c_3 x^{r+3} + c_4 x^{r+4} + \dots$$

$$Y(r_1 x) = c_0 x^r + \frac{(-1)^1}{r-1} c_0 x^{r+1} + \frac{(-1)^2}{r(r-1)} c_0 x^{r+2} + \frac{(-1)^3}{r(r-1)(r+1)} c_0 x^{r+3} + \dots$$

$$(r - r_2) y(r_1 x) = (r-1) y(r_1 x) = c_0 [(r-1) x^r + (-1)^1 x^{r+1} + \frac{(-1)^2}{r} x^{r+2} + \frac{(-1)^3 x^{r+3}}{r(r+1)} + \dots]$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(r-1)(r_1 x) = c_0 [x^r + (r-1) x^r \ln x + (-1)^1 x^{r+1} \ln x - \frac{1}{r^2} x^{r+2}$$

$$+ \frac{1}{r} x^{r+2} \ln x + \frac{2r+1}{(r^2+r)^2} x^{r+3} - \frac{1}{r^2+r} x^{r+3} \ln x + \dots]$$

$$Y_2(x) = \frac{\partial}{\partial r}[(r-1) y(r_1 x)]\Big|_{r=1} = c_0 [x - x^2 \ln x - x^3 + x^3 \ln x + \frac{3}{4} x^4 - \frac{x^4}{2} \ln x + \dots]$$

$$Y_2(x) = c_0 (x - x^3 + \frac{3}{4} x^4 + \dots) + c_0 (-x^2 + x^3 - \frac{x^4}{2} + \dots) \ln x$$

$$Y_2(x) = c_0 x (1 - x^2 + \frac{3}{4} x^3 + \dots) + c_0 x^2 (-1 + x - \frac{x^2}{2} + \dots) \ln x$$

para $c_0 = 1 \neq 0$ se tiene.

$$Y_2(x) = x(1 - x^2 + \frac{3}{4} x^3 + \dots) - \underbrace{x^2 (1 - x + \frac{x^2}{2!} - \dots)}_{Y_1(x)} = x(1 - x^2 + \frac{3}{4} x^3 + \dots) - Y_1(x) \ln x$$

Luego la solución general de la ecuación diferencial es: $Y(x)=c_1Y_1(x)+c_2Y_2(x)$.

Ejemplo: Resolver la ecuación diferencial $(x^2-x)\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}-2y=x+\frac{3}{x^2}$, alrededor del punto singular regular $x_0=0$.

Solución

En primer lugar hallaremos la solución en series de potencias de la ecuación diferencial homogénea $Y_g(x)$ y después hallaremos una solución particular $Y_p(x)$ de la ecuación diferencial no homogénea.

Entonces calcularemos la solución en series de potencia de la ecuación diferencial $(x^2-x)\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}-2y=0$ la solución 1° en series de potencias es $Y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+r}$ donde sus derivadas son:

$$\frac{dy}{dx}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_nx^{n+r-1} \quad \text{y} \quad \frac{d^2y}{dx^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_nx^{n+r-2}$$

ahora reemplazamos en la ecuación diferencial

$$(x^2-x)\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_nx^{n+r-2}+3\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_nx^{n+r-1}-2\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+r}=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_nx^{n+r}-\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_nx^{n+r-1}+\sum_{n=0}^{\infty}3(n+r)c_nx^{n+r-1}$$
$$-\sum_{n=0}^{\infty}2c_nx^{n+r}=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+r)(n+r-1)-2]c_nx^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}[3(n+r)-(n+r)(n+r-1)]c_nx^{n+r-1}=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+r)(n+r-1)-2]c_nx^{n+r}-\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-4)]c_nx^{n+r-1}=0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}[(n+r-1)(n+r-2)-2]c_{n-1}x^{n+r-1}-(r-4)c_0x^{r-1}-\sum_{n=1}^{\infty}(n+r)(n+r-4)c_nx^{n+r-1}=0$$

$$r(r-4)c_0x^{r-1}+\sum_{n=1}^{\infty}(n+r)(n+r-3)c_{n-1}x^{n+r-1}-\sum_{n=1}^{\infty}(n+r)(n+r-4)c_nx^{n+r-1}=0$$

$$r(r-4)c_0x^{r-1}+\sum_{n=1}^{\infty}[(n+r)(n+r-3)c_{n-1}-(n+r)(n+r-4)c_n]x^{n+r-1}=0$$

aplicando el método de los coeficientes indeterminados.

$$\begin{cases} r(r-4)=0 \quad \Rightarrow \quad r_2=0,\ r_1=4 \\ (n+r)(n+r-3)c_{n-1}-(n+r)(n+r-4)c_n=0 \end{cases}$$

$$c_n=\frac{(n+r-3)c_{n-1}}{n+r-4} \qquad \forall\ n\geq 1$$

para $r=r_1=4$, $c_n=\dfrac{n+1}{n}c_{n-1}$, $\qquad \forall\ n\geq 1$

para $\quad n=1,\quad c_1=\dfrac{2}{1}c_0=2c_0$

$n=2,\quad c_2=\dfrac{3}{2}c_1=3c_0$

$n=3,\quad c_3=\dfrac{4}{3}c_2=4c_0$

$$Y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+r}=x^r\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=x^4\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_0x^n \quad \text{para} \quad c_0=1$$

$$Y_1(x)=x^4\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$$

Se conoce que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n=\frac{1}{(1-x)^2}$

$$\therefore \quad Y_1(x) = x^4 \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{x^4}{(1-x)^2}$$

ahora calculamos la segunda solución $Y_2(x)$ como $r_1 - r_2 = 4$ entero, entonces la segunda solución es: $Y_2(x) = \frac{\partial}{\partial r}[(r-0)y(rx)]\Big|_{r=0}$, donde $Y(rx) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$ de la fórmula de recurrencia se tiene: $c_n = \frac{c+r-3}{n+r-4} c_{n-1} \quad \forall\ n \geq 1$

para n = 1, $c_1 = \frac{r-2}{r-3} c_0$

n = 2, $c_2 = \frac{r-1}{r-2} c_1 = \frac{r-1}{r-3} c_0$

n = 3, $c_3 = \frac{r}{r-1} c_2 = \frac{r}{r-3} c_0$

n = 4, $c_4 = \frac{r+1}{r} c_3 = \frac{r+1}{r-3} c_0$

n = 5, $c_5 = \frac{r+2}{r+1} c_4 = \frac{r+2}{r-3} c_0$

$$Y(rx) = x^r (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots)$$

$$= x^r \left(c_0 + \frac{r-2}{r-3} c_0 x + \frac{r-1}{r-3} c_0 x^2 + \frac{r}{r-3} c_0 x^3 + \frac{r+1}{r-3} c_0 x^4 + \frac{r+2}{r-3} c_0 x^5 + \ldots\right)$$

$$rY(rx) = c_0 \left(rx^r + \frac{r(r-2)}{r-3} x^{r+1} + \frac{r(r-1)}{r-3} x^{r+2} + \frac{r^2}{r-3} x^{r+3} + \frac{r(r+1)}{r-3} x^{r+4} + \frac{r(r+2)}{r-3} x^5 + \ldots\right)$$

$$Y_2(x) = \frac{\partial}{\partial r}[rY(rx)]\Big|_{r=0} = c_0\left(1 + \frac{2}{3}x + \frac{x^2}{3}\right) \quad \text{para } c_0 = 1$$

$Y_2(x) = 1 + \frac{2x}{3} + \frac{x^2}{3}$; Luego la solución general de la ecuación homogénea.

$Y_2(x) = c_1 \dfrac{x^4}{(1-x)^2} + c_2(1 + \dfrac{2x}{3} + \dfrac{x^2}{3})$; ahora calculamos una solución particular

$Y_p(x)$ de la ecuación $(x^2 - x)\dfrac{d^2y}{dx^2} + 3\dfrac{dy}{dx} - 2y = x + \dfrac{3}{x^2}$

La solución particular $Y_p(x)$ se puede calcular por cualquiera de los métodos anteriores, variación de parámetros ó reducción de orden, en particular lo calcularemos por series, para esto aplicaremos el método de superposición.

Sea $Yp_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$ una solución de la ecuación diferencial

$(x^2 - x)\dfrac{d^2y}{dx^2} + 3\dfrac{dy}{dx} - 2y = x$ calculando sus derivadas se tiene:

$\dfrac{dYp_1(x)}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)c_n x^{n+r-1}$ y $\dfrac{d^2Yp_1(x)}{dx^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-2}$

reemplazando en la ecuación diferencial (Ver la parte de la primera solución)

$$-r(r-4)c_0 x^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+r)(n+r-4)c_n - (n+r)(n+r-3)c_{n-1}]x^{n+r-1} = x$$

La igualdad se cumple sí y sólo sí. r - 1 = 1 y n + r - 1 = 1, de donde r = 2, n = 0

se observa que n no admite más valores entonces:

$-r(r-4)c_0 = 1 \Rightarrow 4c_0 = 1 \Rightarrow c_0 = \dfrac{1}{4}$ como $Y_{p_1}(x) = c_0 x^r = \dfrac{x^2}{4}$

en la misma forma calculamos $Y_{p_2}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$

la solución $(x^2 - x)\dfrac{d^2y}{dx^2} + 3\dfrac{dy}{dx} - 2y = \dfrac{3}{x^2}$; haciendo todos los cálculos anterior se tiene:

$$-r(r-4)c_0x^{r-1}+\sum_{n=1}^{\infty}[(n+r)(n+r-4)c_n-(n+r)(n+r-3)c_{n-1}]x^{n+r-1}=3x^{-2}$$

la igualdad se cumple sí y sólo sí r - 1 = -2 y n + r - 1 = -2 de donde r = -1 y n = 0

además $-r(r-4)c_0=3$ para r = -1 ⇒ -5 c_0 = 3 ⇒ $c_0=-\frac{3}{5}$

$$Yp_2(x)=c_0x^r=-\frac{3x^{-1}}{5}$$

La solución particular es $Y_p(x)=\frac{x^2}{4}-\frac{3x^{-1}}{5}$

La solución general es $Y(x)=Y_g(x)+Y_p(x)$

$$Y(x)=\frac{c_1x^4}{(1-x)^2}+c_2(1+\frac{2x}{3}+\frac{x^2}{3})+\frac{x^2}{4}-\frac{3x^{-1}}{5}$$

9.3. DOS ECUACIONES DIFERENCIALES ESPECIALES.-

9.3.1 ECUACIÓN DE BESSEL Y FUNCIÓN DE BESSEL DEL PRIMER TIPO.-

La ecuación diferencial $\boxed{x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-p^2)y=0}$ se llama ecuación de Bessel de orden P con P ≥ 0, la ecuación de Bessel es una ecuación diferencial de segundo orden.

La ecuación de Bessel surgió en el estudio de la radiación de energía y aparecen frecuentemente en estudios avanzados de matemática aplicada, física e ingeniería y particularmente en aquellos en que el modelo matemático se expresa naturalmente en coordenadas cilíndricas; ahora buscaremos las soluciones en serie de potencias alrededor del punto $x_0=0$ el cual es un punto singular regular; sea $Yp_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+r}$ la primera solución. calculando las derivadas se tiene:

$$\frac{dy_1}{dx}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r-1} \quad y \quad \frac{d^2y_1}{dx^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-2}$$

ahora reemplazamos en la ecuación diferencial dada.

$$x^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-2}+x\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r-1}+(x^2-p^2)\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+r}=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+r+2}-\sum_{n=0}^{\infty}p^2c_n x^{n+r}=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}((n+r)^2-p^2)c_n x^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+r+2}=0$$

poniendo las x en una misma potencia. $\sum_{n=0}^{\infty}[(n+r)^2-p^2]c_n x^{n+r}+\sum_{n=2}^{\infty}c_{n-2}x^{n+r}=0$,

poniendo los inicios iguales.

$$(r^2-p^2)c_0x^r+((1+r)^2-p^2)c_1x^{r+1}+\sum_{n=2}^{\infty}[(n+r)^2-p^2]c_n x^{n+r}+\sum_{n=2}^{\infty}c_{n-2}x^{n+r}=0$$

$$(r^2-p^2)c_0x^r+[(1+r)^2-p^2]c_1x^{r+1}+\sum_{n=2}^{\infty}[((n+r)^2-p^2)c_n+c_{n-2}]x^{n+r}=0$$

aplicando el método de los coeficientes indeterminados

$$\begin{cases}(r^2-p^2)c_0=0\\ ((1+r)^2-p^2)c_1=0\\ [(n+r)^2-p^2]c_n+c_{n-2}=0\end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} r_1=p,\ r_2=-p\\ (r^2+2r+1-p^2)c_1=0\end{array}$$

de donde: $\quad c_n=-\dfrac{c_{n-2}}{(n+r)^2-p^2}, \quad \forall\ n\geq 2$

para $\quad r_1=p \Rightarrow (p^2+2p+1-p^2)c_1=0 \Rightarrow (2p+1)c_1=0 \Rightarrow c_1=0$

como $\qquad c_n = -\dfrac{c_{n-2}}{n(2p+n)} \qquad \forall\ n \geq 2$

para $\quad n = 2, \quad c_2 = -\dfrac{c_0}{2(2p+2)}$

$n = 3, \quad c_3 = -\dfrac{c_1}{3(2p+3)} = 0$

$n = 4, \quad c_4 = -\dfrac{c_2}{4(2p+4)} = \dfrac{c_0}{2.4(2p+2)(2p+4)}$

$n = 5, \quad c_5 = -\dfrac{c_3}{5(2p+5)} = 0$

$n = 6, \quad c_6 = -\dfrac{c_4}{6(2p+6)} = -\dfrac{c_0}{2.4.6(2p+2)(2p+4)(2p+6)}$

$n = 7, \quad c_7 = -\dfrac{c_5}{7(2p+7)} = 0$

$n = 8, \quad c_8 = -\dfrac{c_6}{8(2p+8)} = \dfrac{c_0}{2.4.6.8(2p+2)(2p+4)(2p+6)(2p+8)}$

$n = 9, \quad c_9 = -\dfrac{c_7}{9(2p+9)} = 0$

Luego la solución $Y_1(x)$ queda expresado así:

$$Y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n c_0 x^{2n+p}}{2^{2n}.n!(p+1)(p+2)(p+3)...(p+n)}$$

donde c_0 es una constante arbitraria. En particular tomamos $c_0 = \dfrac{1}{2^{\Gamma}\,\Gamma(\rho+1)}$, la solución anterior se transforma en la siguiente solución particular.

$$Y_1(x)=\sum \frac{(-1)^n}{2^{2n+p}.n!(p+1)(p+2)(p+3)...(p+n)\Gamma(p+1)}x^{2n+p}$$

En forma simplificada queda en la forma: $Y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1).\Gamma(n+p+1)}(\frac{x}{2})^{2n+p}$

La cual se denomina "Función de Bessel de orden P de primer tipo, y denotaremos por $J_p(x)$, es decir: $J_p(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1).\Gamma(n+p+1)}(\frac{x}{2})^{2n+p}$

Observación: Como casos particulares

1. Si $r = p = 0$ se tiene $J_0(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}(\frac{x}{2})^{2n}$

2. Si $r = m$ = entero no negativo, nos queda: $J_m(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!...(n+m)!}(\frac{x}{2})^{2n+m}$

ahora calculamos la segunda solución $Y_2(x)$, en este caso debemos tener cuidado en la solución $Y_2(x)$, para dar la solución general de la ecuación de BESSEL.

1° caso. Si $r_1-r_2=2p\neq$ de un entero y $P>0$ entonces estamos en la parte a) del teorema anterior por lo tanto una segunda solución se obtiene sustituyendo P por -P es decir: $J_{-p}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1).\Gamma(n-p+1)}(\frac{x}{2})^{2n-p}$

Luego la solución general de la ecuación de BESSEL de orden P es:

$Y(x)=c_1J_p(x)+c_2J_{-p}(x)$

2° caso. Si $r_1=r_2=p=0$ se observa que $J_p(x)$ y $J_{-p}(x)$ son iguales.

3° caso. Cuando $r_1-r_2=2p$ es un entero y P es un entero. La segunda solución es $J_2(x)=J_{-p}(x)$, donde $Y_p(x)=\dfrac{\cos P\pi J_p(x)-J_{-p}(x)}{\operatorname{sen} P\pi}$, y la solución general es: $Y=c_1J_p(x)+c_2J_p(x)$

Nota: A la función $Y_p(x)=\dfrac{\cos P\pi J_p(x)-J_{-p}(x)}{\operatorname{sen} P\pi}$ se denomina funciones de Bessel de segundo tipo.

Ejemplo: Hallar la solución general de la ecuación

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-\frac{1}{4})y=0 \text{ en } 0<x<\infty.$$

Solución

Identificamos que $P^2=\dfrac{1}{4} \Rightarrow P=\dfrac{1}{2},\ P=-\dfrac{1}{2}$

Luego la solución general de la ecuación diferencial es: $Y(x)=c_1J_{\frac{1}{2}}(x)+c_2J_{-\frac{1}{2}}(x)$

Ejemplo: Hallar la solución general de la ecuación $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+x\dfrac{dy}{dx}+(x^2-9)y=0$

Solución

identificamos que $P^2=9$ de donde P = 3; la solución general es:

$Y(x)=c_1J_3(x)+c_2Y_3(x)$

Ejemplo: Resolver la ecuación diferencial $4x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+4x\dfrac{dy}{dx}+(x-4)y=0$

Solución

Lo transformamos a una ecuación de Bessel mediante la sustitución $u=\sqrt{x} \Rightarrow x=u^2$ mediante la regla de la cadena se tiene:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}.(\frac{du}{dx})=\frac{1}{2u}.(\frac{dy}{dy}) \quad , \quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx})=\frac{d}{du}(\frac{dy}{dx}).\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{du}(\frac{1}{2u}(\frac{dy}{du})).\frac{1}{2u}=(-\frac{1}{2u^2}(\frac{dy}{du})+\frac{1}{2u}(\frac{d^2y}{du}))\frac{1}{2u}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{4u^3}.\frac{dy}{du}+\frac{1}{4u^2}\frac{d^2y}{du^2}$$

ahora reemplazamos en la ecuación diferencial

$$4u^4\left(\frac{1}{4u^2}\left(\frac{d^2y}{du^2}\right)-\frac{1}{4u^3}\left(\frac{dy}{du}\right)\right)+4u^2.\frac{1}{2u}\left(\frac{dy}{du}\right)+(u^2-4)y=0$$

$$u^2\frac{d^2y}{du^2}-u\frac{dy}{du}+2u\frac{dy}{du}+(u^2-4)y=0$$

$u^2\dfrac{d^2y}{du^2}+u\dfrac{dy}{du}+(u^2-4)y=0$ es la ecuación de Bessel de orden 2.

Ahora identificando $P^2=4$ de donde P = 2

Luego la solución general de la ecuación es: $Y(u)=c_1J_2(u)+c_2J_2(u)$

$$\therefore \qquad Y(x)=c_1J_2(\sqrt{x})+c_2J_2(\sqrt{x})$$

9.3.2 ECUACIÓN PARAMÉTRICA DE BESSEL.-

La ecuación diferencial de la forma: $\boxed{x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+x\dfrac{dy}{dx}+(\lambda^2x^2-p^2)y=0}$

se denomina "Ecuación paramétrica de Bessel" y la solución general es dado por:

$$Y(x)=c_1J_p(\lambda x)+c_2y_p(\lambda x)$$

Ejemplo: Resolver la ecuación diferencial. $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+x\dfrac{dy}{dx}+(9x^2-4)y=0$

Solución

Identificamos que $\lambda^2=9$ y $P^2=4$ de donde λ = 3, P = 2.

Luego la solución general es: $Y(x)=c_1J_2(3x)+c_2Y_2(3x)$

Ejemplo: Resolver la ecuación diferencial $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+x\dfrac{dy}{dx}+(4x^2-\dfrac{1}{9})y=0$

Solución

Identificamos que $\lambda^2 = 4$ y $P^2 = \frac{1}{9}$ de donde $\lambda = 2$, $P = \frac{1}{3}$.

Luego la solución general es: $Y(x) = c_1 J_{\frac{1}{3}}(2x) + c_2 Y_{\frac{1}{3}}(2x)$

9.3.3 ECUACIÓN DE LEGENDRE.-

A la ecuación diferencial de la forma: $\boxed{(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0}$

se denomina Ecuación de Legendre de orden n.

9.3.3.1 SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE LEGENDRE.-

Como $x_0 = 0$, es un punto ordinario de la ecuación de Legendre

$$\boxed{(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0}$$

entonces admite una solución en serie de potencia $Y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$, de donde sus derivadas son $\frac{dy}{dx} = \sum_{k=1}^{\infty} kc_k x^{k-1}$ y $\frac{d^2y}{dx^2} = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2}$,

ahora reemplazamos en la ecuación diferencial

$$(1-x^2)\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2} - 2x\sum_{k=1}^{\infty} kc_k x^{k-1} + n(n+1)\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2} - \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^k - \sum_{k=1}^{\infty} 2kc_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} n(n+1)c_k x^k = 0$$

poniendo las x en un mismo exponente.

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k-1)c_{k+2} x^k - \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^k - \sum_{k=1}^{\infty} 2kc_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} n(n+1)c_k x^k = 0$$

poniendo los inicios iguales se tiene.

$$\sum_{k=0}^{\infty}[(k+1)(k+2)c_{k+2}+n(n+1)c_k]x^k-\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)c_kx^k-\sum_{k=1}^{\infty}2kc_kx^k=0$$

$$2c_2+n(n+1)c_0+(6c_3+n(n+1)c_1)x-2c_1x+$$

$$+\sum_{k=2}^{\infty}[(k+1)(k+2)c_{k+2}+n(n+1)c_k]x^k-\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)c_kx^k-\sum_{k=2}^{\infty}2kc_kx^k=0$$

$$2c_2+n(n+1)c_0+(6c_3+[n(n+1)-2]c_1)x+$$

$$+\sum_{k=2}^{\infty}((k+1)(k+2)c_{k+2}+[n(n+1)-k(k+1)]c_k)x^k=0$$

ahora aplicamos el método de los coeficientes indeterminados.

$$\begin{cases} 2c_2+n(n+1)c_0=0 \\ 6c_3+(n(n+1)-2)c_1=0 \\ (k+1)(k+2)c_{k+2}+(n(n+1)-k(k+1)c_k=0 \end{cases}$$

de donde se tiene que: $c_2=-\dfrac{n(n+1)}{2}c_0=-\dfrac{n(n+1)}{2!}c_0$,

$$c_3=-\frac{n(n+1)-2}{6}c_1=-\frac{(n+2)(n-1)}{3!}c_1$$

$$c_{k+2}=-\frac{n(n+1)-k(k+1)}{(k+1)(k+2)}c_k=-\frac{(n-k)(n+k+1)}{(k+1)(k+2)}c_k$$

$$c_{k+2}=-\frac{(n-k)(n+k+1)}{(k+1)(k+2)}c_k \qquad \forall\ k\geq 2$$

es la fórmula de recurrencia.

Para $k=2$, $c_4=-\dfrac{(n-2)(n+3)}{3.4}c_2=\dfrac{(n-2)(n+1)n(n+3)}{4!}c_0$

$$k = 3, \quad c_5 = -\frac{(n-3)(n+4)}{4.5}c_3 = \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}c_1$$

$$k = 4, \quad c_6 = -\frac{(n-4)(n+5)}{5.6}c_4 = -\frac{(n-4)(n-2)n(n+3)(n+5)}{6!}c_0$$

$$k = 5, \quad c_7 = -\frac{(n-5)(n+6)}{6.7}c_5 = -\frac{(n-5)(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)(n+6)}{7!}c_1$$

etc., así, por lo menos para | x | < 1 se obtiene dos soluciones en series de potencia linealmente independiente.

$$Y_1(x) = c_0 - \frac{n(n+1)}{2!}x^2 c_0 + \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}x^4 c_0 - \frac{(n-4)(n-2)n(n+3)(n+5)}{6!}x^6 c_0 + \ldots$$

$$Y_2(x) = c_1 x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3 c_1 + \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}x^5 c_1$$

$$-\frac{(n-5)(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)(n+6)}{7!}x^7 c_1 + \ldots$$

$$Y_1(x) = c_0[1 - \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}x^4 - \frac{(n-4)(n-2)n(n+3)(n+5)}{6!}x^6 + \ldots]$$

$$Y_2(x) = c_1[x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3 + \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}x^5 -$$

$$-\frac{(n-5)(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)(n+6)}{7!}x^7 + \ldots]$$

Luego la solución general de la ecuación de Legendre es: $Y(x) = a_1 Y_1(x) + a_2 Y_2(x)$

observemos que si n es un entero par, la primera serie termina, y la segunda $Y_2(x)$ es una serie infinita en forma similar cuando n es un entero impar la serie $Y_2(x)$ termina con x^n, es decir, que se obtiene una solución polinomial de grado n de la ecuación de Legendre.

En la solución de la ecuación de Legendre se acostumbra a elegir valores específicos para c_0 y c_1 dependiendo si n es entero positivo par ó impar respectivamente, para n = 0, elegimos $c_0 = 1$, y para n = 2, 4, 6, ..., $c_0 = (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{1.3...(n-1)}{2.4.6...n}$, en tanto que para n = 1 elegimos $c_1 = 1$, y para n = 3,5,7,..., $c_1 = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1.3...n}{2.4.6...(n-1)}$ por ejemplo para n = 4 se tiene.

$$Y_1(x) = (-1)^{\frac{4}{2}} \frac{1.3}{2.4}(1-10x^2+\frac{35}{3}x^4) = \frac{3}{8}-\frac{30}{8}x^2+\frac{35}{8}x^4 = \frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$$

9.3.3.2 POLINOMIOS DE LEGENDRE.-

A las soluciones polinomiales especificas de grado n de la ecuación de Legendre se denominan "Polinomios de Legendre" y denotaremos $P_n(x)$ con las series obtenidas para $Y_1(x)$, $Y_2(x)$ y los valores dadas para c_0 y c_1, encontramos que, los primeros polinomios de Legendre son:

$$P_0(x) = 1 \quad , \quad P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1) \quad , \quad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^2-3x)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3) \quad , \quad P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x)$$

Observemos que $P_0(x), P_1(x), P_2(x), P_3(x),...$ son a su vez soluciones particulares de las ecuaciones diferenciales.

n = 0, $\quad (1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} = 0$

n = 1, $\quad (1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2y = 0$

$$n = 2, \quad (1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 6y = 0$$

$$n = 3, \quad (1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 12y = 0$$

El polinomio general de Legendre se expresa en forma general por:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k(2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k}$$

donde $[\frac{n}{2}]$ es el mayor entero menor ó igual a $\frac{n}{2}$

EJERCICIOS PROPUESTOS.-

I. Resuelva cada ecuación diferencial mediante series de potencias de la forma $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$.

1. $\frac{dy}{dx} - x^2 y = 0$
2. $(1-x)\frac{dy}{dx} - y = 0$
3. $(1+x)\frac{dy}{dx} - 2y = 0$
4. $(2x-1)\frac{dy}{dx} + 2y = 0$
5. $\frac{dy}{dx} + x^3 y = 0$
6. $(1+x)\frac{dy}{dx} - ny = 0$
7. $(x-2)\frac{dy}{dx} + y = 0$
8. $2(x-1)\frac{dy}{dx} = 3y$
9. $x\frac{dy}{dx} + y = 0$
10. $x^3\frac{dy}{dx} = 2y$

II. Resolver cada ecuación diferencial por medio de las series de potencias.

1. $(2x-1)\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} = 0$
2. $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2y = 0$

3) $\frac{d^2y}{dx^2}-y=0$

4) $2\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}=0$

5) $\frac{d^2y}{dx^2}-(x+1)y=0$

6) $(1+x^2)\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}-y=0$

3) $\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+y=0$

8) $\frac{d^2y}{dx^2}+xy=0$

9) $\frac{d^2y}{dx^2}+x^2\frac{dy}{dx}+2xy=0$

10) $\frac{d^2y}{dx^2}-x^2\frac{dy}{dx}-3xy=0$

III. Encuentre en cada ecuación diferencial dos soluciones en series de potencias entorno al punto ordinario x = 0 que sean linealmente independiente.

1) $(x^2-1)y''+4xy'+2y=0$

2) $(x^2-3)y''+2xy'=0$

3) $(x^2+1)y''+6xy'+4y=0$

4) $(x^2-1)y''+8xy'+12y=0$

5) $(x^2-1)y''-6xy'+12y=0$

6) $(x^2+3)y''-7xy'+16y=0$

7) $(2-x^2)y''-xy'+16y=0$

8) $y''-x^2y'-3xy=0$

9) $y''+xy'+2y=0$

10) $(x^2-4)y''+3xy'+y=0$

11) $y''+2xy'+4y=0$

12) $(x^2+2)y''+4xy'+2y=0$

13) $y''+xy'+y=0$

14) $3y''+xy'-4y=0$

15) $5y''-2xy'+10y=0$

16) $y''=xy$

17) $y''-xy'+2y=0$

18) $y''+x^2y'+xy=0$

19) $(x^2+2)y''+3xy'-y=0$

20) $(x^2-1)y''+xy'-y=0$

21) $(x^2+1)y''-6y=0$

22) $y''-(x+1)y'-y=0$

23) $y''-xy'-(x+2)y=0$

24) $(x+2)y''+xy'-y=0$

25) $y''+(1+x+x^2)y=0$

26) $(1-x)y''+(2+x)y'-2y=0$

27) $(1+x)y''+2y'-y=0$

28) $(1-x^2)y''-2xy'+2y=0$

29) $xy''+y'+xy=0$

30) $(1+x^2)y''+xy'-y=0$

31) $(2x^2-3x+1)y''+2xy'-2y=0$

32) $y''-(1+x)y=0$

33) $(x^2+1)^2y''-4x(x^2+1)y'+(6x^2-2)y=0$

34) $(2x-1)y''-3xy'=0$

35) $y''+2xy'+2y=0$

36) $(x-1)y''+y'=0$

IV. Mediante series de potencias resuelva los problemas con condiciones iniciales.

1) $(1+x^2)y''+2xy'-2y=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$

2) $(x+1)y''-(2-x)y'+y=0$, $y(0)=2$, $y'(0)=-1$

3) $y''+4y=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=3$

4) $y''-2y'+y=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$

5) $y''+y'-2y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=-2$

6) $y''+xy'-2y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$

7) $(x^2+6x)y''+(3x+2)y'-3y=0$, $y(-3)=0$, $y'(-3)=2$

8) $y''+(x-1)y'+y=0$, $y(1)=2$, $y'(1)=0$

9) $y''-2xy'+8y=0$, $y(0)=3$, $y'(0)=0$

10) $(x^2+1)y''+2xy'=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$

11) $(2x-x^2)y''-6(x-1)y'-4y=0$, $y(1)=0$, $y'(1)=1$

(12) $(x^2-6x+10)y''-6(x-1)y'-4y=0$, $y(1)=0$, $y'(1)=1$

(13) $y''-xy'+y-1=0$, $y(0)=y'(0)=0$

(14) $(4x^2+16x+17)y''=8y$, $y(-2)=1$, $y'(-2)=0$

V. Resuelva las siguientes ecuaciones mediante series de potencias.

(1) $y''+(\operatorname{sen} x)y=0$

(2) $y''+e^{-x}y=0$

(3) $\cos x.y''+y=0$

(4) $y''+e^{x}y'-y=0$

(5) $y''-xy=1$

(6) $xy''+(\operatorname{sen} x)y=0$

(7) $xy''+\operatorname{sen} x.y'+xy=0$

(8) $y''-4xy'-4y=e^{x}$

VI. Resuelva las siguientes ecuaciones aplicando el método de FROBENIUS.

(1) $2xy''+(1-2x^2)y'-4xy=0$

(2) $xy''+2y'+9xy=0$

(3) $xy''-y'+4x^2y=0$

(4) $xy''+y'+x(1+x)y=0$

(5) $xy''+\frac{1}{2}y'+\frac{1}{4}y=0$

(6) $9xy''+9y'+xy=0$

(7) $xy''+y'+4xy=0$

(8) $xy''+2y'-4xy=0$

(9) $2xy''-y'+2y=0$

(10) $3xy''+(2-x)y'-y=0$

(11) $2x(1-2x)y''+(4x^2+1)y'-(2x+1)y=0$

(12) $x^2y''+x(x-\frac{1}{2})y'+\frac{1}{2}y=0$

(13) $x^2y''+(1+3x)xy'-(1+6x)y=0$

(14) $xy''+2y'+xy=0$

(15) $2xy''+5y'+xy=0$

(16) $x^2y''+x(x-1)y'+y=0$

(17) $4xy''+8y'+xy=0$

(18) $3x^2y''+2xy'+x^2y=0$

(19) $2xy''+(x+1)y'+y=0$

(20) $2xy''+3y'-y=0$

(21) $3xy''+2y'+2y=0$

(22) $2xy''+(1-2x^2)y'-4xy=0$

(23) $2x^2y''+xy'-(1+2x^2)y=0$

(24) $2x^2y''+7x(1+x)y'-3y=0$

(25) $2x^2y''+xy'-(3-2x^2)y=0$

(26) $6x^2y''+7xy'-(x^2+2)y=0$

(27) $2x^2y''-xy'+(x^2+1)y=0$

(28) $2xy''-(3+2x)y'+y=0$

(29) $2x^2y''+(-7+2x)xy'+(7-5x)y=0$

(30) $2x^2y''+3xy'-(x^2+1)y=0$

(31) $2x^2y''+3xy'+(2x-1)y=0$

(32) $x(x-2)y''+y'-2y=0$

(33) $2x^2y''+x(x+1)y'-(2x+1)y=0$

(34) $x^2y''+3xy'+(1+x+x^3)y=0$

(35) $x^2y''+x(1+x)y'-(1-3x+6x^2)y=0$

(36) $4x^2y''-4xy'+(3-4x^2)y=0$

(37) $x^2y''+(2x+3x^2)y'-2y=0$

(38) $x^2y''-xy'+(x^2+1)y=0$

(39) $2x(1-x)y''+(1-2x)y'+(2+x)y=0$

(40) $x(x-2)^2y''-2(x-2)y'+2y=0$

(41) $2xy''+(1-x)y'-(1+x)y=0$

(42) $x^2y''+(2x^2-3x)y'+3y=0$

(43) $x^3(x-1)y''+(x-1)y'+4xy=0$

(44) $2x^3y''-x(2-5x)y'+y=0$

(45) $(2x^2+5x^3)y''+(3x-x^2)y'-(1+x)y=0$

(46) $9x(1-x)y''-12y'+4y=0$

(47) $x^2y''-2xy'+4(x^4-1)y=0$

(48) $2x^2y''-x(x-1)y'-y=0$

(49) $x^2y''+(x^2-3x)y'+4y=0$

(50) $x(1-x)y''-3y'+2y=0$

VII. Mediante series de potencias encuentre la solución general de la ecuación diferencial dada, en $0<x<\infty$ (Bessel)

1. $x^2y''+xy'+(x^2-\frac{1}{9})y=0$
2. $x^2y''+xy'+(x^2-1)y=0$
3. $x^2y''+xy'+(x^2-\frac{1}{4})y=0$
4. $x^2y''+xy'+(x^2-\frac{4}{9})y=0$
5. $xy''+y'+xy=0$
6. $\frac{d}{dx}(xy')+(x-\frac{4}{x})y=0$
7. $x^2y''+xy'+(4x^2-\frac{1}{9})y=0$
8. $x^2y''+xy'+(36x^2-\frac{1}{4})y=0$
9. $4x^2y''+4xy'+(4x^2-25)y=0$
10. $16x^2y''+16xy'+(16x^2-1)y=0$
11. $x^2y''+xy'+(9x^2-4)y=0$
12. $xy''+3y'+xy=0$
13. $xy''-y'+36x^3y=0$
14. $x^2y''-5xy'+(8+x)y=0$
15. $2x^2y''+3xy'-2(4-x^5)y=0$
16. $4x^2y''-12xy'+(15+16x)y=0$
17. $x^2y''+3xy'+(1+x^2)y=0$
18. $16x^2y''+24xy'+(1+44x^3)y=0$
19. $36x^2y''+60xy'+(9x^3-5)y=0$
20. $x^2y''+xy'+x^2y=0$

VIII.

1. Comprobar que la ecuación diferencial $xy''+(1-2n)y'+xy=0$, $x>0$, tiene la solución particular $y=x^nJ_n(x)$
2. Comprobar que la ecuación diferencial $xy''+(1+2n)y'+xy=0$, $x>0$, tiene la solución particular $y=x^{-n}J_n(x)$
3. Comprobar que la ecuación diferencial $x^2y''+(\lambda^2x^2-\nu^2+\frac{1}{4})$, $y=0$, $x>0$, tiene la solución particular $y=\sqrt{x}\,J_\nu(\lambda x)$, $\lambda>0$.

CAPÍTULO X

10. CONCEPTOS BÁSICOS DE TRANSFORMADA DE LAPLACE

10.1. INTRODUCCIÓN.-

En el cálculo elemental se estudió la derivación e integración los cuales gozan de la operación de linealidad, es decir:

$$\frac{d}{dx}[\alpha f(x)+\beta g(x)]=\alpha\frac{d}{dx}f(x)+\beta\frac{d}{dx}g(x)$$

$$\int[\alpha f(x)+\beta g(x)]dx=\alpha\int f(x)dx+\beta\int g(x)dx$$

donde α y β son constantes reales arbitrarias.

La integral definida de una suma también goza de la operación de linealidad, es decir:

$$\int_a^b[\alpha f(x)+\beta g(x)]dx=\alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx$$

La operación de linealidad de la derivación e integración transforman esencialmente una función en otra expresión por ejemplo:

$$\frac{d}{dx}x^3=3x^2\quad,\quad\int x^3dx=\frac{x^4}{4}+c\quad,\quad\int_0^2 x^3dx=4\,.$$

nosotros estamos interesados en una integral impropia que transforma una función F(t) en otra función de parámetro s, al cual se le llamará Transformada de Laplace, es decir, que la transformada de Laplace es una operación que transforma una función F(t) en otra función de parámetro s.

10.2. DEFINICIÓN.- Sea F: $[0,\infty> \to R$, una función definida para $t \geq 0$, entonces a la función f definida por:

$$\boxed{f(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} F(t)dt = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b e^{-st} F(t)dt}$$

Se llama transformada de Laplace de F, siempre que el límite exista.

Simbólicamente a la transformada de Laplace de F se denota por: $L\{F(t)\}$, es decir:

$$\boxed{L\{F(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} F(t)dt = f(s)}$$

Ejemplo.- Calcular $L\{F(t)\}$, donde F(t) = t

Solución

$$L\{F(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} F(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-st} t\ dt = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b e^{-st} t\ dt = \lim_{b \to +\infty} (-\frac{te^{-st}}{s} - \frac{e^{-st}}{s^2}) \Big/_0^b$$

$$= \lim_{b \to +\infty} [(-\frac{be^{-sb}}{s} - \frac{e^{-sb}}{s^2}) - (0 - \frac{1}{s^2})] = 0 - 0 + \frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^2}$$

$$\therefore L\{t\} = \frac{1}{s^2}, \quad \text{para } s > 0.$$

Observación.- El uso del símbolo de $\lim_{b \to +\infty} F(t) \Big/_0^b$ vamos a reemplazar por la notación $F(x) \Big/_0^{+\infty}$, es decir:

$$L\{t\} = \int_0^{+\infty} te^{-st} dt = (-\frac{t\,e^{-st}}{s} - \frac{e^{-st}}{s^2}) \Big/_0^{+\infty} = \frac{1}{s^2}, \; s > 0$$

Entendiéndose que en el límite superior, cuando $t \to +\infty$, $e^{-st} \to 0$, para $s > 0$.

10.3. CONDICIONES SUFICIENTES PARA LA EXISTENCIA DE L{F(t)}.-

La integral impropia que define la Transformada de Laplace no necesariamente converge, por ejemplo; ni $L\{\frac{1}{t}\}$ ni $L\{e^{t^2}\}$ existen.

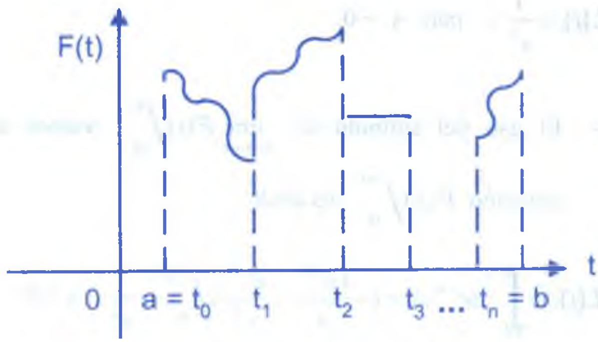
Las condiciones suficientes que garantizan la existencia de $L\{F(t)\}$ son que F(t) sea continua por tramos o seccionalmente continua para $t \geq 0$ y además que sea de orden exponencial para $t > T$.

10.4. FUNCIONES CONTINUAS POR TRAMOS O SECCIONALMENTE CONTINUAS.-

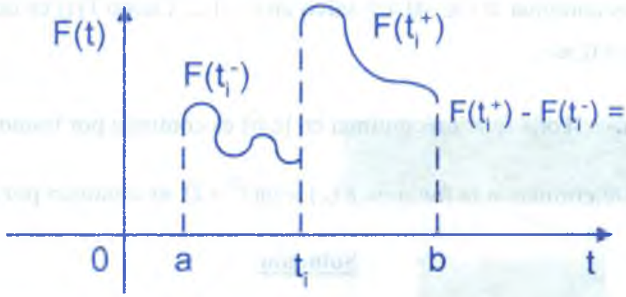
Definición.- La función F: [a,b] → R, es continua por tramos o seccionalmente continua en [a,b] sí :

i. Existen puntos en [a,b] tal que: $a = t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_n = b$, donde F es continua en cada subintervalo $t_i \leq t \leq t_{i+1}$ para i = 0,1,2,..., n, salvo en dichos puntos.

ii. En cada punto $t_i \in [a,b]$ existen los límites $F(t_i^+) = \lim_{h \to 0} F(t_i + h)$, $F(t_i^-) = \lim_{h \to 0^-} F(t_i - h)$.

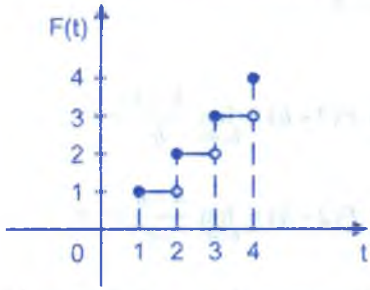


Observación.- Consideremos una función F: [a,b] → R seccionalmente continua.



A la diferencia $F(t_i^+) - F(t_i^-) = \lambda$ se llama magnitud del salto de la función en el punto t_i.

Ejemplo.- La función $F(t) = [\![t]\!]$ es continua por tramos en $[0,4]$.



Sí $t \in [0,1> \Rightarrow F(t) = 0$

$t \in [1,2> \Rightarrow F(t) = 1$

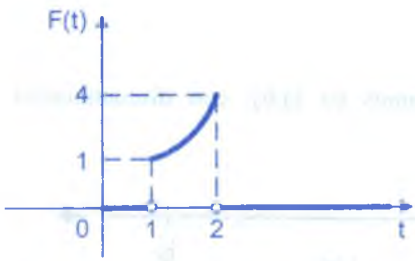
$t \in [2,3> \Rightarrow F(t) = 2$

$t \in [3,4> \Rightarrow F(t) = 3$

para $t = 4 \Rightarrow F(t) = 4$

Ejemplo.- La función $F(t) = \begin{cases} 0 & si \quad 0 < t < 1 \\ t^2 & si \quad 1 < t < 2 \\ 0 & si \quad t > 2 \end{cases}$, ¿Es F continua por tramos?

Solución



$$F(1^-) = \lim_{h \to 0^-} F(1-h) = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

$$F(1^+) = \lim_{h \to 0^-} F(1+h) = \lim_{h \to 0^-} (1+h)^2 = 1$$

$$F(2^-) = \lim_{h \to 0^-} F(2-h) = \lim_{h \to 0^-} (2-h)^2 = 4$$

$$F(2^+) = \lim_{h \to 0^-} F(2+h) = \lim_{h \to 0^-} 0 = 0$$

además F(t) es continua ∀ t ∈ <0,∞> salvo en t = 1,2. Luego F(t) es una función continua por tramos en <0,∞>.

Observación.- Toda función continua en [a,b] es continua por tramos en [a,b].

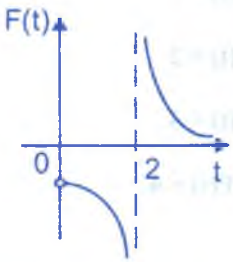
Ejemplo.- Determinar si la función $F(t) = \ln(t^2+1)$ es continua por tramos en [0,∞>.

Solución

La función $F(t) = \ln(t^2+1)$ es continua ∀ t ∈ R, en particular es continua, ∀ t ≥ 0 entonces $F(t) = \ln(t^2+1)$, es continua por tramos en [0,+∞>.

Ejemplo.- Determinar si la función $F(t) = \dfrac{t+2}{t-2}$ es continua por tramos.

Solución



$$F(2^+) = \lim_{h\to 0^+} F(2+h) = \lim_{h\to 0^+} \frac{h+4}{h} = +\infty$$

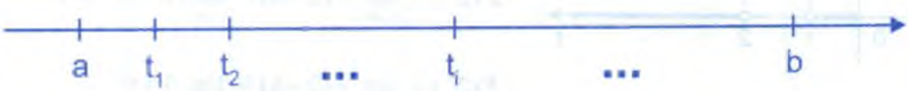
$$F(2^-) = \lim_{h\to 0} F(2-h) = \lim_{h\to 0} \frac{4-h}{-h} = -\infty$$

como ∄ los límites, por lo tanto la función F(t) no es continua por tramos.

Observación.-

1. Si F es una función continua por tramos en [a,b], entonces dicha función es integrable en [a,b] es decir: $\exists \int_a^b F(t)\,dt$

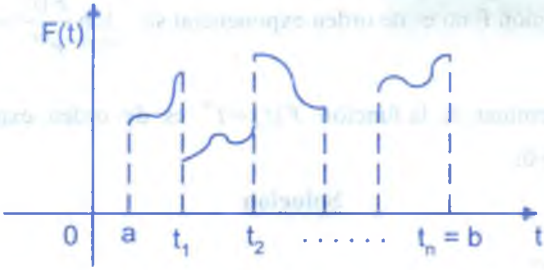
   En efecto: como F es continua por tramos en [a,b], con discontinuidad en $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n$ y posiblemente en a,b.



Entonces a la integral $\int_a^b F(t)\,dt$, se define como:

$$\int_a^b F(t)\,dt = \lim_{h\to 0}\Big[\int_{a+h}^{t_1-h} F(t)\,dt + \int_{t_1+h}^{t_2-h} F(t)\,dt + ... + \int_{t_n+h}^{b-h} F(t)\,dt\Big]$$

como este límite siempre existe, entonces $\exists \int_a^b F(t)\,dt$



(2) Si F y G son dos funciones continuas por tramos en [a,b], entonces el producto también es continua por tramos en [a,b]. (Probar: queda como ejercicio).

10.5. FUNCIONES DE ORDEN EXPONENCIAL.-

Definición.- La función F: [0,+∞> → R, es de orden exponencial si existen constantes c > 0 y α tal que $|F(t)| \le c\,e^{\alpha t}$, ∀ t ≥ 0.

Ejemplo.- Toda función constante es de orden exponencial. En efecto: Sea F una función constante ∃ c > 0 tal que | F(t) | ≤ c, ∀ t ≥ 0 entonces $|F(t)| \le c\,e^{0t}$.

Es decir que F es de orden exponencial haciendo α = 0.

Ejemplo.- Determinar si la función $F(t) = e^{at}\cos bt$, es de orden exponencial.

Solución

Como |cos bt| ≤ 1, ∀ t ≥ 0 entonces $e^{at}|\cos bt| \le e^{at}$, ∀ t ≥ 0 de donde:

$$|e^{at}\cos bt| \le e^{at} \;\Rightarrow\; |F(t)| \le e^{at}.$$

Luego $F(t) = e^{at}\cos bt$ es de orden exponencial tomando c = 1 y α = a.

Propiedades.-

1. Sí F: [0,+∞> → R es una función seccionalmente continua en [0,+∞>, entonces:

   i) La función F es de orden exponencial siempre que existe α ∈ R tal que $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{F(t)}{e^{\alpha t}}=0$.

   ii) La función F no es de orden exponencial sí: $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{F(t)}{e^{\alpha t}}=\infty$.

Ejemplo.- Determinar si la función $F(t)=t^n$ es de orden exponencial para $n\in Z^+$, ∀ t ≥ 0.

Solución

$\lim\limits_{t\to\infty}\frac{F(t)}{e^{\alpha t}}=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{t^n}{e^{\alpha t}}$, aplicando la regla de L'Hospital

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{t^n}{e^{\alpha t}}=\frac{n(n-1)(n-2)...2.1}{\alpha^n}\lim_{t\to\infty}\frac{1}{e^{\alpha t}}=\frac{n!}{\alpha^n}\lim_{t\to\infty}\frac{1}{e^{\alpha t}}=\frac{n!}{\alpha^n}(0)=0,\ \forall\alpha>0$$

por lo tanto $F(t)=t^n$ es de orden exponencial $\forall t\geq 0$

Ejemplo.- Determinar si la función $F(t)=e^{t^2}$ es de orden exponencial.

Solución

$\lim\limits_{t\to\infty}\frac{F(t)}{e^{\alpha t}}=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{e^{t2}}{e^{\alpha t}}=\lim\limits_{t\to\infty}e^{t^2-\alpha t}=+\infty$, Luego la función F(t) no es de orden exponencial

2. Si $F,G:[0,\infty>\to R$, son dos funciones de orden exponencial, entonces el producto de F y G son de orden exponencial. En efecto:

   Como F y G son de orden exponencial ⇒ existen $\alpha_1,\alpha_2,y\ c_1,c_2>0$, tal que:

   $|F(t)|\leq c_1e^{\alpha_1 t}$ y $|G(t)|\leq c_2e^{\alpha_2 t}$, ∀ t ≥ 0 ⇒ $|F(t).G(t)|=|F(t)||G(t)|\leq c_1e^{\alpha_1 t}.c_2e^{\alpha_2 t}$

$= c_1.c_2 e^{(\alpha_2+\alpha_2)t}\ \forall t \geq 0$, entonces $|F(t).G(t)| \leq e^{\alpha t}$, entonces F(t) . G(t) es de orden exponencial.

(3) Si $F,G:[0,\infty> \to R$ son dos funciones de orden exponencial , entonces la suma de F y G es de orden exponencial.

(Queda como ejercicio para el lector).

Ejemplo.- Demostrar que la función $f(t) = t^n \operatorname{sen} kt$ es continua por tramos y de orden exponencial en $[0,+\infty>$.

Solución

Sea $f(t) = f_1(t).f_2(t) = t^n \operatorname{sen} kt$, donde $f_1(t) = t^n$, $f_2(t) = \operatorname{sen} kt$, la función $f_1(t) = t^n$ es continua ∀ t ∈ R, en particular $f_1(t) = t^n$ es continua en [0, +∞> por lo tanto $f_1(t) = t^n$ es continua por tramos (por la propiedad que toda función continua en [a,b] es continua por tramos en [a,b]).

La función $f_2(t) = \operatorname{sen} kt$, es continua ∀ t ∈ R, en particular es continua en [0, +∞>, por lo tanto $f_2(t) = \operatorname{sen} kt$ es continua por tramos.

Entonces como $f_1(t) = t^n$ y $f_2(t) = \operatorname{sen} kt$ son continuas por tramos entonces $f(t) = t^n \operatorname{sen} kt$ es continua por tramos ahora demostraremos que $f_1(t) = t^n$ es de orden exponencial; para esto demostraremos que: $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{f_1(t)}{e^{\alpha t}} = 0$, es decir: $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{t^n}{e^{\alpha t}} = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{n!}{\alpha^n e^{\alpha t}} = 0$, entonces $f_1(t) = t^n$ es de orden exponencial.

Ahora demostraremos que $f_2(t) = \operatorname{sen} kt$ es de orden exponencial, para esto existen c y α, tal que $|f_2(t)| \leq ce^{\alpha t}$, pero $|\operatorname{sen} kt| \leq 1$ de donde $|f_2(t)| \leq 1 = 1e^{0t}$ tomando $c = 1$, $\alpha = 0$ se tiene que $f_2(t) = \operatorname{sen} kt$ es de orden exponencial por lo tanto como $f_1(t) = t^n$ y $f_2(t) = \operatorname{sen} kt$ son de orden exponencial, entonces: $f(t) = t^n . \operatorname{sen} kt$ es de orden exponencial.

10.6. TEOREMA.- Sí la función F: [0,+∞> → R, es seccionalmente continua y de orden exponencial α entonces ∃ f(s) = L{f(t)}, ∀ s > a.

Demostración

Por hipótesis se tiene que F(t) es de orden exponencial α ⇒ ∃ M > 0, tal que $|F(t)| \le Me^{\alpha t}, \forall t \ge 0$. Además por propiedad $\left|\int_a^b F(t)dt\right| \le \int_a^b |F(t)|dt$ y

$$L\{F(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} F(t)dt = \lim_{a \to \infty} \int_0^a e^{-st} F(t)dt .$$

Luego $|e^{-st} F(t)| = e^{-st}|F(t)| \le M\, e^{-st}.e^{\alpha t}$, ∀ t ≥ 0 puesto que $|F(t)| \le M\, e^{\alpha t}$, ∀ t ≥ 0

Es decir: $|e^{-st} F(t)| \le Me^{-(s-\alpha)t}$, ∀ t ≥0, a esta desigualdad integramos de 0 hasta a.

$$\int_0^a |e^{-st} F(t)|\, dt \le \int_0^a M\, e^{-(s-\alpha)t} dt = -\frac{M}{s-\alpha} e^{-(s-\alpha)t} \Big/_0^a = -\frac{M}{s-\alpha}(e^{-(s-\alpha)a} - 1)$$

Ahora tomamos límite cuando a → +∞

$$\lim_{a \to +\infty} \int_0^a |e^{-st} F(t)|\, dt \le -\frac{M}{s-\alpha} \lim_{a \to +\infty} (e^{-(s-\alpha)a} - 1) = \frac{M}{s-\alpha},$$ de donde

$$\int_0^{+\infty} |e^{-st} F(t)dt| \le \frac{M}{s-\alpha}, \quad s > \alpha$$

por lo tanto $\int_0^{+\infty} e^{-st} F(t)dt$ es convergente, entonces existe $\int_0^{+\infty} e^{-st} F(t)dt$ esto quiere decir que: ∃ L{F(t)} = f(s)

OBSERVACIÓN.-

1. Si F: [0,∞> → R es una función continua por tramos y de orden exponencial, se llama función de clase A.

2. Si F: [0,+∞> → R es una función de clase A entonces ∃ L{F(t)}.

3. Si ∃ L{F(t)} ⇏ que F sea una función de clase A.

10.7. TEOREMA.- Sea F(t) una función continua por partes para $t \geq 0$ y de orden exponencial para $t > T$; entonces $\lim\limits_{s\to\infty} L\{F(t)\} = 0$

Demostración

Como F(t) es continua por partes en $0 \leq t \leq T$, es necesariamente acotada en este intervalo: $|F(t)| \leq M_1 = M_1 e^{0t}$, además $|F(t)| \leq M_2 e^{\lambda t}$

para $t > T$. Si M denota el máximo de $\{M_1, M_2\}$ y c, el máximo $\{0,\lambda\}$ entonces

$$|L\{F(t)\}| \leq \int_0^\infty e^{-st}|F(t)|\,dt \leq M\int_0^\infty e^{-st}.e^{ct}\,dt \leq -M\frac{e^{-(s-c)t}}{s-c}\Big/_0^{\infty} = \frac{M}{s-c} \text{ para } s > c$$

$|L\{F(t)\}| \leq \dfrac{M}{s-c}$ para $s > c$, Cuando $s \to \infty$ tenemos que:

$|L\{F(t)\}| \to 0$ y por lo tanto $\lim\limits_{s\to\infty} L\{F(t)\} = 0$

10.8. TRANSFORMADA DE LAPLACE DE ALGUNAS FUNCIONES ELEMENTALES.-

Encontrar la Transformada de Laplace de las siguientes funciones.

1. $F(t) = e^{kt}$

Solución

Aplicando la definición de Transformada de Laplace

$$f(s) = L\{F(t)\} = L\{e^{kt}\} = \int_0^{+\infty} e^{-st}.e^{kt}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s-k)t}\,dt = -\frac{e^{-(s-k)t}}{s-k}\Big/_0^{\infty} = \frac{1}{s-k}\,,\ s > k$$

por lo tanto $f(s) = L\{e^{kt}\} = \dfrac{1}{s-k}$ para $s > k$

OBSERVACIÓN.- Cuando $k = 0$ se tiene: $f(s) = L\{1\} = \dfrac{1}{s}$ para $s > 0$.

(2) $F(t) = t^n$

Solución

$f(s) = L\{F(t)\} = L\{t^n\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} t^n dt$, integrando por partes se tiene:

$$\begin{cases} u = t^n \\ dv = e^{-st} dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = nt^{n-1} dt \\ v = -\dfrac{e^{-st}}{s} \end{cases}$$

$$f(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} t^n dt = -\frac{t^n e^{-st}}{s} \Big/_0^{+\infty} + \frac{n}{s} \int_0^{+\infty} e^{-st} t^{n-1} dt$$

para s > 0, n > 0, $t^n e^{-st} \to 0$, cuando t $\to +\infty$, luego se tiene:

$$f(s) = \frac{n}{s} \int_0^{+\infty} e^{-st} t^{n-1} dt = \frac{n}{s} L\{t^{n-1}\} \qquad \ldots (\alpha)$$

siguiendo el mismo proceso se llega a que:

$L\{t^{n-(n-1)}\} = L\{t\} = \frac{1}{s} L\{t^0\} = \frac{1}{s^2}$, puesto que $L\{1\} = \frac{1}{s}$, que reemplazando en (α) se tiene: $f(s) = \frac{n}{s} \cdot \frac{n-1}{s} \ldots \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{n!}{s^{n+1}}$ $\qquad \therefore\ f(s) = L\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$, si s > 0

(3) $F(t) = \text{sen}\, at$

Solución

$f(s) = L\{\text{sen}\, at\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} \,\text{sen}\, at\, dt$, integrando por partes.

$f(s) = e^{-st} \left(\frac{s.\text{sen}\, at + a\cos at}{s^2 + a^2}\right) \Big/_0^{+\infty}$, para s > 0, $e^{-st} \to 0$, cuando t $\to +\infty$, entonces:

$$f(s) = L\{\text{sen}\, at\} = \frac{a}{s^2 + a^2}, \text{ si } s > 0$$

(4) $F(t) = \cos at$

Solución

En forma similar que la función anterior.

$$f(s) = L\{\cos at\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} \cos at\, dt = \frac{s}{s^2 + a^2}, \text{ si } s > 0$$

Es decir: $f(s) = L\{\cos at\} = \dfrac{a}{s^2 + a^2}$, si $s > 0$

TABLA DE TRANSFORMADA DE LAPLACE DE ALGUNAS FUNCIONES ELEMENTALES.

F(t)	L{F(t)} = f(s)
k	$\frac{k}{s}$, s > 0
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$, s > 0
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$, s > a
sen at	$\frac{a}{s^2+a^2}$, s > 0
cos at	$\frac{s}{s^2+a^2}$, s > 0
senh at	$\frac{a}{s^2-a^2}$, s > |a|
cosh at	$\frac{s}{s^2-a^2}$, s > |a|
e^{bt} sen at	$\frac{a}{(s-b)^2+a^2}$
e^{bt} cos at	$\frac{s-b}{(s-b)^2+a^2}$
e^{bt} senh at	$\frac{a}{(s-b)^2-a^2}$
e^{bt} cosh at	$\frac{s-b}{(s-b)^2-a^2}$

Ejemplos.- Calcular L{F(t)} donde F(t) es dado:

① $F(t)=t^4+\text{sen}\,4t+\cos 7t$

Solución

$$L\{F(t)\}=L\{t^4+\text{sen}\,4t+\cos 7t\}=\frac{24}{s^5}+\frac{4}{s^2+16}+\frac{5}{s^2+49}$$

② F(t) = sen 20t

Solución

$$L\{F(t)\}=L\{\text{sen}\,20t\}=\frac{20}{s^2+400}$$

③ $F(t)=\cos^2 4t$

Solución

$$L\{F(t)\}=L\{\cos^2 4t\}=L\{\frac{1+\cos 8t}{2}\}=\frac{1}{2}(\frac{1}{s}+\frac{s}{s^2+64})=\frac{s^2+32}{s(s^2+64)}$$

④ F(t) =sen πt cos πt

Solución

$$L\{F(t)\}=L\{\text{sen}\,\pi t.\cos\pi t\}=L\{\frac{\text{sen}\,2\pi t}{2}\}=\frac{1}{2}(\frac{2\pi}{s^2+4\pi^2})=\frac{\pi}{s^2+4\pi^2}$$

⑤ $F(t)=\text{sen}^2\,\pi t$

Solución

$$L\{F(t)\}=L\{\text{sen}^2\,\pi t\}=L\{\frac{1-\cos 2\pi t}{2}\}=\frac{1}{2}L\{1-\cos 2\pi t\}=\frac{1}{2}(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+4\pi^2})$$

10.9. PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE.-

a) PROPIEDAD DE LINEALIDAD.-

Sean F,G: [0,∞> → R, funciones continuas por tramos y de orden exponencial entonces: $L\{\alpha F(t)+\beta G(t)\}=\alpha L\{F(t)\}+\beta L\{G(t)\}$

Demostración

Mediante la definición de Transformada se tiene:

$$L\{\alpha F(t)+\beta G(t)\}=\int_0^{+\infty} e^{-st}(\alpha F(t)+\beta G(t))dt$$

$$=\alpha\int_0^{+\infty} e^{-st}F(t)dt+\beta\int_0^{+\infty} e^{-st}G(t)dt=\alpha L\{F(t)\}+\beta L\{G(t)\}$$

$$\therefore\quad L\{\alpha F(t)+\beta G(t)\}=\alpha L\{F(t)\}+\beta L\{G(t)\}$$

Ejemplo.- Calcular L{F(t)}, donde $F(t)=t^2+\cos 2t+e^{3t}$

Solución

$$L\{F(t)\}=L\{t^2+\cos 2t+e^{3t}\}=L\{t^2\}+L\{\cos 2t\}+L\{e^{3t}\}=\frac{2}{s^3}+\frac{s}{s^2+4}+\frac{1}{s-3}$$

b) PRIMERA PROPIEDAD DE TRASLACIÓN.-

Sí F: [0,+∞> → R, es una función continua por tramos y de orden exponencial y si L{F(t)} = f(s) entonces para a ≠ 0 se tiene: $L\{e^{at}F(t)\}=f(s-a)$, $s>a$

Demostración

Mediante la definición de Transformada se tiene:

$$L\{F(t)\}=\int_0^{+\infty} e^{-st}F(t)dt=f(s)\quad \text{entonces}$$

$$L\{e^{at}F(t)\}=\int_0^{+\infty} e^{-st}.e^{at}F(t)dt=\int_0^{+\infty} e^{-(s-a)t}F(t)dt=f(s-a)$$

$$\therefore\quad L\{e^{at}F(t)\}=f(s-a)$$

Ejemplo.- Sí $F(t)=t^3e^{4t}$. Hallar L{F(t)}.

Solución

$$L\{t^3\}=\frac{3!}{s^4}=\frac{6}{s^4}=f(s)\text{ , entonces : } L\{t^3e^{4t}\}=f(s-4)=\frac{6}{(s-4)^4}$$

$$\therefore\ L\{t^3e^{4t}\}=\frac{6}{(s-4)^4}$$

Ejemplo.- Sí $F(t)=e^{-t}\cos 2t$. Hallar L{F(t)}

Solución

Sea $L\{\cos 2t\}=\dfrac{s}{s^2+4}=f(s)$, entonces: $L\{e^{-t}\cos 2t\}=f(s+1)=\dfrac{s+1}{(s+1)^2+4}$

$$\therefore\ L\{e^{-t}\cos 2t\}=\frac{s+1}{s^2+2s+5}$$

c) SEGUNDA PROPIEDAD DE TRASLACIÓN.-

Sí F: [0,+∞> → R, es una función continua por tramos y de orden exponencial y;

Sí L{F(t)}= f(s) y $G(t)=\begin{cases}0 & , t<a\\ F(t-a); & t>a\end{cases}$ entonces $L\{G(t)\}=e^{-as}f(s)$

Demostración

Mediante la definición de transformada de Laplace

$$L\{G(t)\}=\int_0^{+\infty}e^{-st}G(t)dt=\int_0^{a}e^{-st}G(t)dt+\int_a^{\infty}e^{-st}G(t)dt$$

$$=0+\int_0^{+\infty}e^{-st}G(t)dt=\int_a^{+\infty}e^{-st}G(t)dt$$

Es decir: $Lz\{G(t)\}=\displaystyle\int_a^{+\infty}e^{-st}G(t)dt$

ahora calculamos la integral, haciendo la sustitución:

u = t − a ⇒ t = u + a ⇒ dt = du, reemplazando en la integral se tiene:

$$L\{G(t)\}=\int_0^{+\infty} e^{-s(u+a)}G(u+a)du=e^{-as}\int_0^{+\infty} e^{-su}F(u)du=e^{-as}f(s)$$

por lo tanto: $L\{G(t)\}=e^{-as}f(s)$.

Ejemplo.- Hallar L{F(t)} sí $F(t)=\begin{cases}(t-2)^2 & , t>2\\ 0 & , t<2\end{cases}$

Solución

Sea $L\{t^3\}=\frac{6}{s^4}=f(s) \Rightarrow L\{F(t)\}=e^{-2s}f(s)=\frac{6e^{-2s}}{s^4}$ $\therefore$ $L\{F(t)\}=\frac{6e^{-2s}}{s^4}$

d) PROPIEDAD DEL CAMBIO DE ESCALA.

Sea F: [a,+∞> → R, una función continua por tramos y de orden exponencial.

Sí $L\{F(t)\}=f(s) \Rightarrow L\{F(at)\}=\frac{1}{a}f(\frac{s}{a})$

Demostración

Aplicando la definición de Transformada de Laplace.

$L\{F(at)\}=\int_0^{+\infty} e^{-st}F(at)dt$, calculando la integral se tiene:

sea $u=at \Rightarrow t=\frac{u}{a} \Rightarrow dt=\frac{du}{a}$, sustituyendo en la integral

$$L\{F(at)\}=\int_0^{+\infty} e^{-st}F(at)dt=\frac{1}{a}\int_0^{+\infty} e^{-s/a}F(u)du=\frac{1}{a}f(\frac{s}{a})$$

$$\therefore \quad L\{F(at)\}=\frac{1}{a}f(\frac{s}{a})$$

Ejemplo.- Hallar L{sen 7t}

Solución

Sea $L\{\text{sen}\,7t\}=\dfrac{1}{s^2+1}=f(s)$, entonces $L\{\text{sen}\,7t\}=\dfrac{1}{7}f(\dfrac{s}{7})=\dfrac{1}{7}(\dfrac{1}{\dfrac{s^2}{49}+1})=\dfrac{7}{s^2+49}$

$$\therefore\ L\{\text{sen}\,7t\}=\frac{7}{s^2+49}$$

10.10. TRANSFORMADA DE LAPLACE DE LA MULTIPLICACIÓN POR POTENCIA DE t^n.-

Teorema.- Consideremos la función f: [0,+∞> → R, continua por tramos y de orden exponencial, sí L{F(t)} = f(s), entonces $L\{t^n F(t)\}=(-1)^n\dfrac{d^n}{ds^n}L\{F(t)\}$, para s > 0. $\forall\ n\in Z^+$

Demostración

como $L\{F(t)\}=f(s)\ \Rightarrow\ f(s)=\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-st}F(t)dt$

aplicando la regla de Leibnitz para la derivada bajo el signo de integración se tiene:

$$\frac{d}{ds}f(s)=f'(s)=\frac{d}{ds}\int_0^{+\infty}e^{-st}F(t)dt=\int_0^{+\infty}\frac{d}{ds}e^{-st}F(t)dt=-\int_0^{+\infty}t\,e^{-st}F(t)dt=-L\{t\,F(t)\}$$

Es decir que: $\qquad L\{t\,F(t)\}=-\dfrac{d}{ds}f(s)$, se cumple para n = 1

ahora generalizamos el teorema usando inducción matemática.

Suponiendo que el teorema es válido para n = h.

Es decir: $L\{t^h F(t)\}=(-1)^h\dfrac{d^h}{ds^h}f(s)$, lo que es lo mismo.

$\displaystyle\int_0^{\infty}e^{-st}t^h F(t)dt=(-1)^h\frac{d^h}{ds^h}f(s)$, derivando por la regla de leibnitz se tiene:

$$\frac{d}{ds}\int_0^{+\infty}e^{-st}t^h F(t)dt=(-1)^h\frac{d^{h+1}}{ds^{h+1}}f(s)$$

Es decir: $\int_0^{+\infty} e^{-st} t^{h+1} F(t)dt = (-1)^{h+1} \frac{d^{h+1}}{ds^{h+1}} f(s)$

Luego como n = h el teorema es cierto, entonces el teorema es válido n = h + 1 y como también es válido para n = 1, entonces se cumple para todo $n \in Z^+$, por lo tanto.

$$L\{t^n F(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} L\{F(t)\}$$

Ejemplos.-

1) Demostrar que $L\{t\cos at\} = \frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}$

Solución

$$L\{t\cos at\} = -\frac{d}{ds} L\{\cos at\} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2 + a^2}\right) = -\left[\frac{(s^2 + a^2) - s(2s)}{(s^2 + a^2)^2}\right] = -\frac{a^2 - s^2}{(s^2 + a^2)^2}$$

$$\therefore \quad L\{t\cos at\} = \frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}$$

2) Hallar $L\{t(3\operatorname{sen} 2t - 2\cos 2t)\}$

Solución

$$L\{t(3\operatorname{sen} 2t - 2\cos 2t)\} = -\frac{d}{ds} L\{3\operatorname{sen} 2t - 2\cos 2t\} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{6}{s^2 + 4} - \frac{2s}{s^2 + 4}\right)$$

$$= \frac{d}{ds}\left(\frac{2s - 6}{s^2 + 4}\right) = \frac{2(s^2 + 4) - (2s - 6)2s}{(s^2 + 4)^2} = \frac{2s^2 + 8 - 4s^2 + 12s}{(s^2 + 4)^2} = \frac{8 + 12s - 2s^2}{(s^2 + 4)^2}$$

$$\therefore \quad L\{t(3\operatorname{sen} 2t - 2\cos 2t)\} = \frac{8 + 12s - 2s^2}{(s^2 + 4)^2}$$

10.11. TRANSFORMADA DE LAPLACE DE LA DIVISIÓN POR "t".-

Teorema.- Consideremos una función F: [0,∞> → R continua por tramos y de orden exponencial sí L{F(t)} = f(s) entonces $L\{\frac{F(t)}{t}\} = \int_s^{+\infty} f(u)du$

Demostración

Consideremos $G(t)=\frac{F(t)}{t}$ de donde F(t) = t G(t) aplicando la Transformada de Laplace a ambos lados L{F(t)} = L{t G(t)} y por el teorema (1.10) se tiene:

$L\{F(t)\}=-\frac{d}{ds}L\{G(t)\}$ de donde $\frac{d}{ds}L\{G(t)\}=-L\{F(t)\}=-f(s)$, y se tiene

L{G(t)} = – f(s) ds integrando se tiene: $L\{G(t)\}=-\int_{\infty}^{s} f(u)du=\int_{s}^{\infty} f(u)du$

Luego $L\{\frac{F(t)}{t}\}=\int_{s}^{\infty} f(u)du$

Observación.- La constante de integración se escoge de tal forma que $\lim_{s\to\infty} g(s)=0$

Ejemplo.-

1. Demostrar que: $L\{\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\}=\ln(\frac{s+b}{s+a})$

Solución

$$L\{e^{-at}-e^{-bt}\}=L\{e^{-at}\}-L\{e^{-bt}\}=\frac{1}{s+a}-\frac{1}{s+b}=f(s)$$

ahora aplicamos la Transformada de la división

$$L\{\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\}=\int_{s}^{+\infty}(\frac{1}{u+a}-\frac{1}{u+b})du=[\ln(u+a)-\ln(u+b)]\Big/_{s}^{\infty}$$

$$=\ln(\frac{u+a}{u+b})\Big/_{s}^{\infty}=0-\ln(\frac{s+a}{s+b})=\ln(\frac{s+b}{s+a})$$

$$\therefore L\{\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\}=\ln(\frac{s+b}{s+a})$$

2. Calcular: $L\{\frac{\cos t-\cosh t}{t}\}$

Solución

$$L\{\cos t-\cosh t\}=L\{\cos t\}-L\{\cosh t\}=\frac{s}{s^2+1}-\frac{s}{s^2-1}=f(s)$$

ahora aplicamos la Transformada de la división

$$L\{\frac{\cos t-\cosh t}{t}\}=\int_s^{\infty}(\frac{u}{u^2+1}-\frac{u}{u^2-1})du=[\frac{1}{2}\ln(u^2+1)-\frac{1}{2}\ln(u^2-1)]\Big/_s^{\infty}$$

$$=\frac{1}{2}\ln(\frac{u^2+1}{u^2-1})\Big/_s^{\infty}=0-\frac{1}{2}\ln(\frac{s^2+1}{s^2-1})=\frac{1}{2}\ln(\frac{s^2-1}{s^2+1})$$

$$\therefore\quad L\{\frac{\cos t-\cosh t}{t}\}=\frac{1}{2}\ln(\frac{s^2-1}{s^2+1})$$

③ Hallar $L\{\frac{1-e^t+\text{sen}\,2t}{t}\}$

Solución

$$L\{1-e^t+\text{sen}\,2t\}=L\{1\}-L\{e^t\}+L\{\text{sen}\,2t\}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s-1}+\frac{2}{s^2+4}=f(s)$$

ahora aplicamos la Transformada de la división

$$L\{\frac{1-e^t+\text{sen}\,2t}{t}\}=\int_s^{\infty}(\frac{1}{u}-\frac{1}{u-1}+\frac{2}{u^2+4})du=[\ln u-\ln(u-1)+\text{arctg}\frac{u}{2}]\Big/_s^{\infty}$$

$$=[\ln(\frac{u}{u-1})+\text{arctg}\frac{u}{2}]\Big/_s^{\infty}=(0+\frac{\pi}{2})-\ln\frac{s}{s-1}-\text{arctg}\frac{s}{2}=\frac{\pi}{2}+\ln\frac{s-1}{s}-\text{arctg}\frac{s}{2}$$

$$\therefore\quad L\{\frac{1-e^t+\text{sen}\,2t}{t}\}=\frac{\pi}{2}+\ln\frac{s-1}{s}-\text{arctg}\frac{s}{2}=\ln(\frac{s-1}{s})+\text{arctg}(\frac{2}{s})$$

10.12. TRANSFORMADA DE LAPLACE DE LA DERIVADA.-

Los siguientes teoremas que se van ha estudiar, referentes a la Transformada de Laplace de la derivada se utilizan bastante en la resolución de las ecuaciones diferenciales.

a) **TEOREMA.-** Consideremos una función continua F: [0,∞> → R y que $F'(t)$ sea continua por tramos y de orden exponencial en [0,∞> entonces:

$$\boxed{L\{F'(t)\} = sL\{F(t)\} - F(0^+)\,,\ \text{donde}\ \ F(0^+) = \lim_{\to 0^+} F(t)}$$

Demostración

Como $F'(t)$ es continua por tramos y de orden exponencial entonces por el teorema (1.6) existe $L\{F'(t)\}$, es decir: $L\{F'(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} F'(t)dt$, integrando por partes.

$$\begin{cases} u = e^{-st} \\ dv = F'(t)dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -s\,e^{-st}dt \\ v = F(t) \end{cases}$$

$$L\{F'(t)\} = e^{-st} F(t) \Big/_0^{+\infty} + s\int_0^{+\infty} e^{-st} F(t)dt = 0 - F(0^+) + sL\{F(t)\}$$

de donde: $L\{F'(t)\} = s\,L\{F(t)\} - F(0^+)$

Ejemplo.- Apliquese una Transformada de Laplace a la ecuación diferencial.

$\frac{dy}{dt} - 3y = e^{2t}$, sujeta a y(0) = 1.

Solución

Primeramente aplicamos la Transformada a ambos miembros de la ecuación diferencial

$$L\{\frac{dy}{dt}\} - 3L\{y\} = L\{e^{2t}\} \quad \text{pero} \quad L\{\frac{dy}{dt}\} = s\,L\{y\} - y(0) \quad \text{y} \quad L\{e^{2t}\} = \frac{1}{s-2}$$

por lo tanto $s\,L\{y\} - y(0) - 3L\{y\} = \frac{1}{s-2} \Rightarrow (s-3)L\{y\} - 1 = \frac{1}{s-2}$

de donde $\boxed{L\{y\} = \frac{s-1}{(s-2)(s-3)}}$

b) TEOREMA.- Consideremos una función continua $F':[0,\infty> \to R$ y que $F''(t)$ sea una función continua por tramos y de orden exponencial.

Entonces: $\boxed{L\{F''(t)\} = s^2 L\{F(t)\} - s\,F(0^+) - F'(0^+)}$

Demostración

Como $F''(t)$ es continua por tramos y de orden exponencial entonces por el teorema (1.6) existe $L\{F''(t)\}$, es decir ahora aplicamos dos veces el teorema anterior (1.12 a.), para esto sea $G(t) = F'(t) \Rightarrow G'(t) = F''(t)$

$$L\{F''(t)\} = L\{G'(t)\} = s\,L\{G(t) - G(0^+)\} = s\,L\{F'(t)\} - F'(0^+)$$

$$= s(s\,L\{F(t)\} - F(0^+)) - F'(0^+) = s^2 L\{F(t)\} - s\,F(0^+) - F'(0^+)$$

$$\therefore\quad L\{F''(t)\} = s^2 L\{F(t)\} - s\,F(0^+) - F'(0^+)$$

Ejemplo.- Apliquese una transformada a la ecuación diferencial $4y''(t) + y(t) = -2$ sujeta $y(0) = 0$, $y'(0) = \frac{1}{2}$.

Solución

Primeramente aplicamos la transformada a ambos miembros de la ecuación diferencial.

$$4L\{y''(t)\} + L\{y(t)\} = L\{-2\} \Rightarrow 4s^2 L\{y(t)\} - 4sy(0) - 4y'(0) + L\{y(t)\} = -\frac{2}{s}$$

$$(4s^2+1)L\{y(t)\} - 0 - 2 = -\frac{2}{s} \quad \text{de donde} \quad (4s^2+1)L\{y(t)\} = \frac{2s-2}{s}$$

$$\therefore\quad L\{y(t)\} = \frac{2(s-1)}{s(4s^2+1)}$$

GENERALIZANDO.- Si $F^{(n-1)} : [0,+\infty> \to R$, es una función continua y que $F^{(n)}(t)$ es una función continua por tramos y de orden exponencial. Entonces:

$$L\{F^{(n)}(t)\} = s^n L\{F(t)\} - s^{n-1}F(0^+) - s^{n-2}F'(0^+) - \ldots - s\,F^{(n-2)}(0^+) - F^{(n-1)}(0^+)$$

$$L\{F^{(n)}(t)\} = s^n L\{F(t)\} - \sum_{i=0}^{n-1} s^{n-1-i} F^{(i)}(0^+)$$

Ejemplo.- Calcular $L\{t^n\}$ mediante la transformada de las derivadas.

Solución

$L\{D_t^n t^n\} = L\{n!\} = \frac{n!}{s}$, de donde se tiene:

$$\frac{n!}{s} = L\{D_t^n t^n\} = s^n L\{t^n\} - s^{n-1}F(0^+) - s^{n-2}F'(0^+) - ... - F^{(n-1)}(0^+)$$

$$\frac{n!}{s} = s^n L\{t^n\} - 0 - 0 - ... - 0 \quad , \quad \text{por lo tanto:} \quad L\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad \text{para } s > 0$$

10.13. TRANSFORMADA DE LAPLACE DE INTEGRALES.-

TEOREMA.- Consideremos una función $F: [0,\infty> \to R$, continua por tramos y de orden exponencial, entonces:

$$\boxed{\text{Si} \quad L\{F(t)\} = f(s) \Rightarrow L\{\int_a^t F(u)du\} = \frac{1}{s}L\{F(t)\} - \frac{1}{s}\int_0^a F(t)dt}$$

Demostración

Primero demostraremos que $\int_a^t F(u)du$ es de orden exponencial, es decir, como F es de orden exponencial $\Rightarrow \exists\ \alpha, c > 0$, tal que: $|F(t)| \le c e^{\alpha t}$, $\forall\ t \ge 0$

$$\left|\int_a^t F(u)du\right| \le \int_a^t |F(u)|du \le c\int_a^t e^{\alpha u}du = \frac{c}{\alpha}e^{\alpha u} \Big/_a^t = \frac{c}{\alpha}(e^{\alpha t} - e^{\alpha a}) \le \frac{c}{\alpha}e^{\alpha t}$$

entonces $\int_a^t F(u)du$ es de orden exponencial. Por lo tanto $\exists\ L\{\int_a^t F(u)du\}$ es decir:

$$L\{\int_a^t F(u)du\} = \int_0^{+\infty} e^{-st}(\int_a^t F(u)du)dt = \lim_{t_0 \to +\infty}\int_0^{t_0} e^{-st}(\int_a^t F(u)du)dt$$

integrando por partes. $\begin{cases} w = \int_a^t F(u)du \\ dv = e^{-st}dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dw = F(t)dt \\ v = \frac{e^{-st}}{-s} \end{cases}$

$$L\{\int_a^t F(u)du\} = \lim_{t_0\to+\infty}[-\frac{e^{-st}}{s}\int_a^t F(u)du\Big/_0^{t_0} + \frac{1}{s}\int_0^{t_0} e^{-st}F(t)dt]$$

$$= -\frac{1}{s}(0 - \int_a^0 F(u)du) + \lim_{t_0\to+\infty}\frac{1}{s}\int_0^{t_0} e^{-st}F(t)dt$$

$$= \frac{1}{s}\int_a^0 F(u)du + \frac{1}{s}\int_0^{+\infty} e^{-st}F(t)dt = \frac{1}{s}\int_0^{\infty} e^{-st}F(t)dt - \frac{1}{s}\int_0^a F(t)dt$$

$$\therefore \quad L\{\int_a^t F(u)du\} = \frac{1}{s}L\{F(t)\} - \frac{1}{s}\int_0^a F(t)dt$$

OBSERVACIÓN.- Cuando a = 0 se tiene: $\boxed{L\{F(t)\} = f(s) \Rightarrow L\{\int_0^t F(u)du\} = \frac{f(s)}{s}}$

GENERALIZANDO.-

$$L\{\int_a^t\int_a^t\cdots\int_a^t F(u)du\ldots du\} = \frac{1}{s^n}L\{F(t)\} - \frac{1}{s^n}\int_0^a F(u)du -$$

$$-\frac{1}{s^{n-1}}\int_0^a\int_a^t F(u)du\,du\ldots\frac{1}{s}\underbrace{\int_0^a\int_a^t\int_a^t\cdots\int_a^t F(u)du\ldots du}_{n-1 \text{ veces}}$$

Cuando a = 0 se tiene: $\boxed{L\{\int_0^t\int_0^t\cdots\int_0^t F(u)du\ldots du\} = \frac{1}{s^n}L\{F(t)\}}$

Ejemplos.-

1. Hallar $L\{\int_0^t t\,e^{at}\operatorname{sen} t\,dt\}$

Solución

$$L\{\operatorname{sen} t\} = \frac{1}{s^2+1} \Rightarrow L\{t\operatorname{sen} t\} = -\frac{d}{ds}L\{\operatorname{sen} t\} = -\frac{d}{ds}(\frac{1}{s^2+1}) = \frac{2s}{(s^2+1)^2}$$

$$L\{t\operatorname{sen} t\} = \frac{2s}{(s^2+1)^2} \Rightarrow L\{e^{at}t\operatorname{sen} t\} = \frac{2(s-a)}{[(s-a)^2+1]^2} = f(s)$$

$$L\{\int_0^t te^{at}\operatorname{sen} t\,dt\}=\frac{f(s)}{s}=\frac{2(s-a)}{s[(s-a)^2+1)]^2}$$

$$\therefore\ L\{\int_0^t te^{at}\operatorname{sen} t\,dt\}=\frac{2(s-a)}{s[(s-a)^2+1]^2}$$

(2) Hallar $L\{t^2\int_1^t t\operatorname{sen} t\,dt\}$

<u>**Solución**</u>

$$L\{\operatorname{sen} t\}=\frac{1}{s^2+1}\quad\Rightarrow\quad L\{t\operatorname{sen} t\}=\frac{2s}{(s^2+1)^2}$$

$$L\{\int_1^t t\operatorname{sen} t\,dt\}=\frac{1}{s}L\{\operatorname{sen} t\}-\frac{1}{s}\int_0^1 t\operatorname{sen} t\,dt=\frac{1}{s}(\frac{2s}{(s^2+1)^2})-\frac{1}{s}(\cos 1-\operatorname{sen} 1)$$

$$L\{\int_1^t t\operatorname{sen} t\,dt\}=\frac{2}{(s^2+1)^2}-\frac{\cos 1-\operatorname{sen} 1}{s}$$

$$L\{t^2\int_1^t t\operatorname{sen} t\,dt\}=(-1)^2\frac{d^2}{ds^2}L\{\int_1^t t\operatorname{sen} t\,dt\}=\frac{d^2}{ds^2}(\frac{2}{(s^2+1)^2}-\frac{\cos 1-\operatorname{sen} 1}{s})$$

$$=\frac{d}{ds}[-\frac{8s}{(s^2+1)^3}+\frac{\cos 1-\operatorname{sen} 1}{s^2}]=\frac{8(5s^2-1)}{(s^2+1)^4}-\frac{2(\cos 1-\operatorname{sen} 1)}{s^3}$$

$$\therefore\ L\{t^2\int_1^t t\operatorname{sen} t\,dt\}=\frac{8(5s^2-1)}{(s^2+1)^4}-\frac{2(\cos 1-\operatorname{sen} 1)}{s^3}$$

10.14. APLICACIÓN DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE EN LA EVALUACIÓN DE INTEGRALES.-

Sea F: [0,+∞> → R; una función continua por tramos y de orden exponencial, entonces.

Si L{F(t)} = f(s) entonces $\int_0^{+\infty} e^{-st}F(t)dt=f(s)$, tomando límite cuando s → 0, se tiene: $\lim\limits_{s\to 0}\int_0^{+\infty} e^{-st}F(t)dt=\lim\limits_{s\to 0} f(s)$ de donde $\int_0^{+\infty} F(t)dt=f(0)$ ... (*)

siempre que la integral sea convergente.

La expresión (*) es útil en la evaluación de integrales.

Ejemplo.-

1 Evalúe la integral $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at}\operatorname{sen} bt}{t}\, dt$

Solución

Aplicando la división en t y luego la definición $L\{\operatorname{sen} bt\} = \frac{b}{s^2+b^2} = f(s)$

$$L\{\frac{\operatorname{sen} bt}{t}\} = \int_s^{+\infty} f(u)du = \int_s^{+\infty} \frac{b}{u^2+b^2}du = \operatorname{arctg}\frac{u}{b}\Big/_s^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{s}{b}$$

$L\{\frac{\operatorname{sen} bt}{t}\} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{s}{b}$, ahora aplicamos la definición de transformada

$\int_0^{+\infty} e^{-st}\frac{\operatorname{sen} bt}{t}\, dt = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{s}{b}$, tomando límite cuando $s \to a$ se tiene:

$$\lim_{s\to a}\int_0^{+\infty} e^{-st}\frac{\operatorname{sen} bt}{t}\, dt = \lim_{s\to a}(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{s}{b})$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-at}\frac{\operatorname{sen} bt}{t}\, dt = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{a}{b} = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$$

2 Demostrar que $\int_0^{+\infty} t\, e^{-3t}\operatorname{sen} t\, dt = \frac{3}{50}$

Solución

$$L\{\operatorname{sen} t\} = \frac{1}{s^2+1} \Rightarrow L\{t \operatorname{sen} t\} = -\frac{d}{ds}L\{\operatorname{sen} t\} = -\frac{d}{ds}(\frac{1}{s^2+1}) = \frac{2s}{(s^2+1)^2}$$

$L\{t \operatorname{sen} t\} = \frac{2s}{(s^2+1)^2}$, ahora aplicamos la definición de transformada

$\int_0^{+\infty} e^{-st}\, t \operatorname{sen} t\, dt = \frac{2s}{(s^2+1)^2}$, tomando límite cuando $s \to 3$ se tiene:

$$\lim_{s\to 3}\int_0^{+\infty} e^{-st}t\,\text{sen}\,t\,dt = \lim_{s\to 3}\frac{2s}{(s^2+1)^2} \quad \text{de donde} \quad \int_0^{+\infty} e^{-3t}t\,\text{sen}\,t\,dt = \frac{6}{100} = \frac{3}{50}$$

(3) Calcular la integral $\int_0^{+\infty}\frac{\cos 6t - \cos 4t}{t}dt$

Solución

Calculando la transformada de la función cos 6t – cos 4t, es decir:

$L\{\cos 6t - \cos 4t\} = \frac{s}{s^2+36} - \frac{s}{s^2+16} = f(s)$, aplicamos la transformada de la división

$$L\{\frac{\cos 6t - \cos 4t}{t}\} = \int_s^{\infty}(\frac{u}{u^2+36} - \frac{u}{u^2+16})du = [\frac{1}{2}\ln(u^2+36) - \frac{1}{2}\ln(u^2+16)]\Big/_s^{\infty}$$

$$= \frac{1}{2}\ln(\frac{u^2+36}{u^2+16})\Big/_s^{\infty} = 0 - \frac{1}{2}\ln(\frac{s^2+36}{s^2+16}) = \frac{1}{2}\ln(\frac{s^2+16}{s^2+36})$$

$L\{\frac{\cos 6t - \cos 4t}{t}\} = \frac{1}{2}\ln(\frac{s^2+16}{s^2+36})$, aplicando la definición de transformada

$\int_0^{+\infty} e^{-st}\frac{\cos 6t - \cos 4t}{t}dt = \frac{1}{2}\ln(\frac{s^2+16}{s^2+36})$, tomando límite cuando $s \to 0$, se tiene:

$$\lim_{s\to 0}\int_0^{+\infty} e^{-st}\frac{\cos 6t - \cos 4t}{t}dt = \frac{1}{2}\lim_{s\to 0}\ln(\frac{s^2+16}{s^2+36}) = \frac{1}{2}\ln(\frac{0+16}{0+36}) = \frac{1}{2}\ln(\frac{4}{6})^2 = \ln\frac{2}{3}$$

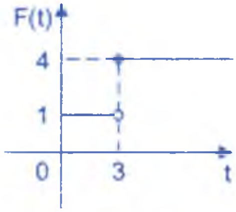
$$\therefore \int_0^{+\infty}\frac{\cos 6t - \cos 4t}{t}dt = \ln(\frac{2}{3})$$

10.15. EJERCICIOS DESARROLLADOS.-

(1) Determinar cual de las siguientes funciones son continuas por parte.

a) $f(t) = \begin{cases} 2, & 0 \le t < 3 \\ 4, & t \ge 3 \end{cases}$

Solución



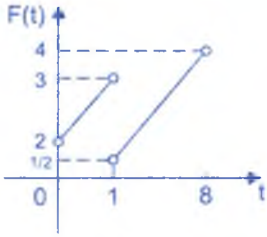
como $\lim\limits_{t\to 3^-} f(t) = 2$

$$\lim_{t\to 3^+} f(t) = 4$$

La función es continua por tramos.

b) $f(t) = \begin{cases} t+2\ , & 0 < t < 1 \\ \dfrac{t}{2}\ , & 1 < t < 8 \end{cases}$

Solución



como $\lim\limits_{t\to 1^-} f(t) = 3$

$$\lim_{t\to 1^+} f(t) = \frac{1}{2}$$

la función es continua por tramos.

c) $f(t) = e^{t^2}$

Solución

$\forall$ t $\in$ R, $f(t) = e^{t^2}$ es continua, en particular $f(t) = e^{t^2}$ es continua en $[0,\infty>$, como toda función continua en un intervalo, dicha función es continua por tramos.

(2) Determinar cual de las siguientes funciones son de orden exponencial.

a) f(t) = sen 5t

Solución

Como $-1 \le \text{sen } 5t \le 1$, $\forall$ t $\in$ R entonces $|\text{sen } 5t| \le 1 \Rightarrow |f(t)| \le 1.e^{0t}$ (donde c=1, α=0)

por lo tanto la función f(t) = sen 5t es de orden exponencial.

b) $f(t) = t^5$

Solución

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{e^{\alpha t}} = \lim_{t\to\infty} \frac{t^5}{e^{\alpha t}} = \lim_{t\to\infty} \frac{5!}{\alpha^5 e^{\alpha t}} = 0 \quad \forall\ \alpha > 0$$

Luego la función $f(t) = t^5$ es de orden exponencial.

c) f(t) = sen h t

Solución

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\operatorname{senh} t}{e^{\alpha t}}=\lim_{t\to\infty}\frac{e^{t}-e^{-t}}{2e^{\alpha t}}=\lim_{t\to\infty}\frac{e^{2t}-1}{2e^{(\alpha+1)t}}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{2e^{2t}}{2(\alpha+1)e^{(\alpha+1)t}}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{e^{(\alpha-1)t}(\alpha+1)}=0 \quad \text{para } \alpha\geq 1$$

por lo tanto f(t) = sen h t es de orden exponencial

(3) Hallar $L\{\cos^2 \alpha t\}$

Solución

Como $\cos^2 \alpha t=\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha t)$ entonces

$$L\{\cos^2 \alpha t\}=\frac{1}{2}L\{1+\cos 2\alpha t\}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s}+\frac{s}{s^2+4\alpha^2}\right)=\frac{s^2+2\alpha^2}{s(s^2+4\alpha^2)}$$

(4) Demostrar que $L\{t\cosh at\}=\frac{s^2+a^2}{(s^2-a^2)^2}$

Solución

Aplicando la transformada de la multiplicación por t.

$$L\{\cosh at\}=\frac{s}{s^2-a^2}\Rightarrow L\{t\cosh at\}=-\frac{d}{ds}L\{\cosh at\}=-\frac{s^2-a^2-s(2s)}{(s^2-a^2)^2}=\frac{s^2+a^2}{(s^2-a^2)^2}$$

(5) Hallar $L\{\frac{\operatorname{senh} t}{t}\}$

Solución

$$L\{\operatorname{senh} t\}=L\{\frac{e^t-e^{-t}}{2}\}=\frac{1}{2}L\{e^t-e^{-t}\}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s+1}\right)=f(s)$$

Ahora aplicamos la transformada de la división.

$$L\{\frac{\operatorname{senh} t}{t}\}=\int_s^{+\infty}\frac{1}{2}(\frac{1}{\mu-1}-\frac{1}{\mu+1})d\mu=\frac{1}{2}[\ln(\mu-1)-\ln(\mu+1)]\Big/_s^{\infty}$$

$$=\frac{1}{2}\ln(\frac{\mu-1}{\mu+1})\Big/_s^{\infty}=0-\frac{1}{2}\ln(\frac{s-1}{s+1})=\frac{1}{2}\ln(\frac{s+1}{s-1})$$

6 Calcular $L\{t^n \cos at\}$

Solución

Se conoce que, $\cos t=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!}$, entonces $\cos at=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k (at)^{2k}}{(2k)!}$

$$t^n\cos at=t^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k (at)^{2k}}{(2k)!}=t^n\cos at=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k a^{2k}t^{2k+n}}{(2k)!}$$

tomando Transformada de Laplace se tiene:

$$L\{t^n\cos at\}=L\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k a^{2k}t^{2k+n}}{(2k)!}\}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k a^{2k}}{(2k)!}L\{t^{2k+n}\}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k a^{2k}}{(2k)!}\frac{(2k+n)!}{s^{2k+n+1}}$$

$$\therefore\quad L\{t^n\cos at\}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k a^{2k}}{(2k)!}\frac{(2k+n)!}{s^{2k+n+1}}$$

7 Demostrar que $L\{\frac{\operatorname{sen}^2 t}{t}\}=\frac{1}{4}\ln(\frac{s^2+4}{s^2})$

Solución

$L\{\operatorname{sen}^2 t\}=\frac{1}{2}L\{1-\cos 2t\}=\frac{1}{2}(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+4})=f(s)$, por transformada de la división.

$$L\{\frac{\operatorname{sen}^2 t}{t}\}=\int_s^{+\infty}\frac{1}{2}(\frac{1}{u}-\frac{u}{u^2+4})du=\frac{1}{2}[\ln u-\frac{1}{2}\ln(u^2+4)]\Big/_s^{+\infty}=\frac{1}{4}\ln(\frac{s^2+4}{s^2})$$

$$\therefore\quad L\{\frac{\operatorname{sen}^2 t}{t}\}=\frac{1}{4}\ln(\frac{s^2+4}{s^2})$$

8 Calcular $L\{\frac{e^t-\cos t}{t}\}$

Solución

$L\{e^t-\cos t\}=L\{e^t\}-L\{\cos t\}=\frac{1}{s-1}-\frac{s}{s^2+1}=f(s)$; por propiedad de la división

$$L\{\frac{e^t-\cos t}{t}\}=\int_s^{+\infty}(\frac{1}{u-1}-\frac{u}{u^2+1})du=[\ln(u-1)-\frac{1}{2}\ln(u^2+1)]\Big/_s^{+\infty}$$

$$=\ln\frac{u-1}{\sqrt{u^2+1}}\Big/_s^{\infty}=0-\ln(\frac{s-1}{\sqrt{s^2+1}})=\ln(\frac{\sqrt{s^2+1}}{s-1})$$

$$\therefore\quad L\{\frac{e^t-\cos t}{t}\}=\ln(\frac{\sqrt{s^2+1}}{s-1})$$

9 Demostrar que: $L\{e^{-ax}\int_0 e^{ax}F(x)dx\}=\frac{f(s)}{s+a}$

Solución

Sea L{F(x)} = f(s) aplicando la propiedad de traslación se tiene:

$L\{e^{ax}F(x)\}=f(s-a)$, aplicando la transformada de la integral se tiene:

$L\{\int_0 e^{ax}F(x)dx\}=\frac{f(s-a)}{s}$, ahora aplicamos la propiedad de traslación, se tiene:

$$L\{e^{-ax}\int_0 e^{ax}F(x)dx\}=\frac{f(s)}{s+a}$$

10 Demostrar que: $L\{\frac{\cos at-\cos bt}{t}\}=\frac{1}{2}\ln(\frac{s^2+b^2}{s^2+a^2})$

Solución

$$L\{\cos at-\cos bt\}=\frac{s}{s^2+a^2}-\frac{s}{s^2+b^2}=f(s)$$

Ahora aplicamos la transformada de la división

$$L\{\frac{\cos at-\cos bt}{t}\}=\int_s^{\infty}(\frac{u}{u^2+a}-\frac{u}{u^2+b^2})du=[\frac{1}{2}\ln(u^2+a^2)-\frac{1}{2}\ln(u^2+b^2)]\Big/_s^{\infty}$$

$$=\frac{1}{2}\ln(\frac{u^2+a^2}{u^2+b^2})\Big/_s^{\infty}=0-\frac{1}{2}\ln(\frac{s^2+a^2}{s^2+b^2})=\frac{1}{2}\ln(\frac{s^2+b^2}{s^2+a^2})$$

$$\therefore\quad L\{\frac{\cos at-\cos bt}{t}\}=\frac{1}{2}\ln(\frac{s^2+b^2}{s^2+a^2})$$

(11) Hallar $L\{\int_0^t t\,e^{2t}\operatorname{sen} t\,dt\}$

Solución

$L\{\operatorname{sen} t\}=\frac{1}{s^2+1}$, aplicando la transformada de la multiplicación por t.

$$L\{t\operatorname{sen} t\}=-\frac{d}{ds}L\{\operatorname{sen} t\}=-\frac{d}{ds}(\frac{1}{s^2+1})=\frac{2s}{(s^2+1)^2}$$

ahora aplicamos la propiedad de traslación.

$L\{e^{2t}t\operatorname{sen} t\}=\frac{2(s-2)}{[(s-2)^2+1]^2}$, aplicando la transformada de la integral

$$L\{\int_0^t e^{2t}t\operatorname{sen} t\,dt\}=\frac{2(s-2)}{s[(s-2)^2+1]^2}$$

(12) Calcular $L\{t\,e^{2t}f'(t)\}$

Solución

Sea $L\{f(t)\}=\psi(s)\Rightarrow L\{f'(t)\}=s\,\psi(s)-f(0)$

aplicando la propiedad de traslación $L\{e^{2t}f'(t)\}=(s-2)\psi(s-2)-f(0)$

ahora aplicamos la transformada de la multiplicación por t.

$$L\{t\,e^{2t}f'(t)\}=-\frac{d}{ds}L\{e^{2t}f'(t)\}=-\frac{d}{ds}((s-2)\psi(s-2)-f(0))=-\psi(s-2)-(s-2)\psi'(s-2)$$

13) Calcular $L\{\frac{e^t(\cos t-1)}{t}\}$

Solución

$$L\{e^t(\cos t-1)\}=L\{e^t\cos t\}-L\{e^t\}=\frac{s-1}{(s-1)^2+1}-\frac{1}{s-1}=f(s)$$

aplicando la transformada de la división

$$L\{\frac{e^t(\cos t-1)}{t}\}=\int_s^{+\infty}(\frac{u-1}{(u-1)^2+1}-\frac{1}{u-1})du=(\frac{1}{2}\ln[(u-1)^2+1]-\ln(u-1))\Big/_s^{\infty}$$

$$=\ln\frac{\sqrt{(u-1)^2+1}}{u-1}\Big/_s^{\infty}=0-\ln\frac{\sqrt{(s-1)^2+1}}{s-1}=\ln(\frac{s-1}{\sqrt{(s-1)^2+1}})$$

$$\therefore\quad L\{\frac{e^t(\cos t-1)}{t}\}=\ln(\frac{s-1}{\sqrt{(s-1)^2+1}})$$

14) Hallar la Transformada de Laplace de la función $F(t)=t^2\int_1^t x\operatorname{sen}x\,dx+\int_0^t xe^{2x}\operatorname{sen}x\,dx$

Solución

$$L\{F(t)\}=L\{t^2\int_1^t x\operatorname{sen}x\,dx+\int_0^t xe^{2x}\operatorname{sen}x\,dx\}=L\{t^2\int_1^t x\operatorname{sen}x\,dx\}+L\{\int_0^t xe^{2x}\operatorname{sen}x\,dx\}\quad\ldots(1)$$

Calculando $L\{t^2\int_1^t x\operatorname{sen}x\,dx\}$ se tiene:

$$\int_1^t x\operatorname{sen}x\,dx=(-x\cos x+\operatorname{sen}x)\Big/_1^t=\operatorname{sen}t-t\cos t-\operatorname{sen}1+\cos 1$$

$$L\{t^2\int_1^t x\operatorname{sen}x\,dx\}=L\{t^2(\operatorname{sen}t-t\cos t-\operatorname{sen}1+\cos 1)\}=(-1)^2\frac{d^2}{ds}L\{\operatorname{sen}t-t\cos t-\operatorname{sen}1+\cos 1\}$$

$$=\frac{d^2}{ds^2}(\frac{1}{s^2+1}+\frac{1-s^2}{(1+s^2)^2}+\frac{\cos 1-\operatorname{sen}1}{s})=\frac{d}{ds}(\frac{-2s}{(s^2+1)^2}+\frac{2s^3-6s}{(s^2+1)^3}-\frac{\cos 1-\operatorname{sen}1}{s^2})$$

$$= \frac{6s^2-2}{(s^2+1)^3} + \frac{36s^2-6s^4-6}{(s^2+1)^4} + \frac{2(\cos 1 - \text{sen}\, 1)}{s^3}$$

$$L\{t^2 \int x \,\text{sen}\, x\, dx\} = \frac{8(5s^2-1)}{(s^2+1)^4} + \frac{2(\cos 1 - \text{sen}\, 1)}{s^3} \qquad \ldots \ (2)$$

ahora calculamos la transformada de $L\{\int x e^{2x} \,\text{sen}\, x\, dx\}$

$L\{\text{sen}\, x\} = \dfrac{1}{s^2+1} \Rightarrow L\{x \,\text{sen}\, x\} = \dfrac{2s}{(s^2+1)^2}$, por Traslación se tiene:

$L\{e^{2x} x \,\text{sen}\, x\} = \dfrac{2(s-2)}{[(s-2)^2+1]^2}$, aplicando la transformada de la integral

$$L\{\int_0 x e^{2x} \,\text{sen}\, x\, dx\} = \frac{1}{s} L\{x e^{2x} \,\text{sen}\, x\} = \frac{2(s-2)}{s[(s-2)^2+1]^2} \quad \ldots \ (3)$$

reemplazando (2) y (3) en (1) se tiene:

$$L\{F(t)\} = L\{t^2 \int x \,\text{sen}\, x\, dx\} + L\{\int_0 x e^{2x} \,\text{sen}\, x\, dx\} = \frac{8(5s^2-1)}{(s^2+1)^4} + \frac{2(\cos 1 - \text{sen}\, 1)}{s^3} + \frac{2(s-2)}{s[(s-2)^2+1]^2}$$

15 Calcular $L\{\dfrac{1}{(1-e^{-t})^2}\}$

Solución

Se conoce que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$, si $|x| < 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + n x^{n-1} + \ldots, \quad \text{Sí } |x| < 1$$

Luego $\dfrac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^3 + \ldots + n x^{n-1} + \ldots$ para $x = -e^{-t}$, se tiene

$\dfrac{1}{(1+e^{-t})^2} = 1 - 2e^{-t} + 3e^{-2t} - 4e^{-3t} + \ldots$, tomando la transformada

$$L\{\frac{1}{(1+e^{-t})^2}\}=L\{1-2e^{-t}+3e^{-2t}-4e^{-3t}+...\}=\frac{1}{s}-\frac{2}{s+1}+\frac{3}{s+2}-\frac{4}{s+3}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{s+n}$$

$$\therefore\ L\{\frac{1}{(1+e^{-t})^2}\}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{s+n}$$

(16) Hallar $L\{\int_0^t \frac{\operatorname{sen} u}{u}du\}$

Solución

Expresando sen u en serie de potencia se tiene:

$$\operatorname{sen} u = u-\frac{u^3}{3!}+\frac{u^5}{5!}-\frac{u^7}{7!}+... \Rightarrow \frac{\operatorname{sen} u}{u}=1-\frac{u^2}{3!}+\frac{u^4}{5!}-\frac{u^6}{7!}+...$$

$$\int_0^t \frac{\operatorname{sen} u}{u}du=\int_0^t (1-\frac{u^2}{3!}+\frac{u^4}{5!}-\frac{u^6}{7!}+...)du=(u-\frac{u^3}{3.3!}+\frac{u^5}{5.5!}-\frac{u^7}{7.7!}+...)\Big/_0^t$$

$$=t-\frac{t^3}{3.3!}+\frac{t^5}{5.5!}-\frac{t^7}{7.7!}+...,\ \text{tomando la transformada}$$

$$L\{\int_0^t \frac{\operatorname{sen} u}{u}du\}=L\{t-\frac{t^3}{3.3!}+\frac{t^5}{5.5!}-\frac{t^7}{7.7!}+...\}=\frac{1}{s^2}-\frac{1}{3s^4}+\frac{1}{5s^6}-\frac{1}{7s^8}+...$$

$$=\frac{1}{s}(\frac{\frac{1}{s}}{1}-\frac{(\frac{1}{s})^3}{3}+\frac{(\frac{1}{s})^5}{5}-\frac{(\frac{1}{s})^7}{7}+...)=\frac{1}{s}\operatorname{arctg}(\frac{1}{s})$$

$$\therefore\ L\{\int_0^t \frac{\operatorname{sen} u}{u}du\}=\frac{1}{s}\operatorname{arctg}\frac{1}{s}$$

(17) Probar que: $L\{\int_t^{2t}\frac{\operatorname{sen} x}{x}dx\}=\frac{1}{s}\operatorname{arctg}(\frac{2s}{s^2+3})$

Solución

Primeramente aplicamos propiedad de la integral

$$L\{\int_t^{2t}\frac{\operatorname{sen} x}{x}dx\}=L\{\int_0^{2t}\frac{\operatorname{sen} x}{x}dx-\int_0^t\frac{\operatorname{sen} x}{x}dx\},\ \text{por la propiedad de linealidad}$$

$$L\{\int_t^{3t}\frac{\operatorname{sen}x}{x}dx\}=L\{\int_0^{3t}\frac{\operatorname{sen}x}{x}dx\}-L\{\int_0^{t}\frac{\operatorname{sen}x}{x}dx\} \qquad \ldots (1)$$

mediante el ejercicio (16) se tiene: $L\{\int_0^{t}\frac{\operatorname{sen}x}{x}dx\}=\frac{1}{s}\operatorname{arctg}(\frac{1}{s})$ **... (2)**

ahora aplicamos la propiedad de cambio de escala.

Si L{F(t)} = f(s) entonces $L\{F(at)\}=\frac{1}{a}f(\frac{s}{a})$, es decir:

Si $L\{\int_0^{t}\frac{\operatorname{sen}x}{x}dx\}=\frac{1}{s}\operatorname{arctg}\frac{1}{s} \Rightarrow L\{\int_0^{3t}\frac{\operatorname{sen}x}{x}dx\}=\frac{1}{s}\operatorname{arctg}(\frac{3}{s})$ **... (3)**

Luego reemplazamos (2) y (3) en (1).

$$L\{\int_t^{3t}\frac{\operatorname{sen}x}{x}dx\}=\frac{1}{s}\operatorname{arctg}\frac{3}{s}-\frac{1}{s}\operatorname{arctg}\frac{1}{s}=\frac{1}{s}(\operatorname{arctg}\frac{3}{s}-\operatorname{arctg}\frac{1}{s})=\frac{1}{s}\operatorname{arctg}(\frac{\frac{3}{s}-\frac{1}{s}}{1+\frac{3}{s}.\frac{1}{s}})=\frac{1}{s}\operatorname{arctg}(\frac{2s}{s^2+3})$$

$$\therefore\ L\{\int_t^{3t}\frac{\operatorname{sen}x}{x}dx\}=\frac{1}{s}\operatorname{arctg}(\frac{2s}{s^2+3})$$

(18) Calcular $L\{\int_0^{t}\frac{x^2\cos x+e^{-x}\operatorname{sen}x}{x}dx\}$

Solución

$$L\{\int_0^{t}\frac{x^2\cos x+e^{-x}\operatorname{sen}x}{x}dx\}=L\{\int_0^{t}(x\cos x+\frac{e^{-x}\operatorname{sen}x}{x})dx\}$$

aplicando la propiedad de la integral se tiene:

$$L\{\int_0^{t}\frac{x^2\cos x+e^{-x}\operatorname{sen}x}{x}dx\}=L\{\int_0^{t}x\cos x\,dx\}+L\{\int_0^{t}\frac{e^{-x}\operatorname{sen}x}{x}dx\}$$

aplicando la transformada de la integral

$$L\{\int_0^{t}\frac{x^2\cos x+e^{-x}\operatorname{sen}x}{x}dx\}=\frac{1}{s}L\{x\cos x\}+\frac{1}{s}L\{\frac{e^{-x}\operatorname{sen}x}{x}\} \qquad \ldots (1)$$

aplicando la transformada de la multiplicación y la división.

$$L\{x\cos x\}=-\frac{d}{dx}L\{\cos x\}=-\frac{d}{ds}(\frac{s}{s^2+1})=\frac{s^2-1}{(s^2+1)^2} \qquad \ldots (2)$$

$$L\{e^{-x}\frac{\text{sen}\,x}{x}\}=\int_s^{\infty}L\{e^{-x}\,\text{sen}\,x\}=\int_s^{\infty}\frac{du}{(u+1)^2+1}=\text{arctg}(u+1)\Big/_s^{\infty}$$

$$=arctg(\infty)-arctg(s+1)=\frac{\pi}{2}-arctg(s+1) \qquad \ldots (3)$$

ahora reemplazando (2) y (3) en (1):

$$L\{\int_0^t\frac{x^2\cos x+e^{-x}\,\text{sen}\,x}{x}dx\}=\frac{1}{s}(\frac{s^2-1}{(s^2+1)^2})+\frac{\pi}{2s}-\frac{1}{s}\text{arctg}(s+1)$$

(19) Dado una función G(t) donde $L\{G(t)\} = g(s)$, cuando $s > \alpha$. Entonces demostrar que para una constante $T > 0$: $L\{G(t+T)\}=e^{st}(g(s)-\int_0^T e^{-st}G(t)dt)$, $s > \alpha$, $T > 0$.

Solución

$L\{G(t+T)\}=\int_0^{\infty}e^{-st}G(t+T)dt$ por definición de transformada.

Sea $u = t + T$, para $t \to 0$, entonces $\mu \to T$ y para $t \to \infty$, entonces $\mu \to \infty$

$$L\{G(t+T)\}=\int_0^{\infty}e^{-st}G(t+T)dt=\int_0^{\infty}e^{-s(\mu-T)}G(\mu)d\mu$$

$$=e^{st}\int_T^{\infty}e^{-su}G(u)du=e^{st}[\int_0^{\infty}e^{-su}G(u)du-\int_0^{T}e^{-s\mu}G(u)du]$$

$$=e^{st}[\int_0^{\infty}e^{-st}G(t)dt-\int_0^{T}e^{-st}G(t)dt]=e^{st}[g(s)-\int_0^{T}e^{-st}G(t)dt]$$

$$\therefore\quad L\{G(t+T)\}=e^{st}[g(s)-\int_0^{T}e^{-st}G(t)dt]$$

20 Demostrar que $L\{\int_0^t \frac{1-e^{-u}}{u}du\} = \frac{1}{s}\ln(1+\frac{1}{s})$

Demostración

Primeramente aplicaremos la transformada de la división.

Si $L\{1-e^{-u}\} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} = f(s)$, entonces por la propiedad de la división

$$L\{\frac{1-e^{-u}}{u}\} = \int_s^{\infty} (\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1})du = \ln(\frac{u}{u+1})\Big/_s^{\infty} = 0 - \ln\frac{s}{s+1} = \ln(\frac{s+1}{s}) = \ln(1+\frac{1}{s})$$

ahora aplicamos la transformada de la integral.

Sí $L\{\frac{1-e^{-u}}{u}\} = \ln(1+\frac{1}{s}) \Rightarrow L\{\int_0^t \frac{1-e^{-u}}{u}du\} = \frac{1}{s}\ln(1+\frac{1}{s})$

21 Calcular $L\{t\, e^t \int_0^t t\frac{d}{dt}(e^{2t}\operatorname{sen} t)dt\}$

Solución

Sea $F(t) = \frac{d}{dt}(e^{2t}\operatorname{sen} t) \Rightarrow L\{F(t)\} = L\{\frac{d}{dt}(e^{2t}\operatorname{sen} t)\} = s\,L\{e^{2t}\operatorname{sen} t\} - F(0)$

$$L\{F(t)\} = \frac{s}{(s-2)^2+1} - F(0) \Rightarrow L\{t\,F(t)\} = -\frac{d}{dt}L\{F(t)\}$$

$$L\{t\,F(t)\} = -\frac{d}{ds}[\frac{s}{(s-2)^2+1} - F(0)] = -\frac{5-s^2}{((s-2)^2+1)^2}$$

$$L\{t\,F(t)\} = \frac{s^2-5}{[(s-2)^2+1]^2} \Rightarrow L\{\int_0^t t\,F(t)dt\} = \frac{1}{s}(\frac{s^2-5}{[(s-2)^2+1]^2})$$

$$L\{t\,F(t)\} = \frac{s^2-5}{[(s-2)^2+1]^2} \Rightarrow L\{\int_a^t t\,F(t)dt\} = \frac{1}{s}L\{t\,F(t)\} - \frac{1}{s}\int_0^a t\,F(t)dt$$

$$L\{\int_a^t t\,F(t)dt\} = \frac{1}{s}(\frac{s^2-5}{[(s-2)^2+1]^2}) - \frac{1}{s}\int_0^a t\frac{d}{dt}(e^{2t}\operatorname{sen} t)dt$$

$$= \frac{1}{s}\left(\frac{s^2-5}{[(s-2)^2+1]^2}\right) - \frac{1}{s}\int_a^{\infty}(2t\,e^{2t}\,\text{sen}\,t + t\,e^{2t}\cos t)dt \qquad \ldots (1)$$

$$\int_0^a 2t\,e^{2t}\,\text{sen}\,t\,dt = e^{2a}\left[\frac{4a}{5}\,\text{sen}\,a - \frac{6\,\text{sen}\,a}{25} - \frac{2a}{5}\cos a + \frac{8\cos a}{25}\right] - \frac{8}{25} \qquad \ldots (2)$$

$$\int_0^a t\,e^{2t}\cos dt = e^{2a}\left[\frac{2a\cos a}{5} - \frac{3\,\text{sen}\,a}{25} + \frac{a\,\text{sen}\,a}{5} - \frac{4\,\text{sen}\,a}{25}\right] + \frac{3}{25} \qquad \ldots (3)$$

sustituyendo (2), (3) en (1).

$$L\{\int_a^t t\,F(t)dt\} = \frac{1}{s}\left(\frac{s^2-5}{[(s-2)^2+1]^2}\right) - \frac{e^{2a}}{s}\left(a\,\text{sen}\,a - \frac{2}{5}\,\text{sen}\,a + \frac{\cos a}{5}\right) + \frac{1}{5s}$$

$$L\{e^t\int_a^t t\,F(t)dt\} = \frac{(s-1)^2-5}{(s-1)[(s-3)^2+1]^2} - \frac{e^{2a}}{s-1}\left(a\,\text{sen}\,a - \frac{2}{5}\,\text{sen}\,a + \frac{\cos a}{5}\right) + \frac{1}{5(s-1)}$$

$$L\{t\,e^t\int_a^t F(t)dt\} = -\frac{d}{ds}\left[\frac{(s-1)^2-5}{(s-1)[(s-3)^2+1]^2}\right] - \frac{e^{2a}}{s-1}\left(a\,\text{sen}\,a - \frac{2}{5}\,\text{sen}\,a + \frac{\cos a}{5} + \frac{1}{5(s-1)}\right)$$

$$= \frac{s^4-16s^3+120s^2-400s+460}{s[(s-3)^2+1]^3} + \frac{e^{2a}}{5(s-1)^2}(2a - 5a\,\text{sen}\,a - \cos a)$$

$$\therefore \quad L\{t\,e^t\int_a^t t\,F(t)dt\} = \frac{s^4-16s^3+120s^2-400s+460}{s[(s-3)^2+1]^3} + \frac{e^{2a}(2a-5a\,\text{sen}\,a-\cos a)}{5(s-1)^2}$$

(22) Hallar $L\{\int_t^{\infty}\frac{\text{sen}\,u}{u}du\}$

Solución

Sea $u = tv \Rightarrow du = tdv$, además se tiene cuando $u = t$; $v = 1$ y cuando $u \to \infty$, $v \to \infty$ ahora reemplazando se tiene:

$$L\{\int_t^{\infty}\frac{\text{sen}\,u}{u}du\} = L\{\int_1^{\infty}\frac{\text{sen}\,tv}{tv}.t\,dv\} = L\{\int_1^{\infty}\frac{\text{sen}\,tv}{v}dv\} = \int_0^{+\infty}e^{-st}\left[\int_1^{\infty}\frac{\text{sen}\,tv}{v}dv\right]dt$$

$$= \int_1^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-st}\frac{\operatorname{sen} tv}{v}\,dt\,dv = \int_1^{\infty}\frac{1}{v}\int_0^{\infty} e^{-st}\operatorname{sen} tv\;dt\,dv = \int_1^{\infty}\frac{1}{v}L\{\operatorname{sen} tv\}dv$$

$$= \int_1^{\infty}\frac{1}{v}.\frac{v}{s^2+v^2}dv = \int_1^{\infty}\frac{dv}{s^2+v^2} = \frac{1}{s}\operatorname{arctg}(\frac{v}{s})\Big/_1^{\infty} = \frac{1}{s}[\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{1}{s}]$$

(23) Hallar $L\{\int_t^{\infty}\frac{\cos u}{u}du\}$

Solución

Sea u = tv $\Rightarrow$ du = t dv, además se tiene: cuando u = t , v = 1 y cuando u $\to\infty$, v $\to\infty$, ahora reemplazando se tiene:

$$L\{\int_t^{\infty}\frac{\cos u}{u}du\} = L\{\int_1^{\infty}\frac{\cos tv}{tv}t\,dv\} = L\{\int_1^{\infty}\frac{\cos tv}{v}dv\} = \int_0^{\infty}e^{-st}[\int_1^{\infty}\frac{\cos tv}{v}dv]dt$$

$$= \int_1^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-st}\frac{\cos tv}{v}dt\,dv = \int_1^{\infty}\frac{1}{v}\int_0^{\infty}e^{-st}\cos tv\,dt\,dv = \int_1^{\infty}\frac{1}{v}L\{\cos tv\}dv$$

$$= \int_1^{\infty}\frac{1}{v}.\frac{s}{s^2+v^2}dv = s\int_1^{\infty}\frac{dv}{v(v^2+s^2)} = s\int_1^{\infty}\frac{1}{s^2}(\frac{1}{v}-\frac{v}{v^2+s^2})dv$$

$$= \frac{1}{s}[\ln v-\frac{1}{2}\ln(v^2+s^2)]\Big/_1^{\infty} = 0-\frac{1}{s}\ln\frac{1}{\sqrt{1+s^2}} = \frac{1}{s}\ln\sqrt{s^2+1}$$

(24) Hallar $L\{\int_t^{\infty}\frac{e^{-x}}{x}dx\}$

Solución

Sea x = tv $\Rightarrow$ dx = t dv, además se tiene: cuando x = t , v = 1 y cuando x $\to\infty$, v $\to\infty$, ahora reemplazando se tiene:

$$L\{\int_t^{\infty}\frac{e^{-x}}{x}dx\} = L\{\int_1^{\infty}\frac{e^{-tv}}{tv}t\,dv\} = L\{\int_1^{\infty}\frac{e^{-tv}}{v}dv\}$$

$$= \int_0^{\infty}e^{-st}[\int_1^{\infty}\frac{e^{-tv}}{v}dv]dt = \int_1^{\infty}\frac{1}{v}\int_0^{\infty}e^{-st}e^{-tv}dt\,dv = \int_1^{\infty}\frac{1}{v}L\{e^{-tv}\}dv = \int_1^{\infty}\frac{1}{v}.\frac{1}{s+v}dv$$

$$=\frac{1}{s}\int_1^\infty \left(\frac{1}{v}-\frac{1}{s+v}\right)dv=\frac{1}{s}\ln\frac{v}{v+s}\Big/_1^\infty = 0-\frac{1}{s}\ln\frac{1}{s+1}=\frac{1}{s}\ln(s+1)$$

(25) Demostrar que $\int_0^\infty \frac{e^{-3t}-e^{-6t}}{t}dt=\ln 2$

Solución

Calculando $L\{\frac{e^{-3t}-e^{-6t}}{t}\}$, se tiene: $L\{e^{-3t}-e^{-6t}\}=\frac{1}{s+3}-\frac{1}{s+6}=f(s)$

$$L\{\frac{e^{-3t}-e^{-6t}}{t}\}=\int_s^\infty \left(\frac{1}{u+3}-\frac{1}{u+6}\right)du=[\ln(u+3)-\ln(u+6)]\Big/_s^\infty=\ln\left(\frac{u+3}{u+6}\right)\Big/_s^\infty=0-\ln\left(\frac{s+3}{s+6}\right)$$

$L\{\frac{e^{-3t}-e^{-6t}}{t}\}=\ln\left(\frac{s+6}{s+3}\right)$, por definición se tiene de la transformada:

$\int_0^\infty e^{-st}.\frac{e^{-3t}-e^{-6t}}{t}dt=\ln\left(\frac{s+6}{s+3}\right)$, tomando límite cuando s $\to$ 0, se tiene

$$\lim_{s\to 0}\int_0^\infty e^{-st}.\frac{e^{-3t}-e^{-6t}}{t}dt=\lim_{s\to 0}\ln\left(\frac{s+6}{s+3}\right)=\ln\left(\frac{0+6}{0+3}\right)=\ln 2 \quad \therefore \int_0^\infty \frac{e^{-3t}-e^{-6t}}{t}dt=\ln 2$$

(26) Demostrar que: $\int_0^\infty \frac{e^{-t}\operatorname{sen} t}{t}dt=\frac{\pi}{4}$

Solución

Calculando la Transformada de Laplace: $L\{\frac{\operatorname{sen} t}{t}\}$.

$$L\{\operatorname{sen} t\}=\frac{1}{s^2+1} \Rightarrow L\{\frac{\operatorname{sen} t}{t}\}=\int_s^\infty \frac{du}{u^2+1}=\operatorname{arctg} u\Big/_s^\infty=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} s$$

$L\{\frac{\operatorname{sen} t}{t}\}=\int_0^\infty \frac{e^{-st}\operatorname{sen} t}{t}dt=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} s$, tomando límite cuando s $\to$ 1, se tiene:

$$\lim_{s\to 1}\int_0^\infty e^{-st}.\frac{\operatorname{sen} t}{t}dt=\lim_{s\to 1}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} s\right)=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} 1=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \int_0^\infty \frac{e^{-t}\operatorname{sen} t}{t}\,dt = \frac{\pi}{4}$$

27 Calcular $\int_0^\infty e^{-at}\frac{\operatorname{sen} bt}{t}\,dt$, siendo a y b constante positivas.

Solución

Calculando la Transformada de Laplace de $L\{\frac{\operatorname{sen} bt}{t}\}$

$$L\{\operatorname{sen} bt\} = \frac{b}{s^2+b^2} \Rightarrow L\{\frac{\operatorname{sen} bt}{t}\} = \int_s^\infty \frac{b\,du}{u^2+b^2} = \operatorname{arctg}\frac{u}{b}\Big/_s^\infty = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{s}{b}$$

$L\{\frac{\operatorname{sen} bt}{t}\} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(\frac{s}{b})$, aplicando la definición de transformada

$\int_0^\infty e^{-st}\frac{\operatorname{sen} bt}{t}\,dt = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(\frac{s}{b})$, tomando límite cuando $s \to a$ se tiene:

$$\lim_{s\to a}\int_0^\infty e^{-st}\frac{\operatorname{sen} bt}{t}\,dt = \lim_{s\to a}(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(\frac{s}{b})) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(\frac{a}{b})$$

28 Evaluar la integral $\int_0^\infty \frac{e^{-t}\operatorname{sen}^2 t}{t}\,dt$

Solución

Calculando la Transformada de Laplace de $L\{\frac{\operatorname{sen}^2 t}{t}\}$

$$L\{\operatorname{sen}^2 t\} = \frac{1}{2}L\{1-\cos 2t\} = \frac{1}{2}(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4}) = f(s)$$

$$L\{\frac{\operatorname{sen}^2 t}{t}\} = \frac{1}{2}\int_s^\infty (\frac{1}{u} - \frac{u}{u^2+4})du = \frac{1}{2}[\ln u - \frac{1}{2}\ln(u^2+4)]\Big/_s^\infty = \frac{1}{4}\ln\frac{u^2}{u^2+4}\Big/_s^\infty = 0 - \frac{1}{4}\ln\left|\frac{s^2}{s^2+4}\right|$$

$L\{\frac{\operatorname{sen}^2 t}{t}\} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{s^2+4}{s^2}\right|$, aplicando la definición de la Transformada

$\int_0^\infty e^{-st}\frac{\operatorname{sen}^2 t}{t}\,dt = \frac{1}{4}\ln(\frac{s^2+4}{s^2})$, tomando límite cuando $s \to 1$

$$\lim_{s\to 1}\int_0^{\infty} e^{-st}\frac{\text{sen}^2 t}{t}dt = \frac{1}{4}\lim_{s\to 1}\ln(\frac{s^2+4}{s^2}) = \frac{1}{4}\ln 5 \quad \therefore \quad \int_0^{\infty}\frac{e^{-t}\,\text{sen}^2 t}{t}dt = \frac{1}{4}\ln 5$$

29) Demostrar que: $\int_0^{\infty}\frac{1-\cos t}{t^2}dt = \frac{\pi}{2}$

Solución

Calculando la Transformada de Laplace $L\{\frac{1-\cos t}{t^2}\}$

$$L\{1-\cos t\} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1} = f(s)$$

$$L\{\frac{1-\cos t}{t}\} = \int_s^{\infty}(\frac{1}{u} - \frac{u}{u^2+1})du = [\ln u - \frac{1}{2}\ln(u^2+1)]\Big/_s^{\infty}$$

$$= \frac{1}{2}\ln(\frac{u^2}{u^2+1})\Big/_s^{\infty} = 0 - \frac{1}{2}\ln(\frac{s^2}{s^2+1}) = \frac{1}{2}\ln(\frac{s^2+1}{s^2})$$

$$L\{\frac{1-\cos t}{t^2}\} = \int_s^{\infty}\frac{1}{2}\ln(\frac{u^2+1}{u^2})du\ ,\ \text{integrando por partes}$$

$$= \frac{1}{2}[u\ln(\frac{u^2+1}{u^2}) + 2\,\text{arctg}\,u]\Big/_s^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \frac{s}{2}\ln(\frac{s^2+1}{s^2}) - 2\,\text{arctg}\,s$$

aplicando la definición de Transformada de Laplace

$$\int_0^{\infty} e^{-st}\frac{1-\cos t}{t^2}dt = \frac{\pi}{2} - \frac{s}{2}\ln(\frac{s^2+1}{s^2}) - 2\,\text{arctg}\,s\ ,\ \text{tomando límite cuando } s \to 0$$

$$\lim_{s\to 0}\int_0^{\infty} e^{-st}\frac{1-\cos t}{t^2}dt = \lim_{s\to 0}[\frac{\pi}{2} - \frac{s}{2}\ln(\frac{s^2+1}{s^2}) - 2\,\text{arctg}\,s] = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \int_0^{\infty}\frac{1-\cos t}{t^2}dt = \frac{\pi}{2}$$

30) Calcular la integral $\int_0^{\infty}\frac{\cos u - e^u + \text{sen}\,u}{u}du$

Solución

Calculando la transformada $L\{\frac{\cos u - e^u + \text{sen}\, u}{u}\}$

$$L\{\cos u - e^u + \text{sen}\, u\} = \frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s^2+1} = f(s)$$

$$L\{\frac{\cos u - e^u + \text{sen}\, u}{u}\} = \int_s^{\infty} (\frac{u}{u^2+1} - \frac{1}{u-1} + \frac{1}{u^2+1})du = [\frac{1}{2}\ln(u^2+1) - \ln(u-1) + ac\,\text{tg}\, u] \Big/_s^{\infty}$$

$$= [\frac{1}{2}\ln(\frac{u^2+1}{(u-1)^2}) + \text{arctg}\, u] \Big/_s^{\infty} = (0 + \frac{\pi}{2}) - \frac{1}{2}\ln(\frac{s^2+1}{(s-1)^2}) + \text{arctg}\, s$$

$$L\{\frac{\cos u - e^u + \text{sen}\, u}{u}\} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\ln(\frac{s^2+1}{s^2-2s+1}) + \text{arctg}\, s$$

aplicando la definición de Transformada de Laplace

$$= \int_0^{\infty} e^{-su} \frac{\cos u - e^u + \text{sen}\, u}{u} du = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\ln(\frac{s^2+1}{s^2.-2s+1}) + \text{arctg}\, s$$

tomando límite cuando s $\to$ 0

$$\lim_{s\to 0} \int_0^{\infty} e^{-su} \frac{\cos u - e^u + \text{sen}\, u}{u} du = \lim_{s\to 0}[\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\ln(\frac{s^2+1}{s^2-2s+1}) + \text{arctg}\, s]$$

$$\therefore \int_0^{\infty} \frac{\cos u - e^u + \text{sen}\, u}{u} du = \frac{\pi}{2} - 0 + 0 = \frac{\pi}{2}$$

(31) Demostrar que: $\int_0^{\infty} e^{-st} \frac{1-\cos t}{t^2} dt = \frac{\pi}{2} + \frac{s}{2}\ln(\frac{s^2}{s^2+1}) - 2\,\text{arctg}\, s$

Solución

$L\{1-\cos t\} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1} = f(s)$, por la transformada de la división:

$$L\{\frac{1-\cos t}{t}\} = \int_s^{\infty} (\frac{1}{u} - \frac{u}{u^2+1})du = [\ln(u) - \frac{1}{2}\ln(u^2+1)] \Big/_s^{\infty} = \frac{1}{2}\ln(\frac{u^2}{u^2+1}) \Big/_s^{\infty} = 0 - \frac{1}{2}\ln(\frac{s^2}{s^2+1})$$

$$L\{\frac{1-\cos t}{t}\}=\frac{1}{2}\ln(\frac{s^2+1}{s^2})=g(s)$$

$$L\{\frac{1-\cos t}{t^2}\}=\frac{1}{2}\int_s^{\infty}\ln(\frac{u^2+1}{u^2})du$$, integrando por partes

$$L\{\frac{1-\cos t}{t^2}\}=\frac{1}{2}[u\ln(\frac{u^2+1}{u^2})+2\operatorname{arctg}u]\Big/_s^{\infty}$$

$$L\{\frac{1-\cos t}{t^2}\}=\frac{\pi}{2}+\frac{s}{2}\ln(\frac{s^2}{s^2+1})-2\operatorname{arctg}s$$, por definición de la Transformada de Laplace

$$\int_0^{\infty}e^{-st}\,\frac{1-\cot}{t^2}\,dt=\frac{\pi}{2}+\frac{s}{2}\ln(\frac{s^2}{s^2+1})-2\operatorname{arctg}s$$

(32) Evaluar la integral $\int_0^{\infty}te^{-2t}\operatorname{sen}tdt$

Solución

$$L\{t\operatorname{sen}t\}=-\frac{d}{ds}L\{\operatorname{sen}t\}=-\frac{1}{ds}(\frac{1}{s^2+1})=\frac{2s}{(s^2+1)}$$, por la definición de transformada

$$\int_0^{\infty}te^{-st}\operatorname{sen}tdt=\frac{2s}{(s^2+1)^2}$$, tomando límite cuando $s\to 2$, se tiene:

$$\lim_{s\to 2}\int_0^{\infty}t\,e^{-st}\operatorname{sen}tdt=\lim_{s\to 2}\frac{2s}{(s^2+1)^2}=\frac{4}{5^2}=\frac{4}{25}$$

$$\therefore\quad\int_0^{\infty}te^{-2t}\operatorname{sen}tdt=\frac{4}{25}$$

(33) Evaluar la integral $\int_0^{\infty}\frac{e^{-2t}-\cos t}{t}dt$

Solución

$$L\{e^{-2t}-\cos t\}=\frac{1}{s+2}-\frac{s}{s^2+1}=f(s)\Rightarrow L\{\frac{e^{-2t}-\cos t}{t}\}=\int_s^{\infty}(\frac{1}{u+2}-\frac{u}{u^2+1})du$$

$$= [\ln(u+2) - \frac{1}{2}\ln(u^2+1)] \Big/_s^{\infty} = \frac{1}{2}\ln\frac{(u+2)^2}{u^2+1} \Big/_s^{\infty} = 0 - \frac{1}{2}\ln(\frac{(s+2)^2}{s^2+1})$$

$= \frac{1}{2}\ln(\frac{s^2+1}{s^2+4s+4})$, aplicando la definición de transformada se tiene:

$\int_0^{\infty} e^{-st}\frac{(e^{-2t} - \cos t)dt}{t} = \frac{1}{2}\ln(\frac{s^2+1}{s^2+4s+4})$, tomando limite

$$\lim_{s\to 0}\int_0^{\infty} e^{-st}\frac{(e^{-2t} - \cos t)dt}{t} = \frac{1}{2}\lim_{s\to 0}\ln(\frac{s^2+1}{s^2+4s+4}) = -\ln 2$$

$$\therefore \int_0^{\infty}\frac{e^{-2t} - \cos t}{t}dt = -\ln 2$$

34 Evaluar la integral $\int_0^{\infty} e^{-2t}\, t \operatorname{senh} t dt$

Solución

$L\{t \operatorname{senh} t\} = -\frac{d}{ds}L\{\operatorname{senh} t\} = \frac{d}{ds}(\frac{1}{s^2-1}) = \frac{2s}{(s^2-1)^2}$; por la definición de transformada

$\int_0^{\infty} te^{-st}\operatorname{senh} tdt = \frac{2s}{(s^2-1)^2}$, tomando límite cuando s→2

$$\lim_{s\to 2}\int_0^{\infty} te^{-2t}\operatorname{senh} tdt = \lim_{s\to 2}\frac{2s}{(s^2-1)^2} = \frac{4}{9} \qquad \therefore \int_0^{\infty} te^{-2t}\operatorname{senh} tdt = \frac{4}{9}$$

10.16. EJERCICIOS PROPUESTOS.-

I.

1 Demostrase que $f(t) = t^x$, es de orden exponencial cuando t→∞ ; ∀ ∈ R.

2 ¿La función $f(t) = t^t$ es de orden exponencial en $[0,+\infty>$?

Rpta. No es de orden exponencial

3. ¿Es $f(t)=t\,\text{sen}\,\frac{1}{t}$ continua por tramos en $[0,+\infty>$?

Rpta. Si es continua por tramos en $[0,+\infty>$

4. ¿Cuáles de las siguientes funciones son continuas por tramos en $[0,+\infty>$? Razónese la respuesta.

a) $f(t)=\dfrac{t+1}{t-1}$ b) $f(t)=\dfrac{t-2}{t^2-t-2}$

c) $f(t)=e^{\frac{1}{t}}$ d) $f(t)=t^2$

Rpta. a) no es continua por tramos en $[0,+\infty>$.

b) es continua por tramos en $[0,+\infty>$.

c) no es continua por tramos en $[0,+\infty>$.

d) es continua por tramos en $[0,+\infty>$.

5. Demostrar que para cualquier numero real α, $F(t)=e^{\alpha t}f(t)$ es continua por tramos en $[0,+\infty>$, siempre que f lo sea.

6. Demuéstrese que las funciones dadas son continuas por tramos y de orden exponencial en $[0,+\infty>$

a) $f(t)=t^n\cos kt$ b) $f(t)=\dfrac{1-\cos kt}{t}$ c) $f(t)=\dfrac{1-e^{-t}}{t}$

d) $f(t)=\dfrac{1-\text{sen}\,kt}{t}$ e) $f(t)=\dfrac{\cos t-\cosh t}{t}$ f) $f(t)=t^n\cosh t$

7. Demostrar que el producto de dos funciones continuas por tramos en $[0,+\infty>$ es una función continua por tramos.

8. Hallar la transformada de Laplace $L\{F(t)\}$ si:

a) $f(t)=t^2\cos t$ b) $f(t)=t^2e^t\cos t$ c) $f(t)=(2t-3)e^{\frac{t+2}{3}}$

Rpta. **a)** $f(s)=\dfrac{2s^3-6s}{(s^2+1)^3}$ **b)** $f(s)=\dfrac{2(s-1)^3-6(s-1)}{[(s-1)^2+1]^3}$ **c)** $f(s)=\dfrac{-3e^{\frac{2}{3}}}{3s-1}$

9 Demostrar que $L\{t^2\operatorname{sen} t\}=\dfrac{6s^2-2}{(s^2+1)^3}$

10 Demostrar que $L\{\cos^3 t\}=\dfrac{s(s^2+7)}{(s^2+9)(s^2+1)}$

11 Halla $L\{t^3\cos t\}$ **Rpta.** $f(s)=\dfrac{6s^4-36s^2+6}{(s^2+1)^4}$

12 Halla $L\{\dfrac{\operatorname{sen}^2 t.\cos t}{t}\}$ **Rpta.** $f(s)=\dfrac{1}{8}\ln(\dfrac{s^2+9}{s^2+1})$

13 Halla $L\{\operatorname{sen}(a+t)\}$ **Rpta.** $f(s)=\dfrac{\cos a+s.\operatorname{sen} a}{s^2+1}$

14 Calcula $L\{\cos^2 bt\}$ **Rpta.** $f(s)=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{s}+\dfrac{s}{s^2+4b^2})$

15 Demostrar que:

a) $L\{\cosh^2(at)\}=\dfrac{s^2-2a^2}{s(s^2-4a^2)}$ **b)** $L\{\operatorname{senh}^2(at)\}=\dfrac{2a^2}{s(s^2-4a^2)}$

c) $L\{\cos at.\operatorname{sen} at\}=\dfrac{a(s^2+2a^2)}{s^4+4a^4}$ **d)** $L\{\cos at.\cos at\}=\dfrac{s^3}{s^4+4a^4}$

e) $L\{\operatorname{senh}(at).\operatorname{sen}(at)\}=\dfrac{2a^2s}{s^4+4a^4}$ **f)** $L\{\operatorname{senh}(at).\cos(at)\}=\dfrac{a(s^2-2a^2)}{s^4+4a^4}$

16 Hallar la transformada de Laplace de F(t) sí

a) $F(t)=\begin{cases} t\ , & t<2 \\ 2\ , & t>2 \end{cases}$ **b)** $F(t)=te^t\dfrac{d}{dt}(\operatorname{sen} 2t)$

c) $F(t)=\begin{cases}\operatorname{sen} t\ , & t<2\pi\\ 0\ , & t>2\pi\end{cases}$

d) $F(t)=\begin{cases}0 & ,\ t<\dfrac{\pi}{2}\\ \cos t\ , & \dfrac{\pi}{2}<t<\dfrac{3\pi}{2}\\ 0 & ,\ t>\dfrac{3\pi}{2}\end{cases}$

e) $F(t)=\begin{cases}t & ,\ t<2\\ 8-3t\ , & 2\le t\le 3\\ t-4 & ,\ 3<t\le 4\\ 0 & ,\ t>4\end{cases}$

f) $F(t)=e^{-3t}\int_0^t t\cos 4t\,dt$

g) $F(t)=\dfrac{d^2}{dt^2}\int_0^t e^{-t}\cos 3t\,dt$

h) $F(t)=te^t\int_0^t t\dfrac{d}{dt}(e^{2t}\operatorname{sen} t)dt$

17 Si $f(s)=L\{f(t)\}$, demostrar que para r >0 ; $L\{r^tF(ar)\}=\dfrac{1}{a}f(\dfrac{s-\ln r}{a})$

18 Demostrar que : $L\{t^2\operatorname{sen} bt\}=\dfrac{6bs^2-2b^3}{(s^2+b^2)^3}$

19 Demostrar que: $L\{\dfrac{\operatorname{sen} t}{t}\}=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{s}$

20 Calcular $L\{F(t)\}$ sí:

a) $F(t)=e^{-3t}\int_0^t t\operatorname{sen} 2t\,dt$ **Rpta.** $F(s)=\dfrac{4}{(s^2+6s+13)^2}$

b) $F(t)=e^{-3t}\dfrac{\operatorname{sen} 2t}{t}$ **Rpta.** $F(s)=\operatorname{arctg}(\dfrac{s+3}{2})$

21 Calcular $L\{\int_0^t\dfrac{e^{-3t}\operatorname{sen} 2t}{t}dt\}$ **Rpta.** $F(s)=\dfrac{1}{2}(\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\dfrac{s+3}{2})$

22 Hallar $L\{\dfrac{\operatorname{sen}^3 t}{t}\}$ **Rpta.** $f(s)=\dfrac{3}{4}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{4}\operatorname{arctg}.(\dfrac{3}{s})$

23 Halla $L\{\dfrac{(e^{at}-e^{bt})^2}{t}\}$ **Rpta.** $f(s)=\ln(\dfrac{(s-a-b)^2}{(s-2a)(s-2b)})$

(24) Halla $L\{\frac{\operatorname{sen} t+\operatorname{sen}^3 t}{t}e^t\}$ **Rpta.** $f(s)=\frac{7}{4}\operatorname{arctg}\frac{1}{s-1}-\frac{1}{4}\operatorname{arctg}(\frac{3}{s-1})$

(25) Evaluar $L\{\operatorname{sen} kt.\cos kt\}$ **Rpta.** $f(s)=\frac{k}{s^2+4k^2}$, $s>0$

(26) Halla $L\{F(t)\}$ sí $F(t)=e^{3t}\int_0^t t\cos 4t\,dt$ **Rpta.** $f(s)=\frac{16-(s-3)^2}{(s-3)[(s-3)^2+16]^2}$

(27) Hallar $L\{F(t)\}$ si:

a) $F(t)=t\int_0^t e^{-3t}sen2t\,dt$ b) $F(t)=t\int_0^t te^{-3t}\operatorname{sen} 2t\,dt$

c) $F(t)=e^{-3t}\int_0^t \frac{\operatorname{sen} 2t}{t}dt$ d) $F(t)=\int_0^t \frac{e^t-\cos 2t}{t}dt$

(28) Halla $L\{F(t)\}$ sí $F(t)=\begin{cases}\operatorname{sen} t & , t<4\pi\\ \operatorname{sen} t+\cos t\ , & t>4\pi\end{cases}$

(29) Halla $L\{F(t)\}$ sí $F(t)=\begin{cases}\cos t & , t<\frac{3\pi}{2}\\ \cos t+\operatorname{sen} t\ , & t>\frac{3\pi}{2}\end{cases}$

(30) Halla $L\{F(t)\}$, donde: $F(t)=\begin{cases}t\cos\omega(t-\alpha) & , t>\alpha\\ 0 & , t<\alpha\end{cases}$ $,\omega\ ,\alpha$ constantes

(31) Calcular $L\{\int_0^{2t}\frac{\operatorname{sen} u}{u}du\}$ (32) Calcular $L\{\frac{1}{(1+e^{-t})^2}\}$

(33) Hallar $L\{e^{3t}\cos 3t.\cos 4t\}$ (34) Calcular $L\{e^{3t}t^3\operatorname{sen}^2 t\}$

(35) Hallar $L\{(t+a)^n\}$, $n\in Z^+$ es un entero positivo.

Rpta. $f(s)=n!(\frac{a^n}{(n-1)!s}+\frac{a^{n-1}}{(n-2)!s^2}+...+\frac{a}{1!s^n}+\frac{1}{s^{n+1}})$

(36) Calcular $L\{\int_0^{2t} e^{2\alpha}\int_0^{3t} e^{\mu-\alpha}\frac{\operatorname{sen} 2\mu}{\mu}d\mu d\alpha\}$

(37) Calcular $L\{\|t\|-\sqrt{|t|}\}$

(38) Hallar $L\{\operatorname{sen} at.\cos bt\}$

(39) Hallar $L\{e^{at}\operatorname{sen}^2 bt\}$

(40) Hallar $L\{\frac{d^2}{dt^2}\int_0^t e^{-t}\cos 3t dt\}$

(41) Calcular $L\{\sqrt{t}\cos t^{\frac{3}{2}}\}$ **Rpta.** $f(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\Gamma(3n+\frac{3}{2})}{(2n)!s^{3n+\frac{3}{2}}}$

(42) Demostrar que: $L\{\operatorname{sen} t^2\}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(4n-2)!}{(2n-1)!s^{4n}}$

(43) Demostrar que: $L\{\int_a^t\int_0^t f(t)dtdt\}=\frac{1}{s^2}L\{f(t)\}+\frac{1}{s^2}\int_a^0 f(t)dt+\frac{1}{s}\int_0^a f(t)dt$

(44) Demostrar que: $L\{F'''(t)\}=s^3\, L\{F(t)\}-s^2F(0)-sF'(0)-F''(0)$

(45) Demostrar que: $L\{t^n\ln t\}=\frac{\Gamma'(n+1)-\ln s.\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$, $n>-1$

(46) Calcular: $L\{\int_0^{2t}(\int_0^{x}(\int_0^{2y}\frac{\operatorname{sen} z}{z}dz)dy)dx\}$

(47) Demostrar que: $L\{\frac{\operatorname{sen} b}{1+e^{-at}}\}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{b}{(s+an)^2+b^2}$

(48) Calcular $L\{\frac{1}{a}\int_0^t e^{\frac{b}{a}t}F(\frac{t}{a})dt\}$, $a\neq 0$. **Rpta.** $f(s)=\frac{1}{s}\varphi(sa-b)$

(49) Demostrar que: $L\{\int_0^t\int_0^x\int_0^y\frac{\operatorname{sen} z}{z}dz\,dy\,dx\}=\frac{1}{s^2}\operatorname{arctg}(-\frac{1}{s})$

(50) Demostrar que: $L\{\int_t^{at}\frac{\operatorname{sen} y}{y}dy\}=\frac{1}{s}\operatorname{arctg}(\frac{(a-1)s}{s^2+a^2})$ donde "a" es una constante positiva.

(51) Sí $L\{F''(t)\} = \text{arctg}(\frac{1}{s})$, F(0) = 2, $F'(0) = -1$. Hallar $L\{F(t)\}$

(52) Calcular $L\{\int_0^{at}\int_x^{\infty}(\frac{e^{-u}-e^{-2u}}{u})du\,dx\}$ **Rpta.** $f(s) = \frac{a}{s^2}\ln(\frac{2(s+a)}{s+2a})$

(53) Hallar $L\{\frac{\text{sen}^3 t}{t^2}\}$ **Rpta.** $f(s) = -\frac{3}{4}\lim_{b\to+\infty}\int_s^b \text{arctg}(\frac{2u}{3u^2})du$

(54) Calcular $\int_0^{\infty} e^{-s^2 t}\frac{\text{sen}\,t}{t}dt$ **Rpta.** $f(s) = \text{arctg}(\frac{1}{s^2})$

(55) Calcular la Transformada de Laplace de: $L\{t\,e^t\int_0 z\frac{d}{dz}(e^{2z}\,\text{sen}\,z)dz\}$

(56) Demostrar que: $L\{\int_0^{at}\int_0^{ax} u\,e^{-u}F(u)\,du\;dx\} = -\frac{a}{s^2}H'(\frac{s}{a^2}+1)$

(57) Hallar $L\{\frac{\cos at - \cos bt}{t\,e^t}\}$ **Rpta.** $f(s) = \frac{1}{2}\ln(\frac{(s+1)^2+b^2}{(s+1)^2+a^2})$

(58) Calcular $L\{\int_0^{2t} t\,e^{u-2t}(\frac{\text{sen}\,u}{u})du\}$ **Rpta.** $f(s) = \frac{arct(2/s)}{(s+2)^2} - \frac{s^2}{(s^2+4)(s+2)}$

(59) Demostrar que: $L\{\int_0^{2t}\int_0^{x}(\int_0^{2y}\frac{\text{sen}\,z}{z}dz)\,dy\,dx\} = \frac{4}{s^3}\text{arctg}(\frac{4}{s})$

(60) Calcular $L\{\int_0^{-t}\frac{\text{sen}\,u}{u}du\}$ **Rpta.** $f(s) = \frac{1}{s}\text{arctg}(-\frac{1}{s})$

(61) Calcular $L\{\int_0\int_0^{-t}\frac{\text{sen}\,u}{u}du\,du\}$ **Rpta.** $f(s) = \frac{1}{s^2}\text{arctg}(-\frac{1}{s})$

(62) Demostrar que: $L\{\int_0^{bt}\int_0^{ax}\int_y^{\infty}\frac{e^{-u}}{u}du\,dy\,dx\} = \frac{ab^2}{s^3}\ln(\frac{s}{ab}+1)$

(63) Demostrar que: $L\{\int_0\int_0^{-x}\int_0^{-y}(\frac{\text{sen}\,z}{z})dz\,dy\,dx\} = -\frac{1}{s^3}\text{arctg}(\frac{1}{s})$

64) Demostrar que: $L\{\int_0^t\int_0^x\int_0^y (\frac{\operatorname{sen} z}{z})dz\,dy\,dx\} = \frac{1}{s^2}\operatorname{arctg}(\frac{1}{s})$

65) Calcular $L\{\int_0^{2t}\frac{\cos 3z-\cos 2z}{z}dz\}$ **Rpta.** $f(s)=\frac{1}{2s}\ln(\frac{s^2+16}{s^2+36})$

66) Calcular $L\{\int_0^t e^t z\frac{d}{dz}(e^{2z}\operatorname{sen} z)dz\}$ **Rpta.** $f(s)=\frac{1}{(s-1)}[\frac{(s-1)^2-5}{((s-3)^2+1)^2}]$

67) Demostrar que: $L\{\operatorname{sen}^6 t\}=\frac{6!}{s(s^2+1)(s^2+16)(s^2+36)}$

68) Demostrar que: $L\{\operatorname{sen}^5 t\}=\frac{120}{(s^2+1)(s^2+9)(s^2+25)}$

69) Sí $L\{t\,F(t)\}=\frac{1}{s(s^2+1)}$. Hallar $L\{e^{-t}F(2t)\}$ **Rpta.** $f(s)=\ln(\frac{(s^2+2s+8)^{1/4}}{(s+2)^{1/2}})$

70) Si existe, calcular $L\{-\int_{-t}^0 e^{-4t+u}\frac{\operatorname{sen}^3 u}{u^2}du\}$

71) Sin derivar y usando solo las propiedades de Transformada; calcular $L\{t\frac{d}{dt}\int_t^{4t}\frac{\operatorname{sen}^2 u}{u^2}du\}$

72) Calcular $L\{t^n \operatorname{sen} at\}$, sí $n\in z_0^+$ y $n\in R$, $n>-1$

73) Calcular $L\{\frac{e^{-4t}\cos t}{(1-e^{-6t})^4}\}$

74) Calcular $L\{\frac{1-\cos nt}{t^2}\}$

75) Calcular $L\{\frac{\operatorname{sen}^2 t}{t^2}\}$

76) Calcular $L\{\frac{e^{-at}\operatorname{sen}^2 t}{t^3}\}$

77) Calcular $L\{t^2\frac{d}{dt}(\frac{e^{-bt}\operatorname{sen}^2 t}{t^3})\}$ sin derivar.

78) Si L{F(t)} = H(s), calcular $L\{\int_0^t dv\int_0^v F(u)du\}$

(79) Solo usando propiedades sin derivar calcular $L\{e^t \int_0^t t\frac{d}{dt}(e^{2t}\operatorname{sen} t)dt\}$

(80) Calcular $L\{\int_0^t \frac{d}{dt}(t e^{-t^t})dt\}$, sin derivar solo usando propiedades.

(81) Sea $[0,\infty> \to R$ una función de clase A. Sí $L\{F(t)\} = \varphi(s)$, calcular $L\{\frac{1}{a}e^{\pm t}F(\frac{t}{a})\}$, a > 0.

(82) Demostrar que $L\{e^t \frac{\operatorname{sen} t}{t}\} = \operatorname{arctg}(\frac{1}{s-1})$ **(83)** Hallar $L\{2 + |t - 2|\}$

(84) Demostrar que $L\{\int_0^t \int_0^{2v} \frac{\operatorname{sen} z}{z} dz\, dv\} = \frac{1}{s^2}\operatorname{arctg}(\frac{2}{s})$

(85) Evaluar si existe $L\{t\int_{2t}^{4t} e^{-2t}(\frac{\operatorname{sen}^2 u}{u^2})du\}$

(86) Sean a, b, u , v y A constantes, probar que:

$$L\{at^{-u} + bt^{-v}\} = A(a\,s^{-u} + b\,s^{-v}) \Leftrightarrow u + v = 1 \text{ y } A = \pm\sqrt{\pi \csc \pi u}$$

(87) Hallar una fórmula para: $L\{t^n \operatorname{sen} at\}$, a > 0.

(88) Calcular $L\{\int_0^t \int_0^{2y} u^{1/2}\cos u^{3/2} du\, dy\}$

(89) Hallar la transformada de Laplace $L\{x^2 \int_t^\infty u \operatorname{sen} u\, du + \int_0^t u\, e^{2u}\operatorname{sen} u\, du\}$

(90) Hallar $L\{\frac{t^{n-1}}{1-e^{-t}}\}$, donde n es un entero positivo. **Rpta.** $f(s) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n-1)!}{(s+k)^n}$

(91) Determinar la transformada $L\{\frac{\operatorname{sen} t}{1+e^{-t}}\}$ **Rpta.** $f(s) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(s+n)^2+1}$

(92) Calcular $L\{\frac{e^t \operatorname{sen} t}{(1+e^{-t})^2}\}$ **Rpta.** $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{(s+n-2)^2+1}$

(93) Calcular $L\{\frac{e^{-t}-e^{-2t}}{1+e^{-3t}-e^{-t}-e^{-2t}}\}$ **Rpta.** $f(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(s+n)^2}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(s+2n)^2}$

(94) Calcular $L\{\frac{t^2}{e^t+e^{2t}}\}$ **Rpta.** $f(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2}{(s+2n+3)^2}$

(95) Hallar $L\{t^3\ \text{tgh}(t)\}$ **Rpta.** $f(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 6}{(s+2n)^4}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 6}{(s+2n+2)^4}$

(96) Calcular $L\{\frac{e^{4t}\,\text{sen}\,t}{(1-e^{-3t})^2}\}$

(97) Calcular $L\{t^{-1/2}F(t)\}$ sí $F(t)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{n+\frac{1}{2}}}{(2n+1)n!}$

(98) Usando propiedades calcular la transformada $L\{t\frac{d}{dt}\int_{t}^{3t}\frac{d}{dt}(\frac{\text{sen}^2 t}{t^3})dt\}$

(99) Usando propiedades, calcular la transformada $L\{e^{3t}\int_0^{2t}|\cos\omega u|du\}$

(100) Solo usando propiedades, calcular la transformada $L\{\int_0^t\frac{d}{dt}(t^n\ \text{sen}\,at)dt\}$

(101) Hallar $L\{e^{-2t}\int_0^t\frac{\text{sen}\,u}{u}du\}$ **Rpta.** $f(s)=\frac{\text{arctg}(s+2)}{s+2}$

(102) Sea F(x) una función real, definida $F(x)=\begin{cases}0 & ,\ si\ \ x\in[0,1>\\ \int_0^{\infty}(\frac{e^t-e^{2t}+\text{sen}\,x\,t^2}{t})dt & ,\ si\ \ x\in[1,2]\\ 0 & ,\ si\ \ x>2\end{cases}$

Hallar L{F(x)} **Rpta.** $f(s)=\frac{1}{s}(\frac{\pi}{8}+\ln 2)(e^{-s}-e^{-2s})$

(103) Hallar $L\{\frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\}$ **Rpta.** $f(s)=\frac{\pi e^{-\frac{1}{4s}}}{\sqrt{s}}$

(104) Si $F(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le a \\ t^n, & t > a \end{cases}$, calcular $L\{t \int_0^t e^{-4t+v} F(v)dv\}$

(105) Calcular la transformada de Laplace de la función $F(t) = \begin{cases} |t - [|t|]| & \text{si } [|t|] \text{ es par} \\ |t - [|t+1|]| & \text{si } [|t|] \text{ es impar} \end{cases}$

(106) Calcular $L\{\pi(t+a)^{-1/2}\}$ sug. Es un el binomio de Newton.

(107) Si $H(t) = \begin{cases} |t - [|t|]| & \text{si } [|t|] \text{ es par o cero} \\ |t - [|t+1|]| & \text{si } [|t|] \text{ es impar} \end{cases}$ Calcular $L\{t e^{-4t} \int_0^{6t} a^t H(u)du\}$, a > 0

(108) Sí $G(t) = \begin{cases} (t - [|t|])^2 & \text{si } [|t|] \text{ es par o cero} \\ 1 - (t - [|t|])^2 & \text{si } [|t|] \text{ es impar} \end{cases}$. Calcular $L\{t^2 e^{-4t} \frac{d}{dt}(\int_0^t G(u)du)\}$

(109) Calcular $L\{\frac{\cos at - \cos bt}{t e^t}\}$ **Rpta.** $f(s) = \frac{1}{2}\ln(\frac{(s-1)^2 + b^2}{(s-1)^2 + a^2})$

(110) Calcular $L\{t \int_0^t e^u \frac{\operatorname{sen} u}{u} du\}$ **Rpta.** $f(s) = \frac{1}{s^2}\operatorname{arctg}(\frac{1}{s-1}) + \frac{1}{s(1+(s-1)^2)}$

(111) Calcular $L\{\int_0^{3t} \int_0^{3x} \frac{1-e^{-y}}{y} dy\, dx\}$ **(112)** Calcular $L\{\int_0^t \frac{d}{dt}(t e^{-t})dt\}$

(113) Calcular $L\{t^{-1/2} \cos at^{1/2}\}$ **Rpta.** $f(s) = \sqrt{\frac{\pi}{s}} e^{-\frac{a^2}{4s}}$, s > 0

(114) Calcular $L\{\frac{e^{at} - \cos bt}{t}\}$, a, b ≠ 0 **(115)** Calcular $L\{\int_0^t \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x} dx\}$

(116) Calcular $L\{t e^{-8t} \frac{d^2}{dt^2} \int_0^t e^{-t} \cos 4t\, dt\}$ **(117)** Calcular $L\{t e^t \int_a^t t \frac{d}{dt}(e^{2t} \operatorname{sen} t)dt\}$

(118) Calcular $L\{t e^{6t} \operatorname{senh} \sqrt{t}\}$

(119) Hallar la Transformada de Laplace $L\{t \int_0^t \frac{e^{-2t} \operatorname{sen} 2t}{t} dt\}$

(120) Hallar la Transformada de Laplace $L\{t\,e^{-2t}\cos 3t\}$

(121) Calcular $L\{t\int_0^t \operatorname{sen} x\,dx\}$

(122) Calcular $L\{e^{-t}(2\operatorname{senh} 2t - 5\cosh 2t)\}$

(123) Calcular $L\{t\int_0^t e^{-2t}\frac{\operatorname{sen} 2t}{t}dt\}$

(124) Calcular $L\{t\int_0^t e^{-3t}\frac{\operatorname{sen} 3t}{t}dt\}$

II.-

(1) Evaluar la integral $\int_0^\infty \frac{e^{-t}-e^{-3t}}{t}dt$ **Rpta.** $\ln 3$

(2) Calcular la integral $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} at - \cos bt}{t}dt$ **Rpta.** $\ln(\frac{a}{b})$

(3) Evaluar la integral $\int_0^\infty t\,e^{-2t}\cos t\,dt$ **Rpta.** $\frac{3}{25}$

(4) Demostrar que: $\int_0^\infty e^{\sqrt{2}t}\frac{\operatorname{senh} t.\operatorname{sen} t}{t}dt = \frac{\pi}{8}$

(5) Demostrar que: $\int_0^\infty e^{-\sqrt{2}t}\frac{\operatorname{sen} 6t.\operatorname{sen} t}{t}dt = \frac{\pi}{8}$

(6) Demostrar que: $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t^2}dt = \frac{\pi}{2}$

(7) Demostrar que: $\int_0^\infty t\,e^{-3t}\int_0^t t\,e^{-2t}\operatorname{sen} t\,dt\,dt = \frac{1}{6}$

(8) Calcular la integral $\int_0^\infty e^{-3u}\int_0^u t\cos 4t\,dt\,du$ **Rpta.** $\ln 2$

(9) Calcular $\int_0^\infty e^{4t}\frac{\cos at - \cos bt}{t}dt$ **Rpta.** $\frac{1}{2}\ln(\frac{16+b^2}{16+a^2})$

(10) Calcular la integral $\int_0^\infty e^{-t}\int_0^t \frac{1-e^{-u}}{u}du\,dt$

(11) Demostrar que: $\int_{t=0}^{\infty}\int_{u=0}^{\infty} e^{-t}\frac{\text{sen}\,u}{u}\,du\,dt=\frac{\pi}{4}$

(12) Evaluar $\int_0^{\infty}\frac{\cosh 2t-\cos 4t}{t}\,dt$ **Rpta.** $\frac{1}{2}\ln 4$

(13) Evaluar $\int_0^{\infty} t^2e^{-2t}\,\text{sen}\,t\,dt$ **Rpta.** $\frac{22}{125}$

(14) Evaluar $\int_0^{\infty} t\,e^{-2t}\,\text{senh}\,t\,dt$ **Rpta.** $\frac{4}{9}$

(15) Evaluar $\int_0^{\infty}\frac{e^{-2t}-\cos t}{t}\,dt$ **Rpta.** -ln 2

(16) Demostrar que: $\int_0^{\infty} e^{-st}\frac{1-\cos nt}{t^2}\,dt=\frac{n\pi}{2}+\frac{s}{2}\ln(\frac{s^2}{s^2+n^2})-n.\text{arctg}(\frac{s}{n})$, $\forall\ n\in Z^+$ y calcular $\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos nt}{t^2}\,dt$ **Rpta.** $\frac{n\pi}{2}$

(17) Usando Transformada de Laplace calcular $\int_0^{\infty} J_0(u^4)du$

(18) Calcular $\int_0^{\infty}\frac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x^2}\,dx$, usando Transformada de Laplace sí a, b > 0.

(19) Usando Transformada de Laplace, calcular $\int_0^{\infty}\frac{\text{sen}\,x+\cos x}{x^P}\,dx$, $0<P<1$

Rpta. $\frac{\pi}{2\Gamma(P)}(\frac{1}{\text{sen}\frac{P\pi}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{P\pi}{2}})$, $0<P<1$

(20) Calcular $\int_0^{\infty} e^{-at^2-t}\,dt$ **Rpta.** $\frac{e^{\frac{1}{4a}}\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}\,f_{erc}(\frac{1}{2\sqrt{a}})$

(21) Evaluar la integral $\int_0^{\infty}\frac{\cos 6t-\cos 4t}{t}\,dt$ **Rpta.** $\ln(\frac{2}{3})$

(22) Evaluar la integral $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} 4t - \operatorname{sen} 2t}{t}\,dt$ **Rpta.** 0

(23) Calcular el valor de $\int_0^\infty t\,e^{-2t}\cos t\;dt$ **Rpta.** $\frac{3}{25}$

(24) Demostrar que: $\int_0^\infty e^{-st}\left(\frac{1-\cos nt}{t^2}\right)dt = \frac{n\pi}{2} + \frac{s}{2}\ln\left|\frac{s^2}{s^2+n^2}\right| - n.\operatorname{arctg}\left(\frac{s}{n}\right)$ y $\int_0^\infty \frac{1-\cos nt}{t^2}\,dt = \frac{n\pi}{2}$

(25) Calcular $\int_0^\infty \int_0^t e^{-t}\frac{\operatorname{sen}^2 u}{u^2}\,du\,dt$

(26) Calcular $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} t.\operatorname{sen} at}{t}\,dt$

(27) Calcular $\int_0^\infty \frac{e^{-tx^2}}{1+x^2}\,dx$

(28) Calcular $\int_0^\infty t^3 e^{-t}\operatorname{sen} t\,dt$

(29) Evaluar $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} tx}{x}\,dx$

(30) Calcular $\int_0^\infty \frac{x^3}{(8-x)^{7/3}}\,dx$

(31) Calcular $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(3-x)}}$

(32) Calcular $\int_0^2 (4-x^2)^{3/2}\,dx$

(33) Calcular $\int_0^2 (4-x^2)^{3/2}\,dx$

CAPÍTULO XI

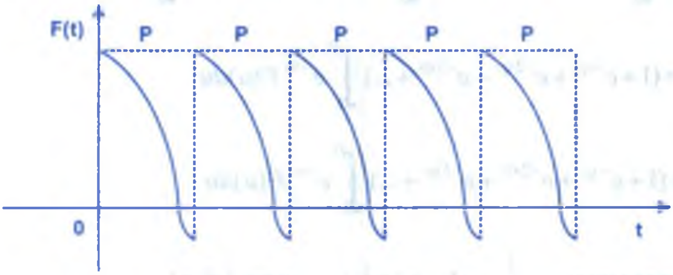
11. FUNCIONES ESPECIALES.-

11.1. FUNCION PERIÓDICA.-

La función F: R → R, se dice que es una función periódica sí ∃ p > 0, tal que:

$$\boxed{F(t+p) = F(t)\ ,\ \forall\, t \in R}$$

y al menor número p > 0, que satisface la condición de periodicidad se denomina período de la función



Si F(t) es una función seccionalmente continua a lo largo de un intervalo de longitud P y de orden exponencial, entonces su Transformada de Laplace existe y es la integral de cero al infinito.

11.2. TEOREMA.-

Sí F: [0,+∞> → R, es una función continua por tramos, de orden exponencial y periódica con período P. Entonces:

$$\boxed{L\{F(t)\} = \frac{\int_0^P e^{-st} F(t)dt}{1-e^{-ps}}}$$

Demostración

Como F(t) es continua por tramos y de orden exponencial entonces ∃ L{F(t)}

$$L\{F(t)\}=\int_0^{+\infty} e^{-st}F(t)dt=\int_0^{P} e^{-st}F(t)dt+\int_P^{2P} e^{-st}F(t)dt+\int_{2p}^{3P} e^{-st}F(t)dt+...$$

Como F(t) es una función periódica con periodo P ≠ 0, entonces a partir de la segunda integral se tiene: t = u + p, t = u + 2p, t = u + 3p, ..., entonces

$$L\{F(t)\}=\int_0^{P} e^{-su}F(u)du+\int_P^{2P} e^{-s(u+p)}F(u+p)du+$$

$$+\int_{2p}^{3P} e^{-s(u+2p)}F(u+2p)du+\int_{3p}^{4P} e^{-s(u+3p)}F(u+3p)du+...$$

$$=\int_0^{P} e^{-su}F(u)du+e^{-sp}\int_0^{P} e^{-su}F(u)du+e^{-2sp}\int_0^{P} e^{-su}F(u)du+......$$

$$=(1+e^{-sp}+e^{-2sp}+e^{-3sp}+...)\int_0^{P} e^{-su}F(u)du$$

$$L\{F(t)\}=(1+e^{-sp}+e^{-2sp}+e^{-3sp}+...)\int_0^{P} e^{-su}F(u)du \qquad ...(1)$$

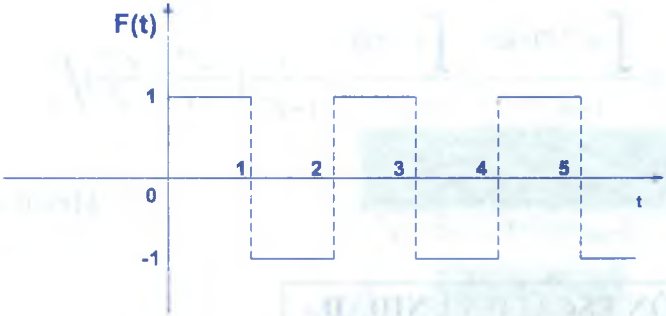
pero se conoce que: $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+...$, para $|x|<1$

Luego $1+e^{-sp}+e^{-2sp}+...=\frac{1}{1-e^{-sp}}$ ... (2)

por lo tanto al reemplazar (2) en (1) se tiene: $L\{F(t)\}=\frac{1}{1-e^{-sp}}\int_0^{P} e^{-su}F(u)du$

$$\therefore\ L\{F(t)\}=\frac{\int_0^{P} e^{-st}F(t)dt}{1-e^{-ps}}$$

Ejemplo.- Hallar la transformada de Laplace de la función que se muestra en la figura.



Solución

La función F(t) del gráfico es periódica de período P = 2 es decir:

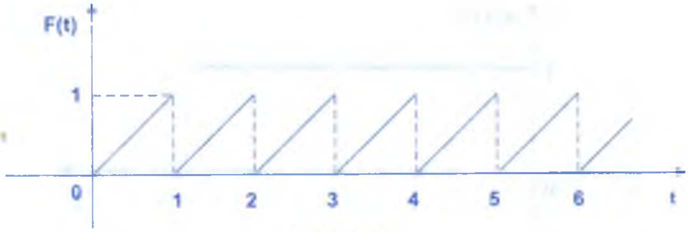
$$F(t)=\begin{cases}1 & \text{si } 0<t<1\\ -1 & \text{si } -1<t<2\end{cases},\quad F(t+2)=F(t)\,,\ \forall\, t$$

$$L\{F(t)\}=\frac{\int_0^p e^{-st}F(t)dt}{1-e^{-ps}}=\frac{\int_0^2 e^{-st}F(t)dt}{1-e^{-2s}}=\frac{\int_0^1 e^{-st}F(t)dt+\int_1^2 e^{-st}F(t)dt}{1-e^{-2s}}=\frac{\int_0^1 e^{-st}dt+\int_1^2 e^{-st}dt}{1-e^{-2s}}$$

$$=\frac{e^{-2s}-2e^{-s}+1}{s(1-e^{-2s})}=\frac{(1-e^{-s})^2}{s(1-e^{-2s})}=\frac{1-e^{-s}}{s(1+e^{-s})}=\frac{e^s-1}{s(e^s+1)}=\frac{1}{s}\operatorname{tg}(\frac{s}{2})$$

$$\therefore\quad L\{F(t)\}=\frac{1}{s}\operatorname{tgh}(\frac{s}{2})$$

Ejemplo.- Hallar L{F(t)} donde F(t) es la función periódica que se muestra en la figura.



Solución

La función F(t) es periódica, de período P = 1, donde F(t) = t, para 0<t< 1 y F(t)=F(t + 1), ∀ t su Transformada de Laplace es dado por:

$$L\{F(t)\}=\frac{\int_0^p e^{-st}F(t)dt}{1-e^{-ps}}=\frac{\int_0^1 e^{-st}t\,dt}{1-e^{-s}}=\frac{1}{1-e^{-s}}[-\frac{te^{-st}}{s}-\frac{e^{-st}}{s^2}]\Big/_0^1$$

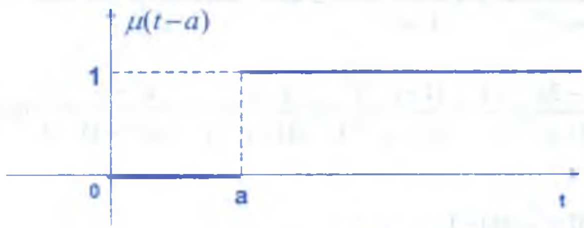
$$=\frac{1}{1-e^{-s}}(-\frac{e^{-s}}{s}-\frac{e^{-s}}{s^2}+\frac{1}{s^2}) \qquad \therefore\ L\{F(t)\}=\frac{1}{s^2}-\frac{e^{-s}}{s(1-e^{-s})}$$

11.3. FUNCIÓN ESCALÓN UNIDAD.-

A la función "Escalón Unidad" llamada también función unitario de HEAVISIDE es denotada por $\mu(t-a)=\mu_a(t)$ y es definida como:

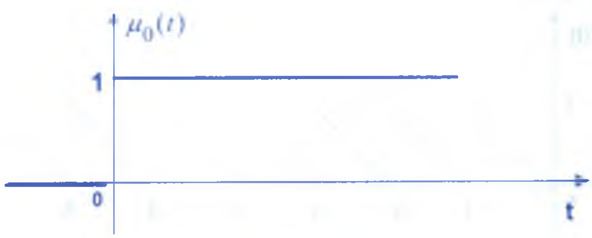
$$\mu(t-a)=\mu_a(t)=\begin{cases}0 & si\ \ t<a\\ 1 & si\ \ t\geq a\end{cases}$$

su gráfico es:



cuando a = 0, se tiene: $\mu_0(t)=\mu(t-0)=\begin{cases}0 & si\ \ t<0\\ 1 & si\ \ t\geq 0\end{cases}$

su gráfico es:



La función $\mu_a(t)$ es continua en <0,+∞>, a pesar que $\mu_a(t)$ tiene un punto de discontinuidad en x = a, la Transformada de Laplace de $\mu(t-a)=\mu_t(a)$ es:

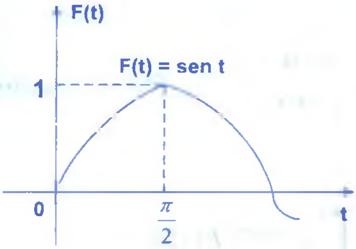
$$L\{\mu_a(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st}\mu(t-a)dt = \int_0^{a} e^{-st}\mu(t-a)dt + \int_a^{+\infty} e^{-st}\mu(t-a)dt$$

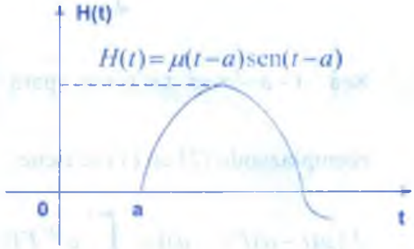
$$= 0 + \int_a^{+\infty} e^{-st}\mu(t-a)dt = \int_a^{+\infty} e^{-st}dt = \frac{e^{-st}}{s}\Big/_a^{+\infty} \quad \text{para } s>0$$

$$= -\frac{1}{s}[0 - e^{-as}] = \frac{e^{-as}}{s} \qquad \therefore L\{\mu(t-a)\} = \frac{e^{-as}}{s}$$

OBSERVACIÓN. Toda función F puede ser trasladada "a" unidades a la derecha del punto a.

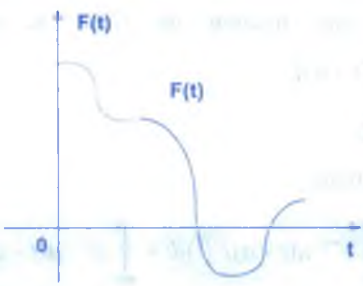
Ejemplo. La función F(t)=sent

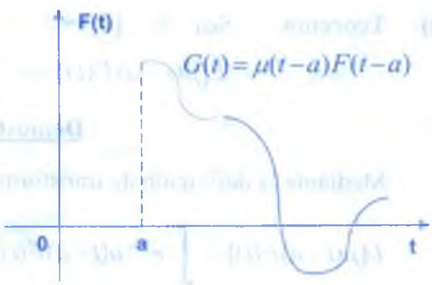




$$H(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t < 0 \\ \text{sen}(t-a) & si \quad t \geq a \end{cases}$$

En general dada una función F: $[a.+\infty\rangle \to R$, se puede trasladar a la derecha, de tal manera que la función valga cero en $[0,a\rangle$ y se define la función $G(t) = \mu(t-a)\,F(t-a)$.





Observación. Si $L\{F(t)\}$ existe para $s > a \geq 0$, entonces podemos calcular $L\{\mu(t-a)\,F(t-a)\}$ en función de $L\{F(t)\}$.

i) **Teorema.** Sea F: [0+,∞>→R, una función de clase A entonces

$$L\{\mu(t-a)F(t-a)\}=e^{-as}L\{F(t)\}$$

Demostración

Mediante la definición de transformada.

$$L\{\mu(t-a)F(t-a)\}=\int_0^{\infty}e^{-st}\mu(t-a)F(t-a)dt$$

$$=\int_0^{a}e^{-st}\mu(t-a)F(t-a)dt+\int_a^{\infty}e^{-st}\mu(t-a)F(t-a)dt$$

$$=\int_a^{+\infty}e^{-st}F(t-a)dt \qquad \textbf{... (1)}$$

Sea t - a = z ⇒ t = a + z para $\begin{cases} t=a & ; \quad z=0 \\ t\to\infty & ; \quad z\to\infty \end{cases}$ **... (2)**

reemplazando (2) en (1) se tiene:

$$L\{\mu(t-a)F(t-a)\}=\int_a^{+\infty}e^{-st}F(t-a)dt=\int_0^{+\infty}e^{-s(a+z)}F(z)dz$$

$$=e^{-as}\int_0^{+\infty}e^{-sz}F(z)dz=e^{-as}\int_0^{+\infty}e^{-st}F(t)dt=e^{-as}L\{F(t)\}$$

$$\therefore L\{\mu(t-a)F(t-a)\}=e^{-as}L\{F(t)\}$$

ii) **Teorema.** Sea F: [0,+∞> → R, una función de clase A, entonces

$$L\{\mu(t-a)F(t)\}=e^{-as}L\{F(t+a)\}$$

Demostración

Mediante la definición de transformada se tiene:

$$L\{\mu(t-a)F(t)\}=\int_0^{\infty}e^{-st}\mu(t-a)F(t)dt=\int_0^{a}e^{-st}\mu(t-a)F(t)dt+\int_a^{\infty}e^{-st}\mu(t-a)F(t)dt$$

$$=\int_a^{+\infty}e^{-st}F(tdt \qquad \textbf{... (1)}$$

Sea $t = z + a$, cuando $\begin{cases} t \to 0 \; ; \; z \to 0 \\ t \to +\infty \; ; \; z \to +\infty \end{cases}$ **... (2)**

reemplazando (2) en (1) se tiene:

$$L\{\mu(t-a)F(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st}F(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-s(a+z)}F(a+z)dz$$

$$= e^{-sa}\int_0^{+\infty} e^{-az}F(z+a)dz = e^{-as}\int_0^{+\infty} e^{-at}F(t+a)dt = e^{-as}L\{F(t+a)\}$$

$$\therefore \; L\{\mu(t-a)F(t)\} = e^{-as}L\{F(t+a)\}$$

OBSERVACIÓN.-

Sea F: $[0,+\infty> \to R$, una función de clase A, tal que:

$$\boxed{F(t) = \begin{cases} F_1(t) & ; \; 0 < t < a \\ F_2(t) & ; \; t > a \end{cases}}$$

Luego la función F(t) se puede escribir en términos de la función escalón unidad.

$$\boxed{F(t) = F_1(t) + (F_2(t) - F_1(t))\mu(t-a)}$$

Generalizando; Sí F: $[0,+\infty> \to R$, es una función de clase A, tal que:

a la función F(t) se expresa en la forma siguiente:

$$F(t) = \begin{cases} F_1(t)\,,\; si\; 0 < t < a_1 \\ F_2(t)\,,\; si\; a_1 < t < a_2 \\ F_3(t)\,,\; si\; a_2 < t < a_3 \\ \vdots \\ F_n(t)\,,\; si\; t > a_{n-1} \end{cases}$$

Luego a la función F(t) se puede expresar en términos de la función escalón unidad.

$$F(t) = F_1(t) + (F_2(t) - F_1(t))\mu\,(t-a_1) + (F_3(t) - F_2(t))\mu\,(t-a_2)$$
$$+ \ldots + (F_n(t) - F_{n-1}(t))\mu\,(t-a_{n-1})$$

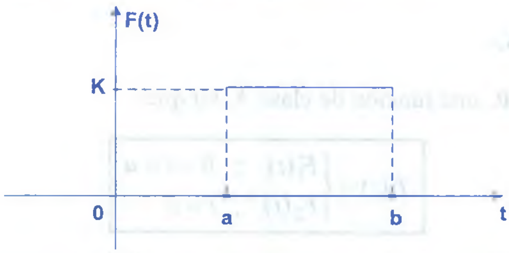
Ejemplo.- Escribir en términos de la función escalón unidad, la función.

$$F(t)=\begin{cases} t^2 & , si\ 0<t<2 \\ 4t & , si\ t>2 \end{cases}$$

Solución

$F(t)=t^2+(4t-t^2)\mu(t-2)$

Ejemplo.- Encontrar la Transformada de Laplace de la función que se muestra en la figura.



Solución

Escribiendo la función en términos de la función escalón unidad se tiene:

$F(t) = k[\mu(t-a) - \mu(t-b)]$ y su Transformada de Laplace es :

$$L\{F(t)\} = k\,L\{\mu(t-a)\} - k\,L\{\mu(t-b)\} = \frac{k\,e^{-as}}{s}-\frac{k\,e^{-bs}}{s}$$

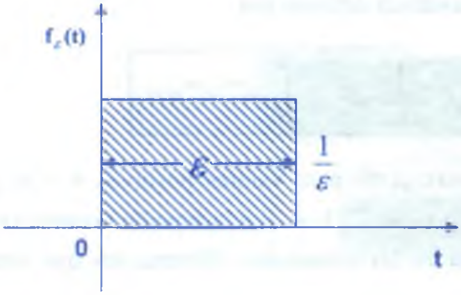
$$\therefore\ L\{F(t)\}=\frac{k}{s}(e^{-as}-e^{-bs})$$

11.4. FUNCIÓN IMPULSO UNITARIO Ó FUNCIÓN DELTA DE DIRAC.-

Consideremos la función $f_\varepsilon(t)$, definido por:

$$f_\varepsilon(t)=\begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & si\ \ 0\le t\le\varepsilon \\ 0 & si\ \ t>\varepsilon \end{cases}$$

donde ε > 0, y que es muy pequeño. Su gráfica es:



A la función $f_\varepsilon(t)$, así definida se le denomina función impulso, y cuando $\varepsilon \to 0$, la altura de la región rectangular sombreada crece indefinidamente y la base decrece, de tal manera que el área siempre es igual a 1, es decir:

$$\boxed{A = \int_0^\infty f_\varepsilon(t)dt = 1}$$

a la función $\delta(t) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} f_\varepsilon(t)$ se denomina función impulso unitario o función Delta de Dirac, otra forma de definir la función δ(t) que frecuentemente es empleada en electrónica es: $\delta(t) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}(\mu(t) - \mu(t-\varepsilon))$

Ahora calcularemos su Transformada de Laplace

$$L\{f_\varepsilon(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f_\varepsilon(t)dt = \int_0^\varepsilon e^{-st} f_\varepsilon(t)dt + \int_\varepsilon^\infty e^{-st} f_\varepsilon(t)dt$$

$$= \int_0^\varepsilon \frac{e^{-st}}{\varepsilon} dt = -\frac{e^{-st}}{\varepsilon s} \Big/_0^\varepsilon = -\frac{e^{-s\varepsilon}}{\varepsilon s} + \frac{1}{\varepsilon s} \qquad \therefore \; L\{f_\varepsilon(t)\} = \frac{1-e^{-s\varepsilon}}{\varepsilon s}$$

como $\delta(t) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} f_\varepsilon(t) \Rightarrow L\{\delta(t)\} = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} L\{f_\varepsilon(t)\}$

$$L\{\delta(t)\} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1-e^{-s\varepsilon}}{\varepsilon s} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{s\,e^{-s\varepsilon}}{s} = 1$$

$\therefore$ L{δ(t)} = 1, además $L\{\delta(t-a)\} = e^{-as}$

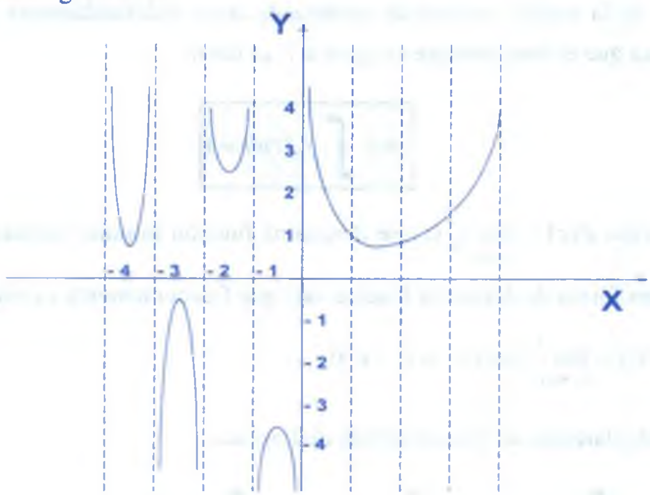
11.5. LA FUNCIÓN GAMMA.-

Es una integral paramétrica definida por:

$$\Gamma(n)=\int_0^{\infty}\mu^{n-1}e^{-\mu}d\mu \qquad \ldots(1)$$

Esta integral es convergente para valores positivos n > 0, y para valores negativos n exceptuando los valores -1,-2,-3,-4..., a la función Gamma también se denomina función factorial y se aplica en las ecuaciones diferenciales que admiten soluciones por series infinitas.

Su representación gráfica es:



En la siguientes tabla se indica algunos valores de $\Gamma(n)$ donde $0 < n \leq 1$, calculados según (1) mediante series infinitas.

N	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
Γ(n)	9.5	4.59	2.99	2.22	$\sqrt{\pi}$	1.49	1.30	1.16	1.07

La integral $\Gamma(n)=\int_0^{\infty}\mu^{n-1}e^{-\mu}d\mu$, no define ningún valor n = 0, pero define los valores de $\Gamma(n)$ para todos los números reales de la siguiente forma:

$$\Gamma(n)=(n-1)\Gamma(n-1)$$

11.6. PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN GAMMA.-

(1) $\Gamma(n+1)=n\Gamma(n), \quad \forall\, n>-1$

Demostración

Por definición de función Gamma se tiene:

$$\Gamma(n+1)=\int_0^{\infty} e^{-u}\mu^{(n+1)-1}d\mu=\int_0^{+\infty}\mu^n e^{-\mu}d\mu=\lim_{p\to+\infty}\int_0^p \mu^n e^{-u}d\mu$$

integrando por partes: $\begin{cases}\omega=\mu^n\\ dv=e^{-u}d\mu\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}d\omega=n\mu^{n-1}d\mu\\ v=-e^{-\mu}\end{cases}$

$$\Gamma(n+1)=\lim_{p\to+\infty}[-\mu^n e^{-\mu}\Big/_0^p+n\int_0^p \mu^{n-1}e^{-\mu}d\mu]$$

$$=\lim_{p\to+\infty}-p^n e^{-p}+\lim_{p\to+\infty}n\int_0^p \mu^{n-1}e^{-u}d\mu=0+n\int_0^{+\infty}\mu^{n-1}e^{-u}d\mu=n\Gamma(n)$$

$\therefore\ \Gamma(n+1)=n\Gamma(n)$

(2) $\Gamma(n+1)=n!\ ,\ \forall\, n\in Z^+$

Demostración

Aplicando repetidas veces la propiedad (1)

$$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n(n-1)\Gamma(n-1)=n(n-1)(n-2)\Gamma(n-2)$$

$$=n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-(n-1))\Gamma(1)$$

$$=n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots,3.2.1\,\Gamma(1)=n\Gamma(1)=n! \qquad \therefore\ \Gamma(n+1)=n!$$

Observación. $\Gamma(1)=\int_0^{\infty}\mu^{1-1}e^{-\mu}d\mu=\int_0^{\infty}e^{-\mu}d\mu=1 \qquad \therefore\ \Gamma(1)=1$

11.7. TEOREMA.-

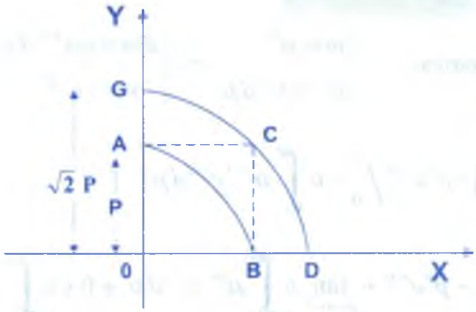
Demostrar que: $\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$

Demostración

Consideremos : $I_p = \int_0^p e^{-x^2}dx = \int_0^p e^{-y^2}dy$ y sea $I = \lim\limits_{p\to\infty} I_p$, el valor de la integral.

Luego $I^2{}_p = (\int_0^p e^{-x^2}dx)(\int_0^p e^{-y^2}dy) = \int_0^p \int_0^p e^{-x^2-y^2}dxdy$

$I^2{}_p = \iint\limits_{R_p} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$, donde R_p es el cuadrado o ABC, de lado P



Sea R_1 la región en el primer cuadrante, comprendida por la circunferencia de radio P. es decir : $\iint\limits_{R_1} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$ y sea R_2 la región en el primer cuadrante, comprendida por la circunferencia de radio $\sqrt{2}P$ es decir: $\iint\limits_{R_2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$.

Luego : $\iint\limits_{R_1} e^{-(x^2+y^2)}dxdy \le I^2{}_p \le \iint\limits_{R_2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$

por medio de coordenadas polares (r, θ) se tiene:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\int_0^p e^{-r^2}rdr)d\theta \le I^2{}_p \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\int_0^p e^{-r^2}rdr)d\theta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-e^{-p^2}}{2}d\theta \le I^2{}_p \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-e^{-2p^2}}{2}d\theta$$

$\frac{\pi}{4}(1-e^{-p^2}) \le I^2{}_p \le \frac{\pi}{4}(1-e^{-2p^2})$; tomando límite cuando p→+∞, se tiene:

$$\lim_{p\to+\infty}\frac{\pi}{4}(1-e^{-p^2})\le \lim_{p\to+\infty} I^2{}_p \le \lim_{p\to+\infty}\frac{\pi}{4}(1-e^{-2p^2})$$

$$\frac{\pi}{4}\le I^2\le\frac{\pi}{4} \text{ de donde se tiene } I=\frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad \therefore \int_0^{+\infty} e^{-\mu^2}d\mu=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

EJEMPLO DE APLICACIÓN.

Demostrar que: $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$

Solución

Por definición de la función Gamma se tiene:

$$\Gamma(n)=\int_0^{+\infty}\mu^{n-1}e^{-\mu}d\mu \text{ , de donde: } \Gamma(\frac{1}{2})=\int_0^{+\infty}\mu^{\frac{1}{2}-1}e^{-u}d\mu=\int_0^{+\infty}\mu^{-1/2}e^{-u}d\mu$$

Sea $\mu=x^2 \Rightarrow d\mu=2xdx$; cuando x = 0, $\mu=0$ y cuando $x\to+\infty$; $\mu\to+\infty$

$$\Gamma(\frac{1}{2})=\int_0^{+\infty}\mu^{-\frac{1}{2}}e^{-\mu}d\mu=\int_0^{+\infty}x^{-1}e^{-x^2}.2xdx=2\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=2(\frac{\sqrt{\pi}}{2})=\sqrt{\pi}$$

$$\therefore \Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$$

11.8. LA FUNCIÓN BETA.-

A la función $B: R^+ x R^+ \to R$, definida por la integral

$$\boxed{B(m,n)=\int_0^1 \mu^{m-1}(1-\mu)^{n-1}d\mu}$$

donde m > 0, n > 0, se denomina función Beta.

11.9. PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN BETA.-

1 $B(m,n)=B(n,m)$

Demostración

Por la definición de función Beta se tiene: $B(m,n)=\int_0^1 \mu^{m-1}(1-\mu)^{n-1}d\mu$

sea $z = 1 - \mu \Rightarrow dz = -d\mu$, además cuando $\begin{matrix} \mu = 0\,, z = 1 \\ \mu = 1\,, z = 0 \end{matrix}$

$$B(m,n) = \int_0^1 \mu^{m-1}(1-\mu)^{n-1}\,d\mu = -\int_1^0 z^{n-1}(1-z)^{m-1}dz = \int_0^1 z^{n-1}(1-z)^{m-1}dz = B(n,m)$$

$$\therefore B(m,n) = B(n,m)$$

2) $B(m,n) = \dfrac{\Gamma(m).\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$

Demostración

Por definición de la función Beta se tiene: $B(m,n) = \int_0^1 \mu^{m-1}(1-\mu)^{n-1}d\mu$

sea $g(t) = \int_0^t \mu^{m-1}(1-\mu)^{n-1}d\mu$, calculando su Transformada de Laplace se tiene: por el teorema de convolución.

$$L\{g(t)\} = \Gamma(m)\Gamma(n)\frac{1}{S^m.S^n} = \Gamma(m)\Gamma(n).\frac{1}{S^{m+n}}$$

$$g(t) = \Gamma(m)\Gamma(n)L^{-1}\{\frac{1}{S^{m+n}}\} = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}t^{m+n-1}$$

$$g(t) = \int_0^t \mu^{m-1}(1-\mu)^{n-1}d\mu = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}t^{m+n-1}$$, entonces tenemos:

$$g(1) = \int_0^1 \mu^{m-1}(1-\mu)^{n-1}d\mu = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \qquad \therefore B(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^{2m-1}\theta.\cos^{2n-1}\theta\,d\theta = \frac{1}{2}B(m,n) = \dfrac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{2\Gamma(m+n)}$

Demostración

De la propiedad (2) se tiene: $B(m,n) = \int_0^1 \mu^{m-1}(1-\mu)^{n-1}d\mu = \dfrac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$

sea $z=\cos^2\theta \Rightarrow dz = -2\cos\theta \operatorname{sen}\theta\, d\theta \Rightarrow \operatorname{sen}\theta\cos\theta\, d\theta = -\frac{dz}{2}$

cuando $\theta = 0,\quad z=1;\quad \theta=\frac{\pi}{2},\quad z=0$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2m-1}\theta.\cos^{2n-1}\theta\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2m-2}\theta.\cos^{2n-2}\theta.\operatorname{sen}\theta.\cos\theta\, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2\theta)^{m-1}(\cos^2\theta)^{n-1}\operatorname{sen}\theta.\cos\theta\, d\vartheta$$

$$= -\frac{1}{2}\int_1^0 (1-z)^{m-1}z^{n-1}dz = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-z)^{m-1}z^{n-1}dz = \frac{1}{2}B(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{2\Gamma(m+n)}$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2m-1}\theta.\cos^{2n-1}\theta\, d\theta = \frac{1}{2}B(m.n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{2\Gamma(m+n)}$$

11.10. LA FUNCIÓN DE BESSEL.-

La ecuación diferencial de segundo orden de la forma

$$\boxed{t^2y''(t)+ty'(t)+(t^2-p^2)y(t)=0} \qquad \textbf{...(1)}$$

se llama ecuación diferencial de Bessel de orden p, con $p \geq 0$.

Ahora buscaremos las soluciones en serie de potencias al rededor del punto t = 0, el cual es un punto singular regular.

Sea $y(t) = t^p \sum_{k=0}^{\infty} a_n t^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_n t^{k+p}$, $p \geq 0$; calculando las derivadas se tiene:

$$y'(t) = \sum_{k=0}^{\infty}(k+p)a_k t^{k+p-1} \quad , \quad y \quad y''(t) = \sum_{k=0}^{\infty}(k+p)(k+p-1)a_k t^{k+p-1}$$

ahora reemplazando en la ecuación diferencial dada

$$t^2\sum_{k=0}^{\infty}(k+p)(k+p-1)a_k t^{k+p-2}+t\sum_{K=0}^{\infty}(k+p)a_k t^{k+p-1}+(t^2-p^2)\sum_{k=0}^{\infty}a_k t^{k+p}=0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+p)(k+p-1)a_k t^{k+p}+\sum_{K=0}^{\infty}(k+p)a_k t^{k+p}+\sum_{k=0}^{\infty}a_k t^{k+p+2}\sum_{k=0}^{\infty}a_k p^2 t^{k+p}=0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}[(k+p)^2-p^2]a_k t^{k+p}+\sum_{K=0}^{\infty}a_k t^{k+p+2}=0$$; poniendo en una misma potencia a t

$$\sum_{k=0}^{\infty}[(k+p)^2-p^2]a_k t^{k+p}+\sum_{K=2}^{\infty}a_{k-2} t^{k+p}=0$$; poniendo los inicios iguales

$$(p^2-p^2)a_0 t^p+(2p+1)a_1 t^{1+p}+\sum_{k=2}^{\infty}[(k+p)^2-p^2]a_k t^{k+p}+\sum_{K=2}^{\infty}a_{k-2} t^{k+p}=0$$

$$(2p+1)a_1 t^{1+p}+\sum_{k=2}^{\infty}[(k^2+2pk)a_k+a_{k-2}]t^{k+p}=0$$

$$\begin{cases}(2p+1)a_1=0\\ (k^2+2pk)a_k+a_{k-2}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1=0\\ a_k=-\dfrac{a_{k-2}}{k^2+2pk}\ ,\ \forall\ k\geq 2\end{cases}$$

$$k=2\ \Rightarrow\ a_2=-\frac{a_0}{2(2p+2)}$$

$$k=3\ \Rightarrow\ a_3=-\frac{a_1}{3(2p+3)}=0\ \Rightarrow\ a_3=0$$

$$k=4\ \Rightarrow\ a_4=-\frac{a_2}{4(2p+4)}=(-1)^2\frac{a_0}{2.4.(2p+2)(2p+4)}$$

$$k=5\ \Rightarrow\ a_5=-\frac{a_3}{5(2p+5)}=0\Rightarrow a_5=0$$

$$k=6\ \Rightarrow\ a_6=-\frac{a_4}{6(2p+6)}=(-1)^3\frac{a_0}{2.4.6(2p+2)(2p+4)(2p+6)}$$

$$a_{2k-1}=0\ ,\ \forall\ k\geq 1$$

$$a_{2k}=(-1)^k\frac{a_0}{2.4.6.8...(2k)(2p+2)(2p+4)...(2p+2k)}$$

$$a_{2k}=\frac{(-1)^k a_0}{2.4.6.8...(2k)2^k(p+1)(p+2)(p+3)...(p+k)}$$

$$a_{2k}=\frac{(-1)^k a_0}{2.3.4.5...k.2^{2k}(p+1)(p+2)(p+3)...(p+k)}$$

$$a_{2k}=\frac{(-1)^k a_0}{k!2^{2k}(p+1)(p+2)(p+3)...(p+k)},\ \forall k\geq 1$$

como $y(t)=t^p\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k t^k=t^p\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k a_0}{k!2^{2k}(p+1)(p+2)...(p+k)}t^{2k}$

$$y(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k a_0}{k!2^{2k}(p+1)(p+2)...(p+k)}t^{2k+p}$$

consideremos $a_0=\dfrac{1}{2^p\Gamma(p+1)}$ se tiene:

$$y(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!2^p2^{2k}\Gamma(p+1)(p+1)(p+2)...(p+k)}t^{2k+p}$$

$$y(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(p+1)(p+1)(p+2)...(p+k)}(\frac{t}{2})^{2k+p}$$

Esta función es una de las soluciones linealmente independiente de la ecuación diferencial de Bessel y es llamado "Función de Bessel de orden p y de primera clase" y denotaremos en la forma siguiente:

$$J_p(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(p+1).(p+1)(p+2)...(p+k)}(\frac{t}{2})^{2k+p}$$

a) **DEFINICIÓN.-** A la función de Bessel de primera clase y de orden n, denotaremos por $J_n(t)$ y es definido por la serie.

$$J_n(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(k+n)!\Gamma}(\frac{t}{2})^{2k+n}\ ,\ k\geq 0$$

si n = 0, se obtiene $J_0(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}(\frac{t}{2})^{2k}$

Llamada función de Bessel de orden cero.

OBSERVACIÓN.- Se ha obtenido una solución linealmente independiente.

$$J_p(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(p+1).(p+1)(p+2)...(p+k)}(\frac{t}{2})^{2k+p}$$

se sabe que: $(p+1)\Gamma(p+1)=\Gamma(p+2)$

$$(p+2)\Gamma(p+2)=\Gamma(p+3)$$

$$(p+3)\Gamma(p+3)=\Gamma(p+4)$$

$$\vdots$$

$$(p+k)\Gamma(p+k)=\Gamma(p+k+1)$$

de donde: $J_p(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(p+k+1)}(\frac{t}{2})^{2k+p}$ ó $J_p(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(p+k)!}(\frac{t}{2})^{2k+p}$

La segunda solución linealmente independiente de la ecuación diferencial de Bessel es:

$$J_{-p}(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-p+1)}(\frac{t}{2})^{2k-p}\quad ó\quad J_{-p}(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(k-p)!}(\frac{t}{2})^{2k-p}$$

OBSERVACIÓN. Las funciones de Bessel de mayor utilidad son los de orden cero $J_0(t)$ y las de orden uno, $J_1(t)$ y son expresados así:

$$J_0(t)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(k!)^2}(\frac{t}{2})^{2k} \quad \text{y} \quad J_1(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!(k+1)}(\frac{t}{2})^{2k+1}$$

el gráfico de estas funciones es:

b) PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN BESSEL.-

1. $J_{-n}(t)=(-1)^n J_n(t)$, si $n\in Z^+$
2. $J_{n+1}(t)=\frac{2n}{t}J_n(t)-J_{n-1}(t)$
3. $\frac{d}{dt}\{t^n J_n(t)\}=t^n J_{n-1}(t)$
4. $n=0,\ J_0'(t)=-J_1(t)$
5. $\frac{d}{dt}\{t^{-n} J_n(t)\}=-t^{-n} J_{n+1}(t)$
6. $J_{n-1}(t)-J_{n+1}(t)=2J_n'(t)$
7. $J_{\frac{1}{2}}(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\,sen\,t$
8. $J_{-\frac{1}{2}}(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\cos t$
9. $J_{\frac{3}{2}}(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi t}}(\frac{\operatorname{sen} t}{t}-\cos t)$
10. $e^{\frac{t}{2}(\frac{u-1}{u})}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(t)u^n$

Se conoce con el nombre de función generadora para las funciones de Bessel

Ejemplo. Hallar $L\{J_0(t)\}$, donde $J_0(t)$ es la función de Bessel de orden cero.

Solución

$$J_n(t)=\frac{t^n}{2^n\Gamma(n+1)}(1-\frac{t^2}{2-(2n+2)}+\frac{t^4}{2.4.(2n+2)(2n+4)}-\frac{t^6}{2.4.6(2n+2)(2n+4)(2n+6)}+...)$$

$$J_0(t)=1-\frac{t^2}{2^2}+\frac{t^4}{2^2.4^2}-\frac{t^6}{2^2.4^2.6^2}+\frac{t^8}{2^2.4^2.6^2.8^2}-...$$

$$L\{J_0(t)\}=L\{1-\frac{t^2}{2^2}+\frac{t^4}{2^2.4^2}-\frac{t^6}{2^2.4^2.6^2}+\frac{t^8}{2^2.4^2.6^2.8^2}-...\}$$

$$=\frac{1}{s}-\frac{2!}{2^2.s^3}+\frac{4!}{2^2.4^2.s^5}-\frac{6!}{2^2.4^2.6^2.s^7}+\frac{8!}{2^2.4^2.6^2.8^2.s^9}-...$$

$$=\frac{1}{s}[1-\frac{1}{2}(\frac{1}{s})^2+\frac{1.3}{2.4}(\frac{1}{s})^4-\frac{1.3.5}{2.4.6}(\frac{1}{s})^6+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}(\frac{1}{s})^2-...]=\frac{1}{s}.\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{s^2}}}=\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$$

$$\therefore L\{J_0(t)\}=\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$$

Ejemplo. Calcular $L\{\frac{1-J_0(t)}{t}\}$

Solución

$L\{1-J_0(t)\}=\frac{1}{s}-\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}=f(s)$, por la Transformada de la División

$$L\{\frac{1-J_0(t)}{t}\}=\int_s^{\infty}(\frac{1}{\mu}-\frac{1}{\sqrt{\mu^2+1}})d\mu=[\ln\mu-\ln\left|\mu+\sqrt{\mu^2+1}\right|]\Big/_s^{\infty}$$

$$=\ln(\frac{\mu}{u+\sqrt{\mu^2+1}})\Big/_s^{\infty}=0-\ln(\frac{s}{s+\sqrt{s^2+1}})=\ln(\frac{s\sqrt{s^2+1}}{s})$$

$$\therefore L\{\frac{1-J_0(t)}{t}\}=\ln\frac{s\sqrt{s^2+1}}{s}$$

Ejemplo. Demostrar que: $\int_0^{\infty}t^2J_0(t)dt=-1$

Solución

Se sabe que $L\{J_0(t)\} = \dfrac{1}{\sqrt{s^2+1}}$, entonces

$$L\{t^2 J_0(t)\} = (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}\right) = \frac{3s^2}{(s^2+1)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{(s^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$ por definición se tiene:

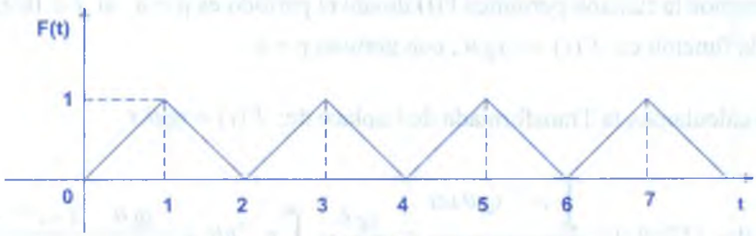
$$\int_0^{+\infty} e^{-st} t^2 J_0(t)dt = \frac{3s^2}{(s^2+1)^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{(s^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$, tomando límite cuando s→0

$$\lim_{s\to 0} \int_0^{+\infty} e^{-st} t^2 J_0(t)dt = \lim_{s\to 0}\left(\frac{3s^2}{(s^2+1)^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{(s^2+1)^{\frac{3}{2}}}\right) = 0 - 1 = -1$$

$$\therefore \int_0^{+\infty} t^2 J_0(t)dt = -1$$

11.11. EJERCICIOS DESARROLLADOS.-

1. Muestre que la función F(t)cuya gráfica es la onda triangular que se muestra en la figura, tiene como transformada de Laplace $L\{F(t)\} = \dfrac{1}{s^2}\text{tgh}(\dfrac{s}{2})$.



Solución

Si $t \in \langle 0,1 \rangle \Rightarrow m_1 = 1 \Rightarrow F(t) = t$

Si $t \in \langle 1,2 \rangle \Rightarrow m_2 = -1 \Rightarrow F(t) = 2 - t$

de donde $F(t) = \begin{cases} t, & si\ t \in \langle 0,1 \rangle \\ 2-t, & si\ t \in \langle 1,2 \rangle \end{cases}$

donde F(t) es periódica de período p=2

como $$L\{F(t)\} = \frac{\int_0^p e^{-st}F(t)dt}{1-e^{-ps}} = \int_0^2 \frac{e^{-st}F(t)}{1-e^{-2s}}dt = \frac{1}{1-e^{-2s}}\left[\int_0^1 e^{-st}t\,dt + \int_1^2 e^{-st}(2-t)dt\right]$$

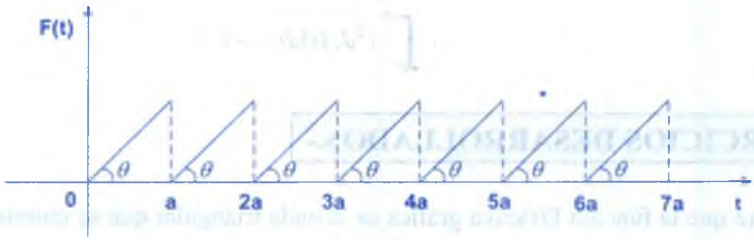
$$= \frac{1}{1-e^{-2s}}[(-\frac{t}{s}-\frac{1}{s^2})e^{-st}\Big/_0^1 + (\frac{t}{s}+\frac{1}{s^2}-\frac{2}{s})e^{-st}\Big/_1^2]$$

$$= \frac{1}{1-e^{-2s}}(\frac{e^{-2s}-2e^{-s}+1}{s^2}) = \frac{1-e^{-s}}{s^2(1+e^{-s})} = \frac{1}{s^2}\,\text{tgh}\,(\frac{s}{2})$$

$$\therefore L\{F(t)\} = \frac{1}{s^2}\,\text{tgh}(\frac{s}{2})$$

Nota. $\text{tgh}\, t = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} = \frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1} = \frac{1-e^{-2t}}{1+e^{-2t}}$

(2) Hallar la transformada de Laplace de la función periódica que se muestra en la figura.



Solución

Definiremos la función periódica F(t) donde el período es p = a, si $t \in [0,a] \Rightarrow m = \text{tg}\,\theta$, luego la función es: $F(t) = t.\text{tg}\,\theta$, con período p = a.

Ahora calculamos la Transformada de Laplace de: $F(t) = \text{tg}\,\theta.t$

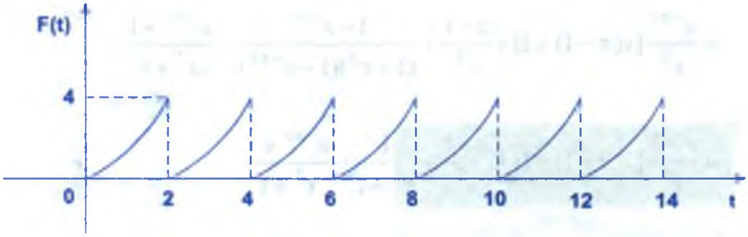
$$L\{F(t)\} = L\{Tg\theta.t\} = \frac{\int_0^a e^{-st}\,\text{tg}\,\theta.tdt}{1-e^{-as}} = \frac{\text{tg}\,\theta}{1-e^{-as}}\int_0^a e^{-st}tdt = \frac{\text{tg}\,\theta}{1-e^{-as}}(\frac{1-e^{as}-as\,e^{-as}}{s^2})$$

$$\therefore L\{F(t)\} = \frac{\text{tg}\,\theta\,(1-e^{-as}-as\,e^{-as})}{s^2(1-e^{-as})}$$

(3) Si $F(t) = t^2$, $0 < t < 2$ y $F(t+2) = F(t)$ hallar $L\{F(t)\}$

Solución

Graficando la función periódica de F(t) se tiene:



$$L\{F(t)\}=\frac{\int_0^p e^{-st}F(t)dt}{1-e^{-ps}}=\frac{\int_0^2 e^{-st}t^2(t)dt}{1-e^{-2s}}=\frac{1}{1-e^{-2s}}\int_0^2 t^2e^{-st}dt$$

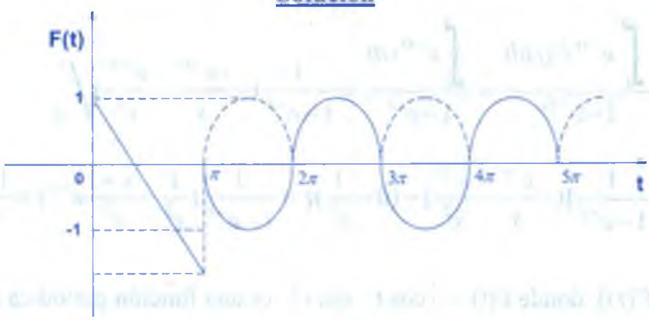
$$=\frac{1}{1-e^{-2s}}(-\frac{t^2}{s}-\frac{2t}{s^2}-\frac{2}{s^3})e^{-2s}\Big/_0^2=\frac{1}{1-e^{-2s}}[(-\frac{4}{s}-\frac{4}{s^2}-\frac{2}{s^3})e^{-2s}-(0-0-\frac{2}{s^3})]$$

$$\therefore L\{F(t)\}=\frac{2-2e^{-2s}-4s.e^{-2s}-4s^2e^{-2s}}{s^2(1-e^{-2s})}$$

(4) Determinar la transformada de Laplace de la función F(t) definida por:

$$F(t)=\begin{cases}1-t & ,t<\pi\\ |\operatorname{sen} t| & ,t>\pi\end{cases}$$

Solución



La función $F(t)=|\operatorname{sen} t|$, es periódica de periodo p = π

$$L\{F(t)\}=\int_0^{+\infty}e^{-st}F(t)dt=\int_0^{\pi}e^{-st}F(t)dt+\int_{\pi}^{+\infty}e^{-st}F(t)dt=\int_0^{\pi}(1-t)e^{-st}dt+\int_{\pi}^{+\infty}e^{-st}|\operatorname{sen} t|dt$$

$$=\int_0^{\pi}(1-t)e^{-st}dt+\frac{1}{1-e^{-\pi s}}\int_0^{\pi}e^{-st}\operatorname{sen} t\ dt-\int_0^{\pi}e^{-st}\operatorname{sen} t\ dt$$

$$= \frac{e^{-\pi s}}{s^2}[s(\pi-1)+1] + \frac{s-1}{s^2} + \frac{1-e^{-\pi s}}{(1+s^2)(1-e^{-\pi s})} - \frac{e^{-\pi s}+1}{s^2+1}$$

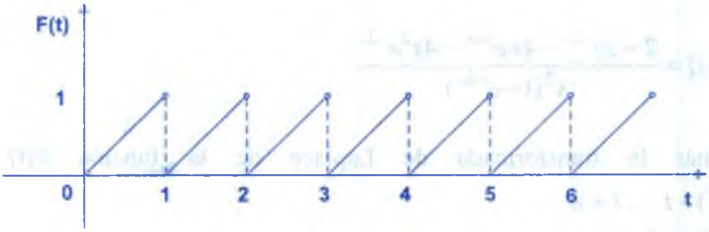
$$= \frac{e^{-\pi s}}{s^2}[s(\pi-1)+1] + \frac{s-1}{s^2} + \frac{1}{s^2+1} - \frac{e^{-\pi s}+1}{s^2+1}$$

$$\therefore \quad L\{F(t)\} = \frac{e^{-\pi s}}{s^2}[s(\pi-1)+1] + \frac{s-1}{s^2} - \frac{e^{-\pi s}}{s^2+1}$$

5 Hallar $L\{t-[|t|]\}$

Solución

Graficando la función $F(t) = t - [|t|]$



La función $F(t) = t - [|t|]$ es periódica de periodo T = 1.

$$L\{F(t)\} = \frac{\int_0^T e^{-st}F(t)dt}{1-e^{-Ts}} = \frac{\int_0^1 e^{-st}t\,dt}{1-e^{-s}} = \frac{1}{1-e^{-s}}\left(-\frac{te^{-st}}{s} - \frac{e^{-st}}{s^2}\right)\Big/_0^1$$

$$= \frac{1}{1-e^{-s}}\left[\left(-\frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-s}}{s^2}\right) - \left(0 - \frac{1}{s^2}\right)\right] = \frac{1}{1-e^{-s}}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{s+1}{s^2}e^{-s}\right) = \frac{1-(s+1)e^{-s}}{s^2(1-e^{-s})}$$

6 Hallar $L\{F(t)\}$ donde F(t) = $|\cos t - \operatorname{sen} t|$, es una función periódica de periodo T = π.

Solución

$$F(t) = |\cos t - \operatorname{sen} t| = \begin{cases} \cos t - \operatorname{sen} t \ , & si \ 0 \le t \le \dfrac{\pi}{4} \\ \operatorname{sen} t - \cos t \ , & si \ \dfrac{\pi}{4} < t \le \pi \end{cases}$$

$$L\{F(t)\}=\frac{\int_0^T e^{-st}F(t)dt}{1-e^{-Ts}}=\frac{\int_0^{\pi} e^{-st}\left|\cos t-\operatorname{sen} t\right|dt}{1-e^{-\pi s}}$$

$$=\frac{1}{1-e^{-\pi s}}\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left|\cos t-\operatorname{sen} t\right|e^{-st}dt+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\left|\cos t-\operatorname{sen} t\right|e^{-st}dt\right]$$

$$=\frac{1}{1-e^{-\pi s}}\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{-st}(\cos t-\operatorname{sen} t)dt+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}e^{-st}(\operatorname{sen} t-\cos t)dt\right]$$

$$=\frac{1}{1-e^{-\pi s}}\left[\frac{e^{-st}}{1+s^2}(\operatorname{sen} t-s.\cos t+s.\operatorname{sen} t+\cos t)\Big/_{0}^{\frac{\pi}{4}}\right.$$

$$\left.+\frac{e^{-st}}{1+s^2}(s.\cos t-\operatorname{sen} t-\operatorname{sen} t-\cos t)\Big/_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\right]$$

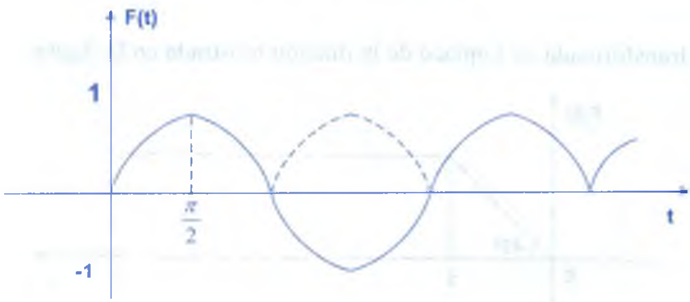
$$=\frac{1}{(1-e^{\pi s})(1+s^2)}(2\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}s}+(s-1)(1-e^{-\pi s}))$$

$$\therefore\quad L\{F(t)\}=\frac{2\sqrt{2}\,e^{-\frac{\pi}{4}s}+(s-1)(1-e^{-\pi s})}{(1-e^{-\pi s})(1+s^2)}$$

7 Hallar $L\{F(t)\}$ donde F(t) = $|\operatorname{sen} t|$.

Solución

Graficando la función F(t) = $|\operatorname{sen} t|$.

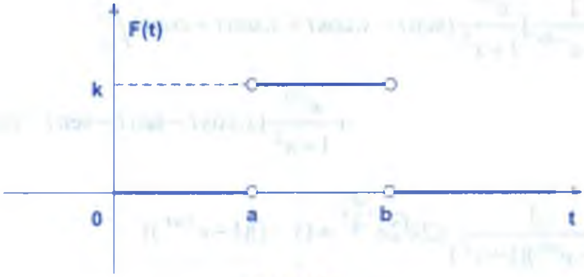


La función F(t) es periódica de periodo P = π, ahora aplicamos el teorema para calcular la transformada.

$$L\{|\text{sen}\, t|\} = \frac{1}{1-e^{-\pi s}} \int_0^{\pi} e^{-st} \text{sen}\, t\, dt = \frac{1+e^{-\pi s}}{(1-e^{-\pi s})(1+s^2)}$$

$$\therefore \quad L\{|\text{sen}\, t|\} = \frac{1+e^{-\pi s}}{(1-e^{-\pi s})(1+s^2)}$$

8 Encontrar la Transformada de Laplace de la función que se muestra en la figura.



Solución

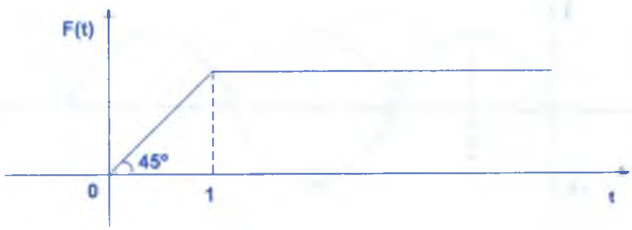
A la función F(t) expresaremos en términos de la función escalón unidad.

$F(t) = k(\mu_a(t) - \mu_b(t))$ son transformada de Laplace es:

$$L\{F(t)\} = k\, L\{\mu_a(t)\} - k\, L\{\mu_b(t)\} = \frac{k}{s}(e^{-as} - e^{-bs})$$

$$\therefore \quad L\{F(t)\} = \frac{k}{s}(e^{-as} - e^{-bs})$$

9 Hallar la transformada de Laplace de la función mostrada en la figura.



Solución

Definiendo la función F(t) se tiene: $F(t)=\begin{cases} t \ , & para \ \ 0<t\le 1 \\ 1 \ , & para \ \ t>1 \end{cases}$

$$L\{F(t)\}=\int_0^{+\infty} e^{-st}F(t)dt=\int_0^1 t\,e^{-st}+\int_1^{+\infty} e^{-st}dt=(-\frac{t\,e^{-st}}{s}-\frac{e^{-st}}{s^2})\Big/_0^1 -\frac{e^{-st}}{s}\Big/_1^{\infty}$$

$$=(-\frac{e^{-s}}{s}-\frac{e^{-s}}{s^2})-(0-\frac{1}{s^2})-(0-\frac{e^{-s}}{s})=\frac{1-e^{-s}}{s^2}$$

$$\therefore \ L\{F(t)\}=\frac{1-e^{-s}}{s^2}$$

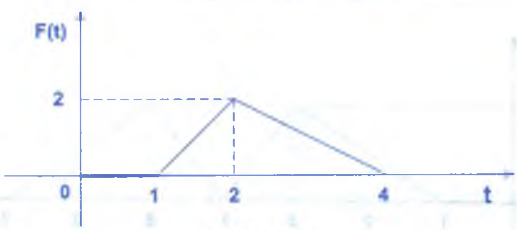
También la Transformada de Laplace de F(t) se calcula expresado a F(t) en términos de la función escalón unidad, es decir: F(t) = t - (1 - t) μ (t - 1)

$$L\{F(t)\}=L\{t+(1-t)\mu(t-1)\}=L\{t\}+L\{\mu(t-1)\}-L\{t\ \mu(t-1)\}$$

$$=\frac{1}{s^2}+\frac{e^{-s}}{s}+\frac{d}{ds}L\{\mu(t-1)\}=\frac{1}{s^2}+\frac{e^{-s}}{s}+\frac{d}{ds}(\frac{e^{-s}}{s})=\frac{1}{s^2}-\frac{e^{-s}}{s^2}$$

$$\therefore \ L\{F(t)\}=\frac{1-e^{-s}}{s^2}$$

10 Hallar la transformada de la figura



Solución

Definiremos la función F(t)

Si t ∈ [0,1> ⇒ F(t) = 0

Si t ∈ [1,2> ⇒ F(t) = 2t - 2

Si t ∈ [2,4> ⇒ F(t) = 4 - t

Si t ≥ 4 ⇒ F(t) = 0

luego: $F(t)=\begin{cases} 0 & , \ si \ \ t\in[0,1> \\ 2t-2 & , \ si \ \ t\in[1,2> \\ 4-t & , \ si \ \ t\in[2,4> \\ 0 & , \ si \ \ t\geq 4 \end{cases}$

a la función F(t) expresaremos en términos de la función escalón unidad.

$F(t) = 0 + (2t - 2 - 0)\ \mu(t - 1) + (4 - t - 2t + 2)\ \mu(t - 2) + (0 - 4 + t)\ \mu(t - 4)$

$F(t) = (2t - 2)\ \mu(t - 1) + (6 - 3t)\ \mu(t - 2) + (t - 4)\ \mu(t - 4)$

$F(t) = 2t\ \mu(t - 1) - 2\ \mu(t - 1) + 6\ \mu(t - 2) - 3t\ \mu(t - 2) + t\ \mu(t - 4) - 4\ \mu(t - 4)$

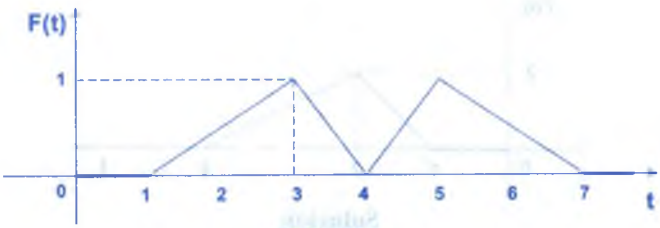
$$L\{F(t)\}=-2\frac{d}{ds}L\{\mu(t-1)\}-2L\{\mu(t-1)\}+6L\{\mu(t-2)\}+3\frac{d}{ds}L\{\mu(t-2)\}$$

$$-\frac{d}{ds}L\{\mu(t-4)\}-4L\{\mu(t-4)\}$$

$$=-2\frac{d}{ds}(\frac{e^{-s}}{s})-\frac{2e^{-s}}{s}+6\frac{e^{-2s}}{s}+3\frac{d}{ds}(\frac{e^{-2s}}{s})-\frac{d}{ds}(\frac{e^{-4s}}{s})-4\frac{e^{-4s}}{s}$$

$$=\frac{2e^{-s}}{s^2}-\frac{3e^{-2s}}{s^2}+\frac{e^{-4s}}{s^2} \qquad \therefore \ L\{F(t)\}=\frac{e^{-4s}-3e^{-2s}+2e^{-s}}{s^2}$$

(11) Hallar la Transformada de la Laplace de la figura



Solución

Definiremos la función de acuerdo al gráfico

$$F(t)=\begin{cases}0 & , si\ 0\le t<1\\ \frac{t-1}{2} & , si\ 1\le t<3\\ 4-t & , si\ 3\le t<4\\ t-5 & , si\ 4\le t<5\\ \frac{7-t}{2} & , si\ 5<t<7\\ 0 & , si\ t\ge 7\end{cases}$$

Ahora expresaremos a la función F(t) en términos de la función escalar unidad, que es la forma mas simplificada.

$$F(t)=0+(\frac{t-1}{2}-0)\,\mu(t-1)+(4-t-\frac{t-1}{2})\,\mu(t-3)+(t-5-4-t)\,\mu(t-4)$$

$$+(\frac{7-t}{2}-t+5)\,\mu(t-5)+(0-\frac{7-t}{2})\ \mu(t-7)$$

$$F(t)=\frac{t}{2}\mu(t-1)-\frac{\mu(t-1)}{2}+\frac{9}{2}\mu(t-3)-\frac{5}{2}t\,\mu(t-3)+2t\mu(t-4)-9\mu(t-4)$$

$$+\frac{17}{2}\mu(t-5)-\frac{3}{2}t\mu(t-5)-\frac{7}{2}\mu(t-7)+\frac{t}{2}\mu(t-7)$$

$$L\{F(t)\}=-\frac{d}{ds}L\{\mu(t-1)\}-\frac{e^{-s}}{2s}+\frac{9e^{-3s}}{2s}+\frac{5}{2}\frac{d}{ds}L\{\mu(t-3)\}-2\frac{d}{ds}L\{\mu(t-4)\}$$

$$-\frac{9e^{-4s}}{s}+\frac{17}{2}\frac{e^{-5s}}{s}+\frac{3}{2}\frac{d}{ds}L\{\mu(t-5)\}-\frac{7}{2}.\frac{e^{-7s}}{s}-\frac{d}{ds}L\{\mu(t-7)\}$$

$$=-\frac{d}{ds}(\frac{e^{-s}}{s})+\frac{9e^{-3s}-e^{-s}+17e^{-5s}-7e^{7s}}{2s}+\frac{5}{2}\frac{d}{ds}(\frac{e^{-3s}}{s})+2\frac{d}{ds}(\frac{e^{-4s}}{s})$$

$$-\frac{3}{2}\frac{d}{ds}(\frac{e^{-5s}}{s})+\frac{d}{ds}(\frac{e^{-7s}}{s})$$

$$=\frac{e^{-s}}{2s^2}-\frac{3e^{-3s}}{2s^2}+\frac{2e^{-4s}}{s^2}-\frac{3e^{-5s}}{s^2}+\frac{e^{-7s}}{s^2}$$

$$\therefore \quad L\{F(t)\} = \frac{e^{-s} - 3e^{-3s} + 4e^{-4s} - 6e^{-5s} + 2e^{-7s}}{2s^2}$$

(12) Calcular $L\{|t - |t-2||\}$

Solución

Definiendo el valor absoluto en la función $F(t) = |t - |t-2||$

$F(t) = \begin{cases} 2-t & , \ si \ t < 1 \\ 2t-2 & , \ si \ 1 \le t < 2 \\ 2 & , \ si \ t \ge 2 \end{cases}$, expresaremos en términos de la función escalón unidad.

F(t) = 2 - 2t + (4t + 4) μ(t - 1) + (4 - 2t) μ(t - 2)

L{F(t)} = L{2 - 2t + (4t - 4) μ(t - 1) - 2(t - 2) μ(t - 2)}

$$= \frac{2}{s} - \frac{2}{s^2} + 4e^{-s} L\{t\} - 2e^{-2s} L\{t\} = \frac{2}{s} - \frac{2}{s^2} + \frac{4e^{-s}}{s^2} - \frac{2e^{-2s}}{s^2}$$

$$\therefore \quad L\{|t - |t-2||\} = \frac{2}{s} - \frac{2}{s^2} + \frac{4e^{-s}}{s^2} - \frac{2e^{-2s}}{s^2}$$

(13) Calcular $L\{3^t \mu_2^2(t)\}$

Solución

$$L\{3^t\} = L\{e^{t\ln 3}\} = \frac{1}{s - \ln 3}$$

también $\mu_{2(t)} = \mu_{(t-2)} = \begin{cases} 1 & , \ si \ t > 2 \\ 0 & , \ si \ t \le 2 \end{cases}$; $\mu_2^2(t) = \mu^2(t-2) = \begin{cases} 0 & , \ si \ t \le 2 \\ 1 & , \ si \ t > 2 \end{cases}$

$$L\{3^t \mu_2^2(t)\} = \frac{e^{-2(s-\ln 3)}}{s - \ln s}$$

(14) Calcular $L\{t\,e^{-t} \operatorname{sen} 4t.\,\mu(e^t - 3)\}$

Solución

Analizando la función escalón se tiene:

$$\mu(e^t-3)=\begin{cases}0 & , \ si\ e^t-3<0\\ 1 & , \ si\ e^t-3\ge 0\end{cases}=\begin{cases}0 & , \ si\ t<\ln 3\\ 1 & , \ si\ t\ge \ln 3\end{cases}$$

$$\mu(e^t-3)=\begin{cases}0 & , \ si\ t-\ln 3<0\\ 1 & , \ si\ t-\ln 3\ge 0\end{cases} \qquad \ldots (1)$$

$$\mu(t-\ln 3)=\begin{cases}0 & , \ si\ t-\ln 3<0\\ 1 & , \ si\ t-\ln 3\ge 0\end{cases} \qquad \ldots (2)$$

Luego de (1) y (2) se tiene $\mu(e^t-3)=\mu(t-\ln 3)$

Si $F(t)=t\,e^{-t}\operatorname{sen}4t.\mu(e^t-3)=t\,e^{-t}\operatorname{sen}4t.\mu(t-\ln 3)$, entonces

$$L\{t\,e^{-t}\operatorname{sen}4t.\mu(e^t-3)\}=L\{t\,e^{-t}\operatorname{sen}4t.\mu(t-\ln 3)\}$$

ahora mediante la propiedad de Transformada se tiene:

$$L\{\operatorname{sen}4t.\mu(t-\ln 3)\}=e^{-s\ln 3}L\{\operatorname{sen}(4t+4\ln 3)\}$$

$$=e^{-s\ln 3}L\{\operatorname{sen}4t.\cos 4\ln 3+\cos 4t.\operatorname{sen}4\ln 3\}=e^{-s\ln 3}\left[\frac{4\cos 4\ln 3}{s^2+16}+\frac{\operatorname{sen}(4\ln 3).s}{s^2+16}\right]$$

$$L\{t\operatorname{sen}4t.\mu(t-\ln 3)\}=-\frac{d}{ds}L\{\operatorname{sen}4t.\mu(t-\ln 3)\}=-\frac{d}{ds}\left[e^{-s\ln 3}\left(\frac{4\cos 4\ln 3+\operatorname{sen}(4\ln 3)s}{s^2+16}\right)\right]$$

$$=\frac{\ln 3.\operatorname{sen}(4\ln 3)s+(4\ln 3.\cos 4\ln 3+\operatorname{sen}4\ln 3)s^2}{s^2+16}+$$

$$+\frac{(8\cos 4\ln 3-16\operatorname{sen}4\ln 3)s+16(4\ln 3.\cos 4\ln 3-\operatorname{sen}4\ln 3)}{(s^2+16)^2}$$

(15) Calcular $L\{t^2e^{-t}\mu(|t^2-7|-2)\}$

Solución

Analizando la función escalón se tiene: $\mu(|t^2-7|-2)=\begin{cases}0 & \text{si } |t^2-7|-2<0\\ 1 & \text{si } |t^2-7|-2\ge 0\end{cases}$

si $|t^2-7|<2 \Rightarrow -2<t^2-7<2 \Rightarrow 5<t^2<9$

$$5<t^2<9 \Leftrightarrow 5<t^2 \wedge t^2<9 \Leftrightarrow (t<-\sqrt{5} \vee t>\sqrt{5}) \wedge -3<t<3$$

$$\Leftrightarrow -3<t<-\sqrt{5} \vee \sqrt{5}<t<3$$

si $|t^2-7|\geq 2 \Leftrightarrow t^2-7\geq 2 \vee t^2-7\leq -2 \Leftrightarrow t^2\geq 9 \vee t^2\leq 5$

$$\Leftrightarrow t\geq 3 \vee t\leq -3 \vee -\sqrt{5}\leq t\leq \sqrt{5}$$

Luego la Transformada de Laplace de $\mu((t^2-7|-2)$ existe en $0\leq t\leq\sqrt{5}$, $\sqrt{5}<t<3$

y $t\geq 3$ entonces: $\mu(|t^2-7|-2)=\begin{cases} 1, & si\ 0\leq t\leq\sqrt{5} \\ 0, & si\ \sqrt{5}<t<3 \\ 1, & si\ t\geq 3 \end{cases}$

$$L\{\mu(|t^2-7|-2)\}=\int_0^\infty e^{-st}\mu(|t^2-7|-2)dt$$

$$=\int_0^{\sqrt{5}} e^{-st}\mu(|t^2-7|-2)dt+\int_{\sqrt{5}}^3 e^{-st}\mu(|t^2-7|-2)dt+\int_3^\infty e^{-st}\mu(|t^2-7|-2)dt$$

$$=\int_0^{\sqrt{5}} e^{-st}dt+0+\int_3^\infty e^{-st}dt=\frac{e^{-3s}}{s}-\frac{e^{-\sqrt{5}s}}{s}+\frac{1}{s}$$

$$L\{t^2\mu(|t^2-7|-2)\}=(-1)^2\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{e^{-3s}}{s}-\frac{e^{-\sqrt{5}s}}{s}+\frac{1}{s}\right)=\frac{d}{ds}\left(\frac{(\sqrt{5}s+1)e^{-\sqrt{5}s}-(3s+1)e^{-3s}+1}{s^2}\right)$$

$$=\frac{9s^2e^{-3s}+((6-2\sqrt{5})s-5s^2)e^{-\sqrt{5}s}-2}{s^3}$$

$$L\{t^2e^{-t}\mu(|t^2-7|-2)dt\}=\frac{9(s+1)^2e^{-3(s+1)}+(6-2\sqrt{5})(s+1)-5(s+1)^2e^{-\sqrt{5}(s+1)}-2}{(s+1)^3}$$

16 Calcular $L\{t\pi^{-2t}\cos t.\text{sen}\, t.\mu(t-4)\}$

Solución

Sea $F(t)=t\pi^{-2t}\cos t.\operatorname{sen} t.\mu(t-4)=\dfrac{t\pi^{-2t}}{2}\operatorname{sen} 2t.\mu(t-4)=\dfrac{t\,e^{-2\ln\pi.t}\operatorname{sen} 2t.\mu(t-4)}{2}$

$$L\{F(t)\}=\frac{1}{2}L\{te^{-2\ln\pi.t}\operatorname{sen} 2t.\mu(t-4)\}=\frac{e^{-4s}}{2}L\{(t+4)e^{-2\ln\pi(t+4)}\operatorname{sen} 2(t+4)\} \qquad \dots (1)$$

$$L\{(t+4)\operatorname{sen} 2(t+4)\}=L\{(t+4)(\operatorname{sen} 2t.\cos 8+\operatorname{sen} 8.\cos 2t)\}$$

$$=L\{4(\operatorname{sen} 2t.\cos 8+\operatorname{sen} 8.\cos 2t)\}+L\{t(\operatorname{sen} 2t.\cos 8+\operatorname{sen} 8.\cos 2t)\}$$

$$=\frac{8\cos 8+4s.\operatorname{sen} 8}{s^2+4}-\frac{d}{ds}L\{\cos 8.\operatorname{sen} 2t+\operatorname{sen} 8.\cos 2t\}$$

$$=\frac{8\cos 8+4s.\operatorname{sen} 8}{s^2+4}+\frac{4\cos 8.s+\operatorname{sen} 8.s^2-4\operatorname{sen} 8}{(s^2+4)^2} \qquad \dots (2)$$

$$L\{e^{-2\ln\pi t}(t+4)\operatorname{sen} 2(t+4)\}=\frac{8\cos 8+4\operatorname{sen} 8(s+2\ln\pi)}{(s+2\ln\pi)^2+4}+$$

$$+\frac{4\cos 8(s+2\ln\pi)+\operatorname{sen} 8(s+2\ln\pi)^2-4\operatorname{sen} 8}{((s+2\ln\pi)^2+4)^2} \qquad \dots (3)$$

reemplazando (3) en (1) se tiene:

$$L\{F(t)\}=\frac{e^{-4s-8\ln\pi}}{2}\left[\frac{8\cos 8+4\operatorname{sen} 8(s+2\ln\pi)}{(s+2\ln\pi)^2+4}+\right.$$

$$\left.+\frac{4\cos 8(s+2\ln\pi)+\operatorname{sen} 8(s+2\ln\pi)^2-4\operatorname{sen} 8}{((s+2\ln\pi)^2+4)^2}\right]$$

17) Evaluar: $L\{\displaystyle\int_{\mu}^{2\mu}\frac{\cosh 4\mu}{\pi\mu}\operatorname{sen}(\mu-\frac{\pi}{4})\cos(\mu-\frac{\pi}{4})\mu(\mu-\frac{\pi}{4})d\mu\}$

Solución

$$\text{Sea}\quad f(s)=L\{\int_{\mu}^{2\mu}\frac{\cosh 4\mu}{\pi\mu}\operatorname{sen}(\mu-\frac{\pi}{4})\cos(\mu-\frac{\pi}{4})\mu(\mu-\frac{\pi}{4})d\mu\} \qquad \dots (1)$$

$$\frac{\cosh 4\mu}{\pi\mu}=e^{-\mu\ln\pi}\left(\frac{e^{4\mu}+e^{-4\mu}}{2}\right)=\frac{e^{(4-\ln\pi)\mu}+e^{-(4+\ln\pi)\mu}}{2} \quad \ldots (2)$$

reemplazando (2) en (1) se tiene:

$$f(s)=\frac{1}{2}L\{\int_{\mu}^{2\mu}\left(\frac{e^{(4-\ln\pi)\mu}+e^{-(4+\ln\pi)\mu}}{2}\right)\operatorname{sen}2(\mu-\frac{\pi}{4})\mu(\mu-\frac{\pi}{4})d\mu\}$$

$$=\frac{1}{4}[L\{\int_{\mu}^{2\mu}(e^{(4-\ln\pi)\mu}+e^{-(4+\ln\pi)\mu})\operatorname{sen}2(\mu-\frac{\pi}{4})\mu(\mu-\frac{\pi}{4})d\mu\}-$$

$$-L\{\int_{0}^{t}(e^{(4-\ln\pi)\mu}+e^{-(4+\ln\pi)\mu})\operatorname{sen}2(\mu-\frac{\pi}{4})\mu(\mu-\frac{\pi}{4})d\mu\}] \quad \ldots (3)$$

$$L\{\operatorname{sen}(\mu-\frac{\pi}{4})\cos(\mu-\frac{\pi}{4})\mu(\mu-\frac{\pi}{4})\}=e^{-\frac{\pi}{4}s}L\{\operatorname{sen}\mu.\cos\mu\}=\frac{e^{-\frac{\pi}{4}s}}{2}L\{\operatorname{sen}2\mu\}=\frac{e^{-\frac{\pi}{4}s}}{s^2+4}$$

$$L\{(e^{(4-\ln\pi)\mu}+e^{-(4+\ln\pi)\mu})\operatorname{sen}(\mu-\frac{\pi}{4})\cos(\mu-\frac{\pi}{4})\mu(\mu-\frac{\pi}{4})\}=\frac{e^{-\frac{\pi}{4}(s-4+\ln\pi)}}{(s-4+\ln\pi)^2+4}+$$

$$+\frac{e^{-\frac{\pi}{4}(s+4+\ln\pi)}}{(s+4+\ln\pi)^2+4}$$

$$L\{\int_{0}^{t}(e^{(4-\ln\pi)\mu}+e^{-(4+\ln\pi)\mu})\operatorname{sen}2(\mu-\frac{\pi}{4})\mu(\mu-\frac{\pi}{4})d\mu\}=$$

$$=\frac{1}{s}\left[\frac{e^{-\frac{\pi}{4}(s-4+\ln\pi)}}{(s-4+\ln\pi)^2+4}+\frac{e^{-\frac{\pi}{4}(s+4+\ln\pi)}}{(s+4+\ln\pi)^2+4}\right]=g(s) \quad \ldots (4)$$

$$L\{\int_{0}^{2\mu}(e^{(4-\ln\pi)\mu}+e^{-(4+\ln\pi)\mu})\operatorname{sen}2(\mu-\frac{\pi}{4})\mu(\mu-\frac{\pi}{4})d\mu\}=\frac{1}{2}g(\frac{s}{2})$$

$$=\frac{1}{s}\left[\frac{e^{-\frac{\pi}{4}(\frac{s}{2}-4+\ln\pi)}}{(\frac{s}{2}-4+\ln\pi)^2+4}+\frac{e^{-\frac{\pi}{4}(\frac{s}{2}+4+\ln\pi)}}{(\frac{s}{2}+4+\ln\pi)^2+4}\right] \quad \ldots (5)$$

ahora reemplazamos (5), (4) en (3)

$$f(s)=\frac{1}{2s}[\frac{e^{-\frac{\pi}{4}(\frac{s}{2}-4+\ln\pi)}}{(\frac{s}{2}-4+\ln\pi)^2+4}+\frac{e^{-\frac{\pi}{4}(\frac{s}{2}+4+\ln\pi)}}{(\frac{s}{2}+4+\ln\pi)^2+4}-(\frac{e^{-\frac{\pi}{4}(s-4+\ln\pi)}}{(s-4+\ln\pi)^2}+\frac{e^{-\frac{\pi}{4}(\frac{s}{2}+4+\ln\pi)}}{(s+4+\ln\pi)^2+4})]$$

(18) Hallar $L\{\cos t.\ln t.\delta(t-\pi)\}$

Solución

Aplicando la propiedad de la función Delta de Dirac para cualquier función continua G(t), se tiene: $\int_0^\infty \delta(t-a).G(t)dt=G(a)$

$$L\{\cos t.\ln t.\delta(t-\pi)\}=\int_0^\infty e^{-st}\cos t.\ln t.\delta(t-\pi)dt=e^{-\pi s}\cos\pi\ln\pi=-e^{-\pi s}\ln\pi$$

(19) Calcular $L\{\int_0^{-2t}(\int_0^{x}(\int_0^{2y-v}\frac{e^{-v}\operatorname{sen}^2(v-4)}{v-4}\mu(v^2-16)dy)dx\}$

Solución

Sea $F(y)=\int_0^{y}\frac{e^{-v}\operatorname{sen}^2(v-4)}{(v-4)^2}\mu(v^2-16)dv$, aplicando la transformada

$$L\{F(y)\}=L\{\int_0^{y}\frac{e^{-v}\operatorname{sen}^2(v-4)\mu(v^2-16)dv}{(v-4)^2}\}=\frac{1}{s}L\{\frac{e^{-v}\operatorname{sen}^2(v-4)\mu(v-4)}{(v-4)^2}\}\ \ldots\ (1)$$

$$L\{\frac{\operatorname{sen}^2(v-4)\mu(v-4)}{(v-4)^2}\}=e^{-4s}L\{\frac{\operatorname{sen}^2 v}{v^2}\}=e^{-4s}(\frac{s}{4}\ln(\frac{s^2}{s^2+4})+\operatorname{arctg}(\frac{2}{s}))$$

$$L\{\frac{e^{-v}\operatorname{sen}^2(v-4)\mu(v-4)}{(v-4)^2}\}=e^{-4(s+1)}[\frac{s+1}{4}\ln(\frac{(s+1)^2}{(s+1)^2+4})+\operatorname{arctg}\frac{2}{s+1}]\quad\ldots\ (2)$$

reemplazando (2) en (1) se tiene:

$$L\{F(y)\}=\frac{e^{-4(s+1)}}{s}[\frac{s+1}{4}\ln(\frac{(s+1)^2}{(s+1)^2+4})+\operatorname{arctg}\frac{2}{s+1}]=H(s)\quad\ldots\ (\alpha)$$

como $L\{F(2y)\}=\frac{1}{2}H(\frac{s}{2}) \Rightarrow L\{\int_0^x F(2y)dy\}=\frac{1}{s}L\{F(2y)\}=\frac{1}{2s}H(\frac{s}{2})$

$$L\{\int_0^{-2t}(\int_0^x F(2y)dy)dx\}=-L\{\int_0^{-2t}(\int_0^x F(2y)dy)dx\} \qquad \text{... (3)}$$

$$L\{\int_0^t(\int_0^x F(2y)dy)dx\}=\frac{1}{2s^2}H(\frac{s}{2}) \Rightarrow L\{\int_0^{2t}(\int_0^x F(2y)dy)dx\}=\frac{2}{s^2}H(\frac{s}{4}) \qquad \text{... (4)}$$

de (α) se tiene: $H(s)=\frac{e^{-4(s+1)}}{s}[\frac{s+1}{4}\ln(\frac{(s+1)^2}{(s+1)^2+4})+\text{arctg}\frac{2}{s+1}]$

$$H(\frac{s}{4})=4\frac{e^{-(s+4)}}{s}[\frac{s+4}{16}\ln(\frac{(s+4)^2}{(s+4)^2+64})+\text{arctg}\frac{8}{s+4}] \qquad \text{... (5)}$$

reemplazando (5) en (4) se tiene:

$$L\{\int_0^{2t}(\int_0^x F(2y)dy)dx\}=\frac{8}{s^3}e^{-(s+4)}[\frac{s+4}{16}\ln(\frac{(s+4)^2}{(s+4)^2+64})+\text{arctg}\frac{8}{s+4}]$$

donde $F(2y)=\int_0^{2y}\frac{e^{-v^2}\text{sen}^2(v-4)U(v^2-16)}{(v-4)^2}dv$

20 Probar que: $\int_0^\infty x^P e^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\Gamma(\frac{P+1}{2})$, $p>-1$

Solución

Sea $z=x^2 \Rightarrow dz=2x\,dx \Rightarrow dx=\frac{dz}{2x}=\frac{dz}{2z^{\frac{1}{2}}}$

Si $x=0$, $z=0$ y si $x\to\infty$, $z\to\infty$

$$\int_0^\infty x^P e^{-x^2}dx=\int_0^\infty z^{\frac{P}{2}}e^{-z}.\frac{z^{-\frac{1}{2}}}{2}dz=\frac{1}{2}\int_0^\infty z^{\frac{P}{2}-\frac{1}{2}}e^{-z}dz=\frac{1}{2}\int_0^\infty z^{\frac{P+1}{2}-1}e^{-z}dz=\frac{1}{2}\Gamma(\frac{p+1}{2})$$

$$\therefore \int_0^\infty x^P e^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\Gamma(\frac{P+1}{2})$$

(21) Probar que: $L\{\ln t\} = \dfrac{\Gamma'(1) - \ln s}{s}$

Solución

Se conoce que $\Gamma(n) = \int_0^{\infty} \mu^{n-1} e^{-\mu} d\mu$, derivando con respecto a n

$\Gamma'(n) = \int_0^{\infty} \mu^{n-1} e^{-\mu} \ln \mu \, d\mu$, para n = 1

$\Gamma'(1) = \int_0^{\infty} e^{-u} \ln \mu \, d\mu$, haciendo $\mu = st$

$$\Gamma'(1) = s \int_0^{\infty} e^{-st} (\ln s + \ln t) dt = s \int_0^{\infty} e^{-st} \ln s \, dt + s \int_0^{\infty} e^{-st} \ln t \, dt$$

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \ln t \, dt = \frac{\Gamma'(1)}{s} - \int_0^{\infty} e^{-st} \ln s \, dt = \frac{\Gamma'(1)}{s} - \left(-\frac{e^{-st} \ln s}{s} \Big/_0^{\infty}\right)$$

$$= \frac{\Gamma'(1)}{s} + \left(0 - \frac{\ln s}{s}\right) = \frac{\Gamma'(1)}{s} - \frac{\ln s}{s} = \frac{\Gamma'(1) - \ln s}{s}$$

$$\therefore \quad L\{\ln t\} = \frac{\Gamma'(1) - \ln s}{s}$$

(22) Calcular $\int_0^{\infty} x^m e^{-ax^n} dx$, m, n, a > 0

Solución

Hacemos $\mu = ax^n \Rightarrow x^n = \dfrac{\mu}{a} \Rightarrow x = (\dfrac{\mu}{a})^{1/n} \Rightarrow dx = \dfrac{1}{n}(\dfrac{\mu}{a})^{\frac{1}{n}-1} \dfrac{1}{a} d\mu$

si x = 0 ; $\mu = 0$; si $x \to \infty$, $\Rightarrow \mu \to \infty$, sustituyendo en la integral

$$\int_0^{\infty} x^m e^{-ax^n} dx = \int_0^{\infty} (\frac{\mu}{a})^{\frac{m}{n}} e^{-\mu} \frac{1}{an} (\frac{\mu}{a})^{\frac{1}{n}-1} d\mu = (\frac{1}{a})^{\frac{m}{n}} \frac{1}{na} (\frac{1}{a})^{\frac{1}{n}-1} \int_0^{\infty} \mu^{\frac{m}{n}} \mu^{\frac{1}{n}-1} e^{-\mu} d\mu$$

$$= \frac{1}{na^{\frac{m}{n}+1+\frac{1}{n}-1}} \int_0^{\infty} \mu^{\frac{m+1}{n}-1} e^{-\mu} d\mu = \frac{1}{na^{\frac{m+1}{n}}} \Gamma(\frac{m+1}{n})$$

$$\therefore \quad \int_0^{\infty} x^m e^{-ax^n}\,dx = \frac{1}{na^{\frac{m+1}{n}}}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)$$

(23) Demostrar que: $\displaystyle\int_0^1 x^m (\ln x)^n\,dx = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}$, $n \in z^+$, m > -1.

Solución

Sea $\ln x = -\mu \;\Rightarrow\; x = e^{-\mu} \;\Rightarrow\; dx = -e^{-\mu} d\mu$

Si $x \to 0$, $\Rightarrow \mu \to \infty$: si $x \to 1$, $\Rightarrow \mu \to 0$

$$\int_0^1 x^m (\ln x)^n\,dx = \int_0^{\infty} e^{-m\mu}(-\mu)^n e^{-\mu}(-d\mu) = \int_0^{\infty} (-1)^n \mu^n e^{-(m+1)\mu} d\mu$$

Sea $(m+1)\mu = z \;\Rightarrow\; d\mu = \dfrac{dz}{m+1}$, además $\mu = 0$, $z = 0$, $\mu \to \infty$, $z \to \infty$

$$\int_0^1 x^m (\ln x)^n\,dx = \int_0^{\infty} (-1)^n \mu^n e^{-(m+1)\mu} d\mu = (-1)^n \int_0^{\infty} \left(\frac{z}{m+1}\right)^n e^{-z} \frac{dz}{m+1}$$

$$= \frac{(-1)^n}{(m+1)^{n+1}} \int_0^{\infty} e^{-z} z^n dz = \frac{(-1)^n}{(m+1)^{n+1}} \int_0^{\infty} e^{-z} z^{(n+1)-1} dz$$

$$= \frac{(-1)^n \Gamma(n+1)}{(m+1)^{n+1}} = \frac{(-1)^n . n!}{(m+1)^{n+1}}, \quad n \in z^+, \; m > -1$$

(24) Demostrar que: $L\{t^n\} = \dfrac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$, n > -1, s > 0

Solución

$L\{t^n\} = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-st} t^n dt$, por definición de Transformada de Laplace

Sea $x = st$, $s > 0 \;\Rightarrow\; t = \dfrac{x}{s}$

$$L\{t^n\} = \int_0^{\infty} e^{-st} t^n dt = \int_0^{\infty} e^{-x}\left(\frac{x}{s}\right)^n d\left(\frac{x}{s}\right) = \frac{1}{s^{n+1}} \int_0^{\infty} e^{-x} x^n dx = \frac{1}{s^{n+1}}\Gamma(n+1)$$

$$\therefore \quad L\{t^n\} = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$$

(25) Demostrar que: $L\{t^{-1/2}\} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$

Solución

Se conoce que: $L\{t^n\} = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n-1}} \Rightarrow L\{t^{-1/2}\} = \frac{\Gamma(-\frac{1}{2}+1)}{s^{-\frac{1}{2}+1}} = \frac{\Gamma(1/2)}{s^{1/2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$

$$\therefore \quad L\{t^{-1/2}\} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$$

(26) Si $s > 0$, $n > 1$, Demostrar que: $L\{\frac{t^{n+1}}{1-e^{-t}}\} = \Gamma(n)(\frac{1}{s^n} + \frac{1}{(s+1)^n} + \frac{1}{(s+2)^n} + \ldots)$

Solución

Se sabe que: $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots$, para $|x| < 1$

$$\frac{1}{1-e^{-t}} = 1 + e^{-t} + e^{-2t} + e^{-3t} + \ldots$$

$$\frac{t^{n-1}}{1-e^{-t}} = t^{n-1} + t^{n-1}e^{-t} + t^{n-1}e^{-2t} + t^{n-1}e^{-3t} + \ldots$$

$$L\{\frac{t^{n-1}}{1-e^{-t}}\} = L\{t^{n-1} + t^{n-1}e^{-t} + t^{n-1}e^{-2t} + t^{n-1}e^{-3t} + \ldots\}$$

$$= \frac{\Gamma(n)}{s^n} + \frac{\Gamma(n)}{(s+1)^n} + \frac{\Gamma(n)}{(s+2)^n} + \ldots = \Gamma(n)(\frac{1}{s^n} + \frac{1}{(s+1)^n} + \ldots)$$

(27) Hallar $L\{\frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\}$

Solución

Por medio de $L\{F'(t)\} = sL\{F(t)\} - F(0^+)$, donde:

$$F(t)=\operatorname{sen}\sqrt{t} \Rightarrow F'(t)=\frac{\cos\sqrt{t}}{2\sqrt{t}} \quad \text{y} \quad F(0^+)=0$$

$$L\{\frac{\cos\sqrt{t}}{2\sqrt{t}}\}=s\,L\{\operatorname{sen}\sqrt{t}\}-0\text{, donde } L\{\operatorname{sen}\sqrt{t}\}=\frac{\pi e^{-1/4s}}{2s^{3/2}}=\sqrt{\frac{\pi}{s}}\,e^{-1/4s}$$

(28) Calcular $\int_0^1 \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt{1-x^q}}$, q > 0, $\frac{p}{q}>0$ y deducir el valor de $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$

Solución

Sea $1-x^q=z \Rightarrow x^q=1-z \Rightarrow x=(1-z)^{1/q}$

$dx=-\frac{1}{q}(1-z)^{\frac{1}{q}-1}dz$, además $x^{p-1}=(1-z)^{\frac{p-1}{q}}$

Si x = 0, z = 1 y si x = 1, z = 0, entonces

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{\sqrt{1-x^q}}=-\frac{1}{q}\int_1^0 (1-z)^{\frac{p-1}{q}}.(1-z)^{\frac{1}{q}-1}\frac{dz}{z^{1/2}}=\frac{1}{q}\int_0^1 z^{-1/2}(1-z)^{\frac{p}{q}-1}dz$$

$$=\frac{1}{q}\int_0^1 z^{\frac{1}{2}-1}(1-z)^{\frac{p}{q}-1}dz=\frac{1}{q}B(\frac{1}{2},\frac{p}{q})=\frac{1}{q}(\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{p}{q})}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{p}{q})})=\frac{\sqrt{\pi}}{q}(\frac{\Gamma(\frac{p}{q})}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{p}{q})})$$

para el caso $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$, se tiene p = 1, q = 4.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}=\int_0^1 \frac{x^{1-1}}{\sqrt{1-x^4}}dx=\frac{1}{4}B(\frac{1}{2},\frac{1}{4})=\frac{1}{4}(\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{4})}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{4})})=\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{1}{4})}{4\Gamma(\frac{3}{4})}$$

(29) Evaluar $I_n=\int_{-1}^1 (1-t^2)^n dt$

Solución

Sea $\mu=1-t^2 \Rightarrow -2t\,dt=d\mu$; $\mu=1-t^2 \Rightarrow t=\sqrt{1-\mu} \Rightarrow dt=-\frac{d\mu}{2\sqrt{1-\mu}}$

Si $t=0$, $\mu=1$ y si $t=1$, $\mu=0$.

$$I_n=\int_{-1}^{1}(1-t^2)^n dt=2\int_0^1(1-t^2)^n dt=2\int_1^0\mu^n(-\frac{d\mu}{2\sqrt{1-\mu}})=\int_0^1\mu^n(1-\mu)^{-1/2}d\mu$$

$$=\int_0^1\mu^{(n+1)-1}(1-\mu)^{\frac{1}{2}-1}d\mu=B(n+1,\frac{1}{2})=\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(n+1+\frac{1}{2})}=\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\frac{3}{2})}$$

$$I_n=\frac{\sqrt{\pi}.n!}{(n+\frac{1}{2})(n-\frac{1}{2})...\frac{3}{2}.\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}=\frac{n!}{\frac{(2n+1)}{2}.\frac{(2n-1)}{2}...\frac{3}{2}.\frac{1}{2}}=\frac{2^{n+1}.n!}{(2n+1)(2n-1)...3.1}$$

30 Si $B(p,q)=\int_0^1 x^{P-1}(1-x)^{q-1}dx$, Demostrar que:

a) $B(p,q)=\int_1^{\infty}x^{-(P+q)}(x-1)^{q-1}dx$ b) $B(p,q)=\int_0^{\infty}x^{P-1}(1+x)^{-(p+q)}dx$

Solución

a) Sea $x=\frac{1}{z}$, cuando $x\to 0$; $z\to\infty$; cuando $x\to 1$; $z\to 1$

como $x=\frac{1}{z}\Rightarrow dx=-\frac{dz}{z^2}$

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{P-1}(1-x)^{q-1}dx=\int_{\infty}^1\frac{1}{z^{P-1}}(1-\frac{1}{z})^{q-1}(-\frac{dz}{z^2})=\int_1^{\infty}z^{-(P+q)}(z-1)^{q-1}dz$$

$$=\int_1^{\infty}x^{-(P+q)}(z-1)^{q-1}dz \qquad \therefore\ B(p,q)=\int_1^{\infty}x^{-(P+q)}(x-1)^{q-1}dx$$

b) Sea $z=\frac{x}{1-x}\Rightarrow x=\frac{z}{z+1}\Rightarrow dx=\frac{dz}{(z+1)^2}$

cuando $x\to 0$; $z\to 0$ y cuando $x\to 1$, $z\to\infty$

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{P-1}(1-x)^{q-1}dx=\int_0^{\infty}(\frac{z}{z+1})^{P-1}(1-\frac{z}{z+1})^{q-1}\frac{dz}{(z+1)^2}$$

$$= \int_0^{\infty} z^{P-1}(1+z)^{-(P+q)}dz = \int_0^{\infty} x^{P-1}(x+1)^{-(P+q)}dx$$

$$\therefore \quad B(p,q) = \int_0^{\infty} x^{P-1}(1+x)^{-(p+q)}dx$$

(31) Demostrar que $\int_0^2 \mu(8-\mu^3)^{1/3}d\mu = \frac{16\sqrt{3}}{27}\pi$

Solución

$$\int_0^2 \mu(8-\mu^3)^{1/3}d\mu = 2\int_0^2 \mu(1-(\frac{\mu}{2})^3)^{1/3}d\mu$$

Sea $x = (\frac{\mu}{2})^3 \Rightarrow x^{1/3} = \frac{\mu}{2} \Rightarrow d\mu = \frac{2}{3}x^{-2/3}dx$, para $\mu = 0$; $x = 0$, $\mu = 2$, $x = 1$.

$$\int_0^2 \mu(8-\mu^3)^{1/3}d\mu = 2\int_0^1 2x^{1/3}(1-x)^{1/3}\frac{2}{3}x^{-2/3}dx = \frac{8}{3}\int_0^1 x^{-1/3}(1-x)^{1/3}dx$$

como $B(m,n) = \int_0^1 \mu^{m-1}(1-\mu)^{n-1}d\mu$ entonces $\begin{cases} m-1 = -\frac{1}{3} \\ n-1 = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \frac{2}{3} \\ n = \frac{4}{3} \end{cases}$

$$\int_0^2 \mu(8-\mu^3)^{1/3}d\mu = \frac{8}{3}B(\frac{2}{3},\frac{4}{3}) = \frac{8}{3}(\frac{\Gamma(\frac{2}{3})\Gamma(\frac{4}{3})}{\Gamma(\frac{2}{3}+\frac{4}{3})}) = \frac{8}{3}(\frac{\Gamma(\frac{2}{3})\Gamma(\frac{4}{3})}{\Gamma(2)}) = \frac{8}{3}\Gamma(\frac{2}{3})\frac{1}{3}\Gamma(\frac{1}{3})$$

$$= \frac{8}{9}\Gamma(\frac{1}{3})\Gamma(1-\frac{1}{3}) = \frac{8}{9}(\frac{\pi}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}}) = \frac{16\sqrt{3}\pi}{27}$$

$$\therefore \quad \int_0^2 \mu(8-\mu^3)^{1/3}d\mu = \frac{16\sqrt{3}\pi}{27}$$

(32) Demostrar que: $\int_a^b (t-a)^p(b-t)^q dt = (b-a)^{p+q+1}B(p+1,q+1)$, donde $p > -1$, $q > -1$, $b > a$.

Solución

Sea $t=\mu+a \Rightarrow -t=-\mu-a \Rightarrow b-t=b-\mu-a$

si $t=a$, $\mu=0$; $t=b$, $\mu=b-a$.

$$\int_a^b (t-a)^p(b-t)^q\,dt = \int_a^{b-a} \mu^p(b-a-\mu)^q\,d\mu \qquad \textbf{... (1)}$$

Sea $x=\dfrac{\mu}{b-a} \Rightarrow \mu=(b-a)x \Rightarrow d\mu=(b-a)dx$

Si $\mu=0$, $x=0$, si $\mu=b-a$, $x=1$

$$\int_a^b (t-a)^p(b-t)^q\,dt = \int_a^{b-a} \mu^p(b-a-\mu)^q\,d\mu = \int_0^1 (b-a)^p x^p[(b-a)-(b-a)x]^q(b-a)dx$$

$$= \int_0^1 (b-a)^{p+1}x^p(b-a)^q(1-x)^q\,dx = (b-a)^{p+q+1}\int_0^1 x^p(1-x)^q\,dx$$

$$= (b-a)^{p+q+1}\int_0^1 x^{(p+1)-1}(1-x)^{(q+1)-1}\,dx = (b-a)^{p+q+1}B(p+1,q+1)$$

(33) Dado $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}dx=\frac{\pi}{\text{sen } p\pi}$. Demostrar que $\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\dfrac{\pi}{\text{sen } p\pi}$

Solución

Hacemos $\dfrac{x}{1+x}=y \Rightarrow x=\dfrac{y}{1-y} \Rightarrow dx=\dfrac{dy}{(1-y)^2}$

Si $x\to 0$, $y\to 0$, y si $x\to\infty$, $y\to 1$

$$\frac{\pi}{\text{sen } p\pi}=\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}dx=\int_0^1 \frac{\left(\frac{y}{1-y}\right)^{p-1}}{1+\frac{y}{1-y}}\cdot\frac{dy}{(1-y)^2}=\int_0^1 \frac{y^{p-1}(1-y)dy}{(1-y)^{p-1}(1-y)^2}=\int_0^1 y^{p-1}(1-y)^{-p}dy$$

$$=\int_0^1 y^{p-1}(1-y)^{(1-p)-1}dy=B(p,1-p)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(1-p)}{\Gamma(p+1-p)}=\Gamma(p)\Gamma(1-p)$$

$$\therefore \quad \frac{\pi}{\operatorname{sen} p\pi} = \Gamma(p)\Gamma(1-p)$$

(34) Mostrar que: $\Gamma(\frac{1}{2}+p)\Gamma(\frac{1}{2}-p) = \dfrac{\pi}{\cos p\pi}$

Solución

Del ejercicio anterior $\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \dfrac{\pi}{\operatorname{sen} p\pi}$

$$\Gamma(\frac{1}{2}+p)\Gamma(\frac{1}{2}-p) = \Gamma(\frac{1}{2}+p)\Gamma(1-(\frac{1}{2}+p)) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\frac{1}{2}+p)\pi} = \frac{\pi}{\cos p\pi}$$

$$\therefore \Gamma(\frac{1}{2}+p)\Gamma(\frac{1}{2}-p) = \frac{\pi}{\cos p\pi}$$

(35) Demostrar que: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^p}dx = \frac{\pi}{2\Gamma(p)\cos(\frac{p\pi}{2})}$, 0 < p < 1

Solución

Expresaremos $\dfrac{1}{x^p} = \dfrac{\Gamma(p)}{\Gamma(p)x^{(p-1)+1}} = \dfrac{(p-1)!}{\Gamma(p)x^{(p-1)+1}}$

$$\frac{1}{x^p} = \frac{(p-1)!}{\Gamma(p)x^{(p-1)+1}} = \frac{1}{\Gamma(p)}L\{t^{p-1}\} = \frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^\infty e^{-tx}t^{p-1}dt$$

$$\frac{\cos x}{x^p} = \frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^\infty e^{-tx}t^{p-1}\cos x\,dx$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos x\,dx}{x^p} = \int_0^\infty (\frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^\infty e^{-tx}t^{p-1}\cos x\,dt)dx = \frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^\infty t^{p-1}(\int_0^\infty e^{-tx}\cos x\,dx)dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^\infty t^{p-1}L\{\cos x\}dt = \frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^\infty t^{p-1}\frac{t}{t^2+1}dt$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^p}dx = \frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^\infty \frac{t^p}{1+t^2}dt$$

Haciendo $z = t^2 \Rightarrow t = z^{1/2} \Rightarrow dt = \dfrac{z^{-1/2}}{2} dz$

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^p} dx = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^\infty \frac{z^{p/2}}{1+z} \cdot \frac{z^{-1/2}}{2} dz = \frac{1}{2\Gamma(p)} \int_0^\infty \frac{z^{\frac{p+1}{2}-1}}{z+1} dz$$

$$= \frac{1}{2\Gamma(p)} \cdot \frac{\pi}{\operatorname{sen} \frac{p+1}{2}\pi} = \frac{\pi}{2\Gamma(p)\cos \frac{p\pi}{2}}$$

por lo tanto $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^p} dx = \frac{\pi}{2\Gamma(p)\cos \frac{p\pi}{2}}$

(36) Calcular $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{(t+1)\sqrt[15]{t^{14}(1-t)}}$

Solución

$$\int_0^1 \frac{dt}{(t+1)\sqrt[15]{t^{14}(1-t)}} = \int_0^1 \frac{t^{-14/15}(1-t)^{-1/15}}{t+1} dt$$

Sea $u = \dfrac{1}{1+t} \Rightarrow t = \dfrac{1-u}{u} \Rightarrow dt = -\dfrac{du}{u^2}$; cuando $t \to 0$; $u \to 1$; $t \to 1$; $u \to \dfrac{1}{2}$

$$\int_0^1 \frac{dt}{(t+1)\sqrt[15]{t^{14}(1-t)}} = \int_1^{1/2} \frac{(\frac{1-u}{u})^{-14/15}(1-\frac{1-u}{u})^{-1/15}}{\frac{1-u}{u}+1}(-\frac{du}{u^2}) = \int_{1/2}^1 (1-u)^{-14/15}(2u-1)^{-1/15} du$$

Sea $w = 2u-1 \Rightarrow u = \dfrac{w+1}{2} \Rightarrow du = \dfrac{dw}{2}$

cuando $u \to \dfrac{1}{2}$, $w \to 0$, $u \to 1$, $w \to 1$

$$\int_0^1 \frac{dt}{(t+1)\sqrt[15]{t^{14}(1-t)}} = \int_{1/2}^1 (1-u)^{-14/15}(2u-1)^{-1/15} du = \int_0^1 \frac{(1-w)^{-14/15} w^{-1/15} dw}{2^{-14/15}.2}$$

$$= \frac{1}{2^{1/15}} \int_0^1 (1-w)^{\frac{1}{15}-1} w^{\frac{14}{15}-1} dw = \frac{1}{2^{1/15}} B(\frac{1}{15}, \frac{14}{15}) = \frac{\Gamma(\frac{1}{15})\Gamma(\frac{14}{15})}{2^{1/15}\Gamma(\frac{1}{15}+\frac{14}{15})}$$

$$= \frac{1}{2^{1/15}} \Gamma(\frac{1}{15})\Gamma(1-\frac{1}{15}) = \frac{\pi}{2^{1/15}\operatorname{sen}(\frac{\pi}{15})}$$

$$\therefore \int_0^1 \frac{dt}{(t+1)\sqrt[15]{t^{14}(1-t)}} = \frac{\pi}{2^{1/15}\operatorname{sen}(\frac{\pi}{15})}$$

37) Calcular $\int_0^\infty \frac{t^{a-1}dt}{1+t^b}$, a > 0 , b > 0.

Solución

Hacemos $u = \frac{t^b}{1+t^b} \Rightarrow t^b = \frac{u}{1-u} \Rightarrow t = (\frac{u}{1-u})^{1/b} \Rightarrow dt = \frac{1}{b}(\frac{u}{1-u})^{\frac{1}{b}-1} \frac{du}{(1-u)^2}$

$t^b = \frac{u}{1-u} \Rightarrow 1+t^b = 1-\frac{u}{1-u} = \frac{1}{1-u}$, cuando t $\to 0$, u $\to 0$ y si t $\to \infty$, u $\to 1$

$$\int_0^\infty \frac{t^{a-1}}{1+t^b} dt = \int_0^1 \frac{(\frac{u}{1-u})^{\frac{a-1}{b}}}{\frac{1}{1-u}} \cdot \frac{1}{b}(\frac{u}{1-u})^{\frac{1}{b}-1} \frac{du}{(1-u)^2} = \frac{1}{b}\int_0^1 \frac{u^{\frac{a-1}{b}} . u^{\frac{1}{b}-1} du}{(1-u)^{\frac{a-1}{b}}(1-u)^{\frac{1}{b}-1}(1-u)}$$

$$= \frac{1}{b}\int_0^1 \frac{u^{\frac{a}{b}-1} du}{(1-u)^{\frac{a}{b}}} = \frac{1}{b}\int_0^1 u^{\frac{a}{b}-1}.(1-u)^{(1-\frac{a}{b})-1} du = \frac{1}{b} B(\frac{a}{b}, 1-\frac{a}{b})$$

$$= \frac{1}{b}(\frac{\Gamma(\frac{a}{b})\Gamma(1-\frac{a}{b})}{\Gamma(\frac{a}{b}+1-\frac{a}{b})} = \frac{1}{b}\Gamma(\frac{a}{b})\Gamma(1-\frac{a}{b}) = \frac{\pi}{b\operatorname{sen}(\frac{a\pi}{b})}$$

38) Demostrar que $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}} = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{1}{n})}{n\Gamma(\frac{n+2}{2n})}$

Solución

Por definición $B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}.(1-x)^{q-1}dx$

Sea $1-x^n=u \Rightarrow x^n=1-u \Rightarrow x=(1-u)^{1/n}$, de donde $dx=-\frac{1}{n}(1-u)^{\frac{1}{n}-1}du$

Si x = 0, u = 1 y si x = 1, u = 0

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}}=\int_1^0 \frac{-\frac{1}{n}(1-u)^{\frac{1}{n}-1}du}{u^{1/2}}=\frac{1}{n}\int_0^1 u^{-1/2}(1-u)^{\frac{1}{n}-1}du$$

$$=\frac{1}{n}\int_0^1 u^{-1/2-1}(1-u)^{\frac{1}{n}-1}du=\frac{1}{n}B(\frac{1}{2},\frac{1}{n})=\frac{1}{n}(\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{n})}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{n})})=\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{1}{n})}{n\Gamma(\frac{n+2}{2n})}$$

39 Verificar que $\int_1^\infty \frac{(t-1)^p}{t^2}dt=\Gamma(1+p)\Gamma(1-p)$, $|p|<1$

Solución

Sea u = t - 1 $\Rightarrow$ si $t\to 1$, $u\to 0$ y si $t\to\infty$, $u\to\infty$, entonces

$$\int_1^\infty \frac{(t-1)^p}{t^2}dt=\int_0^\infty \frac{u^p du}{(u+1)^2} \qquad \ldots (1)$$

Sea $v=\frac{1}{1+u} \Rightarrow 1+u=\frac{1}{v} \Rightarrow du=-\frac{dv}{v^2}$

si $u\to 0$, $v=1$ y si $u\to\infty$, $v=0$ $\qquad \ldots (2)$

$$\int_1^\infty \frac{(t-1)^p}{t^2}dt=\int_0^\infty \frac{u^p du}{(u+1)^2}=\int_1^0 (\frac{1-v}{v})^p v^2(-\frac{dv}{v^2})=\int_0^1 (1-v)^p v^{-p}dv$$

$$=\int_0^1 v^{(1-p)-1}(1-v)^{(1+p)-1}dv=B(1-p,1+p)=\frac{\Gamma(1-p)\Gamma(1+p)}{\Gamma(1-p+1+p)}=\frac{\Gamma(1-p)\Gamma(1+p)}{\Gamma(2)}$$

$= \Gamma(1-p)\Gamma(1+p)$ donde $\Gamma(2)=1$

$$\therefore \quad \int_1^{\infty} \frac{(t-1)^p}{t^2}dt = \Gamma(1+p)\Gamma(1-p) \quad , \quad |P|<1$$

(40) Calcular $\int_0^{\infty} t^a(1+t)^b dt$

Solución

Sea $t = \text{tg}^2\theta \Rightarrow \theta = \text{arctg}\sqrt{t} \Rightarrow d\theta = \dfrac{dt}{2\sqrt{t}\sqrt{1+t}}$

$dt = 2\sqrt{t}(1+t)d\theta = 2\,\text{tg}\,\theta.\sec^2\theta\, d\theta$; Si $t \to 0$, $\Rightarrow \theta \to 0$; si $t \to \infty \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{2}$

$$\int_0^{\infty} t^a(1+t)^b dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{tg}^{2a}\theta.(1+\text{tg}^2\theta)^b\, 2\,\text{tg}\,\vartheta.\sec^2\theta\, d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{tg}^{2a+1}\theta.\sec^{2b+2}\theta\, d\vartheta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\text{sen}\,\theta)^{2a+1}d\theta}{(\cos\theta)^{2a+1}(\cos\theta)^{2b+2}} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^{2a+1}\theta.\cos^{-2a-2b-3}\theta\, d\theta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\text{sen}\,\theta)^{2(a+1)-1}.(\cos\theta)^{2[-a-b-1]-1} d\vartheta = 2B(a+1,-a-b-1)$$

$$= \frac{2\Gamma(a+1)\Gamma(-a-b-1)}{\Gamma(a+1-a-b-1)} = \frac{2\Gamma(a+1)\Gamma(-a-b-1)}{\Gamma(-b)}$$

(41) Calcular $L\{J_0(\sqrt{t})\}$

Solución

$$J_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{t}{2}\right)^{2k} = 1 - \frac{t^2}{2^2} + \frac{t^4}{2^2.4^2} - \frac{t^6}{2^2.4^2.6^2} + \frac{t^8}{2^2.4^2.6^2.8^2} - \ldots$$

$$J_0(\sqrt{t}) = 1 - \frac{t}{2^2} + \frac{t^2}{2^2.4^2} - \frac{t^3}{2^2.4^2.6^2} + \frac{t^4}{2^2.4^2.6^2.8^2} - \ldots$$

$$L\{J_0(\sqrt{t})\} = \frac{1}{s}[1 - \frac{1}{1!}(\frac{1}{4s}) + \frac{1}{2!}(\frac{1}{4s})^2 - \frac{1}{3!}(\frac{1}{4s})^3 + \ldots] = \frac{1}{s}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(\frac{1}{4s})^n}{n!} = \frac{e^{-s/4}}{s} \quad , s > 0$$

$$\therefore \quad L\{J_0(\sqrt{t})\} = \frac{e^{-s/4}}{s} \quad , \ s > 0$$

(42) Demostrar que: $L\{e^{-at}J_0(bt)\} = \dfrac{1}{\sqrt{s^2 + 2as + a^2 + b^2}}$

Solución

$$J_0(bt) = 1 - \frac{b^2t^2}{2^2} + \frac{b^4t^4}{2^2.4^2} - \frac{b^6t^6}{2^2.4^2.6^2} + \frac{b^8t^8}{2^2.4^2.6^2.8^2} - \ldots$$

$$L\{J_0(bt)\} = \frac{1}{s} - \frac{b^2}{2s^3} + \frac{1.3.b^4}{2.4.s^5} - \frac{1.3.5.b^6}{2.4.6.s^7} + \frac{1.3.5.7.b^8}{2.4.6.8.s^9} - \ldots$$

$$= \frac{1}{s}[1 - \frac{1}{2}(\frac{b}{s})^2 + \frac{1.3}{2.4}(\frac{b}{s})^4 - \frac{1.3.5}{2.4.6}(\frac{b}{s})^7 + \ldots] = \frac{1}{s}.\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{b^2}{s^2}}} = \frac{1}{\sqrt{s^2 + b^2}}$$

$$\therefore \quad L\{J_0(\sqrt{t})\} = \frac{1}{\sqrt{s^2 + b^2}}$$; ahora aplicamos la propiedad de traslación

$$L\{e^{-at}J_0(bt)\} = \frac{1}{\sqrt{(s+a)^2 + b^2}} = \frac{1}{\sqrt{s^2 + 2as + a^2 + b^2}}$$

(43) Demostrar que: $L\{J_0(a\sqrt{t^2 - b^2})\} = \dfrac{e^{-b\sqrt{s^2 + a^2}}}{\sqrt{s^2 + a^2}}$, t > b

Solución

$$J_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}(\frac{t}{2})^{2k}$$, por definición

$$J_0(a\sqrt{t^2 - b^2}) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}(\frac{a\sqrt{t^2 - b^2}}{2})^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}(t^2 - b^2)^k(\frac{a}{2})^{2k}$$

$$(t^2-b^2)^k = t^{2k} - k(t^2)^{k-1}b^2 + \frac{k(k-1)}{2!}(t^2)^{k-2}b^4 - \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}(t^2)^{k-6}b^6 + \dots$$

$$L\{J_0(a\sqrt{t^2-b^2})\} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}(\frac{a}{2})^{2k}[\frac{(2k)!}{s^{2k+1}} - \frac{k(2k-2)!}{2^{2k-1}}b^2 + \frac{k(k-1)(2k-4)b^4}{2!s^{2k-3}} - \dots + \frac{b^{2n}}{s}]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}(\frac{a}{2})^{2k}[\frac{(k+1)(k+2)\dots(2k)}{s^{2k+1}} - \frac{k(k+1)\dots(2k)b^2}{2k(2k-1)s^{2k-1}} +$$

$$+ \frac{k(k-1)(k+1)(k+2)\dots(2k)b^4}{2k(2k-1)(2k-2)(2k-3)2!s^{2k-3}} - \dots + \frac{b^{2n}}{s}]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}(b\sqrt{s^2+a^2})^k.\frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}} = \frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k b^k(\sqrt{s^2+a^2})^k}{k!}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}e^{-b\sqrt{s^2+a^2}} \qquad \therefore\ L\{J_0(a\sqrt{t^2-b^2})\} = \frac{e^{-b\sqrt{s^2+a^2}}}{\sqrt{s^2+a^2}}$$

44 Calcular $L\{t\int_0^t J_0(a\sqrt{\mu})d\mu\}$

Solución

Sabemos que: $L\{J_0(\sqrt{t})\} = \frac{e^{-1/4s}}{s}$, s > 0

$$L\{\int_0^t J_0(a\sqrt{u})du\} = \frac{1}{s}L\{J_0(a\sqrt{u})\} = \frac{1}{s}.\frac{e^{-\frac{a^2}{4s}}}{s} = \frac{e^{-\frac{a^2}{4s}}}{s^2}$$

$$L\{t\int_0^t J_0(a\sqrt{u})du\} = -\frac{d}{ds}(\frac{e^{-\frac{a^2}{4s}}}{s^2}) = \frac{(8s-a^2)e^{-\frac{a^2}{4s}}}{4s^4}$$

$$\therefore\ L\{t\int_0^t J_0(a\sqrt{u})du\} = \frac{(8s-a^2)e^{-\frac{a^2}{4s}}}{4s^4}$$

45 Si $L\{F(u)\} = f(s)$, calcular $L\{\int_0^t J_0(2\sqrt{u(t-u)})F(u)du\}$

Solución

Como $J_0(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}(\frac{t}{2})^{2k}$

$$J_0(2\sqrt{u(t-u)})=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(u(t-u))^k}{(k!)^2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k u^k(t-u)^k}{(k!)^2}$$

$$J_0(2\sqrt{u(t-u)})F(u)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}u^k(t-u)^k F(u)$$

$$\int_0^t J_0(2\sqrt{u(t-u)})F(u)du=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\int_0^t u^k(t-u)^k F(u)du$$

$$L\{\int_0^t J_0(2\sqrt{u(t-u)})F(u)\,du\}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}L\{\int_0^t u^k(t-u)^k F(u)du\} \text{ por convolución}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}L\{t^k * t^k F(t)\}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}[\frac{k!}{s^{k+1}}(-1)^k\frac{d^k}{ds^k}(f(s))]$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}(\frac{k!}{s^{k+1}})f^{(k)}(s)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k!}{(k!)^2}\cdot\frac{f^{(k)}(s)}{s^{k+1}}$$

$$\therefore\quad L\{\int_0^t J_0(2\sqrt{u(t-u)})F(u)\,du\}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(s)}{k!\,s^{k+1}}$$

46. Demostrar que $\int_0^{\infty}e^{-t}J_0(t)dt=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Solución

Se conoce que: $L\{J_0(t)\}=\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$

$\int_0^{\infty}e^{-st}J_0(t)dt=\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$, tomando límite cuando s $\to$ 1 , tenemos

$$\lim_{s\to 1}\int_0^{\infty} e^{-st}J_0(t)dt = \lim_{s\to 1}\frac{1}{\sqrt{s^2+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \therefore \int_0^{\infty} e^{-t}J_0(t)dt = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(47) Probar que: $\int_0^{\infty} J_n(t)dt = 1$

Solución

Se conoce que: $L\{J_n(t)\} = \frac{(\sqrt{s^2+1}-s)^n}{\sqrt{s^2+1}}$, ahora aplicamos la definición $L\{J_n(t)\}$

$$L\{J_n(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st}J_n(t)dt = \frac{(\sqrt{s^2+1}-s)^n}{\sqrt{s^2+1}}$$, tomando límite cuando s → 0

$$\lim_{s\to 0}\int_0^{\infty} e^{-st}J_n(t)dt = \lim_{s\to 0}\frac{(\sqrt{s^2+1}-s)^n}{\sqrt{s^2+1}} = 1 \qquad \therefore \int_0^{\infty} J_n(t)dt = 1$$

(48) Calcular $\int_0^{\infty} t\,e^{-3t}J_0(4t)dt$

Solución

$$L\{J_0(4t)\} = \frac{1}{\sqrt{s^2+16}} \Rightarrow L\{t\,J_0(4t)\} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\sqrt{s^2+16}}\right)$$

de donde $L\{t\,J_0(4t)\} = \frac{s}{(s^2+16)^{3/2}}$, aplicamos la definición de transformada

$$\int_0^{\infty} e^{-st}t\,J_0(4t)dt = \frac{s}{(s^2+16)^{3/2}}$$, tomando límite cuando s → 3

$$\lim_{s\to 3}\int_0^{\infty} e^{-st}t\,J_0(4t)dt = \lim_{s\to 3}\frac{s}{(s^2+16)^{3/2}} = \frac{3}{125} \qquad \therefore \int_0^{\infty} e^{-3t}t\,J_0(4t)dt = \frac{3}{125}$$

(49) Demostrar que: $\int_0^{\infty} J_0(2\sqrt{t\mu})\cos\mu\, d\mu = \text{sen}\, t$

Solución

Sea $F(t)=\int_0^\infty J_0(2\sqrt{t\,\mu})\cos\mu\,d\mu$, entonces se tiene:

$$L\{F(t)\}=L\{\int_0^\infty J_0(2\sqrt{t\,\mu})\cos\mu\,d\mu\}=\int_0^\infty e^{-st}(\int_0^\infty J_0(2\sqrt{t\,\mu})\cos\mu\,d\mu)dt$$

$$=\int_0^\infty \cos\mu(\int_0^\infty e^{-st}J_0(2\sqrt{t\,\mu})dt)d\mu=\int_0^\infty \cos\mu\,L\{J_0(2\sqrt{t\,\mu})\}d\mu$$

$$=\int_0^\infty \cos\mu.\frac{e^{-\mu/s}}{s}d\mu=\frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-u/s}\cos u\,du=\frac{1}{s}f(\frac{1}{s}),\ \text{donde}$$

$$f(s)=L\{\cos t\}=\frac{s}{s^2+1}\Rightarrow f(\frac{1}{s})=\frac{s}{s^2+1}$$

$$L\{F(t)\}=\frac{1}{s}f(\frac{1}{s})=\frac{1}{s}(\frac{s}{s^2+1})=\frac{1}{s^2+1}=L\{\text{sen}\,t\}$$

Luego $L\{F(t)\}=L\{\text{sen}\,t\}$ entonces f(t) = sen t

$$\therefore\ \int_0^\infty J_0(2\sqrt{t\,\mu})\cos\mu\,d\mu=\text{sen}\,t$$

(50) Demostrar que: $\int_0^\infty J_0(2\sqrt{t\,\mu})\,\text{sen}\,\mu\,d\mu=\cos t$

Solución

Sea $F(t)=\int_0^\infty J_0(2\sqrt{t\,\mu})\,\text{sen}\,\mu\,d\mu$, entonces se tiene:

$$L\{F(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}(\int_0^\infty J_0(2\sqrt{t\,\mu})\,\text{sen}\,\mu\,d\mu)dt=\int_0^\infty \text{sen}\,\mu(\int_0^\infty e^{-st}J_0(2\sqrt{t\,\mu})dt)d\mu$$

$$=\int_0^\infty \text{sen}\,\mu\,L\{J_0(2\sqrt{t\,\mu})\}d\mu=\int_0^\infty \text{sen}\,\mu.\frac{e^{-\mu/s}}{s}=\frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-\mu/s}\,\text{sen}\,\mu\,d\mu=\frac{1}{s}f(\frac{1}{s})\ \ldots\ \textbf{(1)}$$

de donde $f(s)=L\{\text{sen}\,t\}=\frac{1}{s^2+1}\Rightarrow f(\frac{1}{s})=\frac{s^2}{s^2+1}$

como $L\{F(t)\} = \frac{1}{s} f(\frac{1}{s}) = \frac{1}{s}(\frac{s^2}{s^2+1}) = \frac{s}{s^2+1} = L\{\cos t\}$

Luego $L\{F(t)\} = L\{\cos t\}$ entonces f(t) = cos t

$$\therefore \int_0^\infty J_0(2\sqrt{t\,\mu})\,\text{sen}\,\mu\, d\mu = \cos t$$

51 Demostrar que: $\int_0^\infty J_0(2\sqrt{t\,\mu})J_0(\mu)d\mu = J_0(t)$

Solución

Se conoce que: $L\{J_0 a\sqrt{t})\} = \frac{e^{-\frac{a^2}{4s}}}{s}$

$L\{J_0(2\sqrt{t\,\mu})\} = L\{J_0(2\sqrt{\mu}\sqrt{t})\} = \frac{e^{-\mu/s}}{s}$ donde $a = 2\sqrt{\mu}$

$$L\{\int_0^\infty J_0(2\sqrt{t\,\mu})J_0(\mu)d\mu\} = \int_0^\infty e^{-st}(\int_0^\infty J_0(2\sqrt{t\,\mu})J_0(\mu)d\mu)dt$$

$$= \int_0^\infty J_0(\mu)(\int_0^\infty e^{-st}J_0(2\sqrt{t\,\mu})dt)d\mu = \int_0^\infty J_0(\mu)\frac{e^{-\mu/s}}{s}d\mu$$

$$= \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-\mu/s}J_0(\mu)d\mu = \frac{1}{s}f(\frac{1}{s}),\ \text{donde}\ \ f(s) = L\{J_0(t)\} = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$$

$$L\{\int_0^\infty J_0(2\sqrt{t\,\mu})J_0(\mu)d\mu\} = \frac{1}{s}f(\frac{1}{s}) = \frac{1}{s}(\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{s^2}+1}}) = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}} = L\{J_0(t)\}$$

$$\therefore \int_0^\infty J_0(2\sqrt{t\,\mu})J_0(\mu)d\mu = J_0(t)$$

52 Calcular $\int_0^\infty J_0(x^6)dx$, reduciendo el resultado a su mínima expresión.

Solución

Sea $F(t)=\int_0^{\infty} J_0(x^6 t)dx$, entonces su transformada es:

$$L\{F(t)\}=\int_0^{\infty} e^{-st}(\int_0^{\infty} J_0(x^6 t)dt)dx=\int_0^{\infty}(\int_0^{\infty} e^{-st} J_0(x^6 t)dt)dx$$

$$=\int_0^{\infty} L\{J_0(x^6 t)\}dx=\int_0^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{s^2+x^{12}}}$$

hacemos $x^6=s.\text{tg}\,\theta \Rightarrow 6x^5 dx=s.\sec^2\theta\, d\theta \Rightarrow dx=\dfrac{s.\sec^2\theta\, d\theta}{6x^5}$

$$x=(s.\text{tg}\,\theta)^{1/6} \Rightarrow x^5=(s.\text{tg}\,\theta)^{5/6} \Rightarrow dx=\frac{s.\sec^2\theta\, d\theta}{6(s.\text{tg}\,\theta)^{5/6}}$$

cuando $x=0 \Rightarrow \theta=0$ y cuando $x\to+\infty$, $\Rightarrow \theta=\dfrac{\pi}{2}$

ahora reemplazando en (1) se tiene:

$$L\{F(t)\}=\int_0^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^{12}+s^2}}=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\sqrt{s^2\,\text{tg}^2\theta+s^2}}.\frac{s.\sec^2\theta\, d\theta}{6.s^{5/6}\,\text{tg}^{5/6}\theta}$$

$$=\frac{1}{6s^{5/6}}\int_0^{\pi/2}\frac{\sec\theta\, d\theta}{\text{tg}^{5/6}\theta}=\frac{1}{6s^{5/6}}\int_0^{\pi/2}\text{sen}^{-5/6}\theta.\cos^{\frac{5}{6}-1}d\theta$$

$$=\frac{1}{6s^{5/6}}\int_0^{\pi/2}\text{sen}^{\frac{1}{6}-1}\theta.\cos^{\frac{5}{6}-1}d\theta=\frac{1}{6s^{5/6}}.\frac{1}{2}B(\frac{1}{12},\frac{5}{12})$$

$$=\frac{1}{6s^{5/6}}.\frac{\Gamma(\frac{1}{12})\Gamma(\frac{5}{12})}{2\Gamma(\frac{1}{12}+\frac{5}{12})}=\frac{1}{12s^{5/6}}.\frac{\Gamma(\frac{1}{12})\Gamma(\frac{5}{12})}{\sqrt{\frac{1}{2}}}=\frac{\Gamma(\frac{1}{12})\Gamma(\frac{5}{12})}{12\sqrt{\pi}\,s^{5/6}}$$

$$\int_0^{\infty} J_0(x^6 t)dt=F(t)=\frac{\Gamma(\frac{1}{12})\Gamma(\frac{5}{12})}{12\sqrt{\pi}}L^{-1}\{\frac{1}{s^{5/6}}\} \qquad \ldots (2)$$

como $L\{t^a\}=\dfrac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$, a > -1 $\Rightarrow L^{-1}\{\dfrac{1}{s^{a+1}}\}=\dfrac{t^a}{\Gamma(a+1)}$

como $L^{-1}\{\dfrac{1}{s^{5/6}}\}=L^{-1}\{\dfrac{1}{s^{-\frac{1}{6}+1}}\}=\dfrac{t^{-1/6}}{\Gamma(-\frac{1}{6}+1)}=\dfrac{1}{\Gamma(\frac{5}{6})t^{1/6}} \Rightarrow L^{-1}\{\dfrac{1}{s^{5/6}}\}=\dfrac{1}{\Gamma(\frac{5}{6})\sqrt[6]{t}}$ ... **(3)**

ahora reemplazando (3) en (2) se tiene:

$\int_0^\infty J_0(x^6t)dx=\dfrac{\Gamma(\frac{1}{12})\Gamma(\frac{5}{12})}{12\sqrt{\pi}}.\dfrac{1}{\Gamma(\frac{5}{6})\sqrt[6]{t}}$, tomando límite cuando t → 1, se tiene:

$$\lim_{t\to1}\int_0^\infty J_0(x^6t)dx=\lim_{t\to1}\frac{\Gamma(\frac{1}{12})\Gamma(\frac{5}{12})}{12\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{5}{6})\sqrt[6]{t}} \Rightarrow \int_0^\infty J_0(x^6)dx=\frac{\Gamma(\frac{1}{12})\Gamma(\frac{5}{12})}{12\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{5}{6})} \quad \textbf{... (4)}$$

además tenemos $2^{2x-1}\Gamma(x)\Gamma(x+\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}\Gamma(2x)$, entonces

$\Gamma(2x)=\dfrac{2^{2x-1}\Gamma(x)\Gamma(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}}$, por lo tanto se tiene:

$$\Gamma(\frac{5}{6})=\Gamma(2(\frac{5}{12}))=\frac{2^{\frac{5}{6}-1}\Gamma(\frac{5}{12})\Gamma(\frac{11}{12})}{\sqrt{\pi}}=\frac{2^{-\frac{1}{6}}\Gamma(\frac{5}{12})\Gamma(\frac{11}{12})}{\sqrt{\pi}} \Rightarrow \Gamma(\frac{5}{6})=\frac{2^{-\frac{1}{6}}\Gamma(\frac{5}{12})\Gamma(\frac{11}{12})}{\sqrt{\pi}} \quad \textbf{... (5)}$$

reemplazando (5) en (4) se tiene:

$$\int_0^\infty J_0(x^6)dx=\frac{\Gamma(\frac{1}{12})\Gamma(\frac{5}{12})}{12\sqrt{\pi}\,\dfrac{2^{-1/6}\Gamma(\frac{5}{12})\Gamma(\frac{11}{12})}{\sqrt{\pi}}}=\frac{2^{1/6}\Gamma(\frac{1}{12})}{12\Gamma(\frac{11}{12})}=\frac{2^{1/6}[\Gamma(\frac{1}{12})]^2}{12\Gamma(\frac{1}{12})\Gamma(\frac{11}{12})} \quad \textbf{... (6)}$$

pero $\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\dfrac{\pi}{\text{sen}\,p\pi}$, entonces $\Gamma(\frac{11}{12})\Gamma(\frac{1}{12})=\Gamma(\frac{11}{12})\Gamma(1-\frac{11}{12})=\dfrac{\pi}{\text{sen}\,\frac{11\pi}{12}}$ ... **(7)**

reemplazando (7) en (6) se tiene: $\int_0^{\infty} J_0(x^6)dx = \dfrac{\dfrac{2^{1/6}(\Gamma(\frac{1}{12}))^2}{\pi}}{12\operatorname{sen}\dfrac{11\pi}{12}} = \dfrac{\sqrt[6]{2}(\Gamma(\frac{11}{12}))^2}{12\pi\operatorname{sen}\dfrac{11\pi}{12}}$

(53) Demostrar que: $J_{1/2}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}}\operatorname{sen} t$

Solución

$$J_n(t) = \frac{t^n}{2^n\Gamma(n+1)}\left(1 - \frac{t^2}{2(2n+2)} + \frac{t^4}{2.4(2n+2)(2n+4)}\ldots\right)$$

$$J_{1/2}(t) = \frac{t^{1/2}}{2^{1/2}\Gamma(\frac{1}{2}+1)}\left(1 - \frac{t^2}{2.3} + \frac{t^4}{2.3.4.5}\ldots\right) = \frac{t^{1/2}}{2^{1/2}.\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}\left(1 - \frac{t^2}{2.3} + \frac{t^4}{2.3.4.5}\ldots\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}\,t}{\sqrt{\pi}\,\sqrt{t}}\left(1 - \frac{t^2}{2.3} + \frac{t^4}{2.3.4.5}\ldots\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi\, t}}\left(t - \frac{t^3}{2.3} + \frac{t^5}{2.4.3.5}\ldots\right)$$

$$\therefore J_{1/2}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi\, t}}\operatorname{sen} t$$

(54) Demostrar que: $\frac{d}{dx}J_0(x) = -J_1(x)$

Solución

$$J_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+p+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p} \text{. por definición}$$

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

$$\frac{dJ_0(x)}{dx} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-1}.\frac{1}{2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+1)(-1)^{k+1}}{((k+1)!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(k+2)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1} = -J_1(x)$$

$$\therefore \quad \frac{dJ_0(x)}{dx} = -J_1(x)$$

(55) Demostrar que: $\frac{d}{dx}(x^p J_p(x)) = x^p J_{p-1}(x)$

Solución

Se conoce que: $\Gamma(k + p + 1) = (k + p)\,\Gamma(k + p)$

$J_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+p+1)}(\frac{x}{2})^{2k+p}$, multiplicando por x^p

$$x^p J_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+p+1)}(\frac{x^{2k+2p}}{2^{2k+p}})$$

$$\frac{d(x^p J_p(x))}{dx} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2(k+p)x^{2k+2p-1}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+p+1)2^{2k+p}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} 2(k+p+1)x^{2k+2p+1}}{\Gamma(k+2)\Gamma(k+p+2)2^{2k+p+2}}$$

$$= x^p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^{2k+p+1}}{\Gamma(k+2)\Gamma(k+p+2)2^{2k+p+1}}$$

$$= x^p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\Gamma(k+2)\Gamma(k+p+1)}(\frac{x}{2})^{2k+p+1} = x^p J_{p-1}(x)$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}(x^p J_p(x)) = x^p J_{p-1}(x)$$

11.12. EJERCICIOS PROPUESTOS.-

(1) Sea $F(t) = \begin{cases} 3t, & 0 < t < 2 \\ 6, & 2 < t < 4 \end{cases}$, donde F(t) tiene periodo 4.

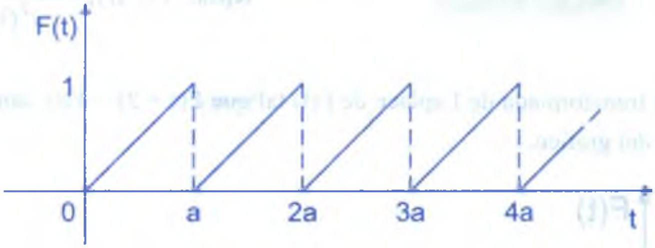
a) Hacer la gráfica de F(t) **b)** Hallar L{F(t)}

Rpta. $L\{F(t)\} = \frac{3 - 3e^{-2s} - 6s\,e^{-4s}}{s^2(1 - e^{-4s})}$

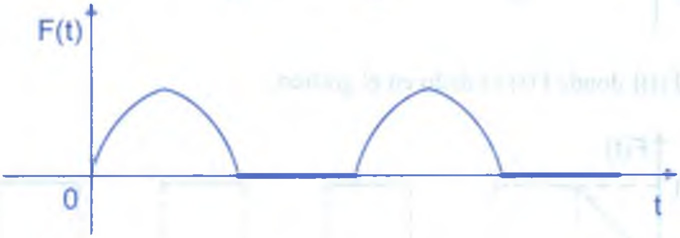
(2) Hallar L{F(t)}, donde $F(t)=\begin{cases} t, & 0<t<1 \\ 0, & 1<t<2 \end{cases}$ y F(t + 2) = F(t) , para t > 0.

Rpta. $L\{F(t)\}=\dfrac{1-e^{-s}(s+1)}{s^2(1-e^{-2s})}$

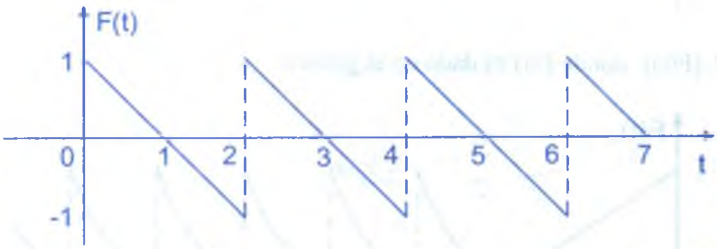
(3) Demostrar que la transformada de Laplace de la función F(t) que se muestra en la figura diente de sierra es: $L\{F(t)\}=\dfrac{1}{as^2}-\dfrac{e^{-as}}{s(1-e^{-as})}$



(4) Suponga que F(t) es la rectificación de semionda sen kt, que se muestra en la .figura. Demostrar que: $L\{F(t)\}=\dfrac{1}{(s^2+k^2)(1-e^{-\frac{\pi s}{k}})}$

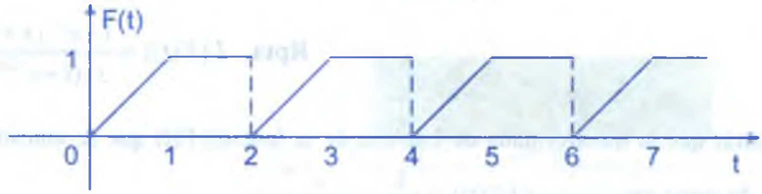


(5) Hallar L{F(t)} donde F(t) se muestra en la figura.



Rpta. $L\{F(t)\}=\dfrac{(s+1)e^{-2s}+s-1}{s^2(1-e^{-2s})}$

(6) Hallar L{F(t)}, donde F(t) se muestra en la figura.

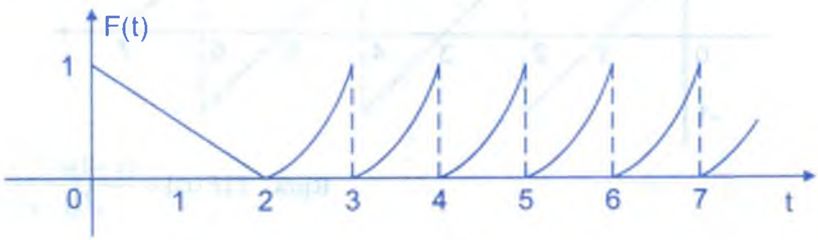


Rpta. $L\{F(t)\}=\dfrac{1-e^{-s}-se^{-2s}}{s^2(1-e^{-2s})}$

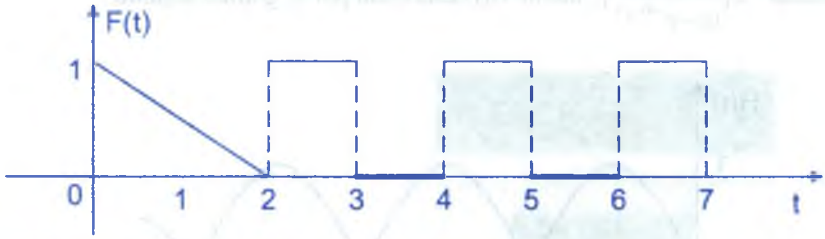
(7) Calcular la transformada de Laplace de F(t) tal que F(t + 2) = F(t), donde F(t) es el pulso parabólico del gráfico.

(8) Hallar L{F(t)} donde F(t) es dado en el gráfico.

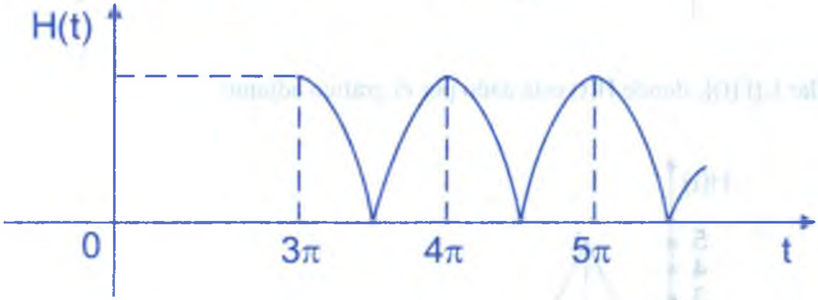
(9) Hallar L{F(t)} donde F(t) es dado en el gráfico.



(10) Hallar L{F(t)} donde F(t) es dado en el gráfico.



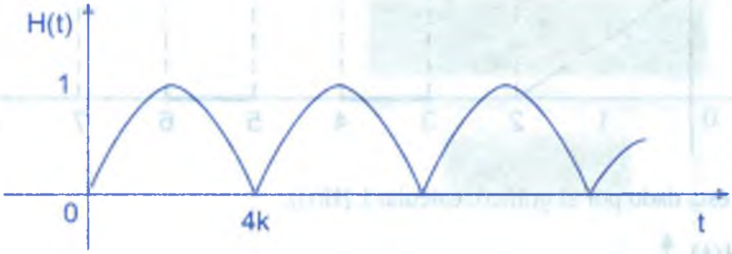
(11) Si H(t) esta dado por el gráfico, calcular L{H(t)}.



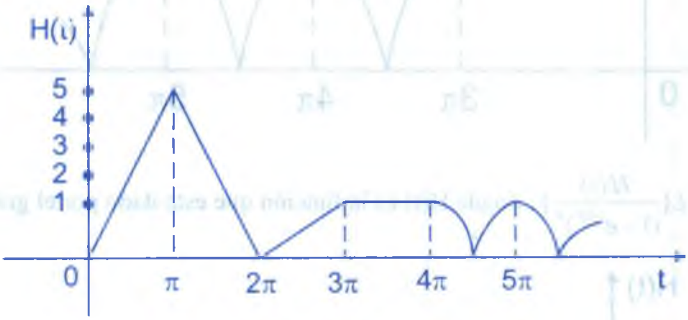
(12) Evaluar $L\{\frac{H(t)}{(1-e^{-4t})^4}\}$, donde H(t) es la función que esta dado por el gráfico adjunto.

(13) H(t) esta dado por el gráfico adjunto, calcular L{2 cosh 4t.H(t)}.

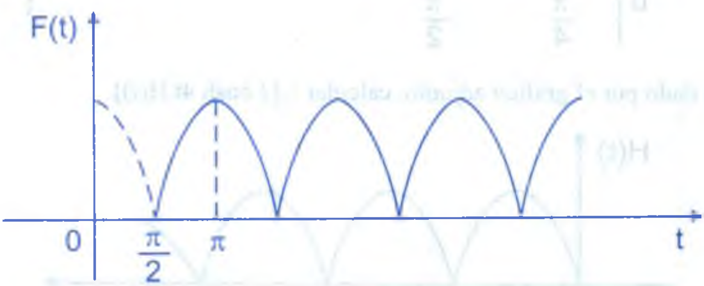
(14) Calcular $L\{\frac{e^{6t}H(t)}{(1-e^{-4t})^4}\}$, donde H(t) esta dado por el gráfico adjunto.



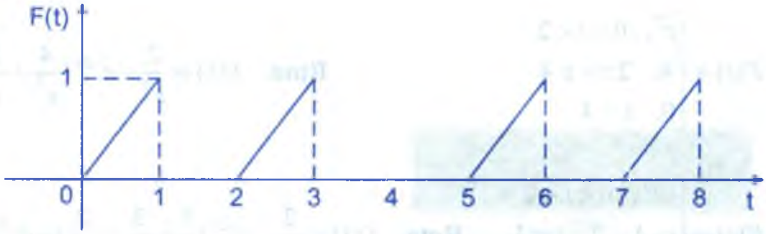
(15) Hallar L{F(t)}, donde H(t) esta dado por el gráfico adjunto.



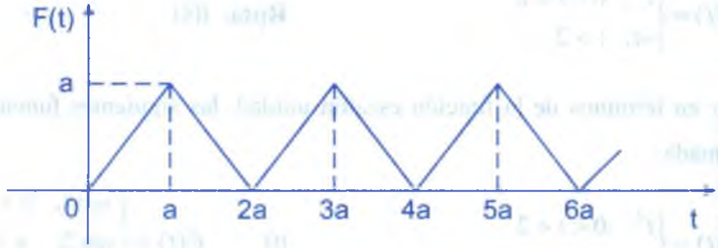
(16) Si F(t) esta dado por el gráfico adjunto probar que $L\{F(t)\}=\frac{1}{1+s^2}[s+\frac{1}{\operatorname{senh}(\frac{\pi s}{2})}]$



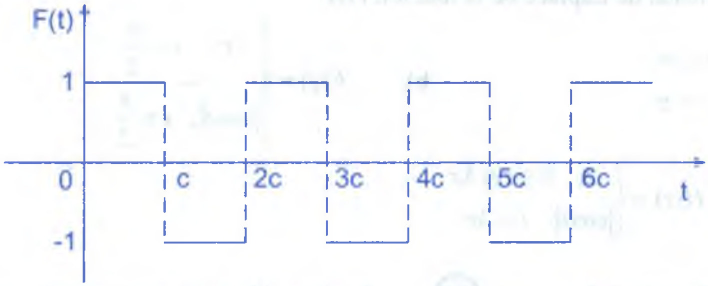
(17) Hallar L{F(t)}, donde F(t) esta descrita por el gráfico.



(18) Hallar L{F(t)} donde F(t) se muestra en la figura.



(19) Encontrar la transformada de Laplace de la función onda cuadrada, mostrada en la figura.



Rpta. $L\{F(t)\} = \frac{1}{s}\,\text{tgh}(\frac{cs}{2})$

(20) Considera la función F definida por $F(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < 1 \\ 2-t, & 1 \le t < 2 \end{cases}$, F(t + 2) = F(t) graficar F(t) y calcular L{F(t)}.

(21) Expresar F(t) en términos de la función escalón unidad y obtener L{F(t)}.

a) $F(t) = \begin{cases} t^2, & 0 < t < 1 \\ 4, & t > 1 \end{cases}$ **Rpta.** $f(s) = \frac{2}{s^3} + e^{-s}(\frac{3}{s} - \frac{2}{s^2} - \frac{2}{s^3})$

b) $F(t)=\begin{cases} t^2, & 0<t<2 \\ 4, & 2\le t\le 4 \\ 0, & t>4 \end{cases}$ **Rpta.** $f(s)=\frac{2}{s^3}-e^{-2s}(\frac{4}{s^2}+\frac{2}{s^3})-\frac{4e^{-4s}}{s}$

c) $F(t)=\begin{cases} t^2, & 0<t<2 \\ t-1, & 2<t<3 \\ 0, & t>3 \end{cases}$ **Rpta.** $f(s)=\frac{2}{s^3}-e^{-2s}(\frac{3}{s}+\frac{3}{s^2}+\frac{2}{s^3})+e^{-3s}(\frac{5}{s}+\frac{1}{s^2})$

d) $F(t)=\begin{cases} t^2, & 0<t<2 \\ 4t, & t>2 \end{cases}$ **Rpta.** f(s)

(22) Expresar en términos de la función escalón unidad, las siguientes funciones y hallar su transformada.

a) $F(t)=\begin{cases} t^2, & 0<t<2 \\ 4t, & t>2 \end{cases}$ b) $F(t)=\begin{cases} \operatorname{sen} t, & 0<t<\pi \\ \operatorname{sen} 2t, & \pi\le t\le 2\pi \\ \operatorname{sen} 3t, & t>2\pi \end{cases}$

(23) Determinar la transformada de Laplace de la función F(t).

a) $F(t)=\begin{cases} 1-t, & t\le\pi \\ |\operatorname{sen} t|, & t>\pi \end{cases}$ b) $F(t)=\begin{cases} t^2, & t<\frac{\pi}{2} \\ |\cos t|, & t>\frac{\pi}{2} \end{cases}$

(24) Hallar L{H(t)} donde $H(t)=\begin{cases} 2, & 0\le t\le 3\pi \\ |\cos t|, & t>3\pi \end{cases}$

(25) Calcular $L\{t\,2^{-t}\operatorname{sen} 3t.\mu(t-2)\}$.

(26) Evaluar $L\{t\,\pi^{-t}\operatorname{sen} t.\cos t.\mu(t-4)\}$

(27) Calcular $L\{\frac{e^t-e^{-t}}{2^t}\operatorname{sen}(t-\frac{\pi}{2}).\mu(t-\frac{\pi}{2})\}$

(28) Evaluar $L\{\frac{e^{2t}-e^{-2t}}{3^t}\operatorname{sen}(t-\frac{\pi}{4}).\mu(t-\frac{\pi}{4})\}$

(29) Hallar L { | t - | t – 1| | }

(30) Hallar L{F(t)} si $F(t)=\begin{cases} 1, & t\le 3\pi \\ |\operatorname{sen} 2t|, & t>3\pi \end{cases}$

(31) Calcular $L\{U(t^3-6t^2+11t+6)\}$ y graficar la función.

(32) Calcular L{sen (t - π)}

(33) Calcular $L\{|t^3-2t^2-t|\}$

(34) Calcular $L\{te^{-5t}\int^{6t} e^{x+5t}\mu(|x-1|-1)dx\}$

(35) Calcular $L\{t\,\text{sen}\,|[|t-9|]|\,\mu(e^t-1)\}$

(36) Calcular $L\{\int_{-10t}^{0} e^{-4t+u}\mu(u^2-1)du\}$

(37) Calcular $L\{\frac{e^{-5t}}{4^t}\mu(|t-1|-1)\}$

(38) Calcular $L\{\int_{-10t}^{0} e^{-3t+u}\mu(|t-3|-2)dt\}$

(39) Calcular L{ μ (sen t)}

(40) Calcular $L\{\int_{t}^{0} t\,e^{-10t+u}\mu(u^3-1)du\}$

(41) Calcular $L\{t^n\mu(t-2)\}$

(42) Calcular $L\{\frac{e^{4t}+e^{3t}}{5^t}\text{sen}\,t.\cos(t-\pi)\mu(t-\frac{\pi}{2})\}$

(43) Calcular $L\{\int_{0}^{4t}\frac{e^{-5t}\,\text{sen}^2(u-2)\mu(u^2-4)}{(u-2)^2}du\}$

(44) Calcular $L\{\frac{\text{sen}(t-2\pi)}{t-2\pi}\mu(t-2\pi)\}$ **Rpta.** $f(s)=e^{-2\pi s}\,\text{arctg}\frac{1}{s}$

(45) Calcular $L\{t^2e^{at}\mu(t-a)\}$ **Rpta.** $f(s)=\frac{e^{a(2a-s)}}{(s+2)^3}(s^2+4as+4a^2-2)$

(46) Calcular $L\{\int_{0}^{t-a}\frac{e^{x}-e^{-x}}{x}\mu(t-a)dx\}$ **Rpta.** $f(s)=\frac{e^{-as}}{s}\ln\left|\frac{s+1}{s-1}\right|$, s > 1

(47) Calcular la transformada de Laplace. $L\{7^t\cos t.(t-\pi).\mu(t-2\pi).\mu(t-7\pi)\}$

Rpta. $f(s)=-e^{-7\pi s}.7^{7\pi}(\frac{s-\ln 7}{(s-\ln 7)^2+1})$

(48) Calcular $L\{\frac{t\cos t}{3^{2t}}\mu(t)\}$ **Rpta.** $f(s)=\frac{(s+\ln 9)^2-1}{((s+\ln 9)^2+1)^2}$

(49) Calcular $L\{\cos|\pi - t|\}$ **Rpta.** $f(s) = -\frac{s}{s^2+1}$

(50) Calcular $L\{\text{sen}|\pi - t|\}$ **Rpta.** $f(s) = \frac{1-2e^{-\pi s}}{s^2+1}$

(51) Hallar $L\{a - t\mu(t-a)\}$ donde "a" es una constante positiva.

Rpta. $f(s) = \frac{a}{s} + \frac{e^{-as}}{s^2} - \frac{ae^{-as}}{s}$

(52) Hallar $L\{t - t - a\}$ **Rpta.** $f(s) = \frac{2}{s^2} - \frac{a}{s} - \frac{2e^{-as}}{s^2}$

(53) Calcular $L\{t^2 - 4t\mu(t-2)\}$ **Rpta.** $f(s) = \frac{2}{s^3}(1 - 2e^{-2s} + 2e^{-4s})$

(54) Calcular la transformada de Laplace: $L\{t.e^{-bt}\int_0^{bt} e^{u+3t}\mu(|x-1|-1)dx\}$

Rpta. $f(s) = \frac{2e^{u-1}}{(s+3)^3}(se^{\frac{-7s}{3}-5} + 9e^{-s/3} + 4e^{-s-2s})$

(55) Calcular $L\{\frac{e^{2t}+e^{-2t}}{4^t}\text{sen}(t-\frac{\pi}{4})\cos(t-\frac{\pi}{4})\mu(t-\frac{\pi}{4})\}$

(56) Calcular $L\{t^2 2^{-t}\,\text{sen}\,t.\cos t.\mu(t-\frac{\pi}{3})\}$

(57) Calcular $L\{|4-|t^2-1||\}$

(58) Calcular $L\{\text{sen}\,t.\mu(e^{5t}-4)\}$

(59) Calcular $L\{\frac{e^{-4(t-\pi)}\cos(t-\pi)}{(1-e^{-6(t-\pi)})4}\mu(t^2-\pi^2)\}$

(60) Evaluar si existe $L\{\frac{d}{dt}(\int_0^t t\,e^{4t}|v^2-1|dv)\}$ sin derivar.

(61) Evaluar si existe $L\{\int_{-12t}^{0} e^{-5t-v}\cos v.\mu(v^2-1)dv\}$

(62) Evaluar $L\{\int_0 t\,e^{4t}\,|u^2-1|\,du\}$

(63) Calcular $L\{|t^2-1|\}$

(64) Evaluar $L\{t^2\int_0^{4t}(v-4)^n \ln|v-4|\,\mu(v-4)dv\}$

(65) Evaluar $L\{\int_0 dv\int_0 F(u)du\}$ si $F(t)=H(s)$

(66) Evaluar $L\{t^n \ln|t|\}$

(67) Evaluar $L\{\mu(t^3-2t^2+t)\}$

(68) Evaluar $L\{e^{2t}t^n \ln|t|\}$

(69) Calcular la transformada de las funciones.

a) $F(t)=1+[\![|t-1|]\!]$ **b)** $G(t)=(-1)^{[\![|t|]\!]}$

(70) Evaluar $L\{\pi^t e^{-t}\int_0 \cos^3(v-1)\mu(v^3-1)dv\}$, donde μ es la función escalón unitario.

(71) Sea n > -1, n real, calcular $L\{t\,e^{-2t}\int_0 u^n \ln|u|\,du\}$

(72) Si L{F(t)} = f(s), calcular $L\{\frac{F(t)}{t^2}\}$

(73) Calcular $L\{t^2e^{-5t}\mu(t^2-1)\}$

(74) Calcular $L\{t\,e^{-5t}\int_t^{4t} e^{x+5t}\mu(|x-1|-1)dx\}$

(75) Calcular $L\{\sqrt{t}\cos t^{3/2}\}$

(76) Evaluar la integral $L\{\text{sen}^6(t-1)\mu(t^2-1)\}$

(77) Calcular $L\{\frac{1}{a}\int_0 e^{\frac{b}{a}t}F(t/a)dt\}$, a > 0

(78) Evaluar $L\{t^2e^{-4t}\,|4-|t^2-1||\}$

(79) Calcular $L\{t\,\text{tgh}(t)\mu(t-1)\}$

(80) Si $F(t)=(t-1)^n\mu(t-1)$, calcular L{F(t)} **Rpta.** $f(s)=\begin{cases}\dfrac{e^{-s}\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}, & n>-1,\ s>0\\[2mm] \dfrac{e^{-s}n!}{s^{n+1}}, & n\in z_0^+,\ s>0\end{cases}$

81) Demostrar que: $L\{t^k \operatorname{tgh} t\} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n [\frac{\Gamma(k+1)}{(s+2n)^{k+1}} - \frac{\Gamma(k+1)}{(s+2n+2)^{k+1}}]$

82) Calcular $L\{\frac{e^{-5t} t^k}{(1+e^{-6t})^2}\}$, ∀k. **Rpta.** $f(s) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (1+n) \frac{\Gamma(k+1)}{(6n+5+s)^{k+1}} & , si \ k > -1 \\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (1+n) \frac{k!}{(6n+5+s)^{k+1}} & , si \ k \in z_0^+ \end{cases}$

83) Calcular $L\{t e^{6t} \operatorname{senh} \sqrt{t}\}$ **Rpta.** $f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \cdot \frac{\Gamma(n+\frac{5}{2})}{(s-6)^{n+\frac{5}{2}}}$

84) Demostrar que: $L\{t^n\} = \begin{cases} \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} & , si \ n > -1, \ n \in R \\ \frac{n!}{s^{n+1}} & , si \ n \in z_0^+ \end{cases}$

85) Calcular $L\{t^{n/2} J_n(a\sqrt{t})\}$ **Rpta.** $(\frac{a}{2})^n \frac{e^{-a^2/4s}}{s^{n+1}}$, s > 0

86) Demostrar que: $L\{J_0(t) \operatorname{sen} t\} = \frac{1}{\sqrt{s}\sqrt[4]{s^2+4}} \operatorname{sen}(\frac{1}{2} \operatorname{arctg}(\frac{2}{s}))$

87) Demostrar que: $L\{J_0(t) \cos t\} = \frac{1}{\sqrt{s}\sqrt[4]{s^2+4}} \cos(\frac{1}{2} \operatorname{arctg}(\frac{2}{s}))$

88) Calcular. $L\{e^{-20t} J_0(t-4) \operatorname{sen}(t-4) U(t-4)\}$

89) Evaluar $L\{J_0(t) \cos t . \cosh t\}$

90) Sea L{F(t)} = H(s), probar que: $L\{t^{n/2} \int_0^{\infty} u^{-n/2} J_n(2\sqrt{ut}) F(u) du\} = \frac{H(1/s)}{s^{n+1}}$

91) Calcular $L\{t e^{-t} \int_t^{2t} J_0(u) \operatorname{sen} u . du\}$

92) Si $H(t) = e^{3t} J_0(4t)$. Calcular $L\{H_{(t)}^{(4)}\}$

93 Hallar $L\{t\,J_0(\lambda t)\}$. **Rpta.** $\dfrac{s}{(s^2+\lambda^2)^{3/2}}$

94 Demostrar que: $L\{J_0(a\sqrt{t(t+2c)})\} = \dfrac{e^{c(s-\sqrt{s^2+a^2})}}{(s^2+a^2)^{1/2}}$

95 Evaluar $L\{\int_0 t\,6^t J_0(5(t-4))\mu(t-4)dt\}$

96 Evaluar $L\{t\,e^{-10t} J_0(t)\cos t\}$

97 Evaluar $L\{\int_0 \int_0 J_0(2\sqrt{u(t-u)})F(u)du\,dv\}$ si L{F(t)} = H(s)

98 Calcular $L\{J_1(t)\}$, $L\{J_2(t)\}$, $L\{J_n(t)\}$

99 Calcular $L\{\int_{-t}^{0} e^{-20t} J_0(u)\operatorname{sen} u\,du\}$, si existe.

100 Demostrar que: $L\{I_e(t)\} = L\{\int_t^{\infty} \dfrac{e^{-u}}{u}du\} = \dfrac{\ln(s+1)}{2}$

101 Demostrar que: $L\{I_c(t)\} = L\{\int_t^{\infty} \dfrac{\cos u}{u}du\} = \dfrac{\ln(s^2+1)}{2s}$

102 Demostrar que: $\int_t^{\infty} e^{-t}(1-J_0(t))dt = \ln(1+\sqrt{2})$

103 Demostrar que: **a)** $\int_0^{\infty} J_0(t)dt = 1$ **b)** $\int_0^{\infty} e^{-t}J_0(t)dt = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

104 Calcular $\int_0^{\infty} t\,e^{-3t}J_0(4t)dt$ **Rpta.** $\dfrac{3}{125}$

105 Probar que $\int_0^{\infty} J_0(at)\cos bt\,dt = \dfrac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}$, cuando 0<b < a, y tiene valor cero cuando b>a.

106 Demostrar que: $\int_0^{\infty} J_0(\lambda t)dt = \dfrac{1}{\lambda}$

107 Calcular **a)** $\int_0^{\infty} t J_0(\lambda t)dt$ **b)** $\int_0^{\infty} t J_1(\lambda t)dt$

Rpta. **a)** 0 **b)** $\frac{1}{\lambda^2}$

108 Calcular $\int_0^{\infty} J_0(u)J_1(t-u)du$ **Rpta.** $J_0(t)-\cos t$

109 Calcular $\int_0^{\infty} u\, e^{u^2} J_0(au)du$ **Rpta.** $\frac{e^{-a^2/4}}{2}$

110 Demostrar que: $\int_0^{\infty} x^{2n}e^{-x^2}dx = \frac{1.3.5.7...(2n-1)\sqrt{\pi}}{2^{n+1}}$

111 Calcular las integrales siguientes. **a)** $\int_0^{\infty} \operatorname{sen} t^3 dt$ **b)** $\int_0^{\infty} \cos t^3 dt$

Rpta. **a)** $\frac{\Gamma(1/3)}{6}$

112 Demostrar que: $\Gamma(n) = 2\int_0^{\infty} x^{2n-1}e^{-x^2}dx$

113 Probar que: $\int_0^{\infty} \frac{u \operatorname{sen} u}{1+u^2}du = \frac{\pi}{2}e^{-at}$

114 Demostrar que: $\int_0^1 x^m(\ln x)^n dx = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}$, $n \in z^+$, $m > -1$

115 Demostrar que: $\int_0^{\infty} J_0(x^2)dx = \frac{[\Gamma(1/4)]^2}{4\pi}$

116 Calcular $\int_0^{\infty} \frac{t^u F(u)}{\Gamma(u+1)}du$, u ∈ R, u > -1 si L{F(u)} = H(s)

117 Calcular la transformada de Laplace $L\{t e^{-t}\int_0^{2t} J_0(u-4)\operatorname{sen}(u-4)U(u^2-16)du\}$

118 Calcular la integral $\int_0^{\infty} t^m e^{-at^n}\,dt$, m,n > 0, a > 0. **Rpta.** $\dfrac{\Gamma(\frac{m+1}{n})}{n a^{\frac{m+1}{n}}}$

119 Calcular $\int_0^1 t^n (\ln t)^n\,dt$, $n \in z^+$, m > -1 **Rpta.** $\dfrac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}$

120 Calcular $\int_0^{\pi} \dfrac{dt}{\sqrt{3-\cos t}}$ **Rpta.** $\dfrac{1}{2\sqrt{2}} B(\frac{1}{4},\frac{1}{2})$

121 Demostrar que: $\int_0^{\infty} \dfrac{y^2 dy}{1+y^4} = \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$

122 Calcular $\int_3^7 [(7-t)(t-3)]^{1/10}\,dt$

123 Calcular $\int_0^a (a^4-x^4)^{-1/6}\,dx$ **Rpta.** $\dfrac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(1/4)}{4a\Gamma(3/4)}$

124 Calcular $\int_0^1 \dfrac{dt}{(t+1)(t^2(1-t))^{1/3}}$ **Rpta.** $\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}$

125 Calcular $\int_0^1 \dfrac{dt}{(t+1)^3 \sqrt[3]{t^2}(1-t)}$ **Rpta.** $\dfrac{\pi\sqrt[3]{4}}{\sqrt{3}}$

126 Expresar $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\,dx$, mediante la función gamma.

127 Calcular las siguientes integrales.

a) $\int_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^a}}$, a > 0

b) $\int_0^a x^{2n}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$, a > 0

c) $\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg}^{2n-1} x\,dx$, 0 < n < 1

d) $\int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{m-1}\,dx$, n,m > 0

128 Mostrar que:

a) $\int_0^{\infty} y^3 e^{-2y^2}\,dy = \dfrac{3}{8}$

b) $\int_0^{\infty} y^2 e^{-2y^2}\,dy = \dfrac{\sqrt{\pi}}{8\sqrt{2}}$

c) $\int_0^{\infty} e^{-3x} x^{3/2} dx = \frac{\sqrt{3\pi}}{36}$

(129) Calcular las siguientes integrales

a) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^a(1+x)}$, $0 < a < 1$ b) $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\operatorname{tg} x}\, dx$

Rpta. a) $\frac{\pi}{\operatorname{sen} a\pi}$ b) $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$

(130) Demostrar que si $I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$, $I_2 = \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^4}}$ entonces $I_1 I_2 = \frac{\pi}{4}$

(131) Calcular los integrales siguientes

a) $\int_0^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ b) $\int_0^{\infty} e^{-\sqrt[3]{x}} dx$

c) $\int_0^{\infty} (x+1)^2 e^{-x^2} dx$ d) $\int_0^{\infty} \frac{x^c}{c^x} dx$ $sug. c^x = e^{x \ln c}$

Rpta. a) $\Gamma(\frac{1}{2})$ b) 2

c) $\frac{1}{3} + \Gamma(\frac{5}{3}) + \Gamma(\frac{4}{3})$ d) $\frac{\Gamma(c+1)}{(\ln c)^{c+1}}$

(132) Si $F(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$, $t > 0$, $G(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{t}} & , \ 0 < t < 1 \\ 0 & , \ t < 1 \end{cases}$. Demostrar que:

$F(t) * G(t) = \pi - 2\operatorname{arctg}(\sqrt{t-1})\,\mu(t-1)$

(133) Calcular $\int_0^{\infty} \frac{t dt}{1+t^6}$ **Rpta.** $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$

(134) Demostrar que: $\int_0^{\infty} x \cos x^3 dx = \frac{\pi}{3\sqrt{3}\Gamma(\frac{1}{3})}$

135 Calcular $I_n = \int_{-1}^{1} (1-t^2)^n \, dt$ **Rpta.** $\dfrac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\frac{3}{2})}$

136 Calcular $\int_0^{\pi/2} \dfrac{(\operatorname{sen}\theta)^{2m-1}(\cos\theta)^{2n-1} d\theta}{(a\operatorname{sen}^2\theta + b\cos^2\theta)^{m+n}}$ $m,n>0$ **Rpta.** $\dfrac{\beta(n,m)}{2a^n b^m}$

137 Demostrar que: $\int_0^{\infty} \dfrac{t^{m-1}+t^{n-1}}{(1+t)^{m+n}} dt = 2\beta(m,n), m,n>0$

138 Calcular $\int_0^1 \dfrac{\mu^{n-1}(1-\mu)^{m-1}}{(\mu+r)^{m+n}} d\mu, si\ m,n>0$ **Rpta.** $\dfrac{\beta(n,m)}{r^m(1+r)^n}$

139 Calcular $\int_0^1 \dfrac{\mu^{m-1}(1-\mu)^{n-1}}{(a+c\mu)^{m+n}} d\mu, si\ m,n>0$ **Rpta.** $\dfrac{\beta(n,m)}{a^m c^n (1+\frac{a}{c})^{m+n}}$

140 Probar que $\int_0^{\infty} \dfrac{\ln t\, dt}{1+t^4} = \dfrac{\pi^2\sqrt{2}}{16}$

141 Demostrar que $\int_0^{\infty} \dfrac{t^{n-1}}{1+t} dt = \dfrac{\pi}{\operatorname{sen}(n\pi)}$, $0<n<1$ sin usar la propiedad $\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \dfrac{\pi}{\operatorname{sen} p\pi}$, $0<p<1$

142 Demostrar que: $\Gamma(-m-\frac{1}{2}) = \dfrac{2^{2m+1}(-1)^{m+1}\sqrt{\pi}\, n!}{(2n+1)!}$, $m \in Z^+$

143 Pruebe que $\dfrac{[\Gamma(\frac{1}{3})]^2}{\Gamma(\frac{1}{6})} = \sqrt{\pi}\,.\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}}$

144 ¿Es cierto la identidad siguiente? $\Gamma(\mu) = .\dfrac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{\mu}{2})}{2^{1-\mu}.\cos\frac{\pi\mu}{2}.\Gamma(\frac{1-\mu}{2})}$ si es afirmativo demuéstrelo

145 Verifique que $\int_0^{\infty} \frac{(t-1)^p}{t^2} dt = \Gamma(1+p)\Gamma(1-p), \; |p|<1$

146 Calcular $\int_0^1 \frac{\mu^{n-1}(1-\mu)^{m-1} d\mu}{(a+\mu(b-a))^{m+n}}$ **Rpta.** $\frac{\beta(m,n)}{a^m b^n}$

147 Si m > 1, demostrar que $\int_0^{\infty} \frac{t^m dt}{r^2 + t^{2m}} = \pi \sec(\frac{\pi}{2m}) . \frac{r^{\frac{1-m}{m}}}{2m}$

148 Si $|p|<1$, calcular $\int_0^1 (\frac{t}{1-t})^p . \frac{dt}{(a+t)}, a>0$ **Rpta.** $\frac{a^{p-1} p\pi}{(a+1)^{p+1} \operatorname{sen} p\pi}$

149 Calcular $\int_0^{\infty} t^a (1+t)^b dt$ **Rpta.** $\frac{2\Gamma(a+1)\Gamma(-b-a-1)}{\Gamma(-b)}$

150 Calcular $\int_0^{\infty} \frac{\cosh(2a\theta)\, d\theta}{(\cosh\theta)^b}$ **Rpta.** $\frac{2^{b-1}\Gamma(a+\frac{b}{2})\Gamma(\frac{b}{2}-a)}{\Gamma(b)}$

151 Verifique que. $2^{2p-1}\Gamma(p)\Gamma(p+\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}\,\Gamma(2p)$

152 Si $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{m}).\operatorname{sen}(\frac{2\pi}{m})...\operatorname{sen}(\frac{m-1}{m}\pi) = \frac{m}{2^{m-1}}, m = 2,3...$ Calcular $\Gamma(\frac{1}{m})\Gamma(\frac{2}{m})....\Gamma(\frac{m-1}{m})$

Rpta. $\frac{\sqrt{(2\pi)^{m-1}}}{\sqrt{m}}$

153 Probar que $\int_0^1 \ln(\Gamma(t))dt = \frac{1}{2}\ln(2\pi)$

154 Si $-1<p<2$, evaluar $\int_0^{\infty} \frac{t^{1-p}(1-t)^p}{(1+t)^3} dt$ **Rpta.** $2^{p-3}\beta(2-p, p+1)$

155 Mostrar que : $\Gamma(-m+\frac{1}{2}) = \frac{(-2)^m\sqrt{\pi}}{(2m-1)!!}$

(156) Mostrar que: $\Gamma(m+\frac{1}{2})\Gamma(-m+\frac{1}{2})=(-1)^m\,\pi\,,\ m=1,2...$

(157) Verifica que $[\Gamma(\frac{1}{4})]^2=\frac{4.6.8.10.12.14...}{5.5.9.9.13.13.17.17...}8\sqrt{\pi}$

(158) Calcular $\int_0^{\infty}\frac{t^{p-1}\ln t}{1+t}dt$ **Rpta.** $-\pi\,\text{cosec}(p\pi).c\,\text{tg}\,(p\pi)$

(159) Verificar que: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{(1-\frac{\text{sen}^2 t}{2})^{\frac{1}{2}}}=\frac{[\Gamma(\frac{1}{4})]^2}{4\sqrt{\pi}}$

(160) Calcular $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln|\text{sen}\,t|\,dt$ **Rpta.** $-\frac{\pi}{2}\ln 2$

(161) Demostrar que: $\Gamma(p+1)=\sqrt{2\pi\,p}\,(\frac{p}{e})^p\,,\ p\in Z^+\,,\ p\to\infty$

(162) Probar que: $\Gamma(n+\frac{1}{2})=\frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n\,n!},\ \ \forall n\in Z^+$

(163) Demostrar que para $\mu>0$, $\int_0^{\infty}\frac{t\,\text{sen}\,t\mu}{1+t^2}=\frac{\pi}{2}e^{-\mu}$

(164) Demostrar que: $\frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^{\infty}(\frac{t^{n-1}}{e^t-1})dt=\sum_{K=1}^{\infty}\frac{1}{k^n},\ n>1$

(165) Demostrar que: $\int_0^{\infty}\text{sen}\,x^n dx=\frac{1}{2n}(\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2n})\Gamma(n-\frac{1}{2n})}{\Gamma(n-\frac{1}{n})})$

(166) Demostrar que: $\int_0^{\infty}\cos x^n dx=\frac{1}{2n}(\frac{\Gamma(\frac{1}{2n})\Gamma(2n-\frac{1}{2n})}{\Gamma(n-\frac{1}{n})})$

(167) Calcular $\int_0^{\infty}J_0(t-\mu)\frac{J_1(\mu)}{\mu}d\mu$ **Rpta.** $J_1(t)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)}{m!(m+1)!}(\frac{t}{2})^{2m+1}$

168 Calcular $\int_0^{\infty} \mu^{n-1} e^{-\mu^n} J_0(r-\mu^{\frac{n}{2}})d\mu$ para todo n en R - {0} **Rpta.** $\frac{e^{-\frac{r^2}{4}}}{n}$

169 Demostrar que: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}\,(t\,\text{sen}^2\,\theta)d\theta = \frac{1}{2}\,\text{sen}\,(\frac{t}{2})\,J_0(\frac{t}{2})$

170 Evaluar la integral $\int_0^{\infty} J_0\,(\mu^2)d\mu$

171 Evaluar la integral $\int_0^{\infty} J_0\,(\mu^4)d\mu$

172 Si $|p| > 1$, calcular $\int_0^{\infty} \text{sen}\,x^p dx$ usando transformada de Laplace

173 Verificar que: $\int_t^{t+1} \ln(\Gamma(\mu))d\mu = t\ln t - t + \frac{1}{2}\ln(2\pi)$

174 Verificar que:

$$\int_t^{t+n} \ln(\Gamma(\mu))d\mu = \ln[t^t.(t+1)^{t+1}.(t+2)^{t+2}...(t+n-1)^{t+n-1}e^{-nt} - e^{(\frac{n+1}{2})^n}(2\pi)^{\frac{n}{2}}]$$

175 Probar que: $J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$

176 Probar que: $J_n(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(n\phi - t\,\text{sen}\,\phi)\phi - \frac{\text{sen}\,n\,\pi}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-n\phi - \text{sen}\,h\phi}d\phi$

177 Demostrar que: $\int_0 \int_0 F(x,y)(1-x)^{m-1}y^m(1-y)^{n-1}dxdy = B(m,n)\int_0 F(u)(1-u)^{m+n-1}du$

178 Si $x, y \in R^+$, calcular $\iint_D x^{2m-1}y^{2n-1}dxdy$, tal que $D = \{(x,y)\in(R^+)^2 / x^2+y^2 \le c^2\}$

Rpta. $\frac{C^{2m+2n}\Gamma(m)\Gamma(n)}{4\Gamma(m+n+1)}$

(179) Demostrar que: $J_{\frac{3}{2}}(t)\operatorname{sen} t - J_{-\frac{3}{2}}(t)\cos t = \dfrac{2}{\sqrt{\pi t^3}}$

(180) Demostrar que: $J_0^{''}(t) = \dfrac{1}{2}[J_{n-1}(t) - J_{n+1}(t)]$

(181) Hallar $\dfrac{d(x^2 J_3(2x))}{dx}$ **Rpta.** $xJ_3(2x) + 2x^2 J_2(2x)$

(182) Demostrar que: $d(x^2 J_{p-1}(x) J_{p+1}(x)) = 2x^2 J_p(x) \dfrac{dJ_p(x)}{dx}$

(183) Demostrar que: $J_p'(x) = J_{p-1}(x) - \dfrac{p}{x} J_p(x)$

(184) Demostrar que: $J_p'(x) = \dfrac{p}{x} J_p(x) - J_{p+1}(x)$

(185) Demostrar que: $\dfrac{d[xJ_p(x)J_{p+1}(x)]}{dx} = x[J^2_{\ p}(x) - J^2_{\ p+1}(x)]$

(186) Demostrar que: $J_3(x) = (\dfrac{8}{x^2} - 1)J_1(x) - \dfrac{4}{x} J_0(x)$

(187) Demostrar que: $J_2(t) = (1 - \dfrac{4}{t^2})J_1(t) + \dfrac{2}{t} J_0(x)$

(188) Demostrar que: $\dfrac{d}{dx}(x^{-p} J_p(x)) = x^{-p} J_{p-1}(x)$

(189) Demostrar que: $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x),\ \forall\, n \in Z$

(190) Expresar $J_4(ax)$ en función de $J_0(ax)$ y $J_1(ax)$

Rpta. $J_4(ax) = (\dfrac{48}{a^3 x^3} - \dfrac{8}{ax}) J_1(ax) - (\dfrac{24}{a^2 x^2} - 1) J_0(ax)$

(191) Demostrar que:

a) $L\{f_{er}(t)\}=\dfrac{e^{\frac{s^2}{4}}}{s}f_{e_c}(\dfrac{s}{2})$, s > 0 b) $L\{f_{er}(\sqrt{t})\}=\dfrac{1}{s\sqrt{s+1}}$, $s>0$

c) $L\{f_{er}(at)\}=\dfrac{e^{\frac{s^2}{4a^2}}}{s}f_{er}(\dfrac{s}{2^a})$, s > 0 d) $L\{f_{er}(\dfrac{\alpha}{2\sqrt{t}})\}=\dfrac{1-e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s}$, $s>0$

e) $L\{f_{er}(\dfrac{\alpha}{2\sqrt{t}})\}=\dfrac{e^{-\alpha s}}{s}$, $s>0$ f) $L\{f_{er}(\sqrt{t})\}=\dfrac{1}{\sqrt{s+1}\,(\sqrt{s+1}+1)}$

192 Calcular $\int_0^{\infty}(\operatorname{sen}h\,\theta)^b(\cos h\theta)^a\,d\theta$

193 Calcular $\int_0^{\infty}\dfrac{\ln t}{1+t^6}dt$

194 Probar que: $\int_t^{t+2}\ln(\Gamma(\mu))d\mu=t\ln t+(t+1)\ln(1+t)-2t+\ln(2\pi)-1$

195 Demostrar que $\int_0^{\infty}\dfrac{e^{-t}(1-J_0(t))}{t}dt=\ln(1+\sqrt{2})$

196 Calcular a) $\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{e^{2x}dx}{ae^{3x}+b}$, ∀ a > 0, ∀ b > 0 b) $\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{e^{2x}dx}{(e^{3x}+1)^2}$

CAPÍTULO XII

12. TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE.-

Mediante la definición de transformada de Laplace se tiene: Si $F:[0,+\infty> \longrightarrow R$, es una función seccionalmente continua y de orden exponencial, entonces $\exists\, L\{F(t)\} = f(s)$, ahora invertiremos el problema, es decir: dada la función f(s) queremos encontrar la función F(t) que corresponde a esta transformada y a esta función F(t) se llama la transformada inversa de f(s) y se simboliza por $L^{-1}\{f(s)\}$, es decir $F(t) = L^{-1}\{f(s)\}$.

Ejemplo.- Hallar F(t) sí $f(s) = \dfrac{2}{s+3}$

Solución

$$F(t) = L^{-1}\{f(s)\} = L^{-1}\{\frac{2}{s+3}\} = 2e^{-3t} \quad \text{de donde} \quad F(t) = 2e^{-3t}$$

Ejemplo.- Hallar F(t) si $f(s) = \dfrac{1}{s^2+4}$

Solución

$$F(t) = L^{-1}\{f(s)\} = L^{-1}\{\frac{1}{s^2+4}\} = \frac{1}{2}L^{-1}\{\frac{2}{s^2+4}\} = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\,; \quad \text{de donde} \quad F(t) = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t$$

12.1. PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE.-

1er. PROPIEDAD DE LINEALIDAD

Si a y b son constantes arbitrarios y f (s), g (s) son las transformada de F (t) y G (t) respectivamente entonces:

$$L^{-1}\{a\,f(s)+b\,g(s)\}=aL^{-1}\{f(s)\}+bL^{-1}\{g(s)\}=a\,F(t)+b\,G(t)$$

Demostración

Mediante la propiedad de linealidad de la transformada se tiene:

$$L\{a\,F(t)+b\,G(t)\}=aL\{F(t)\}+bL\{G(t)\}=a\,F(s)+b\,G(s)$$

Es decir que: $a\,f(s)+b\,g(s)=L\{a\,F(t)+b\,G(t)\}$, tomando la transformada inversa se tiene: $L^{-1}\{a\,f(s)+b\,g(s)\}=a\,F(t)+b\,G(t)=a\,L^{-1}\{f(s)\}+b\,L^{-1}\{g(s)\}$

Ejemplo.- Sí $f(s)=\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s^2+9}-\frac{3}{s-2}$. Hallar F(t)

Solución

$$F(t)=\{f(s)\}=L^{-1}\{\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s^2+9}-\frac{3}{s-2}\}=L^{-1}\{\frac{1}{s^2}\}+L^{-1}\{\frac{1}{s^2+9}\}-3L^{-1}\{\frac{1}{s-2}\}$$

$$=t+\frac{1}{3}\operatorname{sen}3t-3e^{2t}$$

2da. PRIMERA PROPIEDAD DE TRASLACIÓN

Sí $L^{-1}\{f(s)\}=F(t)$, entonces $L^{-1}\{f(s-a)\}=e^{at}F(t)$

Demostración

Se conoce que: Si $L\{f(t)\}=F(s)\Rightarrow L\{e^{at}F(t)\}=f(s-a)$ de donde $e^{at}F(t)=L^{-1}\{f(s-a)\}$ otra forma es:

$$f(s)=\int_0^{+\infty}e^{-st}F(t)dt\ \Rightarrow\ f(s-a)=\int_0^{+\infty}e^{-(s-a)t}F(t)dt=\int_0^{+\infty}e^{-st}.e^{at}F(t)dt=L\{e^{at}F(t)\}$$

por lo tanto $f(s-a)=L\{e^{at}F(t)\}$ de donde: $L^{-1}\{f(s-a)\}=e^{at}F(t)$

Ejemplo.- Hallar F(t) sí: $f(s)=\frac{s-2}{(s-2)^2+9}$

Solución

$$F(t)=L^{-1}\{f(s)\}=L^{-1}\{\frac{s-2}{(s-2)^2+9}\}=e^{2t}L^{-1}\{\frac{s}{s^2+9}\}=e^{2t}\cos 3t$$

3era. SEGUNDA PROPIEDAD DE TRASLACIÓN.

Sí $L^{-1}\{f(s)\}=F(t)$, entonces $L^{-1}\{e^{-as}f(s)\}=\begin{cases}F(t-a),\ t>a\\ 0 \quad\quad\quad ,\ t<a\end{cases}$

Demostración

Como $f(s)=\int_0^{+\infty}e^{-st}F(t)dt$, entonces multiplicamos por e^{-as}

$$e^{-as}f(s)=\int_0^{+\infty}e^{-as}.e^{-st}F(t)dt=\int_0^{+\infty}e^{-s(t+a)}F(t)dt$$

Sea $t+a=u \Rightarrow dt=du$; Cuando $t=0$; $u=a$ y cuando $t\to+\infty$; $u\to+\infty$

$$e^{-as}f(s)=\int_0^{+\infty}e^{-s(t+a)}F(t)dt=\int_0^{+\infty}e^{-su}F(u-a)du=\int_0^{+\infty}e^{-su}\underbrace{F(u-a)}_{0}du=\int_0^{a}e^{-su}\underbrace{F(u-a)}_{0}du$$

$$=\int_0^{+\infty}e^{-su}F(u-a)du=\int_0^{+\infty}e^{-st}F(t-a)dt=L\{F(t-a)\}$$

4ta. PROPIEDAD DE CAMBIO DE ESCALA.-

Si $L^{-1}\{f(s)\}=F(t)$, entonces $L^{-1}\{f(ks)\}=\frac{1}{k}F(\frac{t}{k})$

Demostración

como $f(s)=\int_0^{\infty}e^{-st}F(t)dt \Rightarrow f(ks)=\int_0^{+\infty}e^{-kst}F(t)dt$

sea $u=kt \Rightarrow dt=\frac{du}{k}$ donde $t=\frac{u}{k}$

$$f(ks)=\int_0^{+\infty}e^{-skt}F(t)dt=\int_0^{+\infty}e^{-su}F(\frac{u}{k})\frac{du}{k}=\frac{1}{k}\int_0^{+\infty}e^{-su}F(\frac{u}{k})du=\frac{1}{k}L\{F(\frac{t}{k})\}$$

entonces : $L^{-1}\{f(ks)\} = \frac{1}{k}F(\frac{t}{k})$

Ejemplo.- Hallar F(t) si $f(s) = \frac{1}{9s^2+1}$

Solución

Sea $L^{-1}\{\frac{1}{s^2+1}\} = \operatorname{sen} t \Rightarrow L^{-1}\{\frac{1}{(3s)^2+1}\} = \frac{1}{3}\operatorname{sen}\frac{t}{3}$

12.2. TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE DE LA DERIVADA.-

Teorema.- Sí $L^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ entonces $L^{-1}\{f^{(n)}(s)\} = (-1)^n t^n F(t)$

Demostración

como $L\{t^n F(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} L\{F(t)\} = (-1)^n f^{(n)}(s)$

tomando la inversa a ambos miembros. $L^{-1}\{f^{(n)}(s)\} = (-1)^n t^n F(t)$

Ejemplo.- Hallar $L^{-1}\{\ln(\frac{s+2}{s+1})\}$

Solución

como $L\{t\,F(t)\} = -f'(s) \Rightarrow L^{-1}\{f'(s)\} = -t\,F(t) \Rightarrow L^{-1}\{f'(s)\} = -tL^{-1}\{f(s)\}$

Luego $L^{-1}\{f(s)\} = -\frac{1}{t}L^{-1}\{f'(s)\}$, aplicando este resultado al ejercicio dado.

$$L^{-1}\{\ln(\frac{s+2}{s+1})\} = L^{-1}\{\ln(s+2) - \ln(s+1)\} = -\frac{1}{t}(e^{-2t} - e^{-t}) = \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}$$

12.3. TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE DE LAS INTEGRALES.-

TEOREMA.- Si $L^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ entonces $L^{-1}\{\int_s^{+\infty} f(u)du\} = \frac{F(t)}{t}$

Demostración

como $L\{F(t)\} = f(s) \Rightarrow L\{\frac{F(t)}{t}\} = \int_s^\infty f(u)du$

de donde al tomar la transformada inversa se tiene. $L^{-1}\{\int_s^\infty f(u)du\} = \frac{F(t)}{t}$

Ejemplo.- Calcular la transformada inversa de $L^{-1}\{\int_s^\infty \frac{ds}{s^2+a^2}\}$

Solución

Sí $L\{F(t)\} = f(s) \Rightarrow L\{\frac{F(t)}{t}\} = \int_s^\infty f(s)ds$, de donde $L^{-1}\{\int_s^\infty f(s)ds\} = \frac{F(t)}{t}$

Luego si $L^{-1}\{f(s)\} = F(t) \Rightarrow L^{-1}\{\int_s^\infty f(s)ds\} = \frac{F(t)}{t}$ aplicando el resultado al ejercicio.

$$L^{-1}\{\frac{1}{s^2+a^2}\} = \frac{\operatorname{sen} at}{a} \Rightarrow L^{-1}\{\int_s^\infty \frac{ds}{s^2+a^2}\} = \frac{\operatorname{sen} at}{at}$$

12.4. TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE DE LA MULTIPLICACIÓN POR S.-

TEOREMA.- Sí $L^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ y $F(0) = 0$ entonces $L^{-1}\{s\,f(s)\} = F'(t)$

Demostración

como $L^{-1}\{f(s)\} = F(t) \Rightarrow L\{F(t)\} = f(s)$, de donde

$L\{F'(t)\} = sL\{F(t)\} - F(0) = sL\{F(t)\}$ es decir: $L\{F'(t)\} = s\,f(s)$ entonces $L^{-1}\{s\,f(s)\} = F'(t)$

Ejemplo.- Hallar $L^{-1}\{\frac{s}{(s+1)^5}\}$

Solución

$$L^{-1}\{\frac{1}{(s+1)^5}\} = e^{-t}L^{-1}\{\frac{1}{s^5}\} = \frac{t^4e^{-t}}{24} \text{ de donde } L^{-1}\{\frac{s}{(s+1)^5}\} = \frac{t^3e^{-t}}{6} - \frac{t^4e^{-t}}{24} = \frac{e^{-t}}{24}(4t^3 - t^4)$$

12.5. TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE DE LA DIVISIÓN POR S.-

TEOREMA.- Si $L^{-1}\{f(s)\}=F(t)$ entonces $L^{-1}\{\frac{f(s)}{s}\}=\int_0^t F(u)du$

Demostración

como $L^{-1}\{f(s)\}=F(t) \Rightarrow L\{F(t)\}=f(s)$ de donde

$$L\{\int_0^t F(u)du\}=\frac{f(s)}{s} \Rightarrow L^{-1}\{\frac{f(s)}{s}\}=\int_0^t F(u)du$$

Ejemplo.- Encontrar $L^{-1}\{\frac{1}{s}\ln(1+\frac{1}{s^2})\}$

Solución

$$L^{-1}\{\ln(1+\frac{1}{s^2})\}=L^{-1}\{\ln(s^2+1)-\ln s^2\}=-\frac{1}{t}L^{-1}\{\frac{2s}{s^2+1}-\frac{2}{s}\}=-\frac{1}{t}(2\cos t-2)=\frac{2(1-\cos t)}{t}$$

$$L^{-1}\{\frac{1}{s}\ln(1+\frac{1}{s^2})\}=\int_0^t \frac{2(1-\cos u)}{u}du$$

12.6. TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE POR EL MÉTODO DE LAS FRACCIONES PARCIALES.-

Las funciones racionales $\frac{P(s)}{Q(s)}$, donde P(s) y Q(s) son polinomios en las cuales el grado de P(s) es menor que el grado de Q(s), pueden expresar como una suma de funciones racionales simples, aplicando el criterio de descomposición estudiado en el caso de las integrales de funciones racionales.

Ejemplo.- Hallar $L^{-1}\{\frac{11s^2-2s+5}{(s-2)(2s-1)(s+1)}\}$

Solución

$$\frac{11s^2-2s+5}{(s-2)(2s-1)(s+1)}=\frac{A}{s-2}+\frac{B}{2s-1}+\frac{C}{s+1}=\frac{A(2s-1)(s+1)+B(s-2)(s+1)+C(s-2)(2s-1)}{(s-2)(2s-1)(s+1)}$$

$$11s^2 - 2s + 5 = A(2s-1)(s+1) + B(s-2)(s+1) + C(s-2)(2s-1)$$

$$11s^2 - 2s + 5 = A(2s^2 + s - 1) + B(s^2 - s - 2) + C(2s^2 - 5s + 2)$$

$$11s^2 - 2s + 5 = (2A + B + 2C)s^2 + (A - B - 5C)s - A - 2B + 2C$$

$$\begin{cases} 2A + B + 2C = 11 \\ A - B - 5C = -2 \\ -A - 2B + 2C = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 5 \\ B = -3 \\ C = 2 \end{cases}$$

$$L^{-1}\{\frac{11s^2 - 2s + 5}{(s-2)(2s-1)(s+1)}\} = L^{-1}\{\frac{5}{s-2} - \frac{3}{2s-1} + \frac{2}{s+1}\}$$

$$= 5L^{-1}\{\frac{1}{s-2}\} - \frac{3}{2}L^{-1}\{\frac{1}{s-\frac{1}{2}}\} + 2L^{-1}\{\frac{1}{s+1}\} = 5e^{2t} - \frac{3}{2}e^{\frac{t}{2}} + 2e^{-t}$$

12.7. TEOREMA (FÓRMULA DEL DESARROLLO DE HEAVISIDE).-

Sean P(s) y Q(s) polinomios en los cuales P(s) es de grado menor que el grado de Q(s). Si Q(s) tiene n raíces diferentes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$; entonces

$$L^{-1}\{\frac{P(s)}{Q(s)}\} = \sum_{k=1}^{n} \frac{P(\alpha k)}{Q'(\alpha k)} e^{\alpha_k t}$$

Demostración

Si el polinomio Q(s) tiene n raíces diferentes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$; por lo tanto de acuerdo al método de la descomposición de las funciones racionales se puede expresar así:

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{A_1}{s-\alpha_1} + \frac{A_2}{s-\alpha_2} + \ldots + \frac{A_k}{s-\alpha_k} + \ldots + \frac{A_n}{s-\alpha_n} \quad \ldots (1)$$

a la ecuación (1) multiplicamos por $s - \alpha_k$, es decir:

$$\frac{P(s)}{Q(s)}(s-\alpha_k) = (\frac{A_1}{s-\alpha_1} + \frac{A_2}{s-\alpha_2} + \ldots + \frac{A_k}{s-\alpha_k} + \ldots + \frac{A_n}{s-\alpha_n})(s-\alpha_k) \quad \ldots (2)$$

ahora tomando límite cuando $s \to \alpha_k$ y aplicando la regla de L 'Hospital, se tiene:

$$A_k = \lim_{s\to\alpha_k} \frac{P(s)}{Q(s)}(s-\alpha_k) = \lim_{s\to\alpha_k} P(s).\frac{s-\alpha_k}{Q(s)}$$

$$= \lim_{s\to\alpha_k} P(s). \lim_{s\to\alpha_k} \frac{s-\alpha_k}{Q(s)} = \lim_{s\to\alpha_k} P(s). \lim_{s\to\alpha_k} P(s). \lim_{s\to\alpha_k} \frac{1}{Q'(s)} = P(\alpha k).\frac{1}{Q'(\alpha k)} = \frac{P(\alpha k)}{Q'(\alpha k)}$$

$$\therefore\ A_k = \frac{P(\alpha k)}{Q'(\alpha k)} \qquad \textbf{... (3)}$$

reemplazando (3) en (1) se tiene:

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(\alpha_1)}{Q'(\alpha_1)}.\frac{1}{s-\alpha_1} + \frac{P(\alpha_2)}{Q'(\alpha_2)}\frac{1}{s-\alpha_2} + ... + \frac{P(\alpha_n)}{Q'(\alpha_n)}\frac{1}{s-\alpha_n}$$; tomando la inversa

$$L^{-1}\{\frac{P(s)}{Q(s)}\} = L^{-1}\{\frac{P(\alpha_1)}{Q'(\alpha_1)}.\frac{1}{s-\alpha_1} + \frac{P(\alpha_2)}{Q'(\alpha_2)}.\frac{1}{s-\alpha_2} + ... + \frac{P(\alpha_n)}{Q'(\alpha_n)}.\frac{1}{s-\alpha_n}\}$$

$$= \frac{P(\alpha_1)}{Q'(\alpha_1)}e^{\alpha_1 t} + \frac{P(\alpha_2)}{Q'(\alpha_2)}e^{\alpha_2 t} + ... + \frac{P(\alpha_n)}{Q'(\alpha_n)}e^{\alpha_n t}$$

$$\therefore\ L^{-1}\{\frac{P(s)}{Q(s)}\} = \sum_{k=1}^{n} \frac{P(\alpha k)}{Q'(\alpha k)}e^{\alpha_k t}$$

Ejemplo.- Calcular $L^{-1}\{\frac{19s+37}{(s-2)(s+1)(s+3)}\}$

Solución

$Q(s) = (s-2)(s+1)(s+3) = s^3 + 2s^2 - 5s - 6$

$Q'(s) = 3s^2 + 4s - 5 \Rightarrow Q'(2) = 15,\ Q'(1) = -6,\ Q'(-3) = 10$

P(s) = 19s + 37 $\Rightarrow$ P(2) = 75 , P(-1) = 18 , P(-3) = -20

$$L^{-1}\{\frac{19s+37}{(s-2)(s+1)(s+3)}\} = \frac{P(2)}{Q'(2)}e^{2t} + \frac{P(-1)}{Q'(-1)}e^{-t} + \frac{P(-3)}{Q'(-3)}e^{-3t} = 5e^{2t} - 3e^{-t} - 2e^{-3t}$$

OBSERVACIÓN.- Supongamos que $f(s)=\frac{P(s)}{Q(s)}$ son polinomios en donde el grado P(s) es menor que el grado de Q(s), pero en este caso Q(s) = 0 tiene una raíz "a" de multiplicidad m, mientras que las otras raíces $b_1,b_2,\dots,b_n$ son todas distintas entre sí. Entonces se tiene:

i) $$f(s)=\frac{P(s)}{Q(s)}=\frac{A_1}{(s-a)^m}+\frac{A_2}{(s-a)^{m-1}}+\dots+\frac{A_m}{s-a}+\frac{B_1}{s-b_1}+\dots+\frac{B_n}{s-b_n}$$

ii) $$A_k=\lim_{s\to a}\frac{1}{(k-1)!}.\frac{d^k}{ds^k}(s-a)^n f(s)\quad ,\ k=1,2,\dots,m$$

Entonces la transformada inversa es:

$$L^{-1}\{f(s)\}=L^{-1}\{\frac{P(s)}{Q(s)}\}=e^{at}(\frac{A_1t^{m-1}}{(m-1)!}+\frac{A_2t^{m-2}}{(m-2)!}+\dots+A_m)+B_1e^{b_1t}+B_2e^{b_2t}+\dots+B_ne^{b_nt}$$

12.8. LA CONVOLUCIÓN.-

a) Definición.- Sea F y G dos funciones continuas por tramos en cada intervalo finito y cerrado $0\le t\le b$ y de orden exponencial. La función que denotaremos por F*G y que viene definidas por:

$$F(t)*G(t)=\int_0^t F(u)G(t-u)du$$

recibe el nombre de convolución de las funciones F y G.

Ejemplo.- La convolución de $F(t)=e^t$ y G(t) = sen t es:

$$e^t*\operatorname{sen}t=\int_0^t e^u\operatorname{sen}(t-u)du=\int_0^t e^u(\operatorname{sen}t\cos u-\operatorname{sen}u\cos t)du$$

$$=\int_0^t e^u\operatorname{sen}t\cos u\,du-\int_0^t e^u\operatorname{sen}u\cos t\,du$$

$$=[\frac{\operatorname{sen}t}{2}(e^u\cos u+e^u\operatorname{sen}u)-\frac{\cos t}{2}(e^u\operatorname{sen}u-e^u\cos u)]\Big/_0^t$$

$$= \frac{1}{2}[\operatorname{sen} t\, e^t \cos t + \operatorname{sen}^2 t\, e^t - \cos t\, e^t \operatorname{sen} t + e^t \cos^2 t] - \frac{1}{2}[\operatorname{sen} t + \cos t]$$

$$= \frac{1}{2}[e^t - \operatorname{sen} t - \cos t] \qquad \therefore\ e^t * \operatorname{sen} t = \frac{1}{2}(e^t - \operatorname{sen} t - \cos t)$$

12.9. TEOREMA DE LA CONVOLUCIÓN.-

Sean F(t) y G(t) funciones continuas por tramos $\forall\ t \geq 0$ y de orden exponencial, entonces:

$$L\{F(t)*G(t)\} = L\{F(t)\}.L\{G(t)\} = f(s).g(s)$$

Demostración

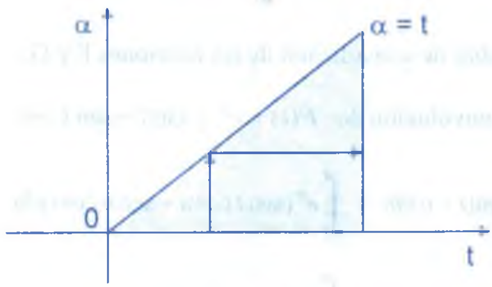
Sea $f(s) = L\{F(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-s\alpha} F(\alpha)d\alpha \quad ; \quad g(s) = L\{G(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-s\beta} F(\beta)d\beta$

$$f(s).g(s) = (\int_0^{\infty} e^{-s\alpha} F(\alpha)d\alpha)(\int_0^{\infty} e^{-s\beta} F(\beta)d\beta) = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-s(\alpha+\beta)} F(\alpha)G(\beta)d\alpha\, d\beta$$

$$= \int_0^{\infty} F(\alpha)d\alpha \int_0^{\infty} e^{-s(\alpha+\beta)} G(\beta)d\beta$$

dejando α fijo, hacemos $t = \alpha + \beta$, $dt = d\beta$, de modo que:

$$f(s).g(s) = \int_0^{\infty} F(\alpha)d\alpha \int_{\alpha}^{\infty} e^{-st} G(t-\alpha)dt$$



En el plano tα estamos integrando sobre la región sombreada, como F y G son continuas por partes $\forall\ t \geq 0$ y de orden exponencial se puede demostrar que es posible intercambiar el orden de integración:

$$f(s).g(s) = \int_0^\infty e^{-st}dt \int_\alpha^\infty F(\alpha)G(t-\alpha)d\alpha = \int_0^\infty e^{-st}\{\int_0^t F(\alpha)G(t-\alpha)d\alpha\}dt = L\{F*G\}$$

$$\therefore \quad L\{F(t)*G(t)\} = L\{F(t)\}.L\{G(t)\} = f(s).g(s)$$

Ejemplo.- Calcular $L\{\int_0^t e^u \operatorname{sen}(t-u)du\}$

Solución

Sean $F(t) = e^t$ y G(t) = sen t, entonces por el teorema

$$L\{\int_0^t e^u \operatorname{sen}(t-u)du\} = L\{e^t\}.L\{\operatorname{sen} t\} = \frac{1}{s-1}.\frac{1}{s^2+1} = \frac{1}{(s-1)(s^2+1)}$$

Nota: $e^t * \operatorname{sen} t = \int_0^t e^u \operatorname{sen}(t-u)du$

12.10. TEOREMA DE CONVOLUCIÓN PARA LA TRANSFORMADA INVERSA.-

Suponiendo que $L^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ y $L^{-1}\{g(s)\} = G(t)$.

Entonces $L^{-1}\{f(s).g(s)\} = \int_0^t F(u)G(t-u)du = F*G$ donde F*G es la convolución de F y G.

Demostración

Si se prueba que $L\{\int_0^t F(u)G(t-u)du\} = f(s).g(s)$ **... (1)**

entonces el teorema quedara demostrado donde $L\{F(t)\} = f(s)$ y $L\{G(t)\} = g(s)$

$$L\{\int_0^t F(u)G(t-u)du\} = \int_{t=0}^\infty e^{-st}(\int_{u=0}^t F(u)G(t-u)du)dt$$

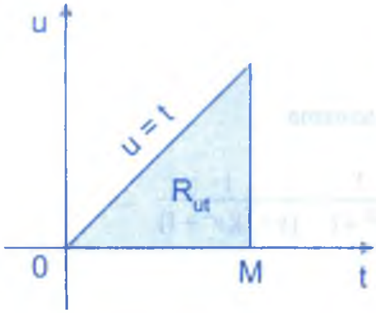
$$= \int_{t=0}^\infty \int_{u=0}^t e^{-st}F(u)G(t-u)du\,dt = \lim_{M\to\infty} S_M, \text{ donde}$$

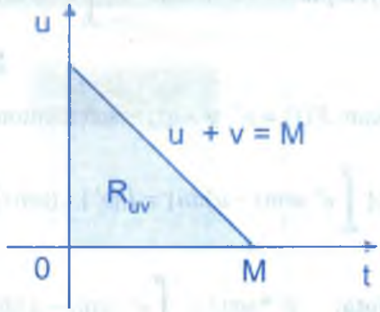
$$S_M = \int_{t=0}^M \int_{u=0}^t e^{-st}F(u)G(t-u)du\,dt \qquad \textbf{... (2)}$$

Consideremos la región R_{tu} sobre el cual se calcula la integral doble.

Haciendo $t = u = v \Rightarrow t = u + v$

ahora a la región R_{tu} la transformamos en al región R_{uv} .





$$S_M = \iint\limits_{R_{tu}} e^{-st} F(u)G(t-u)du\,dt = \iint\limits_{R_{uv}} e^{-s(u+v)} F(u)G(u) \left|\frac{\partial(u,t)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv \quad \dots (3)$$

donde el jacobiano de la transformación es. $J(u,v) = \dfrac{\partial(u,t)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial u} & \dfrac{\partial u}{\partial v} \\ \dfrac{\partial t}{\partial u} & \dfrac{\partial t}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$

por lo tanto: $S_M = \iint\limits_{R_{uv}} e^{-s(u+v)} F(u)G(u)du\,dv$; ahora definiremos la función siguiente.

$$k(u,v) = \begin{cases} e^{-s(u+v)} F(u)G(v) & , \quad si \ u+v \le M \\ 0 & , \quad si \ u+v > M \end{cases}$$

$$S_M = \int_{v=0}^{M} \int_{u=0}^{M} k(u,v)du\,dv \text{ , entonces}$$

$$\lim_{M\to\infty} S_M = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} k(u,v)du\,dv = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-s(u+v)}F(u)G(v)du\,dv = (\int_0^{\infty} e^{-su}F(u)du)(\int_0^{\infty} e^{-sv}G(v)dv)$$

$$\lim_{M\to\infty} S_M = L\{F(u)\}.L\{G(v)\} = f(s).g(s) \qquad \ldots (\alpha)$$

como $L\{\int_0^{t} F(u)G(t-u)du\} = \lim\limits_{M\to\infty} S_M$ $\qquad \ldots (\beta)$

por lo tanto de (α) y (β) se tiene: $\quad f(s).g(s) = L\{\int_0^{t} F(u)G(t-u)du\}$

$$\therefore \; L^{-1}\{f(s).g(s)\} = \int_0^{t} F(u)G(t-u)du = F * G$$

OBSERVACIÓN.- La convolución de F y G es conmutativa, es decir F*G = G*F

Ejemplo.- Calcular $L^{-1}\{\dfrac{1}{(s-1)(s+4)}\}$

Solución

Sea $f(s) = \dfrac{1}{s-1}$ y $g(s) = \dfrac{1}{s+4}$ de donde $L^{-1}\{f(s)\} = e^{t} = F(t)$ y $L^{-1}\{g(s)\} = e^{-4t} = G(t)$, por lo tanto por el teorema de convolución se tiene:

$$L^{-1}\{\frac{1}{(s-1)(s+4)}\} = \int_0^{t} F(u)G(t-u)du = \int_0^{t} e^{u}.e^{-4(t-u)}du = e^{-4t}\int_0^{t} e^{5u}du = \frac{e^{t}}{5} - \frac{e^{-4t}}{5}$$

Ejemplo.- Calcular $L^{-1}\{\dfrac{s^2}{(s^2+4)^2}\}$

Solución

$L^{-1}\{\dfrac{s^2}{(s^2+4)^2}\} = L^{-1}\{\dfrac{s}{s^2+4}.\dfrac{s}{s^2+4}\}$, de donde $f(s) = \dfrac{s}{s^2+4}$ y $g(s) = \dfrac{s}{s^2+4}$

por lo tanto $L^{-1}\{f(s)\}=\cos 2t=F(t)$ y $L^{-1}\{g(s)\}=\cos 2t=G(t)$

$$L^{-1}\{\frac{s^2}{(s^2+4)^2}\}=\int_0^t F(u)G(t-u)du=\int_0^t \cos 2u.\cos(2t-2u)du$$

$$=\int_0^t \cos 2u(\cos 2t\cos 2u+\operatorname{sen} 2t\operatorname{sen} 2u)du$$

$$=\cos 2t\int_0^t \cos^2 2u\,du+\operatorname{sen} 2t\int_0^t \operatorname{sen} 2u.\cos 2u\,du$$

$$=\cos 2t(\frac{t}{2}+\frac{\operatorname{sen} 4t}{8})+\operatorname{sen} 2t(\frac{\operatorname{sen}^2 2t}{4})=\frac{t\cos t}{2}+\frac{\operatorname{sen} 2t}{4}$$

$$\therefore\quad L^{-1}\{\frac{s^2}{(s^2+4)^2}\}=\frac{t\cos 2t}{2}+\frac{\operatorname{sen} 2t}{4}$$

12.11. LA FUNCIÓN ERROR.-

A la función error denotaremos por f_{er} y es definido por:

$$\boxed{f_{er}(t)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-u^2}du}$$

al evaluar transformada inversas de ciertas funciones simples de s se encuentra la función error por ejemplo: se conoce que $L^{-1}\{\frac{1}{\sqrt{s}}\}=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$ entonces por la propiedad de traslación.

$$L^{-1}\{\frac{1}{\sqrt{s+1}}\}=\frac{e^{-t}}{\sqrt{\pi t}}$$

ahora aplicamos el teorema de convolución a la transformada inversa de $L^{-1}\{\frac{1}{s\sqrt{s+1}}\}$, es decir: $L^{-1}\{\frac{1}{s}\}=1=F(t)$ y $L^{-1}\{\frac{1}{\sqrt{s+1}}\}=\frac{e^{-t}}{\sqrt{\pi t}}=G(t)$

$$L^{-1}\{\frac{1}{s\sqrt{s+1}}\}=\int_0^t 1.\frac{e^{-u}}{\sqrt{\pi u}}du=\int_0^t \frac{e^{-u}}{\sqrt{\pi u}}du \quad \textbf{...(1)}$$

Sea $u = x^2 \Rightarrow du = 2x\,dx = 2\sqrt{u}dx$; para u = 0; x = 0 y para u = t , $x = \sqrt{t}$

Luego reemplazando en (1) se tiene:

$$L^{-1}\{\frac{1}{s\sqrt{s+1}}\} = \int_0^t \frac{e^{-u}}{\sqrt{\pi u}}du = \int_0^{\sqrt{t}} \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}x}.2x\,dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{t}} e^{-x^2}dx = f_{er}(\sqrt{t})$$

$$\therefore \quad L^{-1}\{\frac{1}{s\sqrt{s+1}}\} = f_{er}(\sqrt{t})$$

12.12. LA FUNCIÓN COMPLEMENTARIA DE ERROR.-

A la función complementaria de error definiremos por:

$$f_a(t) = 1 - f_{er}(t) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-u^2}du = \frac{2}{\pi}\int_t^{\infty} e^{-u^2}du$$

12.13. LAS INTEGRALES DEL SENO Y COSENO.-

A las integrales del seno y coseno se definen de la siguiente manera.

$$\boxed{I_s(t) = \int_0^t \frac{\operatorname{sen} u}{u}du \quad ; \quad I_c(t) = \int_t^{\infty} \frac{\cos u}{u}du}$$

12.14. LA INTEGRAL EXPONENCIAL.-

A la integral exponencial se define de la siguiente manera: $I_e(t) = \int_t^{\infty} \frac{e^{-u}}{u}du$

OBSERVACIÓN.- Se ha estudiado la función escalón unidad y su respectiva transformada de Laplace. Ahora expresaremos la transformada inversa en términos de la función escalón unidad y los expresaremos mediante el teorema siguiente.

12.15. TEOREMA.-

Si $L^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ y $c \geq 0$, y si a F(t) se le asigna valores (no importa cuales) para -c < t < 0. Entonces:

$$L^{-1}\{e^{-cs}f(s)\} = F(t-c)\mu(t-c)$$

Ejemplo.- Evaluar $L^{-1}\{\frac{e^{-4s}}{(s+2)^3}\}$

Solución

$$L^{-1}\{\frac{1}{(s+2)^3}\}=e^{-2t}L^{-1}\{\frac{1}{s^3}\}=2t^2e^{-2t}=F(t)$$

$$L^{-1}\{\frac{e^{-4s}}{(s+2)^3}\}=F(t-4)\mu(t-4)=2(t-4)^2e^{-2(t-4)}\mu(t-4)$$

12.16. EJERCICIOS DESARROLLADOS.-

1. Hallar la transformada de Laplace inversa de:

a) $L^{-1}\{\frac{3s-12}{s^2+8}\}$

Solución

$$L^{-1}\{\frac{3s-12}{s^2+8}\}=3L^{-1}\{\frac{s}{s^2+8}\}-\frac{6}{\sqrt{2}}L^{-1}\{\frac{2\sqrt{2}}{s^2+8}\}=3\cos 2\sqrt{2}t-3\sqrt{2}\operatorname{sen}2\sqrt{2}t$$

b) $L^{-1}\{\frac{1}{2s-5}\}$

Solución

$$L^{-1}\{\frac{1}{2s-5}\}=\frac{1}{2}L^{-1}\{\frac{1}{s-\frac{5}{2}}\}=\frac{1}{2}e^{\frac{5}{2}t}$$

c) $L^{-1}\{\frac{s}{s^2-2\pi s+2\pi^2}\}$

Solución

$$L^{-1}\{\frac{s}{s^2-2\pi s+2\pi^2}\}=L^{-1}\{\frac{s-\pi+\pi}{(s-\pi)^2+\pi^2}\}=L^{-1}\{\frac{s-\pi}{(s-\pi)^2+\pi^2}\}+L^{-1}\{\frac{\pi}{(s-\pi)^2+\pi^2}\}$$

$$=e^{\pi t}\cos\pi t+e^{\pi t}\operatorname{sen}\pi t$$

d) $L^{-1}\{\frac{3s-8}{s^2+4}-\frac{4s-24}{s^2-16}\}$

Solución

$$L^{-1}\{\frac{3s-8}{s^2+4}-\frac{4s-24}{s^2-16}\}=L^{-1}\{\frac{3s-8}{s^2+4}\}-L^{-1}\{\frac{4s-24}{s^2-16}\}$$

$$=3L^{-1}\{\frac{s}{s^2+4}\}-4L^{-1}\{\frac{2}{s^2+4}\}-4L^{-1}\{\frac{s}{s^2-16}\}+6L^{-1}\{\frac{4}{s^2-16}\}$$

= 3 cos 2t - 4 sen 2t - 4 cosh 4t + 6 senh 4t

e) $L^{-1}\{\frac{s}{(s+1)^5}\}$

Solución

Mediante la propiedad de traslación se tiene

$$L^{-1}\{\frac{s}{(s+1)^5}\}=e^{-t}L^{-1}\{\frac{s-1}{s^5}\}=e^{-t}L^{-1}\{\frac{1}{s^4}-\frac{1}{s^5}\}=e^{-t}(\frac{t^3}{6}-\frac{t^4}{24})=\frac{e^{-t}}{24}(4t^3-t^4)$$

f) $L^{-1}\{\frac{3s+2}{4s^2+12s+9}\}$

Solución

$$L^{-1}\{\frac{3s+2}{4s^2+12s+9}\}=\frac{3}{4}L^{-1}\{\frac{s+2/3}{s^2+3s+9/4}\}=\frac{3}{4}L^{-1}\{\frac{1}{s+3/2}\}=\frac{3}{4}e^{-\frac{3}{2}t}$$

(2) Hallar la transformada inversa de Laplace.

a) $L^{-1}\{\frac{2s-6}{s^3-s}\}$

Solución

Descomponiendo en fracciones parciales.

$$\frac{2s-6}{s^3-s}=\frac{2s-6}{s(s+1)(s-1)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+1}+\frac{C}{s-1}=\frac{A(s+1)(s-1)+Bs(s-1)+Cs(s+1)}{s(s+1)(s-1)}$$

$$2s-6=A(s^2-1)+B(s^2-s)+C(s^2+s)\ \Rightarrow\ 2s-6=(A+B+C)s^2+(-B+C)s-A$$

$$\begin{cases}A+B+C=0\\-B+C=2\\-A=-6\end{cases}\Rightarrow\ \begin{matrix}A=6\\B=-4\\C=-2\end{matrix}\ \Rightarrow\ \frac{2s-6}{s^3-s}=\frac{6}{s}-\frac{4}{s+1}-\frac{2}{s-1}$$

$$L^{-1}\{\frac{2s-6}{s^3-s}\}=L^{-1}\{\frac{6}{s}-\frac{4}{s+1}-\frac{2}{s-1}\}=6-4e^{-t}-2e^{t}$$

b) $L^{-1}\{\frac{s^2-2s+2}{(s+3)(s^2+2s+2)}\}$

Solución

Descomponiendo en fracciones parciales.

$$\frac{s^2-2s+2}{(s+3)(s^2+2s+2)}=\frac{A}{s+3}+\frac{Bs+C}{s^2+2s+2}=\frac{A(s^2+2s+2)+(Bs+c)(s+3)}{(s+3)(s^2+2s+2)}$$

$$s^2-2s+2=A(s^2+2s+2)+B(s^2+3s)+C(s+3)$$

$$s^2-2s+2=(A+B)s^2+(2A+3B+C)s+2A+3C$$

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 2A+3B+C=-2 \\ 2A+3C=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{17}{5} \\ B=-\frac{12}{5} \\ C=-\frac{8}{5} \end{cases}$$

$$\frac{s^2-2s+2}{(s+3)(s^2+2s+2)}=\frac{17}{5(s+3)}-\frac{1}{s}(\frac{12s+8}{s^2+2s+2})$$

$$L^{-1}\{\frac{s^2-2s+2}{(s+3)(s^2+2s+2)}\}=L^{-1}\{\frac{17}{5(s+3)}-\frac{1}{5}(\frac{12s+8}{s^2+2s+2})\}$$

$$=\frac{17}{5}L^{-1}\{\frac{1}{(s+3)}\}-\frac{12}{5}L^{-1}\{\frac{s+1}{(s+1)^2+1}\}+\frac{4}{5}L^{-1}\{\frac{1}{(s+1)^2+1}\}$$

$$=\frac{17}{5}e^{-3t}-\frac{12}{5}e^{-t}\cos t+\frac{4}{5}e^{-t}\,\text{sen}\,t$$

c) $L^{-1}\{\frac{s^2-2s+3}{(s-1)^2(s+1)}\}$

Solución

$$\frac{s^2-2s+3}{(s+1)^2(s+1)}=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{s-1}+\frac{C}{(s-1)^2}=\frac{A(s-1)^2+B(s+1)(s-1)+C(s+1)}{(s+1)(s-1)^2}$$

$$s^2-2s+2=A(s^2-2s+1)+B(s^2-1)+C(s+1)=(A+B)s^2+(-2A+C)s+A-B+C$$

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -2A+C=-2 \\ A-B+C=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\dfrac{5}{4} \\ B=-\dfrac{1}{4} \\ C=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$L^{-1}\{\frac{s^2-2s+3}{(s-1)^2(s+1)}\}=L^{-1}\{\frac{5}{4(s+1)}-\frac{1}{4(s-1)}+\frac{1}{2(s-1)^2}\}$$

$$=\frac{5}{4}L^{-1}\{\frac{1}{s+1}\}-\frac{1}{4}L^{-1}\{\frac{1}{s-1}\}+\frac{1}{2}L^{-1}\{\frac{1}{(s+1)^2}\}=\frac{5}{4}e^{-t}-\frac{1}{4}e^{t}+\frac{te^{t}}{2}$$

d) $L^{-1}\{\dfrac{1}{s^3+a^3}\}$

Solución

Descomponiendo en fracciones parciales.

$$\frac{1}{s^3+a^3}=\frac{1}{(s+1)(s^2-as+a^2)}=\frac{A}{s+a}+\frac{Bs+C}{s^2-as+a^2}=\frac{A(s^2-as+a^2)+(Bs+c)(s+a)}{(s+a)(s^2-as+a^2)}$$

$$1=A(s^2-as+a^2)+B(s^2+as)+C(s+a)$$

$$1=(A+B)s^2+(-aA+aB+C)s+a^2A+aC$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -aA+aB+C=0 \\ a^2A+aC=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\dfrac{1}{3a^2} \\ B=-\dfrac{1}{3a^2} \\ C=\dfrac{2}{3a} \end{cases}$$

$$\frac{1}{s^3+a^3}=\frac{1}{3a^2(s+a)}-\frac{1}{3a^2}\left(\frac{s-a}{s^2-as+a^2}\right)$$

$$L^{-1}\{\frac{1}{s^3+a^3}\}=L^{-1}\{\frac{1}{3a^2(s+a)}-\frac{1}{3a^2}(\frac{s-a}{s^2-as+a^2})\}$$

$$=\frac{1}{3a^2}L^{-1}\{\frac{1}{s+a}\}-\frac{1}{3a^2}L^{-1}\{\frac{s-2a}{(s-\frac{a}{2})^2+\frac{3a^2}{4}}\}$$

$$=\frac{1}{3a^2}L^{-1}\{\frac{1}{s+a}\}-\frac{1}{3a^2}[L^{-1}\{\frac{s-\frac{a}{2}}{(s-\frac{a}{2})^2+\frac{3a^2}{4}}\}-\sqrt{3}L^{-1}\{\frac{\sqrt{3}\frac{a}{2}}{(s-\frac{a}{2})^2+\frac{3a^2}{4}}\}$$

$$=\frac{1}{3a^2}e^{-at}-\frac{1}{3a^2}e^{\frac{a}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{3a^2}t+\frac{\sqrt{3}}{3a^2}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}a}{2}t$$

e) $L^{-1}\{\frac{1-2\sqrt{3}s}{4s^2+1}\}$

Solución

$$L^{-1}\{\frac{1-2\sqrt{3}s}{4s^2+1}\}=\frac{1}{4}L^{-1}\{\frac{1}{s^2+\frac{1}{4}}\}-\frac{2\sqrt{3}}{4}L^{-1}\{\frac{s}{s^2+\frac{1}{4}}\}$$

$$=\frac{1}{2}L^{-1}\{\frac{\frac{1}{2}}{s^2+\frac{1}{4}}\}-\frac{\sqrt{3}}{2}L^{-1}\{\frac{s}{s^2+\frac{1}{4}}\}=\frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{t}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{t}{2}$$

(3) Hallar $L^{-1}\{\frac{2s^3+10s^2+8s+40}{s^2(s^2+9)}\}$

Solución

Descomponiendo en fracciones parciales. $\frac{1}{s^2(s^2+9)}=\frac{1}{9}(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+9})$, entonces

$$\frac{2s^3+10s^2+8s+40}{s^2(s^2+9)}=\frac{1}{9}\left[\frac{2s^3+10s^2+8s+40}{s^2}-\frac{2s^3+10s^2+8s+40}{s^2+9}\right]$$

$$=\frac{1}{9}\left[2s+10+\frac{8}{s}+\frac{40}{s^2}-\left(2s+10-\frac{10s+50}{s^2+9}\right)\right]=\frac{1}{9}\left[\frac{8}{s}+\frac{40}{s^2}+\frac{10s}{s^2+9}+\frac{50}{s^2+9}\right]$$

$$L^{-1}\{\frac{2s^3+10s^2+8s+40}{s^2(s^2+9)}\}=\frac{1}{9}L^{-1}\{\frac{8}{s}+\frac{40}{s^2}+\frac{10s}{s^2+9}+\frac{50}{s^2+9}\}=\frac{1}{9}(8+40t+10\cos 3t+\frac{50}{3}\operatorname{sen} 3t)$$

$$\therefore\ L^{-1}\{\frac{2s^3+10s^2+8s+40}{s^2(s^2+9)}\}=\frac{1}{27}(24+120t+30\cos 3t+50\operatorname{sen} 3t)$$

4) Calcular $L^{-1}\{\dfrac{2s^2-9s+19}{(s-1)^2(s+3)}\}$

Solución

Descomponiendo en fracciones parciales se tiene:

$$\frac{2s^2-9s+19}{(s-1)^2(s+3)}=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{(s+1)^2}+\frac{C}{s+3}=\frac{A(s-1)(s+3)+B(s+3)+C(s-1)^2}{(s-1)^2(s+3)}$$

$$2s^2-9s+19=A(s^2+2s-3)+B(s+3)+C(s^2-2s+1)=(A+C)s^2+(2A+B-2C)s$$

$$\begin{cases} A+C=2 \\ -2A+3B+C=19 \\ -3A+3B+C=19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-2 \\ B=3 \\ C=4 \end{cases} \Rightarrow \frac{2s^2-9s+19}{(s-1)^2(s+3)}=-\frac{2}{s-1}+\frac{3}{(s-1)^2}+\frac{4}{s+3}$$

$$L^{-1}\{\frac{2s^2-9s+19}{(s-1)^2(s+3)}\}=L^{-1}\{-\frac{2}{s-1}+\frac{3}{(s-1)^2}+\frac{4}{s+3}\}$$

$$=-2L^{-1}\{\frac{1}{s-1}\}+3L^{-1}\{\frac{1}{(s-1)^2}\}+4L^{-1}\{\frac{1}{s+3}\}=-2e^t+3te^t+4e^{-3t}$$

5) Hallar $L^{-1}\{\dfrac{s^2+2s+3}{(s^2+2s+2)(s^2+2s+5)}\}$

Solución

Descomponiendo en fracciones parciales se tiene:

$$\frac{2s^2+2s+3}{(s^2+2s+2)(s^2+2s+5)}=\frac{As+B}{s^2+2s+2}+\frac{Cs+D}{s^2+2s+5}=\frac{(As+B)(s^2+2s+5)+(Cs+D)(s^2+2s+2)}{(s^2+2s+2)(s^2+2s+5)}$$

$$s^2+2s+3=A(s^3+2s^2+5s)+B(s^2+2s+5)+C(s^3+2s^2+2s)+D(s^2+2s+2)$$

$$=(A+C)s^3+(2A+B+2C+D)s^2+(5A+2B+2C+2D)s+5B+2D$$

$$\begin{cases} A+C=0 \\ 2A+B+2C+D=1 \\ 5A+2B+2C+2D=2 \\ 5B+2D=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=\frac{1}{3} \\ C=0 \\ D=\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\frac{s^2+2s+3}{(s^2+2s+2)(s^2+2s+5)}=\frac{\frac{1}{3}}{s^2+2s+2}+\frac{\frac{2}{3}}{s^2+2s+5}$$

$$L^{-1}\{\frac{s^2+2s+3}{(s^2+2s+2)(s^2+2s+5)}\}=L^{-1}\{\frac{\frac{1}{3}}{s^2+2s+2}+\frac{\frac{2}{3}}{s^2+2s+5}\}$$

$$=\frac{1}{3}L^{-1}\{\frac{1}{(s+1)^2+1}\}+\frac{1}{3}L^{-1}\{\frac{2}{(s+1)^2+4}\}=\frac{1}{3}e^{-t}\operatorname{sen} t+\frac{1}{3}e^{-t}\operatorname{sen} 2t$$

6. Calcular $L^{-1}\{\frac{1}{s^5+4s^4+13s^3+62s^2+149s+130}\}$

Solución

factorizando el denominador se tiene:

$$s^5+4s^4+14s^3+62s^2+149s+130=(s+2)(s^2-2s+13)(s^2+4s+5)$$

$$L^{-1}\{\frac{1}{s^5+4s^4+13s^3+62s^2+149s+130}\}=L^{-1}\{\frac{A}{s+2}+\frac{Bs+C}{s^2-2s+13}+\frac{Ds+E}{s^2+4s+5}\}$$

$$=\frac{1}{4578}L^{-1}\{\frac{218}{s+2}-\frac{8s+81}{(s-1)^2+12}+\frac{226s+515}{(s+2)^2+1}\}$$

$$=\frac{1}{4578}(218e^{-2t}-e^{t}L^{-1}\{\frac{8s+89}{s^2+12}\}+e^{-2t}L^{-1}\{\frac{226s+63}{s^2+1}\})$$

$$=\frac{1}{4518}(218e^{-2t}-8e^{t}\cos\sqrt{2}t-\frac{89}{\sqrt{12}}\operatorname{sen}\sqrt{12}t+226e^{-2t}\cos t+63e^{-2t}\operatorname{sen}t)$$

7 Hallar $L^{-1}\{\frac{2s^2-4}{(s+1)(s-2)(s-3)}\}$

Solución

aplicando la fórmula de HEAVISIDE. $P(s)=2s^2-4$ y $Q(s)=(s+1)(s-2)(s-3)$

para $Q(s)=0$, se tiene $\alpha_1=-1$, $\alpha_2=2$, $\alpha_3=3$

$Q(s)=s^3-4s^2+s+6 \Rightarrow Q'(s)=3s^2-8s-1$

$$L^{-1}\{\frac{2s^2-4}{(s+1)(s-2)(s-3)}\}=\frac{P(-1)}{Q'(-1)}e^{-t}+\frac{P(2)}{Q'(2)}e^{2t}+\frac{P(3)}{Q'(3)}e^{3t}$$

$$=-\frac{2}{12}e^{-t}+\frac{4}{-3}e^{2t}+\frac{14}{4}e^{3t}=-\frac{e^{-t}}{6}-\frac{4}{3}e^{2t}+\frac{7}{2}e^{3t}$$

8 Calcular $L^{-1}\{\frac{19s+37}{(s-2)(s+1)(s+3)}\}$

Solución

aplicando la fórmula de HEAVISIDE. $P(s)=19s+37$ y $Q(s)=(s-2)(s+1)(s+3)$

como $Q(s)=0$, entonces $\alpha_1=-3$, $\alpha_2=-1$, $\alpha_3=2$

$Q(s)=s^3+2s^2-5s-6 \Rightarrow Q'(s)=3s^2+4s-5$

$Q'(-3)=-10$, $Q'(-1)=-6$, $Q'(2)=15$; $P(-3)=-20$, $P(-1)=18$, $P(2)=75$

$$L^{-1}\{\frac{19s+37}{(s-2)(s+1)(s+3)}\}=L^{-1}\{\frac{P(-3)}{Q'(-3)(s+3)}+\frac{P(-1)}{Q'(-1)(s+1)}+\frac{P(2)}{Q'(2)(s-2)}\}=2e^{-3t}-3e^{-t}+5e^{2t}$$

9 Calcular $L^{-1}\{\frac{1}{(s+1)(s^2+1)}\}$

Solución

Aplicando el teorema de convolución se tiene:

$$L^{-1}\{f(s).g(s)\}=\int_0^t F(u)G(t-u)du=F*G\text{, donde } f(s)=L\{F(t)\} \text{ y } g(s)=L\{G(t)\}$$

$$L^{-1}\{\frac{1}{(s+1)(s^2+1)}\}=L^{-1}\{(\frac{1}{s+1})(\frac{1}{s^2+1})\}\text{, donde}$$

$$\begin{cases} f(s)=\dfrac{1}{s+1} \\ g(s)=\dfrac{1}{s^2+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F(t)=L^{-1}\{\dfrac{1}{s+1}\}=e^{-t} \\ G(t)=L^{-1}\{\dfrac{1}{s^2+1}\}=\operatorname{sen} t \end{cases}$$

$$L^{-1}\{\frac{1}{(s+1)(s^2+1)}\}=\int_0^t F(u)G(t-u)du=\int_0^t e^{-u}.\operatorname{sen}(t-u)du$$

$$=\int_0^t e^{-u}(\operatorname{sen} t\cos u-\cos t\operatorname{sen} u)du=\operatorname{sen} t\int_0^t e^{-u}\cos u\,du-\cos t\int_0^t e^{-u}\operatorname{sen} u\,du$$

$$=\operatorname{sen} t(\frac{-e^{-u}\cos u+e^{-u}\operatorname{sen} u}{2})\Big/_0^t-\cos t(\frac{-e^{-u}\operatorname{sen} u-e^{-u}\cos u}{2})\Big/_0^t$$

$$=\frac{e^{-t}\operatorname{sen} t}{2}(\operatorname{sen} t-\cos t)+\frac{\operatorname{sen} t}{2}+\frac{e^{-t}\cos t}{2}(\operatorname{sen} t+\cos t)-\frac{\cos t}{2}=\frac{e^{-t}}{2}+\frac{\operatorname{sen} t-\cos t}{2}$$

$$\therefore\quad L^{-1}\{\frac{1}{(s+1)(s^2+1)}\}=\frac{e^{-t}+\operatorname{sen} t-\cos t}{2}$$

10 Calcular $L^{-1}\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\}$

Solución

Aplicando el teorema de convolución. $L^{-1}\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\}=L^{-1}\{\frac{s}{s^2+1}.\frac{1}{s^2+1}\}$, de donde

$$\begin{cases} g(s)=\dfrac{s}{s^2+1} \\ f(s)=\dfrac{1}{s^2+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} G(t)=L^{-1}\{\dfrac{s}{s^2+1}\}=\cos t \\ F(t)=L^{-1}\{\dfrac{1}{s^2+1}\}=\operatorname{sen} t \end{cases}$$

$$L^{-1}\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\}=\int_0^t F(u)G(t-u)du=\int_0^t \operatorname{sen} u.\cos(t-u)du$$

$$=\int_0^t \operatorname{sen} u.(\cos t\cos u+\operatorname{sen} t\operatorname{sen} u)du=\cos t\int_0^t \operatorname{sen} u\cos u\,du+\operatorname{sen} t\int_0^t \operatorname{sen}^2 u\,du$$

$$=\cos t(\frac{\operatorname{sen}^2 u}{2})\Big/_0^t+\operatorname{sen} t(\frac{u}{2}-\frac{\operatorname{sen} u\cos u}{2})\Big/_0^t$$

$$=\frac{\cos t\operatorname{sen}^2 t}{2}+\frac{t\operatorname{sen} t}{2}-\frac{\operatorname{sen}^2 t\cos t}{2}=\frac{t\operatorname{sen} t}{2}$$

$$\therefore\quad L^{-1}\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\}=\frac{t\operatorname{sen} t}{2}$$

11 Dado a > 0 y $L^{-1}\{f(s)\}=F(t)$, probar que: $L^{-1}\{f(as)\}=\frac{1}{a}F(\frac{t}{a})$

Solución

Sea $k=\frac{1}{a} \Rightarrow L\{F(kt)\}=\frac{1}{k}f(\frac{s}{k})$

$$L\{F(\frac{t}{a})\}=a\,f(as) \Rightarrow F(\frac{t}{a})=a\,L^{-1}\{f(as)\} \qquad \therefore\quad L^{-1}\{f(as)\}=\frac{1}{a}F(\frac{t}{a})$$

12 Hallar $L^{-1}\{\frac{s}{(s^2+a^2)^3}\}$

Solución

Aplicando la propiedad siguiente: Si $L^{-1}\{f(s)\}=F(t) \Rightarrow L^{-1}\{f(s)\}=-\frac{1}{t}L^{-1}\{f'(s)\}$

$$L^{-1}\{\frac{1}{(s^2+a^2)^2}\}=-\frac{1}{t}L^{-1}\{\frac{-4s}{(s^2+a^2)^3}\},\ \text{de donde}$$

$$L^{-1}\{\frac{1}{(s^2+a^2)^3}\} = \frac{t}{4}L^{-1}\{\frac{1}{(s^2+a^2)^2}\} \quad \ldots (1)$$

aplicando el teorema de convolución

$$L^{-1}\{\frac{1}{(s^2+a^2)^2}\} = L^{-1}\{\frac{1}{s^2+a^2}\cdot\frac{1}{s^2+a^2}\}\text{, de donde } L^{-1}\{\frac{1}{s^2+a^2}\} = \frac{\operatorname{sen} at}{a} = F(t)$$

$$L^{-1}\{\frac{1}{s^2+a^2}\} = \frac{\operatorname{sen} at}{a} = G(t)$$

$$L^{-1}\{\frac{1}{(s^2+a^2)^2}\} = \int_0^t F(u)G(t-u)du = \int_0^t \frac{\operatorname{sen} au}{a}\cdot\frac{\operatorname{sen} a(t-u)}{a}du$$

$$= \frac{1}{a^2}\int_0^t \operatorname{sen} au(\operatorname{sen} at\cos au - \cos at\operatorname{sen} au)du$$

$$= \frac{1}{a^2}[\operatorname{sen} at\int_0^t \operatorname{sen} au\cos au\,du - \cos at\int_0^t \operatorname{sen}^2 au\,du]$$

$$= \frac{1}{a^2}[\operatorname{sen} at.\frac{\operatorname{sen}^2 au}{2a} - \cos at.(\frac{u}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2au}{4a})]\Big/_0^t$$

$$= \frac{1}{a^2}[\frac{\operatorname{sen}^3 at}{2a} - \frac{t\cos at}{2} + \frac{\cos^2 at.\operatorname{sen} at}{2a}] = \frac{1}{a^2}[\frac{\operatorname{sen} at}{2a} - \frac{t\cos at}{2}]$$

$$= \frac{1}{2a^3}(\operatorname{sen} at - at\cos at) \quad \ldots (3)$$

reemplazando (2) en (1) se tiene: $L^{-1}\{\frac{s}{(s^2+a^2)^3}\} = \frac{t}{8a^3}(\operatorname{sen} at - at\cos at)$

13 Hallar $L^{-1}\{\ln(\frac{s^2+1}{s(s+3)})\}$

Solución

$L^{-1}\{\ln(\frac{s^2+1}{s(s+3)})\} = L^{-1}\{\ln(s^2+1) - \ln s - \ln(s+3)\}$; aplicando la propiedad siguiente.

$$L^{-1}\{f(s)\} = -\frac{1}{t}L^{-1}\{f'(s)\} \quad \text{de donde}$$

$$L^{-1}\{\ln(\frac{s^2+1}{s(s+3)})\} = -\frac{1}{t}L^{-1}\{\frac{2s}{s^2+1}-\frac{1}{s}-\frac{1}{s+3}\} = -\frac{1}{t}(2\cos t - 1 - e^{-3t}) = \frac{1+e^{-3}-2\cos t}{t}$$

(14) Calcular $L^{-1}\{\ln(1+\frac{k^2}{s^2})\}$

Solución

$$L^{-1}\{\ln(1+\frac{k^2}{s^2})\} = L^{-1}\{\ln(s^2+k^2)-\ln s^2\} = -\frac{1}{t}L^{-1}\{\frac{2s}{s^2+k^2}-\frac{2}{s}\} = -\frac{1}{t}[2\cos kt - 2] = \frac{2-2\cos kt}{t}$$

$$\therefore\ L^{-1}\{\ln(1+\frac{k^2}{s^2})\} = \frac{2-2\cos kt}{t}$$

(15) Calcular $L^{-1}\{\ln(1+\frac{1}{s^3})\}$

Solución

$$L^{-1}\{\ln(1+\frac{1}{s^3})\} = L^{-1}\{\ln(s^3+1)\} - 3L^{-1}\{\ln s\} = -\frac{1}{t}L^{-1}\{\frac{3s^2}{s^3+1}\} - 3L^{-1}\{\frac{1}{s}\}$$

$$= -\frac{1}{t}L^{-1}\{\frac{1}{s+1}+\frac{2s-1}{s^2-s+1}-\frac{3}{s}\} = -\frac{1}{t}(e^{-t}+2e^{t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t-3)$$

$$\therefore\ L^{-1}\{\ln(1+\frac{1}{s^3})\} = \frac{3-2e^{t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t-e^{-t}}{t}$$

(16) Calcular $L^{-1}\{\frac{1}{s}\ln(\frac{s^2+a^2}{s^2+b^2})\}$

Solución

$$L^{-1}\{\ln(\frac{s^2+a^2}{s^2+b^2})\} = L^{-1}\{\ln(s^2+a^2)-\ln(s^2+b^2)\} = -\frac{1}{t}L^{-1}\{\frac{2s}{s^2+a^2}-\frac{2s}{s^2+b^2}\}$$

$$= -\frac{1}{t}(2\cos at - 2\cos bt) = \frac{2\cos bt - 2\cos at}{t}$$

$$L^{-1}\{\frac{1}{s}\ln(\frac{s^2+a^2}{s^2+b^2})\}=\int_0^t \frac{2(\cos bu-\cos au)}{u}du$$

(17) Calcular $L^{-1}\{\ln\frac{(s+a)(s^2+c^2)}{(s+b)(s-c)^2}\}$

Solución

$$L^{-1}\{\ln\frac{(s+a)(s^2+c^2)}{(s+b)(s-c)^2})\}=L^{-1}\{\ln(s+a)+\ln(s^2+c^2)-\ln(s+b)-2\ln(s-c)\}$$

$$=-\frac{1}{t}L^{-1}\{\frac{1}{s+a}+\frac{2s}{s^2+c^2}-\frac{1}{s+b}-\frac{2}{s-c}\}$$

$$=-\frac{1}{t}(e^{-at}+2\cos ct-e^{-bt}-2e^{ct})=\frac{e^{-bt}+2e^{ct}-e^{-at}-2\cos ct}{t}$$

(18) Evaluar $L^{-1}\{\frac{e^{-4s}}{(s+2)^2}\}$

Solución

Utilizando la propiedad siguiente:

Si $L^{-1}\{f(s)\}=F(t)\ \Rightarrow\ L^{-1}\{e^{-as}f(s)\}=G(t)$ donde $G(t)=\begin{cases}F(t-a) & \text{para } t>a\\ 0 & \text{para } t<a\end{cases}$

$$L^{-1}\{\frac{1}{(s+2)^2}\}=e^{-2t}L^{-1}\{\frac{1}{s^2}\}=t\,e^{-2t}=F(t)\ \Rightarrow\ L^{-1}\{\frac{e^{-4s}}{(s+2)^2}\}=\begin{cases}F(t-4)\ , & t>4\\ 0\ , & t<4\end{cases}$$

$$L^{-1}\{\frac{e^{-4s}}{(s+2)^2}\}=F(t-4).\mu(t-4)\ =(t-4)e^{-2(t-4)}\mu(t-4)$$

$$\therefore\ L^{-1}\{\frac{e^{-4s}}{(s+2)^2}\}=(t-4)e^{-2(t-4)}\mu(t-4)$$

(19) Calcular $L^{-1}\{\frac{1}{s^3(1-e^{-2s})}\}$

Solución

Como $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^n + ...$, para $|x| < 1$

$$\frac{1}{1-e^{-2s}} = 1 + e^{-2s} + e^{-4s} + ... + e^{-2ns} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2ns}\text{, entonces}$$

$$\frac{1}{s^3(1-e^{-2s})} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-2ns}}{s^3}\text{, aplicando la inversa}$$

$$L^{-1}\{\frac{1}{s^3(1-e^{-2s})}\} = L^{-1}\{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-2ns}}{s^3}\} = \sum_{n=0}^{\infty} L^{-1}\{\frac{e^{-2ns}}{s^3}\} = \sum_{n=0}^{\infty} F(t-2n).\mu(t-2n)\text{, donde}$$

$$F(t) = L^{-1}\{\frac{1}{s^3}\} = \frac{t^2}{2} \Rightarrow F(t-2n) = \frac{(t-2n)^2}{2}$$

$$L^{-1}\{\frac{1}{s^3(1-e^{-2s})}\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t-2n)^2}{2} \mu(t-2n)$$

20 Hallar $L^{-1}\{\frac{1}{(s^2+a^2)^{3/2}}\}$

Solución

como $L^{-1}\{J_0(at)\} = \frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$, derivando $L\{\frac{d}{da} J_0(at)\} = -\frac{a}{(s^2+a^2)^{3/2}}$

$$L\{t\, J_0'(at)\} = -\frac{a}{(s^2+a^2)^{3/2}}\text{, tomando la inversa}$$

$$t\, J_0'(at) = -a\, L^{-1}\{\frac{1}{(s^2+a^2)^{3/2}}\} \quad \text{de donde} \quad L\{\frac{1}{(s^2+a^2)^{3/2}}\} = -\frac{t\, J_0'(at)}{a} = \frac{t\, J_1(at)}{a}$$

$$\therefore \quad L\{\frac{1}{(s^2+a^2)^{3/2}}\} = \frac{t\, J_1(at)}{a}$$

21 Calcular $F(t) = L^{-1}\{\frac{1}{s^3 \cosh(2s)}\}$ y F(12)

Solución

$$\cosh 2s = \frac{e^{2s}+e^{-2s}}{2} \Rightarrow \frac{1}{\cosh 2s} = \frac{2}{e^{2s}+e^{-2s}} = \frac{2e^{-2s}}{1+e^{-4s}}$$

$$\frac{1}{s^3\cosh 2s} = \frac{2e^{-2s}}{s^3(1+e^{-4s})} = \frac{2e^{-2s}}{s^3}(1-e^{-4s}+e^{-8s}-e^{-12s}+\ldots) = \frac{2e^{-2s}}{s^3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-4ns}$$

$$= \frac{2}{s^3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-(4n+2)s} = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{e^{-(4n+2)s}}{s^3}$$

$$F(t) = L^{-1}\{\frac{1}{s^3\cosh 2s}\} = 2L^{-1}\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n e^{-(4n+2)s}}{s^3}\} = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n L^{-1}\{\frac{e^{-(4n+2)s}}{s^3}\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (t-4n-2)^2 \mu(t-4n-2) \quad \text{de donde}$$

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 4n+2 \\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (t-4n-2)^2 & \text{si } t > 4n+12 \end{cases}$$

ahora $F(12) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (12-4n-2)^2 = 10^2-6^2+2^2 = 68$

puesto que $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (12-4n-2)^2$, $12 > 4n+2$

(22) Calcular $L^{-1}\{\frac{\exp(\frac{a}{s})}{s^{n+1}}\}$

Solución

$$\exp(ax) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{a^m x^m}{m!} = e^{ax} \Rightarrow e^{\frac{a}{s}} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{a^m}{m!s^m} \Rightarrow \frac{\exp(\frac{a}{s})}{s^{n+1}} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{a^m}{m!s^{m+n+1}}, \text{ se tiene:}$$

$$L^{-1}\{\frac{\exp(\frac{a}{s})}{s^{n+1}}\}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a^m}{m!}L^{-1}\{\frac{1}{s^{m+n+1}}\}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a^m t^{m+n}}{m!(m+n)!}=(\frac{t}{a})^{n/2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\sqrt{at})^{2m+n}}{m!(m+n)!}=(\frac{t}{a})^{n/2}I_n(2\sqrt{at})$$

donde $I_n(t)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!(m+n)!}(\frac{t}{2})^{2m+n}$ función de Bessel modificada.

(23) Calcular $L^{-1}\{\frac{2e^{3-\frac{3s}{2}}\operatorname{senh}(3+\frac{s}{2})}{(s+6)^{9/2}}\}$

Solución

$$2e^{3-\frac{3s}{2}}\operatorname{senh}(3+\frac{s}{2})=2e^{3-\frac{3s}{2}}(\frac{e^{3+\frac{s}{2}}-e^{-3-\frac{s}{2}}}{2})=e^{6-s}-e^{-2s}$$

$$L^{-1}\{\frac{2e^{3-\frac{3s}{2}}\operatorname{senh}(3+s/2)}{(s+6)^{9/2}}\}=L^{-1}\{\frac{e^{6-s}-e^{-2s}}{(s+6)^{9/2}}\}=e^6L^{-1}\{\frac{e^{-s}}{(s+6)^{9/2}}\}-L^{-1}\{\frac{e^{-2s}}{(s+6)^{9/2}}\}\ \ldots\ \mathbf{(1)}$$

$$L^{-1}\{\frac{e^{-2s}}{(s+6)^{9/2}}\}=e^{-6t}L^{-1}\{\frac{1}{s^{9/2}}\}=e^{-6t}.\frac{t^{7/2}}{\Gamma(9/2)}=\frac{16e^{-6t}.t^{7/2}}{105\sqrt{\pi}}\qquad\ldots\ \mathbf{(2)}$$

$$L^{-1}\{\frac{2e^{3-\frac{3s}{2}}\operatorname{senh}(3+s/2)}{(s+6)^{9/2}}\}=e^{-6}\frac{16e^{-6(t-1)}(t-1)^{7/2}}{105\sqrt{\pi}}\mu(t-1)-\frac{16e^{-6(t-2)}(t-2)^{7/2}}{105\sqrt{\pi}}\mu(t-2)$$

$$L^{-1}\{\frac{2e^{3-\frac{3s}{2}}\operatorname{senh}(3+s/2)}{(s+6)^{9/2}}\}=[e^{12--6t}(t-1)^{7/2}\mu(t-1)-e^{12-6t}(t-2)^{7/2}\mu(t-2)]\frac{16}{105\sqrt{\pi}}$$

(24) Calcular $L^{-1}\{\frac{e^{-\frac{1}{s}}}{\sqrt{s}}\}$

Solución

$$e^{-x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}\Rightarrow e^{-\frac{1}{s}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!s^n}\Rightarrow\frac{e^{-\frac{1}{s}}}{\sqrt{s}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!s^{n+\frac{1}{2}}}$$ entonces se tiene:

$$L^{-1}\{\frac{e^{-\frac{1}{s}}}{\sqrt{s}}\}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}L^{-1}\{\frac{1}{s^{n+\frac{1}{2}}}\}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{n-\frac{1}{2}}}{n!\Gamma(n+\frac{1}{2})}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{n-\frac{1}{2}}}{n!\frac{\sqrt{\pi}(2n)!}{2^{2n}.n!}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} t^{n-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2\sqrt{t})^{2n}}{\sqrt{\pi t}(2n)!} = \frac{\cos(2\sqrt{t})}{\sqrt{\pi t}}$$

$$\therefore \quad L^{-1}\{\frac{e^{-\frac{1}{s}}}{\sqrt{s}}\} = \frac{\cos(2\sqrt{t})}{\sqrt{\pi t}}$$

(25) Calcular $L^{-1}\{\frac{1}{s} J_0(\frac{2}{\sqrt{s}})\}$

Solución

Por definición de la función $J_0(t)$ se tiene: $J_0(t) = 1 - \frac{t^2}{2^2} + \frac{t^4}{2^2.4^2} - \frac{t^6}{2^2.4^2.6^2} + ...$

$$J_0(\frac{2}{\sqrt{s}}) = 1 - \frac{2^2}{2^2.s} + \frac{2^4}{2^2.4^2.s^2} - \frac{2^6}{2^2.4^2.6^2.s^3} + ...$$

$$\frac{1}{s} J_0(\frac{2}{\sqrt{s}}) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{2^2.s^5} - \frac{1}{6^2 s^4} + \frac{1}{24^2 s^5} + ... = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{(2!)^2 s^3} - \frac{1}{(3!)^2 s^4} + \frac{1}{(4!)^2 s^5} - ...$$

$$L^{-1}\{\frac{1}{s} J_0(\frac{2}{\sqrt{s}})\} = 1 - t + \frac{t^2}{(2!)^3} - \frac{t^3}{(3!)^3} + \frac{t^4}{(4!)^4} + ... + \frac{(-1)^n t^n}{(n!)^3} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{(n!)^3}$$

(26) Calcular $L^{-1}\{\frac{8s+5}{(s+1)(s^2+4s+5)(1-e^{-9s})}\}$

Solución

$$\frac{8s+5}{(s+1)(s^2+4s+5)} = \frac{A}{s+1} + \frac{Bx+C}{s^2+4s+5} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{s+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3s+25}{s^2+4s+5}$$

$$= -\frac{3}{2}(\frac{1}{s+1}) - \frac{1}{2}(\frac{3(s+2)+19}{(s+2)^2+1})$$

$$L^{-1}\{-\frac{3}{2}(\frac{1}{s+1}) - \frac{1}{2}(\frac{3(s+2)+19}{(s+2)^2+1})\} = -\frac{3}{2} e^{-t} - \frac{3}{2} e^{-t} \cos t - \frac{19}{2} e^{-2t} \operatorname{sen} t$$

$$= -\frac{1}{2}(3e^{-t} + 3e^{-2t}\cos t + e^{-2t}\operatorname{sen} t)$$

$$\frac{1}{1-e^{-3s}} = 1 + e^{-3s} + e^{-6s} + \dots + e^{-3ns} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-3ns}$$

$$L^{-1}\{\frac{8s+5}{(s+1)(s^2+4s+5)(1-e^{-9s})}\} = L^{-1}\{(-\frac{3}{2(s+1)} - \frac{1}{2}(\frac{3s+25}{s^2+4s+5}))\sum_{n=0}^{\infty} e^{-3ns}\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{3}{2}L^{-1}\{\frac{e^{-3ns}}{s+1}\} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} L^{-1}\{\frac{(3s+25)e^{-3ns}}{s^2+4s+5}\}$$

$$= -\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-t}L^{-1}\{\frac{e^{-3ns+3n}}{s}\} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2t}L^{-1}\{\frac{(3s+19)e^{-3ns+6n}}{s^2+1}\}$$

$$= -\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-t+3n}L^{-1}\{\frac{e^{-3ns}}{s}\} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2(t-3n)}L^{-1}\{\frac{3s+19}{s^2+1}e^{-3ns}\}$$

$$= -\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-(t-3n)}\mu(t-3n) - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2(t-3n)}[3\cos t + 19\operatorname{sen} t]\mu(t-3n)$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}[3e^{-(t-3n)}.e^{-2(t-3n)}(3\cos t + 19\operatorname{sen} t)]\mu(t-3n)$$

(27) Hallar $L^{-1}\{\frac{e^{-6s}}{s}\operatorname{arctg}(s^2+4s+4)\}$

Solución

Sea $f(s) = \operatorname{arctg}(s^2+4s+4) \Rightarrow f'(s) = \dfrac{2s+4}{(s+2)^4+1}$

$$L^{-1}\{f(s)\} = -\frac{1}{t}L^{-1}\{f'(s)\} = -\frac{1}{t}L^{-1}\{\frac{2s+4}{(s+2)^4+1}\}$$

$$= -\frac{1}{t}e^{-2t}L^{-1}\{\frac{2s}{s^4+1}\} = -\frac{e^{-2t}}{t}L^{-1}\{\frac{2s}{(s^2+\sqrt{2}s+1)(s^2-\sqrt{2}s+1)}\}$$

$$= -\frac{e^{-2t}}{t} L^{-1}\{\frac{As+B}{s^2+\sqrt{2}s+1} + \frac{Cs+D}{s^2+\sqrt{2}s+1}\}$$

$$= -\frac{e^{-2t}}{t} L^{-1}\{\frac{1}{\sqrt{2}}[\frac{1}{(s-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+(\frac{1}{\sqrt{2}})^2} - \frac{1}{(s+\frac{\sqrt{2}}{2})^2+(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}]\}$$

$$= -\frac{e^{-2t}}{2t}[e^{\frac{\sqrt{2}}{2}t} \operatorname{sen}(\frac{1}{\sqrt{2}}t) - e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}t} \operatorname{sen}(\frac{1}{\sqrt{2}}t)]$$

$$= -\frac{e^{-2t}}{2t}\operatorname{sen}(\frac{t}{\sqrt{2}})[\frac{e^{\frac{\sqrt{2}}{2}t} - e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}t}}{2}] = -\frac{e^{-2t}}{t}\operatorname{sen}(\frac{t}{\sqrt{2}})\operatorname{senh}\frac{\sqrt{2}}{2}t$$

$$L^{-1}\{\operatorname{arctg}(s^2+4s+4)\} = -\frac{e^{-2t}\operatorname{sen}(\frac{t}{\sqrt{2}})\operatorname{senh}\frac{\sqrt{2}}{2}t}{t}$$

$$L^{-1}\{\frac{e^{-6s}}{s}\operatorname{arctg}(s^2+4s+4)\} = \int_0 \frac{-e^{-2(u-6)}\operatorname{sen}(\frac{u-6}{\sqrt{2}})\operatorname{senh}\frac{\sqrt{2}}{2}(u-6)}{u-6}\mu(u-6)du$$

(28) Calcular $L^{-1}\{\frac{4-e^{bs}}{s^4(4+2e^{-bs})}\}$ y halle el dominio de existencia de F(t).

Solución

$$\frac{4-e^{-bs}}{s^4(4+2e^{-bs})} = \frac{4-e^{-bs}}{4s^4(1+\frac{e^{-bs}}{2})} = \frac{4-e^{-bs}}{4s^4}(1-\frac{e^{-bs}}{2}+\frac{e^{-2bs}}{4}-\frac{e^{-3bs}}{8}+...)$$

$$= \frac{4-e^{-bs}}{4s^4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{e^{-nbs}}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{4-e^{-bs}}{4s^4}(-1)^n\frac{e^{-nbs}}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}(\frac{e^{-nbs}}{s^4}-\frac{e^{-(n+1)s}}{4s^4})$$

$$L^{-1}\{\frac{4-e^{-bs}}{s^4(4+2e^{-bs})}\} = L^{-1}\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}(\frac{e^{-nbs}}{s^4}-\frac{e^{-(n+1)s}}{4s^4})\} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}L^{-1}\{\frac{4e^{-nbs}}{s^4}-\frac{e^{-(n+1)s}}{4s^4}\}$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}\left[\frac{4(t-nb)^3}{6}\mu(t-nb)-\frac{(t-(n+1)b)^3}{6}\mu(t-(n+1)b)\right]$$

$$= \frac{1}{24}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}[4(t-nb)^3\mu(t-nb)-(t-(n+1)b)^3\mu(t-(n+1)b)]$$

y F(t) en $nb < t < (n+1)b$

(29) Demostrar que: $J_0(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} e^{itw}(1-w^2)^{-\frac{1}{2}}dw$

Solución

$L\{J_0(t)\} = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{s+i}}\cdot\frac{1}{\sqrt{s-i}}$; aplicando el teorema de convolución se tiene:

$L^{-1}\{\frac{1}{\sqrt{s+i}}\} = \frac{t^{-\frac{1}{2}}e^{-it}}{\sqrt{\pi}}$; $L^{-1}\{\frac{1}{\sqrt{s-i}}\} = \frac{t^{-\frac{1}{2}}e^{it}}{\sqrt{\pi}}$

$$J_0(t) = L^{-1}\{\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}\} = L^{-1}\{\frac{1}{\sqrt{s+i}}\cdot\frac{1}{\sqrt{s-i}}\} = \int_0^t \frac{u^{-\frac{1}{2}}e^{-iu}}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{(t-u)^{-\frac{1}{2}}e^{i(t-u)}}{\sqrt{\pi}}du$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^t e^{i(t-2u)}u^{-\frac{1}{2}}(t-u)^{-\frac{1}{2}}du$$

Sea $u = tv \Rightarrow du = t\,dv$, cuando $u \to 0$; $v \to 0$, $u \to t$; $v \to 1$

$$J_0(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^t e^{i(t-2u)}u^{-\frac{1}{2}}(t-u)^{-\frac{1}{2}}du = \frac{1}{\pi}\int_0^1 e^{i(t-2tv)}v^{-\frac{1}{2}}(1-v)^{-\frac{1}{2}}dv$$

$J_0(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 e^{it(1-2v)}v^{-\frac{1}{2}}(1-v)^{-\frac{1}{2}}dv$, ahora hacemos $w = 1-2v \Rightarrow dv = -\frac{dw}{2}$

cuando $v \to 0$, $w \to 1$ y cuando $v \to 1$, $w \to -1$

$$J_0(t) = \frac{1}{\pi}\int_1^{-1} e^{itw}\left(\frac{1-w}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1+w}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(-\frac{dw}{2}\right) \Rightarrow J_0(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} e^{itw}(1-w^2)^{-\frac{1}{2}}dw$$

(30) Demostrar que: $J_0(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(t\cos\theta)d\theta$

Solución

Sea w = cos θ ⇒ cuando $\begin{cases}\theta=0, & w=1\\ \theta=\pi, & w=-1\end{cases}$. Utilizando el ejercicio 28) se tiene:

$$J_0(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}e^{itw}(1-w^2)^{-\frac{1}{2}}dw=\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0}e^{it\cos\theta}(1-\cos^2\theta)^{-\frac{1}{2}}(-\operatorname{sen}\theta)d\theta$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}e^{-it\cos\theta}d\theta=\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0}[\cos(t\cos\theta)+i\operatorname{sen}(t\cos\theta)]d\theta=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}e^{it\cos\theta}d\theta+\frac{i}{\pi}\int_0^{\pi}\operatorname{sen}(t\cos\theta)d\theta$$

igualando la parte real y la parte imaginaria se tiene: $J_0(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(t\cos\theta)d\theta$

(31) Probar que $L^{-1}\{t^{-\frac{1}{2}}f_{er}(\sqrt{t})\}=\frac{2}{\sqrt{\pi s}}\operatorname{arctg}(\frac{1}{\sqrt{s}})$

Solución

Se conoce que: $e^{-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!}$, sea $x=u^2$

$$e^{-u^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n u^{2n}}{n!}\text{, integrando de 0 a t.}$$

$$\int_0^t e^{-u^2}du=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^t u^{2n}du=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n u^{2n+1}}{n!(2n+1)}\Big/_0^t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n+1}}{n!(2n+1)}$$

$$f_{er}(t)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-u^2}du=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n+1}}{n!(2n+1)}$$

$$f_{er}(\sqrt{t})=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{n+\frac{1}{2}}}{n!(2n+1)}\text{, multiplicando por } t^{-\frac{1}{2}}$$

$$t^{-\frac{1}{2}} f_{er}(\sqrt{t}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{(2n+1)n!}$$, tomando la transformada

$$L^{-1}\{t^{-\frac{1}{2}} f_{er}(\sqrt{t})\} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} L\{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{(2n+1)n!}\} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!} L\{t^n\} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)s^{n+1}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi s}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)s^{n+\frac{1}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{\pi s}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} (\frac{1}{\sqrt{s}})^{2n+1} = \frac{2}{\sqrt{\pi s}} \operatorname{arctg}(\frac{1}{\sqrt{s}})$$

$$\therefore \quad L\{t^{-1/2} f_{er}(\sqrt{t})\} = \frac{2}{\sqrt{\pi s}} \operatorname{arctg}(\frac{1}{\sqrt{s}})$$

(32) Calcular $\int_0^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} xt}{x^2+1} dx$

Solución

Sea $F(t) = \int_0^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} xt}{x^2+1} dx$, tomando Transformada de Laplace

$$L\{F(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} (\int_0^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} tx}{x^2+1} dx) dt = \int_0^{\infty} \frac{x}{x^2+1} (\int_0^{\infty} e^{-st} \operatorname{sen} xt\, dt) dx$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{x}{x^2+1} L\{\operatorname{sen} xt\} dx = \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+1)(x^2+x^2)} = \frac{1}{s^2-1} \int_0^{\infty} (\frac{s^2}{x^2+s^2} - \frac{1}{x^2+1}) dx$$

$$= \frac{1}{s^2-1} [s.\operatorname{arctg} \frac{x}{s} - \operatorname{arctg} x] \Big/_0^{\infty} = \frac{1}{s^2-1} [\frac{s\pi}{2} - \frac{\pi}{2}] = \frac{\pi}{2} (\frac{1}{s+1})$$

Luego $L\{F(t)\} = L\{\int_0^{\infty} \frac{s \operatorname{sen} xt}{x^2+1} dx\} = \frac{\pi}{2} (\frac{1}{s+1})$ tomando la transformada inversa

$$F(t) = L^{-1}\{\frac{\pi}{2} (\frac{1}{s+1})\} = \frac{\pi}{2} e^{-t} \quad \therefore \quad \int_0^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} xt}{x^2+1} dx = \frac{\pi e^{-t}}{2}$$

(33) Calcular $\int_0^{\infty} \cos x^2 dx$

Solución

Sea $F(t)=\int_0^\infty \cos tx^2 dx$, tomando transformada

$$L\{F(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}(\int_0^\infty \cos tx^2 dx)dt=\int_0^\infty(\int_0^\infty e^{-st}\cos tx^2 dt)dx=\int_0^\infty L\{\cos tx^2\}dx=\int_0^\infty \frac{s}{s^2+x^4}dx$$

sea $x^2 = s\operatorname{tg}\theta \Rightarrow 2x\,dx = s.\sec^2\theta\,d\theta$

cuando x → 0 ; θ → 0, cuando x → ∞ , $\theta=\frac{\pi}{2}$

$$L\{F(t)\}=\int_0^\infty \frac{s\,dx}{s^2+x^4}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{s^2.\sec^2\theta\,d\theta}{(s^2+s^2\operatorname{tg}^2\theta)2\sqrt{s\operatorname{tg}\theta}}=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{s\operatorname{tg}\theta}}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{s}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{1/2}\theta.\operatorname{sen}^{-1/2}\theta\,d\theta=\frac{1}{2\sqrt{s}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2(\frac{3}{4})-1}\theta\operatorname{sen}^{2(\frac{1}{4})-1}\theta.d\theta$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{s}}.\frac{\Gamma(\frac{3}{4})\Gamma(\frac{1}{4})}{2\Gamma(\frac{3}{4}+\frac{1}{4})}=\frac{1}{2\sqrt{s}}.\frac{\Gamma(1-\frac{1}{4})\Gamma(\frac{1}{4})}{2}=\frac{1}{2\sqrt{s}}.\frac{\pi}{2.\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2\sqrt{s}}.\frac{\pi}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}\sqrt{s}}$$

$$F(t)=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}L^{-1}\{s^{-1/2}\}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}t^{-1/2}=\frac{\pi}{2\sqrt{2t}}\qquad \therefore F(1)=\int_0^\infty \cos x^2 dx=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

34 Calcular $\int_0^\infty \frac{\cos nx}{x^2+1}dx$

Solución

Sea $F(t)=\int_0^\infty \frac{\cos nxt}{x^2+1}dx$, tomando transformada

$$L\{F(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}(\int_0^\infty \frac{\cos nxt}{x^2+1}dx)dt=\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}(\int_0^\infty e^{-st}\cos nxt\,dt)dx$$

$$=\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}L\{\cos nxt\}dx=\int_0^\infty(\frac{1}{x^2+1}.\frac{s}{s^2+n^2x^2})dx$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{s\,dx}{(x^2+1)(s^2+n^2x^2)} = \int_0^{\infty} \left(\frac{s}{x^2+1} - \frac{sn^2}{s^2+n^2x^2}\right)\frac{dx}{s^2-n^2}$$

$$= \frac{s}{s^2-n^2}[\operatorname{arctg} x - \frac{n}{s}\operatorname{arctg}\frac{nx}{2}] \Big/_0^{\infty} = \frac{s}{s^2-n^2}[\frac{\pi}{2} - \frac{n\pi}{2s}] = \frac{\pi s}{2(s^2-n^2)}(1-\frac{n}{s})$$

$$L\{F(t)\} = \frac{\pi(s-n)}{2(s+n)(s-n)} = \frac{\pi}{2(s+n)}$$

$$F(t) = L^{-1}\{\frac{\pi}{2(s+n)}\} = \frac{\pi}{2}e^{-nt} \qquad \therefore\ F(1) = \int_0^{\infty} \frac{\cos nx}{x^2+1}dx = \frac{\pi e^{-n}}{2}$$

(35) Calcular $L^{-1}\{\frac{1}{s-\sqrt{s}}\}$

Solución

$$L^{-1}\{\frac{1}{s-\sqrt{s}}\} = L^{-1}\{\frac{s+\sqrt{s}}{s^2-s}\} = L^{-1}\{\frac{1}{s-1} + \frac{1}{\sqrt{s}(s-1)}\} = e^t + e^t L^{-1}\{\frac{1}{s\sqrt{s+1}}\}$$

$$= e^t + e^t[L^{-1}\{\frac{1}{s}.\frac{1}{\sqrt{s+1}}\}] = e^t + e^t[L^{-1}\{\frac{1}{s}\} * L^{-1}\{\frac{1}{\sqrt{s+1}}\}] = e^t + e^t[1 * \frac{e^t}{\sqrt{\pi t}}]$$

$$= e^t + e^t \int_0^t \frac{e^u}{\sqrt{\pi u}}du \ , \quad v = \sqrt{u} \ \Rightarrow\ u = v^2 \ \Rightarrow\ du = 2v dv$$

$$u = 0,\ v = 0,\ u \to t \ \Rightarrow\ v = \sqrt{t}$$

$$= e^t + e^t[\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{t}} e^{-v^2} dv] = e^t + e^t f_{er}(\sqrt{t}) = e^t(1 + f_{er}(t))$$

12.17. EJERCICIOS PROPUESTOS.-

(1) Hallar la Transformada Inversa de:

a) $L^{-1}\{\frac{2s-\pi}{s(s-\pi)}\}$

b) $L^{-1}\{\frac{s-a}{s(s+a)}\}$

c) $L^{-1}\{\frac{1}{s^2-5} + \frac{1}{s^{5/2}}\}$

d) $L^{-1}\{\frac{2s+3}{s^2+9}\}$

e) $L^{-1}\{\frac{1}{(s+2)^4}\}$ f) $L^{-1}\{\frac{2s^2+5s-4}{s^3+s^2-2s}\}$

g) $L^{-1}\{\frac{6s}{s^2+2s-6}\}$ h) $L^{-1}\{\frac{2s-6}{s^2-1}\}$

i) $L^{-1}\{\frac{5s-2}{3s^2+4s+2}\}$ j) $L^{-1}\{\frac{s+12}{s^2+4s}\}$

Rpta. **a)** $F(t)=2e^{\pi t}-2e^{\frac{\pi}{2}t}\operatorname{senh}\frac{\pi}{2}t$ **b)** $F(t)=e^{-at}-2e^{-\frac{a}{2}t}\operatorname{senh}\frac{at}{2}$

c) $F(t)=\frac{\operatorname{senh}(\sqrt{5}t)}{\sqrt{5}}+\frac{4t^{3/2}}{3\sqrt{\pi}}$ **d)** $F(t)=2\cos 3t+\operatorname{sen} 3t$

e) $F(t)=e^{-2t}\frac{t^3}{6}$ **f)** $F(t)=2+e^t-e^{-2t}$

g) $F(t)=6e^{-t}\cosh\sqrt{7}t-\frac{6}{\sqrt{7}}e^{-t}\operatorname{senh}\sqrt{7}t$

h) $F(t)=2\cosh t-6\operatorname{senh} t$

i) $F(t)=\frac{5}{3}e^{-\frac{2}{3}t}\cosh\frac{\sqrt{2}}{3}t-\frac{16}{3\sqrt{2}}e^{-\frac{2}{3}t}\operatorname{senh}\frac{\sqrt{2}}{3}t$

j) $F(t)=e^{-2t}\cosh 2t+10e^{-2t}\operatorname{senh} 2t$

(2) Mediante fracciones parciales, hallar la transformada inversa de Laplace.

a) $L^{-1}\{\frac{s+3}{(s+1)(s-3)}\}$ **Rpta.** $F(t)=\frac{1}{2}(3e^t-e^{-t})$

b) $L^{-1}\{\frac{1}{s^2(s+1)}\}$ **Rpta.** $F(t)=t-1+e^{-t}$

c) $L^{-1}\{\frac{s+1}{9s^2+6s+5}\}$ **Rpta.** $F(t)=\frac{1}{9}e^{-t/3}(\frac{\cos 2t}{3}+\frac{\operatorname{sen} 2t}{3})$

d) $L^{-1}\{\dfrac{2s^2+1}{s(s+1)^2}\}$ **Rpta.** $F(t)=1+e^{-t}-3t\,e^{-t}$

e) $L^{-1}\{\dfrac{5s-2}{s(s+2)(s-1)}\}$ **Rpta.** $F(t)=1-2\,e^{-2t}+e^{t}$

f) $L^{-1}\{\dfrac{3s+16}{s^2-s-6}\}$ **Rpta.** $F(t)=5\,e^{3t}-2\,e^{-2t}$

g) $L^{-1}\{\dfrac{2s-1}{s^3-s}\}$ **Rpta.** $F(t)=1-\dfrac{3}{2}e^{-t}+\dfrac{1}{2}e^{t}$

h) $L^{-1}\{\dfrac{s^3+16s-24}{s^4+20s^2+64}\}$ **Rpta.** $F(t)=\dfrac{\cos 2t}{3}-\operatorname{sen} 2t+\dfrac{2}{3}\cos 4t+\dfrac{\operatorname{sen} 4t}{2}$

i) $L^{-1}\{\dfrac{s^2-3}{(s-2)(s-3)(s^2+2s+5)}\}$

Rpta. $F(t)=-\dfrac{1}{13}e^{2t}+\dfrac{3}{10}e^{3t}-\dfrac{29}{30}e^{-t}\cos 2t+\dfrac{151}{390}e^{-t}\operatorname{sen} 2t$

j) $L^{-1}\{\dfrac{1}{(s+1)(s^2+1)}\}$ **Rpta.** $F(t)=\dfrac{1}{2}e^{-t}-\dfrac{1}{2}\cos t-\dfrac{1}{2}\operatorname{sen} t$

3 Mediante la formula de Hoaviside calcular la transformada inversa de Laplace.

a) $L^{-1}\{\dfrac{2s-11}{(s+2)(s-3)}\}$ **Rpta.** $F(t)=3e^{-2t}-e^{3t}$

b) $L^{-1}\{\dfrac{19s+37}{(s-2)(s+1)(s+3)}\}$ **Rpta.** $F(t)=5e^{2t}-3e^{-t}-2e^{-3t}$

c) $L^{-1}\{\dfrac{2s^2-6s+5}{s^3-6s^2+11s-6}\}$ **Rpta.** $F(t)=\dfrac{e^{t}}{2}-e^{2t}+\dfrac{5}{2}e^{3t}$

d) $L^{-1}\{\dfrac{1}{(s+1)(s^2+1)}\}$ **Rpta.** $F(t)=\dfrac{1}{2}(e^{-t}+\operatorname{sen} t-\cos t)$

e) $L^{-1}\{\dfrac{3s+16}{s^2-s-6}\}$ **Rpta.** $F(t)=5e^{3t}-2e^{-2t}$

f) $L^{-1}\{\dfrac{s+1}{6s^2+7s+2}\}$ **Rpta.** $F(t)=\dfrac{e^{-t/2}}{2}-\dfrac{1}{3}e^{-\frac{2t}{3}}$

g) $L^{-1}\{\dfrac{27-12s}{(s+4)(s^2+9)}\}$ **Rpta.** $F(t)=3e^{-4t}-3\cos 3t$

h) $L^{-1}\{\dfrac{s-1}{(s+3)(s^2+2s+2)}\}$ **Rpta.** $F(t)=-\dfrac{4}{5}e^{-3t}+\dfrac{1}{5}e^{-t}(4\cos t-3\operatorname{sen} t)$

i) $L^{-1}\{\dfrac{s^2-3}{(s+2)(s-3)(s^2+2s+5)}\}$

Rpta. $F(t)=\dfrac{3e^{3t}}{50}-\dfrac{e^{-2t}}{25}-\dfrac{e^{-t}\cos 2t}{50}+\dfrac{9e^{-t}\operatorname{sen} 2t}{25}$

j) $L^{-1}\{\dfrac{s}{(s^2-2s+2)(s^2+2s+2)}\}$ **Rpta.** $F(t)=\dfrac{1}{2}\operatorname{senh} t.\operatorname{sen} t$

4 Encontrar la transformada inversa de Laplace.

a) $L^{-1}\{\dfrac{1}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}\}$, $a^2\neq b^2$, $ab\neq 0$

b) $L^{-1}\{\dfrac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}\}$, $a^2\neq b^2$, $ab\neq 0$

c) $L^{-1}\{\dfrac{s^2}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}\}$, $a^2\neq b^2$, $ab\neq 0$

d) $L^{-1}\{\dfrac{1}{s(s^3+1)}\}$

e) $L^{-1}\{\dfrac{7s-1}{(s-3)(s+2)(s-1)}\}$

5 Hallar la transformada de Laplace, mediante el teorema de convolución.

a) $L^{-1}\{\frac{1}{(s+3)(s-1)}\}$

b) $L^{-1}\{\frac{1}{(s+1)^2(s-1)}\}$

c) $L^{-1}\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\}$

d) $L^{-1}\{\frac{1}{s^2(s+1)}\}$

e) $L^{-1}\{\frac{1}{(s+a)(s-b)}\}, a \neq b$

f) $L^{-1}\{\frac{3s^2}{(s^2+1)^2}\}$

g) $L^{-1}\{\frac{s}{(s^2+1)^3}\}$

h) $L^{-1}\{\frac{s^2}{(s^2+4)^2}\}$

6. Hallar la transformada inversa de Laplace de:

a) $L^{-1}\{\frac{s}{s^2+2s+5}\}$

b) $L^{-1}\{\frac{s}{s^2-6s+13}\}$

c) $L^{-1}\{\frac{s-5}{s^2-6s+13}\}$

d) $L^{-1}\{\frac{2s-1}{s^2+4s+29}\}$

e) $L^{-1}\{\frac{3s+1}{(s+1)^4}\}$

f) $L^{-1}\{\frac{s^2}{(s+2)^3}\}$

g) $L^{-1}\{\frac{2s^2-6s+5}{s^3-6s^2+11s-6}\}$

h) $L^{-1}\{\frac{3s-8}{s^2+4}-\frac{4s-24}{s^2-16}\}$

i) $L^{-1}\{\frac{2s-\pi}{s^3(s-\pi)}\}$

j) $L^{-1}\{\frac{s+1}{6s^2+7s+2}\}$

k) $L^{-1}\{\frac{s+2}{s^4-16s^2+100}\}$

l) $L^{-1}\{\frac{s+2}{(s+1)(s^2+4)}\}$

ll) $L^{-1}\{\frac{s+1}{(s^2+1)(s^2+4s+13)}\}$

m) $L^{-1}\{\frac{s}{(s+1)(s+2)^3}\}$

7. Hallar las siguientes Transformadas inversas.

a) $L^{-1}\{\frac{s^2-s+3}{s^3+6s^2+11s+6}\}$ b) $L^{-1}\{\frac{s}{s^4-2s^2+1}\}$

c) $L^{-1}\{\frac{s}{(s+2)^2(s^2+1)}\}$ d) $L^{-1}\{\frac{s+2}{(s+1)(s^2+4)}\}$

e) $L^{-1}\{\frac{s-1}{(s+3)(s^2+2s+3)}\}$ f) $L^{-1}\{\frac{27-12s}{(s+4)(s^2+9)}\}$

g) $L^{-1}\{\frac{1}{(s-1)^n}\}$, $n>0$ h) $L^{-1}\{\frac{2s}{(s^2+1)^2}\}$

i) $L^{-1}\{\frac{3s^2}{(s^2+1)^2}\}$ j) $L^{-1}\{\frac{1}{s^4+1}\}$

8 Si $L^{-1}\{\frac{1}{s^{n+1}}\}=\frac{t^n}{\Gamma(n+1)}$, n > -1, calcular:

a) $L^{-1}\{\frac{s}{(s+1)^{5/2}}\}$ b) $L^{-1}\{\frac{s}{s^{7/2}}\}$

c) $L^{-1}\{\frac{3(s^2-1)^2}{s^5}+\frac{4s-18}{9-s^2}+\frac{(s+1)(2-s^{1/2})}{s^{5/2}}\}$ d) $L^{-1}\{\frac{s+1}{s^{4/3}}\}$

e) $L^{-1}\{(\frac{\sqrt{s-1}}{s})^2\}$ f) $L^{-1}\{\frac{3s-2}{s^{5/2}}-\frac{7}{3s+2}\}$

9 Hallar la transformada inversa de Laplace.

a) $L^{-1}\{\frac{s^2+2s}{(s^2+2s+2)^2}\}$ b) $L^{-1}\{\frac{s^2-6s+7}{(s^2-4s+5)^2}\}$

c) $L^{-1}\{\frac{s^3+8s^2+22(s+1)}{(s^2+6s+10)^2}\}$ d) $L^{-1}\{\frac{s^3+3s^2-s-3}{(s^2+2s+5)^2}\}$

e) $L^{-1}\{\frac{2(s^3+2s^2-s-47}{(s^2+4s+13)^2}\}$ f) $L^{-1}\{\frac{2s^3-s^2-1}{(s+1)^2(s^2+1)^2}\}$

g) $L^{-1}\{\frac{s^2-10s-25}{s^3-25s}\}$ h) $L^{-1}\{\frac{s+1}{6s^2+7s+2}\}$

(10) Hallar la Transformada inversa de Laplace de:

a) $L^{-1}\{\ln(\frac{s}{s-1})\}$ b) $L^{-1}\{\frac{1}{2}\ln(\frac{s^2}{s^2+1})\}$

c) $L^{-1}\{\ln(\frac{s+a}{s+b})\}$ d) $L^{-1}\{\ln(\frac{s^2+1}{s(s+1)})\}$

e) $L^{-1}\{\frac{1}{2}\ln(\frac{s^2-1}{s^2})\}$ f) $L^{-1}\{\frac{1}{2}\ln(\frac{s^2+1}{(s-1)^2})\}$

h) $L^{-1}\{\ln(\frac{s^2+1}{s(s+3)})\}$ i) $L^{-1}\{\frac{1}{s}\ln(\frac{s+2}{s+1})\}$

j) $L^{-1}\{\frac{1}{s}\ln(\frac{s^2+a^2}{s^2+b^2})\}$ k) $L^{-1}\{s\ln(\frac{s-1}{s+1})+2\}$

l) $L^{-1}\{\frac{1}{s^{10}}\ln(\frac{s^2+a^2}{s^2+b^2})\}$ ll) $L^{-1}\{\ln(\frac{(s+a)(s^2+c^2)}{(s+b)(s-c)^2})\}$

(11) Hallar la transformada inversa de Laplace de

a) $L^{-1}\{\text{arctg}(s+1)\}$ b) $L^{-1}\{\frac{1}{s}\text{arctg}(\frac{1}{s})\}$

c) $L^{-1}\{\frac{1}{s}\cos(\frac{1}{s})\}$ d) $L^{-1}\{\text{arctg}(\frac{2}{s^2})\}$

e) $L^{-1}\{\text{arctg}(s+1)\}$ f) $L^{-1}\{\text{arctg}(\frac{3}{s+2})\}$

g) $L^{-1}\{\frac{e^{-4s}}{s^2}\text{arctg}(s^2+4s+4)\}$ h) $L^{-1}\{s^2\,\text{arctg}(\frac{4}{s})\}$

(12) Calcular la Transformada inversa de Laplace de:

a) $L^{-1}\{\frac{1}{s}(1+\frac{1}{s^3})^{-1/2}\}$

b) $L^{-1}\{\frac{1}{\sqrt{s+1}}\}$

c) $L^{-1}\{\frac{e^{-s}(1-e^{-s})}{s(s^2+1)}\}$

d) $L^{-1}\{e^{-3s-2\sqrt{s}}\}$

e) $L^{-1}\{\frac{1}{\sqrt{s-1}}\}$

f) $L^{-1}\{\frac{1}{(s-1)\sqrt{s}}\}$

g) $L^{-1}\{\frac{1}{\sqrt{s}\sqrt{s+1}}\}$

h) $L^{-1}\{\frac{1}{\sqrt{s^2+4s+13}}\}$

i) $L^{-1}\{\frac{e^{-3s}}{se^{s}+1}\}$

j) $L^{-1}\{\frac{1}{\sqrt{s-a}+b}\}$

k) $L^{-1}\{e^{1/s}-1\}$

l) $L^{-1}\{e^{-1/s}-1\}$

m) $L^{-1}\{\frac{(s+3)e^{-s}}{4s^2+4s+9}\}$

(13) Hallar la transformada inversa de Laplace de:

a) $L^{-1}\{\frac{s}{(s+1)(s+2)(s^2+1)(1-e^{-2s})}\}$

b) $L^{-1}\{\frac{1}{(s-1)(s+2)^2(1-e^{-2s})}\}$

c) $L^{-1}\{\frac{e^{-s}}{s(s^2+2s+5)(e^{-s}+1)}\}$

d) $L^{-1}\{\frac{3s+5}{(s+1)(s^2+4s+5)(1-e^{-3s})}\}$

(14) Para $a > 0$. Demuéstrese que: de $L^{-1}\{f(s)\}=F(t)$ se sigue que $L^{-1}\{f(as+b)\}=\frac{1}{a}e^{-\frac{bt}{a}}F(\frac{t}{a})$

(15) Dado $F(t)=L^{-1}\{\frac{3}{s^3\,\text{senh}(3s)}\}$, calcular F(10) **Rpta.** F(10) = 344

(16) Verificar $L^{-1}\{\frac{1}{1+\sqrt{s}}\}=e^{t}(\frac{1}{\sqrt{\pi t e^{t}}}+f_{er}(\sqrt{t})-1)$

(17) Verificar $L^{-1}\{\frac{e^{-s\sqrt{x}}}{\sqrt{s}}\}=\frac{e^{-x^2/4t}}{\sqrt{\pi t}}$

(18) Demuestre que: $L^{-1}\{\frac{\sqrt{s+1}-\sqrt{s}}{\sqrt{s+1}+\sqrt{s}}\}=\frac{e^{-t/2}J_1(t/2)}{t}$

(19) Demuestre que para $n\in Z^+$, se tiene: $L^{-1}\{\frac{1}{(s+1)^{n+1}}\}=\frac{t^n e^{-t}}{n!}$

(20) Demuéstrese que para m > -1: $L^{-1}\{\frac{1}{(s+a)^{m+1}}\}=\frac{t^m e^{-at}}{\Gamma(m+1)}$

(21) Halle la formula para determinar: $F_n(t)=L^{-1}\{\frac{1}{s^n(s^2+1)}\},\ n\in Z^+$

(22) Hallar $F(t)=L^{-1}\{\frac{(s^3-3s^2+6s-4)e^{-\pi(s-1)}}{(s^2-2s+2)^2}\}$

Rpta. $F(t)=-e^{-t}[\cos t+(t-\pi)\operatorname{sen} t]\mu_\pi(t)$

(23) Evaluar $L^{-1}\{\frac{e^{-4s}}{(s+2)^3}\}$ **Rpta.** $F(t)=\frac{1}{2}(t-4)^2e^{-2(t-4)}\mu(t-4)$

(24) Si F(t) es continua para t > 0 y $F(t)=L^{-1}\{\frac{e^{-3s}}{(s+1)^3}\}$ evaluar F(2), F(s), F(7)

Rpta. F(2) = 0 , $F(5)=2e^{-2}$, $F(7)=8e^{-4}$

(25) Si F(t) es continua para t > 0 y $F(t)=L^{-1}\{\frac{(1-e^{-2s})(1-3e^{-2s})}{s^2}\}$ evaluar F(1), F(3), F(5)

Rpta. F(1) = 1 , F(3) = -1 , F(5) = -4

(26) Hallar $L^{-1}\{\frac{1}{(s+a)\sqrt{s^2+b}}\}$ **Rpta.** $F(t)=e^{-at}\int_0^t e^{at}J_0(bt)dt$

(27) Si $H(s)=\ln(1+\frac{1}{\sqrt{1+s^2}})$ calcular $F(t)=L^{-1}\{H(s)\}$

(28) Mostrar que para cualquier entero n > 1, a ≠ 0.

$$L^{-1}\{\frac{1}{(s^2+a^2)^{n+1}}\}=\frac{1}{2n}\int_0^t t\,L^{-1}\{\frac{1}{(s^2+a^2)^n}\}dt$$

(29) Utilizando el resultado del ejercicio 27), para demostrar que:

$$L^{-1}\{\frac{1}{(s^2+a^2)^{n+1}}\}=\frac{1}{2^n\,a\,n!}\int_0^t t\int_0^t t\int_0^t \dots \int_0^t t\,\text{sen}\,t\,dt\text{ , n veces.}$$

(30) Dado c > 0, s > 0 y $F(t)=L^{-1}\{f(s)\}$. Pruebe que

$$L^{-1}\{\frac{f(s)}{\cosh(cs)}\}=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n F(t-2nc-c)U(t-2nc-c)$$

(31) Calcular $L^{-1}\{\frac{1}{\sqrt{(s^2+2s+16)^3}}\}$ **Rpta.** $F(t)=\frac{e^{-t}}{\sqrt{15}}\int_0^t \text{sen}\sqrt{15(t-u)}J_0(\sqrt{15}u)du$

(32) Calcular $L^{-1}\{\frac{1}{s}J_0(\frac{2}{\sqrt{5}})\}$ **Rpta.** $F(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^n}{(n!)^2}$

(33) Calcular la transformada de Laplace: $L^{-1}\{\frac{1}{s(as+1)(as+2)\dots(as+n)}\}$

Rpta. $F(t)=\frac{t}{n!}(1-e^{-\frac{1}{at}})^n$

(34) Hallar $F(t)=L^{-1}\{\frac{e^{-3s}}{s\,e^s-1}\}$ **Rpta.** $F(t)=\sum_{n=4}^{\infty}\frac{(t-n)^{n-4}\mu(t-4)}{(n-4)!}$

(35) Demostrar que :

$$L^{-1}\{\frac{1}{1+\sqrt{1+s}}+\frac{1}{1+\sqrt{s}}+\frac{1}{s\sqrt{s+a}}\}=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}(1+e^{-t})-(1+e^t)f_{er}(\sqrt{t})+\frac{1}{\sqrt{a}}f_{er}(at)$$

(36) Calcular $L^{-1}\{\frac{1}{s-\sqrt{s}}\}$

(37) Calcular $L^{-1}\{\frac{1}{\sqrt{s-a}+b}\}$

38. Calcular $L^{-1}\{\frac{2s^4+14s^2+16}{(s^2+1)(s^2+2)(s^2+7)(1+e^{-5s})}+\frac{s^3}{s^4+4a^4}\}$

39. Hallar $L^{-1}\{\frac{s^6+s^5+10s^4+6s^3+25s^2+9s}{s^8+16s^6+94s^4+240s^2+225}\}$

40. Encontrar $L^{-1}\{\frac{2(s^3-7s^2+14s-9)}{(s-1)^2(s-2)^3}\}$

41. Encontrar $L^{-1}\{\frac{4s^3+18s^2+30s+17}{(s+2)^4}\}$

42. Encontrar $L^{-1}\{\frac{s^3-2s^2+s}{(s^2-4s+5)(s^2-2s+5)}\}$

43. Hallar $L^{-1}\{\frac{7s-1}{(s-3)(s+2)(s-1)}\}$

44. Encontrar $L^{-1}\{\frac{3s^2-2s-1}{(s-3)(s^2+1)}\}$

45. Hallar $L^{-1}\{\frac{2s^3+5s^2+6s+1}{s(s+1)^3}\}$

46. Hallar $L^{-1}\{\frac{9-6s+5s^2 2-s^3}{s^2(s-3)^2}\}$

47. Hallar $L^{-1}\{\frac{5-7s+4s^2-s^3}{(s+1)^3(s-2)^2}\}$

48. Calcular $L^{-1}\{\frac{2(s^3+2s^2-s-47)}{(s^2+4s+13)^2}\}$

49. Calcular $L^{-1}\{\frac{s^3-6s^2+27s-38}{(s^2-4s+13)^2}\}$

50. Calcular $L^{-1}\{\frac{s^2-6s+7}{(s^2+4s+5)^2}\}$

51. Calcular $L^{-1}\{\frac{1}{\sqrt{as+b}}\}$, a,b > 0

52. Calcular **a)** $L^{-1}\{s\,L\{\int_0^t \frac{\text{sen}\,t}{t}\,dt\}\}$ **b)** $L^{-1}\{\frac{e^{-s}(1-e^{-s})}{s(s^2+1)}\}$

53. Hallar la transformada inversa de Laplace $L^{-1}\{\frac{1}{s(s-a)^n}\}$

54. Hallar la transformada inversa de $L^{-1}\{\frac{4}{s^2}(\frac{s-2}{s^2+4})\}$

55. Calcular $L^{-1}\{\frac{As+B}{s^2+2bs+c}\}$, ∀ A,B,b y c reales

(56) Calcular $L^{-1}\{\frac{1}{s^4+4a^4}\}$

(57) Evaluar $L^{-1}\{\frac{2e^{3(1-\frac{s}{2})}\operatorname{senh}(3+\frac{s}{2})}{(s+6)^{5/6}}\}$

(58) Calcular $F(t)=L^{-1}\{\frac{1}{s^6(1-e^{-4s})}\}$ y F(12)

(59) Evaluar $L^{-1}\{\frac{e^{-\frac{1}{s}}}{\sqrt{s}}\}$

(60) Calcular $L^{-1}\{\frac{1}{\sqrt{s+a}+\sqrt{s+b}}\}$, a≠ b

(61) Calcular $L^{-1}\{\frac{10}{s^{21}\operatorname{senh}(cs)}\}$

(62) Calcular $L^{-1}\{\frac{1}{s^6\cosh(cs)}\}$

(63) Calcular $L^{-1}\{\frac{e^{-\frac{a}{s}}}{\sqrt{s}}\}$

(64) Evaluar $L^{-1}\{\frac{e^{\frac{a}{s}}}{s^{n+1}}\}$

(65) Evaluar $L^{-1}\{\frac{e^{-4s}}{s^4-1}\}$

(66) Evaluar $L^{-1}\{\frac{e^{-6s}}{s\,e^{4s}+1}\}$

(67) Calcular $L^{-1}\{\frac{1}{(s+6)^{n+1}}\}$

(68) Encontrar $L^{-1}\{\frac{20}{s^6\operatorname{senh}(4s)}\}$

(69) Calcular $L^{-1}\{\frac{4s^3+6s^2+14s+11}{(s^5+4s^4+6s^3+5s^2+2)(1-e^{-2s})^2}\}$

(70) Calcular $L^{-1}\{\frac{4-e^{-as}}{s(4+2e^{-as})}\}$

(71) Encontrar $L^{-1}\{\frac{e^{1/s}}{\sqrt{s^3}}\}$

(72) Calcular $L^{-1}\{\frac{s^4-6s^3+5s^2+3s-1}{(s^2+1)(s^2+4)(s^2+9)(s^2+36)}\}$

(73) Calcular $L^{-1}\{\frac{(\sqrt{s^2+a^2}-s)^2}{\sqrt{s^2+a^2}}\}$

(74) Hallar $L^{-1}\{\frac{\cosh(-4s)}{s^4+4a^4}\}$

(75) Encontrar $L^{-1}\{\frac{1}{\sqrt{s^4-a^4}}\}$

(76) Encontrar $L^{-1}\{\frac{e^{-4s}\operatorname{senh}(6s)}{(1-e^{-4s})^2}\}$

(77) Calcular $L^{-1}\{\dfrac{e^{-20s}}{s^5+5s^4+14s^3+62s^2+149s+130}\}$

(78) Evaluar $L^{-1}\{\dfrac{2e^{\frac{5-5s}{2}}\cosh(5+\frac{s}{2})}{(s+24)^{13/2}}\}$

(79) Evaluar $L^{-1}\{\dfrac{2s^2-9s+19}{(s-1)^2(s+3)}\}$

(80) Calcular $L^{-1}\{\dfrac{e^{-s}(1-e^{-s})}{s(s^2+1)}\}$ **Rpta.** F(t)=[1 - cos (t - 1)] μ(t - 1) - [1 - cos(t - 2)]μ(t - 2)

(81) Demostrar que:

a) $L^{-1}\{e^{-a\sqrt{s}}\}=\dfrac{a}{2\sqrt{\pi t^3}}e^{-\frac{a^2}{4t}}$

b) $L^{-1}\{\dfrac{e^{-a\sqrt{s}}}{s}\}=f_{er}(\dfrac{a}{\sqrt{4t}})$

c) $L^{-1}\{s\,e^{-a\sqrt{s}}\}=\dfrac{1}{4}(a^2-2t)\dfrac{e^{-\frac{a^2}{4t}}}{\sqrt{\pi t^5}}$

d) $L^{-1}\{\dfrac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}\}=\dfrac{e^{-\frac{a^2}{4t}}}{\sqrt{\pi t}}$

e) $L^{-1}\{e^{-4s-2\sqrt{s}}\}=\dfrac{1}{\sqrt{11(t-4)^3}}e^{-\frac{1}{t-4}}\mu(t-4)$

f) $L^{-1}\{\dfrac{1}{\sqrt{(s^2-a^2)^3}}\}=\dfrac{t\,I_1(t)}{a}$

g) $L^{-1}\{\dfrac{e^{-a\sqrt{s}}}{s+b\sqrt{s}}\}=e^{ab+b^2t}f_{er}(b\sqrt{t}+\dfrac{a}{2\sqrt{t}})$

(82) Dado $c>0,\ s>0$ y $L^{-1}\{f(s)\}=F(t)$, probar que:

$$L^{-1}\{f(s)\,\mathrm{tgh}(cs)\}=F(t)+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n F(t-2nc)\mu(t-2nc)$$

CAPÍTULO XIII

13. APLICACIONES DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE EN LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES.

Las técnicas de transformada de Laplace son muy útil para resolver ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales dadas, es decir: A medida que avancemos en su estudio observamos que dicho método transforma un problema de Ecuaciones Diferenciales ordinarias en un problema algebraico de fácil análisis, el que una vez resuelta es llevado al problema original atravez de la transformada inversa de Laplace.

Este proceso observaremos en el siguiente esquema.

Ecuación Diferencial

↓

Ecuación de la Transformada

↓

Resolución de la Ecuación de la Transformada

↓

Solución de la Ecuación Diferencial

Como $L\{\frac{d^n y}{dt^n}\}$, n > 1, depende y(t) y sus n - 1 derivadas calculadas en t = 0, la Transformada de Laplace es especialmente adecuada para resolver problemas de valor inicial para ecuaciones diferenciales lineales. Este caso de ecuaciones diferenciales puede reducirse a una ecuación algebraica en las función transformada L{y(t)} = y(s), para ver esto, consideremos el problema de valor inicial.

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + ... + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = g(t)$$

$y(0) = y_0$, $y'(0) = y_0'$, ... , $y_{(0)}^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$, en donde

a_i , i = 0,1,...,n, y $y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}$ son constantes, por la linealidad de la Transformada de Laplace podemos escribir.

$$a_n L\{\frac{d^n y}{dt^n}\} + a_{n-1} L\{\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}}\} + ... + a_1 L\{\frac{dy}{dt}\} + a_0 L\{y\} = L\{g(t)\} \text{, por propiedades}$$

$$a_n [s^n L\{y\} - s^{n-1} y(0)] s^{n-2} y'(0) - ... - y^{(n-1)}(0)] + a_{n-1} [s^{n-1} L\{y\} - s^{n-2} y(0) -$$

$$- s^{n-3} y'(0) - ... - y^{n-2)}(0)] + ... + a_0 L\{y\} = L\{g(t)\}$$

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + ... + a_0) L\{y\} = a_n [s^{n-1} y(0) + s^{n-2} y'(0) + ... + y^{(n-1)}(0)] +$$

$$+ a_{n-1} (s^{n-1} + s^{n-2} y(0) + ... + y^{(n-2)}(0)) + ... + L\{g(t)\}$$

de donde L {y} = y (s), calculando y(t) mediante la transformada inversa de Laplace.

$$y(t) = L^{-1}\{y(s)\}$$

En forma similar para las ecuaciones lineales de coeficientes variables no homogéneas.

Ejemplo.- Resolver las siguientes diferenciales

1 $y''(t) + 4y(t) = 9t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 7$

Solución

Tomando Transformada de Laplace en la ecuación diferencial

$$L\{y''(t) + 4y(t)\} = L\{9t\} \Rightarrow L\{y''(t)\} + 4L\{y(t)\} = L\{9t\}$$

$$s^2 L\{y(t)\} - s\, y(0) - y'(0) + 4L\{y(t)\} = \frac{9}{s^2}$$

$$(s^2+4)L\{y(t)\}=\frac{9}{s^2}+7=\frac{9+7s^2}{s^2} \Rightarrow L\{y(t)\}=\frac{7s^2+9}{s^2(s^2+4)}=\frac{9}{4}(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+4})+\frac{7}{s^2+4}$$

$$y(t)=L^{-1}\{\frac{9}{4}(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+4})+\frac{7}{s^2+4}\}$$

$$y(t)=\frac{9}{4}L^{-1}\{\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+4}\}+7L^{-1}\{\frac{1}{s^2+4}\}=\frac{9}{4}(t-\frac{1}{2}\text{sen}\,2t)+\frac{7}{2}\text{sen}\,2t$$

$$\therefore\ y(t)=\frac{9t}{4}+\frac{19}{8}\text{sen}\,2t$$

2 $(D^2-4D+4)y=2e^{2t}+\cos t$, $y(0)=\frac{3}{25}$, $y'(0)=-\frac{4}{25}$

Solución

$\frac{d^2y}{dt^2}-4\frac{dy}{dt}+4y=2e^{2t}+\cos t$, tomando Transformada de Laplace en la ecuación

$L\{\frac{d^2y}{dt^2}-4\frac{dy}{dt}+4y\}=L\{2e^{2t}+\cos t\}$, por propiedades

$$s^2L\{y(t)\}-s\,y(0)-y'(0)-4sL\{y(t)\}+4y(0)+4L\{y(t)\}=L\{2e^{2t}+\cos t\}$$

$$(s^2-4s+4)L\{y(t)\}-\frac{3s}{25}+\frac{4}{25}+\frac{12}{25}=\frac{2}{s-2}+\frac{s}{s^2+1}$$

$$(s-2)^2L\{y(t)\}=\frac{2}{s-2}+\frac{s}{s^2+1}+\frac{3s-16}{25}$$

$$L\{y(t)\}=\frac{2}{(s-2)^3}+\frac{s}{(s^2+1)(s-2)^2}+\frac{3s-16}{25(s-2)^2}$$

$$y(t)=L^{-1}\{\frac{2}{(s-2)^3}+\frac{s}{(s^2+1)(s-2)^2}+\frac{3s-16}{25(s-2)^2}\}=t^2e^{2t}+\frac{3}{5}t\,e^{2t}+\frac{3}{25}e^{2t}-\frac{\text{sen}\,t}{4}$$

3 $t\,y''(t)+y'(t)+t\,y(t)=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$

Solución

Tomando Transformada de Laplace se tiene

$L\{t\,y''(t)+y'(t)+t\,y(t)\}=0$, de donde $L\{t\,y''(t)\}+L\{y'(t)\}+L\{t\,y(t)\}=0$

$$-\frac{d}{ds}(s^2L\{y(t)\}-s\,y(0)-y'(0)+sL\{y(t)\}-y(0)-\frac{d}{ds}L\{y(t)\}=0$$

$$-2s\,L\{y(t)\}-s^2\frac{d}{ds}L\{y(t)\}+s\,L\{y(t)\}-\frac{d}{ds}L\{y(t)\}=0$$

$(s^2+1)\dfrac{d}{ds}L\{y(t)\}=-s\,L\{y(t)\} \Rightarrow \dfrac{dL\{y(t)\}}{L\{y(t)\}}=-\dfrac{s\,ds}{s^2+1}$, integrando

$\ln(L\{y(t)\})=-\ln\sqrt{s^2+1}+\ln k \Rightarrow \ln(L\{y(t)\})=\ln\dfrac{k}{\sqrt{s^2+1}}$, levantando el logaritmo

$L\{y(t)\}=\dfrac{k}{\sqrt{s^2+1}}$, tomando la inversa $y(t)=k\,L^{-1}\{\dfrac{1}{\sqrt{s^2+1}}\}=k\,J_0(t)$, como y(0)=1 y $J_0(0)=1$ entonces $y(0)=c\,J_0(0) \Rightarrow 1=c$ $\qquad\therefore\ y(t)=J_0(t)$

13.1. SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES POR EL MÉTODO DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE.-

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=a_{11}x+a_{12}y+f(t)\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=a_{21}x+a_{22}y+g(t)\end{cases} \qquad \text{... (1)}$$

con condiciones iniciales $x(0)=x_0$, $y(0)=y_0$, donde x,y son las funciones incógnitas, $a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}$ son constantes y f(t), g(t) son funciones conocidas tomando la Transformada de Laplace a ambas ecuaciones diferenciales del sistema (1)

$$\begin{cases} L\{\frac{dx}{dt}\} = L\{a_{11}x + a_{12}y + f(t)\} \\ L\{\frac{dy}{dt}\} = L\{a_{21}x + a_{22}y + g(t)\} \end{cases}$$, mediante las propiedades de la transformada se tiene:

$$\begin{cases} s\,L\{x\} - x(0) = a_{11}L\{x\} + a_{12}L\{y\} + L\{f(t)\} \\ s\,L\{y\} - y(0) = a_{21}L\{x\} + a_{22}L\{y\} + L\{g(t)\} \end{cases}$$, agrupando términos se tiene:

$$\begin{cases} (s - a_{11})\,L\{x\} - a_{12}L\{y\} = x_0 + L\{f(t)\} \\ -a_{21}L\{x\} + (s - a_{22})L\{y\} = y_0 + L\{g(t)\} \end{cases} \quad \ldots (2)$$

Si $x_0 + L\{f(t)\}$ y $y_0 + L\{g(t)\}$ no son ambos cero, entonces se puede resolver el sistema (2), mediante la regla de CRAMER, es decir:

$$L\{x\} = \frac{\begin{vmatrix} x_0 + L\{f(t)\} & -a_{12} \\ y_0 + L\{g(t)\} & s - a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & s - a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{(x_0 + L\{f(t)\})(s - a_{22}) + a_{12}(y_0 + L\{g(t)\})}{(s - a_{11})(s - a_{22}) - a_{12}a_{21}}$$

$$\boxed{x = L^{-1}\{\frac{(x_0 + L\{f(t)\})(s - a_{22}) + a_{12}(y_0 + L\{g(t)\})}{(s - a_{11})(s - a_{22}) - a_{12}a_{21}}\}}$$

$$L\{y\} = \frac{\begin{vmatrix} s - a_{11} & x_0 + L\{f(t)\} \\ -a_{21} & y_0 + L\{g(t)\} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & s - a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{(s - a_{11})(y_0 + L\{g(t)\}) + a_{21}(x_0 + L\{f(t)\})}{(s - a_{11})(s - a_{22}) - a_{12}a_{21}}$$

$$\boxed{y = L^{-1}\{\frac{(s - a_{11})(y_0 + L\{g(t)\}) + a_{21}(x_0 + L\{f(t)\})}{(s - a_{11})(s - a_{22}) - a_{12}a_{21}}\}}$$

por lo tanto es evidente que la Transformada de Laplace, nos permite convertir un sistema de ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales dadas en un sistema de ecuaciones simultáneas. Este método puede generalizarse a sistemas de "n" ecuaciones diferenciales de primer orden de coeficientes, dado entonces un sistema correspondiente a "n" ecuaciones lineales simultáneas.

Ejemplo.- Resolver el problemas con valor inicial. $\begin{cases} x'(t) = x(t) - y(t) + e^t \\ y'(t) = 2x(t) + 3y(t) + e^{-t} \end{cases}$

como x(0) = 1, y(0) = 0.

Solución

Tomando Transformada de Laplace, a cada ecuación diferencial

$$\begin{cases} L\{x'(t)\} = L\{x(t) - y(t) + e^t\} \\ L\{y'(t)\} = L\{2x(t) + 3y(t) + e^{-t}\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} s\,L\{x(t)\} - x(0) = L\{x(t)\} - L\{y(t)\} + L\{e^t\} \\ s\,L\{y'(t)\} - y(0) = 2L\{x(t)\} + 3L\{y(t)\} + L\{e^{-t}\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (s-1)L\{x(t)\} + L\{y(t)\} = 1 + \dfrac{1}{s-1} = \dfrac{s}{s-1} \\ -2\,L\{x(t)\} + (s-3)L\{y(t)\} = \dfrac{1}{s+1} \end{cases}, \text{ por la regla de CRAMER}$$

$$L\{x(t)\} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{s}{s-1} & 1 \\ \frac{1}{s+1} & s-3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s-1 & 1 \\ -2 & s-3 \end{vmatrix}} = -\frac{11}{10(s+1)} + \frac{19s-45}{10(s^2-4s+5)}$$

$$x(t) = L^{-1}\{\frac{-11}{10(s+1)} + \frac{19(s-2)-7}{10[(s-2)^2+1]}\} = -\frac{11}{10}e^{-t} + \frac{19}{10}e^{2t}\cos t - \frac{7}{10}e^{2t}\,\text{sen}\,t$$

$$\therefore\ x(t) = -\frac{11}{10}e^{-t} + \frac{e^{2t}}{10}(19\cos t - \text{sen}\,t)$$

$$L\{y(t)\} = \frac{\begin{vmatrix} s-1 & \frac{s}{s-1} \\ -2 & \frac{1}{s+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s-1 & 1 \\ -2 & s-3 \end{vmatrix}} = \frac{\frac{s-1}{s+1} + \frac{2s}{s-1}}{(s-1)(s-3)+2} = \frac{3s^2+1}{(s^2-1)(x^2-4s+5)}$$

$$= -\frac{2}{5(s+1)} + \frac{2}{s-1} - \frac{8}{5}\left(\frac{s-2}{(s-2)^2+1}\right) - \frac{7}{s}\left(\frac{1}{(s-2)^2+1}\right)$$

$$y(t) = L^{-1}\left\{-\frac{2}{5(s+1)} + \frac{2}{s-1} - \frac{8}{5}\left(\frac{s-2}{(s-2)^2+1}\right) - \frac{7}{5}\left(\frac{1}{(s-2)^2+1}\right)\right\}$$

$$y(t) = -\frac{2}{5}e^{-t} + 2e^{t} - \frac{8}{5}e^{2t}\cos t - \frac{7}{5}e^{2t}\operatorname{sen} t$$

13.2. UNA ECUACIÓN INTEGRAL.-

El teorema de la convolución es útil para resolver otros tipos de ecuaciones en las que aparece una función incógnita bajo un signo de integral. En el ejemplo siguiente obtener f(t) resolviendo una "Ecuación Integral" de la forma.

$$\boxed{f(t) = g(t) + \int_0^t f(\mu)h(t-\mu)\,d\mu}$$

donde las funciones g(t) y h(t) son conocidas.

Ejemplo.- Obtener f(t) si $f(t) = 3t^2 - e^{-t} - \int_0^t f(\mu)e^{t-\mu}\,d\mu$

Solución

Tomando Transformada de Laplace. $L\{f(t)\} = L\{3t^2\} - L\{e^{-t}\} - L\{\int_0^t f(\mu)e^{t-\mu}\,d\mu\}$

$$L\{f(t)\} = \frac{6}{s^3} - \frac{1}{s+1} - L\{f(t)\}L\{e^t\} \Rightarrow L\{f(t)\} = \frac{6}{s^3} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s-1}L\{f(t)\}$$

$$(1+\frac{1}{s-1})L\{f(t)\} = \frac{6}{s^3} - \frac{1}{s+1} \Rightarrow \frac{s}{s-1}L\{f(t)\} = \frac{6}{s^3} - \frac{1}{s+1}$$

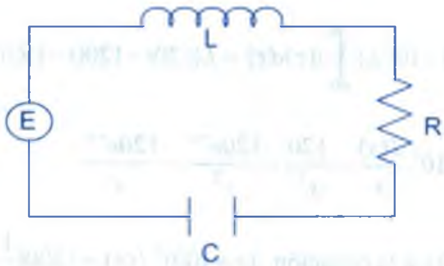
$$L\{F(t)\} = \frac{6(s-1)}{s^4} - \frac{s-1}{s(s+1)} = \frac{6}{s^3} - \frac{6}{s^4} + \frac{1}{s} - \frac{2}{s+1}$$

$$f(t) = L^{-1}\left\{\frac{6}{s^3} - \frac{6}{s^4} + \frac{1}{s} - \frac{2}{s+1}\right\} = 3t^2 - t^3 + 1 - 2e^{-t}$$

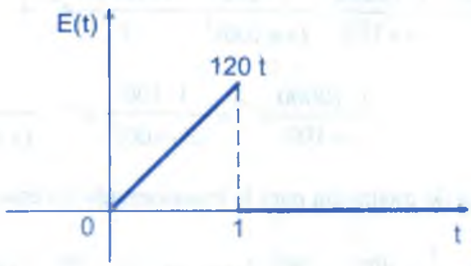
13.3. UNA ECUACIÓN INTEGRO-DIFERENCIAL.-

La segunda Ley de Kirchoff establece que en un circuito simple conectado en serie, la suma de las caídas de potencial a través de un inductor, de un resistor y de un capacitador es igual a la tensión E(t) suministrada, es decir que: caída de potencial a través del inductor $= L\dfrac{di}{dt}$ caída de potencial a través del resistor = Ri(t) y caída de potencial a través del capacitor $= \dfrac{1}{c}\displaystyle\int_0^t i(\tau)d\tau$ en donde i(t) es la corriente y L, R y C son constante, se deduce que la corriente en un circuito como el que se muestra en la figura esta regida por la ecuación Integro-diferencial.

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{c}\int_0^t i(\tau)d\tau = E(t)$$



Ejemplo.- Determinar la corriente i(t) en un circuito simple L-R -C si L = 0.1 H, R = 20 Ω, $C = 10^{-3}F$, i(0) = 0 y si la tensión aplicada E(t) es como se muestra en la figura



<u>**Solución**</u>

como el voltaje se anula para t ≥ 1, entonces podemos escribir así:

$E(t)=\begin{cases}120t & , \quad 0\le t<1\\ 0 & , \quad t\ge 1\end{cases}$; expresado en términos de la función escalón unidad.

E(t) = 120t − 120t μ(t - 1), por medio de la segunda propiedad de traslación se puede escribir así: E(t) = 120 t - 120 (t - 1) μ(t - 1) - 120 μ(t - 1)

ahora reemplazando los datos en la ecuación $L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{1}{c}\int_0^t i(\tau)d\tau=E(t)$

$$0.1\frac{di}{dt}+20i+10^3\int_0^t i(\tau)d\tau=120t-120(t-1)\mu(t-1)-120\,\mu(t-1)$$

Si $L\{i(t)\}=I(s) \Rightarrow L\{\int_0^t i(\tau)d\tau\}=\frac{I(s)}{s}$

$$L\{0.1\frac{di}{dt}\}+20L\{i(t)\}+10^3L\{\int_0^t i(\tau)d\tau\}=L\{120t-120(t-1)U(t-1)-120U(t-1)\}$$

$$0.1\,s\,I(s)+20I(s)+10^3\frac{I(s)}{s}=\frac{120}{s^2}-\frac{120e^{-s}}{s^2}-\frac{120e^{-s}}{s}$$

multiplicando por 10 s a la ecuación $(s+100)^2I(s)=1200(\frac{1}{s}-\frac{e^{-s}}{s}-e^{-s})$

$$I(s)=1200[\frac{1}{s(s+100)^2}-\frac{1}{s(s+100)^2}e^{-s}-\frac{1}{(s+100)^2}e^{-s}]$$

$$I(s)=1200[\frac{1/10000}{s}-\frac{1/10000}{s+100}-\frac{1/100}{(s+100)^2}-\frac{1/10000}{s}e^{-s}+$$

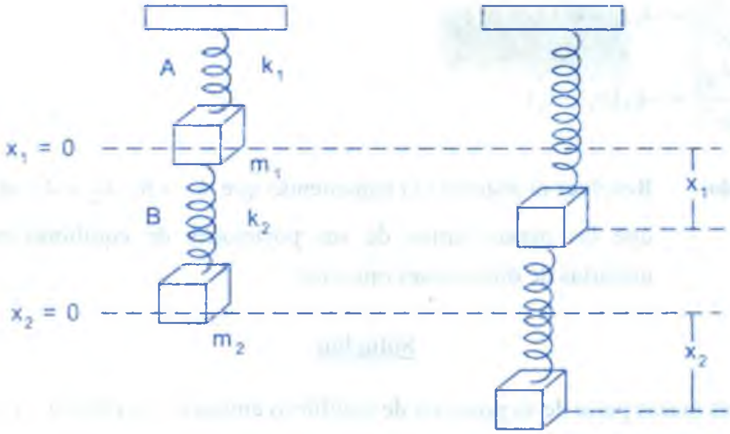
$$+\frac{1/10000}{s+100}e^{-s}+\frac{1/100}{(s+100)^2}e^{-s}-\frac{1}{(s+100)^2}e^{-s}]$$

aplicando el teorema de traslación para la transformada inversa.

$$i(t)=\frac{3}{25}[1-\mu(t-1)]-\frac{3}{25}[e^{-100t}-e^{-100(t-1)}\mu(t-1)]-12t\,e^{-100t}-1188(t-1)e^{-100(t-1)}\mu(t-1)$$

13.4. RESORTES ACOPLADOS.-

Supongamos que dos masas m_1 y m_2 están sujetas a dos resortes A y B, de masa insignificantes, cuyas componentes son k_1 y k_2, respectivamente. A su vez, los dos resortes están conectados como se muestra en la figura.



Sean $x_1(t)$ y $x_2(t)$ los desplazamientos verticales de las masas con respecto a sus posiciones de equilibrio cuando el sistema se encuentra en movimiento, el resorte B esta sujeto tanto a un alargamiento como a un acortamiento; por consiguiente, su alargamiento neto es $x_2 - x_1$. De este modo, por la ley Hooke resulta que los resortes A y B ejercen sobre m_1, respectivamente las fuerza

$$-k_1 x_1 \text{ y } k_2(x_2 - x_1)$$

Si no se aplica ninguna fuerza externa al sistema y no hay fuerza de amortiguación, entonces la fuerza neta sobre m_1 es $-k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1)$ por la segunda ley de Newton escribimos así: $m_1 \dfrac{d^2 x_1}{dt^2} = -kx_1 + k_2(x_2 - x_1)$

De igual modo la fuerza neta ejercida sobre la masa m_2 se debe solamente al alargamiento neto de B, es decir: $-k_2(x_2 - x_1)$, de esta manera resulta que:

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -k_2(x_2 - x_1)$$

En otras palabras, el movimiento del sistema acoplado queda descrito por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden simultáneas.

$$\begin{cases} m_1 \dfrac{d^2 x_1}{dt^2} = -k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1) \\ m_2 \dfrac{d^2 x_2}{dt^2} = -k_2(x_2 - x_1) \end{cases} \quad \dots (1)$$

Ejemplo.- Resolver el sistema (1) suponiendo que $k_1 = 6$, $k_2 = 4$, $m_1 = 1$, $m_2 = 1$ y que las masas parten de sus posiciones de equilibrio con velocidades unitarias de direcciones opuestas.

Solución

como las masas parte de su posición de equilibrio entonces $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$ y como sus velocidades son unitarias y opuestas entonces $x_1'(0) = 1$, $x_2'(0) = -1$, ahora reemplazando en el sistema (1)

$$\begin{cases} x_1''(t) + 10x_1'(t) - 4x_2(t) = 0 \\ -4x_1(t) + x_2''(t) + 4x_2(t) = 0 \end{cases} \quad \dots (\alpha)$$

tomando transformada de Laplace a cada ecuación

$$\begin{cases} L\{x_1''(t) + 10x_1'(t) - 4x_2(t)\} = 0 \\ L\{x_2''(t) - 4x_1(t) + 4x_2(t)\} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} s^2 L\{x_1(t)\} - s\,x_1(0) - x_0'(0) + 10sL\{x_1(t)\} - 10x_1(0) - 4L\{x_2(t)\} = 0 \\ s^2 L\{x_2(t)\} - s\,x_2(0) - x_2'(0) - 4L\{x_1(t)\} + 4L\{x_2(t)\} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (s^2 + 10s)L\{x_1(t)\} - 4L\{x_2(t)\} = 1 \\ -4L\{x_1(t)\} + (s^2 + 4)L\{x_2(t)\} = -1 \end{cases}$$; aplicando la regla de CRAMER se tiene:

$$L\{x_1(t)\} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & s^2+4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s^2+10s & -4 \\ -4 & s^2+4 \end{vmatrix}} = \frac{s^2}{(s^2+2)(s^2+12)}$$; usando fracciones parciales se tiene:

$$\frac{s^2}{(s^2+2)(s^2+12)} = \frac{As+B}{s^2+2} + \frac{Cs+D}{s^2+12}$$

$$s^2 = (As+B)(s^2+12) + (Cs+D)(s^2+2)$$

$$s^2 = (A+C)s^3 + (B+D)s^2 + (12A+2C)s + 12B + 2D$$

comparando los coeficientes de s en cada miembro de la igualdad se tiene:

$$\begin{cases} A+C=0 \\ B+D=1 \\ 12A+2C=0 \\ 12B+2D=0 \end{cases} \quad \text{de donde} \quad \begin{cases} A=0 \\ C=0 \\ B=-\frac{1}{5} \\ D=\frac{6}{5} \end{cases} \Rightarrow \frac{s^2}{(s^2+2)(s^2+12)} = -\frac{1}{5(s^2+2)} + \frac{6}{5(s^2+12)}$$

$$L\{x_1(t)\} = -\frac{1}{5(s^2+2)} + \frac{6}{5(s^2+12)} \Rightarrow x_1(t) = L^{-1}\{-\frac{1}{5(s^2+2)} + \frac{6}{5(s^2+12)}\}$$

$$x_1(t) = \frac{1}{5\sqrt{2}} L^{-1}\{\frac{\sqrt{2}}{s^2+2}\} + \frac{6}{5\sqrt{12}} L^{-1}\{\frac{\sqrt{12}}{s^2+12}\} \Rightarrow x_1(t) = -\frac{\sqrt{2}}{10} sen\sqrt{2}t + \frac{\sqrt{3}}{5} sen2\sqrt{2t}$$

$$L\{x_2(t)\} = \frac{\begin{vmatrix} s^2+10s & 1 \\ -4 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s^2+10s & -4 \\ -4 & s^2+4 \end{vmatrix}} = \frac{s^2+6}{(s^2+2)(s^2+12)}$$

siguiendo el proceso anterior, mediante fracciones parciales obtenemos.

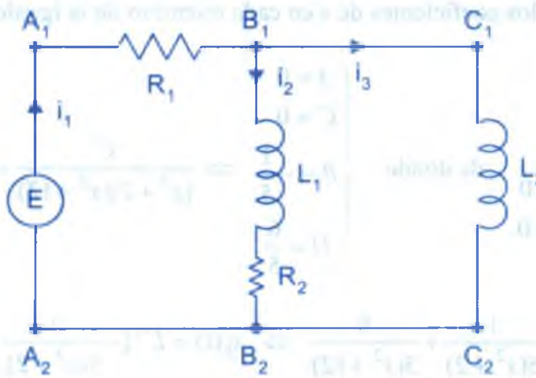
$$L\{x_2(t)\} = -\frac{\frac{2}{5}}{s^2+2} - \frac{\frac{3}{5}}{s^2+12}$$

$$x_2(t) = -\frac{2}{5\sqrt{2}} L^{-1}\{\frac{\sqrt{2}}{s^2+2}\} - \frac{3}{5\sqrt{12}} L^{-1}\{\frac{\sqrt{12}}{s^2+12}\} = -\frac{\sqrt{2}}{5}\operatorname{sen}\sqrt{2}t - \frac{\sqrt{3}}{10}\operatorname{sen}2\sqrt{3}t$$

Luego la solución del sistema (α) es: $\begin{cases} x_1(t) = -\frac{\sqrt{2}}{10}\operatorname{sen}\sqrt{2}t + \frac{\sqrt{3}}{5}\operatorname{sen}2\sqrt{3}t \\ x_2(t) = -\frac{\sqrt{2}}{5}\operatorname{sen}\sqrt{2}t - \frac{\sqrt{3}}{10}\operatorname{sen}2\sqrt{3}t \end{cases}$

13.5. REDES ELÉCTRICAS.-

Un sistema eléctrico (red) con mas de un circuito simple (o lazo) también da origen a ecuaciones diferenciales simultáneas tal como se muestra en la figura.



La corriente $i_1(t)$ se divide según las direcciones indicadas en el punto B_1, llamando punto de ramificación de la red por la primer ley de KIRCHOFF podemos escribir.

$$i_1(t) = i_2(t) + i_3(t) \qquad \ldots (1)$$

además, también se puede aplicar la segunda ley de KIRCHOFF a cada circuito, para el caso del circuito $A_1B_1B_2A_2A_1$, sumando las caídas de voltaje a través de cada parte del circuito resulta.

$$E(t) = i_1R_1 + L_1\frac{di_2}{dt} + i_2R_2 \qquad \ldots (2)$$

en forma similar, para el circuito $A_1B_1C_1C_2B_2A_2A_1$, obtenemos

$$E(t) = i_1 R_1 + L_2 \frac{di_3}{dt} \quad \ldots (3)$$

ahora reemplazamos (1) en (2) y (3) se obtiene dos ecuaciones de primer orden para las corrientes $i_2(t)$ e $i_3(t)$.

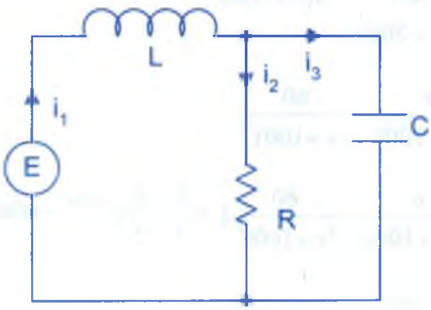
$$\begin{cases} L_1 \dfrac{di_2}{dt} + (R_1 + R_2)i_2 + R_1 i_3 = E(t) \\ L_2 \dfrac{di_3}{dt} + R_1 i_2 + R_1 i_3 = E(t) \end{cases} \quad \ldots (4)$$

con las condiciones naturales $i_2(0) = 0$, $i_3(0) = 0$, el sistema (4) se puede resolver mediante la Transformada de Laplace.

13.6. PROBLEMA DE ENTRENAMIENTO PARA EL ALUMNO.-

Demostrar que el sistema de ecuaciones diferenciales que describe las corrientes $i_1(t)$ e $i_2(t)$ en la red de la figura que contiene un resistor, un inductor y un capacitador es:

$$\begin{cases} L\dfrac{di_1}{dt} + Ri_2 = E(t) \\ RC\dfrac{di_2}{dt} + i_2 - i_1 = 0 \end{cases} \quad \ldots (*)$$



Ejemplo.- Resolver el sistema (*) con las condiciones E = 60V, L = 1H, R = 50Ω, $C = 10^{-4}\,F$, y donde i_1 e i_2 son inicialmente igual a cero.

Solución

al reemplazar los datos en el sistema (*) se tiene.

$$\begin{cases} \dfrac{di_1}{dt} + 50i_2 = 60 \\ 50(10^{-4})\dfrac{di_2}{dt} + i_2 - i_1 = 0 \end{cases}, \quad \text{sujeto a } i_1(0) = 0,\ i_2(0) = 0$$

- ahora aplicamos transformada de Laplace a cada ecuación del sistema.

$$\begin{cases} L\{\dfrac{di_1(t)}{dt} + 50i_2(t)\} = L\{60\} \\ L\{50(10^{-4})\dfrac{di_2(t)}{dt} + i_2 - i_1\} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} s\,L\{i_1(t)\} - i_1(0) + 50L\{i_2(t)\} = \dfrac{60}{s} \\ 50(10^{-4})s\,L\{i_2(t)\} - 50(10^{-4})i_2(0) + L\{i_2(t)\} - L\{i_1(t)\} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} s\,L\{i_1(t)\} + 50L\{i_2(t)\} = \dfrac{60}{s} \\ -200\,L\{i_1(t)\} + (s+200)L\{i_2(t)\} = 0 \end{cases}$$

$$L\{i_1(t)\} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{60}{s} & 50 \\ 0 & s+200 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s & 50 \\ -200 & s+200 \end{vmatrix}} = \frac{60s}{s(s+100)^2}$$; mediante fracciones parciales se tiene

$$L\{i_1(t)\} = \frac{6}{5s} - \frac{6}{5(s+100)} - \frac{60}{(s+100)^2}$$

$$i_1(t) = L^{-1}\{\frac{6}{5s} - \frac{6}{5(s+100)} - \frac{60}{(s+100)^2}\} = \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-100t} - 60te^{-100t}$$

$$L\{i_2(t)\} = \frac{\begin{vmatrix} s & \frac{60}{s} \\ -200 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s & 50 \\ -200 & s+200 \end{vmatrix}} = \frac{12000}{s(s+100)^2}$$; mediante fracciones parciales se tiene:

$$L\{i_2(t)\}=\frac{6}{5s}-\frac{6}{5(s+100)}-\frac{120}{(s+100)^2}$$

$$i_2(t)=L^{-1}\{\frac{6}{5s}-\frac{6}{5(s+100)}-\frac{120}{(s+100)^2}\}=\frac{6}{5}-\frac{6}{5}e^{-100t}-120t\,e^{-100t}$$

mediante fracciones parciales se tiene

$$i_1(t)=\frac{6}{5}-\frac{6}{5}e^{-100t}-60t\,e^{-100t} \quad ; \quad i_2(t)=\frac{6}{5}-\frac{6}{5}e^{-100t}-120t\,e^{-100t}$$

13.7. EJERCICIOS DESARROLLADOS.-

1. Demostrar que la ecuación subsidiaria de la ecuación diferencial $y''+ay'+by=g(t)$, tiene la Solución $y(s)=\dfrac{(s+a)y(0)+y'(0)}{s^2+as+b}+\dfrac{R(s)}{s^2+as+b}$

Solución

Tomando la Transformada de Laplace a la ecuación diferencial

$$L\{y''(t)+ay'(t)+by(t)\}=L\{g(t)\} \;\Rightarrow\; s^2y(s)-s\,y(0)-y'(0)+a\,s\,y(s)+b\,y(s)=R(s)$$

$$(s^2+as+b)y(s)=(s+a)y(0)+y'(0)+R(s) \quad \therefore \quad y(s)=\frac{(s+a)y(0)+y'(0)}{s^2+as+b}+\frac{R(s)}{s^2+as+b}$$

2. Resolver la ecuación diferencial: $y''+4y=9t$, $y(0)=0$, $y'(0)=7$

Solución

Tomando la Transformada de Laplace a la ecuación diferencial

$L\{y''+4y\}=L\{9t\}$, de donde $s^2L\{y\}-s\,y(0)-y'(0)+4L\{y\}=\dfrac{9}{s^2}$

$$(s^2+4)L\{y\}=\frac{9}{s^2}+7=\frac{7s^2+9}{s^2} \;\Rightarrow\; L\{y\}=\frac{7s^2+9}{s^2(s^2+4)}=\frac{9}{4s^2}+\frac{19}{4}(\frac{1}{s^2+4})$$

$$y=L^{-1}\{\frac{9}{4s^2}+\frac{19}{4}(\frac{1}{s^2+4})\} \qquad \therefore \quad y=\frac{9t}{4}+\frac{19}{8}\operatorname{sen}2t$$

(3) Resolver la ecuación Diferencial $y''-3y'+2y = 4t+12e^{-t}$, $y(0)=6$, $y'(0)=-1$

Solución

Tomando la Transformada de Laplace se tiene. $L\{y''-3y'+2y\} = L\{4t+12e^{-t}\}$

$$s^2L\{y\}-s\,y(0)-3s\,L\{y\}+3y(0)+2L\{y\}=\frac{4}{s^2}+\frac{12}{s+1}$$

$$(s^2-3s+2)L\{y\}-6s+1+18=\frac{4}{s^2}+\frac{12}{s+1}$$

$$(s^2-3s+2)L\{y\}=6s-19+\frac{4}{s^2}+\frac{12}{s+1}=\frac{6s^4-13s^3-7s^2+4s+4}{s^2(s+1)}$$

$$L\{y\}=\frac{6s^4-13s^3-7s^2+4s+4}{s^2(s+1)(s^2-3s+2)}=\frac{3}{s}+\frac{2}{s^2}+\frac{2}{s+1}-\frac{2}{s-2}+\frac{3}{s-1}$$

$$y=L\{\frac{3}{s}+\frac{2}{s^2}+\frac{2}{s+1}-\frac{2}{s-2}+\frac{3}{s-1}\}=3+2t+2e^{-t}-2e^{2t}+3e^{t}$$

(4) Resolver la ecuación diferencial $y''-4y'+5y=125t^2$, $y(0)=y'(0)=0$

Solución

Tomando la Transformada de Laplace se tiene. $L\{y''-4y'+5y\}=L\{125t^2\}$, de donde

$$s^2L\{y\}-s\,y(0)-y'(0)-4s\,L\{y\}+4y(0)+5L\{y\}=\frac{250}{s^3}$$

$(s^2-4s+5)L\{y\}=\dfrac{250}{s^3}$, despejando L{y} se tiene

$$L\{y\}=\frac{250}{s^3(s^2-4s+5)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{s^3}+\frac{Ds+E}{s^2-4s+5}$$

$$L\{y\}=250[\frac{11}{125s}+\frac{4}{25s^2}+\frac{1}{5s^3}-\frac{1}{125}(\frac{11s-24}{s^2-4s+5})]$$

$$y(t) = 250L^{-1}\{\frac{11}{125s} + \frac{4}{25s^2} + \frac{1}{5s^3} - \frac{1}{125}(\frac{11s-24}{s^2-4s+5})\}$$

$$= 250(\frac{11}{125} + \frac{4t}{25} + \frac{t^2}{10} - \frac{11}{125}e^{2t}\cos t + \frac{2}{125}e^{2t}\operatorname{sen} t)$$

$$\therefore\ y(t) = 22 + 40t + 25t^2 - 22e^{2t}\cos t + 4e^{2t}\operatorname{sen} t)$$

5 Resolver la ecuación diferencial dada $y''+9y = 18t$, $y(0) = 0$, $y(\frac{\pi}{2}) = 0$

Solución

Tomando la Transformada de Laplace se tiene: $L\{y''+9y\} = L\{18t\}$, de donde se tiene: $s^2L\{y\} - sy\{0\} - y'(0) + 9L\{y\} = L\{18t\}$

$$(s^2+9)L\{y\} = \frac{18}{s^2} + y'(0) = \frac{s^2y'(0)+18}{s^2}$$

$$L\{y\} = \frac{s^2\,y'(0)+18}{s^2(s^2+9)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Cs+D}{s^2+9} \qquad \textbf{... (1)}$$

$$\frac{s^2\,y'(0)+18}{s^2(s^2+9)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Cs+D}{s^2+9} = \frac{A(s^3+9s)+B(s^2+9)+Cs^3+Ds^2}{s^2(s^2+9)}$$

$s^2y'(0)+18 = (A+C)s^3 + (B+D)s^2 + 9As + 9B$ comparando coeficientes de s se tiene:

$$\begin{cases} A+C=0 \\ B+D=y'(0) \\ \\ 9A=0 \\ 9B=18 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} A=0 \\ B=2 \\ \\ C=0 \\ D=Y'(0)-2 \end{array} \qquad \textbf{... (2)}$$

Ahora reemplazando (2) en (1) se tiene: $L\{y\} = \frac{2}{s^2} + \frac{y'(0)-2}{s^2+9}$, tomando la inversa

$$y = L^{-1}\{\frac{2}{s^2} + \frac{y'(0)-2}{s^2+9}\} = 2t\,\frac{y'(0)-2}{3}\operatorname{sen} 3t$$

como $\quad y(\frac{\pi}{2}) = 0 \Rightarrow \pi + \frac{y'(0)-2}{3}\text{sen}\frac{3\pi}{2} = 0 \Rightarrow \frac{y'(0)-2}{3} = \pi$

$\therefore y(t) = 2t + \pi \text{ sen } 3t$

(6) Resolver la ecuación diferencial dada: $y''(t) - 4y'(t) + 3y(t) = F(t)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

Solución

Tomando la Transformada de Laplace se tiene: $L\{y''(t) - 4y'(t) + 3y(t)\} = L\{F(t)\}$,de donde: $s^2 L\{y(t)\} - sy(0) - y'(0) - 4s\, L\{y(t)\} + 4y(0) + 3L\{y(t)\} = L\{F(t)\}$

$(s^2 - 4s + 3)\ L\{y(t)\} = s - 4 + L\{F(t)\} \Rightarrow L\{y(t)\} = \frac{s-4+L\{F(t)\}}{s^2+4s+3}$, tomando inversa

$$y(t) L^{-1}\{\frac{s-4+L\{F(t)\}}{(s-3)(s-1)}\} = L^{-1}\{\frac{s-4}{(s-3)(s-1)}\} + L^{-1}\{\frac{L\{F(t)\}}{(s-3)(s-1)}\}$$

$$= \frac{3}{2}L^{-1}\{\frac{1}{s-1}\} - \frac{1}{2}L^{-1}\{\frac{1}{s-3}\} + L^{-1}\{F(t)\} * L^{-1}\{\frac{1}{(s-3)(s-1)}\}$$

$$y(t) = \frac{3}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{3t} + F(t) * (\frac{e^{3t}}{2} - \frac{e^t}{2}) = \frac{3}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{3t} + \frac{1}{2}\int_0^t (e^{3u} - e^u) F(t-u)du$$

(7) Resolver la ecuación diferencial dada $tx''(t) - (4t+1)x'(t) + 2(2t+1)x(t) = 0$, $x(0) = 0$

Solución

Tomando la Transformada de Laplace en la ecuación dada

$$L\{t\, x''(t) - (4t+1)\, x'(t) + 2(2t+1)\, x(t)\} = 0$$

$$-\frac{d}{ds}L\{x''(t)\} + 4\frac{d}{ds}L\{x'(t)\} - L\{x'(t)\}4\frac{d}{ds}L\{x(t)\} + 2L\{x(t)\} = 0$$

$$-\frac{d}{ds}(s^2 L\{x'(t)\} - sx(0) - x'(0)) + 4\frac{d}{ds}(s\, L\{x(t)\} - x(0)) - sL\{x(t)\} + x(0)$$

$$-4\frac{d}{ds}L\{x(t)\} + 2L\{x(t)\} = 0$$

$$-2sL\{x(t)\} - s^2 \frac{d}{ds} L\{x(t)\} + x(0) + 4L\{x(t)\} + 4s\frac{d}{ds} L\{x(t)\} - sL\{x(t)\}$$

$$+x(0) - 4\frac{d}{ds} L\{x(t)\} + 2L\{x(t)\} = 0$$

$$-(s^2 - 4s + 4)\frac{d}{ds} L\{x(t)\} + (3s-6)\, L\{x(t)\} = 0$$

$$(s-2)^2 \frac{d}{ds} L\{x(t)\} + 3(s-2)\, L\{x(t)\} = 0$$

$$\frac{\frac{d}{ds}L\{x(t)\}}{L\{x(t)\}} + \frac{3}{s-2} = 0 \text{ , integrando } \int \frac{\frac{d}{ds}L\{x(t)\}}{L\{x(t)\}} ds + \int \frac{3ds}{s-2} = \ln k$$

$$\ln(L\{x(t)\}) + \ln(s-2)^3 = \ln k \quad \Rightarrow \quad (s-2)^3 L\{x(t)\} = k \quad \Rightarrow \quad L\{x(t)\} = \frac{k}{(s-2)^3}$$

$x(t) = k\, L^{-1}\{\frac{1}{(s-2)^3}\} = \frac{kt^2 e^{2t}}{2}$ $\quad \therefore \exists\, x(t)$, $\forall\, k \neq 0$, en particular si k=1, se tiene la solución $x(t) = \frac{t^2}{2} e^{2t}$

8 Resolver la ecuación diferencial $\quad y''(t) + y(t) = J_0(t)$, $\; y(0) = y'(0) = 0$

Solución

Tomando la Transformada de Laplace se tiene: $\; L\{y''(t) + y(t)\} = L\{J_0(t)\}$,de donde

$$s^2 L\{y(t)\} - sy(0) - y'(0) + L\{y(t)\} = L\{J_0(t)\}$$

$(s^2 + 1)\; L\{y(t)\} = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$, despejando $\; L\{x(t)\}$

$L\{x(t)\} = \frac{1}{(s^2+1)^{3/2}}$, tomando inversa se tiene: $\; y(t) = L^{-1}\{\frac{1}{(s^2+1)^{3/2}}\}$, de acuerdo al ejercicio (20) de la transformada inversa se tiene: $\; y(t) = L^{-1}\{\frac{1}{(s^2+1)^{3/2}}\} = tJ_1(t)$

$$\therefore\; y(t) = tJ_1(t)$$

(9) Resolver la ecuación diferencial dada por: $y''(t)+ty'(t)-y(t)=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$

Solución

Tomando la Transformada de Laplace se tiene: $L\{y''(t)+ty'(t)-y(t)\}=0$, de donde:

$$s^2L\{y(t)\}-sy(0)-y'(0)-\frac{d}{ds}L\{y'(t)\}-L\{y(t)\}=0$$

$$s^2L\{y(t)\}-1-\frac{d}{ds}(sL\{y(t)-y(0)\}-L\{y(t)\}=0$$

$$s^2L\{y(t)\}-1-L\{y(t)\}-s\frac{d}{ds}L\{y(t)\}-L\{y(t)\}=0 \Rightarrow -s\frac{d}{ds}L\{y(t)\}+(s^2-2)L\{y(t)\}=1$$

$$\frac{d}{ds}L\{y(t)\}-\frac{s^2-2}{s}L\{y(t)\}=-\frac{1}{s}$$, ecuación lineal

$$L\{y(t)\}=e^{-\int -\frac{s^2-2}{s}ds}[\int e^{\int -\frac{s^2-2}{s}ds}(-\frac{ds}{s})+c]=e^{\frac{s^2}{2}-2\ln s}[-\int e^{-\frac{s^2}{2}+2\ln s}\frac{ds}{s}+c]$$

$$=\frac{e^{\frac{s^2}{2}}}{s^2}[-\int e^{-\frac{s^2}{2}}sds+c]=\frac{e^{\frac{s^2}{2}}}{s^2}[e^{-\frac{s^2}{2}}+c]=\frac{1}{s^2}+c.\frac{e^{\frac{s^2}{2}}}{s^2}$$

Por el teorema del valor inicial se tiene:

$$0=y(0)=\lim_{t\to 0}y(t)=\lim_{s\to\infty}sy(s)=\lim_{s\to\infty}(\frac{1}{s}+c.\frac{e^{\frac{s^2}{2}}}{s})=0$$

luego $\lim\limits_{s\to\infty}\frac{1}{s}+c.\frac{e^{\frac{s^2}{2}}}{s}$ $\Rightarrow$ c = 0, entonces $L\{y(t)\}=\frac{1}{s^2}$, tomando la inversa se tiene:

$L\{y(t)\}=\frac{1}{s^2}$ de donde $y(t)=L^{-1}\{\frac{1}{s^2}\}=t$ entonces $\therefore y(t)=t$

(10) Resolver la ecuación diferencial dada $ty''(t)+(1-2t)y'(t)-2y(t)=0$, y(0)=1, $y'(0)=2$

Solución

Tomando la Transformada de Laplace en la ecuación dada

$L\{t\,y''(t)+(1-2t)y'(t)-2y(t)\}=0$, de donde :

$$-\frac{d}{ds}L\{y''(t)\}+L\{y'(t)\}+2\frac{d}{ds}L\{y'(t)\}-2L\{y(t)\}=0$$

$$-\frac{d}{ds}(s^2L\{y(t)\}-sy(0)-y'(0)+sL\{y(t)\}-y(0)+2\frac{d}{ds}(sL\{y(t)\}-y(0))-2L\{y(t)\}=0$$

$$-2sL\{y(t)\}-s^2\frac{d}{ds}L\{y(t)\}+1+sL\{y(t)\}-1+2L\{y(t)\}+2s\frac{d}{ds}L\{y(t)\}-2L\{y(t)\}=0$$

$$-(s^2-2s)\frac{d}{ds}L\{y(t)\}-sL\{y(t)\}=0$$

$$\frac{\frac{d}{ds}L\{y(t)\}}{L\{y(t)\}}+\frac{s}{s^2-2s}=0\text{, integrando, } \int\frac{\frac{d}{ds}L\{y(t)\}}{L\{y(t)\}}+ds+\int\frac{ds}{s-2}=\ln k$$

$\ln(L\{y(t)\})+\ln(s-2)=\ln k \;\Rightarrow\; \ln(L\{y(t)\})=\ln(\frac{k}{s-2})$, de donde: $\ln L\{y(t)\}=\frac{k}{s-2}$, aplicando el teorema del valor inicial se tiene:

$1=y(0)=\lim\limits_{t\to 0}y(t)=\lim\limits_{s\to\infty}sy(s)=\lim\limits_{s\to\infty}\frac{ks}{s-2}=k$ entonces $L\{y(t)\}=\frac{1}{s-2}$, tomando inversa

$y(t)=L^{-1}\{\frac{1}{s-2}\}=e^{2t}$, por lo tanto, la solución es: $y(t)=e^{2t}$.

(11) Para que valores de A y B se tendrá que $F(0)=1$, $F'(0)=3$ siendo $H(s)=\frac{s^2+As-B}{s^3-s}$ y $F(t)=L^{-1}\{H(s)\}$.

Solución

Descomponiendo en fracciones H(s) se tiene:

$$H(s)=\frac{s^2+As-B}{s^3-s}=\frac{M}{s}+\frac{N}{s-1}+\frac{R}{s+1}$$, de donde:

$$M=\lim_{s\to\infty}\frac{s^2+As-B}{(s-1)(s+1)}=\frac{-B}{-1}=B\Rightarrow M=B$$

$$N=\lim_{s\to 1}\frac{s^2+As-B}{s(s+1)}=\frac{1+A-B}{2}\quad\Rightarrow\quad N=\frac{1+A-B}{2}$$

$$R=\lim_{s\to -1}\frac{s^2+As-B}{s(s-1)}=\frac{1-A-B}{2(s+1)}$$

Luego $H(s)=\frac{B}{s}+\frac{1+A-B}{2(s-1)}+\frac{1-A-B}{2(s+1)}$

$$F(t)=L^{-1}\{H(s)\}=L^{-1}\{\frac{B}{s}+\frac{1+A-B}{2(s-1)}+\frac{1-A-B}{2(s+1)}\}=B+\frac{1+A-b}{2}e^t+\frac{1-A-B}{2}e^{-t}$$

$$F(0)=1=B+\frac{1+A-B}{2}-\frac{1-A-B}{2}$$

$$F'(t)=\frac{1+A-B}{2}e^t-\frac{1-A-B}{2}e^{-t}\Rightarrow F'(0)=3=\frac{1+A-B}{2}-\frac{1-A-B}{2}\Rightarrow A=3$$

Además $1=B+2-\frac{B}{2}-1-\frac{B}{2}=1$ (verdadero), entonces $F(t)=B+\frac{4-B}{2}e^t-\frac{2+B}{2}e^{-t}$,

para A=3 y para cualquier valor de B.

(12) Resolver la ecuación diferencial dada por: $y''(t)+2y'(t)=f(t)$, $y(0)=y'(0)=0$,

donde: $f(t)=\begin{cases}1 & si\ \ \pi<t<2\pi\\ 0 & si\ \ 0<t<\pi\\ 0 & si\ \ t>2\pi\end{cases}$

Solución

La función F(t) es lo mismo expresarlo así $f(t)=\begin{cases}0 & si\ \ 0<t<\pi\\ 1 & si\ \ \pi<t<2\pi\\ 0 & si\ \ t>2\pi\end{cases}$

Ahora la función f(t) expresaremos en términos de la función escalón unidad.

$f(t)=\mu(t-\pi)-\mu(t-2\pi)$, de donde $L\{f(t)\}=\dfrac{e^{-\pi s}}{s}-\dfrac{e^{-2\pi s}}{s}$,

además $L\{y''(t)+2y'(t)\}=L\{f(t)\}$

$$s^2L\{y(t)\}-sy(0)-y'(0)+2sL\{y(t)\}-2y(0)=L\{f(t)\}$$

$(s^2+2s)L\{y(t)\}=\dfrac{e^{-\pi s}-e^{-2\pi s}}{s}$, de donde $L\{y(t)\}=\dfrac{e^{-\pi s}-e^{-2\pi s}}{s^2(s+2)}$, tomando la inversa

$$y(t)=L^{-1}\{\frac{e^{-\pi s}-e^{-2\pi s}}{s^2(s+2)}\}=[(t-\pi)+e^{-(t-\pi)}-1]\mu(t-\pi)-[(t-2\pi)+e^{-(t-2\pi)}]\mu(t-2\pi)$$

$$y(t)=[t-\pi-1+e^{-(t-\pi)}]\mu(t-\pi)-[t-2\pi-1+e^{-(t-2\pi)}]\mu(t-2\pi)$$

Nota: $L^{-1}\{\dfrac{1}{s^2(s+2)}\}=t+e^{-t}-1$

13) Resolver la ecuación diferencial dada por: $\dfrac{d^2y}{dt^2}+4\dfrac{dy}{dt}+4y(t)=\begin{cases}0 & , t\le 2\\ e^{-(t-1)} & , t>2\end{cases}$, donde: $y(0)=1$, $y'(0)=-1$

Solución

Encontraremos la solución para $t\le 2$, $L\{\dfrac{d^2y}{dt^2}+4\dfrac{dy}{dt}+4y(t)\}=0$, de donde:

$$s^2L\{y(t)\}-sy(0)-y'(0)+4sL\{y(t)\}-4y(0)+4L\{y(t)\}=0$$

$(s^2+4s+4)L\{y(t)\}=s+3$, despejando $L\{y(t)\}$

$L\{y(t)\}=\dfrac{s+3}{(s+2)^2}$, ahora tomando la inversa $y(t)=L^{-1}\{\dfrac{s+3}{(s+2)^2}\}=te^{-2t}+e^{-2t}$

Ahora veremos la solución para $t>2$

$$L\{\frac{d^2y}{dt^2}+4\frac{dy}{dt}+4y(t)\}=L\{e^{-(t-2)}\} \Rightarrow (s+2)^2L\{y(t)\}-(s+3)=\frac{e^2}{s+1}$$

$L\{y(t)\}=\dfrac{s+3}{(s+2)^2}+\dfrac{e^2}{(s+2)^2(s+1)}$, tomando la inversa

$$y(t)=L^{-1}\{\frac{s+3}{(s+2)^2}+\frac{e^2}{(s+2)(s+1)}\}=e^{-2t}+te^{-2t}+e^2(e^{-t}-e^{-2t}-te^{-2t})$$

Luego la solución de la ecuación diferencial es:

$$y(t)=\begin{cases} te^{-2t}+e^{-2t} & , \ para \quad t\leq 2 \\ (t+1)e^{-2t}+e^{-(t-2)}-(t-1)e^{-2(t-1)} & , \ para \quad t>2 \end{cases}$$

14 Resolver la ecuación diferencial dado por

$$t\,x''(t)+x'(t)-a^2tx(t)=0 \ , \ x(0)=k \ , \ x'(0)=0 \ , \ a\neq 0$$

Solución

Tomando la Transformada de Laplace

$$L\{tx''(t)+x'(t)-a^2tx(t)\}=0=\frac{d}{ds}L\{x''(t)\}+L\{x'(t)\}+a^2\frac{d}{ds}L\{x(t)\}=0$$

$$-\frac{d}{ds}(s^2L\{x(t)\}-sx(0)-x'(0)+sL\{x(t)\}-x(0)+a^2\frac{d}{ds}L\{x(t)\}=0$$

$$-2sL\{x(t)\}-s^2\frac{d}{ds}L\{x(t)\}+x(0)+sL\{x(t)\}-x(0)+a^2\frac{d}{ds}L\{x(t)\}=0$$

$$-(s^2-a^2)\frac{d}{ds}L\{x(t)\}-sL\{x(t)\}=0$$

$\dfrac{\frac{d}{ds}L\{x(t)\}}{L\{x(t)\}}+\dfrac{s}{s^2-a^2}=0$, integrando $\ln(L\{x(t)\}+\frac{1}{2}\ln(s^2-a^2)=\ln c$

$\ln\sqrt{s^2-a^2}\,L\{x(t)\}=\ln c$ entonces $L\{x(t)\}=\dfrac{c}{\sqrt{s^2-a^2}}$

Aplicando teorema del valor inicial

$$\lim_{s\to\infty}\frac{sc}{\sqrt{s^2-a^2}}=\lim_{t\to 0}x(t)=x(0)=k \Rightarrow \lim_{s\to\infty}\frac{c}{\sqrt{1-\frac{a^2}{s^2}}}=k\Rightarrow c=k$$

$$L\{x(t)\}=\frac{k}{\sqrt{s^2-a^2}}=x(t)=kL^{-1}\{\frac{1}{\sqrt{s^2-a^2}}\} \Rightarrow \quad x(t)=k\,I_0(a.t)$$

15 Resolver la ecuación diferencial dada por: $y''(t)-4y'(t)+3y(t)=F(t)$,y(0)=1, $y'(0)=0$.

Solución

$$L\{y''(t)-4y'(t)+3y(t)\}=L\{F(t)\}$$

$$s^2L\{y(t)\}-sy(0)-y'(0)-4sL\{y(t)\}+4y(0)+3L\{y(t)\}=L\{F(t)\}$$

$(s^2-4s+3)L\{y(t)\}=s-4+L\{F(t)\}$ de donde:

$$L\{y(t)\}=\frac{s-4+L\{F(t)\}}{s^2-4s+3} \Rightarrow y(t)=L^{-1}\{\frac{s-4+L\{F(t)\}}{s^2-4s+3}\}$$

$$y(t)=L^{-1}\{\frac{s-4}{s^2-4s+3}\}+L^{-1}\{L\{F(t)\}\}*L^{-1}\{\frac{1}{(s-3)(s-1)}\}$$

$$y(t)=\frac{1}{2}L^{-1}\{\frac{1}{s-3}\}+\frac{3}{2}L^{-1}\{\frac{1}{s-1}\}+F(t)*(\frac{e^{3t}}{2}-\frac{e^t}{2})=\frac{3}{2}e^t-\frac{1}{2}e^{3t}+F(t)*\frac{1}{2}(e^{3t}-e^t)$$

$$y(t)=\frac{3e^t}{2}-\frac{e^{3t}}{2}+\frac{1}{2}\int_0^t(e^{3u}-e^u)F(t-u)du$$

16 Resolver la ecuación diferencial dada por: $y''(t)+4y(t)=F(t)$; $y(0)=0$, $y'(0)=1$

$$F(t)=\begin{cases}1 \ , \ 0<t<1\\ 0 \ , \ t>1\end{cases}$$

Solución

A la función F(t) expresaremos en términos de la función escalón unidad $F(t)=1-\mu(t-1)$

$$L\{y''(t)+4y(t)\}=L\{F(t)\}$$

$$s^2L\{y(t)\}-sy(0)-y'(0)+4L\{y(t)\}=L\{1-\mu(t-1)\}$$

$$(s^2+4)L\{y(t)\}=1+\frac{1}{s}-\frac{e^{-s}}{s}=\frac{1-e^{-s}+s}{s}$$

$$L\{y(t)\}=\frac{1-e^{-s}+s}{s(s^2+4)}\quad\Rightarrow\quad y(t)=L^{-1}\{\frac{1-e^{-s}+s}{s(s^2+4)}\}$$

$$y(t)=L^{-1}\{\frac{1}{4s}-\frac{1}{4}.\frac{s-4}{(s^2+4)}\}-L^{-1}\{\frac{e^{-s}}{s}\}*L^{-1}\{\frac{1}{s^2+4}\}$$

$$y(t)=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos 2t+\frac{1}{2}\operatorname{sen}2t-\mu(t-1)*\frac{1}{2}\operatorname{sen}2t \qquad \ldots\ \textbf{(1)}$$

$$\mu(t-1)*\frac{\operatorname{sen}2t}{2}=\frac{1}{2}\int_0^t \operatorname{sen}2(t-u).\mu(u-1)du$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^t \operatorname{sen}2(t-u)du=\frac{1}{2}\int_{t-1}^0 \operatorname{sen}2zdz\ =\frac{1}{4}\cos 2z\Big/_{t-1}^{0}=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos 2(t-1)$$

Luego $y(t)=\dfrac{\operatorname{sen}2t}{2}+\dfrac{1}{4}[\cos 2(t-1)-\cos 2t]$ para t>1

17 Resolver para $x(t);F(t)=\displaystyle\int_0^t (t-u)^{-p}x'(u)du\ ,\ \ 0<p<1$

Solución

$$F(t)=\int_0^t (t-u)^{-p}x'(u)du=t^{-p}*x'(t)\ ,\ 0<p<1$$

Tomando la Transformada de Laplace $L\{F(t)\}=L\{t^{-p}*x'(t)\}=L\{t^{-p}\}L\{x'(t)\}$

si $L\{F(t)\}=f(s)$, entonces se tiene:

$$f(s)=L\{t^{-p}\}L\{x'(t)\}=\frac{\Gamma(1-p)}{s^{1-p}}(s\,x(s)-x(0))f(s)+\frac{\Gamma(1-p)}{s^{1-p}}x(0)=\frac{\Gamma(1-p)\,s\,x(s)}{s^{1-p}}$$

$$x(s)=\frac{s^{1-p}f(s)}{s\Gamma(1-p)}+\frac{x(0)}{s}=\frac{f(s)}{s^{p}\Gamma(1-p)}+\frac{x(0)}{s}$$

$$x(t)=L^{-1}\{\frac{f(s)}{s^{p}\Gamma(1-p)}+\frac{x(0)}{s}\}$$

$$x(t)=\frac{1}{\Gamma(1-p)}L^{-1}\{\frac{f(s)}{s^{p}}\}+x(0)=\frac{1}{\Gamma(1-p)}L^{-1}\{f(s)\}*L^{-1}\{\frac{1}{s^{p}}\}+x(0)$$

$$=\frac{1}{\Gamma(1-p)}F(t)*\frac{t^{p-1}}{\Gamma(p)}+x(0)=\frac{\operatorname{sen} p\pi}{\pi}F(t)*t^{p-1}+x(0)$$

$$\therefore x(t)=\frac{\operatorname{sen} p\pi}{\pi}F(t)*t^{p-1}+x(0)$$

18 Resolver sistema de ecuaciones diferenciales $\begin{cases} x''(t)+y'(t)+3x(t)=15e^{-t} \\ y''(t)-4x'(t)+3y(t)=15\operatorname{sen} 2t \end{cases}$ con las condiciones $x(0)=35$, $x'(0)=-48$, $y(0)=27$, $y'(0)=-55$

Solución

Tomando la Transformada de Laplace a cada ecuación

$$\begin{cases} L\{x''(t)+y'(t)+3x(t)\}=L\{15e^{-t}\} \\ L\{y''(t)-4x'(t)+3y(t)\}=L\{15\operatorname{sen} 2t\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} s^{2}L\{x(t)\}-sx(0)-x'(0)+sL\{y(t)\}-y(0)+3L\{x(t)\}=15L\{e^{-t}\} \\ s^{2}L\{y(t)\}-sy(0)-y'(0)-4sL\{x(t)\}+4x(0)+3L\{y(t)\}=15L\{\operatorname{sen} 2t\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (s+3)L\{x(t)\}+sL\{y(t)\}=35s-21+\dfrac{15}{s+1} \\ -4sL\{x(t)\}+(s^{2}+3)L\{y(t)\}=27s-19s+\dfrac{30}{s^{2}+4} \end{cases}$$; Aplicando la regla de CRAMER

$$L\{y(t)\}=\frac{\begin{vmatrix} 35s-21+\dfrac{15}{s+1} & 5 \\ 27s-19s+\dfrac{30}{s^2+4} & s^2+3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s^2+3 & s \\ -4s & s^2+3 \end{vmatrix}}=\frac{30s}{s^2+1}-\frac{45}{s^2+9}+\frac{3}{s+1}+\frac{2s}{s^2+4}$$

$$x(t)=L^{-1}\{\frac{30s}{s^2+1}-\frac{45}{s^2+9}+\frac{3}{s+1}+\frac{2s}{s^2+4}\}$$

$$\therefore\ x(t)=3\cos t-15\,\text{sen}\,3t+3e^{-t}+2\cos 2t$$

$$L\{y(t)\}=\frac{\begin{vmatrix} s^2+3 & 35s-21+\dfrac{15}{s+1} \\ -4s & 27s-19s+\dfrac{30}{s^2+4} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s^2+3 & s \\ -4s & s^2+3 \end{vmatrix}}=\frac{30s}{s^2+1}-\frac{60}{s^2+1}+\frac{3}{s+1}+\frac{2}{s^2+4}$$

$$y(t)=L^{-1}\{\frac{30s}{s^2+1}-\frac{60}{s^2+1}+\frac{3}{s+1}+\frac{2}{s^2+4}\}$$

$$\therefore\ y(t)=30\cos t-60\,\text{sen}\,t+3e^{-t}+\text{sen}\,2t$$

19 Resolver el sistema de ecuación diferenciales $\begin{cases} 2x'(t)+2x(t)+y'(t)-y(t)=3t \\ x'(t)+\ x(t)+y'(t)+y(t)=1 \end{cases}$, con las condiciones x(0)=1 , y(0)=3

Solución

Aplicando la Transformada de Laplace a cada ecuación

$$\begin{cases} L\{2x'(t)+2x(t)+y'(t)-y(t)\}=L\{3t\} \\ L\{x'(t)+x(t)+y'(t)+y(t)\}=L\{1\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2sL\{x(t)\}-2x(0)+2L\{x(t)\}+sL\{y(t)\}-y(0)-L\{y(t)\}=\dfrac{3}{s^2} \\ sL\{x(t)\}-x(0)+L\{x(t)\}-y(0)+L\{y(t)\}=\dfrac{1}{s} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(s+1)L\{x(t)\}+(s-1)L\{y(t)\}=\dfrac{3}{s^2}+5 \\ (s+1)L\{x(t)\}+(s+1)L\{y(t)\}=\dfrac{1}{s}+4 \end{cases}$$

$$L\{x(t)\}=\frac{\begin{vmatrix} \frac{3}{s^2}+5 & s-1 \\ \frac{1}{s}+4 & s+1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2(s+1) & s-1 \\ s+1 & s+1 \end{vmatrix}}=\frac{s^3+8s^2+4s+3}{s^2(s^2+4s+3)}=\frac{1}{s^2}-\frac{2}{s+3}+\frac{3}{s+1}$$

$$x(t)=L^{-1}\{\frac{1}{s^2}-\frac{2}{s+3}+\frac{3}{s+1}\}=t-2e^{-3t}+3e^{-t} \qquad \therefore \quad x(t)=t-2e^{-3t}+3e^{-t}$$

$$L\{x(t)\}=\frac{\begin{vmatrix} 2(s+1) & \frac{2}{s^2}+5 \\ s+1 & \frac{1}{s}+4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2(s+1) & s-1 \\ s+1 & s+1 \end{vmatrix}}=\frac{3s^3+5s^2-s-3}{2s^2(s^2+4s+3)}=\frac{3s^2+2s-3}{s^2(s+3)}$$

$$y(t)=L^{-1}\{\frac{3s^2+2s-3}{s^2(s+3)}\}=L^{-1}\{\frac{1}{s}-\frac{1}{s^2}+\frac{2}{s+3}\}=1-t+2e^{-3t}$$

$$\therefore \quad y(t)=1-t+2e^{-3t}$$

20 Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales. $\begin{cases} x''(t)-x(t)+5y'(t)=t \\ y''(t)-4y(t)-2x'(t)=-2 \end{cases}$, con las condiciones iniciales siguientes. $x(0)=0$, $x'(0)=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$

Solución

Aplicando la Transformada de Laplace a cada ecuación

$$\begin{cases} L\{x''(t)-x(t)+5y'(t)\}=L\{t\} \\ L\{y''(t)-4y(t)-2x'(t)\}=L\{-2\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} s^2 L\{x(t)\} - s\,x(0) - x'(0) - L\{x(t)\} + 5sL\{y(t)\} - 5y(0) = \dfrac{1}{s^2} \\ s^2 L\{y(t)\} - s\,x(0) - x'(0) - 4L\{y(t)\} - 2sL\{x(t)\} + 2x(0) = -\dfrac{2}{s} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (s^2+1)L\{x(t)\} - 5sL\{y(t)\} = \dfrac{1}{s^2} \\ -2sL\{x(t)\} + (s^2-4)L\{y(t)\} = -\dfrac{2}{s} \end{cases}$$, aplicando el teorema de CRAMER

$$L\{x(t)\} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{s^2} & 5s \\ -\frac{2}{s} & s^2-4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s^2+1 & 5s \\ -2s & s^2-4 \end{vmatrix}} = \frac{11s^2-4}{s^2(s^2+1)(s^2+4)} = -\frac{1}{s^2} + \frac{5}{s^2+1} - \frac{4}{s^2+4}$$

$$x(t) = L^{-1}\{-\frac{1}{s^2} + \frac{5}{s^2+1} - \frac{4}{s^2+4}\} = \{t + 5\,\text{sen}\,t - 2\,\text{sen}\,2t\}$$

$$\therefore \quad x(t) = -t + 5\,\text{sen}\,t - 2\,\text{sen}\,2t$$

$$L\{y(t)\} = \frac{\begin{vmatrix} s^2+1 & \frac{1}{s^2} \\ -2s & -\frac{2}{s} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s^2+1 & 5s \\ -2s & s^2-4 \end{vmatrix}} = \frac{-2s^2+4}{s(s^2+1)(s^2+4)} = \frac{1}{s} - \frac{2s}{s^2+1} + \frac{s}{s^2+4}$$

$$y(t) = L^{-1}\{\frac{1}{s} - \frac{2s}{s^2+1} + \frac{s}{s^2+4}\} = t - 2\cos t + \cos 2t \qquad \therefore \quad y(t) = t - 2\cos t + \cos 2t$$

(21) Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x''(t) + 2x(t) - y'(t) = 2t + 5 \\ x'(t) - x(t) + y'(t) + y(t) = -2t - 1 \end{cases}$$, con las condiciones iniciales x(0)=3, $x'(0) = 0$, y(0)=-3

Solución

Aplicando la Transformada de Laplace a cada ecuación.

$$\begin{cases} L\{x''(t)+2x(t)-y'(t)\} = L\{2t+5\} \\ L\{x'(t)-x(t)+y'(t)+y(t)\} = L\{-2t-1\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} s^2L\{x(t)\}-s\,x(0)-x'(0)+2L\{x(t)\}-sL\{y(t)\}+y(0) = L\{2t+5\} \\ sL\{x(t)\}-x(0)-L\{x(t)\}+sL\{y(t)\}-y(0)+L\{y(t)\} = L\{-2t-1\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (s^2+2)L\{x(t)\}-sL\{y(t)\} = \dfrac{2}{s^2}+\dfrac{5}{s}+3s+3 \\ (s+1)L\{x(t)\}+(s+1)L\{y(t)\} = -\dfrac{2}{s^2}-\dfrac{1}{s} \end{cases} \quad ; \text{ Aplicando la regla de CRAMER}$$

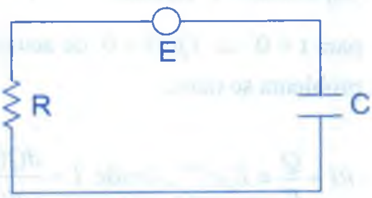
$$L\{x(t)\} = \frac{\begin{vmatrix} \dfrac{2}{s^2}+\dfrac{5}{s}+3s+3 & -s \\ -\dfrac{2}{s^2}-\dfrac{1}{s} & s+1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s^2+2 & -s \\ s-1 & s+1 \end{vmatrix}} = \frac{3s^4+6s^3+7s^2+5s+2}{s^2(s^3+2s^2+s+2)}$$

$$L\{x(t)\} = \frac{2}{s}+\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s+2}+\frac{1}{s^2+1}\ ,\ \text{tomando inversa } x(t) = L^{-1}\{\frac{2}{s}+\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s+2}+\frac{1}{s^2+1}\}$$

$$\therefore\ x(t) = 2+t+e^{-2t}+\operatorname{sen} t$$

igual modo se obtiene y(t) es decir. $\therefore\ y(t) = 1-t-3e^{-2t}+\cos t$

22 Se conectan en serie una resistencia de R ohmios y un condensador de C faradios con un generador de E voltios (ver figura) en t = 0 la carga del condensador es cero. Hallar la carga y la corriente en cualquier tiempo t > 0, si.



a) $E = E_0$ constante

b) Si $E = E_0 e^{-\alpha t}$

Solución

a) Dado del problema

circuito R - C   Capacidad = C faradios

Resistencia = R ohmios   Generador = E voltios

en t = 0, Q(0) = 0, de acuerdo a la segunda ley de KIRCHOFF y condición del problema se tiene: $RI+\frac{Q}{C}=E_0 \Rightarrow \frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{RC}=\frac{E_0}{R}$, ecuación lineal aplicando transformada de Laplace se tiene: $L\{\frac{dQ}{dt}+\frac{1}{RC}Q\}=L\{\frac{E_0}{R}\}$, de donde

$$s\,L\{Q(t)\}-Q(0)+\frac{1}{RC}L\{Q(t)\}=\frac{E_0}{RS}$$

$$(S+\frac{1}{RC})L\{Q(t)\}=\frac{E_0}{RS}\text{, despejando L\{Q(t)\}}$$

$$L\{Q(t)\}=\frac{E_0}{RS(S+\frac{1}{RC})}\text{, tomando transformada inversa.}$$

$$Q(t)=L^{-1}\{\frac{E_0}{RS(S+\frac{1}{RC})}\}=\frac{E_0}{R}L^{-1}\{\frac{1}{S(S+\frac{1}{RC})}\}$$

$$Q(t)=E_0C(1-e^{-t/RC})\ \text{ como }\ I=\frac{dQ(t)}{dt}=\frac{E_0}{R}e^{-t/RC} \qquad \therefore\quad I=\frac{E_0}{R}e^{-t/RC}$$

b) Datos del problema.

Circuito R - C   ,   Resistencia = R ohmios

Capacidad = C faradios   ,   Generador = E voltios

para t = 0 $\Rightarrow$ Q(0) = 0, de acuerdo a la segunda Ley de Kirchoff y condiciones del problema se tiene.

$$RI+\frac{Q}{C}=E_0e^{-\alpha t}\text{, donde } I=\frac{dQ(t)}{dt}$$

Luego $R\frac{dQ(t)}{dt}+\frac{Q(t)}{C}=E_0e^{-\alpha t}$, de donde

$\frac{dQ(t)}{dt}+\frac{1}{RC}Q(t)=\frac{E_0e^{-\alpha t}}{R}$, ecuación lineal aplicando transformada de Laplace se

tiene: $L\{\frac{dQ(t)}{dt}+\frac{1}{RC}Q(t)\}=L\{\frac{E_0e^{-\alpha t}}{R}\}$

$$s\,L\{Q(t)\}-Q(0)+\frac{1}{RC}L\{Q(t)\}=\frac{E_0}{R(s+\alpha)}$$

$(s+\frac{1}{RC})L\{Q(t)\}=\frac{E_0}{R(s+\alpha)}$, despejando L{Q(t)}

$L\{Q(t)\}=\frac{E_0}{R(S+\frac{1}{RC})(s+\alpha)}$, tomando inversa

$$Q(t)=L^{-1}\{\frac{E_0}{R(S+\frac{1}{RC})(s+\alpha)}\}=\frac{E_0}{R}L^{-1}\{\frac{1}{(S+\frac{1}{RC})(s+\alpha)}\}$$

$$Q(t)=\frac{CE_0}{1-RC}L^{-1}\{\frac{1}{s+\alpha}-\frac{1}{S+\frac{1}{RC}}\}=\frac{CE_0}{1-RC}(e^{-\alpha t}-e^{-t/RC})$$

$$I(t)=\frac{dQ(t)}{dt}=\frac{E_0C}{1-RC}(\frac{e^{-t/RC}}{RC}-\alpha e^{-\alpha t})$$

23) Desarrollar el problema 22) para el caso en que $E=E_0$ sen ωt y la carga del condensador se a Q_0.

Solución

Datos del problema: $Q(0)=Q_0$, $E=E_0$ sen ωt, Resistencia = R ohmios

Capacidad = C faradios, de la condición del problema se tiene.

$\frac{dQ(t)}{dt}+\frac{1}{RC}Q(t)=\frac{E_0\text{ sen }\omega t}{R}$, aplicando transformada de Laplace se tiene.

$$L\{\frac{dQ(t)}{dt}+\frac{1}{RC}Q(t)\}=L\{\frac{E_0 \operatorname{sen}\omega t}{R}\}$$

$$sL\{Q(t)\}-Q(0)+\frac{1}{RC}L\{Q(t)\}=\frac{E_0}{R}.\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$(S+\frac{1}{RC})L\{Q(t)\}=Q_0+\frac{E_0\omega}{s^2+\omega^2}$$, despejando L{Q(t)}

$$L\{Q(t)\}=\frac{Q_0}{S+\frac{1}{RC}}+\frac{E_0\omega}{(S+\frac{1}{RC})(s^2+\omega^2)}$$, tomando inversa

$$Q(t)=L^{-1}\{\frac{Q_0}{S+\frac{1}{RC}}+\frac{E_0\omega}{(S+\frac{1}{RC})(s^2+\omega^2)}\}$$, de donde

$$Q(t)=Q_0e^{-t/RC}+\frac{E_0}{R}[\frac{R^2C^2}{1+\omega^2R^2C^2}(\frac{\operatorname{sen}\omega t}{RC}-\omega\cos\omega t)+\frac{\omega R^2C^2e^{-t/RC}}{1+\omega^2R^2C^2}]$$

$$Q(t)=(Q_0+\frac{\omega E_0RC}{1+\omega^2R^2C^2})e^{-t/RC}-\frac{E_0}{R}(\frac{\omega R^2C^2\cos\omega t-RC\operatorname{sen}\omega t}{1+\omega^2R^2C^2})$$

(24) Un inductor de L henrys y un condensador de C faradios están conectados en serie con un condensador de E voltios. En t = 0, la carga del condensador y la corriente del circuito son nulos. Hallar la carga del condensador en cualquier tiempo t > 0.

a) Si $E=E_0$ constante **b)** $E=E_0e^{-\alpha t}$ α > 0

Solución

a) Datos por el problema

Inductancia : L Henrys

Capacidad : C faradios

Resistencia : R = 0 , $E=E_0$ de la segunda ley de Kirchoff se tiene:

$$L\frac{dI(t)}{dt}+\frac{1}{c}\int_0^t I(r)dr=V(t)\text{ , de donde }\frac{dI(t)}{dt}+\frac{1}{LC}\int_0^t I(r)dr=\frac{E_0}{L}$$

aplicando transformada de Laplace se tiene

$$L\{\frac{dI(t)}{dt}+\frac{1}{LC}\int_0^t I(r)dr\}=L\{\frac{E_0}{L}\}\ \Rightarrow\ s\,L\{I(t)\}-I(0)+\frac{1}{LC}\frac{L\{I(t)\}}{s}=\frac{E_0}{Ls}$$

$$(S+\frac{1}{LCS})L\{I(t)\}=\frac{E_0}{LS}\text{, despejando L\{I(t)\}}$$

$$L\{Q(t)\}=\frac{E_0}{L(S^2+\frac{1}{LC})}\text{ , tomando la inversa}$$

$$Q(t)=L^{-1}\{\frac{E_0}{L(S^2+\frac{1}{LC})}\}=\frac{E_0\sqrt{CL}}{L}\operatorname{sen}(\frac{t}{\sqrt{RL}})$$

$$\frac{dQ(t)}{dt}=I(t)=\frac{E_0\sqrt{CL}}{L}\operatorname{sen}(\frac{t}{\sqrt{RL}})\ \Rightarrow\ Q(t)=\frac{E_0\sqrt{CL}}{L}\int\operatorname{sen}(\frac{t}{\sqrt{RC}})dt$$

$$Q(t)=-E_0C.\cos(\frac{t}{\sqrt{RC}})+k\quad\text{para Q(0) = 0 entonces }0=-E_0C+k\ \Rightarrow\ k=E_0C$$

$$\therefore\ Q(t)=E_0C(1+\cos(\frac{t}{\sqrt{CL}}))$$

b) Datos del problema

Resistencia: R = 0 ; Inductancia : L Henrys

Capacidad : C faradios , $E=E_0e^{-\alpha t}$, α > 0, para t = 0, Q(0) = 0, I(0) = 0, por la segunda ley de Kirchoff se tiene: $L\frac{dI(t)}{dt}+\frac{1}{c}\int_0^t I(r)dr=E_0e^{-\alpha t}$

$$Q''(t)+\frac{1}{LC}Q(t)=\frac{E_0}{L}e^{-\alpha t}$$

aplicando transformada de Laplace $L\{Q''(t)+\frac{1}{LC}Q(t)\}=L\{\frac{E_0}{L}e^{-\alpha t}\}$, de donde

$$(s^2+\frac{1}{LC})L\{Q(t)\}=\frac{E_0}{L(s+\alpha)}$$, despejando L{Q(t)}

$$L\{Q(t)\}=\frac{E_0}{L(S+\alpha)(S^2+\frac{1}{LC})}$$, tomando inversa

$$Q(t)=\frac{E_0}{L}L^{-1}\{\frac{1}{(S+\alpha)(S^2+\frac{1}{LC})}\}=\frac{E_0}{L}L^{-1}\{\frac{A}{s+\alpha}+\frac{Bs+D}{s^2+\frac{1}{LC}}\}$$

de donde efectuando operaciones se tiene

$$Q(t)=\frac{E_0}{L(\alpha^2+\frac{1}{LC})}(e^{-\alpha t}-\cos(\frac{t}{\sqrt{LC}}))+\frac{\alpha E_0\sqrt{C/L}\,\text{sen}(t/\sqrt{LC})}{\alpha^2+\frac{1}{LC}}$$

25 Desarrollar el problema 24) si E(t) es $E_0\delta(t)$ donde δ(t) es la función Delta De Diroc.

Solución

De las condiciones del problema se tiene.

$$L\frac{dI(t)}{dt}+\frac{1}{c}\int_0^t I(r)dr=E$$, luego $$\frac{dI(t)}{dt}+\frac{1}{LC}\int_0^t I(r)dr=\frac{E_0\delta(t)}{L}$$

aplicando transformada de Laplace se tiene:

$$L\{\frac{dI(t)}{dt}+\frac{1}{LC}\int_0^t I(r)dr\}=L\{\frac{E_0\delta(t)}{L}\}\Rightarrow sL\{I(t)\}-I(0)+\frac{1}{LC}\frac{L\{I(t)\}}{s}=\frac{E_0}{L}$$

$$(s+\frac{1}{LCs})L\{I(t)\}=\frac{E_0}{L}$$, despejando L{I(t)}

$$L\{I(t)\}=\frac{E_0 s}{L(s^2+\frac{1}{LC})}$$, tomando inversa $$I(t)=\frac{E_0}{L}L^{-1}\{\frac{s}{s^2+\frac{1}{LC}}\}=\frac{E_0}{L}\cos(\frac{t}{\sqrt{LC}})$$

como $$\frac{dQ(t)}{dt}=I(t)=\frac{E_0}{L}\cos(\frac{t}{\sqrt{LC}})$$, integrando

$$Q(t)=\frac{E_0}{L}\sqrt{LC}\,\text{sen}(\frac{t}{\sqrt{LC}})+k \text{ , para Q(0) = 0 } \Rightarrow \text{ k = 0}$$

$$\therefore \quad Q(t)=E_0\sqrt{\frac{C}{L}}\,\text{sen}(\frac{t}{\sqrt{LC}})$$

26 Un inductor de 3 Henrys esta en serie con una resistencia de 3 ohmios y una f.e.m. de 150 voltios, suponiendo que es t=0, la corriente es cero, halle la corriente en cualquier tiempo t > 0.

Solución

Datos del problema. Inductancia : 3 henrys, Resistencia : 30 ohmios.

t = 0, I(0) = 0, f.e.m. : 150 voltios

$$L\frac{dI(t)}{dt}+RI(t)=E \text{ , de donde } \frac{dI(t)}{dt}+\frac{R}{L}I(t)=\frac{E}{L} \text{ , aplicando transformada}$$

$$L\{\frac{dI(t)}{dt}+\frac{R}{L}I(t)\}=L\{\frac{E}{L}\} \text{ , de donde } s\,L\{I(t)\}-I(0)+\frac{R}{L}L\{I(t)\}=\frac{E}{LS}$$

$$(s+\frac{R}{L})L\{I(t)\}=\frac{E}{LS} \text{ , despejando L\{I(t)\}}$$

$$L\{I(t)\}=\frac{E}{LS(s+\frac{R}{L})}=\frac{E}{L}(\frac{A}{s}+\frac{B}{s+\frac{R}{l}}) \text{ , tomando inversa}$$

$$I(t)=\frac{E}{L}L^{-1}\{(\frac{A}{s}+\frac{B}{s+\frac{R}{l}})\}=\frac{E}{R}(1-e^{-Rt/L})$$

como E = 150, R = 30, L = 3 se tiene $I(t)=5(1-e^{-10t})$

27) Resolver el problema 26) si la f.e.m. es 150 sen 20t

Solución

Datos del problema: f.e.m. = 150 sen 20t

Inductancia = 3 Henrys ; Resistencia = 30 ohmios

su ecuación correspondiente es: $L\frac{dI(t)}{dt}+RI(t)=E$, de donde

$\frac{dI(t)}{dt}+\frac{R}{L}I(t)=\frac{E}{L}$, aplicando transformada $L\{\frac{dI(t)}{dt}+\frac{R}{L}I(t)\}=L\{\frac{E}{L}\}$, entonces

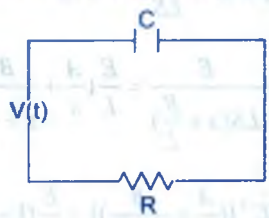
$s\,L\{I(t)\}-I(0)+\frac{R}{L}L\{I(t)\}=L\{\frac{150\operatorname{sen}20t}{L}\}$, despejando L{I(t)}

$L\{I(t)\}=\frac{1000}{(s+\frac{R}{L})(s^2+400)}$, tomando la inversa

$$I(t)=1000L^{-1}\{\frac{1}{(s+\frac{R}{L})(s^2+400)}\}=2e^{-10t}+2\operatorname{sen}20t-2\cos 20t$$

$\therefore\quad I(t)=2e^{-10t}+2\operatorname{sen}20t-2\cos 20t$

28) Hallar la corriente I(t) que fluye en el circuito de la figura mostrada, si se aplica una onda cuadrada con voltaje de altura V_0. Se supone que el circuito no esta perturbado antes de aplicar la onda cuadrada.



Solución

La ecuación del circuito es: $L.I'(t)+RI(t)+\frac{1}{C}\int_0^t I(r)dr=V(t)$

del circuito L = 0 y aplicamos la transformada

$$L\{RI(t)+\frac{1}{c}\int_0^t I(r)dr\}=L\{V(t)\} \Rightarrow RL\{I(t)\}+\frac{1}{CS}L\{I(t)\}=L\{V_0(U_a(t)-U_b(t)\}$$

$$(s+\frac{1}{RC})L\{I(t)\}=V_0(\frac{e^{-as}-e^{-bs}}{s}) \Rightarrow L\{I(t)\}=\frac{V_0(e^{-as}-e^{-bs})}{R(s+\frac{1}{RC})}$$, tomando la inversa

$$I(t)=\frac{V_0}{R}L^{-1}\{\frac{e^{-as}}{s+\frac{1}{RC}}-\frac{e^{-bs}}{s+\frac{1}{RC}}\}=\frac{V_0}{R}[e^{-\frac{t-a}{CR}}U_a(t)-e^{-\frac{t-b}{RC}}U_b(t)]$$

$$I(t)=\begin{cases} 0 & , \ 0<t<a \\ \frac{V_0}{R}e^{-\frac{t-a}{RC}} & , \ a<t<b \\ \frac{V_0}{R}[e^{-\frac{t-a}{RC}}-e^{-\frac{t-b}{RC}}] & , \ t>b \end{cases}$$

13.8. EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS.-

1 Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales.

a) $\frac{d^2x}{dt^2}+4\frac{dx}{dt}+4x=4e^{-2t}$, x(0) = -1, $x'(0)=4$ **Rpta.** $x(t)=e^{-2t}(2t^2+2t-1)$

b) $\frac{d^2x}{dt^2}+x=6\cos 2t$, x(0) = 3 , $x'(0)=1$ **Rpta.** x(t) = 5cost - sen t - 2 cos 2t

c) $y''(t)-y(t)=5\operatorname{sen} 2t$, y(0) = 0 , $y'(0)=1$ **Rpta.** y(t) = 3 senh x - sen 2t

d) $y''(t)-2y'(t)+2y(t)=2\cos 2t-4\operatorname{sen} 2t$, y(0) = 0 , $y'(0)=1$

Rpta. y(t) = - cos 2t + cos t - sen t

e) $y''(t)-t\,y'(t)+y(t)=1$, y(0) = 1, $y'(0)=2$ **Rpta.** y(t) = 1 + 2t

f) $t\,y''(t)+(-1-t)y'(t)+2y(t)=t-1$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$ **Rpta.** $y(t)=t$

g) $\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}-2y=18e^{-t}\operatorname{sen}3t$, $y(0)=0$, $y'(0)=3$

Rpta. $y=2e^{2t}-3e^{-t}-e^{-t}\operatorname{sen}2t+e^{-t}\cos 3t$

h) $\frac{d^3y}{dt^3}-\frac{d^2y}{dt^2}+4\frac{dy}{dt}-4y=-3e^{t}+4e^{2t}$, $y(0)=0$, $y'(0)=5$, $y''(0)=3$

Rpta. $y=-\frac{27}{50}\cos 2t+\frac{57}{25}\operatorname{sen}2t+\frac{3t\,e^{t}}{2}+\frac{e^{t}}{25}+\frac{e^{2t}}{2}$

(2) Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales.

a) $\frac{d^3y}{dt^3}+2\frac{d^2y}{dt^2}-11\frac{dy}{dt}-12y=4$, $y(0)=y'(0)=y''(0)=0$

Rpta. $y=\frac{e^{3t}}{21}-\frac{e^{-4t}}{21}+\frac{e^{-t}}{3}-\frac{1}{3}$

b) $t^2y''(t)-2y(t)=2$ **Rpta.** $y=-1-ct^2$

c) $y''(t)+2t\,y'(t)-4y(t)=6$, $y(0)=y'(0)=0$ **Rpta.** $y=3t^2$

d) $y''(t)-8t\,y'(t)+16y(t)=3$, $y(0)=y'(0)=0$ **Rpta.** $y=\frac{3}{2}t^2$

e) $y''(t)-4t\,y'(t)+4y(t)=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=10$ **Rpta.** $y=10\,t$

f) $\frac{d^3y}{dt^3}+4\frac{d^2y}{dt^2}+5\frac{dy}{dt}+2y=10\cos t$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$, $y''(0)=3$

Rpta. $y=-e^{-2t}+2e^{-t}-2t\,e^{-t}-\cos t+2\operatorname{sen}t$

g) $\frac{d^2y}{dt^2}+y=e^{-2t}\operatorname{sen}t$, $y(0)=y'(0)=0$

Rpta. $y=\frac{1}{8}(\operatorname{sen}t-\cos t)+\frac{e^{-2t}}{8}(\operatorname{sen}t+\cos t)$

h) $\dfrac{d^2y}{dt^2}-2\dfrac{dy}{dx}-8y=0$, $y(0)=3$, $y'(0)=6$ **Rpta.** $y=2e^{4t}+e^{-2t}$

(3) Resolver las siguientes Ecuaciones Diferenciales.

a) $t\,x''(t)-(4t-1)x'(t)+2(2t+1)x(t)=0$ si $x(0)=0$ **Rpta.** $x(t)=\dfrac{k\,t^2e^{-2t}}{2}$

b) $x\dfrac{d^2y}{dt^2}+\dfrac{dy}{dx}+xy=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=1$ **Rpta.** $y(0)=k\,J_0(x)$

c) $t\,x''(t)+x'(t)-a^2t\,x(t)=0$, $x(0)=k$, $x'(0)=0$, $a\neq 0$ **Rpta.** $x(t)=c\,I_0(at)$

d) Resolver para V(t), si $\int_0 V'(t)V(t-u)du=24t^4$, $V(0)=0$ **Rpta.** $V(t)=\pm 12t^2$

e) $t\,x''(t)+3x'(t)+t\,x(t)=0$ si $x(0)=\dfrac{1}{2}$ **Rpta.** $x(t)=\dfrac{J_1(t)}{t}$

f) $t^2y''(t)+(2t^2+t)y'(t)+(2t^2+t-1)y(t)=0$, si $y(0)=0$, $y'(0)=\dfrac{1}{2}$

Rpta. $y(t)=e^{-t}J_1(t)$

g) $y'''(t)-6y''(t)+12y'(t)-8y(t)=t^3e^{2t}+1$, $y(0)=1$, $y'(0)=-1$, $y''(0)=2$

Rpta. $y(t)=\dfrac{e^{2t}t^6}{5!}+e^{2t}\left(-\dfrac{e^{-2t}}{8}+\dfrac{t^2}{8}-\dfrac{t}{9}+\dfrac{1}{8}\right)+e^{2t}-3t\,e^{-2t}+5t^2e^{-2t}$

h) $t^2V''(t)+t\,V'(t)+(t^2-1)V(t)=0$, $V(1)=2$ **Rpta.** $V(t)=\dfrac{2J_1(t)}{J_1(1)}$

(4) Resolver las siguientes Ecuaciones Diferenciales.

a) $y''(t)+4t(t)=9t$, $y(0)=0$, $y'(0)=7$ **Rpta.** $y(t)=\dfrac{9t}{4}+\dfrac{19}{8}\operatorname{sen}2t$

b) $y''(t)-3y'(t)+2y(t)=4t+12e^{-t}$, $y(0)=6$, $y'(0)=-1$

Rpta. $y(t)=3+2t+2e^{-t}-2e^{2t}+3e^{t}$

c) $y''(t)-4y'(t)+5y(t)=125t^2$, $y(0)=y'(0)=0$

Rpta. $y=22+40t+25t^2+2e^{2t}(2\,\text{sen}\,t-11\cos t)$

d) $y''(t)+y(t)=8\cos t$, $y(0)=1$, $y'(0)=-1$ **Rpta.** $y(t)=\cos t-\text{sen}\,t+4t\,\text{sen}\,t$

e) $y''(t)-3y'(t)+2y(t)=4e^{2t}$

Rpta. $y(t)=c_1e^{2t}+4t\,e^{2t}+c_2e^t$ donde $c_1=y'(0)-y(0)-4$, $c_2=2y(0)-y'(0)+4$

f) $y''(t)+9y(t)=18t$, $y(0)=0$, $y(\frac{\pi}{2})=0$ **Rpta.** $y(t)=2t+\pi\,\text{sen}\,3t$

g) $y''(t)+4y=F(t)$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$ donde $F(t)=\begin{cases}1 , & 0<t<1\\ 0 , & t>1\end{cases}$

Rpta. $y(t)=\dfrac{\text{sen}\,2t}{2}+\dfrac{1}{4}[\cos(2t-2)-\cos 2t]$, para t > 1

h) $y''(t)+4y(t)=F(t)$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$ si $F(t)=U(t-2)$

Rpta. $y(t)=\dfrac{\text{sen}\,2t}{2}+\dfrac{1}{4}(\cos(t-2)-1)$ si $t>2$

i) $x'(t)+3x(t)=e^{-2t}$, $x(0)=0$ **Rpta.** $x(t)=e^{-2t}-e^{-3t}$

j) $x'(t)-x(t)=\cos t-\text{sen}\,t$, $x(0)=0$ **Rpta.** $x(t)=\text{sen}\,t$

k) $x'(t)+x(t)=2\,\text{sen}\,t$, $x(0)=0$ **Rpta.** $x(t)=e^{-t}-\cos t+\text{sen}\,t$

l) $2x'(t)+6x(t)=t\,e^{-3t}$, $x(0)=-\dfrac{1}{2}$ **Rpta.** $x(t)=\dfrac{t^2-2}{4}e^{-3t}$

5 Resolver las siguientes Ecuaciones Diferenciales.

a) $x''(t)+x(t)=2e^t$, $x(0)=1$, $x'(0)=2$ **Rpta.** $x(t)=e^t+\text{sen}\,t$

b) $x'(t)-3x(t)=3t^3+3t^2+2t+1$, $x(0)=-1$ **Rpta.** $-\dfrac{5}{9}-\dfrac{2}{3}t-t^3-\dfrac{4}{9}e^{3t}$

c) $x''(t)+2x'(t)=\frac{1}{7}(t-\frac{1}{4})e^{-2t}$, x(0) = 2 , $x'(0)=-\frac{1}{56}$

Rpta. $x(t)=2-\frac{t(2t+1)}{56}e^{-2t}$

d) $y''(t)-3y'(t)+2y(t)=f(t)$, $y(0)=y'(0)=0$, f(t) = U(t - 1)

Rpta. $y(t)=(\frac{e^{2(t-1)}}{2}-e^{t-1}+\frac{1}{2})U(t-1)$

e) $t\,y''(t)+(1-2t)y'(t)-2y(t)=0$, y(0) = 1, $y'(0)=2$ **Rpta.** $y(t)=e^{2t}$

f) $t\,y''(t)+(t-1)y'(t)-y(t)=0$, y(0) = 5 , $y'(0)=0$ **Rpta.** $y(t)=5e^{-t}$

6 Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales.

a) $y'''(t)+6y''(t)+12y'(t)+8y(t)=0$, y(0) = 4 , $y'(0)=-12$, $y''(0)=34$

b) $y''(t)+2y'(t)+5y(t)=e^{-t}$ sen t , y(0) = 0 , $y'(0)=1$

c) $y''-3y'+2y'=4t+e^{3t}$, y(0) = 1 , $y'(0)=-1$

d) $y'''(t)-3y''(t)+3y'(t)-y(t)=0$, y(0) = 1 , $y'(0)=-1$, $y''(0)=-1$

e) $y''(t)+2y'(t)+5y(t)=e^{-t}$ sen t , y(0) = 0 , $y'(0)=1$

f) $y'''(t)-3y''(t)-4y'(t)+12y(t)=12e^{-t}$, y(0) = 4 , $y'(0)=2$, $y''(0)=18$

7 Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales.

a) $P\int_a^b x(t-u)x(u)du=2x(t9-\text{sen}\,pt$, p ≠ 0 **Rpta.** $x(t)=J_1(pt)$

b) Si L{F(t)} = H(s), resolver para x(t) la ecuación diferencial $x''(t)+6x'(t)+7x(t)=F(t)$ sujeto a $x(0)=x'(0)=0$

Rpta. $x(t)=F(t)*\frac{e^{-3t}}{\sqrt{2}}\text{senh}(\sqrt{2}\,t)$

c) $y''(t)+y(t)=F(t)$, donde $y(0)=0$, $y'(0)=0$

$$F(t)=\begin{cases} 0 \ , & t<\dfrac{3\pi}{2} \\ \cos t \ , & \dfrac{3\pi}{2}<t<\dfrac{5\pi}{2} \\ 0 \ , & t>\dfrac{5\pi}{2} \end{cases}$$

Rpta. $y(t)=\frac{1}{4}(\cos t.\text{sen}\,2t-\text{sen}\,t-\cos 2t+\text{sen}\,t-2t\cos t)$

d) $\int_0^t x''(u)x'(t-u)du=x'(t)-x(t)$ si $x'(0)=x'(0)=0$ **Rpta.** $x(t)=t-\frac{t^2}{2}$

e) $5\int_0^t e^u\cos 2(t-u)x(u)du=e^t(x'(t)+x(t))-1$, $x(0)=0$

Rpta. $x(t)=\frac{5}{2}-4t\,e^t-\frac{5}{2}e^{-2t}$

f) $y''(t)+2y'(t)+2y(t)=e^t$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$

Rpta. $y(t)=\frac{e^t}{5}+\frac{e^{-t}}{5}(3\,\text{sen}\,t-\cos t)$

g) $y'''(t)-3y''(t)+3y'(t)-y(t)=t^2e^t$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$, $y''(0)=-2$

Rpta. $y=e^t-t\,e^t-\frac{t^2}{2}e^t+\frac{t^5e^t}{60}$

h) $y'''(t)+y''(t)+4y'(t)+4y(t)=-2$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$, $y''(0)=-1$

Rpta. $y=-\frac{1}{2}+\frac{e^{-t}}{5}+\frac{3}{10}\cos 2t+\frac{3}{5}\text{sen}\,2t$

8 Resolver la ecuación diferencial de segundo orden por Transformada de Laplace. $y''(t)+\alpha\,y'(t)+\beta\,y(t)=0$ donde $\alpha=6$, $\beta=9$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$

9 Resolver la ecuación diferencial de segundo orden por Transformada de Laplace. $y''(t)+\alpha\,y'(t)+\beta\,y(t)=Q(t)$ donde $\alpha=-1$, $\beta=-2$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$, $Q(t)=e^t+e^{-2t}$

10 Resolver la ecuación diferencial de segundo orden por Transformada de Laplace. $F(t)y''(t)+R(t)y'(t)+S(t)y(t)=Q(t)$, donde y(0) = 0, $y'(0)$, $F(t)=4t^2$, $S(t)=(t^2+1)^2$, Q(t) = 0.

11 Resolver la siguiente ecuación diferencial mediante Transformada de Laplace.

$$y''(t)-3y'(t)+2y(t)=f(t) \quad \text{donde} \quad f(t)=\begin{cases}0\ , & 0<t<1\\ 1\ , & t>1\end{cases}\ , \quad y(0)=y'(0)=0$$

Rpta. $y(t)=(\frac{e^{2(t-1)}}{2}-e^{(t-1)}+\frac{1}{2})U(t-1)$

12 Resolver la ecuación diferencial dado por: $t\,y''(t)+2y'(t)+t\,y(t)=0$, $y(0^+)=1$, $y(\pi)=0$

Rpta. $y(t)=\frac{\operatorname{sen} t}{t}$

13 Resolver la ecuación diferencial $y''(t)-4y'(t)+5y(t)=V(t)$, $y(0)=1$; $y'(0)=1$

donde $V(t)=\begin{cases}e^{2t}\cos t\ , & 0<t<2\pi\\ 0\ , & t>2\pi\end{cases}$

Rpta. $y(t)=e^{2t}\cos t-e^{2t}\operatorname{sen} t+\frac{t\,e^{2t}\operatorname{sen} t}{2}-\frac{e^{2t}}{2}(t-2\pi)\operatorname{sen} t.U(t-2\pi)$

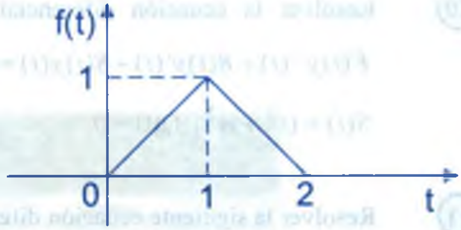
14 Utilizando Transformada de Laplace resolver la ecuación diferencial $y'+2y+\int_0^t y(t)=f(t)$, donde $f(t)=\begin{cases}t\ , & t<1\\ (2-t)\ , & 1\le t\le 2\\ 0\ , & t>2\end{cases}$ sujeto a la condición inicial $y(0)=1$.

15 Resolver la ecuación $y(t)=4\operatorname{sen} t-2\int_0^t y(u)\operatorname{sen}(t-u)du$ **Rpta.** $y(t)=\frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{sen}\sqrt{3}\,t$

(16) Resolver el problema siguiente de valor inicial

$$y'(t)+2y(t)+\int_0^t y(u)du = f(t),$$

y(0) = 1 donde f es dado por el gráfico.



Rpta. $y(t)=-2t\,e^{-t}+1+2[t\,e^{-(t-1)}-1]U(t-1)+[(1-t)^{-(t-1)}+1]U(t-2)$

(17) Resolver el siguiente problema de valor inicial.

$$y''(t)+4y(t)=\operatorname{sen} t-U(t-2\pi).\operatorname{sen}(t-2\pi)\ ,\quad y(0)=y'(0)=0$$

Rpta. $y(t)=\frac{1}{6}(-\operatorname{sen}2t+2\operatorname{sen}t)+\frac{1}{6}(\operatorname{sen}2t-2\operatorname{sen}t)U(t-2\pi)$

(18) Resolver la ecuación diferencial $x''(t)-2x'(t)+5x(t)=e^{-2t}(4\cos 3t+18\operatorname{sen}3t)$, $x(0)=2$, $x'(0)=-1$

(19) Resolver la ecuación diferencial $x''(t)+n^2x(t)=a\operatorname{sen}pt$, $x(0) = 1, x'(0)=3$ n,p constantes positivos , $n \neq p$

(20) Resolver la ecuación diferencial $t\,y''(t)+y'(t)+t\,y(t)=0$ sujeto a las condiciones iniciales $y(0)=1$, $y'(0)=0$

(21) Resolver la ecuación diferencial $t\,x''(t)+x'(t)+4t\,x(t)=0$, con las condiciones iniciales $x(0)=3$, $x'(0)=0$

(22) Calcular $L\{J_1(t)\}$ y usando el resultado obtenido, resolver la ecuación diferencial $x''(t)+x(t)=J_1(t)$ si $x(0)=1$, $x'(0)=4$ donde L{x(t)} = x(s)

(23) Resolver la ecuación diferencial

$$t^2y''(t)+t\,y'(t)+(t^2-1)y(t)=0\ ,\ \text{si } y(0)=0\ ,\quad y'(0)=\frac{1}{2}$$

24 Resolver $\int_0^t x'''(u)x''(t-u)du = 24t^3$ si $x(0)=x'(0)=x''(0)=0$

25 Resolver la ecuación diferencial $tV''(t)+(t-1)V'(t)-V(t)=0$ si $V(0)=5$ y $V(\infty)=0$

26 Resolver la ecuación :

$x''(t)+2x'(t)+x(t)=F(t)$,

$x(0)=x(0)=0$ si F(t) esta dado por el gráfico adjunto.

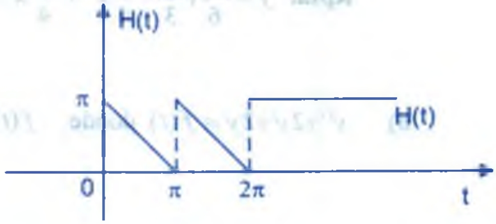
27 $t^2x''(t)+t(2t+1)x'(t)+(2t^2+t-1)x(t)=0$, $x(0)=0$, $x'(0)=\frac{1}{2}$

28 $x''(t)+3x'(t)+2x(t)=3t^2+e^{2t}\text{ sen }3t$, $x(0)=x'(0)=0$

29 $x''(t)+3x'(t)=1-2U(t-2\pi)$, $x(\pi)=0$, $x'(\pi)=-1$

30 $x''(t)-x'(t)=H(t)$, $x(0)=1$,

$x'(0)=0$ si H(t) esta dado por el siguiente gráfico.



31 $t\,x''(t)+(2t+3)x'(t)+(t+3)x(t)=e^{-t}$ si $x(0)=1$

32 $t\,y''(t)+y'(t)+t\,y(t)=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$

33 $x''(t)+(2t-3)x'(t)+2x(t)=0$ si $x(0)=1$, $x'(0)=3$

34 $x''(t)+t\,x'(t)+x(t)=0$, $t>0$, sujeto a las condiciones iniciales $x(0)=1$, $x'(0)=0$

35 $x''(t)+3x'(t)=1-2U_2(t)$ sujeto a las condiciones $x(\pi)=1$, $x'(\pi)=-1$

36 $(t-t^2)y''(t)+2y'(t)+2y(t)=6t$, si $y(0)=y(2)=0$

37 $t^2y''(t)+t(1-t)y'(t)-(1+3t)y(t)=0$ sujeto a la condición $y(0)=1$, $y'(0)=4$

(38) Resolver la ecuación diferencial $y''+4y = f(x)$ si $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } 0<x<\pi \\ 1-\operatorname{sen}3x & \text{si } x>\pi \end{cases}$

$y(0) = 1$, $y'(0) = 1$

Rpta. $f(x)=\cos 2x+\dfrac{\operatorname{sen}2x}{2}+\dfrac{1}{4}[1-\cos 2(x-\pi)]U(x-\pi)+(-\dfrac{\operatorname{sen}3(x-\pi)}{5}+\dfrac{3}{10}\operatorname{sen}3(x-\pi)U(x-\pi)$

(39) Hallar la función $y = f(x)$ tal que: $f(x)=2\int_0^x f(u)\cos(x-u)du=e^x$

Rpta. $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}-xe^{-x}=\cosh x-xe^{-x}$

(40) Resolver las ecuaciones diferenciales.

a) $y''-y=\dfrac{1}{2}\int_0^x e^u u^2 du$, $y(0)=y'(0)=0$

Rpta. $y=\dfrac{e^x}{6}(\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{9}{4}x^2+\dfrac{21}{4}x-\dfrac{45}{8})+1-\dfrac{e^{-x}}{16}$

b) $y''+2y'+2y=f(t)$ donde $f(t)=\begin{cases} 0 & , 0<t<\pi \\ e^{-t}\cos t & , \pi<t<2\pi \\ 0 & , t>2\pi \end{cases}$

Rpta. $y=e^{-t}[y(0)\cos t+(y(0)+y'(0))\operatorname{sen}t]+\dfrac{e^{-t}}{2}(t-\pi)U(t-\pi)-[\dfrac{e^{-t}}{2}(t-2\pi)\operatorname{sen}t]U(t-2\pi)$

c) $y'+2y+2\int_0^x y(t)dt=f(t)$ donde $f(t)=\begin{cases} e^{-t}\cos t & , 0<t<\pi \\ 0 & , t>\pi \end{cases}$, y(0)

Rpta. $\begin{cases} \dfrac{e^{-t}}{2}(t\operatorname{sen}t-\operatorname{sen}t+t\cos t) & , 0<t<\pi \\ \dfrac{e^{-t}}{2}(t\operatorname{sen}t-\operatorname{sen}t+\cos t)+\dfrac{e^{-t}}{2}[(t-\pi)(\cos t-\operatorname{sen}t)+\operatorname{sen}t] & , t>\pi \end{cases}$

d) $y''-4y'+5y=f(t)$, $y(0)=1$, $y'(0)=1$ donde $f(t)=\begin{cases} e^{2t}\operatorname{sen}t & , 0<t<2\pi \\ 0 & , t>2\pi \end{cases}$

Rpta. $\begin{cases} e^{2t}\cos t - e^{2t}\operatorname{sen} t + e^{2t}\dfrac{t\operatorname{sen} t}{2}, & 0 < t < \pi \\ e^{2t}\cos t - e^{2t}\operatorname{sen} t + \pi e^{2\pi}\operatorname{sen} t, & t > 2\pi \end{cases}$

(41) Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales.

a) $\begin{cases} x''(t) - 3x'(t) - y'(t) + 2y(t) = 14t + 3 \\ x'(t) - 3x(t) + y'(t) = 1 \end{cases}$, $x'(0) = 0$, $y'(0) = 6.5$

Rpta. $\begin{cases} x(t) = 2 - \dfrac{e^{t}}{2} - \dfrac{e^{3t}}{2} - e^{-2t} \\ y(t) = 7t + 5 - e^{t} + \dfrac{5}{2}e^{-2t} \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x'(t) + 2x(t) + y'(t) - y(t) = 3t \\ x'(t) + x(t) + y'(t) + y(t) = 1 \end{cases}$, x(0) = 1 , y(0) = 3

Rpta. $\begin{cases} x(t) = t + 3e^{-t} - 2e^{-3t} \\ y(t) = 1 - t + 2e^{-3t} \end{cases}$

c) $\begin{cases} x''(t) + 2x(t) - y'(t) = 2t + 5 \\ x'(t) - x(t) + y'(t) + y(t) = -2t - 1 \end{cases}$, x(0) = 3 , $x'(0) = 0$, y(0) = -3

Rpta. $\begin{cases} x(t) = t + 2 + e^{-2t} + \operatorname{sen} t \\ y(t) = 1 - t - 3e^{-2t} - \cos t \end{cases}$

d) $\begin{cases} x'(t) - 2x(t) - y'(t) - y(t) = 6e^{3t} \\ 2x'(t) - 3x(t) + y'(t) - 3y(t) = 6e^{3t} \end{cases}$, x(0) = 3 , y(0) = 0

Rpta. $\begin{cases} x(t) = (1 + 2t)e^{t} + 2e^{3t} \\ y(t) = (1 - t)e^{t} - e^{3t} \end{cases}$

e) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + x + y = 3e^{-3t} \\ \dfrac{dy}{dt} + x - 4y = 1 \end{cases}$, x(0)=1 , y(0) = 2 **Rpta.** $\begin{cases} x(t) = 3e^{-2t} - \dfrac{69}{40}e^{5t} - \dfrac{7}{8}e^{-3t} + \dfrac{3}{5} \\ y(t) = \dfrac{e^{-2t}}{2} + \dfrac{69}{40}e^{5t} - \dfrac{e^{-3t}}{8} - \dfrac{1}{10} \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{dy}{dt}-x-y=e^{-t} & , \quad x(0)=2 \\ \dfrac{dx}{dt}+\dfrac{dy}{dt}+2x+y=e^{t} & , \quad y(0)=1 \end{cases}$ **Rpta.** $\begin{cases} x=8\operatorname{sen} t+2\cos t \\ y=-13\operatorname{sen} t+\cos t+\dfrac{e^{t}}{2}-\dfrac{e^{-t}}{2} \end{cases}$

g) $\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2}-3\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{dy}{dt}+2x-y=0 \\ \dfrac{dx}{dt}+\dfrac{dy}{dt}-2x+y=0 \end{cases}$, x(0)=0, y(0)=-1, $x'(0)=0$ **Rpta.** $\begin{cases} x=2e^{t}-e^{2t}-1 \\ y=e^{t}-2 \end{cases}$

h) $\begin{cases} y'+y+2z'+3z=e^{-t} \\ 3y'-y+4z'+z=0 \end{cases}$, y(0) = 0 , z(0) = 1 **Rpta.** $\begin{cases} y=5e^{t}-3e^{-t}-2e^{-2t} \\ z=e^{-2t}+\dfrac{2e^{-t}}{2}-e^{t} \end{cases}$

42 Resolver el sistema de ecuación diferencial $\begin{cases} t\,y(t)+z(t)+t\,z'(t)=(t-1)e^{-t} \\ y'(t)-z(t)=e^{-t} \end{cases}$ sujeta a las condiciones iniciales: y(0) = 1, z(0) = -1

43 Resolver el sistema de la ecuación diferencial $\begin{cases} 2x'(t)-3y'(t)=2e^{t} & , \quad x(0)=2 \\ x'(t)-2y'(t)=0 & , \quad y(0)=1 \end{cases}$

Rpta. $x(t)=4e^{t}-2$, $y(t)=2e^{t}-1$

44 Resolver el sistema de la ecuación diferencial $\begin{cases} x'(t)+x(t)+2y(t)=0 & , \quad x(0)=1 \\ 3x(t)+2y(t)+y'(t)=0 & , \quad y(0)=2 \end{cases}$

Rpta. $x(t)=\dfrac{6}{5e^{-4t}}-\dfrac{1}{5e^{t}}$, $y(t)=\dfrac{9}{5e^{-4t}}+\dfrac{e^{t}}{5}$

45 Resolver el sistema de la ecuación diferencial. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=2y+e^{t} & , \quad x(0)=1 \\ \dfrac{dy}{dt}=8x-t & , \quad y(0)=1 \end{cases}$

46 Resolver el sistema de la ecuación diferencial. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=x-2y & , \quad x(0)=-1 \\ \dfrac{dy}{dt}=5x-y & , \quad y(0)=2 \end{cases}$

Rpta. $x = -3\cos 3t - \frac{5}{3}\operatorname{sen} 3t \quad , \quad y = 2\cos 3t - \frac{7}{3}\operatorname{sen} 3t$

(47) Resolver el sistema de la ecuación diferencial. $\begin{cases} 2\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - 2x = 1 & , \quad x(0) = 0 \\ \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - 3x - 3y = 2 & , \quad y(0) = 0 \end{cases}$

Rpta. $x = -2e^{3t} + \frac{5}{2}e^{2t} - \frac{1}{2} \quad , \quad y = \frac{8}{3}e^{3t} - \frac{5}{2}e^{2t} - \frac{1}{6}$

(48) Resolver el sistema de la ecuación diferencial: $\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + x - y = 0 \quad , \quad x(0) = 0 \quad , \quad x'(0) = -2 \\ \frac{d^2y}{dt^2} + y - x = 0 \quad , \quad y(0) = 0 \quad , \quad y'(0) - 1 \end{cases}$

Rpta. $x = -\frac{t}{2} - \frac{3}{4}\sqrt{2}\operatorname{sen}\sqrt{2}\,t \quad , \quad y = -\frac{t}{2} + \frac{3}{4}\sqrt{2}\operatorname{sen}\sqrt{2}\,t$

(49) Resolver el sistema de la ecuación diferencial. $\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^2y}{dt^2} = t^2 \,, \quad x(0) = 8 \,, \quad x'(0) = 0 \\ \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{d^2y}{dt^2} = 4t \,, \quad y(0) = 0 \,, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$

Rpta. $x = 8 + \frac{2}{3!} + \frac{t^4}{4!} \quad , \quad y = -\frac{2t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!}$

(50) Resolver el sistema de la ecuación diferencial $\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 3y = 0 \,, \quad x(0) = 0 \,, \quad x'(0) = 2 \\ \frac{d^2x}{dt^2} + 3y = t\,e^{-t} \quad , \quad y(0) = 0 \end{cases}$

Rpta. $x = \frac{t^2}{2} + t + 1 - e^{-t} \quad , \quad y = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}t\,e^{-t}$

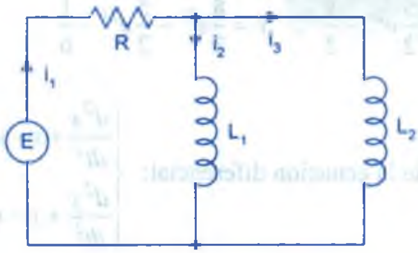
(51) Resolver el sistema de la ecuación diferencial.

a) Demuestre que el sistema de ecuaciones diferenciales correspondiente a las corrientes $i_2(t)$ e $i_3(t)$ de la red mostrada en la Figura , es

$$L_1 \frac{di_2}{dt} + Ri_2 + Ri_3 = E(t) \quad ; \quad L_2 \frac{di_3}{dt} + Ri_2 + Ri_3 = E(t)$$

b) Resuelva el sistema de la parte (a) si $R = 5\Omega$, $L_1 = 0.01\,H$, $L_2 = 0.0125\,H$, $E = 100V$, $i_2(0) = 0$ e $i_3(0) = 0$.

c) Determine el valor en amperes (A) de la corriente $i_1(t)$.



Rpta. $i_2 = \frac{100}{9} - \frac{100}{9}e^{-900t}$, $i_3 = \frac{80}{9} - \frac{80}{9}e^{-900t}$, $i_1 = 20 - 20e^{-900t}$

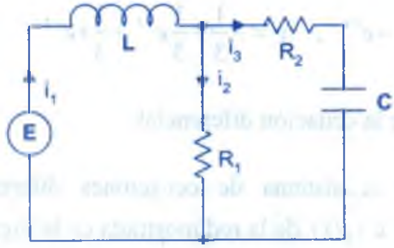
(52) **a)** Demuestre que el sistema de ecuaciones diferenciales correspondiente a las corrientes $i_2(t)$ e $i_3(t)$ de la red mostrada en la figura es,

$$L\frac{di_2}{dt} + L\frac{di_3}{dt} + R_1 i_2 = E(t) \quad ; \quad -R_1\frac{di_2}{dt} + R_2\frac{di_3}{dt} + \frac{1}{C}i_3 = 0$$

b) Resuelva el sistema de la parte (a) si $R_1 = 10\,\Omega$, $L_1 = 1\,H$, C = 0.2 F,

$$E(t) = \begin{cases} 120, & 0 \le t < 2 \\ 0, & t \ge 2 \end{cases}$$

c) Determine la corriente $i_1(t)$ en amperes (A).

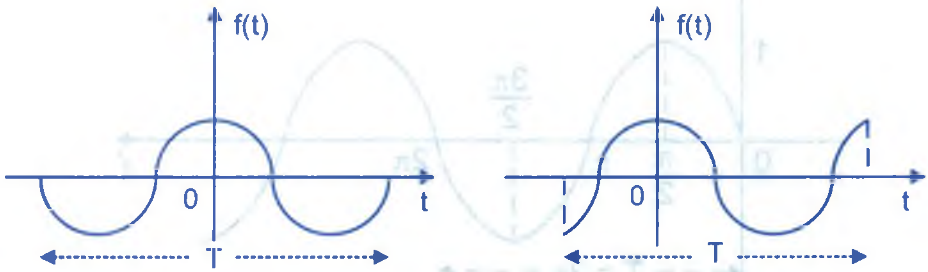


CAPÍTULO XIV

14. SERIES DE FOURIER.-

14.1. FUNCIONES PERIÓDICAS.-

DEFINICIÓN.- Se dice que una función $f: R \longrightarrow R$ es periódica, si existe un número positivo "T" tal que $f(t + T) = f(t)$, $\forall\, t \in R$. Él número T recibe el nombre de periodo de la función f(t).



Ejemplo.- Graficar y determinar el periodo de la función $f(t) = (-1)^{[|t|]}$

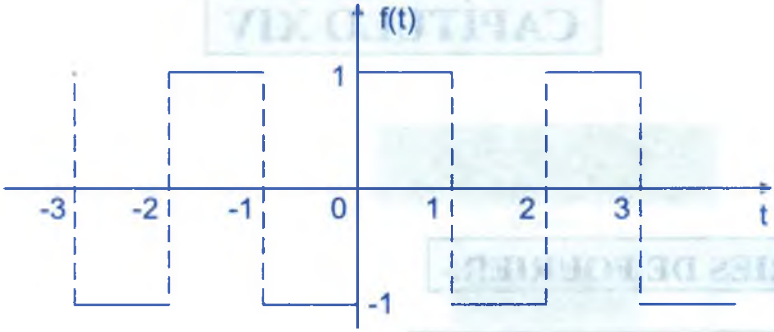
<u>**Solución**</u>

Se tiene que sí, $2n \le t < 2n + 1 \Rightarrow [|\,t\,|] = 2n$, $n \in Z$, de donde

$$f(t) = (-1)^{2n} = 1 \quad \Rightarrow \quad f(t) = 1,\ \forall\, n \in Z$$

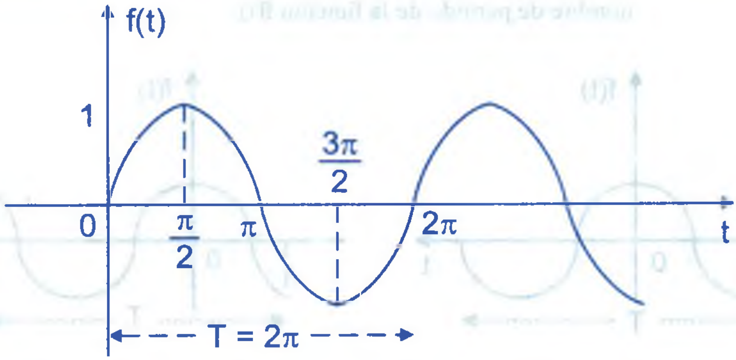
Sí $2n + 1 \le t < (2n + 1) + 1 \Rightarrow [|\,t\,|] = 2n + 1$, $\forall\, n \in Z$, de donde

$$f(t) = (-1)^{2n+1} = -1 \quad \Rightarrow \quad f(t) = -1,\ \forall\, n \in Z$$

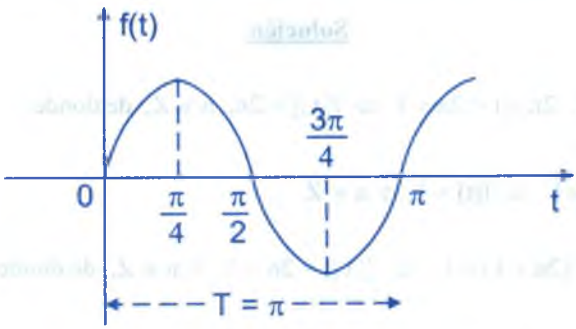


f(t + 2) = f(t), $\forall$ t $\in$ R. Luego f(t) es periódica de periodo T = 2

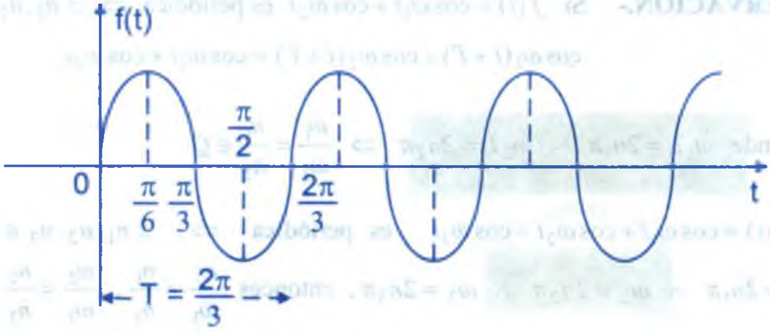
Ejemplo.- Las funciones 1, sen t, sen 2t, sen 3t,..., sen nt ; cos t, cos 2t, cos 3t,..., cos nt son funciones periódicas para el caso en que f(t) = sen t



Para el caso en que f(t) = sen 2t



Para el caso en que f(t) = sen 3t



OBSERVACION.- Sí $f(t+T) = f(t),\ \forall\ t \in R$

$$f(t+2T) = f((t+T)+T) = f(t+T) = f(t)$$

$$f(t+3T) = f((t+2T)+T) = f(t+2T) = f(t)$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$f(t+nT) = f(t),\ \forall\ n \in Z^+,\ \forall\ t \in R$$

$$f(t-T) = f((t-T)+T) = f(t)$$

$$f(t-2T) = f((t-2T)+T) = f(t-T) = f(t)$$

$$f(t-3T) = f((t-3T)+T) = f(t-2T) = f(t)$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$f(t-nT) = f(t),\ \forall\ n \in Z^+$$

Luego sí $f(t+T) = f(t) \Rightarrow f(t+nT) = f(t),\ \forall\ n \in Z,\ t \in R$

Por ejemplo.- sen $(t+2\pi),\ \forall\ t \in R \Rightarrow$ sen $(t+2nT) =$ sen $t,\ \forall\ t \in R$

Ejemplo.- Demostrar que la función $f(t) =$ constante, es una función periódica de periodo T para cualquier valor positivo de T.

Solución

Sea $f(t) = k$ la función constante

Si $f(t) = k$, entonces $f(t+T) = k$ por ser función constante de donde $f(t) = f(t+T)$, para todo t, por lo tanto $f(t)$ es una función periódica de periodo T.

OBSERVACIÓN.- Si $f(t)=\cos\omega_1 t+\cos\omega_2 t$ es periódica $\Rightarrow$ $\exists\ n_1,n_2\in Z$ tal que

$$\cos\omega_1(t+T)+\cos\omega_2(t+T)=\cos\omega_1 t+\cos\omega_2 t$$

De donde $\omega_1 T=2n_1\pi \ \wedge\ \omega_2 T=2n_2\pi \ \Rightarrow\ \frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{n_1}{n_2}\in Q$

Si $f(t)=\cos\omega_1 t+\cos\omega_2 t+\cos\omega_3 t$ es periódica $\Rightarrow$ $\exists\ n_1,n_2,n_3\in Z$ tal que $\omega_1 T=2n_1\pi \ \wedge\ \omega_2=2n_2\pi \ \wedge\ \omega_3=2n_3\pi$, entonces $\frac{\omega_1}{\omega_3}=\frac{n_1}{n_3}$, $\frac{\omega_2}{\omega_3}=\frac{n_2}{n_3}\in Q$

Por ejemplo.- Hallar el periodo de $f(t)=\cos 2t+\cos\sqrt{2}t$ de donde $\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{2}{\sqrt{2}}\notin Q$, entones $f(t)=\cos 2t+\cos\sqrt{2}t$ no es periódica.

Ejemplo.- Hallar el periodo de la función $f(t)=\cos\frac{t}{3}+\cos\frac{t}{4}+\cos\frac{t}{5}$

<u>Solución</u>

Por definición se tiene: $\cos\frac{1}{3}(t+T)+\cos\frac{1}{4}(t+T)+\cos\frac{1}{5}(t+T)=\cos\frac{t}{3}+\cos\frac{t}{4}+\cos\frac{t}{5}$

Entonces $\exists\ n_1,n_2,n_3\in Z$ tal que: $\begin{cases}\frac{1}{3}T=2\pi\, n_1\\ \frac{1}{4}T=2\pi\, n_2\\ \frac{1}{5}T=2\pi\, n_3\end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} T=6\pi\, n_1\\ T=8\pi\, n_2\\ T=10\pi\, n_3\end{array}$

resolviendo el sistema: para esto m.c.m. (6,8,10) = 120 de donde $n_1=20$, $n_2=15$, $n_3=12$. Luego T = 120 π (periodo mínimo)

OBSERVACIÓN.-

① Si f y g son periódicas con periodo T, entonces h = af + bg, a y b constantes, es también periódica con periodo T.

② Si f y g son periódicas con periodo T, entonces f.g es también periódica con periodo T.

En efecto: f(t + T) = f(t) $\wedge$ g(t + T) = g(t), $\forall$ t $\in$ R

$\Rightarrow$ (f.g)(t + T) = f(t + T) g(t + T) = f(t).g(t) = (f.g)(t)

$\therefore$ (f.g)(t + T) = (f.g)(t), $\forall$ t $\in$ R

TEOREMA.- Si f(t) es una función periódica con periodo T entonces se cumple:

i) $\displaystyle\int_{a-\frac{T}{2}}^{a+\frac{T}{2}} f(t)\,dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt$ ii) $\displaystyle\int_{T}^{T+t} f(t)dt = \int_{0}^{t} f(t)dt$

Demostración

Como f(t) es periódica con periodo T, entonces f(t + T) = f(t), $\forall$ t $\in$ R **... (1)**

Hacemos t + T = z $\Rightarrow$ t = z − T reemplazando en (1) tenemos: f(t) = f(z − T)

consideremos la integral $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(z-T)dz = \int_{\alpha+T}^{\beta+T} f(t)dt$

donde t = z − T $\Rightarrow$ $\alpha \le t \le \beta$ $\Rightarrow$ $\alpha \le z - T \le \beta$ $\Rightarrow$ $\alpha + T \le z \le \beta + T$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = \int_{\alpha+T}^{\beta+T} f(t)dt \qquad \textbf{... (*)}$$

puesto que cualquier variable puede reemplazar al diferencial de la variable.

i) $\displaystyle\int_{a-\frac{T}{2}}^{a+\frac{T}{2}} f(t)dt = \int_{a-\frac{T}{2}}^{-\frac{T}{2}} f(t)dt + \int_{-\frac{T}{2}}^{a+\frac{T}{2}} f(t)dt$

aplicando el resultado de (*) a la primera integral del 2do miembro

$$\int_{a-\frac{T}{2}}^{a+\frac{T}{2}} f(t)dt = \int_{a+\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt + \int_{-\frac{T}{2}}^{a+\frac{T}{2}} f(t)dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{a+\frac{T}{2}} f(t)dt + \int_{a+\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt$$

$$\therefore \int_{a-\frac{T}{2}}^{a+\frac{T}{2}} f(t)dt) \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt \qquad \textbf{... (**)}$$

ii) Si se hace $\alpha = 0$, $\beta = t$ en (*) se tiene: $\displaystyle\int_{0}^{t} f(t)dt = \int_{T}^{T+t} f(t)dt$

Si en (**) hacemos $a = \frac{T}{2}$ se obtiene: $\int_0^T f(t)dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt$ ... (***)

TEOREMA.- Sí f(t + T) = f(t), ∀ t ∈ R, sí $g(t) = \int_0^t f(t)dt$, entonces:

$$g(t+T) = g(t) \iff \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt = 0$$

Demostración

$$g(t+T) = \int_0^{t+T} f(t+T)dt = \int_0^{t+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt + \int_T^{t+T} f(t)dt \quad \text{... (1)}$$

de la parte (***) y (ii) del teorema anterior se tiene:

$$\int_0^T f(t)dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt, \quad \int_T^{t+T} f(t)dt = \int_0^t f(t)dt \quad \text{... (2)}$$

reemplazando (2) en (1) se tiene: $g(t+T) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt + \int_0^t f(t)dt = g(t) = \int_0^t f(t)dt$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt = \int_0^t f(t)dt - \int_0^t f(t)dt = 0 \quad \text{de donde} \quad \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt = 0$$

TEOREMA.- Si f(t + T) = f(t), ∀ t ∈ R, entonces si $F(t) = \int_0^t f(t)dt - \frac{a_0 t}{2}$ demostrar que F(t + T) = F(t), ∀ t ∈ R donde $a_0 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt$

Demostración

$$F(t+T) = \int_0^{t+T} f(t+T)dt - \frac{a_0}{2}(t+T) = \int_0^{t+T} f(t)dt - \frac{a_0 t}{2} - \frac{a_0 T}{2}$$

$$= \int_0^T f(t)dt + \int_0^{t+T} f(t)dt - \frac{a_0 t}{2} - \frac{a_0 T}{2} = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt + \int_0^t f(t)dt - \frac{a_0 t}{2} - \frac{a_0 T}{2}$$

$$F(t+T)=\frac{a_0T}{2}+\int_0^t f(t)dt-\frac{a_0t}{2}-\frac{a_0T}{2}=\int_0^t f(t)dt-\frac{a_0t}{2}=F(t)\,,\ \forall\ t\in R$$

$\therefore\ F(t+T)=F(t),\ \forall\ t\in R$

14.2. FUNCIONES ORTOGONALES.-

DEFINICIÓN.- Se dice que dos funciones reales $g_m(t)$ y $g_n(t)$ son ortogonales en el intervalo $a\le t\le b$.

Sí la integral del producto $g_m(t).g_n(t)$ sobre este intervalo $a\le t\le b$ es igual a cero, es decir:

$$\int_a^b g_m(t).g_n(t)dt=0\,,\ m\ne n \qquad \text{... (*)}$$

OBSERVACIONES.-

1. Un conjunto de funciones reales $g_0,g_1,g_2,...$, que satisface **(*)** para todos los pares de funciones distintos en el conjunto, es un "conjunto ortogonal" de funciones en ese intervalo.

2. La integral $N(g_m(t))=\int_a^b g_m^2(t)dt$ **... (**)**

   se llama Norma de la función $g_n(t)$ en el intervalo $a\le t\le b$

3. Un conjunto ortogonal de funciones, $g_0,g_1,...,g_m,...$, en el intervalo $a\le t\le b$, tal que cuyas funciones tiene norma 1 satisface las relaciones:

$$\int_a^b g_m(t).g_n(t)dt=\begin{cases}0 & si\ \ m\ne n,\ \ n=0,1,2,...\\ 1 & si\ \ m=n,\ \ n=0,1,2,...\end{cases} \qquad \text{... (***)}$$

   un conjunto de este tipo recibe el nombre de conjunto "Ortonormal" de funciones en el intervalo $a\le t\le b$

Ejemplo.- El conjunto de funciones:

$\{1,\ \cos\omega_1 t,\ \cos\omega_2 t,...,\ \cos n\omega_2 t,...,\ \text{sen}\,\omega_0 t,...,\ \text{sen}\,n\omega_0 t\}$ es un conjunto ortogonal en el intervalo $-\frac{T}{2}\le t\le\frac{T}{2}$

Solución

(1) Sí $g_m(t)=1$ y $g_n(t)=\cos n\omega_0 t$, entonces

Sí $\omega_0=\dfrac{2\pi}{T} \Rightarrow \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1.\cos n\omega_0 t\ dt=0$ sí $n\neq 0$

(2) Sí $g_n(t)=1$, $g_m(t)=\text{sen}\, m\omega_0 t$ entonces $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \text{sen}(m\omega_0 t)dt=0$, $\forall$ m

(3) Sí $g_n(t)=\cos n\omega_0 t$, $g_m(t)=\cos m\omega_0 t$, entonces:

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(n\omega_0 t).\cos(m\omega_0 t)dt=\begin{cases}0, & si\quad m\neq n\\ \dfrac{T}{2}, & si\quad m=n\neq 0\end{cases}$$

(4) Si $g_n(t)=\cos(n\omega_0 t)$ y $g_m(t)=\text{sen}(m\omega_0 t)$,entonces:

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(n\omega_0 t)\,\text{sen}(m\omega_0 t)dt=0,\ \ \forall\ n,\ \forall\ m$$

(5) Si $g_n(t)=\text{sen}(n\omega_0 t)$ y $g_m(t)=\text{sen}(m\omega_0 t)$, entonces:

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \text{sen}(n\omega_0 t)\,\text{sen}(m\omega_0 t)dt=\begin{cases}0, & si\quad m\neq n\\ 1, & si\quad m=n\neq 0\end{cases}$$

OBSERVACIÓN.- Dado un conjunto ortogonal podemos obtener un conjunto Ortonormal dividiendo cada función entre la raíz cuadrada de su norma.

Ejemplo.- El conjunto $\{1,\cos\omega_0 t,...,\cos n\omega_0 t,...,\text{sen}\,\omega_0 t,...,\text{sen}\, n\omega_0 t\}$ donde

$$N(1)=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt\ ,\ N(\cos n\omega_0 t)=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos n\omega_0 t\, dt=\frac{T}{2}\ \ y\ \ N(\text{sen}\, n\omega_0 t)=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \text{sen}^2\ n\omega_0 t\, dt=\frac{T}{2},$$

entonces el conjunto $\{\dfrac{1}{\sqrt{T}},\dfrac{\cos\omega_0 t}{\sqrt{\frac{T}{2}}},...,\dfrac{\text{sen}\,\omega_0 t}{\sqrt{\frac{T}{2}}},...\}$ es un conjunto Ortonormal.

14.3. EJERCICIOS PROPUESTOS.-

1. Encontrar el periodo de las siguientes funciones:

a) cos nt **b)** cos 2πt **c)** sen nt **d)** sen 2πt

e) sen πt **f)** $\cos\frac{2\pi t}{k}$ **g)** $\text{sen}\,\frac{2\pi t}{k}$ **h)** $\cos\frac{2n\pi t}{k}$

i) $\text{sen}\,\frac{2\pi nt}{k}$ **j)** $|\,\text{sen}\,\omega_0 t\,|$ **k)** $\text{sen}\,t+\text{sen}\,\frac{t}{3}+\text{sen}\,\frac{t}{5}$

2. Demostrar que la función f(t) = constante, es una función periódica de periodo T para cualquier valor positivo de T.

3. Si T es un periodo de f, demostrar que nT, n = ±2, ±3, ..., es un periodo de f.

4. Si f(t) es una función periódica de t con periodo T, demostrar que f(at) para a ≠ 0 es una función periódica de t con periodo $\frac{T}{a}$.

5. Demostrar que si f y g son periódicas de periodo T, también lo es h = af + bg, donde a y b son constantes.

6. Si f(t) es una función periódica de t con periodo T e integrable, demostrar que $f_a(t)=\frac{1}{2a}\int_{t-a}^{t+a} f(\tau)d\tau$ también es periódica con periodo T.

7. Demostrar que si f(t) y g(t) son continuas por tramos en el intervalo $(-\frac{T}{2},\frac{T}{2})$ y periódica de periodo T, entonces la función $h(t)=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t-\tau)g(\tau)d\tau$ es continua y periódica con periodo T.

8. Trazar las gráficas exactas de las funciones siguientes:

a) $f(t)=\begin{cases} -\dfrac{\pi}{4} & si \quad -\pi<t<0 \\ \dfrac{\pi}{4} & si \quad 0<t<\pi \end{cases}$, $f(t+2\pi)=f(t)$

b) $f(t)=\dfrac{t}{2}$, $-\pi<t<\pi$, $f(t+2\pi)=f(t)$

c) $f(t)=\dfrac{t^2}{4}-\dfrac{\pi^2}{12}$, $-\pi<t<\pi$ y $f(t+2\pi)=f(t)$

d) $f(t)=t^3$, $-\pi<t<\pi$ y $f(t+2\pi)=f(t)$

e) $f(t)=e^{|t|}$, $-\pi<t<\pi$ y $f(t+2\pi)=f(t)$

14.4. SERIES DE FOURIER.-

Si la función f(t) es periódica con periodo T y que puede representarse por medio de una serie trigonométrica de la forma:

$$\boxed{f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(n\omega_0 t)+b_n\operatorname{sen}(n\omega_0 t)]} \quad \ldots (1)$$

a esta serie se le llama serie trigonométrica de Fourier, a la serie (1) también puede representarse del siguiente modo

$$\boxed{f(t)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cos(n\omega_0 t-\theta_n)} \quad \ldots (2)$$

En efecto:

$$a_n\cos(n\omega_0 t)+b_n\operatorname{sen}(n\omega_0 t)=\sqrt{a_n^2+b_n^2}\left(\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}\cos(n\omega_0 t)+\frac{b_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}\operatorname{sen}(n\omega_0 t)\right)$$

definimos: $c_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$, $\cos\theta_n=\dfrac{a_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}$, $\operatorname{sen}\theta_n=\dfrac{b_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}$

$$a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t = c_n(\cos\theta_n \cos n\omega_0 t + \operatorname{sen}\theta_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t))$$

$$= c_n \cos(n\omega_0 t - \theta_n) \qquad \textbf{... (3)}$$

ahora reemplazamos (3) en (1) y se obtiene:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_0 t - \theta_n)$$

$$\therefore \quad f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_0 t - \theta_n)$$

donde $c_0 = \frac{a_0}{2}$ y $\theta_n = \operatorname{arctg}(\frac{b_n}{a_n})$ y además $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ y $\theta_n = \operatorname{arctg}(\frac{b_n}{a_n})$ se conoce como: Amplitudes armónicos y ángulos de fase respectivamente.

14.5. EVALUACIÓN DE LOS COEFICIENTES DE FOURIER.-

Mediante la relación de ortogonalidad del conjunto de funciones $\{1, \cos\omega_0 t, \cos 2\omega_0 t, ..., \cos n\omega_0 t, ..., \operatorname{sen} n\omega_0 t, ..., \operatorname{sen} 2\omega_0 t, \operatorname{sen}\omega_0 t, ...\}$ podemos evaluar los coeficientes: a_0, a_n, b_n dé la serie de Fourier

$$\boxed{f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t)]} \qquad \textbf{... (1)}$$

donde $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ (frecuencia angular fundamental)

En efecto: integrando la ecuación (1) de $-\frac{T}{2}$ a $\frac{T}{2}$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt = \frac{a_0}{2}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(n\omega_0 t)dt + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \operatorname{sen}(n\omega_0 t)dt \qquad \textbf{... (2)}$$

pero por la ortagonalidad del conjunto de funciones se tiene:

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(n\omega_0 t)dt = 0\,,\ \ \forall\ n \neq 0,\quad \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \text{sen}(n\omega_0 t)dt = 0\,,\ \ \forall\ n \in Z \qquad \textbf{... (3)}$$

ahora reemplazamos (3) en (2) se tiene:

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt = \frac{a_0}{2}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt + 0 + 0 = \frac{a_0}{2}T\,,\ \text{de donde}\quad \boxed{a_0 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt}$$

multiplicando la expresión (1) por $\cos(m\omega_0 t)$ e integrando de $-\frac{T}{2}$ a $\frac{T}{2}$ se tiene:

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(m\omega_0 t)dt = \frac{a_0}{2}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(m\omega_0 t)dt + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(n\omega_0 t)\cos(m\omega_0 t)dt +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \text{sen}(n\omega_0 t)\cos(m\omega_0 t)dt \qquad \textbf{... (4)}$$

pero por la ortagonalidad del conjunto de funciones se tiene:

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(n\omega_0 t)dt = 0\,,\ \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \text{sen}(n\omega_0 t)dt = 0\,,\ \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(n\omega_0 t)\cos(m\omega_0 t)dt = \frac{T}{2}\,,\ \text{m=n}\neq 0 \ \textbf{... (5)}$$

ahora reemplazando (5) en (4) se tiene:

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(m\omega_0 t)dt = 0 + a_m\frac{T}{2} + 0\quad (m = n),\ \text{de donde}\quad \boxed{a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(n\omega_0 t)dt}$$

ahora multiplicamos (1) por $\text{sen}(m\omega_0 t)$ e integrando de $-\frac{T}{2}$ a $\frac{T}{2}$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,\text{sen}(m\omega_0 t)dt = \frac{a_0}{2}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \text{sen}(m\omega_0 t)dt + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(n\omega_0 t)\,\text{sen}(m\omega_0 t)dt +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \text{sen}(n\omega_0 t)\,\text{sen}(m\omega_0 t)dt \qquad \textbf{... (6)}$$

por la ortogonalidad del conjunto de funciones se tiene:

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \operatorname{sen}(m\omega_0 t)dt = 0\,,\quad \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(n\omega_0 t)\operatorname{sen}(m\omega_0 t)dt = 0\,,\quad \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \operatorname{sen}(n\omega_0 t)\operatorname{sen}(m\omega_0 t)dt = \frac{T}{2}\,,\ m=n\neq 0\ldots \ \textbf{(7)}$$

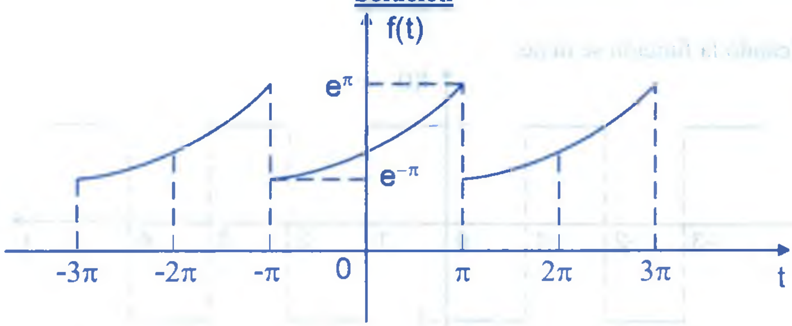
reemplazando (7) en (6) se obtiene: $\displaystyle\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\operatorname{sen}(m\omega_0 t)dt = 0 + 0 + b_m\frac{T}{2} = b_m\frac{T}{2}$

(m = n) de donde $\boxed{b_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\operatorname{sen}(n\omega_0 t)dt}$

Ejemplo.-

1. Encontrar la serie de Fourier para la función $f(t) = e^t$ en el intervalo (-π, π), f(t + 2π) = f(t)

Solución



$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(n\omega_0 t) + b_n\operatorname{sen}(n\omega_0 t))$$

donde T = 2π, $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\pi}{2\pi} = 1$, por lo tanto

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt + b_n\operatorname{sen} nt)\text{, de donde}$$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt = \frac{2}{2\pi}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^t dt = \frac{1}{\pi}(e^{\frac{\pi}{2}} - e^{-\frac{\pi}{2}}) = \frac{2}{\pi}\operatorname{senh}\pi$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos nt\ dt = \frac{2}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^t\ \cos nt\ dt = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{(-1)^n\ \text{senh}\ \pi}{(n^2+1)}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,\text{sen}\ nt\ dt = \frac{2}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^t\ \text{sen}\ nt\ dt = \frac{-2}{\pi}\cdot\frac{(-1)^n\ n\,\text{senh}\ \pi}{(n^2+1)}$$

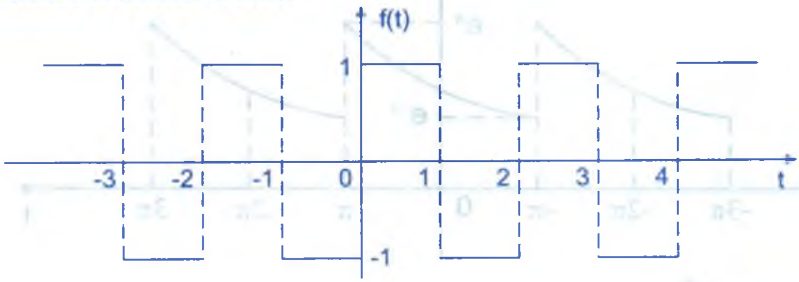
$$\therefore \quad f(t) = \frac{2\,\text{senh}\ \pi}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{\pi}\,\frac{(-1)^n\ \text{senh}\ \pi}{(n^2+1)}\cos nt - \frac{2(-1)^n\ n\,\text{senh}\ \pi}{\pi(n^2+1)}\text{sen}\ nt\right]$$

$$\therefore \quad f(t) = \frac{senh\pi}{\pi} + \frac{2senh\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}(\cos nt - sennt)$$

2) Hallar la serie de Fourier de la función dado por $f(t) = (-1)^{[|t|]}$

Solución

Graficando la función se tiene:



La función f(t) es periódica: f(t + 2) = f(t), $\forall$ t

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n\ \cos(n\omega_0 t) + b_n\,\text{sen}(n\omega_0 t)]$$

de donde T = 2, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi$, por lo tanto

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n\ \cos(n\pi\, t) + b_n\ \text{sen}(n\pi\, t)] \quad \text{... (1)}$$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt = \int_{-1}^{1} (-1)^{[|t|]}\,dt = -\int_{-1}^{0} dt + \int_{0}^{1} dt = 0 \qquad \dots (2)$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\pi t\ dt = \int_{-1}^{1} (-1)^{[|t|]}\cos n\pi t\ dt = 0 \qquad \dots (3)$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,\text{sen}\, n\pi t\, dt = \int_{-1}^{1} (-1)^{[|t|]}\,\text{sen}\, n\pi t\ dt =$$

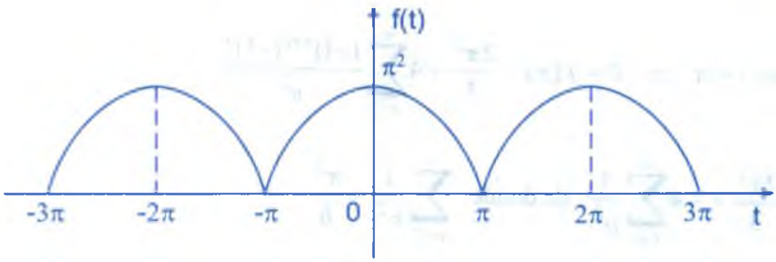
$$= -\int_{-1}^{0} \text{sen}\, n\pi t\ dt + \int_{0}^{1} \text{sen}\, n\pi t\ dt = \frac{1}{n\pi}(1-(-1)^n - (-1)^n + 1) = \frac{2}{n\pi}(1-(-1)^n)$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi}(1-(-1)^n) = \begin{cases} \dfrac{4}{n\pi} & \text{si } n \text{ es impar} \\ 0 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

$$b_{2n-1} = \frac{4}{(2n-1)\pi}\ ,\quad n = 1,2,3,\dots \qquad \dots (4)$$

ahora reemplazando (2), (3), (4) en (1) se tiene: $f(t) = \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(2n-1)\pi t}{2n-1}$

3 Hallar la serie de Fourier de la función cuya gráfica es:



Solución

Los puntos (-π,0), $(0,\pi^2)$, (π,0) están en la parábola

$x^2 + Ax + By + C = 0$ entonces $y = \pi^2 - x^2$

Entonces $f(t)=\pi^2-t^2$, $-\pi\le t\le\pi$ y $f(t+2\pi)=f(t)$, $\forall\ t\in R$

Como $\omega_0=\frac{2\pi}{T}$ y $T=2\pi$ entonces $\omega_0=1$

Luego $f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\operatorname{sen} nt)$, donde

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\operatorname{sen} nt\ dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{(\pi^2-t^2)\operatorname{sen} t}_{\text{impar}}\ dt=0\ \Rightarrow\ b_n=0$$

$$a_0=\frac{2}{T}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi^2-t^2)dt=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}(\pi^2-t^2)dt=\frac{2}{\pi}[\pi^2 t-\frac{t^3}{3}]\Big/_{0}^{\pi}=\frac{4\pi^2}{3}$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos n\ dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi^2-t^2)\cos nt\ dt=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}(\pi^2-t^2)\cos nt\ dt=\frac{4}{n^2}(-1)^{n+1}$$

$$f(t)=\frac{2\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nt$$

OBSERVACIÓN.- Para calcular la suma de una serie infinita por ejemplo:

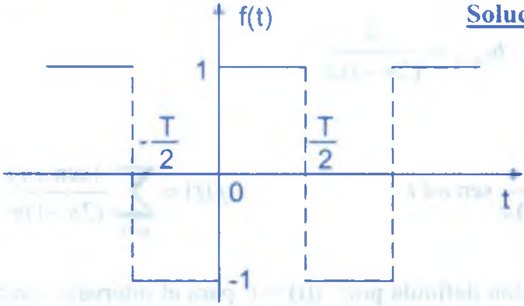
Para $t=0\ \Rightarrow\ \pi^2=f(0)=\frac{2\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ de donde $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$

Para $t=\pi\ \Rightarrow\ 0=f(\pi)=\frac{2\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(-1)^n}{n^2}$

$-\frac{2\pi^2}{3}=-4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ de donde $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$

(4) Encontrar la serie de Fourier para la función f(t) definida por: $f(t)=\begin{cases}-1, & -\frac{T}{2}<t<0\\ 1, & 0<t<\frac{T}{2}\end{cases}$,

$f(t+T)=f(t)$, $\forall\ t\in R$



Solución

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_0 t+b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t)$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\omega_0 t\ dt$$

$$=\frac{2}{T}[\int_{-\frac{T}{2}}^{0} f(t)\cos n\omega_0 t\ dt+\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\omega_0 t\ dt]=\frac{2}{T}[-\int_{-\frac{T}{2}}^{0}\cos n\omega_0 t\ dt+\int_{0}^{\frac{T}{2}}\cos n\omega_0 t\ dt]$$

$$=\frac{2}{T}[-\frac{\operatorname{sen}(n\omega_0 t)}{n\omega_0}\Big/_{-\frac{T}{2}}^{0}+\frac{\operatorname{sen}(n\omega_0 t)}{n\omega_0}\Big/_{0}^{\frac{T}{2}}]=\frac{2}{T}[0+\frac{\operatorname{sen}(-\pi n)}{n\omega_0}+\frac{\operatorname{sen}\pi n}{n\omega_0}-0]=0$$

$$\therefore \boxed{a_n=0}\ ,\quad \forall\ n\in Z^+$$

$$a_0=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt=\frac{2}{T}[\int_{-\frac{T}{2}}^{0} f(t)dt+\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)dt]=\frac{2}{T}[-\int_{-\frac{T}{2}}^{0} dt+\int_{0}^{\frac{T}{2}} dt]=\frac{2}{T}[-\frac{T}{2}+\frac{T}{2}]=0$$

$$\therefore\quad a_0=0$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\operatorname{sen} n\omega_0 t\ dt=\frac{2}{T}[\int_{-\frac{T}{2}}^{0} f(t)\operatorname{sen} n\omega_0 t\ dt+\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)\operatorname{sen} n\omega_0 t\ dt]$$

$$=\frac{2}{T}[-\int_{-\frac{T}{2}}^{0}\operatorname{sen} n\omega_0 t\ dt+\int_{0}^{\frac{T}{2}}\operatorname{sen}(n\omega_0 t)dt]=\frac{2}{T}[\frac{\cos(n\omega_0 t)}{n\omega_0}\Big/_{-\frac{T}{2}}^{0}+\frac{\cos(n\omega_0 t)}{n\omega_0}\Big/_{0}^{\frac{T}{2}}]$$

$$=\frac{2}{T}[(\frac{1}{n\omega_0}-\frac{\cos(n\pi)}{n\omega_0})-(\frac{\cos n\pi}{n\omega_0}-\frac{1}{n\omega_0})]$$

$$=\frac{2}{T}(\frac{2}{n\omega_0}-\frac{2\cos n\pi}{n\omega_0})=\frac{4}{T}(\frac{1-\cos n\pi}{n\omega_0})\ ,\ \omega_0=\frac{2\pi}{T}$$

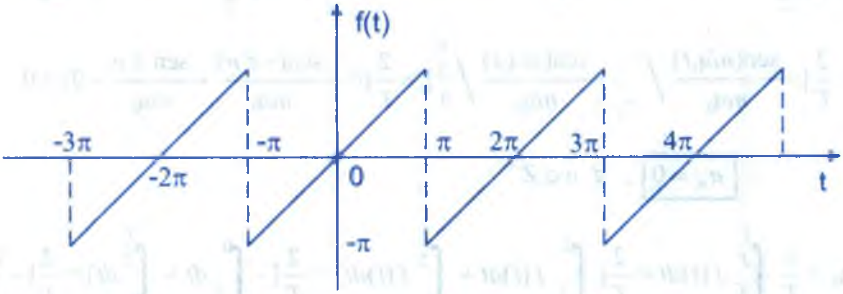
$$=\frac{4}{T}(\frac{1-\cos n\pi}{\frac{2\pi n}{T}})=\frac{2}{n\pi}(1-\cos n\pi)\ ,\ \text{como}\quad \cos n\pi=(-1)^n$$

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ \dfrac{4}{n\pi}, & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}, \quad \text{de donde} \quad b_{2n-1} = \frac{4}{(2n-1)\pi}$$

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1} \operatorname{sen} n\omega_0 t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)\pi} \operatorname{sen} n\pi t \qquad \therefore \quad f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \operatorname{sen} n\pi t}{(2n-1)\pi}$$

(5) Encontrar la serie de Fourier de la función definida por: f(t) = t para el intervalo <-π,π> y f(t + 2π) = f(t)

Solución



La serie de Fourier de la función f(t) se expresa:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \omega_0 nt + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t), \text{ donde}$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} t\, dt = 0, \text{ por ser f(t) impar}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega_0 t \ dt = \frac{2}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} t \cos n\omega_0 t \ dt = 0$$

puesto que: $t \cos n\omega_0 t$ es función impar

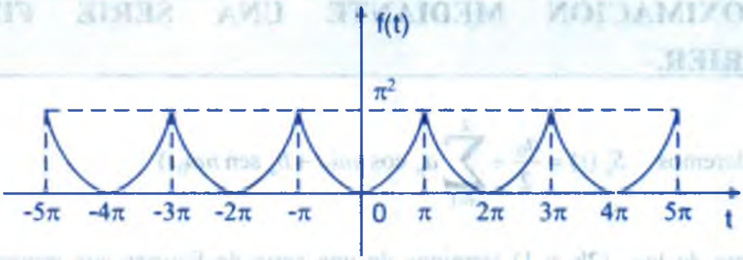
$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \operatorname{sen} n\omega_0 t \ dt = \frac{2}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} t \operatorname{sen} n\omega_0 t \ dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \operatorname{sen} n\omega_0 t \ dt$$

$$=\frac{1}{\pi}[\frac{\operatorname{sen} n\omega_0 t}{(n\omega_0)^2}-\frac{t\cos n\omega_0 t}{n\omega_0}]\Big/_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{\pi}[\frac{(-1)^n\pi}{n}+\frac{(-1)^n\pi}{n}]=\frac{2(-1)^n}{n}$$

$$\therefore \quad f(t)=2\sum_{n}^{\infty}(-1)^n \operatorname{sen} nt$$

6 Encontrar la serie de Fourier para la función f(t) definida por $f(t)=t^2$ en el intervalo <-π,π> y f(t + 2π) = f(t)

Solución



La serie de Fourier de la función f(t) se expresa

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_0 t+b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t)\text{ , donde}$$

$$a_0=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}t^2dt=\frac{t^3}{3\pi}\Big/_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{3\pi}[\pi^3+\pi^3]=\frac{2\pi^2}{3}$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\cos n\omega_0 t\ dt\text{ , donde }\omega_0=\frac{2\pi}{T}=1\Rightarrow\omega_0=1$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}t^2\cos nt\ dt=\frac{1}{\pi}[\frac{t^2\operatorname{sen} nt}{n}+\frac{2t\cos nt}{n^2}-\frac{2}{n^3}\operatorname{sen} nt]\Big/_{-\pi}^{\pi}=\frac{4}{n^2}\cos n\pi$$

$$a_n=\begin{cases}\dfrac{4}{n^2} & \text{si } n \text{ es par}\\[2mm] -\dfrac{4}{n^2} & \text{si } n \text{ es impar}\end{cases}\qquad\text{de donde }a_n=\frac{(-1)^n4}{n^2}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,\text{sen}\, n\omega_0 t\ dt\ ,\ \text{donde}\ \ \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 1 \ \Rightarrow\ \omega_0 = 1$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2\,\text{sen}\, nt\ dt = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{t^2}{n}\cos nt + \frac{2t}{n^2}\,\text{sen}\, nt + \frac{2\cos nt}{n^3}\right)\Big/_{-\pi}^{\pi}$$

de donde se tiene $b_n = 0$, por lo tanto $f(t) = \dfrac{\pi^2}{3} + 4\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nt$

14.6. APROXIMACIÓN MEDIANTE UNA SERIE FINITA DE FOURIER.-

Consideremos $S_k(t) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{k} a_n \cos n\omega_0 t + b_n\,\text{sen}\, n\omega_0 t)$ ... **(1)**

La suma de los (2k + 1) términos de una serie de Fourier que representa f(t) en el intervalo $-\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$. Si f(t) se aproxima por $S_k(t)$, es decir:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{k}(a_n \cos n\omega_0 t + b_n\,\text{sen}\, n\omega_0 t) + \varepsilon_k(t) \qquad \text{... (2)}$$

donde $\varepsilon_k(t) = \displaystyle\sum_{n=k+1}^{\infty}(a_n \cos n\omega_0 t + b_n\,\text{sen}\, n\omega_0 t)$ ... **(3)**

entonces: $\boxed{\varepsilon_k(t) = f(t) - S_k(t)}$ ... **(4)**

$\varepsilon_k(t)$ es la diferencia o error entre f(t) y su aproximación, entonces el error cuadrático medio es denotado por E_k y está definido como:

$$\boxed{E_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}[\varepsilon_k(t)]^2\,dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}(f(t) - S_k(t))^2\,dt} \qquad \text{... (5)}$$

14.7. TEOREMA 1.- Si se aproxima la función f(t) por una serie finita de Fourier $S_k(t)$. Entonces esta aproximación tiene la propiedad de ser él mínimo error cuadrático medio.

Demostración

Como $E_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [f(t) - S_k(t)]^2\,dt$ y $S_k(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{k}(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t)$

Entonces $E_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [f(t) - \frac{a_0}{2} - \sum_{n=1}^{k}(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t)]^2\,dt$

Consideremos E_k como una función de a_0, a_n y b_n, entonces para que el error cuadrático medio E_k sea un mínimo, se debe cumplir que:

$\frac{\partial E_k}{\partial a_0} = 0$, $\frac{\partial E_k}{\partial a_n} = 0$, $\frac{\partial E_k}{\partial b_n} = 0$, n = 1, 2, ..., k. En efecto:

$$\frac{\partial E_k}{\partial a_0} = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [f(t) - \frac{a_0}{2} - \sum_{n=1}^{k}(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t)](-\frac{dt}{2})$$

$$= -\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt + \frac{a_0}{2T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt + \frac{1}{T}\sum_{n=1}^{k} a_n \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos n\omega_0 t\,dt + \frac{1}{T}\sum_{n=1}^{k} b_n \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \operatorname{sen} n\omega_0 t\,dt$$

pero como $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos n\omega_0 t\,dt = 0$, para n ≠ 0;

$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \operatorname{sen} n\omega_0 t\,dt = 0$, ∀ n = 1,2,3,... y $a_0 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt \Rightarrow \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt = \frac{a_0}{2}$

$\frac{a_0}{2T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt = \frac{a_0}{2T}[\frac{T}{2} + \frac{T}{2}] = \frac{a_0}{2}$, entonces se tiene: $\frac{\partial E_k}{\partial a_0} = -\frac{a_0}{2} + \frac{a_0}{2} + 0 + 0 = 0$

de donde $\frac{\partial E_k}{\partial a_0} = 0$

$$\frac{\partial E_k}{\partial a_n}=-\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}[f(t)-\frac{a_0}{2}-\sum_{n=1}^{k}a_n\cos n\omega_0 t-\sum_{n=1}^{k}b_n\,\text{sen}\,n\omega_0 t]\cos n\omega_0 t\;dt$$

$$=-\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\cos n\omega_0 t\;dt+\frac{a_0}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\cos n\omega_0 t\;dt+\frac{2}{T}\sum_{n=1}^{k}a_n\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\cos^2 n\omega_0 t\;dt$$

$$+\frac{2}{T}\sum_{n=1}^{k}b_n\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\text{sen}\,n\omega_0 t\cos n\omega_0 t\,dt$$

$$=-a_n+\frac{a_0}{T}(0)+\frac{2}{T}a_n.\frac{T}{2}+\frac{2}{T}\sum_{n=1}^{k}b_n(0)=-a_n+a_n=0$$

$$\therefore\quad \frac{\partial E_k}{\partial a_n}=0\,,\;\; n=1,2,\ldots,k$$

análogamente se prueba que $\frac{\partial E_k}{\partial a_n}=0$, n = 1,2,3, ..., k

14.8. TEOREMA 2.-

El error cuadrático E_k en una aproximación a f(t) por $S_k(t)$ definida por $E_k=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}[f(t)-S_k(t)]^2\,dt$ se reduce

$$E_k=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}[f(t)]^2\,dt-\frac{a_0^2}{4}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{k}(a_n^2+b_n^2)$$

Demostración

Desarrollando $E_k=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}[f(t)-S_k(t)]^2\,dt$ se tiene:

$$E_k=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}[f(t)]^2\,dt-\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t).S_k(t)dt+\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}[S_k(t)]^2\,dt \qquad \ldots(\alpha)$$

calculando las dos ultimas integrales se tiene:

$$\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t).S_k(t)dt=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)[\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{k}(a_n\cos n\omega_0 t+b_n\,\text{sen}\,n\omega_0 t)]dt$$

$$= \frac{a_0}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt + \sum_{n=1}^{k} a_n \underbrace{(\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\omega_0 t\ dt)}_{a_n} + \sum_{n=1}^{k} b_n\, a_n \underbrace{(\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\operatorname{sen} n\omega_0 t\ dt)}_{b_n}$$

$$= \frac{a_0}{T}(\frac{a_0 T}{2}) + \sum_{n=1}^{k} a_n^2 + \sum_{n=1}^{k} b_n^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{k}(a_n^2 + b_n^2)$$

$$\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t).S_k(t)dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{k}(a_n^2 + b_n^2) \quad \ldots (\beta)$$

$$\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}[S_k(t)]^2 dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{k}(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t)]^2 dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}[\frac{a_0^2}{4} + a_0\sum_{n=1}^{k} a_n \cos n\omega_0 t + a_0 \sum_{n=1}^{k} b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t$$

$$+(\sum_{n=1}^{k}(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t))^2]dt$$

$$= \frac{a_0^2}{4} + \frac{a_0}{T}\sum_{n=1}^{k} a_n \underbrace{\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos n\omega_0 t\ dt}_{0} + \frac{a_0}{T}\sum_{n=1}^{k} b_n \underbrace{\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \operatorname{sen} n\omega_0 t\ dt}_{0}$$

$$+\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}[\sum_{n=1}^{k}(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t)]^2 dt$$

$$\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}[S_k(t)]^2 dt = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}[\sum_{n=1}^{k}(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t)]^2 dt$$

$$[\sum_{n=1}^{k}(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t)]^2 = [a_1 \cos \omega_0 t + a_2 \cos 2\omega_0 t + \ldots + a_k \cos k\omega_0 t$$

$$+ b_1 \operatorname{sen} \omega_0 t + b_2 \operatorname{sen} 2\omega_0 t + \ldots + b_k \operatorname{sen} k\omega_0 t]$$

$$= \sum_{n=1}^{k} a_n^2 \cos^2 nw_0 t + \sum_{n=1}^{k} b_n^2 \operatorname{sen}^2 n\omega_0 t + 2\sum_{n,m=1,\ n\neq m}^{k} a_n a_m \cos n_0 t.\cos m\omega_0 t +$$

$$+2\sum_{n,m=1,\ n\neq m}^{k} b_n b_m \operatorname{sen} n\omega_0 t \operatorname{sen} m\omega_0 t + 2\sum_{n,m=1}^{k} a_n b_m \cos n\omega_0 t.\operatorname{sen} m\omega_0 t \ \ldots (*)$$

ahora multiplicando por $\frac{1}{T}$ e integrando en (*) se tiene:

$$\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [\sum_{n=1}^{k} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} \omega_0 t)]^2 dt = \frac{1}{T}\sum_{n=1}^{k} a_n^2 \frac{T}{2} + \frac{1}{T}\sum_{n=1}^{k} b_n^2 \frac{T}{2}$$

$$+\frac{2}{T}\sum_{n,m=1}^{k} a_n a_m \underbrace{\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos n\omega_0 t.\cos m\omega_0 t\ dt}_{0} + \frac{2}{T}\sum_{n,m=1}^{k} b_n b_m \underbrace{\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \operatorname{sen} n\omega_0 t.\operatorname{sen} m\omega_0 t\ dt}_{0}$$

$$+\frac{2}{T}\sum_{n,m=1}^{k} a_n b_m \underbrace{\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos n\omega_0 t.\operatorname{sen} m\omega_0 t\ dt}_{0} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{k} (a_n^2 + b_n^2)$$

$$\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [S_k(t)]^2 dt = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{k} (a_n^2 + b_n^2) \qquad \ldots (\gamma)$$

Luego al reemplazar (β), (γ) en (α) se tiene:

$$E_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [f(t)]^2 dt - \frac{a_0^2}{2} - \sum_{n=1}^{k} (a_n^2 + b_n^2) + \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{k} (a_n^2 + b_n^2)$$

$$E_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [f(t)]^2 dt - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{k} (a_n^2 + b_n^2)$$

OBSERVACIONES.-

1. Como $E_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [\varepsilon_k(t)]^2 dt$ entonces $E_k > 0$, k = 1,2,...

(2) Como $E_k \geq 0 \ \wedge \ E_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}[f(t)]^2\,dt - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{k}(a_n^2 + b_n^2)$

entonces $\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}[f(t)]^2\,dt - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{k}(a_n^2 + b_n^2) \geq 0$, de donde

$$\frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{k}(a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}[f(t)]^2\,dt$$

14.9. TEOREMA 3.- (TEOREMA DE PARSEVAL).-

Si a_0, a_n y b_n, para n = 1,2,..., son los coeficientes de Fourier en la expresión de Fourier de una función periódica f(t) con periodo T, entonces

$$\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}[f(t)]^2\,dt = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

Demostración

Como $E_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}[f(t)]^2\,dt - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{k}(a_n^2 + b_n^2)$, $\forall$ k = 1,2,...

Entonces $\{E_k\}_{k\geq 1}$, es una sucesión de términos positivos

Ahora analizaremos si la sucesión es decreciente es decir:

$$E_{k+1} = \underbrace{\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}[f(t)]^2\,dt - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{k}(a_n^2 + b_n^2)}_{E_k} - \frac{1}{2}(a_{k+1}^2 + b_{k+1}^2)$$

Entonces $E_{k+1} = E_k - \frac{1}{2}(a_{k+1}^2 + b_{k+1}^2)$, de donde

$$E_{k+1} - E_k = -\frac{1}{2}(a_{k+1}^2 + b_{k+1}^2) < 0 \ \Rightarrow \ E_{k+1} < E_k$$

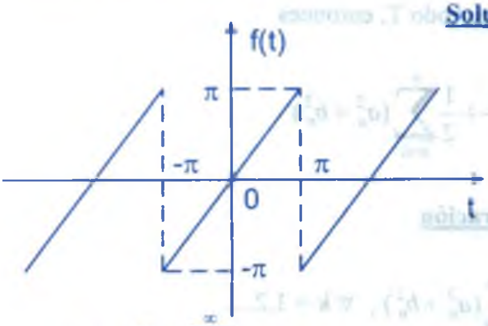
por lo tanto la sucesión $\{E_k\}_{k\geq 1}$ es decreciente pero $(0 \leq E_{k+1} \leq E_k \leq E_2 \leq E_1)$ es decir que la sucesión $\{E_k\}_{k\geq 1}$ es acotada, por lo tanto la sucesión $\{E_k\}_{k\geq 1}$ es convergente y $\lim\limits_{k\to\infty} E_k = 0$

pero $\lim\limits_{k\to\infty} E_k = \lim\limits_{k\to\infty}\left(\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}[f(t)]^2\,dt - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{k}(a_n^2+b_n^2)\right) = 0$

de donde $\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}[f(t)]^2\,dt = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{k}(a_n^2+b_n^2)$

Ejemplo.- Aproximar la función $f(t) = t$ en el intervalo $<-\pi,\pi>$ mediante una serie infinita de Fourier de 5 términos que sean diferentes de cero, calcular también el error cuadrático medio en la aproximación.

Solución



$f(t) = t,\ t \in <-\pi,\pi>$

$T = 2\pi,\quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 1$

La serie de Fourier de la función $f(t) = t$ es:

$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} \omega_0 t)$, donde:

$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dt = 0$ por ser $f(t) = t$ impar

$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\omega_0 t\ dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\cos nt\ dt = 0$ puesto que la función $t \cos nt$ es impar en $<-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}>$

$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\operatorname{sen} n\omega_0 t\ dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\operatorname{sen} nt\ dt = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} t\operatorname{sen} nt\ dt$

$$= \frac{2}{\pi}[\frac{1}{n^2}\operatorname{sen} nt - \frac{t}{n}\cos nt] \Big/_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}[\overbrace{\frac{1}{n^2}\operatorname{sen} n\pi}^{0} - \frac{\pi}{n}\cos n\pi]$$

$$= -\frac{2}{n}\cos n\pi \text{ , de donde } b_n = -\frac{2}{n}(-1)^n = \frac{2}{n}(-1)^{n-1}$$

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}(-1)^{n-1} \operatorname{sen} nt = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \operatorname{sen} nt \text{ , sabemos que}$$

$$S_k(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t) \quad \therefore \quad S_5(t) = 2\sum_{n=1}^{5} \frac{(-1)^{n-1} \operatorname{sen} nt}{n}$$

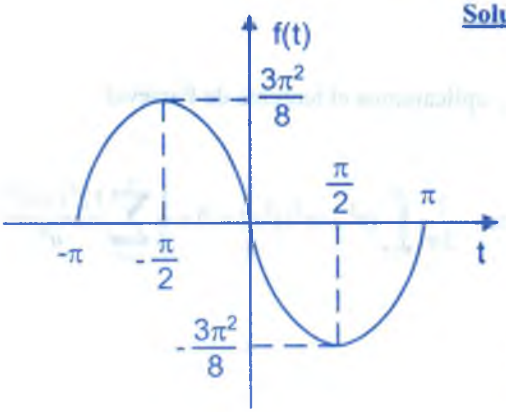
$$E_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t)dt - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{k}(a_n^2 + b_n^2)$$

$$E_5 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{5}\frac{4}{n^2} = \frac{\pi^2}{3} - 2[1 + 0.25 + 0.111 + ... + 0.04] = \frac{\pi^2}{3} - 2.9272 = 0.363$$

$$\therefore \quad E_5 = 0.363$$

Ejemplo.- Hallar la serie de Fourier de la función $f(t) = t^3 - \pi^2 t$, $-\pi \le t \le \pi$; $f(t) = f(t + 2\pi)$, aplicar el teorema de Parseval al resultado para calcular la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$

Solución



$f(\pi) = f(-\pi) = 0$

$$f(-\frac{\pi}{2}) = \frac{3\pi^2}{8}$$

$$f(\frac{\pi}{2}) = -\frac{3\pi^2}{8}$$

$f(t) = t^3 - \pi t$ es una función impar entonces $a_0 = a_n = 0$

Luego la serie de Fourier es: $f(t)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nt$, donde $b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\operatorname{sen} nt\ dt$

$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\operatorname{sen} nt\ dt$, puesto que f(t) sen nt, es función par

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(t^3-\pi^2 t)sen\,nt\,dt=\frac{2}{\pi}(\int_0^{\pi}t^3 sen\,nt\,dt-\pi^2\int_0^{\pi}t\,sen\,nt\,dt) \quad \text{... (1)}$$

$$\int_0^{\pi}t^3\operatorname{sen} nt\ dt=[-\frac{t^3\cos nt}{n}+\frac{3}{n^2}t^2\operatorname{sen} nt+\frac{6t}{n^3}\cos nt-\frac{6}{n^4}\operatorname{sen} nt]\Big/_0^{\pi}$$

$$=-\frac{1}{n}\pi^3(-1)+\frac{6\pi}{n^3}(-1)^n=-\frac{\pi^3}{n}(-1)^n+\frac{6\pi}{n^3}(-1)^n \quad \text{... (2)}$$

$$\int_0^{\pi}t\operatorname{sen} nt\ dt=(-\frac{t\cos nt}{n}+\frac{1}{n^2}\operatorname{sen} t)\Big/_0^{\pi}=-\frac{\pi}{n}(-1)^n \quad \text{... (3)}$$

reemplazando (2) y (3) en (1) se tiene:

$$b_n=\frac{2}{\pi}[-\frac{\pi^3}{n}(-1)^n+\frac{6\pi}{n^3}(-1)^n-\pi^2(-\frac{\pi}{n})(-1)^n]$$

$$=-\frac{2\pi^2}{n}(-1)+\frac{12}{n^3}(-1)^n+\frac{2\pi^2}{n}(-1)^n=\frac{12}{n^3}(-1)^n \;\Rightarrow\; b_n=\frac{12}{n^3}(-1)^n$$

$$\therefore\quad f(t)=12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\operatorname{sen} nt}{n^3}$$

para calcular la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}$, aplicaremos el teorema de Parseval

$$\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f^2(t)dt=\frac{a_0}{4}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2) \;\Rightarrow\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(t^3-\pi^2 t)^2 dt=0+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{12^2(-1)^{2n}}{n^6}$$

$$\frac{1}{\pi}[\frac{t^7}{7}-\frac{2\pi^2 t^5}{5}+\frac{\pi^4 t^3}{3}]\Big/_{-\pi}^{\pi}=72\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}$$

$$\frac{1}{\pi}[\frac{\pi^7}{7}-\frac{2\pi^7}{5}+\frac{\pi^7}{3}]-\frac{1}{\pi}[-\frac{\pi^7}{7}+\frac{2\pi^5}{5}-\frac{\pi^7}{3}]=72\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}$$

$$\frac{1}{\pi}[\frac{2\pi^7}{7}-\frac{4\pi^7}{5}+\frac{2\pi^7}{3}]=144\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6} \quad \text{por lo tanto} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}=\frac{1}{144}[\frac{16}{105}]\pi^6=\frac{\pi^6}{945}$$

14.10. CONVERGENCIA DE LA SERIE DE FOURIER.-

Sea f una función periódica con periodo T y sea

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega_0 t+b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t) \qquad \textbf{... (1)}$$

donde $\omega_0=\frac{2\pi}{T}$ y a_n y b_n son los coeficientes de Fourier de f(t)

Problema 1.- Sí $S_k(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{k}(a_n \cos n\omega_0 t+b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t)$ **... (2)**

La suma de los (2k + 1) términos de la serie de Fourier de f(t) donde $\omega_0=\frac{2\pi}{T}$ y

$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\omega_0 t\,dt$; $b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\operatorname{sen} n\omega_0 t\,dt$, entonces:

$$S_k(t)=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\frac{\operatorname{sen}(k+\frac{1}{2})(z-t)}{2\operatorname{sen}\omega_0(\frac{z-t}{2})}dz$$

Demostración

Como $S_k(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{k}a_n \cos n\omega_0 t+\sum_{n=1}^{k}b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t$

$$=\frac{1}{2}[\frac{2}{t}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt]+\sum_{n=1}^{k}(\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\omega_0 z\,dz)\cos n\omega_0 t$$

$$+\sum_{n=1}^{k}(\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\operatorname{sen} n\omega_0 z\,dz)\operatorname{sen} n\omega_0 t$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt + \sum_{n=1}^{k}\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(z)(\cos n\omega_0 z.\cos n\omega_0 t + \operatorname{sen} n\omega\ z.\operatorname{sen} n\omega_0 t)dz$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(z)dz + \sum_{n=1}^{k}\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(z)\cos n\omega_0(z-t)dz$$

$$= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(z)dz[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{k}\cos n\omega_0(z-t)]dz \qquad \text{... }(\alpha)$$

sabemos que: $\operatorname{sen}\omega_0(n+\frac{1}{2})s - \operatorname{sen}\omega_0(n-\frac{1}{2})s = 2\operatorname{sen}\frac{\omega_0 s}{2}\cos n\omega_0 s$, entonces

$$\sum_{n=1}^{k}[\operatorname{sen}\omega_0(n+\frac{1}{2})s - \operatorname{sen}\omega_0(n-\frac{1}{2})s] = 2\operatorname{sen}\frac{\omega_0 s}{2}\sum_{n=1}^{k}\cos n\omega_0 s$$

$$[\operatorname{sen}\frac{3\omega_0 s}{2} - \operatorname{sen}\frac{\omega_0 s}{2}] + [\operatorname{sen}\frac{5}{2}\omega_0 s - \operatorname{sen}\frac{3}{2}\omega_0 s] + ... + [\operatorname{sen}\omega_0(k+\frac{1}{2})s - \operatorname{sen}\omega_0(k-\frac{1}{2})s] =$$

$$= 2\operatorname{sen}\frac{\omega_0 s}{2}\sum_{n=1}^{k}\cos n\omega_0 s = \operatorname{sen}\omega_0(k+\frac{1}{2})s - \operatorname{sen}\frac{\omega_0 s}{2}$$

Luego $\operatorname{sen}\omega_0(k+\frac{1}{2})s - \operatorname{sen}\frac{\omega_0 s}{2} = 2\operatorname{sen}\frac{\omega_0 s}{2}\sum_{n=1}^{k}\cos n\omega_0 s$, (s = z – t)

$$\operatorname{sen}\omega_0(k+\frac{1}{2})s = 2\operatorname{sen}\frac{\omega_0 s}{2}[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{k}\cos n\omega_0 s]$$

$$\frac{\operatorname{sen}\omega_0(k+\frac{1}{2})(z-t)}{2\operatorname{sen}\frac{\omega_0}{2}(z-t)} = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{k}\cos n\omega_0(z-t) \qquad \text{... }(\beta)$$

reemplazando (β) en (α) se tiene:

$$S_k(t) = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(z)[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{k}\cos n\omega_0(z-t)]dz = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(z)\frac{\operatorname{sen}\omega_0(k+\frac{1}{2})(z-t)}{2\operatorname{sen}\frac{\omega_0}{2}(z-t)}dz \text{ ... }(*)$$

Problema 2.- Demostrar que la expresión (*) se puede escribir como

$$S_k(t)=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t+\lambda)\frac{\operatorname{sen}(k+\frac{1}{2})\omega_0\lambda}{2\operatorname{sen}\frac{\omega_0\lambda}{2}}d\lambda$$

Demostración

En la expresión asterisco (*) hacemos $z-t=\lambda$ de donde $dz=d\lambda$

Además $-\frac{T}{2}\le z\le\frac{T}{2} \Rightarrow -\frac{T}{2}\le\lambda+t\le\frac{T}{2}\Rightarrow -\frac{T}{2}-t\le\lambda\le\frac{T}{2}-t$

entonces $S_k=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}-t}^{\frac{T}{2}-t} f(t+\lambda)\frac{\operatorname{sen}(k+\frac{1}{2})\omega_0\lambda}{2\operatorname{sen}\frac{\omega_0\lambda}{2}}d\lambda$ pero $f(t+\lambda+T)=f(t+\lambda)$

además $\frac{\operatorname{sen}(k+\frac{1}{2})\omega_0\lambda}{2\operatorname{sen}\frac{\omega_0\lambda}{2}}=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{k}\cos n\omega_0\lambda$ entonces

$$\frac{\operatorname{sen}(k+\frac{1}{2})\omega_0(\lambda+T)}{2\operatorname{sen}\frac{\omega_0(\lambda+T)}{2}}=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{k}\cos n\omega_0\lambda+T)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{k}\cos n\omega_0\lambda=\frac{\operatorname{sen}(k+\frac{1}{2})\omega_0\lambda}{2\operatorname{sen}(\frac{\omega_0\lambda}{2})}$$

por lo tanto la función integrando es periódica con periodo T en la variable "λ"

además sabemos que: Sí $f(t+T)=f(t),\ \forall\, t$ entonces $\int_{a-\frac{T}{2}}^{a+\frac{T}{2}} f(t)dt=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt$

$$\therefore\quad S_k(t)=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\lambda'+t)\frac{\operatorname{sen}(k+\frac{1}{2})\omega_0\lambda}{2\operatorname{sen}\frac{\omega_0\lambda}{2}}d\lambda$$

Problema 3.- Sea f(t) una función periódica, con periodo T, integrable absolutamente en un periodo. Entonces en todo punto de continuidad donde existe la derivada, la serie de Fourier de f(t) converge al valor f(t), es decir $\lim_{k\to\infty} S_k(t)=f(t)$

Demostración

Sea $S_k(t)=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t+\lambda)\frac{sen(k+\frac{1}{2})\omega_0\lambda}{2sen\frac{\omega_0\lambda}{2}}d\lambda$ ... **(1)**

Sea t un punto de continuidad de f(t), como $\frac{\text{sen}(k+\frac{1}{2})\omega_0\lambda}{2\,\text{sen}\frac{\omega_0\lambda}{2}}=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{k}\cos n\omega_0\lambda$, entonces

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\frac{\text{sen}(k+\frac{1}{2})\omega_0\lambda}{2\,\text{sen}\frac{\omega_0\lambda}{2}}d\lambda=\frac{1}{2}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}d\lambda+\underbrace{\sum_{n=1}^{k}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\cos n\omega_0\lambda\,d\lambda}_{0}=\frac{T}{2}$$, de donde se tiene:

$$\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\frac{\text{sen}(k+\frac{1}{2})\omega_0\lambda}{2\,\text{sen}\frac{\omega_0\lambda}{2}}d\lambda=1 \quad \text{y} \quad f(t)=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\frac{\text{sen}(k+\frac{1}{2})\omega_0\lambda}{2sen\frac{\omega_0\lambda}{2}}d\lambda$$, luego tenemos:

$$S_k(t)-f(t)=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t+\lambda)\frac{\text{sen}(k+\frac{1}{2})\omega_0\lambda}{2\,\text{sen}\,\omega_0\lambda}d\lambda-\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\frac{\text{sen}(k+\frac{1}{2})\omega_0\lambda}{2\,\text{sen}\frac{\omega_0\lambda}{2}}d\lambda$$

$$=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}[f(t+\lambda)-f(t)]\frac{\text{sen}(k+\frac{1}{2})\omega_0\lambda}{2\,\text{sen}\,\omega_0\lambda}d\lambda$$, consideremos

$g(\lambda)=\frac{f(\lambda+t)-f(t)}{2\,\text{sen}\,\omega_0\lambda}$, entonces: $S_k(t)-f(t)=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}g(\lambda)\,\text{sen}(k+\frac{1}{2})\omega_0\lambda\,d\lambda$

$$\lim_{k\to\infty}[S_k(t)-f(t)]=\lim_{k\to\infty}\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}g(\lambda)\,\text{sen}(k+\frac{1}{2})\omega_0\lambda\,d\lambda=0 \qquad \therefore \lim_{k\to\infty}S_k(t)=f(t)$$

OBSERVACIONES.-

1. Si a_n y b_n son sucesiones de los coeficientes de Fourier de f(t) $\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty}=a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=0$. En efecto:

   Sabemos que $\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{k}(a_n^2+b_n^2)\le\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f^2(t)\,dt$ y $\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{k}(a_n^2+b_n^2)-\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f^2(t)dt$

   es convergente (E_k) con límite cero entonces:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n^2+b_n^2)=0 \iff \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

2 Si f(t) es una función continua por tramos y la integral del valor de f(t) es finita $\left(\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)|\,dt < \infty\right)$ entonces $-\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\omega_0 t\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) sen n\omega_0 t\,dt = 0$$

como $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)|\,dt < \infty \Rightarrow \exists\, a_n$ y b_n tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$

entonces $\lim_{n\to\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\omega_0 t\ dt = \lim_{n\to\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,\mathrm{sen}\, n\omega_0 t\ dt$

14.11. LEMA (EL LEMA DE RIEMANN LABESGUE).-

Si g es una función continua por tramos en [a,b], entonces

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_a^b g(x)\,\mathrm{sen}(\lambda x)dx = \lim_{\lambda\to\infty} \int_a^b g(x)\cos(\lambda x)dx = 0$$

Demostración

Demostraremos que: $\lim_{\lambda\to\infty} \int_a^b g(x)\,\mathrm{sen}(\lambda x)dx = 0$

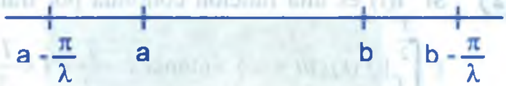
Hacemos $I(\lambda) = \int_a^b g(x)\,\mathrm{sen}(\lambda x)dx$, $a \le x \le b$ **... (1)**

Y sea $x = t + \frac{\pi}{\lambda}$, $a \le x \le b \Rightarrow a \le t + \frac{\pi}{\lambda} \le b \Rightarrow a - \frac{\pi}{\lambda} \le t \le b - \frac{\pi}{\lambda}$

$$I(\lambda) = \int_{a-\frac{\pi}{\lambda}}^{b-\frac{\pi}{\lambda}} g(t+\frac{\pi}{\lambda})\,\mathrm{sen}\,\lambda(t+\frac{\pi}{l})dt = -\int_{a-\frac{\pi}{\lambda}}^{b-\frac{\pi}{\lambda}} g(t+\frac{\pi}{\lambda})\,\mathrm{sen}\,\lambda t\ dt$$

es decir: $I(\lambda)=-\int_{a-\frac{\pi}{\lambda}}^{b-\frac{\pi}{\lambda}} g(x+\frac{\pi}{\lambda})\operatorname{sen}\lambda x\, dx$ ... (2)

sumando (1) y (2) tenemos:



$$2I(\lambda)=-\int_{a-\frac{\pi}{\lambda}}^{b-\frac{\pi}{\lambda}} g(x-\frac{\pi}{x})\operatorname{sen}\lambda x\, dx+\int_a^b g(x)\operatorname{sen}\lambda x\, dx$$

$$=-\int_{a-\frac{\pi}{\lambda}}^{a} g(x+\frac{\pi}{\lambda})\operatorname{sen}\lambda x\, dx-\int_a^{b-\frac{\pi}{\lambda}} g(x+\frac{\pi}{\lambda})\operatorname{sen}\lambda x\, dx+$$

$$+\int_a^{b-\frac{\pi}{\lambda}} g(x)\operatorname{sen}\lambda x\, dx+\int_{b-\frac{\pi}{\lambda}}^{b} g(x)\operatorname{sen}\lambda x\, dx$$

$$=-\int_{a-\frac{\pi}{\lambda}}^{a} g(x+\frac{\pi}{\lambda})\operatorname{sen}\lambda x\, dx+\int_a^{b-\frac{\pi}{\lambda}} [g(x)-g(x+\frac{\pi}{\lambda})\operatorname{sen}\lambda x\, dx+\int_{b-\frac{\pi}{\lambda}}^{b} g(x)\operatorname{sen}\lambda x\, dx$$

consideremos que g (x) es continua en [a,b], entonces en este caso $\exists\, M>0$ tal que $|g(x)|\le M,\ \forall\, x\in[a,b]$ entonces

$$|2I(\lambda)|=2|I(\lambda)|\le\int_{a-\frac{\pi}{\lambda}}^{a}|g(x+\frac{\pi}{\lambda})|\,dx+\int_a^{b-\frac{\pi}{\lambda}}|g(x)-g(x+\frac{\pi}{\lambda})|\,dx+\int_{b-\frac{\pi}{\lambda}}^{b}|g(x)|\,dx$$

entonces $|2I(\lambda)|\le M((b-b+\frac{\pi}{\lambda})+M(a-a+\frac{\pi}{\lambda})+\int_a^{b-\frac{\pi}{\lambda}}|g(x)-g(x+\frac{\pi}{\lambda})|\,dx$

$$=2M\frac{\pi}{\lambda}+\underbrace{\int_a^{b-\frac{\pi}{\lambda}}|g(x)-g(x+\frac{\pi}{\lambda})|\,dx}_{<\varepsilon} \quad \text{... (*)}$$

OBSERVACION.- Dado ε>0, ∃ δ>0 / |y – x| < ε ⇒ | g(y)–g(x) | <ε entonces $\lambda \to \infty$

$$|(x+\frac{\pi}{\lambda})-x|=\frac{\pi}{x}<\varepsilon \quad \Rightarrow \quad |g(x+\frac{\pi}{\lambda})-g(x)|<\varepsilon$$

Luego por (*) y la observación se tiene: $|I(\lambda)|\le M\underbrace{\frac{\pi}{\lambda}}_{0}+\frac{1}{2}\varepsilon(b-a-\underbrace{\frac{\pi}{\lambda}}_{0})\to 0$

$$|I(\lambda)|\le\frac{\varepsilon}{2}(b-a)<\varepsilon \qquad \therefore \quad \lim_{\lambda\to\infty} I(\lambda)=0$$

Problema 4.- Sea f(t) una función continua por tramos, periódica con periodo T. Entonces en todo punto de discontinuidad de f(t) tiene una derivada de derecha e izquierda; la serie de Fourier de f(t) converge a $\frac{1}{2}(f(t^+)+g(t^-))$

<u>**Demostración**</u>

Probaremos que: $\lim\limits_{k\to\infty} S_k(t)=\frac{1}{2}[f(t^+)+f(t^-)]$

Donde $S_k(t)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{k}(a_n\cos n\omega_0 t+b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t)$

También sabemos que: $S_k(t)=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t+\lambda)\frac{\operatorname{sen}(k+\frac{1}{2})\omega_0\lambda}{2\operatorname{sen}\frac{\omega_0\lambda}{2}}d\lambda$

Es decir: $S_k(t^+)=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t^++\lambda)\frac{\operatorname{sen}(k+\frac{1}{2})\omega_0\lambda}{2\operatorname{sen}\frac{\omega_0\lambda}{2}}d\lambda+\frac{2}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t^++\lambda)\frac{\operatorname{sen}(k+\frac{1}{2})\omega_0\lambda}{2\operatorname{sen}\frac{\omega_0\lambda}{2}}d\lambda$

Entonces $\lim\limits_{k\to\infty} S_k(t^+)=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t^++\lambda)\frac{\operatorname{sen}(k+\frac{1}{2})\omega_0\lambda}{2\operatorname{sen}\frac{\omega_0\lambda}{2}}d\lambda+$

$$+\lim_{k\to\infty}\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t^++\lambda)\frac{\operatorname{sen}(k+\frac{1}{2})\omega_0\lambda}{2\operatorname{sen}\frac{\omega_0\lambda}{2}}d\lambda \quad ...(1)$$

Se tiene además $\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\frac{\operatorname{sen}(k+\frac{1}{2})\omega_0\lambda}{2\operatorname{sen}\frac{\omega_0\lambda}{2}}d\lambda=1$

En esta integral, la función integrando es una función par.

$$1=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\frac{\operatorname{sen}(k+\frac{1}{2})\omega_0\lambda}{2\operatorname{sen}\frac{\omega_0\lambda}{2}}d\lambda=\frac{4}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}}\frac{\operatorname{sen}(k+\frac{1}{2})\omega_0\lambda}{2\operatorname{sen}\frac{\omega_0\lambda}{2}}d\lambda=\frac{4}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{0}\frac{\operatorname{sen}(k+\frac{1}{2})\omega_0\lambda}{2\operatorname{sen}\frac{\omega_0\lambda}{2}}d\lambda$$

entonces: $\begin{cases}\dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{0}^{\frac{T}{2}}\frac{\operatorname{sen}(k+\frac{1}{2})\omega_0\lambda}{2\operatorname{sen}\frac{\omega_0\lambda}{2}}d\lambda=\frac{1}{2}\\[2ex] \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{-\frac{T}{2}}^{0}\frac{\operatorname{sen}(k+\frac{1}{2})\omega_0\lambda}{2\operatorname{sen}\frac{\omega_0\lambda}{2}}d\lambda=\frac{1}{2}\end{cases}$, entonces:

$$\frac{1}{2}f(t^+)=\frac{2}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}}f(t^+)\frac{\operatorname{sen}(k+\frac{1}{2})\omega_0\lambda}{2\operatorname{sen}\frac{\omega_0\lambda}{2}}d\lambda$$

$$\frac{1}{2}f(t^-)=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{0}f(t^-)\frac{\operatorname{sen}(k+\frac{1}{2})\omega_0\lambda}{2\operatorname{sen}\frac{\omega_0\lambda}{2}}d\lambda\ ,\quad \text{consideremos:}$$

$$\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t^++\lambda)\frac{\operatorname{sen}(k+\frac{1}{2})\omega_0\lambda}{2\operatorname{sen}\frac{\omega_0\lambda}{2}}d\lambda-\frac{1}{2}f(t^+)=\frac{2}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}}\frac{f(t^++\lambda)\operatorname{sen}(k+\frac{1}{2})\omega_0\lambda}{2\operatorname{sen}\frac{\omega_0\lambda}{2}}d\lambda-$$

$$-\frac{2}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}}f(t^+)\frac{\operatorname{sen}(k+\frac{1}{2})\omega_0\lambda}{2\operatorname{sen}\frac{\omega_0\lambda}{2}}d\lambda$$

$$= \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} [f(t^+ + \lambda) - f(t^+)] \frac{\text{sen}(k+\frac{1}{2})\omega_0\lambda}{2\,\text{sen}\frac{\omega_0\lambda}{2}} d\lambda$$

ahora sea $g(\lambda) = \dfrac{f(t^+ + \lambda) - f(t^+)}{2\,\text{sen}\frac{\omega_0\lambda}{2}}$ entonces g(λ) está bien definida y es continua luego

es integrable $\dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^{\frac{T}{2}} f(t^+ + \lambda)\frac{\text{sen}(k+\frac{1}{2})\omega_0\lambda}{2\,\text{sen}\frac{\omega_0\lambda}{2}} - \frac{1}{2}f(t^+) = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} g(\lambda)\,\text{sen}(k+\frac{1}{2})\omega_0\lambda\, d\lambda$

tomando limite cuando $k \to \infty$

$$\lim_{k\to\infty}[\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t^+ + \lambda)\frac{\text{sen}(k+\frac{1}{2})\omega_0\lambda}{2\,\text{sen}\frac{\omega_0\lambda}{2}} - \frac{1}{2}f(t^+)] = \lim_{k\to\infty}\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(\lambda)\,\text{sen}(k+\frac{1}{2})\omega_0\lambda\, d\lambda = 0$$

de donde $\displaystyle\lim_{k\to\infty}\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t^+ + \lambda)\frac{\text{sen}(k+\frac{1}{2})\omega_0\lambda}{2\,\text{sen}\frac{\omega_0\lambda}{2}} d\lambda = \frac{1}{2}f(t^+)$

análogamente $\displaystyle\lim_{k\to\infty}\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t^- + \lambda)\frac{\text{sen}(k+\frac{1}{2})\omega_0 t}{2\,\text{sen}\frac{\omega_0\lambda}{2}} d\lambda = \frac{1}{2}f(t^-)$

OBSERVACIÓN.- S_k : constante, entonces: $\displaystyle\lim_{k\to\infty} S_k(t^+) = \lim_{k\to\infty} S_k(t^-) = \lim_{k\to\infty} S_k(t)$

14.12. DIFERENCIACIÓN E INTEGRACIÓN DE LA SERIE DE FOURIER.-

TEOREMA.- Sea f(t) una función continua en $[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]$ y $f(-\frac{T}{2}) = f(\frac{T}{2})$ y $f'(t)$ es continua por tramos y diferenciable. Entonces la serie de Fourier de:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \text{sen}\, n\omega_0 t)$$

se puede derivar término a término para obtener

$$f'(t)=\sum_{n=1}^{\infty} n\omega_0(-a_n \operatorname{sen} n\omega_0 t + b_n \cos n\omega_0 t)$$

Demostración

f(t + T) = f(t), ∀ t entonces $f'(t+T)=f'(t)$ y

$$f'(t)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n \cos n\omega_0 t + \beta_n \operatorname{sen} n\omega_0 t)$$

donde $\alpha_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f'(t)\cos n\omega_0 t\ dt$, integrando por partes

$$\begin{cases} u=\cos n\omega_0 t \\ dv=f'(t)dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=-n\omega_0 \operatorname{sen} n\omega_0 t\ dt \\ v=f(t) \end{cases}$$

$$\alpha_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f'(t)\cos n\omega_0 t\ dt=\frac{2}{T}f(t)\cos n\omega_0 t\Big/_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}-\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} -n\omega_0 f(t)\operatorname{sen} n\omega_0 t\ dt$$

$$=\frac{2}{T}[f(\frac{T}{2})(-1)^n-f(-\frac{T}{2})(-1)^n]+n\omega_0(\frac{2}{T})\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\operatorname{sen} n\omega_0 t\ dt$$

$$=n\omega_0[\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\operatorname{sen} n\omega_0 t\ dt]=n\omega_0 b_n \Rightarrow \alpha_n=n\omega_0 b_n$$

$\beta_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f'(t)\operatorname{sen}(n\omega_0 t)dt$, integrando por partes tenemos:

Sean $\begin{cases} u=\operatorname{sen} n\omega_0 t \\ dv=f'(t)dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=n\omega_0 \cos n\omega_0 t \\ v=f(t) \end{cases}$

$$\beta_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f'(t)\operatorname{sen}(n\omega_0 t)dt=\frac{2}{T}f(t)\operatorname{sen} n\omega_0 t\Big/_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}-\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)n\omega_0 \cos n\omega_0 t\ dt$$

$$= \frac{2}{T}\underbrace{[f(\frac{T}{2})\operatorname{sen}\frac{n\omega_0 T}{2} - f(-\frac{T}{2})\operatorname{sen} n\omega_0(-\frac{T}{2})]}_{0} - \frac{2n\omega_0}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\omega_0 t\ dt$$

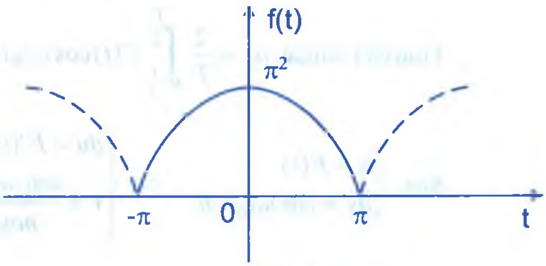
$$= -n\omega_0[\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\omega_0 t\ dt] = -n\omega_0 a_n \implies \beta_n = -n\omega_0 a_n$$

y $\alpha_0 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f'(t)dt = \frac{2}{T}[f(t)]\Big/_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = 0$

Entonces: $f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n\omega_0[b_n \cos n\omega_0 t - a_n \operatorname{sen} n\omega_0 t]$

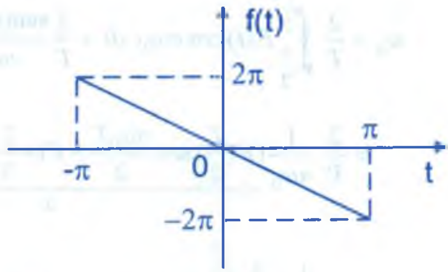
Ejemplo.- $f(t) = \pi^2 - t^2$, $-\pi \le t \le \pi$; $f(t + 2\pi) = f(t)$, $\forall\ t$

Hemos calculado su serie de Fourier de f(t) es decir:



$$f(t) = \frac{2\pi^3}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nt$$ y

$f'(t) = -2t$, continua por tramos y su serie de Fourier será:



$$f'(t) = 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(-n)\operatorname{sen} nt}{n^2}$$

$$= 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\operatorname{sen} nt$$

TEOREMA.- Sea f(t) una función continua por tramos en el intervalo $< -\frac{T}{2}, \frac{T}{2} >$ y

$f(t + T) = f(t)$, entonces: $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t)$;

se integra término a término para obtener:

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt = \frac{a_0}{2}(t_2 - t_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\omega_0}[-b_n(\cos n\omega_0 t_2 - \cos n\omega\ t) + a_n(\operatorname{sen} n\omega_0 t_2 - \operatorname{sen} n\omega_0 t_1)]$$

donde $t_1, t_2 \in <-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}>$, $t_1 < t_2$

Demostración

Como $f(t+t) = f(t)$, $\forall$ t y $F(t) = \int_0^t f(t)dt - \frac{a_0 t}{2}$

Entonces $F(t+T) = F(t)$, $\forall$ t, luego $F'(t) = f(t) - \frac{a_0}{2}$

Sea $F(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos n\omega_0 t + \beta_n \operatorname{sen} n\omega_0 t)$ (la representación de su serie de Fourier) donde $\alpha_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} F(t)\cos n\omega_0 t\, dt$, integrando por partes.

Sea $\begin{cases} u = F(t) \\ dv = \cos n\omega_0 t\ dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = F'(t)dt \\ v = \dfrac{\operatorname{sen} n\omega_0 t}{n\omega_0} \end{cases}$, entonces:

$$\alpha_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} F(t)\cos n\omega_0 t\ dt = \frac{2}{T}\frac{\operatorname{sen}(n\omega_0 t)}{n\omega_0}.F(t)\Big/_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} - \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{F'(t)\operatorname{sen}(n\omega_0 t)}{n\omega_0} dt$$

$$= \frac{2}{T}.\frac{1}{n\omega_0}\underbrace{[F(\frac{T}{2})\operatorname{sen}\frac{n\omega_0 T}{2} - F(-\frac{T}{2})\operatorname{sen}(-\frac{n\omega_0 T}{2})]}_{0} - \frac{2}{n\omega_0 T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} F'(t)\operatorname{sen} n\omega_0 t\ dt$$

$$= -\frac{1}{n\omega_0}[\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} F'(t)\operatorname{sen} n\omega_0 t\ dt] = -\frac{1}{n\omega_0}[\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (f(t) - \frac{a_0}{2})\operatorname{sen} n\omega_0 t\ dt$$

$$= -\frac{1}{n\omega_0}[\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\operatorname{sen} n\omega_0 t\ dt - \underbrace{\frac{a_0}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \operatorname{sen} n\omega_0 t\ dt}_{0\ \text{(por ser impar)}}]$$

$$\alpha_n = -\frac{1}{n\omega_0}[b_n - 0] = -\frac{b_n}{n\omega_0} \Rightarrow \alpha_n = -\frac{b_n}{n\omega_0}$$

$\beta_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} F(t)\,\text{sen}\, n\omega_0 t\ dt$, integrando por partes

Sea $\begin{cases} u = F(t) \\ dv = \text{sen}\, n\omega_0 t\ dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = F'(t)dt \\ v = -\dfrac{\cos n\omega_0 t}{n\omega_0} \end{cases}$

$$\beta_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} F(t)\,\text{sen}\, n\omega_0 t\ dt = \frac{2}{T}\left(-F(t)\frac{\cos n\omega_0 t}{n\omega_0}\right)\Big/_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} - \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} -\frac{F'(t)\cos n\omega_0 t}{n\omega_0}\,dt$$

$$= -\frac{2}{Tnw_0}[F(\frac{\pi}{2})(-1)^n - F(-\frac{\pi}{2})(-1)^n] + \frac{1}{n\omega_0}[\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} F'(t)\cos n\omega_0 t\ dt]$$

$$= \frac{2(-1)^n}{Tn\omega_0}[F(-\frac{T}{2}) - F(\frac{T}{2})] + \frac{1}{n\omega_0}[\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (f(t) - \frac{a_0}{2})\cos n\omega_0 t\ dt]$$

$$= \frac{2(-1)^n}{Tn\omega_0}[F(-\frac{T}{2}) - F(\frac{T}{2})] + \frac{1}{n\omega_0}[\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\omega_0 t\ dt - \frac{a_0}{T}\underbrace{\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos n\omega_0 t\ dt}_{0}]$$

$$= \frac{2(-1)^n}{Tn\omega_0}[F(-\frac{T}{2}) - F(\frac{T}{2})] + \frac{1}{n\omega_0}[\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\omega_0 t\ dt]$$

$$\beta_n = \frac{2(-1)^n}{Tn\omega_0}[F(-\frac{T}{2}) - F(\frac{T}{2})] + \frac{a_n}{n\omega_0}$$

pero $F(t) = \int_0^t f(t)dt - \frac{a_0 t}{2} \Rightarrow \begin{cases} F(\frac{T}{2}) = \int_0^{\frac{T}{2}} f(t)dt - \frac{a_0 T}{4} \\ F(-\frac{T}{2}) = \int_0^{-\frac{T}{2}} f(t)dt + \frac{a_0 T}{4} \end{cases}$

$$F(-\frac{T}{2})-F(\frac{T}{2})=\int_0^{-\frac{T}{2}} f(t)dt+\frac{a_0T}{4}-\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)dt+\frac{a\ T}{4}=-\int_{-\frac{T}{2}}^{0} f(t)dt-\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)dt+\frac{a_0T}{2}$$

$$=-\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt+\frac{a_0T}{2}=-\frac{a_0T}{2}+\frac{a_0T}{2}=0 \qquad \therefore \quad \beta_n=\frac{a_n}{n\omega_0}$$

Luego $F(t)=\dfrac{\alpha_0}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\omega_0}[-b_n\cos n\omega_0 t+a_n \operatorname{sen} n\omega_0 t]$

$$F(t_1)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\omega_0}[-b_n\cos n\omega_0 t_1+a_n \operatorname{sen} n\omega_0 t_1]$$

$$F(t_2)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\omega_0}[-b_n\cos n\omega_0 t_2+a_n \operatorname{sen} n\omega_0 t_2]$$

$$F(t_2)-F(t_1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\omega_0}[-b_n\cos n\omega_0 t_2+a_n \operatorname{sen} n\omega_0 t_2]-$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\omega_0}[-b_n\cos n\omega_0 t_1+a_n \operatorname{sen} n\omega_0 t_1]$$

$$\int_0^{t_2} f(t)dt-\frac{a_0t_2}{2}-\int_0^{t_1} f(t)dt+\frac{a_0t_1}{2}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\omega_0}[b_n(\cos n\omega_2 t_1-\cos n\omega_0 t_2)+a_n(\operatorname{sen} n\omega_0 t_2-\operatorname{sen} n\omega_0 t_1)]$$

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt=\frac{a_0}{2}(t_2-t_1)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\omega_0}[-b_n(\cos n\omega_0 t_2-\cos n\omega_0 t_1)+a_n(\operatorname{sen} n\omega_0 t_2-\operatorname{sen} n\omega_0 t_1)]$$

Ejemplo.- Dada la función $f(t)=t^2$, $0<t<2\pi$ y $f(t+2\pi)=f(t)$.

a) Hallar la serie de Fourier de la función f(t).

b) ¿Cuál es el punto de convergencia de la serie de Fourier de f(t) en cada punto de discontinuidad?

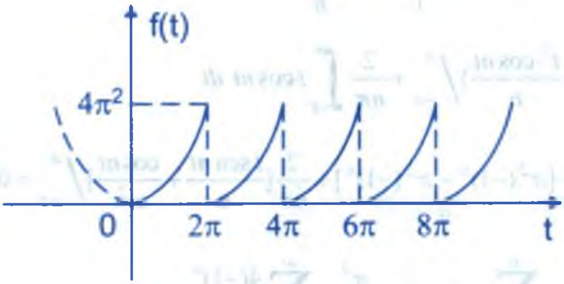
c) Hallar la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$

d) Hallar la serie de Fourier de $\frac{t}{3}(t^2-\pi^2)$, a partir de la parte (a)

e) Hallar la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n^3}+\frac{\pi^2}{n^2})$

Solución

a) Graficando la función $f(t)=t^2$, $0<t<2\pi$



La serie de Fourier de la función $f(t)=t^2$ es:

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_0 t+b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t)\text{, donde}$$

$$a_0=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}t^2dt=\frac{1}{\pi}\frac{t^3}{3}\Big/_{-\pi}^{\pi}=\frac{2\pi^2}{3}$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\cos n\omega_0 t\ dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}t^2\cos nt\ dt\text{, integrando por partes}$$

$$\begin{cases}u=t^2\\ dv=\cos nt\ dt\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=2t\ dt\\ v=\dfrac{\operatorname{sen} nt}{n}\end{cases}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cos nt\ dt = \underbrace{\frac{1}{\pi}\left(\frac{t^2 \operatorname{sen} nt}{n}\right)\Big/_{-\pi}^{\pi}}_{0} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{2t \operatorname{sen} nt}{n}dt = -\frac{2}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t \operatorname{sen} nt\ dt$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\left[-\frac{t\cos nt}{n} + \frac{\operatorname{sen} nt}{n^2}\right]\Big/_{-\pi}^{\pi} = \frac{4(-1)^n}{n^2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\operatorname{sen} n\omega_0 t\ dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2 \operatorname{sen} nt\ dt \text{, integrando por partes}$$

$$\begin{cases} u = t^2 \\ dv = \operatorname{sen} nt\ dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2t\ dt \\ v = -\dfrac{\cos nt}{n} \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{t^2\cos nt}{n}\right)\Big/_{-\pi}^{\pi} + \frac{2}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\cos nt\ dt$$

$$= -\frac{1}{n\pi}\underbrace{[\pi^2(-1)^n - \pi^2(-1)^n]}_{0} + \frac{2}{n\pi}\left[\frac{t\operatorname{sen} nt}{n} + \frac{\cos nt}{n^2}\right]\Big/_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos nt$$

$$f(t) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nt$$

b) $f(2\pi^-) = \lim\limits_{t\to 2\pi^-} f(t) = 4\pi^2$ y $\lim\limits_{t\to 2\pi^+} f(t) = f(2\pi^+) = 0$ entonces

$$\frac{f(2\pi^-) + f(2\pi^+)}{2} = \frac{4\pi^2 - 0}{2} = 2\pi^2$$

c) Como $f(t) = t^2 = \dfrac{\pi^2}{3} + 4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\cos nt}{n^2}$ para t = 0, $\dfrac{\pi^2}{3} + 4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\cos n\theta}{n^2} = 0$

$$\therefore \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$$

d) Como $t^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \cos nt}{n^2}$, integrando se tiene:

$$\int_0^t t^2 dt = \int_0^t \frac{\pi^2}{3} dy + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\int_0^t \cos nt\ dt \Rightarrow \frac{t^3}{3} = \frac{\pi^2 t}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}\text{sen}\, nt$$

$$\frac{t}{3}(t^2 - \pi^2) = 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}\text{sen}\, nt \quad \text{para} \quad t = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{6}(\frac{\pi^2}{4} - \pi^2) = 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3} = -\frac{\pi^3}{32}$$

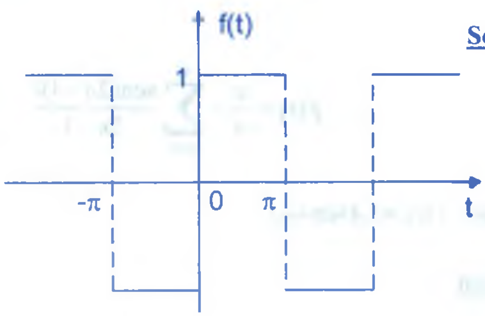
como $t^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \cos nt}{n^2}$ para $t = \pi$

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n^3} + \frac{\pi^2}{n^2}) = -\frac{\pi^3}{3} + \frac{\pi^4}{6}$$

14.13. EJERCICIOS DESARROLLADOS.-

(1) Hallar la serie de Fourier de la función dada por $f(t) = \begin{cases} -\frac{\pi}{4}, & -\pi < t < 0 \\ \frac{\pi}{4}, & 0 < t < \pi \end{cases}$



Solución

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1, \ T = 2\pi$$

La serie de Fourier de f(t) es

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \text{ sen } n\omega_0 t)$$

$$a_0=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt=\frac{1}{\pi}[\int_{-\pi}^{0}-\frac{\pi}{4}dt+\int_{0}^{\pi}\frac{\pi}{4}dt]$$

$$=\frac{1}{\pi}[-\frac{\pi}{4}t]\Big/_{\pi}^{0}+[\frac{\pi}{4}t]\Big/_{0}^{\pi}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos nt\ dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\ dt=\frac{1}{\pi}[\int_{-\pi}^{0} f(t)\cos nt\ dt+\int_{0}^{\pi} f(t)\cos nt\ dt]$$

$$=\frac{1}{\pi}[\int_{-\pi}^{0}-\frac{\pi}{4}\cos nt\ dt+\int_{0}^{\pi}\frac{\pi}{4}\cos nt\ dt]=\frac{1}{4}[-\frac{\operatorname{sen} nt}{n}\Big/_{-\pi}^{0}+\frac{\operatorname{sen} t}{n}\Big/_{0}^{\pi}]=0$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\operatorname{sen} nt\ dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\operatorname{sen} nt\ dt=\frac{1}{\pi}[\int_{-\pi}^{0} f(t)\operatorname{sen} nt\ dt+\int_{0}^{\pi} f(t)\operatorname{sen} nt\ dt]$$

$$=\frac{1}{\pi}[\int_{-\pi}^{0}-\frac{\pi}{4}\operatorname{sen} nt\ dt+\int_{0}^{\pi}\frac{\pi}{4}\operatorname{sen} nt\ dt]$$

$$b_n=\frac{1}{4}[\frac{\cos nt}{n}\Big/_{-\pi}^{0}+(-\frac{\cos nt}{n})\Big/_{-\pi}^{0}]=\frac{1}{4}[\frac{1}{n}-\frac{(-1)^n}{n}-\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{n}]$$

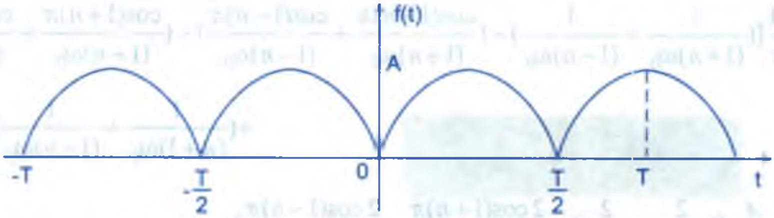
$$b_n=\frac{1}{2}(\frac{1}{n}-\frac{(-1)^n}{n})=\begin{cases}0 & \text{si } n \text{ es par}\\ \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ es impar}\end{cases}$$

$$b_{2n-1}=\frac{1}{2n-1}$$

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\operatorname{sen} nt)\qquad \therefore\quad f(t)=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(2n-1)t}{2n-1}$$

2 Encontrar la serie de Fourier para la función $f(t)=|A\operatorname{sen}\omega_0 t|$

Solución



Como f(t) es una función impar, entonces $b_n = 0$

Luego la serie de Fourier de la función f(t) es: $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t$ y $T = \pi$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt = \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |A\,\text{sen}\,\omega_0 t\,|\,dt = \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} |A\,\text{sen}\,\omega_0 t\,|\,dt + \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} |A\,\text{sen}\,\omega_0 t\,|\,dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} -A\,\text{sen}\,\omega_0 t\;dt + \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} A\,\text{sen}\,\omega_0 t\;dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{A\cos\omega_0 t}{\omega_0}\Big/_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\right] - \frac{2}{\pi}\left[\frac{A\cos\omega_0 t}{\omega_0}\Big/_{0}^{\frac{\pi}{2}}\right], \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2$$

$$= \frac{1}{\pi}[(A-(-A))] - \frac{1}{\pi}[-A-A] = \frac{1}{\pi}(2A) + \frac{2A}{\pi} = \frac{4A}{\pi} \qquad \therefore \quad a_0 = \frac{4A}{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\omega_0 t\;dt = \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |A\,\text{sen}\omega_0 t\,|\cos n\omega_0 t\;dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} -A\,\text{sen}\,\omega_0 t\cos n\omega_0 t\;dt + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} A\,\text{sen}\,\omega_0 t\cos n\omega_0 t\;dt\right]$$

$$= \frac{2A}{\pi}\left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} -\frac{1}{2}(\text{sen}(1+n)\omega_0 t + \text{sen}(1-n)\omega_0 t)dt + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(\text{sen}(1+n)\omega_0 t + \text{sen}(1-n)\omega_0 t)dt\right.$$

$$= \frac{A}{\pi}\left[\left(\frac{\cos(1+n)\omega\,t}{(1+n)\omega_0 t} + \frac{\cos(1-n)\omega_0 t}{(1-n)\omega_0}\right)\Big/_{-\frac{\pi}{2}}^{0} - \left(\frac{\cos(1+n)\omega_0 t}{(1+n)\omega_0} + \frac{\cos(1-n)\omega_0 t}{(1-n)\omega_0}\right)\Big/_{0}^{\frac{\pi}{2}}\right.$$

$$=\frac{A}{\pi}[(\frac{1}{(1+n)\omega_0}+\frac{1}{(1-n)\omega_0})-(\frac{\cos(1+n)\pi}{(1+n)\omega_0}+\frac{\cos(1-n)\pi}{(1-n)\omega_0})-(\frac{\cos(1+n)\pi}{(1+n)\omega_0}+\frac{\cos(1-n)\pi}{(1-n)\omega_0})$$

$$+(\frac{1}{(n+1)\omega_0}+\frac{1}{(1-n)\omega_0})]$$

$$=\frac{A}{\omega_0\pi}[(\frac{2}{1+n}+\frac{2}{1-n})-\frac{2\cos(1+n)\pi}{1+n}-\frac{2\cos(1-n)\pi}{1-n}]$$

$$=\frac{A}{2\pi}[\frac{4}{1-n^2}-2(\frac{\cos(1-n)\pi}{1+n}+\frac{\cos(1-n)\pi}{1-n})]$$

$$=\begin{cases}\frac{A}{2\pi}[\frac{4}{1-n^2}-2(-\frac{1}{1+n}-\frac{1}{1-n}] & \text{si } n \text{ es par}\\ \frac{A}{2\pi}[\frac{4}{1-n^2}-2(\frac{1}{1+n}+\frac{1}{1-n})] & \text{si } n \text{ es impar}\end{cases}$$

$$a_n=\begin{cases}\frac{A}{2\pi}[\frac{4}{1-n^2}+\frac{4}{1-n^2}] & \text{si } n \text{ es par}\\ \frac{A}{2\pi}[\frac{4}{1-n^2}-\frac{4}{1-n^2}] & \text{si } n \text{ es impar}\end{cases} \Rightarrow a_n=\begin{cases}\frac{A}{\pi}(\frac{4}{1-n^2}) & \text{si } n \text{ es par}\\ 0 & \text{si } n \text{ es impar}\end{cases}$$

Luego $a_{2n}=\frac{4A}{\pi}(\frac{1}{(1-(2n)^2})=\frac{4A}{\pi}(\frac{1}{1-4n^2})$

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4A}{\pi}(\frac{1}{1-4n^2})\cos 2n\omega_0 t \qquad \therefore \quad f(t)=\frac{2A}{\pi}+\frac{4A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-4n^2}\cos 2n\omega_0 t$$

3) Desarrollar $f(t)=e^{r\cos t}\cos(r\,\text{sen}\,t)$ en serie de Fourier (Sugerencia: usar la serie de potencias para e^z cuando $z=re^{jt}$)

Solución

Como $\cos\theta=\frac{e^{j\theta}+^{-j\theta}}{2}$, $\text{sen}\,\theta=\frac{e^{jt}-e^{-jt}}{2j}$

$$f(t)=e^{r\cos t}\cos(r\,\text{sen}\,t)=e^{r(\frac{e^{jt}+e^{-jt}}{2})}.\frac{e^{jr\,\text{sen}\,t}+e^{-jr\,\text{sen}\,t}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}e^{r(\frac{e^{jt}+e^{-jt}}{2})}.[e^{jr.\frac{e^{jt}-e^{-jt}}{2j}} + e^{-jr.\frac{e^{jt}-e^{-jt}}{2j}}] = \frac{1}{2}e^{r(\frac{e^{jt}+e^{-jt}}{2})}.[e^{r.\frac{e^{jt}-e^{-jt}}{2}} + e^{-r.\frac{e^{jt}-e^{-jt}}{2}}]$$

$$= \frac{1}{2}[e^{\frac{r}{2}(e^{jt}+e^{-j}+e^{jt}-e^{-jt})} + e^{-\frac{r}{2}(e^{jt}-e^{jt}+e^{-jt}+e^{-jt})}] = \frac{1}{2}[e^{re^{jt}} + e^{-re^{jt}}]$$

como $e^x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \Rightarrow e^x - 1 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

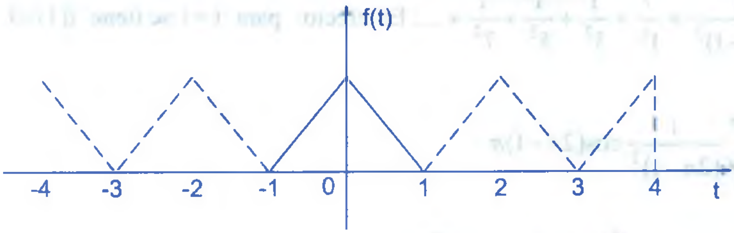
$f(t) = \frac{1}{2}[e^{re^{jt}} + e^{-re^{-jt}}]$, entonces se tiene:

$$f(t) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(re^{jt}) + (re^{-jt})^n}{n!} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n!}(e^{jnt} + e^{-jnt})$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n!}(e^{jnt} + e^{-jnt}) = 1 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n!}\cos nt \qquad \therefore\ f(t) = 1 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n!}\cos nt$$

4 Encontrar la serie de Fourier para la función $f(t) = \begin{cases} t+1 \ ; & -1 \le t \le 0 \\ -t+1 \ ; & 0 \le t \le 1 \end{cases}$

Solución



Graficando la función f(t) se tiene: T = 2

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \pi$$

observamos que f ∈ P C[-1,1], es decir: f(t + 2) = f(t), ∀ t ∈ R y $f \in V_p \Rightarrow$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi t\ ,\ b_n = 0$$

donde $a_0 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) = \int_{-1}^{1} f(t)dt = \int_{-1}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{1} f(t)dt$

$$= \int_{-1}^{0} (t+1)dt + \int_{0}^{1} (-t+1)dt = (\frac{1}{2} - 0) + (0 + \frac{1}{2}) = 1$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\pi t\ dt = \int_{-1}^{1} f(t)\cos n\pi t\ dt = \int_{-1}^{0} f(t)\cos n\pi t\ dt + \int_{0}^{1} f(t)\cos n\pi t\ dt$$

$$= \int_{-1}^{0} (t+1)\cos n\pi t\ dt + \int_{0}^{1} (-t+1)\cos n\pi t\ dt$$

$$a_n = \frac{1}{n^2\pi^2} - \frac{(-1)^n}{n^2\pi^2} - \frac{(-1)^n}{n^2\pi^2} + \frac{1}{n^2\pi^2} = \frac{2}{n^2\pi^2} - \frac{2(-1)^n}{n^2\pi^2} \Rightarrow a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ \dfrac{4}{n^2\pi^2} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

NOTA.- $\begin{cases} \cos n\pi = (-1)^n \\ \text{sen } n\pi = 0, \ \forall\ n \in Z \end{cases}$. Luego $a_{2n-1} = \dfrac{4}{(2n-1)^2\pi^2}$, n = 1,2,3,...

$$\therefore \quad f(t) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)\pi t$$

NOTA.- A partir de esta serie de Fourier podemos obtener la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots$. En efecto: para t = 1 se tiene f(1)=0

$$0 = f(1) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)\pi$$

$$\frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)}{(2n-1)^2} = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

(5) Hallar la serie de Fourier de $f(t) = e^t$, $|t| \le \pi$

Solución

$|t| \le \pi \Rightarrow -\pi \le t \le \pi \Rightarrow T = 2\pi$, $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T} = 1$; la serie de Fourier de la función f(t) es:

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_0 t+b_n\operatorname{sen} n\omega_0 t)\ ,\ \text{donde}$$

$$a_0=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^t\,dt=\frac{1}{\pi}(e^{\pi}-e^{-\pi})=\frac{2\operatorname{senh}\pi}{\pi}$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos nt\ dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^t\cos nt\ dt=\frac{e^t[n\operatorname{sen} nt+\cos nt]}{\pi(n^2+1)}\Big/_{-\pi}^{\pi}$$

$$=\frac{e^{\pi}\cos n\pi}{\pi(n^2+1)}-\frac{e^{-\pi}\cos(-\pi n)}{\pi(n^2+1)}=\frac{(-1)^n}{\pi(n^2+1)}(e^{\pi}-e^{-\pi})=\frac{2(-1)^n\operatorname{senh}\pi}{\pi(n^2+1)}$$

$$a_n=\frac{2(-1)^n\operatorname{senh}\pi}{\pi(n^2+1)}$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\operatorname{sen} nt\ dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^t\operatorname{sen} nt\ dt=\frac{e^t(\operatorname{sen} nt-n\cos nt)}{\pi(n^2+1)}\Big/_{-\pi}^{\pi}$$

$$=\frac{e^{\pi}(-n\cos n\pi)}{\pi(n^2+1)}-\frac{e^{-\pi}(-n\cos(-n\pi))}{\pi(n^2+1)}=\frac{n(-1)^n e^{-\pi}-e^{\pi}n(-1)^n}{\pi(n^2+1)}=-\frac{n(-1)^n(e^{\pi}-e^{-\pi})}{\pi(n^2+1)}$$

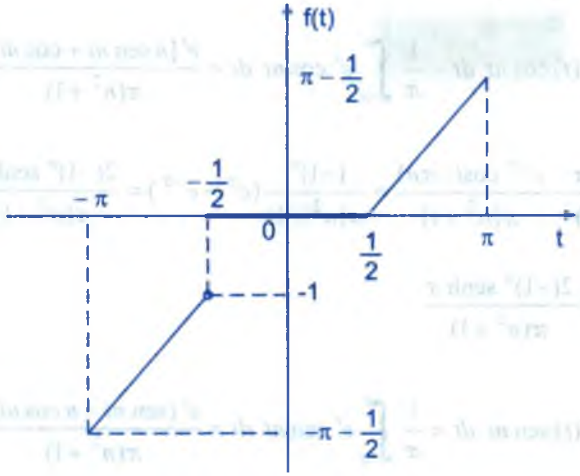
$$=-\frac{2n(-1)^n\operatorname{senh}(\pi)}{\pi(n^2+1)}\qquad\qquad \therefore\ b_n=\frac{-2n(-1)^n\operatorname{senh}(\pi)}{\pi(n^2+1)}$$

$$\therefore\quad f(t)=\frac{\operatorname{senh}(\pi)}{\pi}+\frac{2\operatorname{senh}(\pi)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n\cos nt}{1+n^2}-\frac{n(-1)^n\operatorname{sen} nt}{n^2+1}\right]$$

6 Hallar la serie de Fourier de la función $f(t)=\begin{cases}-\left|t-\frac{1}{2}\right| & ; & -\pi\le t<-\frac{1}{2}\\ 0 & ; & -\frac{1}{2}\le t<\frac{1}{2}\\ t-\frac{1}{2} & ; & \frac{1}{2}\le t\le\pi\end{cases}$

Solución

Mediante la definición del valor absoluto se tiene: $f(t)=\begin{cases} t-\frac{1}{2} & ; & -\pi\le t<-\frac{1}{2} \\ 0 & ; & -\frac{1}{2}\le t<\frac{1}{2} \\ t-\frac{1}{2} & ; & \frac{1}{2}\le t\le\pi \end{cases}$



Como f(t + 2π) = f(t) donde T = 2π, $\omega_0=\frac{2\pi}{T}=1$

La serie de Fourier de la función f(t) es: $f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\operatorname{sen} nt)$, donde

$$a_0=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt=\frac{1}{\pi}[\int_{-\pi}^{-\frac{1}{2}}f(t)dt+\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}f(t)dt+\int_{\frac{1}{2}}^{0}f(t)dt$$

$$=\frac{1}{\pi}[\int_{-\pi}^{-\frac{1}{2}}(t-\frac{1}{2})dt+0+\int_{\frac{1}{2}}^{\pi}(t-1)dt]=\frac{1}{2\pi}-1$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\cos nt\ dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos nt\ dt=\frac{1}{\pi}[\int_{-\pi}^{-\frac{1}{2}}(t-\frac{1}{2})\cos nt\ dt+\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}0.\cos nt\ dt$$

$$+\int_{\frac{1}{2}}^{\pi}(t-\frac{1}{2})\cos nt\ dt]$$

$$= \frac{1}{\pi}[\int_{-\pi}^{-\frac{1}{2}} (t-\frac{1}{2})\cos nt\ dt + \int_{\frac{1}{2}}^{\pi} (t-\frac{1}{2})\cos nt\ dt] = \frac{1}{n\pi}\operatorname{sen}(\frac{n}{2})$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\operatorname{sen} nt\ dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\operatorname{sen} nt\ dt$$

$$= \frac{1}{\pi}[\int_{-\pi}^{-\frac{1}{2}} (t-\frac{1}{2})\operatorname{sen} nt\ dt + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 0.\operatorname{sen} nt\ dt + \int_{\frac{1}{2}}^{\pi} (t-\frac{1}{2})\operatorname{sen} t\ dt]$$

$$= \frac{1}{\pi}[\int_{-\pi}^{-\frac{1}{2}} (t-\frac{1}{2})\operatorname{sen} nt\ dt + \int_{\frac{1}{2}}^{\pi} (t-\frac{1}{2})\operatorname{sen} nt\ dt] = \frac{1}{\pi}[-\frac{2}{n^2}\operatorname{sen}(\frac{n}{2}) + \frac{1}{n}\cos\frac{n}{2} - \frac{2(-1)^n}{n}]$$

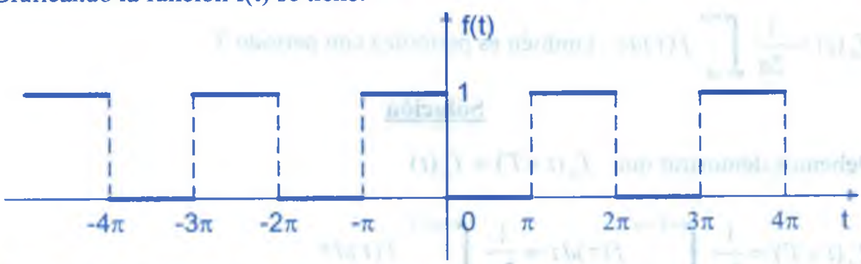
$$b_n = \frac{1}{\pi n}[-\frac{2}{n}\operatorname{sen}(\frac{n}{2}) + \cos(\frac{n}{2}) - 2(-1)^n]$$

$$\therefore \quad f(t) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2\pi}-1) + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{n}\operatorname{sen}(\frac{n}{2})\cos nt + \frac{1}{n}(-\frac{2}{n}\operatorname{sen}\frac{n}{2} + \cos\frac{n}{2} - 2(-1)^n)]$$

(7) Encontrar la serie de Fourier para la función f(t) definida por $f(t) = 1$, para $-\pi < t < 0$, $f(t) = 0$, $0 < t < \pi$ y $f(t + 2\pi) = f(t)$.

Solución

Graficando la función f(t) se tiene:



La serie de Fourier de la función f(t) se expresa en la forma:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t)\text{ , donde}$$

$$a_0=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt=\frac{1}{\pi}[\int_{-\pi}^{0}f(t)dt+\int_{0}^{\pi}f(t)dt]$$

$$=\frac{1}{\pi}[\int_{-\pi}^{0}dt+0]=\frac{1}{\pi}[0+\pi]=1 \Rightarrow a_0=1$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\cos n\omega_0 t\ dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos nt\ dt=\frac{1}{\pi}[\int_{-\pi}^{0}\cos nt\ dt+\int_{0}^{\pi}0.\cos nt\ dt]$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\cos nt\ dt=\frac{\operatorname{sen} nt}{nt}\Big/_{-\pi}^{0}=0+\frac{\operatorname{sen} nt}{nt}=0 \Rightarrow a_n=0$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\operatorname{sen} n\omega_0 t=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\operatorname{sen} nt\ dt=\frac{1}{\pi}[\int_{-\pi}^{0}f(t)\operatorname{sen} nt\ dt+\int_{0}^{\pi}f(t)\operatorname{sen} nt\ dt]$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\operatorname{sen} nt\ dt=\frac{1}{\pi}[-\frac{\cos nt}{n}]\Big/_{-\pi}^{0}=-\frac{1}{n\pi}[1-\cos n\pi]=\begin{cases}0 & \text{si } n \text{ es par}\\ -\frac{2}{n\pi} & \text{si } n \text{ es impar}\end{cases}$$

Luego $b_{2n-1}=-\dfrac{2}{(2n-1)\pi}$ $\qquad\therefore\ f(t)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(2n-1)t}{2n-1}$

(8) Si f(t) es una función periódica de t, con periodo T e integrable, demostrar que $f_a(t)=\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{t-a}^{t+a}f(\tau)d\tau$, también es periódica con periodo T.

Solución

Debemos demostrar que $f_a(t+T)=f_a(t)$

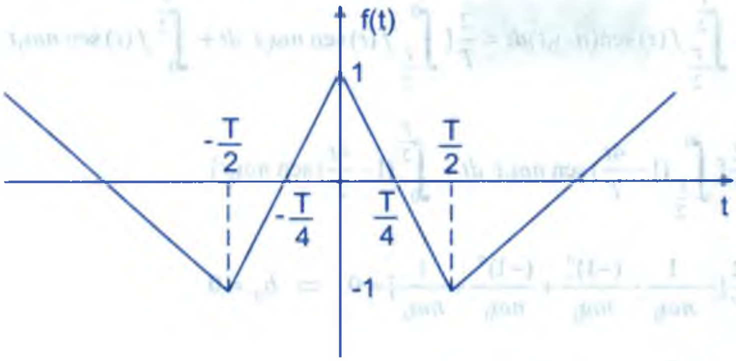
$$f_a(t+T)=\frac{1}{2a}\int_{t+T-a}^{t+T+a}f(\tau)d\tau=\frac{1}{2a}\int_{t-a+T}^{t+a+T}f(\tau)d\tau$$

ahora usando el hecho de que para cualquier función periódica de t con periodo T, se cumple que: $\displaystyle\int_{\alpha+t}^{\beta+t}f(t)dt=\int_{\alpha}^{\beta}f(t)dt$, entonces tenemos que:

$$f_a(t+T)=\frac{1}{2a}\int_{t-a+T}^{t+a+T} f(\tau)d\tau=\frac{1}{2a}\int_{t-a}^{t+a} f(\tau)d\tau=f_a(t)$$

de donde $f_a(t+T)=f_a(t)$ L.q.q.d

(9) Encontrar la serie de Fourier para la función cuya forma de onda se muestra en la figura.



Solución

La regla de correspondencia de la gráfica de f(t) es: $f(t)=\begin{cases}1+\frac{4t}{T}\ ; & -\frac{T}{2}<t\le 0\\ 1-\frac{4t}{T}\ ; & 0<t<\frac{T}{2}\end{cases}$

$$a_0=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt=\frac{2}{T}[\int_{-\frac{T}{2}}^{0}(1+\frac{4t}{T})dt+\int_{0}^{\frac{T}{2}}(1-\frac{4t}{T})dt]=\frac{2}{T}[(t+\frac{2t^2}{T})\Big/_{-\frac{T}{2}}^{0}+(t-\frac{2t^2}{T})\Big/_{0}^{\frac{T}{2}}]$$

$$=\frac{2}{T}[0-(-\frac{T}{2}+\frac{T}{2})+(\frac{T}{2}-\frac{T}{2})-0]=0 \Rightarrow a_0=0$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt=\frac{2}{T}[\int_{-\frac{T}{2}}^{0} f(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt+\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(n\omega_0 t)dt]$$

$$=\frac{2}{T}[\int_{-\frac{T}{2}}^{0}(1+\frac{4t}{T})\cos(n\omega_0 t)dt+\int_{0}^{\frac{T}{2}}(1-\frac{4t}{T})\cos(n\omega_0 t)dt]$$

$$= \frac{2}{T}\left[\frac{4}{n^2\omega_0^2 T} - \frac{4(-1)^n}{n^2\omega_0^2 T} - \frac{4(-1)^n}{n^2\omega_0^2 T} + \frac{4}{n^2\omega_0^2 T}\right] = 16\left[\frac{1}{n^2\omega_0^2 T^2} - \frac{(-1)^n}{n^2\omega_0^2 T^2}\right] = \frac{16}{4\pi^2}\left[\frac{1}{n^2} - \frac{(-1)^n}{n^2}\right]$$

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ \dfrac{8}{n^2\pi^2} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \qquad \therefore \quad a_{2n-1} = \frac{8}{(2n-1)^2\pi^2}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\operatorname{sen}(n\omega_0 t)dt = \frac{2}{T}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{0} f(t)\operatorname{sen} n\omega_0 t\, dt + \int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)\operatorname{sen} n\omega_0 t\, dt\right]$$

$$= \frac{2}{T}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{0}\left(1-\frac{4t}{T}\right)\operatorname{sen} n\omega_0 t\, dt + \int_{0}^{\frac{T}{2}}\left(1-\frac{4t}{T}\right)\operatorname{sen} n\omega_0 t\right]$$

$$= \frac{2}{T}\left[-\frac{1}{n\omega_0} - \frac{(-1)^n}{n\omega_0} + \frac{(-1)^n}{n\omega_0} + \frac{1}{n\omega_0}\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad b_n = 0$$

$$\therefore \quad f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{(2n-1)^2\pi^2}\cos(2n-1)\omega_0 t$$

(10) Encontrar la suma de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$

Solución

Utilizando la serie de Fourier de la función f(t) del ejercicio (9), es decir:

$$f(t) = \begin{cases} 1 + \dfrac{4t}{T} \; ; & -\dfrac{T}{2} < t \le 0 \\ 1 - \dfrac{4t}{T} \; ; & 0 < t < \dfrac{T}{2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f(0) = 1$$

como $\displaystyle f(t) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)\omega_0 t}{(2n-1)^2}$, para t = 0

$$f(0) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = 1 \quad \text{de donde} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

(11) Utilizar el teorema de PARSEVAL, para probar que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$ utilizando el problema (4) de 14.5.

Solución

Se trata de la función f(t) dada por: $f(t)=\begin{cases}-1\ , & -\frac{T}{2}<t<0\\ 1\ ; & 0<t<\frac{T}{2}\end{cases}$

el desarrollo en serie de Fourier es: $f(t)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\text{sen}(2n-1)t}{2n-1}$

por el teorema PARSEVAL se tiene: $\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f^2(t)dt=\frac{a_0^2}{4}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$

$$\frac{1}{T}[\int_{-\frac{T}{2}}^{0}f^2(t)dt+\int_{0}^{\frac{T}{2}}f^2(t)dt]=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{(2n-1)^2\pi^2}$$

$$\frac{1}{T}[\int_{-\frac{T}{2}}^{0}dt+\int_{0}^{\frac{T}{2}}dt]=\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\ \Rightarrow\ \frac{1}{T}[\frac{T}{2}+\frac{T}{2}]=\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$$

$$\therefore\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

(12) Integrar la serie de Fourier de $f(t)=t^2$ para obtener $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\,\text{sen}\,nt}{n^3}=\frac{1}{12}(t^2-\pi)t$ y $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}=\frac{\pi^6}{945}$

Solución

En la parte 14.12 se ha calculado la serie de Fourier de $f(t)=t^2$, es decir:

$f(t)=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos nt}{n^2}$, integrando se tiene:

$$\int_0^x t^2 dt = \int_0^x \frac{\pi^2}{3} dt + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \int_0^x \cos nt\ dt \Rightarrow \frac{x^3}{3} = \frac{\pi^2 x}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \text{sen}\, nx\ ,$$

de donde $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \text{ sen } nt}{n^3} = \frac{1}{12}(t^3 - \pi^2 t) = \frac{t}{12}(t^2 - \pi^2)$

ahora aplicamos el teorema de Parseval $\displaystyle\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t)dt = 0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} [0^2 + (\frac{4(-1)^n}{n^3})^2]$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{9}(t^3 - \pi^2 t)^2 dt = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^6} \Rightarrow \frac{1}{18\pi}[\frac{t^7}{7} - \frac{2\pi^2 t^5}{5} + \frac{\pi^4 t^3}{3}) \Big/_{-\pi}^{\pi} = 8\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$$

$\displaystyle\frac{16\pi^6}{18\pi(105)} = 8\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$, de donde $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$

(13) De un conjunto infinito de funciones reales $\{\phi_n(t)\}_{n\geq 1}$ se dice que es un conjunto ortonormal en el intervalo <a,b> si $\displaystyle\int_a^b \phi_n(t)\phi_m(t)dt = \delta_{mn}$, donde δ_{mn} es la función Delta de Kronecker. Sea f(t) una función definida en el intervalo <a,b> y si se supone que f(t) se puede representar como $\displaystyle f(t) = c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) + ... + c_n\phi_n(t) + ... = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\phi_n(t)$ en el intervalo <a,b>, donde los c_n son constantes. Demostrar $\displaystyle c_n = \int_a^b f(t)\phi_n(t)dt$, n = 1,2,..., Los coeficientes c_n se denominan coeficientes de Fourier de f(t) con respecto al conjunto ortonormal $\{\phi_n(t)\}$.

Solución

Como $\displaystyle f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\phi_n(t)$, multiplicamos ambos miembros de la igualdad por $\phi_n(t)$:

$\displaystyle f(t)\phi_m(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\phi_n(t)\phi_m(t)$, al integrar en el intervalo de <a,b> se tiene:

$$\int_a^b f(t)\phi_m(t)dt = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} c_n\phi_n\phi_m(t)dt \text{ , donde } n = 1,2,3,... \text{ y } m = 1,2,3,...$$

haciendo m = 1, se tiene:

$$\int_a^b f(t)\phi_1(t)dt = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} c_n\phi_n(t)\phi_1(t)dt = \int_a^b (c_1\phi_1(t)\phi_1(t) + c_2\phi_2(t)\phi_1(t) + ...)dt$$

$$= c_1 + c_2(0) + ... + c_n(0) + ... = c_1$$

para m = 2, se tiene:

$$\int_a^b f(t)\phi_2(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_a^b \phi_n(t)\phi_2(t)dt$$, haciendo el mismo análisis

$$\int_a^b f(t)\phi_2(t)dt = 0 + c_2 + 0 + ... = c_2$$

para m = n, se tiene: $\int_a^b f(t)\phi_n(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_a^b \phi_n(t)\phi_n(t)dt = 0 + 0 + ... + c_n + ... = c_n$

$$\therefore \quad c_n = \int_a^b f(t)\phi_n(t)dt$$

14 Si $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\phi_n(t)$ se aproxima por $f_k(t) = \sum_{n=1}^{k} c_n\phi_n(t)$. Demostrar que el error cuadrático medio $\frac{1}{b-a}\int_a^b [f(t) - f_k(t)]^2 dt$, es mínimo.

Solución

Llamemos E_k al error cuadrático medio, es decir:

$$E_k = \frac{1}{b-a}\int_a^b [f(t) - f_k(t)]^2 dt \qquad \textbf{... (1)}$$

reemplazando el valor de $f_k(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\phi_n(t)$ en (1)

$$E_k=\frac{1}{b-a}\int_a^b [f(t)-\sum_{n=1}^{k} c_n\phi_n(t)]^2 dt \text{ , derivando con respecto a } c_n$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial c_n}=\frac{2}{b-a}\int_a^b [f(t)-\sum_{n=1}^{k} c_n\phi_n(t)](-\sum_{n=1}^{k}\phi_n(t))dt$$

$$=\frac{2}{b-a}\int_a^b [-\sum_{n=1}^{k}\phi_n(t)f(t)+\sum_{n=1}^{k} c_n\phi_n(t)\sum_{n=1}^{k}\phi_n(t)]dt$$

$$=\frac{2}{b-a}\int_a^b [\sum_{n=1}^{k} c_n\phi_n^2(t)-\sum_{n=1}^{k} c_n\phi_n^2(t)]dt=0 \text{ , L.q.q.d.}$$

15 Demostrar que si c_n son los coeficientes de Fourier de f(t) con respecto al conjunto ortonormal $\{\phi_n(t)\}$, entonces $\int_a^b [f(t)]^2 dt=\sum_{n=1}^{k} c_n^2$. Este resultado se conoce como la identidad de PARSEVAL.

Solución

Como $f(t)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n\phi_n(t)$, multiplicando por si mismo

$$[f(t)]^2=\sum_{n=1}^{\infty} c_n\phi_n(t)\sum_{n=1}^{\infty} c_n\phi_n(t)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 .f_n^2(t)$$

integrando ambos miembros en el intervalo <a,b>

$$\int_a^b [f(t)]^2 dt=\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2\phi_n^2(t) \text{ , de donde } \int_a^b [f(t)]^2 dt=\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2\int_a^b \phi_n^2(t)dt$$

y como $\int_a^b \phi_n^2(t)dt=\delta_{nn}=1$, entonces se tiene: $\int_a^b [f(t)]^2 dt=\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$, L.q.q.d.

14.14. EJERCICIOS PROPUESTOS.-

1 Hallar la serie de Fourier de la función: $f(t)=\begin{cases} 0 \text{ , } & 0\le t<1 \\ t \text{ , } & 1\le t\le 4 \end{cases}$, f(t + 4) = f(t), $\forall$ t $\in$ R.

(2) Si $f(t)=\begin{cases} t & , \ 0\le t\le 2 \\ 2-t & , \ 2\le t\le 3 \end{cases}$ y f(t + 3) = f(t), ∀ t ∈ R. Hallar su serie de Fourier y graficar la función.

(3) Si $f(t)=\begin{cases} t^2 & , \ 0\le t<1 \\ 1 & , \ 1\le t\le 4 \end{cases}$ y f(t + 4) = f(t). Hallar su serie de Fourier y graficar la función.

(4) Si $f(t)=\begin{cases} 1 & , \ 0\le t<1 \\ 0 & , \ 1\le t\le 3 \\ -1 & , \ 3\le t\le 5 \end{cases}$ y f(t + 5) = f(t). Hallar su serie de Fourier y graficar la función

(5) $f(t)=\begin{cases} 4t & , \ 0\le t\le 2 \\ -3 & , \ 2<t<4 \\ 1 & , \ 4\le t\le 7 \end{cases}$ y f(t + 7) = f(t). Hallar su serie de Fourier y graficar la función

(6) Si $f(t)=\begin{cases} 0 & , \ -c<t<0 \\ c-t & , \ 0<t<c \end{cases}$ y f (t + 2c) = f(t). Hallar su serie de Fourier y graficar.

(7) Si $f(t)=\begin{cases} 0 & , \ -c<t<0 \\ (c-t)^2 & , \ 0<t<c \end{cases}$ y f(t + 2c) = f(t). Hallar su serie de Fourier y graficar.

(8) Si $f(t)=\begin{cases} 3\pi+2t & , \ -\pi<t<0 \\ \pi+2t & , \ 0<t<\pi \end{cases}$ y f(t + 2π) = f(t). Halle la serie de Fourier y graficar.

(9) Si $f(t)=\begin{cases} t(c+t) & , \ -c<t<0 \\ (c-t)^2 & , \ 0<t<c \end{cases}$ y f(t + 2c) = f(t). Halle su serie de Fourier y graficar.

(10) Si $f(t)=\begin{cases} t+1 & , \ -2<t<0 \\ 1 & , \ 0\le t\le 2 \end{cases}$ y f(t + 4) = f(t). Halle su serie de Fourier y graficar.

(11) Si $f(t)=\cos(\frac{t}{2})$ y f(t + 2π) = f(t). Halle su serie de Fourier y graficar la función

(12) Si $f(t)=\begin{cases} 0 & , \ -c<t<0 \\ e^{-t} & , \ 0<t<c \end{cases}$ y f(t + 2c) = f(t). Halle su serie de Fourier y graficar.

(13) Si $f(t)=\begin{cases} 0 & , -\pi<t<0 \\ t^2 & , 0<t<\pi \end{cases}$ y $f(t+2\pi)=f(t)$. Halle su serie de Fourier y graficar.

(14) Si $f(t)=\begin{cases} \dfrac{-\pi-t}{2} & , -\pi<t<0 \\ 0 & , t=0 \\ \dfrac{\pi-t}{2} & , 0<t<\pi \end{cases}$ y $f(t+2\pi)=f(t)$. Halle su serie de Fourier y graficar.

(15) Si $f(t)=\begin{cases} -\pi-t & , -\pi\le t\le -\dfrac{\pi}{2} \\ t & , -\dfrac{\pi}{2}\le t\le \dfrac{\pi}{2} \\ \pi-t & , \dfrac{\pi}{2}\le t\le \pi \end{cases}$ y $f(t+2\pi)=f(t)$. Halle su serie de Fourier y graficar.

(16) Hallar la serie de Fourier para la función $f(t)=t-[\![t]\!]$

(17) Si $f(t)=\begin{cases} \pi+t & , -\pi<t<0 \\ \pi-t & , 0<t<\pi \end{cases}$ y $f(t+2\pi)=f(t)$. Hallar su serie de Fourier y graficar.

(18) Si $f(t)=\begin{cases} t & , -\dfrac{\pi}{2}<t<\dfrac{\pi}{2} \\ \pi-t & , \dfrac{\pi}{2}<t<\dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$ y $f(t+2\pi)=f(t)$. Halle su serie de Fourier y graficar.

(19) Si $f(t)=\begin{cases} t^2 & , -\dfrac{\pi}{2}<t<\dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{\pi^2}{4} & , \dfrac{\pi}{2}<t<\dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$ y $f(t+2\pi)=f(t)$. Halle su serie de Fourier y graficar.

(20) Hallar los coeficientes de Fourier y encontrar la serie de Fourier para la función $F(t)=|A\,\text{sen}\,\omega_0 t|$, $-\dfrac{\pi}{2}\le t\le\dfrac{\pi}{2}$, $\omega_0=\alpha$.

(21) Si $f(t)=1-2t^2-t^4$, $0\le t\le 1$, halle la serie de Fourier y con el resultado obtenido sumar la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^8}$ (aplicando PARSEVAL).

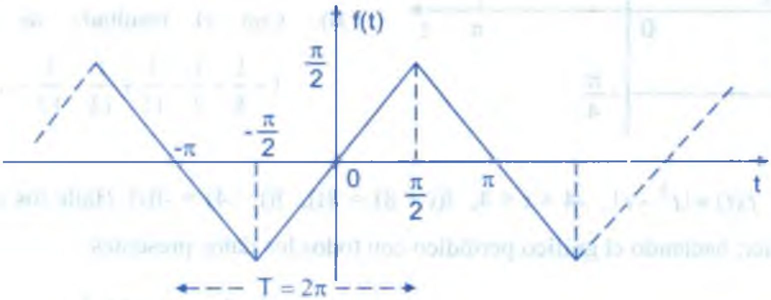
(22) Hallar la serie de Fourier de la función f(t) = cosh (kt) para 0 < t < c y hallar la serie para $t = \frac{c}{2}$

(23) Si f(t) es una función periódica integral, con periodo T, demostrar que $\frac{1}{T}\int_0^T f(t)(\frac{T}{2}-t)dt = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n\omega_0}$ donde b_n es un coeficiente de Fourier de f(t) y $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ (sug. Desarrollar $\frac{T}{2}-t$, para 0 < t < T en serie de Fourier).

(24) Sean f(t) y g(t) funciones continuas por tramos con periodo T y sean a_n, b_n y α_n, β_n los respectivos coeficientes de Fourier de f(t) y g(t), demostrar que

$$\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)g(t)dt = \frac{a_0\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\alpha_n + b_n\beta_n)$$

(25) Hallar la serie de Fourier de la función f(t) dado por el gráfico, estudiar la convergencia puntual en [-3π,3π]



(26) Halle la serie de Fourier de $f(t) = t^2 - t$, -1 < t < 1, por evaluación directa, graficar.

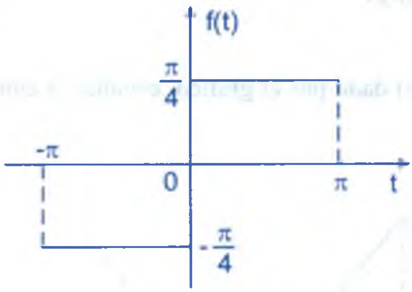
(27) Desarrollar en serie de Fourier la función definida por: $f(t) = \begin{cases} -2t & , -\pi < t < 0 \\ 3t & , 0 \le t \le \pi \end{cases}$, f(t + 2π) = f(t), ∀ t ∈R usando el resultado de este desarrollo, calcular la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}$.

(28) Calcular la serie de Fourier de $f(t) = e^{at}$ en $-\pi \le t \le \pi$ use este resultado para calcular la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^2}{a^2+n^2}$

(29) Si $f(t) = t^4$, $-\pi \le t \le \pi$, halle la serie de Fourier de f(t) y calcular la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\pi^2 - \frac{6}{n^2})^2}{n^4}$, graficar la función.

(30) Sea $f(t) = \begin{cases} t^3+1 & , -1 \le t \le 0 \\ t^3 - 1 & , 0 < t \le 1 \end{cases}$, tal que f(t – 1) =-f(t) gráfica y halle la serie de Fourier.

(31) Si f(t) esta dado por el gráfico adjunto:



a) Halle su serie de Fourier de la función f(t).

b) Con el resultado de (a) verificar $1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{17} + ... = \frac{\pi\sqrt{3}}{6}$

(32) Sea $f(t) = |t^3 - t|$, $-4 < t < 4$, $f(t+8) = f(t)$, $f(t-4) = -f(t)$. Halle los coeficientes de Fourier, haciendo el gráfico periódico con todos los datos presentes.

(33) Hallar la serie de Fourier de f(t) dado por: $f(t) = \begin{cases} 1 & , 2 < t < 3 \\ 4-t & , 3 < t < 4 \\ t-4 & , 4 < t < 5 \\ 1 & , 5 < t < 6 \end{cases}$, $f(t+4) = f(t)$.

(34) Hallar la serie de Fourier de la función $f(t) = \frac{\pi^2 t - t^3}{3}$ en $-\pi \le t \le \pi$ y mostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$

35 Hallar la serie de Fourier $f(t)=\begin{cases}\dfrac{t^2-\pi t}{2}, & 0\le t\le \pi\\ \dfrac{-t^2-\pi t}{2}, & -\pi\le t\le 0\end{cases}$ y probar que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^6}=\frac{\pi^6}{960}$.

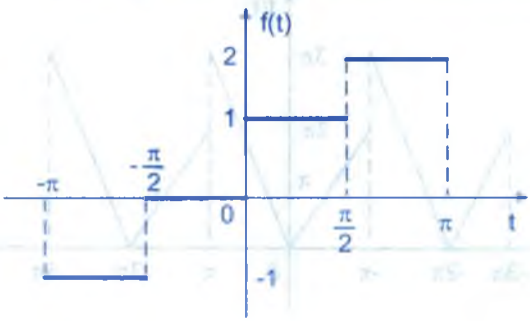
36 Hallar la serie de Fourier de la función $f(t)=\begin{cases}-\pi-t, & -\pi\le t\le -\dfrac{\pi}{2}\\ t, & -\dfrac{\pi}{2}\le t\le \dfrac{\pi}{2}\\ \pi-t, & \dfrac{\pi}{2}\le t\le \pi\end{cases}$ al resultado obtenido aplicar Teorema de PARSEVAL para sumar la serie.

37 Explícitamente determinar los coeficientes de Fourier de la función $f(t)=\begin{cases}0, & -2<t<-1\\ |t|, & |t|<1\\ 0, & 1<t<2\end{cases}$ en el intervalo [-2,2]

38 Si $f(t)=\begin{cases}-t, & -3<t<0\\ t, & 0<t<3\end{cases}$. Determinar los coeficientes de Fourier y hallar la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}$.

39 Halle la serie de Fourier de $f(t)=|A\cos\omega_0 t|$

40 f(t) esta dado por el gráfico adjunto, halle su serie de Fourier de f(t) y sumar la serie $1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{5^2}+\dfrac{1}{6^2}+\dfrac{1}{7^2}+\dfrac{1}{9^2}\ldots$



(41) Si $f(t)=|t^2-1|$, $-2<t<2$, $f(t-4)=-f(t)$, Graficar f(t) y calcular la serie de Fourier de f(t).

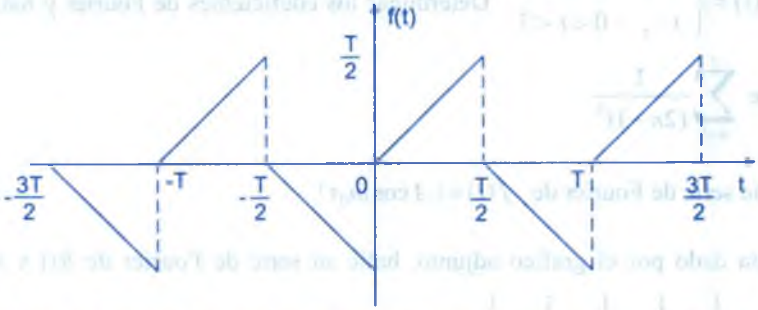
(42) Demostrar que si F(t) y G(t) son continuas por tramos en $-\frac{T}{2}<t<\frac{T}{2}$ y periódicas con periodo T, entonces la función definida por $H(t)=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}F(t-\mu)G(\mu)d\mu$, también es una función periódica.

(43) **a)** Hallar la serie de Fourier de la función f(t) = eos αt, $-\pi\leq t\leq\pi$ ($\alpha\in R$, cualquiera)

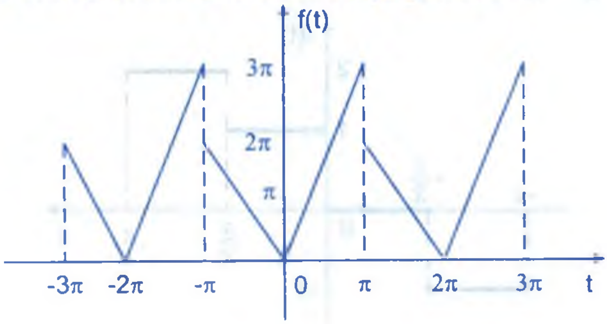
b) Hallar $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n^2-\alpha^2)^2}$ **c)** Determinar: ctg $(\alpha\pi)$

d) Determinar $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n^2-\alpha^2)^2}$ **e)** Calcular $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$

(44) Hallar la serie de Fourier de la función f(t) cuya función gráfica es:



(45) **a)** Hallar la serie de Fourier de la función cuya gráfica es:

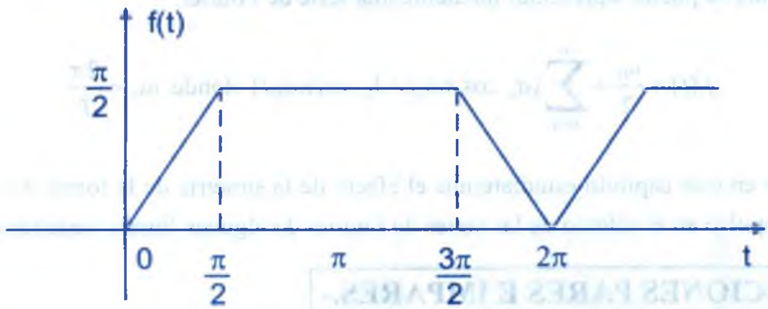


b) Aplicando el teorema de PARSEVAL hallar la suma de la serie correspondiente.

46 Si $f(t + 2\pi) = f(t)$, $\forall$ t y $F(x) = \int_0^x [f(t) - \frac{a_0}{2}]dt$. Demostrar que: F(x) es periódica con periodo 2π, donde $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt$

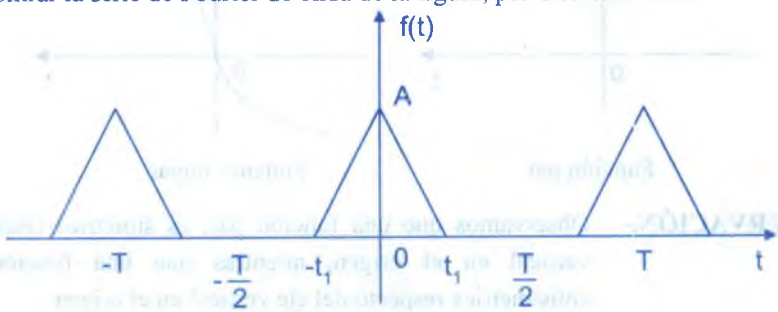
47 Dado $\frac{t}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\text{sen}\, nt}{n}$, $-\pi < t < \pi$, usando integración probar que: $\frac{t^2}{4} = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nt}{n^2}$ y que: $\frac{t^3}{12} - \frac{\pi^2 t}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \text{sen}\, nt}{n^3}$, para $-\pi < t < \pi$

48 Hallar la serie de Fourier de f(t) representado por el gráfico adjunto:



49 Sea F: R → R una función seccionalmente continua con periodo 2π y supongamos que $F(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nt + B_n \text{sen}\, nt)$ y sea $F(t+\pi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \text{sen}\, nt)$, probar que: $A_n = (-1)^n a_n$, $B_n = (-1)^n b_n$

50 Encontrar la serie de Fourier de onda de la figura, por diferenciación.



CAPÍTULO XV

15. SERIES DE FOURIER DE FUNCIONES: PARES, IMPARES, SIMETRÍA DE MEDIA ONDA, CUARTO DE ONDA PAR Y CUARTO DE ONDA IMPAR.-

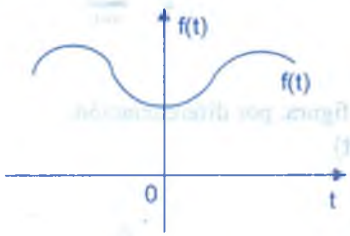
En el capítulo XIV se ha estudiado que cualquier función periódica f(t) con periodo T que satisface la condición de ser continua por tramos e integrable sobre cualquier intervalo se puede representar mediante una serie de Fourier.

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_0 t+b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t) \text{ donde } \omega_0=\frac{2\pi}{T}$$

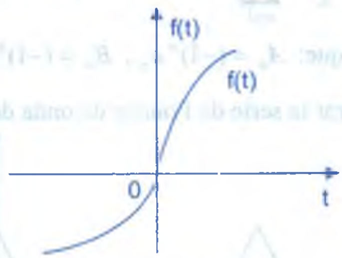
Ahora en este capítulo estudiaremos el efecto de la simetría de la forma de onda y el uso del impulso en el cálculo de las series de Fourier de algunas formas ondulatorias.

15.1. FUNCIONES PARES E IMPARES.-

Diremos que la función $f : R \to R$, es par si satisface la condición $f(-t) = f(t)$, $\forall\, t \in R$ y es impar si satisface la condición $f(-t) = -f(t)$, $\forall\, t \in R$.



Función par



Función impar

OBSERVACIÓN.- Observamos que una función par, es simétrica respecto del eje vertical en el origen, mientras que una función impar es antisimétrica respecto del eje vertical en el origen.

15.2. PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES PARES E IMPARES.-

1. Si f, g : R → R son funciones pares entonces f.g es función par.

Demostración

Sea $h(t) = f(t).g(t)$, por demostrar que h(t) es función par

$h(-t) = f(-t).g(-t) = f(t).g(t) = h(t)$ por lo tanto

como $h(-t) = h(t)$ entonces $f(t).g(t)$ es función par.

2. Si f,g : R → R son funciones impares entonces f.g es función par.

Demostración

f,g son funciones impares $\Rightarrow$ $f(-t)= -f(t)$ y $g(-t) = -g(t)$

sea $h(t) = f(t).g(t)$, por demostrar que h(t) es función par

$h(-t) = f(-t).g(-t) = (-f(t)).(-g(t)) = f(t).g(t) = h(t)$

como $h(-t) = h(t)$ entonces $f(t).g(t)$ es función par

3. Si f : R → R es una función par y g : R → R es una función impar entonces f.g es una función impar.

Demostración

Como f es una función par, entonces $f(-t) = f(t)$ y como g es una función impar, entonces $g(-t) = -g(t)$.

Sea $h(t) = f(t).g(t)$ por demostrar que h(t) es función impar.

$h(-t) = f(-t).g(-t) = f(t).(-g(t)) = -f(t).g(t) = -h(t)$

como $h(-t) = -h(t)$, entonces $f(t).g(t)$ es función impar

4. Toda función f(t), se puede expresar como la suma de dos funciones componentes, de las cuales la una es par y la otra impar.

Demostración

Se conoce que cualquier función f(t) se puede expresar así:

$$f(t)=\frac{1}{2}f(t)+\frac{1}{2}f(-t)+\frac{1}{2}f(t)-\frac{1}{2}f(-t)=\frac{1}{2}[f(t)+f(-t)]+\frac{1}{2}[f(t)-f(-t)] \quad \textbf{... (1)}$$

Sean $\begin{cases} f_e(t)=\dfrac{1}{2}[f(t)+f(-t)] \\ f_0(t)=\dfrac{1}{2}[f(t)-f(-t)] \end{cases}$ **... (2)**

Donde $f_e(-t)=\dfrac{1}{2}[f(-t)+f(t)]=\dfrac{1}{2}[f(t)+f(-t)]=f_e(t)$

Por lo tanto $f_e(t)$ es función par

$$f_0(-t)=\frac{1}{2}[f(-t)-f(t)]=-\frac{1}{2}[f(t)-f(-t)]=-f_0(t)$$

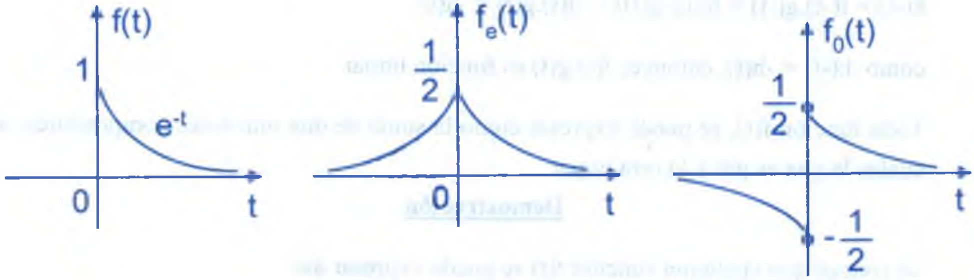
por lo tanto $f_0(t)$ es función impar, entonces $f(t)=f_e(t)+f_0(t)$, donde $f_e(t)$ es la componente par y $f_0(t)$ es la componente impar de la función f(t).

Ejemplo.- La función $f(t)=e^t=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}=\cosh t+\text{senh}\, t$

$$\therefore \quad f(t)=e^t=\cosh t+\text{senh}\, t$$

Ejemplo.- Hallar las componente par e impar de la función definida por $f(t)=\begin{cases} e^{-t}\ , & t>0 \\ 0\ , & t<0 \end{cases}$

Solución



$$f(t)=\begin{cases} e^{-t}, & t>0 \\ 0, & t<0 \end{cases} \Rightarrow f(-t)=\begin{cases} 0, & t>0 \\ e^{t}, & t<0 \end{cases}$$

$$f_e(t)=\frac{1}{2}[f(t)+f(-t)]=\begin{cases} \frac{1}{2}e^{-t} & ;\ t>0 \\ \frac{1}{2}e^{t} & ;\ t<0 \end{cases} \quad ; \quad f_0(t)=\frac{1}{2}[f(t)-f(-t)]=\begin{cases} \frac{1}{2}e^{-t} & ;\ t>0 \\ -\frac{1}{2}e^{t} & ;\ t<0 \end{cases}$$

Luego las componentes par e impar de la función f(t) son $f_e(t)$ y $f_0(t)$ que se muestran en la figura.

(5) Si la función f : R → R, es par, entonces se cumple: $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2\int_{0}^{a} f(t)dt$

Solución

Aplicando la propiedad de integral definida: $\int_{-a}^{a} f(t)dt = \int_{-a}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{a} f(t)dt$ **... (1)**

haciendo t = -x, en la primera integral

$$\int_{-a}^{0} f(t)dt = \int_{a}^{0} f(-x)(-dx) = -\int_{a}^{0} f(-x)dx = \int_{0}^{a} f(-x)dx$$

como f(t) es par, es decir f(-x) = f(x), de donde

$$\int_{-a}^{0} f(t)dt = \int_{0}^{a} f(-x)dx = \int_{0}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(t)dt \qquad \textbf{... (2)}$$

al reemplazar (2) en (1) se tiene:

$$\int_{-a}^{a} f(t)dt = \int_{-a}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{a} f(t)dt = \int_{0}^{a} f(t)dt + \int_{0}^{a} f(t)dt = 2\int_{0}^{a} f(t)dt$$

$$\therefore \quad \int_{-a}^{a} f(t)dt = 2\int_{0}^{a} f(t)dt$$

(6) Si la función $f: R \to R$, es impar, entonces se cumple $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0$

Demostración

Aplicando la propiedad de la integral definida

$$\int_{-a}^{a} f(t)dt = \int_{-a}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{a} f(t)dt = \int_{0}^{a} f(t)dt + \int_{0}^{a} f(t)dt \qquad \textbf{... (1)}$$

como f(t) es impar entonces f(-t) = -f(t) **... (2)**

al reemplazar (2) en (1) se obtiene:

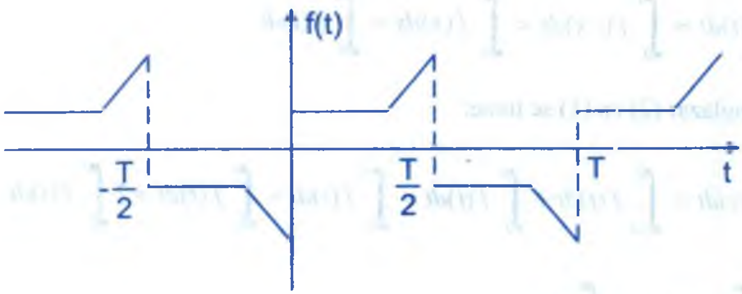
$$\int_{-a}^{a} f(t)dt = \int_{-a}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{a} f(t)dt = \int_{0}^{a} f(-t)dt + \int_{0}^{a} f(t)dt = -\int_{0}^{a} f(t)dt + \int_{0}^{a} f(t)dt = 0$$

$$\therefore \quad \int_{-a}^{a} f(t)dt = 0$$

15.3. SIMETRÍA DE MEDIA ONDA.-

Si la función f(t) es periódica con periodo T, entonces se dice que la función f(t) tiene simetría de media onda si satisface la condición: $f(t) = -f(t + \frac{T}{2})$

OBSERVACIÓN.- Mostraremos en la figura una forma de onda con simetría de media ondas se debe observar que la porción negativa de la onda es el reflejo de la porción positiva desplazado horizontalmente medio periodo.



NOTA.- Simetría de media onda no es par ni impar.

TEOREMA.- Si una función negativa f(t) tiene simetría de media onda. Demostrar que:

$$f(t) = -f(t - \frac{1}{2}T)$$

Demostración

Como f(t) tiene simetría de media onda, entonces se tiene: $f(t) = -f(t + \frac{1}{2}T)$ **... (1)**

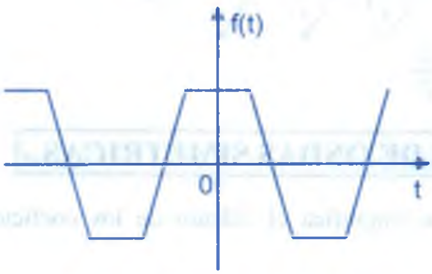
como f(t) es periódica con periodo T, entonces:

$$f(t - \frac{1}{2}T) = f(t + T - \frac{1}{2}T) = f(t + \frac{T}{2}) \quad \textbf{... (2)}$$

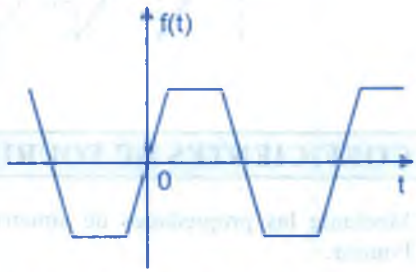
por lo tanto de (1) y (2) se tiene: $f(t) = -f(t - \frac{1}{2}T)$

15.4. SIMETRÍA DE CUARTO DE ONDA.-

Si la función periódica f(t) tiene simetría de media onda y además es una función par o impar, entonces se dice que f(t) tiene una simetria de cuarto de onda par ó impar mediante los siguientes gráficos mostraremos las formas de ondas con simetría de cuarto de onda.



Simetria de cuarto de onda par

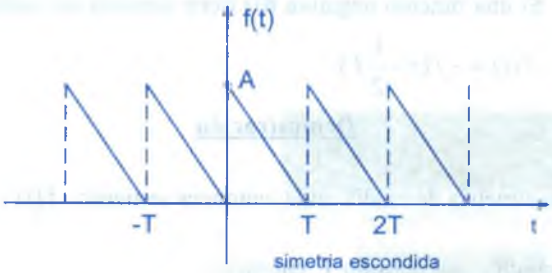


Simetría de cuarto de onda impar

15.5. SIMETRÍA ESCONDIDA.-

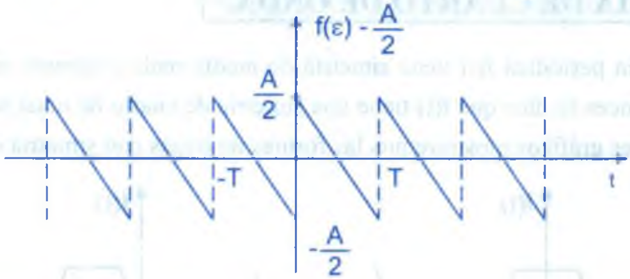
Con frecuencia la simetría de una función periódica no es evidente debido a la presencia de un término constante. Esto lo ilustraremos en el ejemplo siguiente.

Ejemplo.- De la figura mostrada, demostrar que si se construye una nueva función sustrayendo de f(t) el término constante $\frac{A}{2}$, la nueva función es una función impar.



Solución

La sustracción del término constante $\frac{A}{2}$ de f(t), lo que hace es desplazar el eje horizontal hacia arriba en $\frac{A}{2}$ y resulta la nueva función $g(t) = f(t) - \frac{A}{2}$ es una función impar.



15.6. COEFICIENTES DE FOURIER DE ONDAS SIMETRICAS.-

Mediante las propiedades de simetría se simplifica el cálculo de los coeficientes de Fourier.

TEOREMA.- Si f(t) es una función par y periódica con periodo T. Demostrar que $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t$, donde $a_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\omega_0 t\; dt$ y $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

Demostración

La serie de Fourier de la función f(t) es :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t) \qquad \text{... (1)}$$

donde $a_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\omega_0 t\ dt$, $b_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\operatorname{sen} n\omega_0 t\ dt$, n = 1,2,3,...

como $\operatorname{sen}\omega_0 nt$ es impar y f(t) es par entonces $f(t)\operatorname{sen} n\omega_0 t$ es función impar (por la propiedad 3 de 15.2), luego $\displaystyle\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\operatorname{sen} n\omega_0 t\ dt = 0$, por la propiedad 6 de 15.2

por lo tanto se tiene: $b_n = 0$ **... (2)**

Como $\cos n\omega_0 t$ es par y f(t) es par entonces $f(t)\cos n\omega_0 t$ es par, luego $\displaystyle\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\omega_0 t\ dt = 2\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\omega_0 t\ dt$ (por la propiedad 5 de 15.2)

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\omega_0 t\ dt = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\omega_0 t\ dt \qquad \textbf{... (3)}$$

al reemplazar (2) y (3) en (1) se obtiene:

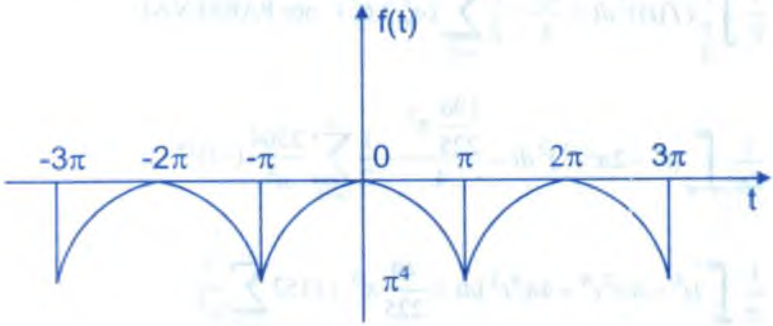
$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t \quad \text{y} \quad a_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\omega_0 t\ dt$$

Ejemplo.-

a) Hallar la serie de Fourier de la función $f(t) = t^4 - 2\pi^2 t^2$,-π≤t≤π, f(t+2π)=f(t),∀t∈R

<u>Solución</u>

Construyendo la gráfica de la función f(t).



f(t) es una función par, entonces la serie de Fourier es :

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nt\ ,\quad \omega_0=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{2\pi}=1$$

$$a_n=\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}f(t)\cos n\omega_0 t\ dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(t^4-2\pi^2t^2)\cos nt\ dt$$

integrando sucesivamente por partes se tiene:

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(t^4-2\pi^2t^2)\cos nt\ dt=\frac{2}{\pi}(-\frac{24\pi(-1)^n}{n^4})=-\frac{48(-1)^n}{n^4}$$

$$a_0=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)=dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(t^4-2\pi^2t^2)dt=-\frac{14}{15}\pi^4$$

como $f(t)=\dfrac{a_0}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nt$, entonces : $f(t)=-\dfrac{7\pi^4}{15}-48\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^4}\cos nt$

b) De la serie de Fourier de la parte (a) calcule la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^8}$ aplicando el teorema de PARSEVAL.

Solución

$$\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}(f(t))^2\,dt=\frac{a_0^2}{4}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\quad \text{por PARSEVAL}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(t^4-2\pi^2t^2)^2\,dt=\frac{\frac{196}{225}\pi^8}{4}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2304}{n^8}(-1)^{2n}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(t^8-4\pi^2t^6+4\pi^4t^4)dt=\frac{49}{225}\pi^8+1152\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^8}$$

$$\frac{107}{315}\pi^8 = \frac{49}{225}\pi^8 + 1152\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^8} \quad \Rightarrow \quad \frac{535-343}{1575}\pi^8 = 1152\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^8}$$

$$1152\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^8} = \frac{192}{1575}\pi^8, \text{ de donde } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^8} = \frac{\pi^8}{9450}$$

c) De la serie de Fourier de la parte (a), calcular la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$

Solución

En la serie de Fourier $f(t) = -\frac{7\pi^4}{15} - 48\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \cos nt}{n^4}$

Hacemos $t = \pi$; $-\pi^4 = -\frac{7\pi^4}{15} - 48\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(-1)^n}{n^4}$

$$48\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n}}{n^4} = \pi^4 - \frac{7\pi^4}{15} = \frac{8\pi^4}{15} \qquad \therefore \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

d) Hallar la serie de Fourier de la función $g(t) = t(t^2 - \pi^2)$ mediante la función f(t) de la parte (a).

Solución

Como $f(t) = t^4 - 2\pi^2 t^2 \Rightarrow f'(t) = 4t^3 - 4\pi^2 t$, luego

$f'(t) = 4(t^3 - \pi^2 t)$ es continua en [-π,π], además

$f(-\pi) = f(\pi) = -\pi^4$; $f'(t)$ es continua por tramos

$$f(t) = -\frac{7\pi^4}{15} - 48\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \cos nt}{n^4}, \text{ derivando}$$

$$f'(t) = -48\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(-\operatorname{sen} nt)}{n^3} = 48\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \operatorname{sen} nt}{n^3}$$

$$4(t^3-\pi^2 t)=48\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \operatorname{sen} nt}{n^3} \quad \Rightarrow \quad t^3-\pi^2 t=12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \operatorname{sen} nt}{n^3}$$

$$\therefore \quad g(t)=t(t^2-\pi^2)=12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \operatorname{sen} nt}{n^3}$$

e) Aplicando el teorema de PARSEVAL a la serie de Fourier de la parte (d) calcular la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}$

Solución

$$\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g^2(t)dt=\frac{a_0^2}{4}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2) \text{ por Parseval}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(t^3-\pi^2 t)^2\,dt=0+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n 12}{n^3}\right)^2$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(t^6-2\pi^2 t^4+\pi^4 t^2)dt=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{144}{n^3}$$

$$72\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(t^6-2\pi^2 t^4+\pi^4 t^2)dt=\frac{8\pi^6}{105} \qquad \therefore \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}=\frac{\pi^6}{945}$$

f) Hallar la serie de Fourier de la función $g(t)=\frac{t}{15}(3t^4-10\pi^2 t^2+7\pi^4)$ mediante la función f(t) de la parte (a).

Solución

La serie de Fourier de $f(t)=t^4-2\pi^2 t^2=-\frac{7\pi^4}{15}-48\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \cos nt}{n^4}$, integrando

$$\int_0^t (t^4-2\pi^2 t^2)dt=-\frac{7\pi^4}{15}t-48\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4}\int_0^t \cos nt\ dt$$

$$\frac{t^5}{5}-\frac{2\pi^2t^3}{3}+\frac{7\pi^4t}{15}=-48\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\,sennt}{n^5}$$

$$\frac{t}{15}(3t^4-10\pi^2t+7\pi^4)=-48\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\,sennt}{n^5}$$

TEOREMA 2.- Si f(t) es una función impar y periódica con periodo T, demostrar que la serie de Fourier de f(t) es $f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\operatorname{sen} n\omega_0 t$, donde

$$b_n=\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}f(t)\operatorname{sen} n\omega_0 t\ dt \ \text{ y } \ \omega_0=\frac{2\pi}{T}$$

Demostración

La serie de Fourier de la función f(t) es: $f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_0 t+b_n\operatorname{sen} n\omega_0 t)$ **... (1)**

donde $a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\cos n\omega_0 t\ dt$ y $b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\operatorname{sen} n\omega_0 t\ dt$

como f(t) es impar y $\cos n\omega_0 t$ es par entonces $f(t)\cos n\omega_0 t$ es impar, entonces

$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\cos n\omega_0 t\ dt=0$ (por la propiedad 5 de 15.2)

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\cos n\omega_0 t\ dt=\frac{2}{T}(0)=0 \ \Rightarrow\ a_n=0 \qquad \textbf{... (2)}$$

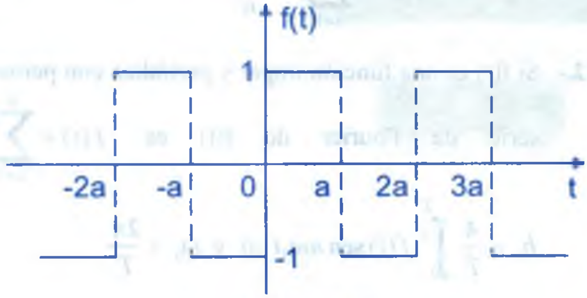
como f(t) es impar y $\operatorname{sen} n\omega_0 t$ es impar entonces $f(t)\operatorname{sen} n\omega_0 t$ es par entonces

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\operatorname{sen} n\omega_0 t\ dt=\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}f(t)\operatorname{sen} n\omega_0 t\ dt \qquad \textbf{... (3)}$$

$a_0=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)dt=0$ puesto que f(t) es impar por lo tanto de (2) y (3) en (1) se tiene :

$$f(t)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t \quad \text{donde} \quad b_n=\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\operatorname{sen} n\omega_0 t\; dt$$

Ejemplo.- Hallar la serie de Fourier de la función tal que cuyo gráfico es :



Solución

$$f(t)=\begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0<t<a \\ -1 & \text{si} \quad -a<t<0 \end{cases}, \quad \omega_0=\frac{2\pi}{2a}=\frac{\pi}{a}, \quad f(t+2a)=f(t)$$

como f(t) es impar y f(t + 2a) = f(t) es periódica entonces, la serie de Fourier de la función

f(t) es : $f(t)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi t}{a}$, donde

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{a}\,dt=\frac{2}{a}\int_0^a \operatorname{sen}\frac{n\pi t}{a}\,dt$$

$$=-\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi t}{a}\Big/_0^a=-\frac{2}{n\pi}[(-1)^n-1]=\frac{2}{n\pi}[1-(-1)^n]$$

$$b_n=\frac{2}{n\pi}[1-(-1)^n]=\begin{cases} \dfrac{4}{n\pi}, & \text{si } n \text{ es impar} \\ 0, & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

$$b_{2n-1}=\frac{4}{(2n-1)\pi} \qquad \text{por lo tanto} \quad f(t)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(2n-1)\frac{\pi}{a}t}{2n-1}$$

aplicando el teorema de PARSEVAL se tiene:

$$\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t)dt = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)\ , \text{ por Parseval}$$

$$\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} f^2(t)dt = 0 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{\pi^2(2n-1)} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2a}\left(\int_{-a}^{0} dt + \int_{0}^{a} dt\right) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$$

$$1 = \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1} \quad \text{de donde} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1} = \frac{\pi^2}{8}$$

TEOREMA 3.- Demostrar que la serie de Fourier de cualquier función periódica f(t) que tiene simetría de media onda, contiene armónicas impares solamente.

Demostración

La serie de Fourier de la función f(t) es :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t)\ , \text{ donde}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\omega_0 t \ dt = \frac{2}{T}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{0} f(t)\cos n\omega_0 t \ dt + \int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\omega_0 t \ dt\right]$$

cambiando t por $(t - \frac{1}{2}T)$ en la primera integral, se tiene :

$$a_n = \frac{2}{T}\left[\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t - \frac{1}{2}T)\cos n\omega_0 (t - \frac{1}{2}T)dt + \int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\omega_0 t \ dt\right] \quad \text{... (1)}$$

como f(t) tiene simetría de media onda, entonces se tiene :

$f(t) = f(t - \frac{1}{2}T)$ y como sen n π = 0, entonces

$$a_n = \frac{2}{T}\left[\int_{0}^{\frac{T}{2}} -f(t)[\cos n\omega_0 t . \cos n\pi + \operatorname{sen} n\pi . \operatorname{sen} n\omega_0 t]dt + \int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\omega_0 t \ dt\right]$$

$$=\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}(1-[-1]^n)f(t)\cos n\omega_o t\ dt=\frac{2(1-(-1)^n)}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}f(t)\cos n\omega_0 t\ dt$$

$$=\begin{cases} 0 & \text{para } n \text{ par} \\ \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\omega_0 t\ dt, & n \text{ impar}\end{cases},$$ en forma similar se demuestra que:

$$b_n=\begin{cases} 0 & , \text{ para } n \text{ par} \\ \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t) sen n\omega_0 t\ dt, & \text{para } n \text{ impar}\end{cases}$$

TEOREMA 4.- Demostrar que la serie de Fourier de cualquier función periódica f(t) que tiene simetría de cuarto de onda par, consta solamente de armónicos impares de términos el coseno, es decir:

$$f(t)=\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}\cos[(2n-1)\omega_0 t] \quad \text{del} \quad a_{2n-1}=\frac{8}{T}\int_0^{\frac{T}{4}} f(t)\cos(2n-1)\omega_0 t\ dt$$

Demostración

La serie de Fourier de la función f(t) se tiene: $f(t)=\frac{a_0}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega_0 t+b_n \text{ sen } n\omega_0 t)$

como f(t) tiene simetría de cuarto de onda por f(t) = f(-t) y $f(t+\frac{1}{2}T)=-f(t)$ y del teorema 2 y 3 se tiene :

$\begin{cases} b_n=0 \\ a_{2n}=0\end{cases}$, para todos los valores de n incluyendo a_0

$$a_{2n-1}=\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos[(2n-1)\omega_0 t]dt$$

$$=\frac{4}{T}[\int_0^{\frac{T}{4}} f(t)\cos(2n-1)\omega_0 t\ dt+\int_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(2n-1)\omega_0 t\ dt]$$

cambiando la variable t por $(t+\frac{1}{2}T)$ en la segunda integral

$$a_{2n-1}=\frac{4}{T}[\int_0^{\frac{T}{4}} f(t)\cos(2n-1)\omega_0 t\ dt+\int_{-\frac{T}{4}}^{0} f(t+\frac{1}{2}T)\cos[(2n-1)\omega_0(t+\frac{1}{2}T)]dt$$

aplicando la propiedad $f(t)=-f(t+\frac{1}{2}T)$, se tiene :

$$a_{2n-1}=\frac{4}{T}[\int_0^{\frac{T}{4}} f(t)\cos(2n-1)\omega_0 t\ dt+\int_{-\frac{T}{4}}^{0} f(t)\cos(2n-1)\omega_0 t\ dt]$$

$$=\frac{4}{T}[\int_{-\frac{T}{4}}^{0} f(t)\cos(2n-1)\omega_0 t\ dt+\int_0^{\frac{T}{4}} f(t)\cos(2n-1)\omega_0 t\ dt]$$

$$=\frac{4}{T}\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} f(t)\cos(2n-1)\omega_0 t\ dt=\frac{8}{T}\int_0^{\frac{T}{4}} f(t)\cos(2n-1)\omega_0 t\ dt$$

TEOREMA 5.- Demostrar que la serie de Fourier de cualquier función periódica f(t) que tiene simetría de cuarto de onda impar, consta de armónicos impares de términos del seno solamente, es decir :

$$f(t)=\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1}\operatorname{sen}(2n-1)\omega_0 t \quad \text{y} \quad b_{2n-1}=\frac{8}{T}\int_0^{\frac{T}{4}} f(t)\operatorname{sen}(2n-1)\omega_0 t\ dt$$

Demostración

Como $f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_0 t+b_n\operatorname{sen} n\omega_0 t)$

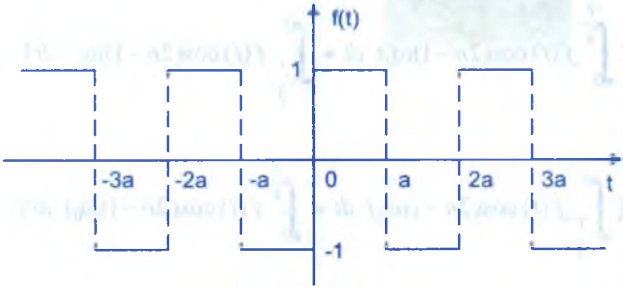
f(t) tiene simetría de cuarto de onda impar entonces f(-t) = -f(t) y $f(t+\frac{1}{2}T)=-f(t)$

y de los teoremas 2 y 3 se tiene: $\begin{cases} a_n=0 \\ b_{2n}=0 \end{cases}$, para todos los valores de n incluyendo a_0

$$b_{2n-1} = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\,\text{sen}(2n-1)\omega_0 t\ dt\ ,$$ por el mismo criterio del teorema (4) se tiene :

$$b_{2n-1} = \frac{8}{T}\int_0^{\frac{T}{4}} f(t)\,\text{sen}(2-1)\omega_0 t\ dt$$

Ejemplo.- Encontrar la serie de Fourier de la onda cuadrada que se muestra en la figura



Solución

La función f(t) tiene simetría de cuarto de onda impar entones

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1}\,\text{sen}[(2n-1)\omega_o t]\ ,\quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2a} = \frac{\pi}{a}$$

$$b_{2n-1} = \frac{8}{T}\int_0^{\frac{T}{4}} f(t)\,\text{sen}(2n-1)\omega_0 t\ dt = \frac{8}{2a}\int_0^{\frac{a}{2}} \text{sen}(2n-1)\frac{\pi}{a}t\ dt$$

$$= \frac{4}{a}\left(-\frac{a\cos(2n-1)\frac{\pi t}{a}}{\pi(2n-1)}\right)\Big/_0^{\frac{a}{2}} = \frac{4}{(2n-1)\pi}$$

$$f(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\text{sen}[(2n-1)\frac{\pi}{a}t]}{2n-1}\ ,$$ si aplicamos el teorema de Parseval

$$\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} f^2(t)dt = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{\pi^2(2n-1)^2}$$

$$1 = \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$$ de donde $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

15.7. EXPANSIONES DE MEDIO RANGO.-

Sea f(t) una función periódica con periodo $T = 2\ell$ y $f(-t) = f(t)$, $\forall\ t \in R$, entonces

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t \ , \text{ donde } \ \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{\ell}$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\frac{\pi}{\ell}t)dt \qquad \text{... (1)}$$

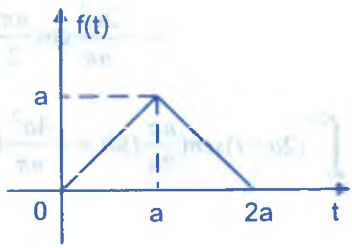
donde $a_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(n\frac{\pi}{\ell}t)dt \ \Rightarrow \ a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(t)\cos(\frac{n\pi}{\ell}t)dt$ **... (2)**

Sí $f(-t) = -f(t)$ entonces $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(\frac{n\pi}{\ell}t)$ **... (3)**

$$b_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(t)\operatorname{sen}(\frac{n\pi}{\ell}t)dt \qquad \text{... (4)}$$

de acuerdo a las expresiones (2) y (4) solo se necesita que la función f(t) esté definida en el intervalo finito $[0,\ell]$, entonces la serie (1) y (3) representan ambas una misma función f(t) dada en el intervalo $[0,\ell]$ y fuera de este intervalo la serie (1) representa la extensión periódica par, con $T = 2\ell$; la serie (3) representara la extensión periódica con $T = 2\ell$, y las series (1) y (3) se denomina "Expansión De medio Rango" de la función dada f(t).

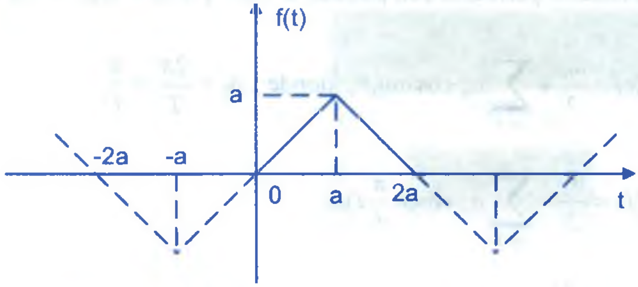
Ejemplo.- Hallar la serie de medio rango de f(t) tal que cuya gráfica es :



Solución

La función f(t) cuya gráfica es dada, tiene por regla de correspondencia.

$$f(t)=\begin{cases} t & , 0\le t\le a \\ 2a-t & , a<t\le 2a \end{cases}$$



Extensión periódicamente impar y f(t + 4a) = f(t), T = 4a

Su serie de Fourier es $f(t)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(\frac{n\pi t}{2a})$, donde

$$b_n=\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\operatorname{sen}(\frac{n\pi t}{2a})dt=\frac{1}{a}\int_0^{2a} f(t)\operatorname{sen}(\frac{n\pi}{2a}t)dt$$

$$=\frac{1}{a}[\int_0^{a} t\operatorname{sen}(\frac{n\pi t}{2a})dt+\int_0^{2a}(2a-t)\operatorname{sen}(\frac{n\pi}{2a}t)dt] \qquad \textbf{... (1)}$$

$$\int_0^{a} t\operatorname{sen}(\frac{n\pi}{2a}t)dt=[-\frac{2at}{n\pi}\cos(\frac{n\pi t}{2a})+\frac{4a^2}{n^2\pi^2}\operatorname{sen}(\frac{n\pi t}{2a})]\Big/_0^a$$

$$=-\frac{2a^2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{4a^2}{n^2\pi^2}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2} \qquad \textbf{... (2)}$$

$$\int_a^{2a}(2a-t)sen(\frac{n\pi}{2a}t)dt=-\frac{4a^2}{n\pi}(-1)^n+\frac{4a^2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{4a(-1)^n}{n\pi}-$$

$$-\frac{2a^2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{4a^2}{n^2\pi^2}sen\frac{n\pi}{2} \qquad \textbf{... (3)}$$

ahora reemplazando (2) y (3) en (1) se tiene:

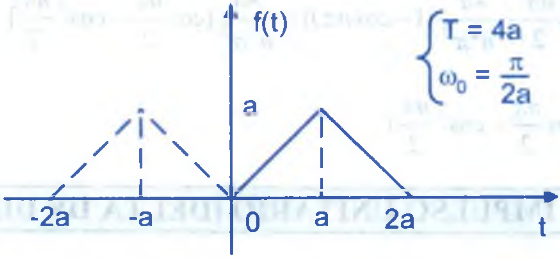
$$b_n = \frac{1}{a}[-\frac{2a^2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{4a^2}{n^2\pi^2} sen\frac{n\pi}{2} - \frac{4a^2}{n\pi}(-1)^2 + \frac{4a^2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{n\pi} +$$

$$+\frac{4a(-1)^n}{n\pi} - \frac{2a^2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{4a^2}{n^2\pi^2} sen\frac{n\pi}{2}]$$

$$= \frac{1}{a}(\frac{8}{n^2\pi^2}\text{sen}\frac{n\pi}{2}) = \frac{8a}{n^2\pi^2}\text{sen}(\frac{n\pi}{2})$$

$$\text{Sí} \begin{cases} n=1\,,\ \text{sen}\frac{\pi}{2} = 1 \\ n=2\,,\ \text{sen}\,\pi = 0 \\ n=3\,,\ \text{sen}\frac{3\pi}{2} = -1 \\ n=4\,,\ \text{sen}\,2\pi = 0 \\ n=5\,,\ \text{sen}\frac{5\pi}{2} = 1 \end{cases} \quad sen\frac{n\pi}{2} = (-1)^n \quad \Rightarrow \quad b_{2n} = 0\,,\ si\ n = 1,2,3,\ldots \quad b_{2n-1} = (-1)^{n-1}\frac{8a}{n^2\pi^2}$$

$$f(t) = \frac{8a}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}\text{sen}(2n-1)\frac{\pi t}{2a} \quad \text{(serie en seno)}$$



$$\begin{cases} T = 4a \\ \omega_0 = \frac{\pi}{2a} \end{cases}$$

Extensión periódicamente par, y su serie de Fourier es :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{n\pi}{2a}t)\,,\ \text{donde :}$$

$$a_0 = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)dt = \frac{1}{a}\int_0^{2a} f(t)dt = \frac{1}{a}[\int_0^a t\,dt + \int_a^{2a}(2a-t)dt] = \frac{1}{a}[\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2}] = a$$

$$a_n=\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(\frac{n\pi}{2a}t)dt=\frac{1}{a}\int_0^{2a} f(t)\cos(\frac{n\pi t}{2a})dt$$

$$=\frac{1}{a}[\int_0^{a} t\cos(\frac{n\pi}{2a}t)dt+\int_a^{2a}(2a-t)\cos(\frac{n\pi}{2a}t)dt] \qquad \ldots (1)$$

$$\int_0^{a} t\cos(\frac{n\pi}{2a}t)dt=\frac{2a^2}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}+\frac{4a^2}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{2}-\frac{4a^2}{n^2\pi^2} \qquad \ldots (2)$$

$$\int_a^{2a}(2a-t)\cos(\frac{n\pi}{2a}t)dt=-\frac{4a^2\cos n\pi}{n^2\pi^2}-\frac{2a^2}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}+\frac{4a^2}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{2} \qquad \ldots (3)$$

reemplazando (2) y (3) en (1) se tiene:

$$a_n=\frac{1}{a}[\frac{2a^2}{n\pi}sen\frac{n\pi}{2}+\frac{4a^2}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{2}-\frac{4a^2}{n^2\pi^2}-\frac{4a^2\cos n\pi}{n^2\pi^2}-$$

$$-\frac{2a^2}{n\pi}sen\frac{n\pi}{2}+\frac{4a^2}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{2}]$$

$$=\frac{1}{a}[\frac{8a^2}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{2}-\frac{4a^2}{n^2\pi^2}(1+\cos n\pi)]=\frac{8a}{n^2\pi^2}[\cos\frac{n\pi}{2}-\cos^2\frac{n\pi}{2}]$$

$$a_n=\frac{8a}{n^2\pi^2}(\cos\frac{n\pi}{2}-\cos^2\frac{n\pi}{2})$$

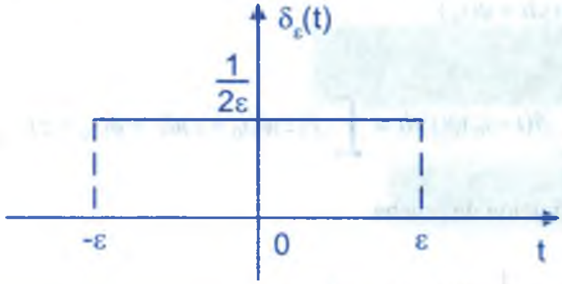
15.8. FUNCION IMPULSO UNITARIO (DELTA DE DIRAC).-

La función impulso unitario δ(t), conocido también como función Delta de Dirac, puede definirse de varias maneras, generalmente se expresa mediante la relación.

$$\delta_\varepsilon(t)=\begin{cases}\frac{1}{2\varepsilon}, & si\ |t|<\varepsilon\\ 0, & si\ |t|\geq\varepsilon\end{cases}$$

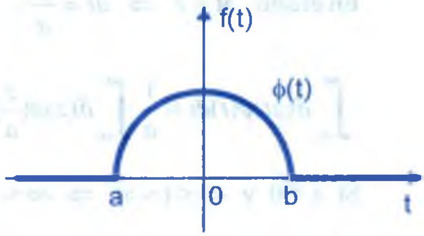
y la función δ(t) queda expresada por : $\delta(t)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\delta_\varepsilon(t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(t)dt = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta_\varepsilon(t)dt = \frac{1}{2\varepsilon} t \Big/_{-\varepsilon}^{\varepsilon} = \frac{1}{2\varepsilon}(\varepsilon + \varepsilon) = 1$$



15.9. ESPACIO DE LAS FUNCIONES DE PRUEBA C_0^∞ .-

Una función de prueba es una función infinitamente diferenciable que se anula fuera de algún intervalo finito abierto <a,b>; es decir, una función de prueba es una función continua que se anula fuera de algún intervalo finito.



15.10. EL CONJUNTO DE LAS FUNCIONES LINEALES.-

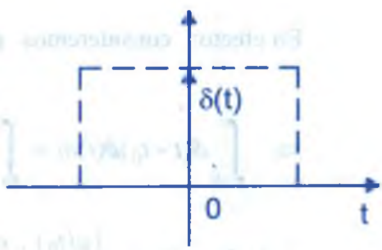
Al conjunto de las funciones lineales denotaremos por: $D = \{T : c_0^\infty \to R \subset C \,/\, T \text{ es una funcional lineal}\}$.

Luego la función δ(t) se definirá por la relación

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 \ , \ si \ \ t \neq 0 \\ \infty \ , \ si \ \ t = 0 \end{cases} \quad \textbf{... (1)}$$

y además $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(t)dt = 1$ **... (2)**

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\phi(t)dt = \phi(0) \quad \textbf{... (3)}$$



15.11. PROPIEDADES.-

① $$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)\phi(t)dt=\phi(t_0)$$

En efecto: $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)\phi(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}f(z)\phi(t_0+z)dz=\phi(t_0+z)\Big|_{z=0}=\phi(t_0)$, $(t-t_0=z)$

Esto es por la función de prueba

② $$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(at)\phi(t)dt=\frac{1}{|a|}\phi(0),\ \forall\ a\in R,\ a\neq 0$$

En efecto: at = z $\Rightarrow$ $dt=\dfrac{dz}{a}$. Sí a > 0 y -∞ < t < ∞ $\Rightarrow$ -∞ < at < ∞

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(at)\phi(t)dt=\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(z)\phi(\frac{z}{a})dz=\frac{1}{a}\phi(\frac{z}{a})\Big|_{z=0}=\frac{1}{a}\phi(0)\qquad\dots(\alpha)$$

Sí a < 0 y -∞ < t < ∞ $\Rightarrow$ -∞ < at < ∞

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(at)\phi(t)dt=\int_{\infty}^{-\infty}\delta(z)\phi(\frac{z}{a})\frac{dz}{a}=-\int_{-\infty}^{\infty}\delta(z)\phi(\frac{z}{a})\frac{dz}{a}=-\frac{1}{a}\phi(0)\qquad\dots(\beta)$$

Luego de (α) y (β) se tiene: $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(at)\phi(t)dt=\dfrac{1}{|a|}\phi(0)$

③ Si g(t) es continua en <a,b>, entonces: $\int_a^b\delta(t-t_0)g(t)dt=\begin{cases}g(t_0)\ , & a<t_0<b\\ 0\ , & \text{fuera de } <a,b>\end{cases}$

En efecto: consideremos $\phi(t)=\begin{cases}g(t)\ , & a<t<b\\ 0\ , & \text{fuera de } <a,b>\end{cases}$

$\Rightarrow$ $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)\phi(t)dt=\int_a^b\delta(t-t_0)g(t)dt$ por lo tanto $\phi(t_0)=\int_a^b\delta(t-t_0)g(t)dt$

es decir: $\phi(t_0)=\begin{cases}g(t_0)\ , & a<t_0<b\\ 0\ , & \text{fuera de } <a,b>\end{cases}$

(4) Si a < b, Demostrar que : $\int_a^b \delta(t-t_0)dt = \begin{cases} 1 \ , \ \text{para} \ a < t_0 < b \\ 0 \ , \ \text{para} \ b < t_0 < a \end{cases}$

En efecto : Haremos la interpretación de la expansión, para esto seleccionaremos la función de prueba $\phi(t)$ tal que $\phi(t) = \begin{cases} 1 \ , \ \text{para} \ a < t < b \\ 0 \ , \ \text{para} \ b < t < a \end{cases}$

De la propiedad (1) se tiene :

$$\int_a^b \delta(t-t_0)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\phi(t)dt = \phi(t_0) = \begin{cases} 1 \ , \ \text{para} \ a < t_0 < b \\ 0 \ , \ \text{para} \ b < t_0 < a \end{cases}$$

(5) Sí f(t).δ(t) = f(0).δ(t), donde f(t) es una función continua en t = 0, Demostrar que :

a) $\delta(at) = \dfrac{1}{|a|}\delta(t)$ **b)** δ(-t) = δ(t)

En efecto : como f(t) es una función continua, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} [f(t)\delta(t)]\phi(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)[f(t).\phi(t)]dt = f(0).\phi(0)$$

$$= f(0)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t).\phi(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} [f(0).\delta(t)]\phi(t)dt$$

puesto que φ(t) es una función de prueba arbitraria, se concluye que f(t).δ(t) = f(0).δ(t)

ahora la propiedad se tiene :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(at)\phi(t)dt = \frac{1}{|a|}\phi(0) = \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\phi(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|a|}\delta(t)\phi(t)dt$$

$$\therefore \quad \delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$$

haciendo a = -1 se tiene: $\delta(-t) = \dfrac{1}{|-1|}\delta(t) = \delta(t)$, por lo tanto δ(t) es una función par

Ejemplo.-

1. Evaluar $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-5)e^{4t}\cos(\frac{n\pi}{5}t)dt$

Solución

$$\int_{-\infty}^{\infty} (t-5)e^{4t}\cos(\frac{n\pi}{5}t)dt = \phi(5) \quad \text{donde} \quad \delta(t) = e^{4t}\cos(\frac{n\pi}{5}t)$$

por lo tanto $\phi(5) = 2^{20}\cos n\pi = e^{20}(-1)^n$

$$\therefore \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-5)e^{4t}\cos(\frac{n\pi}{5}t)dt = e^{20}(-1)^n$$

2. $\int_{2}^{8} \delta(t-10)e^{-t}dt$

Solución

$$\int_{2}^{8} \delta(t-10)e^{-t}dt = 0 \quad \text{puesto que} \quad t_0 = 10 \notin \langle 2,8 \rangle$$

3. $\int_{2}^{8} \delta(t-7)e^{-t}dt = \phi(7)$ donde $\phi(t) = e^{-t} = e^{-7}$

15.12. DERIVADAS DE LA FUNCIÓN δ.-

DEFINICIÓN.- La derivada $\delta'(t)$ de la función δ(t) está definida por la integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)\delta(t)dt = -\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\phi'(t)dt = -\phi'(0) \quad \text{donde} \quad \delta'(t) = \frac{d\delta(t)}{dt}, \quad \phi'(0) = \frac{d\phi}{dt}\Big|_{t=0}$$

calculando la n – ésima derivada de la función δ(t)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta''(t)\phi(t)dt = -\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)\phi'(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t).\phi''(t)dt = \phi''(0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'''(t)\phi(t)dt = -\int_{-\infty}^{\infty} \delta''(t)\phi'(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)\phi''(t)dt = -\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\phi'''(t)dt = -\phi'''(0)$$

.

.

.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}\phi(t)dt = (-1)^n \phi^{(n)}(0) \qquad \therefore \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(t)\phi(t)dt = (-1)^n \phi^{(n)}(0)$$

Ejemplo.- Evaluar $\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(t)(\frac{1}{a^2t^2-b^2})dt$

Solución

$$\phi(t) = \frac{1}{a^2t^2-b^2} = \frac{1}{(at-b)(at+b)} = \frac{A}{at-b} + \frac{B}{at+b}$$

$$A = \lim_{t\to\frac{b}{a}} \frac{1}{at+b} = \frac{1}{2b} \quad ; \quad B = \lim_{t\to-\frac{b}{a}} \frac{1}{at-b} = -\frac{1}{2b}$$

$$\phi(t) = \frac{1}{2b}(\frac{1}{at-b} - \frac{1}{at+b}) = \frac{1}{2b}[\frac{1}{at-b} - \frac{1}{at+b}] \quad , \quad \text{derivando}$$

$$\phi'(t) = \frac{1}{2b}[(\frac{-a}{(at-b)^2}) - (\frac{-a}{(at+b)^2})] \quad , \quad \text{derivando}$$

$$\phi''(t) = \frac{1}{2b}[\frac{1.2a^2}{(at-b)^3} - \frac{1.2a^3}{(at+b)^3}] \quad , \quad \text{derivando}$$

$$\phi'''(t) = \frac{1}{2b}[(\frac{-1.2.3.a^3}{(at-b)^4}) - (\frac{-1.2.3.a^3}{(at+b)^4})] \quad , \quad \text{derivando}$$

$$\phi^{IV}(t) = \frac{1}{2b}[(\frac{1.2.3.4.a^4}{(at-b)^5}) - (\frac{1.2.3.4.a^4}{(at+b)^5})] \quad , \quad \text{derivando}$$

.

.

.

$$\phi^{(n)}(t) = \frac{1}{2b}[\frac{(-1)^n 1.2.3...n.a^n}{(at-b)^{n+1}} - \frac{(-1)^n.(1.2.3...n)a^n}{(at+b)^{n+1}}]$$

$$\phi^{(n)}(t)=\frac{1}{2b}\left[\frac{(-1)^n .n!.a^n}{(at-b)^{n+1}}-\frac{(-1)^n .n!.a^n}{(at+b)^{n+1}}\right]$$

$$\phi^{(n)}(0)=\frac{1}{2b}\left[\frac{(-1)^n .n!.a^n}{(-b)^{n+1}}-\frac{(-1)^n .n!.a^n}{b^{n+1}}\right]=\frac{1}{2b}\left[-\frac{n!.a^n}{b^{n+1}}-\frac{(-1)^n n!a^n}{b^{n+1}}\right]$$

$$=\frac{n!.a^n}{2b^{n+2}}[-1-(-1)^n]=\frac{n!.a^n}{2b^{n+2}}[(-1)^{n+1}-1]$$

$$\therefore \quad \int_{-\infty}^{\infty}\delta^{(n)}(t)\phi(t)dt=\frac{n!.a^n}{2b^{n+2}}[(-1)^{n+1}-1]$$

15.13. PROPIEDADES DE LAS DERIVADAS DE LA FUNCION δ.-

(1) Demostrar que la expresión $\int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\phi(t)dt=-\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\phi'(t)dt$

Demostración

La integral $\int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\phi(t)dt$, integramos por partes: $\begin{cases} u=\phi(t) \\ dv=f'(t)dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\phi'(t)dt \\ v=f(t) \end{cases}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\phi(t)dt=f(t)\phi(t)\Big/_{-\infty}^{\infty}-\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\phi'(t)dt$$

se conoce que la función de prueba φ(t) es tal que se anula fuera de algún intervalo, es decir, es cero en t = ±∞

$$\therefore \quad \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\phi(t)dt=-\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\phi'(t)dt$$

(2) Si f(t) es una función continua y diferenciable, Demostrar la regla del producto.

$$[f(t).\delta(t)]'=f(t).\delta'(t)+f'(t).\delta(t)$$

Demostración

Aplicando la propiedad (1) se tiene:

$$\int_{-\infty}^{\infty}[f(t)\delta(t)]'\phi(t)dt=-\int_{-\infty}^{\infty}[f(t).\delta'(t)]\phi'(t)\,dt=-\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)[f(t)\phi'(t)]dt$$

$$=-\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)[(f(t)\delta(t))'-f'(t)\phi(t)]dt=-\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t).[f(t).\phi(t)]'dt+\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t).[f'(t)\phi(t)]dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(t)[f(t)\phi(t)]dt+\int_{-\infty}^{\infty}[\delta(t).f'(t)]\phi(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}[\delta'(t).f(t)+\delta(t).f'(t)]\phi(t)dt$$

$$\therefore\quad [f(t)\delta(t)]'=f(t)\delta'(t)+\delta(t)f'(t)$$

3 Demostrar que: $f(t).\delta'(t)=f(0)\delta'(t)-f'(0).\delta(t)$

Demostración

Por la propiedad (2) se tiene : $f(t)\delta'(t)=[f(t)\delta(t)]'-f'(t)\delta(t)$ **... (α)**

y la propiedad (5) de (15.11) se tiene :

$$f(0).\delta(t)=f(0).\delta(t)$$

$$f'(t)\delta(t)=f'(0)\delta(t)$$

$$[f(0)\delta(t)]'=f(0)\delta'(t)$$

sustituyendo en (α) se obtiene : $f(t)\delta'(t)=f(0)\delta'(t)-f'(0)\delta(t)$

4 Demostrar que la función δ es la derivada de la función μ(t), la cual está definida por la expresión : $\int_{-\infty}^{\infty}\mu(t)\phi'(t)dt=\int_{0}^{\infty}\phi(t)dt$

Demostración

De la primera propiedad se tiene :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mu'(t)\delta(t)dt=-\int_{-\infty}^{\infty}\mu(t)\phi'(t)dt=-\int_{0}^{\infty}\phi'(t)dt=-[\phi(\alpha)-\phi(0)]=\phi(0)$$

puesto que $\phi(\infty)=0$. Entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mu'(t)\phi(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\phi(t)dt\qquad\therefore\quad \mu'(t)=\frac{d(\mu(t))}{dt}=\delta(t)$$

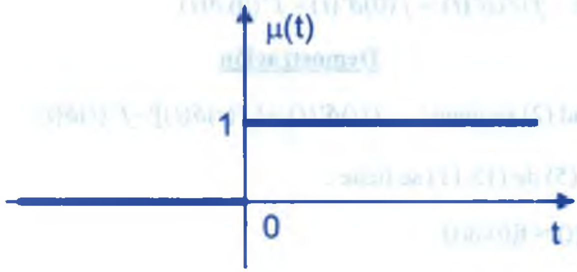
15.14. FUNCIÓN ESCALONADA UNITARIA.-

La función generalizada (o función simbólica) μ(t) se conoce como la función unitaria de Heeviside ó función escalonada unitaria y es definida por :

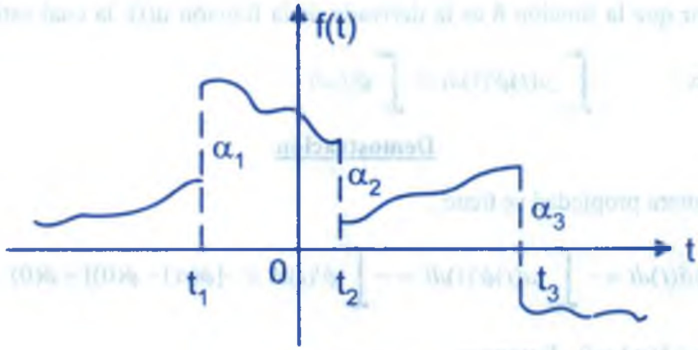
$$\mu(t)=\begin{cases}0\ ,\ \text{para}\ \ t<0\\ 1\ ,\ \text{para}\ \ t>0\end{cases}$$

La función μ(t) no está definida para t = 0

Observemos que la derivada μ(t) vale cero cuando t < 0, y cuando t > 0 vale :



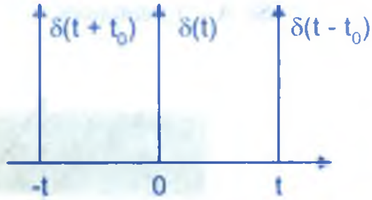
PROBLEMA.- Si f(t) es una función continua por tramos con discontinuidad súbitas $\alpha_1,\alpha_2,...,$ en t_1 , t_2 como en la figura y la función $f'(t)$ está definida en todas partes excepto estas discontinuidades de numero finito encontrar la derivada generalizada de f(t)



Solución

Si $\alpha_i>0$, entonces los impulsos son hacia arriba

Si $\alpha_i < 0$, entonces los impulsos son hacia abajo



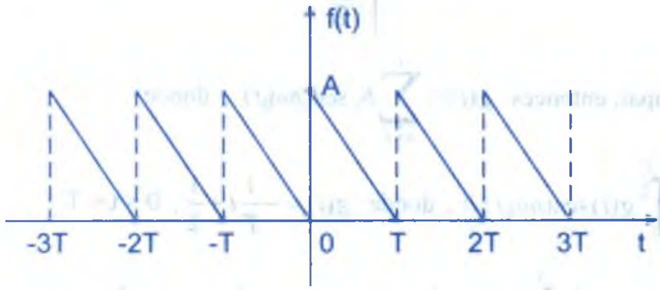
$$\alpha_i = f(t_i^+) - f(t_i^-) = \lim_{t \to t_0^+} f(t) - \lim_{t \to t_0^-} f(t)$$

consideremos la función $g(t) = f(t) - \sum_k \alpha_k \mu(t - t_k)$

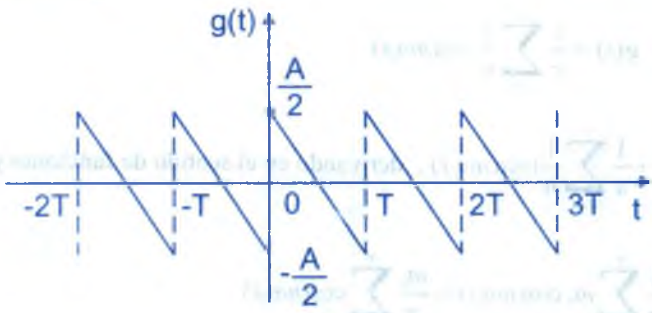
donde $\mu(t - t_k) = \begin{cases} 1 \ , \ \text{para} \ \ t > t_k \\ 0 \ , \ \text{para} \ \ t < t_k \end{cases}$

obviamente la función g(t) es continua en todas partes y su derivada es igual a $f'(t)$ excepto en un número finito de puntos donde $g'(t) = f'(t) - \sum_k \alpha_k \delta(t - t_k)$ **... (*)**

OBSERVACIÓN.- Una función periódica se dice que tiene simetría escondida; cuando la simetría no es evidente por ejemplo.

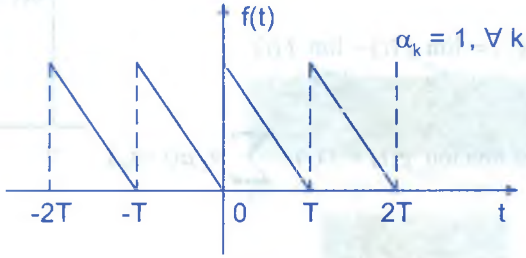


Sea $g(t) = f(t) - \dfrac{A}{2}$

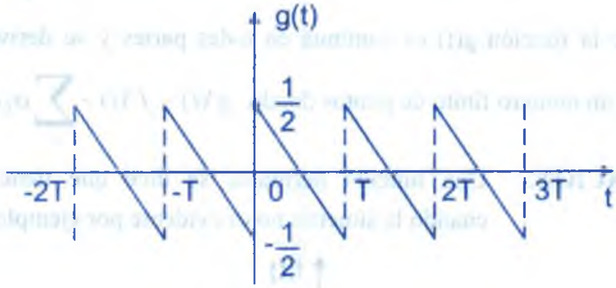


Simetría impar

Sí A = 1, entonces



$$g(t) = f(t) - \frac{1}{2}$$



g(t) es impar, entonces $g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t)$, donde

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} g(t) \operatorname{sen}(n\omega_0 t)\,dt\,, \text{ donde } g(t) = -\frac{1}{T}t + \frac{1}{2},\ 0 < t < T \qquad \ldots (\alpha)$$

entonces $b_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} (-\frac{1}{T}t + \frac{1}{2}) \operatorname{sen}(n\omega_0 t)\,dt = \frac{1}{n\pi}$, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

entonces $g(t) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen}(n\omega_0 t)$

$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\operatorname{sen} n\omega_0 t)$, derivando en el sentido de funciones generalizadas

$$f'(t) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_0 \cos(n\omega_0 t) = \frac{\omega_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\omega_0 t)$$

es decir: $f'(t)=\dfrac{2}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\cos(n\omega_0 t)$ ... (β)

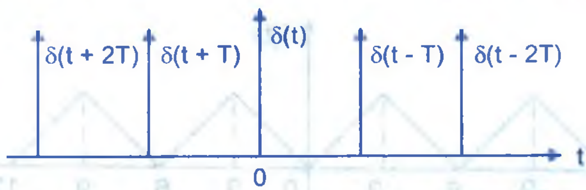
$g(t)=f(t)-\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^{\alpha_k}U(t-nT)$, entonces $g'(t)=f'(t)-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$

$f'(t)=g'(t)+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT) \Rightarrow f'(t)=-\dfrac{1}{T}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$ ... (γ)

de (γ) y (β) se tiene que : $\dfrac{1}{T}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)=\dfrac{2}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\cos(n\omega_0 t)$

a esta función denotaremos por : $\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)=\underbrace{\dfrac{1}{T}+\dfrac{2}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\cos(n\omega_0 t)}_{S.T.F.}$

es decir $\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$ se denomina el "Tren Periódico de Impulso Unitario"



OBSERVACIÓN.- Deducir la serie de Fourier de $\delta_T(t)$

Sea $\delta_T(t)=\dfrac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(n\omega_0 t)+b_n\,\text{sen}(n\omega_0 t)]$

donde $a_0=\dfrac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\delta_T(t)dt=\dfrac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\delta(t)dt=\dfrac{2}{T}$ es decir $a_0=\dfrac{2}{T}$

$a_n=\dfrac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\delta_T(t)\cos(n\omega_0 t)dt=\dfrac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\delta(t)\cos(n\omega_0 t)dt=\dfrac{2}{T}(\cos n\omega_0 t)\Big|_{t=0}=\dfrac{2}{T}$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta_T(t)sn(n\omega_0 t)dt = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \text{sen}(n\omega_0 t)dt = \frac{2}{T}\text{sen}(n\omega_0 t)\Big|_{t=0} = 0$$

$$\therefore \quad \delta_T(t) = \frac{1}{T} + \frac{2}{T}\sum_{n=1}^{\infty} \cos n\omega_0 t$$

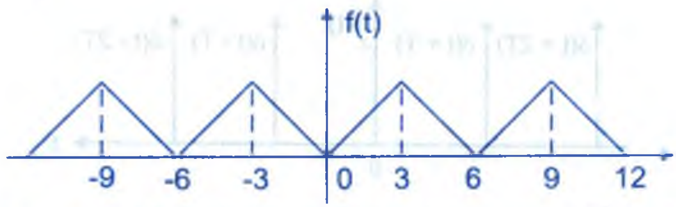
15.15. EVALUACIÓN DE LOS COEFICIENTES DE FOURIER POR DIFERENCIACIÓN.-

Para facilitar él cálculo de los coeficientes de la serie de Fourier para ciertas funciones. se usa la función δ junto con la diferenciación.

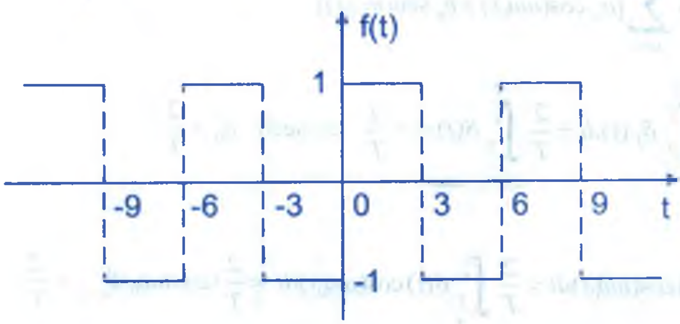
Ejemplo.- Hallar la serie de Fourier de la función $f(t) = |t|$, $-3 < t < 3$ (periódica) usando la serie de Fourier del tren periódico de impulsos unitarios.

<u>**Solución**</u>

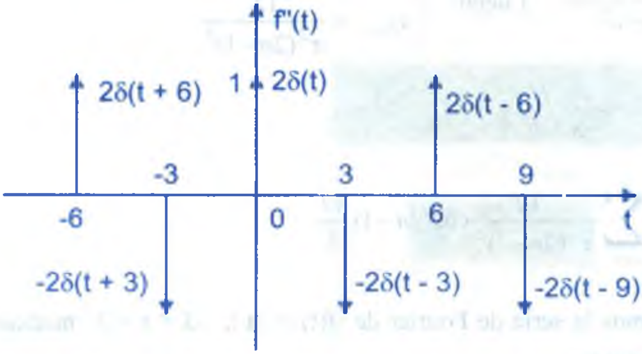
$$f(t) = |t| = \begin{cases} t\ , & 0 \le t < 3 \\ -t\ , & -3 < t < 0 \end{cases}$$



$$f'(t) = \begin{cases} 1\ , & 0 < t < 3 \\ -1\ , & -3 < t < 0 \end{cases}$$



$f'''(t) = 0$



$$f''(t) = \delta_6(t) = 2\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-6n) - 2\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-3(2n-1))$$

$$= 2[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-6n) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta((+3)-6n))]$$

$$= 2[\frac{1}{6} + \frac{2}{6}\sum_{n=1}^{\infty} \cos(\frac{n\pi}{3}t) - \frac{1}{6} - \frac{2}{6}\sum_{n=1}^{\infty} \cos(\frac{n\pi}{3}(t+3))]$$

$$= \frac{2}{3}(\sum_{n=1}^{\infty} \cos(\frac{n\pi}{3}t) - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos(\frac{n\pi}{3}t)) = \frac{2}{3}\sum_{n=1}^{\infty} [1-(-1)^n]\cos(\frac{n\pi}{3}t)$$

Entonces : $f''(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3}[1-(-1)^n]\cos(\frac{n\pi}{3}t)$

Como la función f(t) = | t | es par, entonces :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{n\pi}{3}t), \quad -3 < t < 3$$

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-\frac{n\pi\, a_n}{3})\,\mathrm{sen}(\frac{n\pi}{3}t)$$

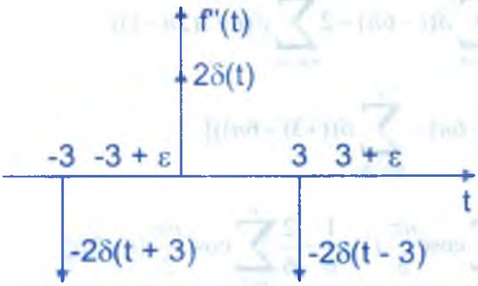
$$f''(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-\frac{\pi^2 n^2 a_n}{9})\cos(\frac{n\pi}{3}t) \quad \text{entonces} \quad -\frac{\pi^2 n^2 a_n}{9} = \frac{2}{3}[1-(-1)^n]$$

$$a_n = -\frac{6(1-(-1)^n)}{\pi^2 n^2}. \quad \text{Luego:} \begin{cases} a_{2n} = 0 \ , \quad \forall n = 1,2,... \\ a_{2n-1} = \dfrac{12}{\pi^2(2n-1)^2} \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{4}{6}\int_0^3 t\,dt = \frac{t^2}{3}\Big/_0^3 = 3$$

$$f(t) = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-12}{\pi^2(2n-1)^2}\cos(2n-1)\frac{\pi t}{3}$$

ahora hallamos la serie de Fourier de f(t) = | t |, -3 < t < 3 mediante diferenciación o impulsos unitarios.



$$f''(t) = 2\delta(t) - 2\delta(t-3)$$

-3 + ε < t < 3 + ε o -3 < t < 3 pero $f''(t) = \sum_{n=1}^{\infty}(-\frac{\pi^2 n^2 a_n}{9})\cos(\frac{n\pi}{3}t)$

$$\Rightarrow \quad -\frac{\pi^2 n^2 a_n}{9} = \frac{2}{6}\int_{-3}^{3}[2\delta(t) - 2\delta(t-3)]\cos(\frac{n\pi t}{3})dt$$

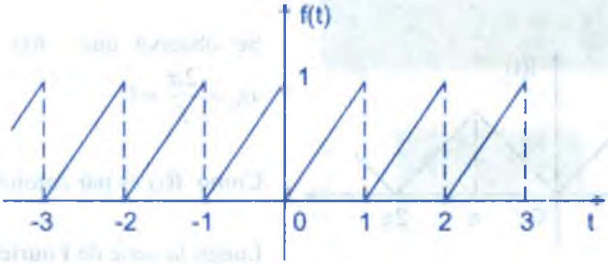
$$\Rightarrow \quad -\frac{\pi^2 n^2 a_n}{9} = \frac{1}{3}[2\int_{-3}^{3}\delta(t)\cos\frac{n\pi t}{3}dt - 2\int_{-3}^{3}\delta(t-3)\cos\frac{n\pi t}{3}dt]$$

$$= \frac{1}{3}[2\cos\frac{n\pi t}{3}\Big|_{t=0} - 2\cos\frac{n\pi t}{3}\Big|_{t=3}] = \frac{1}{3}[2 - 2(-1)^n] = \frac{2}{3}(1-(-1)^n)$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{\pi^2 n^2 a_n}{9} = \frac{2}{3}(1-(-1)^n) \Rightarrow a_{2n-1} = \frac{-12}{\pi^2(2n-1)^2}$$

15.16. EJERCICIOS DESARROLLADOS.-

(1) Encontrar la serie de Fourier de la función f(t) que se muestra en la figura



Solución

La regla de correspondencia de la gráfica mostrada es :

$f(t) = t,\ 0 \le t \le 1,\ f(t+1) = f(t),\ \forall\, t \in R,\ T = 1$

como f(t) es una función impar entonces $a_0 = a_n = 0$

Luego la serie de Fourier de la función f(t) es :

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t)\ ,\ \text{donde}\ \ \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)\operatorname{sen}(2n\pi t)dt = 2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} t \operatorname{sen} 2\pi nt\, dt$$

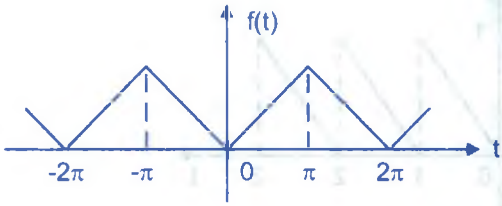
$$= 4\int_{0}^{\frac{1}{2}} t \operatorname{sen}(2\pi nt)dt\ ,\ \text{integrando por partes}\ \begin{cases} u = t \\ dv = \operatorname{sen} 2\pi nt\ dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dt \\ v = -\dfrac{\cos 2\pi nt}{2\pi n} \end{cases}$$

$$b_n = 4\left[-\frac{t\cos 2\pi nt}{2\pi n} + \frac{\operatorname{sen} 2\pi nt}{4\pi^2 n^2}\right]\Big/_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = 4\frac{(-1)^{n+1}}{4\pi n} \Rightarrow b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\pi n}$$

$$\therefore\ f(t) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\operatorname{sen} 2\pi nt}{n}$$

(2) Encontrar la serie de Fourier de la función f(t) definida por $f(t) = |t|$ para $t \in \langle -\pi, \pi \rangle$ y $f(t + 2\pi) = f(t)$

Solución



Se observa que f(t) es par y $T = 2\pi$, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 1$

Como f(t) es par entonces $b_n = 0$

Luego la serie de Fourier de la función f(t) es:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\omega_0 nt \text{ , donde: } a_0 = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\, dt = \pi \Rightarrow a_0 = \pi$$

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\omega_0 t\, dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\cos nt\, dt = \frac{2}{\pi}\left(\frac{t\operatorname{sen} nt}{n} + \frac{1}{n^2}\cos nt\right)\Big/_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\left[\frac{-1+(-1)^n}{n^2}\right]$$

$$a_n = \begin{cases} -\dfrac{4}{n^2\pi} & \text{, si } n \text{ es impar} \\ 0 & \text{, si } n \text{ es par} \end{cases} \qquad \text{por lo tanto } a_{2n-1} = \frac{-4}{(2n-1)^2\pi}$$

$$\therefore \quad f(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)t}{(2n-1)^2}$$

(3) Sea f(t) una función periódica con periodo T definida en $\langle -\frac{T}{2}, \frac{T}{2} \rangle$, cuya serie de Fourier es : $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t)$, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, si $f_e(t)$ y $f_0(t)$ son los componentes par e impar de f(t), demostrar que las series de Fourier de $f_e(t)$ y $f_0(t)$ son respectivamente $f_e(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t$; $f_0(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t$

Solución

Sabemos que: $\begin{cases} f(t) = f_e(t) + f_0(t) \\ f(-t) = f_e(t) - f_0(t) \end{cases}$ **...(1)** **...(2)**

Luego se tiene: $f_e(t) = \frac{1}{2}[f(t) + f(-t)]$ **... (3)**

$$\begin{cases} f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t) \\ f(-t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega_0 t - b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t) \end{cases} \quad \textbf{... (4)}$$

ahora reemplazamos (4) en (3) obteniéndose

$$f_e(t) = \frac{1}{2}[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t) + \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega_0 t - b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t)]$$

$$= \frac{1}{2}[a_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t] \qquad \therefore \quad f_e(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t$$

además de (1) y (2) se tiene : $f_0(t) = \frac{1}{2}[f(t) - f(-t)]$ **... (5)**

ahora reemplazando (4) en (5) se tiene :

$$f_0(t) = \frac{1}{2}[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t) - \frac{a_0}{2} - \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega_0 t - b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t)]$$

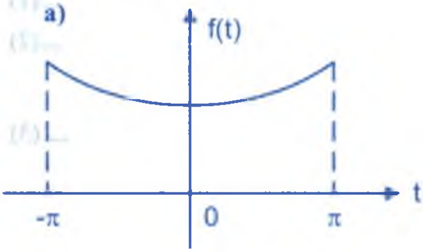
$$= \frac{1}{2}[0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t] \qquad \therefore \quad f_0(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t$$

4. Utilizar el resultado del ejercicio (3) para encontrar la expansión en serie de Fourier de cada una de las siguientes funciones definidas en <-π,π> con periodo 2π

a) f(t) = cosh t **b)** f(t) = senh t

Solución

a)



$T = 2\pi$, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 1$, como f(t) = cosh t es par entonces $b_n = 0$

Su serie de Fourier es : $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t$

donde

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cosh t \, dt = \frac{2\,\text{senh}\,\pi}{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\omega_0 t \, dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cosh t.\cos nt \, dt$$

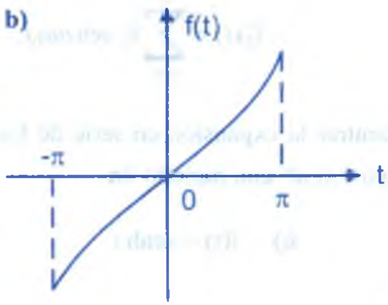
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^t + e^{-t}}{2}\cos nt \, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (e^t + e^{-t})\cos nt \, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^t \cos nt + e^t n\,\text{sen}\,nt}{1+n^2} + \frac{e^{-t} n\,\text{sen}\,nt - e^{-t}\cos nt}{1+n^2}\right]\Big/_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{2(e^{\pi} - e^{-\pi})\cos n\pi}{1+n^2}\right] = \frac{2(-1)^n\,\text{senh}\,\pi}{\pi(1+n^2)}$$

$$\therefore \quad f(t) = \frac{2\,\text{senh}\,\pi}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nt}{1+n^2}\right]$$

b)



f(t) = senh t ; $T = 2\pi$, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 1$

Como f(t) = senh t es impar entonces $a_0 = a_n = 0$

Luego la serie de Fourier de la función f(t) es :

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \,\text{sen}\, n\omega_0 t = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \,\text{sen}\, nt\,, \text{ donde}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\operatorname{sen} nt\ dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{senh} t.\operatorname{sen} nt\ dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^t - e^{-t}}{2}\operatorname{sen} nt\ dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (e^t - e^{-t})\operatorname{sen} nt\ dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{e^t(\operatorname{sen} nt - n\cos nt) + e^{-t}(\operatorname{sen} nt + n\cos nt)}{1+n^2}\right]\Big/_{0}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-e^{\pi}n(-1)^n}{1+n^2} + \frac{1}{1+n^2} + \frac{e^{-\pi}n.(-1)^n}{1+n^2} - \frac{1}{1+n^2}\right]$$

$$= \frac{-2(-1)^n n}{\pi(1+n^2)}.\frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2} = \frac{2(-1)^{n+1} n \operatorname{senh}\pi}{\pi(1+n^2)}$$

$$\therefore \quad f(t) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{1+n^2}\operatorname{senh}\pi.\operatorname{sen} nt$$

5. Partiendo de la serie de Fourier de la función $f(t) = \cos \alpha t$, $\alpha \in R$, $-\pi \le t \le \pi$, calcular la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n+\frac{1}{2}}$.

Solución

$f(-t) = \cos(-\alpha t) = \cos \alpha t = f(t)$, $\forall\ t \in R$, entonces $f(t)$ es par y periódica, entonces $b_n = 0$, luego su serie de Fourier es : $f(t) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt$, donde

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos\alpha t\ dt = \frac{1}{\pi}\frac{\operatorname{sen}\alpha t}{\alpha}\Big/_{-\pi}^{\pi} = \frac{\operatorname{sen}\alpha\pi}{\alpha\pi} - \frac{\operatorname{sen}(-\alpha\pi)}{\alpha\pi} = \frac{2\operatorname{sen}\alpha\pi}{\alpha\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\omega_0 t\ dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos\alpha t.\cos nt\ dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos\alpha t.\cos nt\ dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\cos(\alpha+n)t + \cos(\alpha-n)t}{2}\ dt = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\operatorname{sen}(\alpha+n)t}{\alpha+n} + \frac{\operatorname{sen}(\alpha-n)t}{\alpha-n}\right]\Big/_{0}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{2\alpha(-1)^n \operatorname{sen}\alpha\pi}{\alpha^2 - n^2}\right] = \frac{2\alpha}{\pi} \cdot \frac{(-1)^n \operatorname{sen}\alpha\pi}{\alpha^2 - n^2}$$

$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt$, de donde

$$\cos\alpha t = \frac{\operatorname{sen}\alpha\pi}{\pi\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha}{\pi} \cdot \frac{(-1)^n \operatorname{sen}\alpha\pi}{\alpha^2 - n^2} \cos nt = \frac{sen\alpha\pi}{\pi}\left[\frac{1}{\alpha} - 2\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - a^2} \cos nt\right]$$

$$\cos\alpha\pi = \frac{\operatorname{sen}\alpha\pi}{\pi}\left[\frac{1}{\alpha} - 2\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{n^2 - \alpha^2}\right]$$

$$c\operatorname{tg}\alpha\pi = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{\alpha} - 2\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \alpha^2}\right] \Rightarrow \pi\left(c\operatorname{tg}\alpha\pi - \frac{1}{\pi\alpha}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2\alpha}{n^2 - \alpha^2} \quad \text{... (1)}$$

$$-\frac{2\alpha}{n^2 - \alpha^2} = \frac{-2\alpha}{(n-\alpha)(n+\alpha)} = \frac{1}{n+\alpha} - \frac{1}{n-\alpha}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2\alpha}{n^2 - \alpha^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\alpha} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{-n+\alpha}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\alpha} + \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{1}{n+\alpha} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n+\alpha} \quad \text{... (2)}$$

ahora reemplazamos (2) en (1) se tiene : $\pi\left(c\operatorname{tg}\alpha\pi - \frac{1}{\pi\alpha}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n+\alpha}$, si $\alpha = \frac{1}{2}$

$$\pi\left(c\operatorname{tg}\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n+\frac{1}{2}} \text{, de donde } \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n+\frac{1}{2}} = -2$$

(6) Hallar la serie de Fourier de la función $g(t) = 3t^2 - \pi^2$

Solución

La función $g(t) = 3t^2 - \pi^2$, es la derivada de la función $f(t) = t^3 - \pi^2 t$, como $f(\pi) = f(-\pi) = 0$ y $f(t) = t^3 - \pi^2 t$ es continua en $[-\pi,\pi]$, donde su serie de Fourier es

$f(t) = 12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \operatorname{sen} nt}{n^3}$, entonces se tiene :

$$f'(t) = 3t^2 - \pi^2 = g(t) = 12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n\cos nt}{n^3} = 12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \cos nt}{n^2}$$

$$\therefore \quad g(t) = 3t^2 - \pi^2 = 12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \cos nt}{n^2}$$

(7) A partir del resultado del ejercicio (6). Hallar la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

Solución

Como $g(t) = 3t^2 - \pi^2 = 12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \cos nt}{n^2}$

para $t = \pi \Rightarrow g(\pi) = 3\pi^2 - \pi^2 = 12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n.(-1)^n}{n^2}$

$2\pi^2 = 12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ de donde $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

(8) Calcular $\int_{-\infty}^{\infty}\delta''(t)(\frac{2t+5}{t^2-3t+2})dt$

Solución

$$\phi(t) = \frac{2t+5}{t^2-3t+2} = \frac{9}{t-2} - \frac{7}{t-1}$$

$$\phi'(t) = -\frac{9}{(t-2)^2} + \frac{7}{(t-1)^2} = \frac{(-1).9.1!}{(t-2)^2} + \frac{(-1)^2.7.1!}{(t-1)^2}$$

$$\phi''(t)=\frac{18}{(t-2)^3}-\frac{14}{(t-1)^3}=\frac{(-1)^2.9x2!}{(t-2)^3}+\frac{(-1)^3.7x2!}{(t-1)^3}$$

$$\phi'''(t)=\frac{-54}{(t-2)^4}+\frac{42}{(t-1)^4}=\frac{(-1)^3.9.3!}{(t-2)^4}+\frac{(-1)^4.7x3!}{(t-1)^4}$$

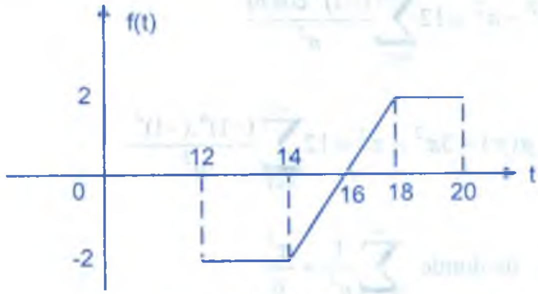
.
.
.

$$\phi^{(n)}(t)=\frac{(-1)^n.9xn!}{(t-2)^{n+1}}+\frac{(-1)^{n+1}.7xn!}{(t-1)^{n+1}}\text{, de donde}$$

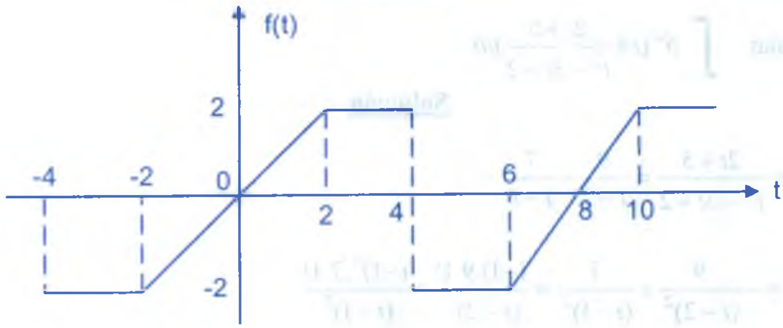
$$\phi^{(n)}(0)=\frac{(-1)^n.9xn!}{(-2)^{n+1}}+\frac{(-1)^{n+1}.7xn!}{(-1)^{n+1}}=-\frac{9x\,n!}{2^{n+1}}+7x\,n!$$

$$\therefore \quad \int_{-\infty}^{\infty}\delta^n(t)\left(\frac{2t+5}{t^2-3t+2}\right)dt=(-1)^n\phi^{(n)}(0)$$

(9) Hallar la serie de Fourier de la función, tal que cuya gráfica es :



Solución



La regla de correspondencia de la función f(t) es :

$$f(t)=\begin{cases}-2 \ ; & -4<t<-2 \\ t \ ; & -2<t<2 \\ 2 \ ; & 2<t<4\end{cases} \quad , \ T=8, \quad \omega_0=\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{4}$$

f(t) es impar entonces $a_0 = a_n = 0$, la serie de Fourier es :

$$f(t)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(\frac{n\pi}{4}t) \text{ , de donde}$$

$$b_n=\frac{4}{8}\int_0^{\frac{8}{2}} f(t)\operatorname{sen}(\frac{n\pi t}{4})dt=\frac{1}{2}\int_0^4 f(t)\operatorname{sen}(\frac{n\pi t}{4})dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2 f(t)\operatorname{sen}(\frac{n\pi t}{4})dt+\frac{1}{2}\int_2^4 f(t)\operatorname{sen}(\frac{n\pi t}{4})dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2 t\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{4}dt+\frac{1}{2}\int_2^4 2\operatorname{sen}(\frac{n\pi t}{4})dt$$

$$=\frac{1}{2}[-\frac{8}{n\pi}\cos(\frac{n\pi}{2})+\frac{4}{n\pi}(\frac{4}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2})-\frac{4(-1)^n}{n\pi}+\frac{4\cos(\frac{n\pi}{2})}{n\pi}$$

$$b_n=\frac{9}{\pi^2 n^2}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}-\frac{4.(-1)^n}{n\pi}$$

$$b_1=\frac{8}{\pi^2(1)^2}+\frac{4}{1.\pi} \quad ; \quad b_2=-\frac{4}{2\pi}$$

$$b_3=-\frac{8}{\pi^2(3)^2}+\frac{4}{3.\pi} \quad ; \quad b_4=-\frac{4}{4\pi}$$

$$b_5=\frac{8}{\pi^2 5^2}+\frac{4}{5.\pi} \quad ; \quad b_6=-\frac{4}{6\pi}$$

$$b_7=-\frac{8}{\pi^2.7^2}+\frac{4}{7\pi} \quad ; \quad b_8=-\frac{4}{8\pi}$$

Luego $f(t)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(\frac{n\pi t}{4})$, donde

$$b_n = \begin{cases} b_{2n-1} = \dfrac{(-1)^{n+1}8}{(2n-1)^2\pi} + \dfrac{4}{(2n-1)\pi}, & n=1,2,... \\ b_{2n} = -\dfrac{4}{(2n)\pi} \; ; & n=1,2,... \end{cases}$$

$$f(t)=\frac{4}{\pi}[(1+\frac{2}{\pi})\operatorname{sen}\frac{\pi t}{4}-\frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{\pi t}{2}+(\frac{1}{3}-\frac{2}{9\pi})\operatorname{sen}\frac{3\pi t}{4}-\frac{1}{4}\operatorname{sen}\pi t+...]$$

10 Si v(t) = sen t, -π < t < π. Hallar su serie de Fourier.

Solución

La función v(t) es par, entonces $b_n = 0$

Como T = 2π, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 1 \Rightarrow \omega_0 = 1$ y la serie de Fourier es :

$$v(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt \; ; \text{ donde}$$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} v(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\operatorname{sen} t\, dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\operatorname{sen} t\, dt$$

$$=\frac{2}{\pi}[-t\cos t+\operatorname{sen} t]\Big/_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}[\pi+0]=2$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} v(t)\cos nt\, dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\operatorname{sen} t.\cos t\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t[\operatorname{sen}(n+1)t+\operatorname{sen}(1-n)t]dt$$

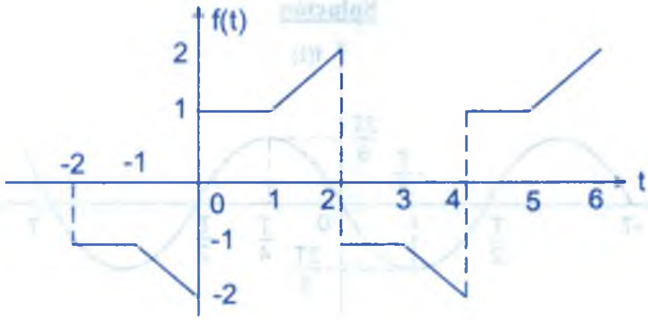
$$=\frac{1}{2\pi}[\frac{-\pi\cos(n+1)\pi}{1+n}-\frac{\pi\cos(1-n)\pi}{1-n}-\frac{\pi\cos(1+n)\pi}{1+n}-\frac{\pi\cos(1-n)\pi}{1-n}]$$

$$=-\frac{\cos(n+1)\pi}{1+n}-\frac{\cos(1-n)\pi}{1-n}, \text{ como } \cos(1+n)\pi = -\cos n\pi$$

por lo tanto $a_n = \frac{2(-1)^n}{1-n^2}$ $\therefore$ $v(t) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \cos nt}{1-n^2}$

(11) Si $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 8 < t < 9 \\ t-8 & \text{si } 9 < t < 10 \end{cases}$, de las condiciones de f(t) para que tenga una serie de Fourier de la forma: $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty}[a_{2n-1}\cos(2n-1)\omega_0 t + b_{2n-1}\operatorname{sen}(2n-1)\omega_0 t]$. Hallar dicha serie de Fourier y graficar f(t).

Solución



f(t + 4) = f(t), f(t) = - f(t + 2) simetría de media onda

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty}[a_{2n-1}\cos(2n-1)\omega_0 t + b_{2n-1}\operatorname{sen}(2n-1)\omega_0 t], \text{ donde}$$

$$T = 4,\ \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \omega_0 = \frac{\pi}{2}, \text{ entonces}$$

$$a_{2n-1} = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(2n-1)\omega_0 t\, dt = \int_0^2 f(t)\cos(2n-1)\frac{\pi}{2}t\, dt$$

$$= \int_0^1 \cos(2n-1)\frac{\pi}{2}t\, dt + \int_1^2 t\cos(2n-1)\frac{\pi}{2}t\, dt = -\frac{4}{(2n-1)^2\pi^2}$$

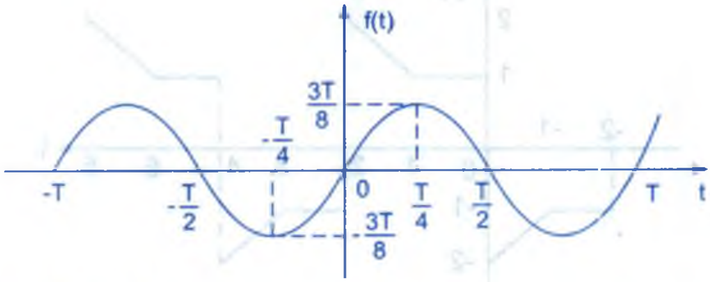
$$b_{2n-1} = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\operatorname{sen}(2n-1)\omega_0 t\, dt = \int_0^2 f(t)\operatorname{sen}(2n-1)\frac{\pi t}{2}\, dt$$

$$= \int_0^1 \operatorname{sen}(2n-1)\frac{\pi t}{2}\,dt + \int_1^2 t\operatorname{sen}(2n-1)\frac{\pi}{2}\,dt = \frac{6}{(2n-1)\pi} - \frac{4(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2\pi^2}$$

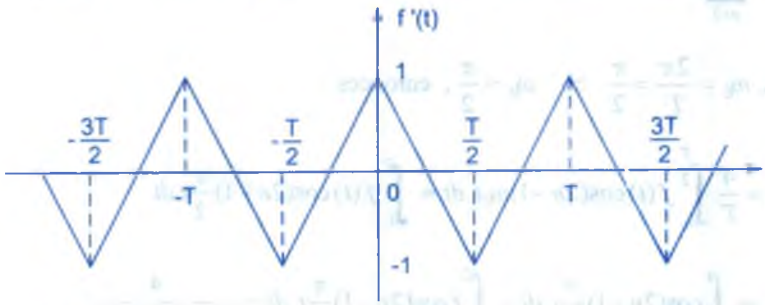
$$\therefore\quad f(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{-4}{(2n-1)^2\pi^2}\right)\cos(2n-1)\frac{\pi t}{2} + \left(\frac{6}{(2n-1)\pi} - \frac{4(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2\pi^2}\right)\operatorname{sen}(2n-1)\frac{\pi t}{2}\right]$$

(12) Utilizando la serie de Fourier del tren periódico de impulsos unitarios, hallar la serie de Fourier para la función : $f(t) = \begin{cases} t + \dfrac{2}{T}t^2 & ; \quad -\dfrac{T}{2} < t \le 0 \\ t - \dfrac{2}{T}t^2 & ; \quad 0 < t < \dfrac{T}{2} \end{cases}$

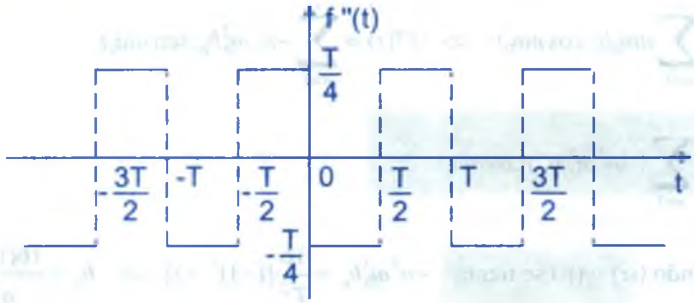
Solución



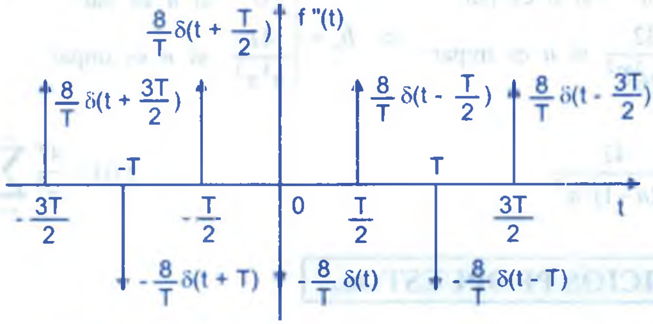
$$f'(t) = \begin{cases} 1 + \dfrac{4t}{T} & ; \quad -\dfrac{T}{2} < t \le 0 \\ 1 - \dfrac{4t}{T} & ; \quad 0 < t < \dfrac{T}{2} \end{cases}$$



$$f''(t) = \begin{cases} \dfrac{4}{T} & ; \quad -\dfrac{T}{2} < t \le 0 \\ -\dfrac{4}{T} & ; \quad 0 < t < \dfrac{T}{2} \end{cases}$$



$$f'''(t) = 0$$



$$f'''(t) = \frac{8}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-(2n-1)\frac{T}{2}) - \frac{8}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$$

$$= \frac{8}{T}[\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta((t+\frac{T}{2})-nT) - \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)]$$

$$= \frac{8}{T}[\frac{1}{T}+\frac{2}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\cos n\frac{2\pi}{T}(t+\frac{T}{2}) - \frac{1}{T} - \frac{2}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\cos n\omega_0 t]$$

$$= \frac{16}{T^2}[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cos n\omega_0 t - \sum_{n=1}^{\infty}\cos n\omega_0 t] = \frac{16}{T^2}\sum_{n=1}^{\infty}[(-1)^n - 1]\cos n\omega_0 t$$

$$f'''(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{T^2}[(-1)^n - 1]\cos n\omega_0 t \quad \dots (\alpha)$$

como f(t) es impar $\Rightarrow$ $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t$

$$f'(t)=\sum_{n=1}^{\infty} n\omega_0 b_n \cos n\omega_0 t \quad \Rightarrow \quad f''(t)=\sum_{n=1}^{\infty} -n^2\omega_0^2 b_n . \operatorname{sen} n\omega_0 t$$

$$f'''(t)=\sum_{n=1}^{\infty} (-n^3\omega_0^3 . b_n)\cos n\omega_0 t \qquad \ldots (\beta)$$

comparando (α) y (β) se tiene: $\quad -n^3\omega_0^3 b_n = \frac{16}{T^2}[(-1)^n - 1] \Rightarrow b_n = \frac{16(1-(-1)^n)}{n^3\omega_0^3 T^2}$

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ \dfrac{32}{n^3\omega_0^3 T^2} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad b_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ \dfrac{4T}{n^3\pi^3} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

$$b_{2n-1} = \frac{4T}{(2n-1)^3\pi^3} \qquad \therefore \quad f(t) = \frac{4T}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2n-1)\omega_0 t}{(2n-1)^3}$$

15.17. EJERCICIOS PROPUESTOS.-

1. Probar que la función cero es la única función que es simultáneamente par e impar.

2. Si la función f(t) es impar, probar que | f(t) | es par.

3. Sea la función f(t) diferenciable en el intervalo <-a,a>. Demostrar que su derivada $f'(t)$ es impar cuando f(t) es par y par cuando f(t) es impar.

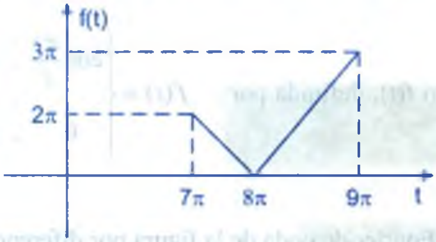
4. Encontrar las componentes par e impar de las siguientes funciones :

   a) $f(t)=e^t$ b) $f(t)=\frac{t+1}{t-1}$ c) f(t) = sen t – sen 2t

5. Demostrar que el valor de la media cuadrática de f(t) es igual a la suma de los valores de los medios cuadráticos de sus componentes pares e impares ósea :

$$\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (f(t))^2 dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (f_e(t))^2 dt + \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (f_0(t))^2 dt$$

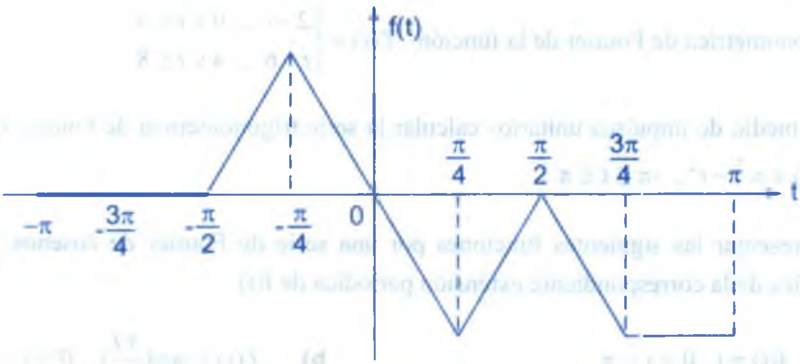
(6) **a)** Hallar la serie de Fourier de la función tal que cuya gráfica es :



b) Aplicar el teorema de Parseval al resultado de (a) para probar que
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}=\frac{\pi^4}{96}$$

(7) A partir de la serie de Fourier de f(t) = t, -π < t < π. Calcular la suma de las series
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^4}.$$

(8) Utilizando la diferenciación encontrar la serie de Fourier de la función f(t) dada por la gráfica.

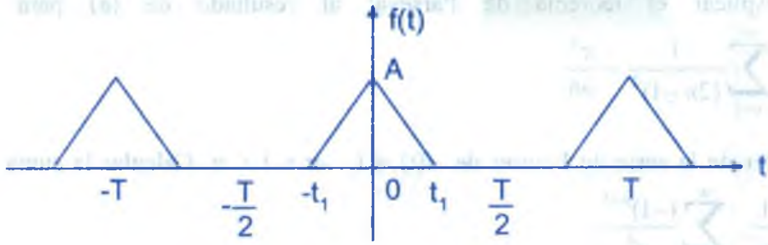


(9) Por diferenciación, calcular la serie de Fourier de la función
$$f(t)=\begin{cases}0 & , -\frac{T}{2}<t<-2\\ At+2A & , -2<t<-1\\ A & , -1<t<1\\ 2A-At & , 1<t<2\\ 0 & , 2<t<\frac{T}{2}\end{cases} \quad , \text{f(t + T) = f(t).}$$

(10) Sea $F''(t)=\delta(t-2)-3\delta(t-5)$ si $f(10)=8$ y $f'(10)=7$. Hallar f(t).

(11) Desarrollar la función f(t), definida por : $f(t)=\begin{cases}\cos\dfrac{\pi t}{\ell} & , \text{ para } 0\le t\le \dfrac{\ell}{2}\\ 0 & , \text{ para } \dfrac{\ell}{2}<t\le \ell\end{cases}$, en serie de cosenos.

(12) Encontrar la serie de Fourier de onda de la figura por diferenciación.



(13) Hallar la serie de Fourier de la función f(t) = | sen t |

(14) Usando la serie de Fourier del tren periódico de impulsos unitarios, encontrar la serie trigonométrica de Fourier de la función $f(t)=\begin{cases}2-t & , \ 0\le t\le 4\\ t-6 & , \ 4\le t\le 8\end{cases}$

(15) Por medio de impulsos unitarios calcular la serie trigonométrica de Fourier de la función $f(t)=\pi^2-t^2$, $-\pi\le t\le\pi$.

(16) Representar las siguientes funciones por una serie de Fourier de cosenos y trazar una gráfica de la correspondiente extensión periódica de f(t).

a) $f(t)=t,\ 0<t<\pi$

b) $f(t)=\text{sen}(\dfrac{\pi t}{2})$, $0<t<\ell$

(17) Si $f(t)=\begin{cases}-\dfrac{\pi}{4} & , \ -\pi<t<0\\ \dfrac{\pi}{4} & , \ 0<t<\pi\end{cases}$, Hallar la serie de Fourier y con el resultado obtenido evaluar $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$

(18) Hallar la serie de Fourier de $f(t)=|t|-\dfrac{\pi}{2}$, en $-\pi \le t \le \pi$ y utilizando este resultado para demostrar que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}=\frac{\pi^4}{96}$

(19) Hallar la serie de Fourier de la función $f(t)=t^2$, $-c<t<c$ y utilizando el resultado demostrar que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$

(20) Hallar la serie de Fourier de la función : $f(t)=\begin{cases} t(c+t) & , \ -c<t<0 \\ (c-t)^2 & , \ 0<t<c \end{cases}$

(21) Si la expansión en serie de Fourier de f(t) en el intervalo $<-\dfrac{T}{2},\dfrac{T}{2}>$ es $\dfrac{a_0}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_0 t+b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t)$, $\omega_0=\dfrac{2\pi}{T}$. Demostrar que la serie de Fourier de cosenos y los senos de f(t) en el intervalo $<0,\dfrac{T}{2}>$ son respectivamente $a_0+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}2a_n\cos n\omega_0 t$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}2b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t$ suponer que f(t) = 0, para $-\dfrac{T}{2}<t<0$.

(22) Sea la función f(t) periódica con periodo T. Si $f(\frac{1}{2}T-t)=f(t)$, determinar el comportamiento de los coeficientes de Fourier a_n y b_n de f(t) ilustrar gráficamente.

(23) Si la función periódica f(t) con periodo T satisface $f(\frac{1}{2}T-t)=-f(t)$, determinar el comportamiento de los coeficientes de Fourier a_n y b_n de f(t) ilustrar gráficamente.

(24) Encontrar la serie de Fourier de cosenos y la de senos de

$$f(t)=\begin{cases} \dfrac{\pi t}{4} & \text{para} \quad 0<t<\dfrac{\pi}{2} \\[2mm] \dfrac{1}{4}\pi t(\pi-t) & \text{para} \quad \dfrac{\pi}{2}<t<\pi \end{cases}$$

25 Hallar la serie de Fourier de medio rango (serie de coseno) de la función f(t) con sus respectivos gráficos y con el resultado obtenido calcular la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}$, donde $f(t)=\begin{cases}\frac{\pi}{32}(\pi-2t)(\pi+2t)\ , & 0\le t\le\frac{\pi}{2}\\ \frac{\pi}{12}(2t-\pi)(2t-3\pi)\ , & \frac{\pi}{2}\le t\le\pi\end{cases}$

26 Si G(t) = - t, -π < t < π. Hallar la serie trigonométrica de Fourier mediante la derivación (impulsos unitarios o delta de Dirac), usando $G'''(t)$

27 Demostrar que :

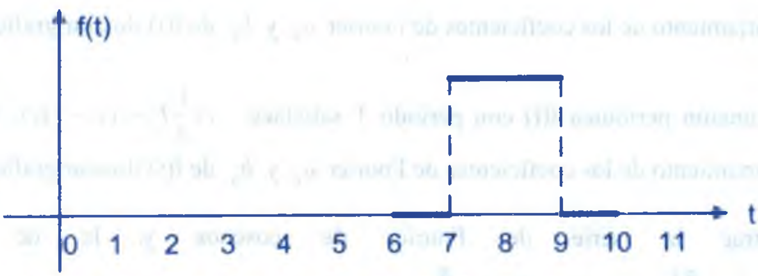
a) $f(t)=\delta(t-t_0)=f(t_0)\delta(t-t_0)$ **b)** $t\delta'(t)=-\delta(t)$

c) $\delta'(t)=-\delta'(t)$ **d)** $\delta^n(-t)=(-1)^n\delta^n(t)$

28 Utilizar la diferenciación para encontrar los coeficientes de Fourier de la función f(t) = t para <-π,π> y f(t + 2π) = f(t).

29 Utilizando la serie de Fourier del tren periódico de impulsos unitarios y la diferenciación, encontrar los coeficientes de Fourier de la función definida por $f(t)=e^t$, para <-π,π> y f(t + 2π) = f(t).

30 Dada la función f(t) periódica con periodo T = 4, tal que cuya gráfica es :



a) ¿Qué tipo de simetría tiene la función f(t)?

b) Hallar la serie de Fourier de f(t).

c) Para $t = 0$, calcular la suma de la serie correspondiente.

d) Aplicando el teorema de Parseval, calcular la suma de la serie correspondiente.

31 Representar la siguiente función f(t) por medio de una serie de Fourier Senoidal y construir la gráfica de la correspondiente prolongación periódica de $f(t) = t^2$, $0 < t < \pi$

32 Sean f y g funciones continuas por tramos en <-∞,∞> con periodo 2π y sean a_k, b_k y α_k, β_k respectivamente los coeficientes de Fourier para f y g. Calcular

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t).g(t)dt$$

33 Calcular **a)** $\delta(\text{sen } t)$ **b)** $\delta(t^4 - 1)$

34 Evaluar las siguientes expresiones :

a) $\delta(t^2 - a^2)$ **b)** $\delta(146 - \frac{1}{256})$ **c)** $\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(t)\,\text{arctg}\,t\; dt$

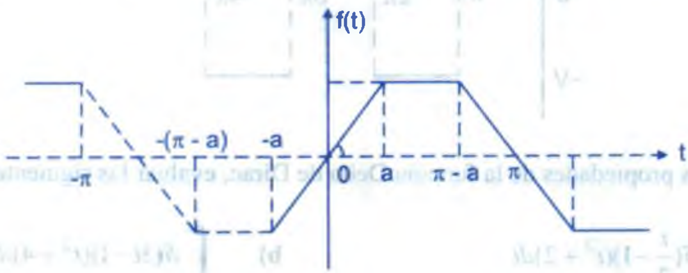
d) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)} e^{at}\,\text{sen}(bt + k)dt$ **e)** $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(a - t)\delta(a - 400)e^{4t}\,\text{sen}(5t + 2)dt$

f) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(t - 3)e^{at}(bt + c)dt$ **g)** $\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(t - 6)\,\text{arctg}\,t\; dt$

35 Calcular y graficar $\delta(t^5 + 3t^4 - 5t^3 - 15t^2 + 4t + 12)$

36 Sea $G''(t) = \delta(t - 3) - 6\delta(t - 5)$, $G(10) = 8$, $G'(10) = 7$, calcular G(t).

37 Usando los impulsos unitarios, hallar la serie de Fourier de la función adjunta por el gráfico.

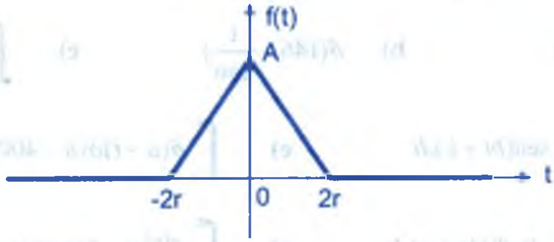


(38) Sea $f(t)=\begin{cases}1-(1-t)^2 \ , & 0\le t\le 1\\ (2-t)^2, & 1<t\le 2\end{cases}$. De la condición a H(t) para que tenga una serie de Fourier de la forma $H(t)=\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1}\operatorname{sen}(2n-1)\omega_0 t$

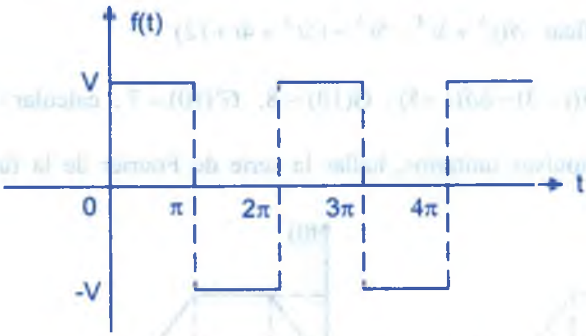
(39) **a)** Si $f(t)=t-t^3$, -1 < t < 1. Halle la serie trigonométrica de Fourier por medio de impulsos unitarios usando $f^{IV}(t)$.

b) Usando el resultado obtenido en (a) calcular la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}$

(40) Calcular por diferenciación la transformada de f(t) cuya gráfica es :



(41) Hallar la serie de Fourier de la función f(t) cuya gráfica es :



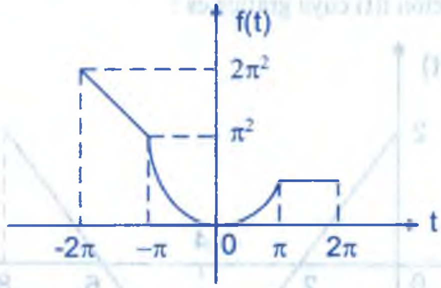
(42) Usando las propiedades de la función Delta de Dirac, evaluar las siguientes integrales.

a) $\int_0^{\infty}\delta(\frac{t}{2}-1)(t^2+2)dt$ **b)** $\int_0^{\infty}\delta(3t-1)(t^2+4)dt$

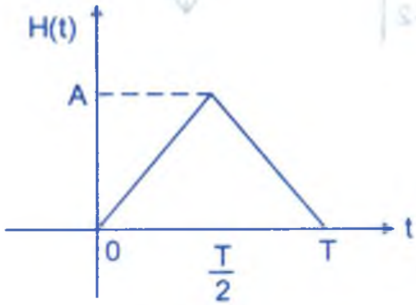
c) $\int_{0}^{\infty} e^{-2t}\delta(a-t)\delta(a-2)da$ d) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(3t-1)dt$

43 Si G(t) = t sen t, -π < t < π, Graficar y dar las condiciones para que G(t) tenga una serie de la forma $G(t)=\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-} \cos(2n-1)\omega_0 t$ y halle dicha serie.

44 Si F(t) es la función dada por el gráfico adjunto, halle la serie trigonométrica de Fourier por medio de impulsos unitarios usando $F'''(t)$



45 Si H(t) está dado por el gráfico adjunto, calcular su serie de medio rango con sus respectivas gráficas.



46 Si $F(t)=t^3$, 0 < t < T. Halle su serie de Fourier por medio de impulsos unitarios, utilizando $F^{IV}(t)$, graficar todos los impulsos.

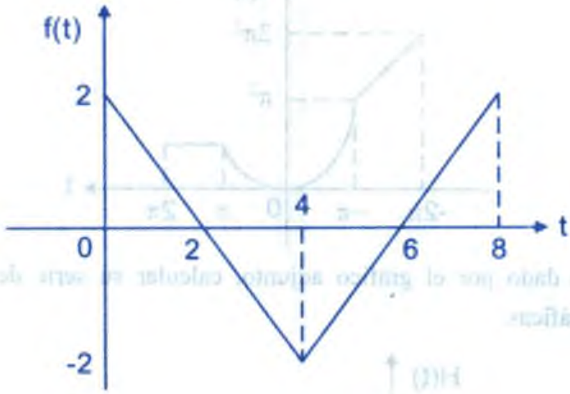
47 Si $G(t)=t(\pi^2-t^2)$, 0 < t < T, ¿Qué condiciones debe satisfacer G(t) para que tenga una serie de Fourier de la forma $G(t)=\sum_{n=1}^{\infty}[a_{2n-1}\cos(2n-1)\omega_0 t + b_{2n-1}\,\mathrm{sen}(2n-1)\omega_0 t]$?

Graficar la función para esa condición y halle dicha serie.

(48) Graficar la función f(t) y usando los impulsos unitarios hallar la serie de Fourier de $f(t)=\begin{cases} 0 & , \ -c<t<0 \\ (c-t)^2 & , \ 0<t<c \end{cases}$

(49) Hallar la serie de Fourier para un tren periódico de impulsos unitarios $\delta_{2\pi}(t)$ a partir de la función f(t) = t + π, - π ≤ t ≤ π.

(50) Utilizando la serie de Fourier del tren periódico de impulsos unitarios, encontrar la serie de Fourier de la función f(t) cuya gráfica es :



CAPÍTULO XVI

16. ESPECTROS DE FRECUENCIA DISCRETA.-

Las funciones periódicas representadas mediante una serie de Fourier implican que la especificación de sus coeficientes determinan únicamente la función; ahora en este capitulo se tratará de usar los coeficiente de Fourier en el estudio de las funciones periódicas y se introducirá el concepto de espectros de frecuencia de señales periódicas.

16.1. FORMA COMPLEJA DE LAS SERIES DE FOURIER.-

Dentro de las aplicaciones de las series de Fourier, es importante expresar estas series en términos de los exponenciales complejos $e^{\pm jn\omega_0 t}$

Consideremos la serie de Fourier de la función periódica f(t)

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t) \qquad \ldots (1)$$

donde $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, el seno y coseno, se puede expresar en términos de las exponenciales,

es decir :
$$\begin{cases} \cos n\omega_0 t = \frac{1}{2}(e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}) \\ \operatorname{sen} n\omega_0 t = \frac{1}{2j}(e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}) \end{cases} \qquad \ldots (2)$$

al reemplazar (2) en (1) se tiene :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \frac{1}{2}(e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}) + b_n \frac{1}{2j}(e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t})] \qquad \ldots (3)$$

al agrupar y teniendo en cuenta $\frac{1}{j} = -j$ se puede expresar así :

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{2}(a_n-jb_n)e^{jn\omega_0 t}+\frac{1}{2}(a_n+jb_n)e^{-jn\omega_0 t}] \qquad \ldots (4)$$

ahora hacemos $c_0=\frac{a_0}{2}$, $c_n=\frac{1}{2}(a_n-jb_n)$, $c_n=\frac{1}{2}(a_n+jb_n)$

entonces : $f(t)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}(c_n e^{jn\omega_0 t}+c_{-n}e^{-jn\omega_0 t})$

$$=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n e^{jn\omega_0 t}+\sum_{n=-1}^{-\infty}c_n e^{jn\omega_0 t}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{jn\omega_0 t}$$

Luego $\boxed{f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{jn\omega_0 t}}$ ... (5)

A la ecuación (5) se denomina forma compleja de la serie de Fourier de f(t) ó serie compleja de Fourier de f(t).

Los coeficientes c_n se puede evaluar en términos de a_n y b_n es decir :

$$c_0=\frac{a_0}{2}=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)dt \qquad \ldots (6)$$

$$c_n=\frac{1}{2}(a_n-jb_n)=\frac{1}{T}[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\cos(n\omega_0 t)dt-j\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\operatorname{sen}(n\omega_0 t)dt]$$

$$=\frac{1}{T}[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)(\cos n\omega_0 t-j\operatorname{sen} n\omega_0 t)dt]=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

$$c_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt \qquad \ldots (7)$$

$$c_n=\frac{1}{2}(a_n+jb_n)=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)e^{jn\omega_0 t}dt \qquad \ldots (8)$$

Las ecuaciones 6, 7 y 8 se puede combinar en una sola fórmula, es decir :

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt\,,\ \ n = 0, \pm 1, \pm 2, ... \qquad \textbf{... (9)}$$

como $f(t)e^{-jn\omega_0 t}$ es periódica con periodo T, entonces al considerar la ecuación (8) se tiene c_n que se puede hallar a partir de la fórmula

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt \qquad \textbf{... (10)}$$

además: como $c_n = \dfrac{a_n - b_n j}{2}$, $c_{-n} = \bar{c}_n = \dfrac{a_n + b_n j}{2}$

$$c_n + \bar{c}_n = a_n\,,\ \ c_n - \bar{c}_n = -b_{nj}$$

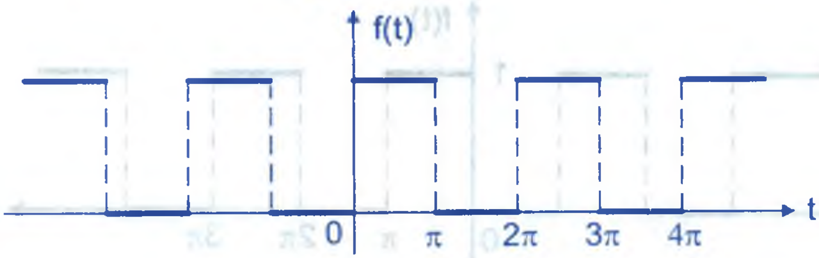
$$c_n = |c_n|e^{j\phi_n(t)}\,,\ \ |c_n| = \frac{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{2}\,,\ \ c_{-n} = |c_n|e^{-j\phi_n(t)}\,,\ \ \phi_n(t) = \text{arctg}(-\frac{b_n}{a_n})$$

Ejemplo.- Hallar la serie compleja de Fourier para la función

$$f(t) = \begin{cases} 1\ , & si\ \ 0 < t < \pi \\ -1\ , & si\ \ \pi < t < 2\pi \end{cases}\,,\ \ f(t + 2\pi) = f(t),\ \ \forall\ t \in R$$

<u>Solución</u>

Como $c_n = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$, donde $f(t)e^{-jn\omega_0 t}$ es una función periódica, con periodo T, entonces : $c_n = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$



$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-jnt}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} e^{-jnt}dt = \frac{1}{2\pi}(-\frac{e^{jnt}}{jn})\Big/_0^{\pi}$$

$$c_n = \frac{j}{2n\pi}[(-1)^n - 1]$$

para n par $c_n = 0$, n impar $-\frac{j}{2n\pi}$

$$c_n = \begin{cases} 0 & \text{para } n \text{ par} \\ \frac{-j}{2n\pi} & \text{para } n \text{ impar} \end{cases}$$

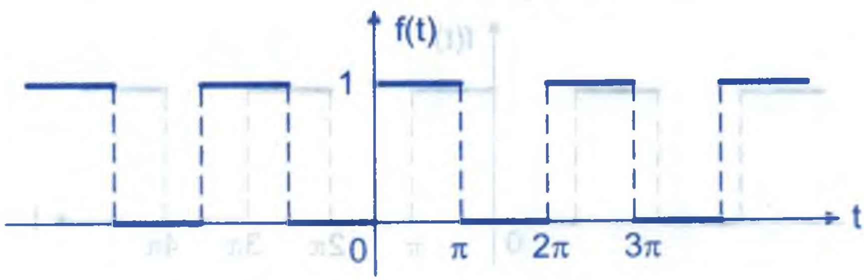
Luego se tiene: $c_{2n-1} = -\frac{j}{(2n-1)\pi}$, $\overline{c}_{2n-1} = \frac{j}{(2n-1)\pi}$

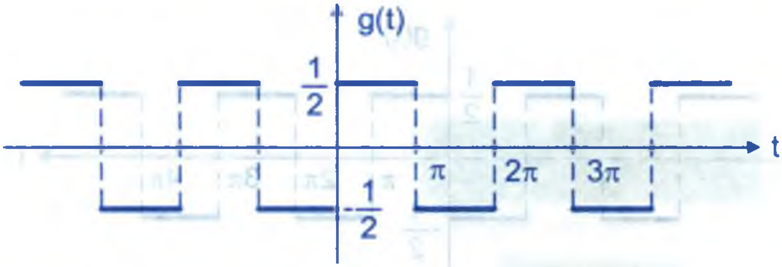
$$f(t) = -\frac{j}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2n-1}e^{j(2n-1)t}$$

$c_{2n-1} = -\frac{j}{(2n-1)\pi}$, $\overline{c}_{2n-1} = \frac{j}{(2n-1)\pi}$, entonces:

$$c_{2n-1} + \overline{c}_{2n-1} = 0 = a_{2n-1} \quad \text{y} \quad c_{2n-1} - \overline{c}_{2n-1} = -\frac{2}{(2n-1)\pi}j = -b_{2n-1}j$$

$b_{2n-1} = \frac{2}{(2n-1)\pi}$, entonces $f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)}\text{sen}(2n-1)t$





$g(t) = f(t) - \frac{1}{2}$, función impar; entonces

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\,\text{sen}\, nt = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \text{sen}\, nt\; dt = -\frac{1}{n\pi}\cos nt \Big/_{0}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{n\pi}(-\cos n\pi + 1) = \frac{1}{n\pi}[1-(-1)^n]$$

$$b_{2n-1} = \frac{2}{(2n-1)\pi}, \quad b_{2n} = 0, \quad \forall\ \text{n} = 1,2,3,\ldots$$

$$g(t) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)}\text{sen}(2n-1)t, \text{ de donde } \quad f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\text{sen}(2n-1)t}{2n-1}$$

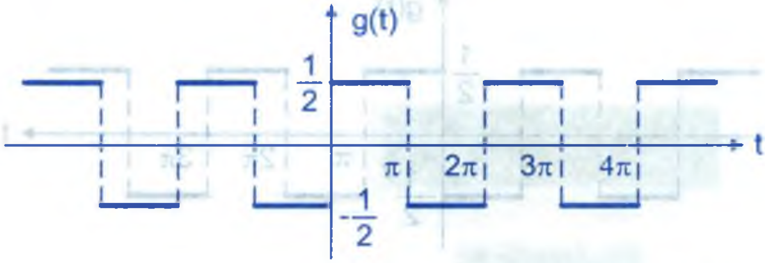
o también usando cuarto de media de simetría $g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1}\,\text{sen}(2n-1)t$, donde

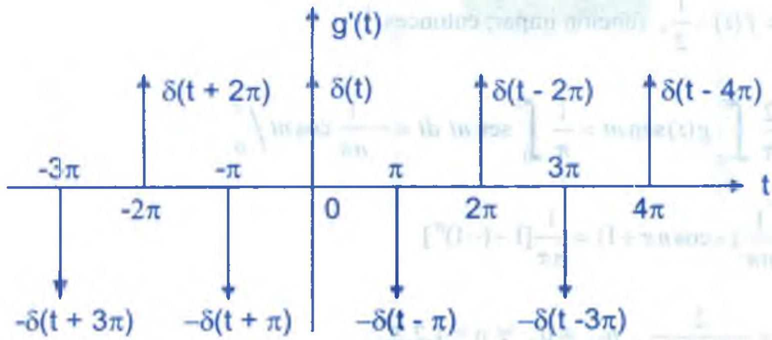
$$b_{2n-1} = \frac{8}{T}\int_{0}^{\frac{T}{4}} g(t)\,\text{sen}(2n-1)t\; dt = \frac{4}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\text{sen}(2n-1)t}{2}\,dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\Big[-\frac{\cos(2n-1)t}{2n-1}\Big]\Big/_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{(2n-1)\pi} \qquad \therefore \quad g(t) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\text{sen}(2n-1)t}{2n-1}$$

ahora calcularemos usando el tren de impulso unitario.

$$g(t) = f(t) - \frac{1}{2}$$





$$\delta_T=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)=\frac{1}{T}+\frac{2}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\cos n\omega_0 t$$

$$g'(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-2n\pi)-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-(2n-1)\pi)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-2n\pi)-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta((t+T)-2n\pi)$$

$$=\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\cos nt-\frac{1}{2\pi}-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\cos n(t+\pi)$$

$$=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\cos nt-\frac{1}{n}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cos nt=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}[1-(-1)^n]\cos nt$$

$g(t)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n \operatorname{sen} nt$, derivando se tiene :

$g'(t)=\sum_{n=1}^{\infty}nb_n\cos nt$, de donde $\frac{1}{\pi}[1-(-1)^n]=nb_n$

por lo tanto $b_n = \frac{1-(-1)^n}{n\pi} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{2}{n\pi} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$, de donde $b_{2n-1} = \frac{2}{(2n-1)\pi}$

$$g(t) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(2n-1)t}{2n-1} = f(t) - \frac{1}{2} \qquad \therefore \quad f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(2n-1)t}{2n-1}$$

16.2. ORTOGONALIDAD DE FUNCIONES COMPLEJAS.-

Diremos que un conjunto de funciones complejas f(t) (f: <a,b> → C) es ortogonal en el intervalo <a,b> si : $\int_a^b f_n(t).\overline{f_m}(t)dt = \begin{cases} 0 \ , \ \text{si } n \neq m \\ r_n \ , \ \text{si } n = m \end{cases}$, donde $\overline{f_m}(t)$ es el conjugado complejo de $f_m(t)$.

Ejemplo.- Si $f_m(t) = e^{jm\omega_0 t} = \cos m\omega_0 t + j\,\text{sen}\, m\omega_0 t$

$$\overline{f_m}(t) = e^{-jm\omega_0 t} = \cos m\omega_0 t - j\,\text{sen}\, m\omega_0 t$$

Ejemplo.- Probar que el conjunto de funciones complejas $\{e^{jn\omega_0 t}\}$ ∀ n ϵ Z es ortogonal en $< -\frac{T}{2}, \frac{T}{2} >$

Solución

i) $$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{jn\omega_0 t}(\bar{1})dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{jn\omega_0} e^{jn\omega_0 t} \Big/_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}$$

$$= \frac{1}{jn\omega_0}(e^{j2\pi n} - e^{-2jn\pi}) = 0 \quad \text{si} \quad n \neq 0$$

ii) $$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{jn\omega_0 t}.(\overline{e^{jm\omega_0 t}})dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{jn\omega_0 t}.e^{-jm\omega_0 t}dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{j\omega_0(n-m)t}dt = \frac{e^{j\omega_0(n-m)t}}{j\omega_0(n-m)} \Big/_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}$$

$$= \frac{1}{j\omega_0(n-m)}[e^{j(n-m)\pi} - e^{-j(n-m)\pi}]$$

$$= \frac{1}{j\omega_0(n-m)}[(-1)^k - (-1)^k] = 0\,,\ \ k \in Z \ \text{ si } \ n \neq m$$

iii) Si n = m, entonces $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{jn\omega_0 t}.\overline{e^{jn\omega_0 t}}dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{jn\omega_0 t}.e^{-jn\omega_0 t}dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt = T$

Utilizando la propiedad de ortogonalidad de funciones complejas, determinar los coeficientes de Fourier : $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$ **... (1)**

donde f(t + T) = f(t), ∀ t ϵ R

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt\,, \quad n = \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad \textbf{... (2)}$$

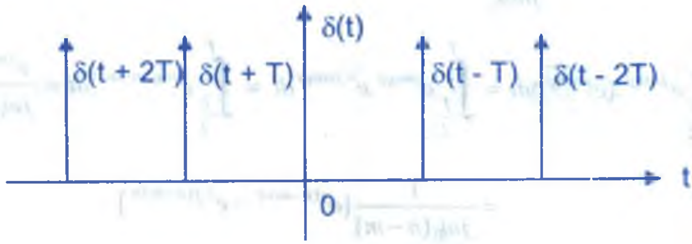
a la expresión (1) multiplicamos por $e^{-jm\omega_0 t}$

$$f(t)e^{-jm\omega_0 t} = (\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t})e^{-jm\omega_0 t}\,, \text{ integrando}$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-jm\omega_0 t}dt = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{j\omega_0(n-m)t}dt\,, \text{ de donde}$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-jm\omega_0 t}dt = c_n T \quad \text{por lo tanto} \quad c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-jm\omega_0 t}at$$

deducir la serie de Fourier del tren periódico de impulsos unitarios.



$$\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{jn\omega_0 t}\ ,\ \text{donde}$$

$$c_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\delta_T(t)e^{-jn\omega_0 t}dt=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\delta(t)e^{-jn\omega_0 t}dt=\frac{1}{T}(e^{-jn\omega_0 t})\Big|_{t=0}=\frac{1}{T}$$

de donde $c_n=\frac{1}{T}$ y por lo tanto $\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{jn\omega_0 t}$

OBSERVACIÓN.-

$$\delta_T(t)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{jn\omega_0 t}=\frac{1}{T}[\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{jn\omega_0 t}+1+\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{jn\omega_0 t}]$$

$$=\frac{1}{T}[\sum_{n=1}^{\infty}e^{-jn\omega_0 t}+1+\sum_{n=1}^{\infty}e^{jn\omega_0 t}]=\frac{1}{T}+\frac{2}{T}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{e^{jn\omega_0 t}+e^{-jn\omega_0 t}}{2})$$

$$=\frac{1}{T}+\frac{2}{T}\cos n\omega_0 t \qquad \therefore \quad \delta_T(t)=\frac{1}{T}+\frac{2}{T}\cos n\omega_0 t$$

OBSERVACIÓN.- Se sabe que la serie de Fourier constituye un poderoso instrumento en el tratamiento de diversos problemas que implican funciones periódicas.

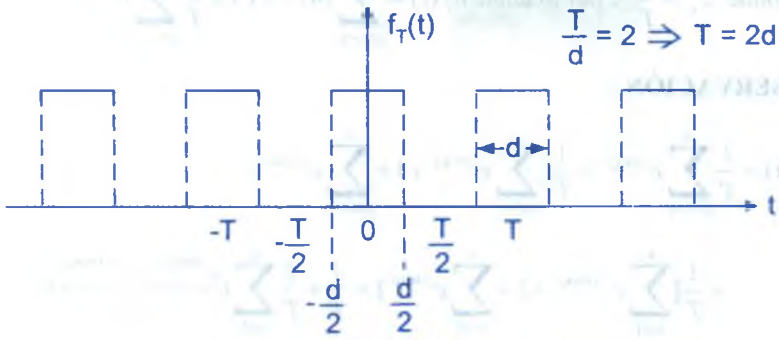
Sin embargo muchos problemas prácticos no involucran funciones periódicas, por lo tanto es necesario desarrollar un método de análisis de Fourier que incluyan funciones no periódicas. Luego estudiaremos la representación frecuencial de funciones no periódicas por medio de las series de Fourier.

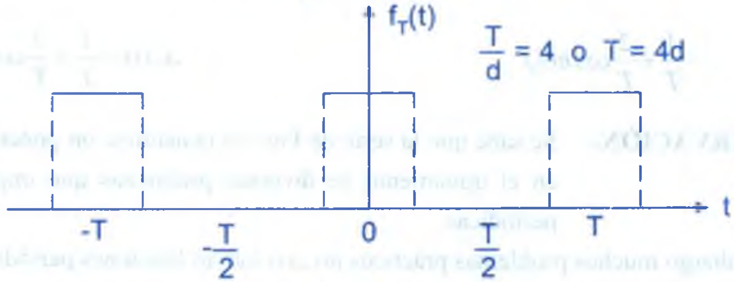
16.3. INTEGRAL DE FOURIER Y ESPECTROS CONTINUOS DE LA SERIE DE FOURIER A LA INTEGRAL DE FOURIER.-

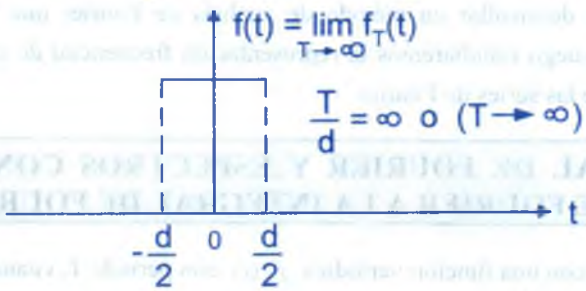
Expresamos con una función periódica $f_T(t)$ con periodo T, cuando se hace que T tienda a infinito, en este caso la función resultante $f(t)=\lim_{T\to\infty} f_T(t)$ deja de ser periódica a este proceso de limite ilustraremos mediante un tren de pulsos rectangulares.

Consideremos la función $f_T(t)$, definida por :

$$f_T(t)=\begin{cases} 0 \ , \ \text{para} & -\dfrac{T}{2}<t<-\dfrac{d}{2} \\ 1 \ , \ \text{para} & -\dfrac{1}{2}d<t<\dfrac{1}{2}d \\ 0 \ , \ \text{para} & \dfrac{1}{2}d<t<\dfrac{T}{2} \end{cases} \quad \text{de donde} \quad f_T(t+T)=f_T(t)\ ,\ T>d$$







Cuando $t\to\infty$, se obtiene la función : $f(t)=\lim\limits_{T\to\infty} f_T(t)=\begin{cases} 1 \ , \ \text{cuando} & -\dfrac{d}{2}<t<\dfrac{d}{2} \\ 0 \ , \ \text{de otro modo} & \end{cases}$

naturalmente la función f(t) no es periódica.

TEOREMA 1.- Sea f(t) una función periódica con periodo T, cuando T $\to \infty$, f(t) se convierte en una función no periódica. Encontrar la representación de esta función no periódica.

Demostración

Sea $f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$, es la forma exponencial de la serie de Fourier ... **(1)**

donde $c_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$, $\omega_0=\frac{2\pi}{T}$ ... **(2)**

Al reemplazar en la serie de Fourier se tiene :

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}dt=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-jn\omega_0 t})e^{jn\omega_0 t}$$

como $\omega_0=\frac{2\pi}{T}$, entonces $\frac{1}{T}=\frac{\omega_0}{2\pi}$

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)e^{-jn\omega_0 x}dx)\omega_0 e^{jn\omega_0 t} \quad \text{... (3)}$$

cuando T $\to \infty \;\Rightarrow\; \frac{1}{T}\to 0 \;\Rightarrow\; \frac{\omega_0}{2\pi}\to 0 \;\Rightarrow\; \omega_0 \to 0$

luego sea $\omega_0=\Delta\omega$, entonces la frecuencia de cualquier "armónico" $n\omega_0$ debe corresponde a la variable general de frecuencia que describe el espectro continuo, es decir n $\to \infty$ a medida que $\omega_0=\Delta\omega\to 0$ de tal manera que el producto infinito, es decir : $n\omega_0=n\Delta\omega\to\omega$. Luego la ecuación (3) se convierte en :

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)e^{-jn\Delta\omega x}dx)e^{jn\Delta\omega t}\Delta\omega$$

cuando T $\to \infty$, $\Delta\omega \to d\omega$, entonces la función no periódica se convierte en :

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-j\omega x}dx\right]e^{j\omega t}d\omega \qquad \ldots (4)$$

si se define $\boxed{F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt}$ **... (5)**

ahora reemplazamos (5) en (4) obteniéndose

$$\boxed{f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega} \qquad \ldots (6)$$

Las ecuaciones (5) y (6) es la representación de Fourier de la función no periódica.

OBSERVACIÓN.- Se observa que la ecuación (6) es análoga a la ecuación (1) y la ecuación (5) es análoga a la ecuación (2), luego a la ecuación (4) se conoce como Identidad de Fourier.

OBSERVACIÓN.- Se hace hincapié en que la anterior derivación heurística de (5) y (6) no esta fundamentada en una base rigurosamente matemática. Sin embargo, desde el punto de vista de la ingeniería, el interés primordial en la interpretación y utilización de tales relaciones.

TEOREMA 2.- (Teorema de la integral de Fourier)

Si f(t) es real entonces $f(t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos\omega(t-x)dx\, d\omega$

Demostración

Se conoce que $f(t)=\frac{2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-j\omega x}dx\right]e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{j\omega(t-x)}dx\, d\omega$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)[\cos\omega(t-x)+j sen\omega(t-x)]dx\, d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos\omega(t-x)dx\, d\omega+j\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)sen\omega(t-x)dx\, d\omega$$

Si f(t) es real, entonces $f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos\omega(t-x)dx\, d\omega$

como $\cos \omega(t-x)$ es par con respecto a ω, entonces se tiene :

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega(t-x)dx\,d\omega$$

16.4. TRANSFORMADA DE FOURIER.-

La función $F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)=e^{-j\omega t}dt$, es conocida como la integral de Fourier ó Transformada de Fourier de f(t) y denotamos por :

$$\boxed{F(\omega)=\mathcal{F}(f(t))=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt} \quad \text{... (I)}$$

Si $\mathcal{F}^{-1}$ es el símbolo que se utiliza para indicar la operación inversa, es decir para obtener f(t) cuando F(ω) es dado, esto es :

$$\boxed{f(t)=\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}dt} \quad \text{... (II)}$$

a la función f(t) se denomina Transformada Inversa de Fourier de F(ω). Las expresiones de (I) y (II) se conocen como par de Transformada de Fourier.

TEOREMA 1.- La condición suficiente para que exista Transformada de Fourier de f(t) es que la integral del valor absoluto de la función f(t) debe ser infinita ($\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt<\infty$)

Demostración

Como $e^{-j\omega t}=\cos\omega t-jsen\omega t \Rightarrow \left[|e^{-j\omega t}|=\sqrt{\cos^2\omega t+sen^2\omega t}=1\right]$

y $|f(t)e^{-j\omega t}|=|f(t)| \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt=\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)e^{-j\omega t}|dt$, es finita

entonces $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$ es finita, es decir :

existe la Transformada de Fourier $\mathcal{F}[f(t)]$

NOTA.- La función F(ω) = $\mathcal{F}$ [f(t)] es en general compleja y se tiene $F(\omega)=R(\omega)+jX(\omega)=|F(\omega)|e^{j\phi(\omega)}$, donde |F(ω)| se denomina espectro de magnitud de f(t) y ϕ(ω) espectro de fase de f(t).

TEOREMA 2.- Si f(t) es real, demostrar que las partes real e imaginaria de F(ω) son :

$$\operatorname{Re}(F(\omega))=R(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\,dt \quad ; \quad \operatorname{Im}(F(\omega))=X(\omega)=-\int_{-\infty}^{\infty} f(t)sen\omega t\,dt$$

así mismo demostrar que R(ω) y X(ω) son funciones par e impar de ω respectivamente ósea R(ω) = -R(ω), X(ω) = -X(-ω), $\overline{F(-\omega)}=F(\omega)$ donde $\overline{F(\omega)}$ es el conjugado complejo de F(ω).

Demostración

Como $F(\omega)=\mathcal{F}^{-1}[f(t)]=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$ ... **(1)**

Además se conoce: $e^{-j\omega t}=\cos\omega t-jsen\omega t$ ... **(2)**

al reemplazar (2) en (1) se tiene :

$$F(\omega)=\mathcal{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)[\cos\omega t-jsen\omega t]dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\,dt-j\int_{-\infty}^{\infty} f(t)sen\omega t\,dt=\mathrm{R}(\omega)+\mathrm{j}\,\mathrm{X}(\omega)$$

igualando las partes real e imaginaria, se tiene :

$$R(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\,dt \quad ; \quad X(\omega)=-\int_{-\infty}^{\infty} f(t)sen\omega t\,dt$$

como f(t) es real se tiene :

$$R(-\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(-\omega t)dt=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\,dt=R(\omega)$$

$$X(-\omega)=-\int_{-\infty}^{\infty} f(t)sen(-\omega t)dt=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)sen\omega t\,dt=-X(\omega)$$

es decir que R(ω) es una función par de ω y X(ω) es una función impar de ω.

$$F(-\omega)=R(-\omega)+jX(-\omega)=R(\omega)-jX(\omega)=\overline{F(\omega)}$$

TEOREMA 3.- f(t) es real si y solo $F(-\omega)=\overline{F(\omega)}$

Demostración

i) Si f(t) es real, entonces $F(-\omega)=\overline{F(\omega)}$ ya esta demostrado en el teorema 2.

ii) Si $F(-\omega)=\overline{F(\omega)}$ entonces f(t) es real, por demostrar. Supongamos que $f(t)=f_1(t)+j\,f_2(t)$, donde $f_1(t)$ y $f_2(t)$ son funciones reales y

$f(t)=\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$, es decir que :

$$f_1(t)+j\,f_2(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[R(\omega)+j\,X(\omega)]e^{j\omega t}d\omega$$

$$f_1(t)+j\,f_2(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[R(\omega)\cos\omega t-X(\omega)sen\omega t]d\omega+$$

$$+j\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[X(\omega)\cos\omega t+R(\omega)sen\omega t]d\omega$$

igualando las partes real e imaginaria se tiene :

$$f_1(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[R(\omega)\cos\omega t-X(\omega)sen\omega t]d\omega$$

$$f_2(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[R(\omega)\cos\omega t+X(\omega)sen\omega t]d\omega$$

y como $F(-\omega)=\overline{F(\omega)}$ entonces R(-ω) = R(ω) y X(-ω) = -X(ω), entonces R(ω) sen ωt y X(ω)cos ωt son impares de ω de donde $f_2(t)=0 \Rightarrow f(t)=f_1(t)$ es real.

TEOREMA 4.- Si f(t) es real, demostrar que su espectro de magnitud |F(ω)| es una función par de ω y que su espectro de fase φ(ω) es una función impar de ω.

Demostración

Si f(t) es real, entonces $F(-\omega)=\overline{F}(\omega)$ y $\overline{F}(\omega)=|\overline{F}(\omega)|e^{-j\phi(\omega)}=|F(\omega)|e^{-j\phi(\omega)}$

$F(-\omega)=|F(-\omega)|e^{j\phi(-\omega)}$ $\Rightarrow$ comparando se tiene : $|F(-\omega)|e^{j\phi(-\omega)}=|F(\omega)|e^{-j\phi(\omega)}$

$\therefore\ |F(-\omega)|=|F(\omega)| \wedge \omega(\phi)=-\phi(\omega)$

TEOREMA 5.- Demostrar que si la Transformada de Fourier de f(t) es real, entonces f(t) es una función par de t y que si la transformada de Fourier de un real f(t) es imaginario puro, entonces f(t) es una función impar de t.

Demostración

Consideremos la Transformada de Fourier de f(t) es decir :

$\mathcal{F}[f(t)]=F(\omega)=R(\omega)+j\,X(\omega)$, donde

$$R(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\,dt \quad \wedge \quad X(\omega)=-\int_{-\infty}^{\infty} f(t)sen\omega t\,dt$$

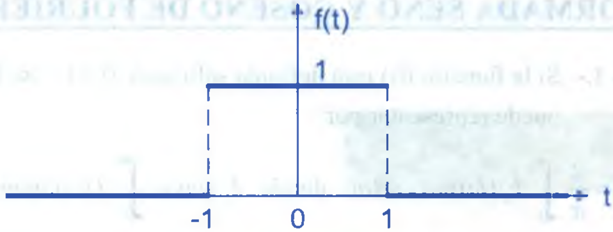
Si $F(\omega)=R(\omega) \wedge X(\omega)=0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(t)sen\omega t\,dt=0$, entonces f(t) sen ωt es impar y como sen ωt es impar entonces f(t) es par.

Si $\mathcal{F}[f(t)]$ es imaginario puro, entonces se tiene $F(\omega)=j\,X(\omega) \wedge R(\omega)=0$, entonces $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\,dt=0$ entonces f(t) cos ωt es impar, pero como cos ωt es par en t entonces f(t) es impar.

OBSERVACIÓN.- Si f(t) es una función real y $\mathcal{F}[f(t)]=F(\omega)=R(\omega)+j\,X(\omega)$ de $\mathcal{F}[f_e(t)]=R(\omega)$ y $\mathcal{F}[f_0(t)]=jX(\omega)$, donde $f(t)=f_e(t)+f_0(t)$, siendo $f_e(t)$ y $f_0(t)$ las componentes par e impar de f(t) respectivamente.

Ejemplo.- Hallar la integral de Fourier que representa la función $f(t)=\begin{cases}1 & \text{para } |t|<1\\ 0 & \text{para } |t|>1\end{cases}$

Solución



$$F(\omega)=\mathcal{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-1}^{1} e^{-j\omega t}dt$$

$$=-\frac{e^{j\omega t}j\omega}{j\omega}\Big/_{-1}^{1}=-\frac{1}{j\omega}e^{-j\omega}+\frac{1}{j\omega}e^{j\omega}=\frac{2}{\omega}\left(\frac{e^{j\omega}-e^{-j\omega}}{2j}\right)=\frac{2}{\omega}sen\omega$$

$$\therefore \quad F(\omega)=\frac{2sen\omega}{\omega}$$

y $\displaystyle f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)e^{j\omega t}d\omega=\mathcal{F}^{-1}[f(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2sen\omega}{\omega}e^{j\omega t}d\omega$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{sen\omega}{\omega}e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{sen\omega}{\omega}(\cos\omega t+jsen\omega t)d\omega$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{sen\omega.\cos\omega t}{\omega}d\omega+\frac{j}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{sen\omega.sen\omega t}{\omega}d\omega$$

para f(t) es real, entonces $\displaystyle f(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{sen\omega.\cos\omega t}{\omega}d\omega$

además f(-t) = f(t) es par entonces $\displaystyle f(t)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{sen\omega.\cos\omega t}{\omega}d\omega$

Ejemplo.- Deducir del ejemplo anterior que $\displaystyle \int_0^{\infty}\frac{sen\omega}{\omega}d\omega=\frac{\pi}{2}$

<u>Solución</u>

Como $\displaystyle f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos t\omega.sen\omega}{\omega}d\omega$, para t = 0, se tiene :

$$f(0)=1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos 0.sen\omega}{\omega}d\omega=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{sen\omega}{\omega}d\omega \qquad \therefore \int_0^{\infty}\frac{sen\omega}{\omega}d\omega=\frac{\pi}{2}$$

16.5. TRANSFORMADA SENO Y COSENO DE FOURIER.-

TEOREMA 1.- Si la función f(t) está definida solo para $0 < t < \infty$. Demostrar que f(t) se puede representar por :

$$f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}F_c(\omega)\cos\omega t d\omega, \text{ donde } F_c(\omega)=\int_0^{\infty}f(t)\cos\omega t\ dt$$

Demostración

Como f(t) solo está definida para $0 < t < \infty$, entonces podemos definir para $-\infty < t < 0$ por la ecuación $f(-t) = f(t)$ por lo que la función resultante es par.

Si se define $F_c(\omega)=\int_0^{\infty}f(t)\cos\omega t\ dt$ entonces $f(t)=\int_0^{\infty}f(\omega)\cos\omega t\ d\omega$

$F_c(\omega)$ se denomina Transformada coseno de Fourier de f(t) la cual se denotará por :

$$\mathcal{F}_c[f(t)]=F_c(\omega)=\int_0^{\infty}f(t)\cos\omega t\ dt$$

$$f(t)=\mathcal{F}_c^{-1}(F_c(\omega))=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}F_c(\omega)\cos\omega t\ dt$$

TEOREMA 2.- Si f(t) está definida solo para $0 < t < \infty$, Demostrar que f(t) se puede representar por : $f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}F_s(\omega)\text{sen}\omega t\ dt$ donde $F_s(\omega)=\int_0^{\infty}f(t)\text{sen}\omega t\ dt$

Demostración

Como f(t) solo está definida por $0 < t < \infty$, entonces podemos definir para $-\infty < t < 0$ por la ecuación $f(-t) = -f(t)$, entonces la función resultante es impar.

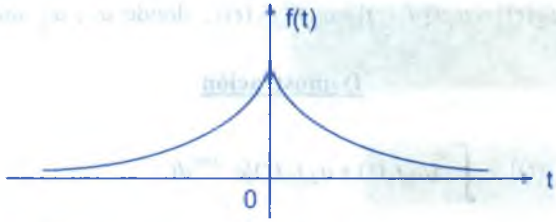
Si se define $F_s(\omega)=\int_0^{\infty}f(t)\text{sen}\omega t\ dt$, entonces $f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}F_s(\omega)\text{sen}\omega t\ d\omega$

$F_s(\omega)$ se denomina Transformada seno de Fourier, la cual se denotara por

$$\mathcal{F}_s[f(t)]=F_s(\omega)=\int_0^{\infty}f(t)\text{sen}\omega t\ dt\ ,\quad f(t)=\mathcal{F}^{-1}[F_s(\omega)]=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}F_s(\omega)\text{sen}\omega t\ dt$$

Ejemplo.- Hallar la integral de Fourier de $f(t)=e^{-kt}$ cuando t > 0 y f(-t) = f(t), k > 0

Solución



$$F(\omega)=\mathcal{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-kt}.e^{-j\omega t}dt$$

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-kt}[\cos\omega t-j\operatorname{sen}\omega t]dt=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-kt}\cos\omega t\ dt-j\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-kt}\operatorname{sen}\omega t\ dt}_{0}$$

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-kt}\cos\omega t\ dt=2\int_{0}^{\infty} e^{-kt}\cos\omega t\ dt$$

$$=-\frac{2k}{k^2+\omega^2}e^{-kt}(-\frac{\omega}{k}\operatorname{sen}\omega t+\cos t)\Big/_{0}^{\infty}=\frac{2k}{k^2+\omega^2}\quad\therefore\quad F(\omega)=\frac{2k}{k^2+\omega^2}$$

$$f(t)=\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$e^{-kt}=\frac{2k}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\cos\omega t}{k^2+\omega^2}d\omega\ ,\ (t>0,\ k>0)$$

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\cos\omega t}{k^2+\omega^2}dt=\frac{\pi}{2k}e^{-kt}\ ,\quad (t>0,\ k>0)$$

OBSERVACION.- Si f(t) es una función par $\Rightarrow$ X(ω) = 0 y

$$F(\omega)=R(\omega)=2\int_{0}^{\infty} f(t)\cos\omega t\ dt \ \text{ y }\ f(t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} R(\omega)\cos\omega t\ d\omega$$

Si f(t) es impar, entonces R(ω) = 0 y $F(\omega)=jX(\omega)=2\int_{0}^{\infty} f(t)\operatorname{sen}\omega t\ dt$ y

$$f(t)\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} X(\omega)\operatorname{sen}\omega t\ d\omega$$

16.6. PROPIEDADES DE LAS TRANSFORMADA DE FOURIER.-

① Si $F_1(\omega)=\mathcal{F}[f_1(t)]$ y $F_2(\omega)=\mathcal{F}[f_2(t)]$, entonces :

$\mathcal{F}[a_1 f_1(t)+a_2 f_2(t)]=a_1\mathcal{F}[f_1(t)]+a_2\mathcal{F}[f_2(t)]$, donde a_1, a_2 son constantes arbitrarios.

Demostración

$$\mathcal{F}[a_1 f_1(t)+a_2 f_2(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}(a_1 f_1(t)+a_2 f_2(t))e^{-j\omega t}dt$$

$$=a_1\int_{-\infty}^{\infty}f_1(t)e^{-j\omega t}dt+a_2\int_{-\infty}^{\infty}f_2(t)e^{-j\omega t}dt=a_1F_1(\omega)+a_2F_2(\omega)$$

② Si a es una constante real y F(ω) = $\mathcal{F}$[f(t)], entonces $\mathcal{F}[f(at)]=\frac{1}{|a|}F(\frac{\omega}{a})$

Demostración

$$\mathcal{F}[f(at)]=\int_{-\infty}^{\infty}f(at)e^{-j\omega t}dt=\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty}f(u)e^{-j\omega(\frac{u}{a})}du$$

$$=\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty}f(u)e^{-j(\frac{\omega}{a})u}du=\frac{1}{a}F(\frac{\omega}{a}) \quad \text{.... (1)}$$

sea at = u $\Rightarrow$ $dt=\frac{du}{a}$; a > 0 y como $-\infty<t<\infty \Rightarrow -\infty<at<\infty$ y $t=\frac{u}{a}$

a < 0 y como $-\infty>at>\infty$, entonces

$$\mathcal{F}[f(at)]=\frac{1}{a}\int_{\infty}^{-\infty}f(u)e^{-j(\frac{\omega}{a})u}du=-\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty}f(u)e^{-j\omega(\frac{u}{a})}du=-\frac{1}{a}F(\frac{\omega}{a}) \quad \text{... (2)}$$

Luego de (1) y (2) se tiene: $\mathcal{F}[f(at)]=\frac{1}{|a|}F(\frac{\omega}{a})$

③ Si $\mathcal{F}$[f(t)] = F(ω), Demostrar que $\mathcal{F}$[f(-t)] = F(-ω)

Demostración

De la Propiedad (2) se tiene : $\mathcal{F}[f(at)] = \dfrac{1}{|a|} F(\dfrac{\omega}{a})$, $\forall$ a $\in$ R, a $\neq$ 1 entonces para a = -1, se tiene que : $\mathcal{F}[f(-t)] = \dfrac{1}{|-1|} F(-\omega) = F(-\omega)$

(4) Si F(ω) = $\mathcal{F}$ [f(t)], Demostrar que : $\mathcal{F}[f(t-t_0)] = F(\omega)e^{-j\omega t_0}$

Demostración

$$\mathcal{F}[f(t-t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-t_0)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-j\omega(t_0+u)} du$$

Sea $t - t_0 = u \Rightarrow t = u + t_0$ $\quad = e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-j\omega u} du$

$-\infty < t < \infty$ $\quad = F(\omega)e^{-j\omega t_0}$

$-\infty < t - t_0 < \infty$

(5) Si ω_0 es una constante real y F(ω) = $\mathcal{F}$ [f(t)]. Demostrar que $\mathcal{F}[f(t)e^{j\omega_0 t}] = F(\omega - \omega_0)$

Demostración

$$\mathcal{F}[f(t)e^{j\omega_0 t}] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{j\omega_0 t}.e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j(\omega-\omega_0)t} dt = F(\omega - \omega_0)$$

(6) Si F(ω) = $\mathcal{F}$ [f(t)], entonces $\mathcal{F}$ [f(t)] = 2π f(-ω)

Demostración

Sabemos que $f(t) = \dfrac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)e^{j\omega t} d\omega$, entonces

$2\pi.f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega$, si se reemplaza t por – t se tiene :

$$2\pi.f(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{-j\omega t} d\omega = 2\pi.f(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t)e^{-j\omega t} dt = \mathcal{F}[F(t)]$$

Luego 2π f(-ω) = $\mathcal{F}$ [f(t)]

(7) Si $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$ y $f(t) \to 0$, cuando $t \to \pm\infty$. Demostrar que :

$\mathcal{F}[(f'(t))] = j\omega F(\omega) = j\omega \mathcal{F}[f(t)]$

Demostración

$$\mathcal{F}[f'(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)e^{-j\omega t}dt = \underbrace{f(t)e^{-j\omega t}\Big/_{-\infty}^{\infty}}_{0} + j\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

como $f(t) \to 0$ cuando $t \to \pm\infty \Rightarrow f(t)e^{-j\omega t}\Big/_{-\infty}^{\infty} = 0$

Luego $\mathcal{F}[f'(t)] = j\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt = j\,\omega\, F(\omega) = j\omega\, \mathcal{F}[f(t)]$

OBSERVACIÓN.- Mediante la aplicación repetidas de la propiedad (7) se tiene :

$$\mathcal{F}[f^{(n)}(t)] = (j\omega)^n F(\omega) = (jn)^n \mathcal{F}[f(t)]$$

(8) Si $\mathcal{F}[f(t)]$) $F(\omega)$, $\omega \neq 0$ y $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = F(0) = 0$, Demostrar que :

$$\mathcal{F}[\int_{-\infty}^{t} f(x)dx] = \frac{1}{j\omega}F(\omega) = \frac{1}{j\omega}\mathcal{F}[f(t)]$$

Demostración

Sea $\phi(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx$ y $\phi'(t) = f(t)$ y si

$\mathcal{F}[\phi(t)] = \phi(\omega) \Rightarrow \mathcal{F}[\phi'(t)] = \mathcal{F}[f(t)] = j\omega\,\phi(\omega)$

Con la condición que $\lim_{t\to\infty} \phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = F(0) = 0$

Luego $\phi(\omega) = \frac{1}{j\omega}\mathcal{F}[f(t)] = \frac{1}{j\omega}F(\omega)$ si $\omega \neq 0$

Si $\omega = 0 \Rightarrow \mathcal{F}[\int_{-\infty}^{t} f(x)dx] = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)dt$

Cuando $F(0)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \neq 0$, se tiene que : $\mathcal{F}[\int_{-\infty}^{t} f(x)dx]=\frac{1}{j\omega}F(\omega)+\pi F(0)\delta(\omega)$

9 Si $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega) \Rightarrow \mathcal{F}[-tj\, f(t)]=\frac{dF(\omega)}{d\omega}$

Demostración

$F(\omega)=\mathcal{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$, de donde

$$\frac{dF(\omega)}{d\omega}=\frac{d}{d\omega}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty} -jt\,f(t)e^{-j\omega t}dt=\mathcal{F}[-jt\,f(t)]$$

Luego $\mathcal{F}(-jt+f(t)]=\frac{dF(\omega)}{d\omega}$

Ejemplo.-

1 Si $F(\omega)=\mathcal{F}[f(t)]$, entonces $\mathcal{F}[f(at)e^{j\omega_0 t}]=\frac{1}{|a|}F(\frac{\omega-\omega_0}{a})$

Solución

$$\mathcal{F}[f(at)e^{j\omega t}]=\int_{-\infty}^{\infty} f(at)e^{j\omega_0 t}.e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty} f(at)e^{-j(\omega-\omega_0)t}dt$$

Sea $at = u \Rightarrow dt=\frac{du}{a}$ $\quad =\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-j(\omega-\omega_0)\frac{u}{a}}du=\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-j(\frac{\omega-\omega_0}{a})u}du$

Si $a>0$ y $-\infty<t<\infty$ $\quad =\frac{1}{a}F(\frac{\omega-\omega_0}{a})$

Si $a<0$, entonces $\mathcal{F}[f(at)e^{j\omega_0 t}]=\frac{1}{-a}F(\frac{\omega-\omega_0}{a})$

Luego $\mathcal{F}[f(at)e^{j\omega_0 t}]=\frac{1}{|a|}F(\frac{\omega-\omega_0}{a})$

2 Si $F(\omega)=\mathcal{F}[f(t)]$, hallar $\mathcal{F}[f(t)sen\,\omega_0 t]$

Solución

$$\mathcal{F}[f(t)sen\omega_0 t] = \mathcal{F}[f(t)(\frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j})] = \frac{1}{2j}\mathcal{F}[f(t)e^{j\omega_0 t} - f(t)e^{-j\omega_0 t}]$$

$$= \frac{1}{2j}(\mathcal{F}[f(t)e^{j\omega_0 t}] - \mathcal{F}[f(t)e^{-j\omega_0 t}]) = \frac{1}{2j}[F(\omega - \omega_0) - F(\omega + \omega_0)]$$

Luego $\mathcal{F}[f(t)sen\omega_0 t] = \frac{1}{2j}[F(\omega - \omega_0) - F(\omega + \omega_0)]$

3 Hallar la Transformada de Fourier de $f(t) = e^{-a|t|}$

Solución

$$F[e^{-a|t|}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|}e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{0} e^{at}.e^{-j\omega t}dt + \int_{0}^{\infty} e^{at}.e^{-j\omega t}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{0} a^{(a-j\omega)t}dt + \int_{0}^{\infty} e^{-(a+j\omega)t}dt = \frac{e^{(a-j\omega)t}}{a-j\omega}\Big/_{-\infty}^{0} - \frac{e^{-(a+j\omega)t}}{a+j\omega}\Big/_{0}^{\infty}$$

$$= (\frac{1}{a-j\omega} - 0) - (0 - \frac{1}{a+j\omega}) = \frac{1}{a-j\omega} + \frac{1}{a+j\omega}$$

$$= \frac{a+j\omega+a-j\omega}{(a-j\omega)(a+j\omega)} = \frac{2a}{a^2-\omega^2}$$ Luego $\mathcal{F}[e^{-a|t|}] = \frac{2a}{a^2-\omega^2}$

4 Hallar la Transformada de Fourier de $f(t) = \frac{1}{a^2+t^2}$

Solución

Aplicando la propiedad (6) al resultado del ejemplo (3) esto es, como

$\mathcal{F}[e^{-a|t|}] = \frac{2a}{a^2+\omega^2} = F(\omega)$ y $f(t) = e^{-a|t|}$

Entonces $\mathcal{F}[\frac{2a}{a^2+t^2}] = 2\pi.f(-\omega) = 2\pi.e^{-a|\omega|}$

Entonces $\mathcal{F}[\frac{1}{a^2+t^2}] = 2\pi . e^{-a\omega}$, de donde $F[\frac{1}{a^2+t^2}] = \frac{\pi}{a} e^{-a\omega}$

16.7. CONVOLUCIÓN.-

Consideremos las funciones $f_1(t)$ y $f_2(t)$, entonces La Convolución de $f_1(t)$ y $f_2(t)$ está definida por la expresión :

$$\boxed{f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x).f_2(t-x)dx}$$, la cual es denotada por : $f(t) = f_1(t) * f_2(t)$

OBSERVACION.- Un caso especial importante es cuando $f_1(t) = 0$ para $t < 0$ y $f_2(t) = 0$ para $t < 0$. Entonces $f(t) = f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(x).f_2(t-x)dx$

16.8. PROPIEDADES DE LA CONVOLUCIÓN.-

1 Demostrar que la convolución es conmutativa $f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$

Demostración

Aplicando la definición de Convolución se tiene: $f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x).f_2(t-x)dx$

Sea t – x = y de donde dx = - dy además cuando $\begin{cases} x \to -\infty & ; & y \to \infty \\ x \to \infty & ; & y \to -\infty \end{cases}$

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x).f_2(t-x)dx = \int_{\infty}^{-\infty} f_1(t-y).f_2(y)(-dy)$$

$$= -\int_{\infty}^{-\infty} f_2(y).f_1(t-y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(y).f_1(t-y)dy = f_2(t) * f_1(t)$$

2 Demostrar que la Convolución es asociativa $[f_1(t) * f_2(t)] * f_3(t) = f_1(t) * [f_2(t) * f_3(t)]$

Demostración

Sea $g(t) = f_1(t) * f_2(t)$ y $h(t) = f_2(t) * f_3(t)$, entonces

$$g(t) * f_3(t) = f_1(t) * h(t) \qquad \textbf{... (a)}$$

$$g(t)=f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(y).f_2(t-y)dy \qquad \text{... (b)}$$

$$g(t)*f_3(t)=\int_{-\infty}^{\infty}g(x).f_3(t-x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}[\int_{-\infty}^{\infty}f_1(y).f_2(x-y)dy]f_3(t-x)dx \qquad \text{... (c)}$$

y dado que $h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f_2(z).f_3(t-z)dz$ ... **(d)**

$$h(t-y)=\int_{-\infty}^{\infty}f_2(z).f_3(t-y-z)dz \qquad \text{... (e)}$$

por consiguiente, la integral se identifica dentro del paréntesis angular en el segundo miembro de (c) como h(t – y), de donde $g(t)*f_3(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(y)h(t-y)dy=f_1(t)*h(t)$

por lo tanto : $[f_1(t)*f_2(t)]*f_3(t)=f_1(t)*[f_2(t)*f_3(t)]$

3. f(t)*δ(t) = f(t), donde δ(t) es la función impulso unitario es decir que la Convolución de una función f(t) con una función impulso unitario conduce a la misma función f(t).

Demostración

Aplicando la definición de Convolución se tiene : $f(t)*\delta(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x).\delta(t-x)dx$

utilizando la propiedad conmutativa se tiene :

$f(t)*\delta(t)=\delta(t)*f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x).f(t-x)dx=f(t)$ par a la función impulso unitario.

$\therefore$ f(t)*δ (t) = f(t)

4. Demostrar que: f(t) * δ(t – T) = f(t – T) ; $f(t-t_1)*\delta(t-t_2)=f(t-t_1-t_2)$

Demostración

$$f(t)*\delta(t-T)=\delta(t-T)*f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-T).f(t-x)dx=f(t-T)$$

$\therefore$ f(t) * δ(t – T) = f(t – T)

$$f(t-t_1)*\delta(t-t_2)=\delta(t-t_2)*f(t-t_1)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-t_2)f(t-x-t_1)dx$$

$$=f(t-t_2-t_1)=f(t-t_1-t_2)$$

$$\therefore\quad f(t-t_1)*\delta(t-t_1)=f(t-t_1-t_2)$$

16.9. TEOREMA DE CONVOLUCIÓN EN EL TIEMPO.-

Si $\mathcal{F}[f_1(t)]=F_1(\omega)$ y $\mathcal{F}[f_2(t)]=F_2(\omega)$, entonces $\mathcal{F}[f_1(t)*f_2(t)]=F_1(\omega).F_2(\omega)$

Demostración

Aplicando la definición de la Transformada de Fourier de $f_1(t)*f_2(t)$

$$\mathcal{F}[f_1(t)*f_2(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}[\int_{-\infty}^{\infty}f_1(x)f_2(t-x)dx]e^{-j\omega t}dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(x)[\int_{-\infty}^{\infty}f_2(t-x)e^{j\omega t}dt]dx \qquad \text{... (1)}$$

pero $\int_{-\infty}^{\infty}f_2(t-x)e^{-j\omega t}dt=\mathcal{F}[f_2(t-x)]=F_2(\omega)e^{-j\omega x}$ **... (2)**

ahora reemplazamos (2) en (1) se tiene :

$$\mathcal{F}[f_1(t)*f_2(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(x).F_2(w)e^{-j\omega t}dx=[\int_{-\infty}^{\infty}f_1(x)e^{-j\omega x}dx]F_2(\omega)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}[f_1(t)e^{-j\omega t}dt]F_2(\omega)=F_1(\omega).F_2(\omega)$$

Luego $\mathcal{F}[f_1(t)*f_2(t)]=F_1(\omega).F_2(\omega)$

16.10. TEOREMA DE CONVOLUCIÓN EN LA FRECUENCIA.-

Si $\mathcal{F}^{-1}[F_1(\omega)]=f_1(t)$ y $\mathcal{F}^{-1}[F_2(\omega)]=f_2(t)$

Entonces : $\mathcal{F}[F_1(\omega)*F_2(\omega)]=2\pi.f_1(t).f_2(t)$

ó $\mathcal{F}[f_1(t).f_2(t)] = \frac{1}{2\pi}F_1(\omega)*F_2(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F_1(y)F_2(\omega - y)dy$

Demostración

$$\mathcal{F}^{-1}[F_1(\omega)*F_2(\omega)] = \mathcal{F}^{-1}[\int_{-\infty}^{\infty}F_1(y).F_2(\omega - y)dy]$$

$$\begin{cases} \omega - y = x \\ \omega = x + y \\ d\omega = dx \end{cases} \qquad = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[\int_{-\infty}^{\infty}F_1(y).F_2(\omega - y)dy]e^{j\omega t}d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[\int_{-\infty}^{\infty}F_1(y).F_2(x)dy]e^{j(y+x)t}dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F_1(t)[\int_{-\infty}^{\infty}F_2(x)e^{j(y+x)t}dx]dy$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F_1(t)e^{jyt}[\int_{-\infty}^{\infty}F_2(x)e^{jxt}dx]dy$$

$$= 2\pi[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F_1(\omega)e^{j\omega t}d\omega][\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F_2(\omega)e^{j\omega t}d\omega] = 2\pi.f_1(t).f_2(t)$$

Luego $\mathcal{F}^{-1}[F_1(\omega)*F_2(\omega)] = 2\pi.f_1(t).f_2(t)$

Ejemplo.- Utilizar la convolución para encontrar $\mathcal{F}^{-1}[\frac{1}{(1+j\omega)(2+j\omega)}]$

Solución

Se conoce que $\mathcal{F}[f_1(t)*f_2(t)] = F_1(\omega).F_2(\omega)$, entonces

$$\mathcal{F}[F_1(\omega).F_2(\omega)] = f_1(t)*f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty}f_1(x).f_2(t-x)dx$$

También se sabe que $\mathcal{F}[e^{-\alpha t}] = \frac{1}{\alpha + j\omega}$, donde $f(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t}, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$

Entonces $\mathcal{F}^{-1}[\frac{1}{1+j\omega}] = e^{-t}U(t)$

$$\mathcal{F}^{-1}[\frac{1}{2+j\omega}]=e^{-2t}U(t)\text{, donde } U(t)=\begin{cases}1 \text{ si } t>0\\ 0 \text{ si } t<0\end{cases}$$

Luego: $\mathcal{F}^{-1}[\frac{1}{(1+j\omega)(2+j\omega)}]=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x}U(x)e^{-2(t-x)}U(t-x)dx$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} e^{x-2t}U(x)U(t-x)dx=\int_{0}^{t} e^{x-2t}dx=e^{-2t}\int_{0}^{t} e^{x}dx$$

$$=e^{-2t}(e^{t}-1)=(e^{-t}-e^{-2t})U(t)$$

donde $U(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1, & x\geq 0\end{cases}$, $U(t-x)=\begin{cases}0 \text{ si } x>t\\ 1 \text{ si } x\leq t\end{cases}$

$$U(x).U(t-x)=\begin{cases}0 \text{ si } x<0 \wedge x>t\\ 1 \text{ si } 0<x<t\end{cases}$$

También podemos hallar f(t) desarrollando F(ω) en fracciones parciales es decir :

$F(\omega)=\frac{1}{(1+j\omega)(2+j\omega)}=\frac{1}{1+j\omega}-\frac{1}{2+j\omega}$, entonces :

$$\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]=\mathcal{F}^{-1}[\frac{1}{1+j\omega}]-\mathcal{F}^{-1}[\frac{1}{2+j\omega}]=e^{-2}-e^{-2t}=(e^{-t}-e^{-2t})U(t)$$

16.11. TEOREMA DE PARSEVAL Y ESPECTRO DE ENERGIA.-

Si $\mathcal{F}[f_1(t)]=F_1(\omega)$ y $\mathcal{F}[f_2(t)]=F_2(\omega)$, demostrar que :

$$\int_{-\infty}^{\infty}[f_1(t)f_2(t)]dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F_1(\omega).F_2(-\omega)d\omega$$

Demostración

Se conoce que : $\mathcal{F}[f_1(t)f_2(t)]=\frac{1}{2\pi}F_1(\omega)*F_2(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F_1(y)F_2(\omega-y)dy$

como $\mathcal{F}[f_1(t)f_2(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(t)f_2(t)e^{-j\omega t}dt$, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2(t)e^{-j\omega t}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(y)F_2(\omega - y)dy$$

Si $\omega = 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(y)F_2(-y)dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega)F_2(-\omega)d\omega$

$$\therefore \quad \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega)F_2(-\omega)d\omega$$

16.12. EL TEOREMA PARSEVAL.-

Si $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$ entonces $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2\, d\omega$

Demostración

Si $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega) \Rightarrow \mathcal{F}[f^*(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t)e^{-j\omega t}dt$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t)(e^{j\omega t})^*dt = \int_{-\infty}^{\infty} [f(t)e^{j\omega t}]^*dt$$

$$= [\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j(-\omega)t}dt]^* = F^*(-\omega)$$

es decir $\mathcal{F}[f^*(t)] = F^*(-\omega)$

Luego si hacemos $f_1(t) = f(t)$ y $f_2(t) = f^*(t)$, entonces como

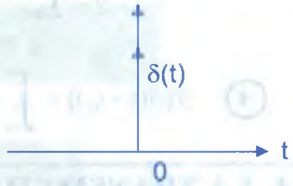
$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega)F_2(-\omega)d\omega$, entonces :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)f^*(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)F^*[-(-\omega)]d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)F^*(\omega)d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2\, d\omega \quad \therefore \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2\, d\omega$$

16.13. LA TRANSFORMADA DE FOURIER DE UNA FUNCIÓN IMPULSO.-

La Transformada de Fourier de la función impulso unitario δ(t), está dado por :



$$\mathcal{F}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt$$

OBSERVACIÓN.- Analizando la definición se tiene:

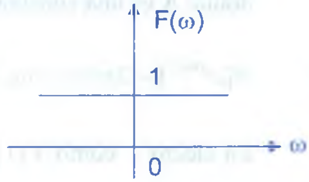
$$\mathcal{F}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega t}\Big|_{t=0} = 1$$

OBSERVACIÓN.-

1) $\delta(t) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} dt$

En efecto : como $\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$, entonces

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 1.e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega = \mathcal{F}^{-1}[1]$$



$\therefore \quad \delta(t) = \mathcal{F}^{-1}[1]$

2) $\delta(t) = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \cos\omega t \; dt$

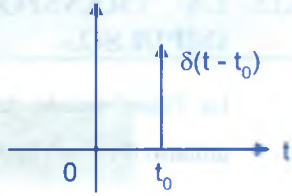
En efecto : $\delta(t) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} (\cos\omega + j sen\omega t) dt$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\cos\omega t \, dt}_{\text{par}} + \frac{j}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{sen\omega t \, dt}_{\text{impar}} = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \cos\omega t \; dt$$

$$\therefore \quad \delta(t) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \cos\omega t \; dt$$

③ En general se tiene :

$$\delta(y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{jxy}dx\ ,\quad \delta(y)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\cos(xy)dx$$

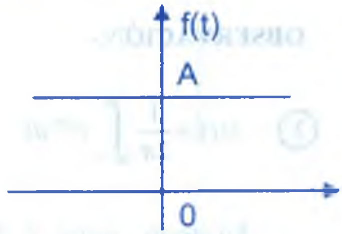


④ $\mathcal{F}[\delta(t-t_0)]=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)e^{-j\omega t}dt=e^{-j\omega t}\Big|_{t=t_0}=e^{-j\omega t_0}$

16.14. LA TRANSFORMADA DE FOURIER DE UNA CONSTANTE.-

① $\mathcal{F}[A]=\int_{-\infty}^{\infty}Ae^{-j\omega t}dt=2\pi.A\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{j(-\omega)t}dt\ ;\ \delta(y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{jxy}dx$

haciendo x = t e y = -ω, entonces :



$\delta(-\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{jt(-\omega)}dt=2\pi\,A\delta(-\omega)$ y como

$\delta(-\omega)=\delta(\omega)\ \Rightarrow\ \mathcal{F}[A]=2\pi A\delta(\omega)$

donde A es una constante y $\mathcal{F}[1]=2\pi\delta(\omega)$

② $\mathcal{F}[e^{j\omega_0 t}]=2\pi\delta(\omega-\omega_0)$

En efecto : como $\mathcal{F}[1]=2\pi\,\delta(\omega)$ y $\mathcal{F}[f(t)e^{j\omega_0 t}]=F(\omega-\omega_0)$, entonces

$$\mathcal{F}[e^{j\omega_0 t}]=2\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

Ejemplo.- Hallar $\mathcal{F}[\cos\omega_0 t]$ y $\mathcal{F}[\text{sen}\,\omega_0 t]$

Solución

$$\mathcal{F}[\cos\omega_0 t]=\mathcal{F}[\frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t})]=\frac{1}{2}\mathcal{F}[e^{j\omega_0 t}]+\frac{1}{2}\mathcal{F}[e^{-j\omega_0 t}]$$

$$=\frac{1}{2}2\pi\delta(\omega-\omega_0)+\frac{1}{2}e\pi\delta(\omega+\omega_0)=\pi\delta(\omega-\omega_0)+\pi\delta(\omega+\omega_0)$$

$$\mathcal{F}[\text{sen}\,\omega_0 t]=-j\pi\delta(\omega-\omega_0)+j\pi\delta(\omega+\omega_0)$$

16.15. LA TRANSFORMADA DE FOURIER DEL ESCALÓN UNITARIO.-

Sea U(t) la función escalón unitario definido por : $U(t)=\begin{cases}1 & \text{si } t>0\\ 0 & \text{si } t<0\end{cases}$

Sea $\mathcal{F}$[U(t)] = F(ω) y como $\mathcal{F}$[U(-t)] = F(-ω) y $U(-t)=\begin{cases}0 & \text{si } t>0\\ 1 & \text{si } t<0\end{cases}$ y U(t)+ U(-t) = 1,

excepto para t = 0 y $\mathcal{F}$[U(t)] + $\mathcal{F}$[U(-t)] = $\mathcal{F}$[1] ⟹ F(ω) + F(-ω) = 2π δ(ω)

Supongamos que F(ω) = k δ(ω) + B(ω), donde B(ω) es una función ordinaria y k es una constante y como δ(-ω) = δ(ω) entonces :

F(ω) + F(-ω) = k δ(ω) + B(ω) + k δ(-ω) + B(-ω) = 2k δ(ω) + B(ω) + B(-ω) = 2π δ(ω)

entonces se tiene k = π y B(ω) es impar y podemos hallar B(ω) y además

$U'(t)=\dfrac{dU(t)}{dt}=\delta(t)$ y como $\mathcal{F}$[f(t)] = F(ω)

y $\mathcal{F}[U(t)]=F(\omega)$ y $\mathcal{F}[U'(t)]=j\omega\,F(\omega)$ = j ω[π δ(ω) + B(ω)]= $\mathcal{F}$[δ(t)] = 1

y como ω δ(ω) = 0 y jω[π δ(ω) + B(ω)] = 1, entonces

jπ(ω δ(ω)) + jωB(m) = 1 ⟹ jω B(ω) = 1 ⟹ $B(\omega)=\dfrac{1}{j\omega}$

$F(\omega)=\pi\delta(\omega)+\dfrac{1}{j\omega}$ y como F(ω) = $\mathcal{F}$[U(t)] $\therefore\ \mathcal{F}[U(t)]=\pi\delta(\omega)+\dfrac{1}{j\omega}$

Ejemplos.-

1. Calcular $\mathcal{F}[1-3\delta(t)+2\delta'(t-2)]$

Solución

$$\mathcal{F}[1-3\delta(t)+2\delta'(t-2)]=\mathcal{F}[1]-3\mathcal{F}[\delta(t)]+2\mathcal{F}[\delta'(t-2)]$$

$$= 2\pi\ \delta(\omega) - 3 + 2\,j\omega\ \mathcal{F}[\delta(t-2)] = 2\pi\delta(\omega)-3+2j\omega\, e^{-j2\omega}$$

(2) Calcular $\mathcal{F}[sen^3 t]$

Solución

Se conoce que $sen^3 t = \frac{1}{4}sent - \frac{1}{4}sen3t$, entonces

$$\mathcal{F}[sen^3 t] = \frac{1}{4}\mathcal{F}[sent] - \frac{1}{4}\mathcal{F}[sen3t]$$

$$= \frac{1}{4}[-j\pi\delta(\omega-1) + j\pi\delta(\omega+1) - (-j\pi\delta(\omega-3)) + j\pi\delta(\omega+3))]$$

$$= j\frac{\pi}{4}(\delta(\omega-3) - \delta(\omega-1)) + j\frac{\pi}{4}(\delta(\omega+1) - \delta(w+3))$$

16.16. EJERCICIOS DESARROLLADOS.-

(1) Encontrar la serie compleja de Fourier para la función f(t) definida por $f(t) = sen^4 t$ en el intervalo <0,π> y f(t + π) = f(t)

Solución

Mediante las identidades tenemos : $e^{\pm Jn\theta} = \cos n\theta \pm j\text{sen}\, n\theta$, además se conoce

$$\cos(n\theta) = \frac{e^{Jn\theta} + e^{-nJ\theta}}{2} \quad ; \quad \text{sen}(n\theta) = \frac{e^{Jn\theta} - e^{-nJ\theta}}{2j}$$

Luego para el ejercicio dado se tiene :

$f(t) = sen^4 t = (\frac{e^{J\theta} - e^{-J\theta}}{2j})^4$, desarrollando se tiene :

$$f(t) = \frac{1}{16}[e^{4jt} - 4e^{2jt} + 6 - 4e^{-2jt} + e^{-4jt}]$$

(2) Encontrar la serie compleja de Fourier para la función f(t) definida por $f(t) = e^t$ en el intervalo <0,2π> y f(t + 2π) = f(t), mediante integración directa.

Solución

Sea $f(t)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$ donde $c_n=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-jn\omega_0 t}\,dt$

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^t.e^{-jn\omega_0 t}\,dt\ ,\ \text{donde}\ \ \omega_0=\frac{2\pi}{T}\ ,\ \mathrm{T}=2\pi$$

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{(1-jn\omega_0)t}\,dt=\frac{1}{2\pi[1-jn]}e^{t(1-jn)}\Big/_0^{2\pi}$$

$$=\frac{1}{2\pi(1-jn)}(e^{2\pi(1-jn)}-1)=\frac{1}{2\pi(1-jn)}(e^{2\pi}e^{-2\pi jn}-1)$$

como $e^{-2\pi jn}=1$, luego $c_n=\frac{e^{2\pi}-1}{2\pi(1-jn)}$

entonces $f(t)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{2\pi}-1}{2\pi(1-jn)}e^{jnt}=\frac{e^{2\pi}-1}{2\pi}\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{jnt}}{1-jn}$

3 Reducir el resultado del ejercicio (2) a la forma trigonométrica de la serie de Fourier.

Solución

Sabemos que $a_n=c_n+c_{-n}$ de donde

$c_n=\frac{e^{2\pi}-1}{2\pi(1-jn)}\ \Rightarrow\ c_{-n}=\frac{e^{2\pi}-1}{2\pi(1+jn)}$, luego se tiene :

$$a_n=\frac{e^{2\pi}-1}{2\pi(1-jn)}+\frac{e^{2\pi}-1}{2\pi(1-jn)}=\frac{e^{2\pi}-1}{2\pi}\Big[\frac{1}{1-jn}+\frac{1}{1+jn}\Big]$$

$$=\frac{e^{2\pi}-1}{2\pi}\Big[\frac{1+jn+1-jn}{1+n^2}\Big]=\frac{e^{2\pi}-1}{\pi(1+n^2)}$$

$$b_n=j[c_n-c_{-n}]=j\Big[\frac{e^{2\pi}-1}{2\pi(1-jn)}-\frac{e^{2\pi}-1}{2\pi(1+jn)}\Big]$$

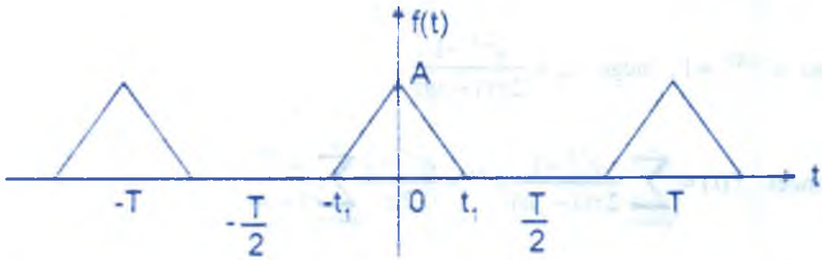
$$=j\frac{e^{2\pi}-1}{2\pi}\Big[\frac{1+jn-1+jn}{1+n^2}\Big]=-\frac{(e^{2\pi}-1)n}{\pi(1+n^2)}$$

$$\frac{a_0}{2} = c_0 = \frac{e^{2\pi}-1}{2\pi}$$

Luego $f(t) = \frac{e^{2\pi}-1}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{e^{2\pi}-1}{1+n^2}\frac{\cos nt}{\pi} - \frac{e^{2\pi}-1}{1+n^2}\cdot\frac{n\operatorname{sen} nt}{\pi}\right)$

$$\therefore \quad f(t) = \frac{e^{2\pi}-1}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos nt}{1+n^2} - \frac{n}{1+n^2}\operatorname{sen} nt\right)\right]$$

4) Hallar los coeficientes complejos de Fourier de la función f(t) que se muestra en la figura

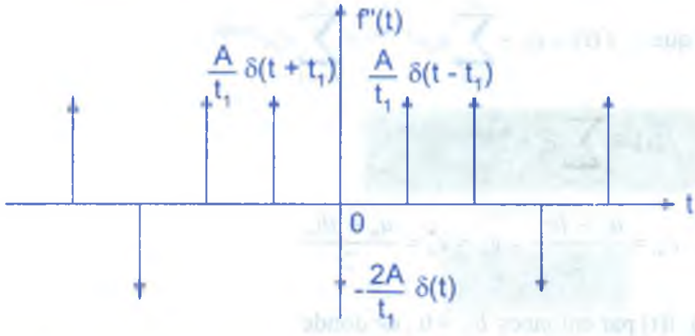


Solución

Sea $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

Diferenciando término a término se tiene : $f'(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(jn\omega_0)c_n e^{jn\omega_0 t}$, graficando

$$f''(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(jn\omega_0)^2 c_n e^{jn\omega_0 t} = -\sum_{n=-\infty}^{\infty}(n\omega_0)^2 c_n e^{jn\omega_0 t}$$



La segunda derivada de f(t) en el intervalo $-\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$ es :

$$f''(t) = \frac{A}{t_1}\delta(t+t_1) - \frac{2A}{t_1}\delta(t) + \frac{A}{t_1}\delta(t-t_1)$$

por lo tanto $\quad -(n\omega_0)^2 c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f''(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$

$$= \frac{A}{Tt_1}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [\delta(t+t_1) - 2\delta(t) + \delta(t-t_1)]e^{-jn\omega_0 t}dt$$

$$= \frac{A}{Tt_1}[e^{jn\omega_0 t_1} - 2 + e^{-jn\omega_0 t_1}] = \frac{2A}{Tt_1}(\cos n\omega_0 t_1 - 1)$$

$$= -\frac{4A}{Tt_1}\operatorname{sen}^2\frac{n\omega_0 t_1}{2}$$

Luego $\quad -(n\omega_0)^2 c_n = -\frac{4A}{Tt_1}\operatorname{sen}^2(\frac{n\omega_0 t_1}{2}) \;\Rightarrow\; c_n = \frac{At_1}{T}\left[\frac{\operatorname{sen}(\frac{n\omega_0 t_1}{2})}{(\frac{n\omega_0 t_1}{2})}\right]^2$

(5) Demostrar que los coeficientes complejos de Fourier de una función periódica par son reales, y los de una función periódica impar son imaginarios puros.

Solución

Sabemos que : $f(t)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n e^{jn\omega_0 t}+\sum_{n=-1}^{\infty}c_n e^{jn\omega_0 t}$

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$c_0=\frac{a_0}{2},\quad c_n=\frac{a_n-jb_n}{2},\quad c_{-n}=c_n^*=\frac{a_n+jb_n}{2}$$

i) Para f(t) par entonces $b_n=0$, de donde

$$\begin{cases} c_n=\dfrac{a_n-0}{2} \\ c_{-n}=\dfrac{a_n+0}{2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_n=\dfrac{a_n}{2}, \text{ real} \\ c_{-n}=\dfrac{a_n}{2}, \text{ real}\end{cases}$$

$c_n=c_{-n}$, f es par

ii) Para f(t) impar $\Rightarrow a_0=a_n=0$, de donde

$$\begin{cases} c_n=\dfrac{0-jb_n}{2} \\ c_{-n}=\dfrac{0+jb_n}{2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_n=-j\dfrac{b_n}{2}, \text{ imaginario} \\ c_{-n}=j\dfrac{b_n}{2}, \text{ imaginario}\end{cases}$$

$c_n=-c_{-n}$

6. Si f(t) y g(t) son funciones periódicas con periodo T y sus expansiones de Fourier son $f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{jn\omega_0 t}$, $g(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}d_n e^{jn\omega_0 t}$ para $\omega_0=\frac{2\pi}{T}$, Demostrar que la función $h(t)=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t-\tau)g(\tau)d\tau$ es una función periódica de igual periodo T, se puede expresar como $h(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n d_n e^{jn\omega_0 t}$

Solución

Sea $h(t)=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t-\tau)g(\tau)d\tau$ ... **(1)**

$$h(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n d_n e^{jn\omega_0 t} \qquad \text{... (2)}$$

de (1)y (2) se deduce que $f(t)=f(t-\tau)g(\tau)$ entonces tenemos que demostrar que :

$$f(t-\tau)g(\tau)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n d_n e^{jn\omega_0 t} \qquad \text{... (3)}$$

como $\begin{cases} f(t)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \\ g(t)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{jn\omega_0 t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(t-\tau)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 (t-\tau)} \\ g(\tau)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{jn\omega_0 \tau} \end{cases}$

ahora multiplicamos ambos miembros

$$f(t-\tau)g(\tau)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 (t-\tau)}.\sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{jn\omega_0 \tau}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n d_n e^{jn\omega_0 (t-\tau+\tau)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n d_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$\therefore \quad f(t-\tau)g(\tau)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n d_n e^{jn\omega_0 t} \quad \text{por lo tanto} \quad h(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n d_n e^{jn\omega_0 t}$$

7 Si f(t) y g(t) son funciones periódicas de periodo T y sus expansiones de Fourier son $f(t)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$, $g(t)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{jn\omega_0 t}$, para $\omega_0=\dfrac{2\pi}{T}$, Demostrar que la función h(t) = f(t).g(t) es una función periódica de igual periodo T, que se puede expresar como $h(t)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{jn\omega_0 t}$ donde $\alpha_n=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_{n-k} d_k$ (sug. demostrar que $\alpha_n=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_{n-k} d_k$ son los coeficientes de Fourier de h(t)).

Solución

Sean $h(t)=f(t).g(t)$ ... (1)

$$h(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\alpha_n e^{jn\omega_0 t} \qquad \ldots (2)$$

como $f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_{n-k}e^{j\omega_0(n-k)t}$ y $g(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}d_k e^{j\omega_0 kt}$

multiplicando ambos miembros se tiene :

$$f(t)g(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_{n-k}e^{j\omega_0(n-k)t}.\sum_{n=-\infty}^{\infty}d_k e^{j\omega_0 kt}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_{n-k}d_k e^{j\omega_0(n-k+k)t}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_{n-k}d_k e^{j\omega_0 nt}$$

de donde h(t) = f(t).g(t)

Si $h(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\alpha_n e^{jn\omega_0 t}$ y $\alpha_n=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_{n-k}d_k$

Luego $\alpha_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}h(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$, como $h(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_{n-k}d_k e^{j\omega_0 nt}$

$$\alpha_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_{n-k}d_k e^{jn\omega_0 t}\right)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

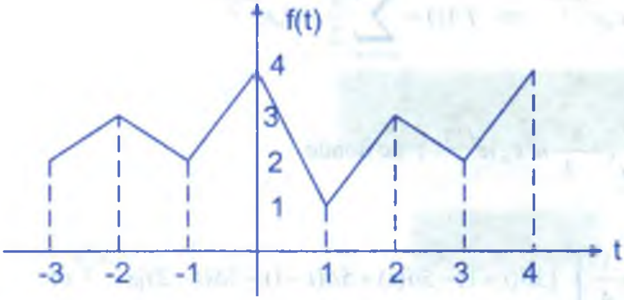
$$=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_{n-k}d_k dt=\frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_{n-k}d_k}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}dt=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_{n-k}d_k$$

$$\alpha_n=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_{n-k}d_k \Rightarrow h(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\alpha_n e^{j\omega_0 nt} \quad \text{L.q.q.d.}$$

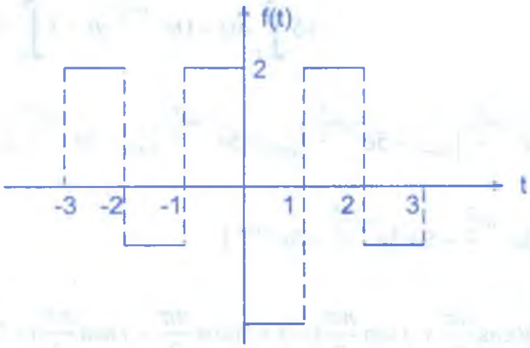
(8) Hallar la serie compleja, utilizando derivacion (Delta de Dirac) de la función

$$f(t)=\begin{cases}1-t & ; \ -2<t<-1\\ 2t+4 & ; \ -1<t\le 0\\ -3t+4 & ; \ 0<t<1\\ 2t-1 & ; \ 1\le t<2\end{cases}$$

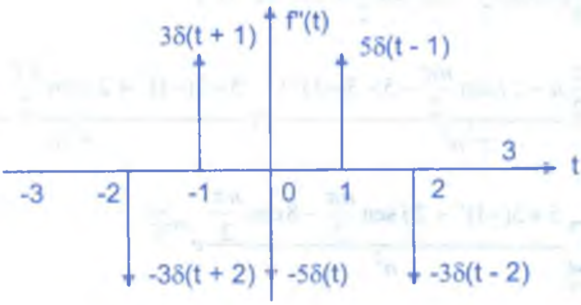
Solución



$$f(t)=\begin{cases}-1 \ ; & -2<t<-1\\ 2 \ ; & -1<t\leq 0\\ -3 \ ; & 0<t<1\\ 2 \ ; & 1\leq t<2\end{cases}$$



$f''(t)=0$, cuya gráfica es :



$\omega_0=\dfrac{2\pi}{T}=\dfrac{\pi}{2}$, $f''(t)=3\delta(t+1)-5\delta(t)+5\delta(t-1)-3\delta(t-2)$, $-2<t\leq 2$

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\frac{\pi}{2}t} \quad \Rightarrow \quad f'(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{2} jnc_n e^{jn\frac{\pi}{2}t}$$

$$f''(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-\frac{\pi^2}{4}n^2 c_n) e^{jn\frac{\pi}{2}t} \text{ , de donde}$$

$$-\frac{\pi^2 n^2}{4}c_n=\frac{1}{4}\int_{-2}^{2}[3\delta(t+1)-5\delta(t)+5\delta(t-1)-3\delta(t-2)]e^{-jn\frac{\pi}{2}t}dt$$

$$-\frac{\pi^2 n^2}{4}c_n=\frac{1}{4}[\int_{-2}^{2}3\delta(t+1)e^{-jn\frac{\pi}{2}t}dt-5\int_{-2}^{2}5\delta(t)e^{-jn\frac{\pi}{2}t}+$$

$$+5\int_{-2}^{2}\delta(t-1)e^{-jn\frac{\pi}{2}t}dt-3\int_{-2}^{2}\delta(t-2)e^{-jn\frac{\pi}{2}t}dt]$$

$$-\frac{\pi^2 n^2 c_n}{4}=\frac{1}{4}[3e^{-jn\frac{\pi}{2}t}\Big|_{t=-1}-5e^{-jn\frac{\pi}{2}t}\Big|_{t=0}+5e^{-jn\frac{\pi}{2}t}\Big|_{t=1}-3e^{-jn\frac{\pi}{2}t}\Big|_{t=2}]$$

$$=\frac{1}{4}[3e^{-jn\frac{\pi}{2}}-5+5e^{-j\frac{n\pi}{2}}-3e^{-jn\pi}]$$

$$=\frac{1}{4}[3(\cos\frac{n\pi}{2}+j\,\text{sen}\frac{n\pi}{2})-5+5(\cos\frac{n\pi}{2}-j\,\text{sen}\frac{n\pi}{2})-3(-1)^n]$$

$$=\frac{1}{4}[8\cos\frac{n\pi}{2}-2j\,\text{sen}\frac{\pi}{2}n-5-3(-1)^n]$$

$$c_n=-\frac{(8\cos\frac{\pi}{2}n-2j\,\text{sen}\frac{n\pi}{2}-5-3(-1)^n)}{\pi^2 n^2}=\frac{5+3(-1)^n+2j\,sen\frac{n\pi}{2}-8\cos\frac{n\pi}{2}}{\pi^2 n^2}$$

$$f(t)=\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{5+3(-1)^n+2j\,\text{sen}\frac{n\pi}{2}-8\cos\frac{n\pi}{2}}{n^2}e^{jn\frac{\pi t}{2}}$$

9) Usando convolución, hallar $f(t)=F^{-1}[\frac{1}{(1+j\omega)}.\frac{1}{(2+j\omega)}]$

Solución

$$F(\omega) = F[f(t)] = \frac{1}{(1+j\omega)} \cdot \frac{1}{(2+j\omega)}, \text{ de donde}$$

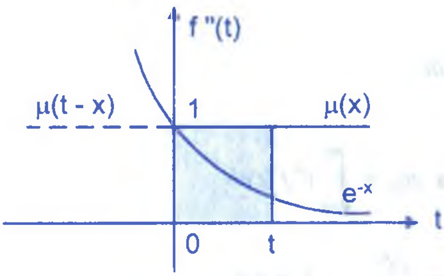
$$G(\omega) = \frac{1}{1+j\omega} \quad \text{y} \quad H(\omega) = \frac{1}{2+j\omega}, \text{ por lo tanto se tiene:}$$

$$g(t) = F^{-1}[\frac{1}{1+jn}] = e^{-t}\mu(t) \qquad \textbf{... (1)}$$

$$h(t) = F^{-1}[\frac{1}{2+j\omega}] = e^{-2t}\mu(t) \qquad \textbf{... (2)}$$

por convolución $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-x)h(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t-x)}\mu(t-x)e^{-2x}\mu(x)dx$

$$f(t) = e^{t}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x}\mu(x)\mu(t-x)dx$$



$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0 \\ 1 & si \quad x > 0 \end{cases}$$

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x > t \\ 1 & si \quad x < t \end{cases}$$

$$\mu(x)\mu(t-x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0 \ \wedge \ x > t \\ 1 & si \quad 0 < x < t \end{cases}$$

$$f(t) = e^{t}\int_{0}^{t} e^{-x}dx = e^{t}(-e^{-x} \Big/_{0}^{t}) = e^{-t}(-e^{-t}+1)$$

$$f(t) = -e^{-2t} + e^{-t} \quad \text{de donde} \quad f(t) = (e^{-t} - e^{-2t})U(t)$$

10 Si $m_n = \int_{-\infty}^{\infty} t^n f(t)dt$, demostrar que $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$ se puede expresar como

$$F(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} (-j)^n m_n \frac{\omega^n}{n!}$$

Solución

Por definición $F(\omega)=F[f(t)]=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$

Como $e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}-...$

Si x = Jωt, al reemplazar se tiene : $e^{-j\omega t}=1-j\omega t+\frac{1}{2!}(j\omega t)^2-\frac{1}{3!}(j\omega t)^3+...$

multiplicando a ambos miembros por f(t), e integrando

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt-\int_{-\infty}^{\infty} f(t)(j\omega t)dt+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2!}(j\omega t)^2 f(t)dt-...$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt=(j\omega)^0\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt-(j\omega)^1\int_{-\infty}^{\infty} t\,f(t)+\frac{(j\omega)^2}{2!}\int_{-\infty}^{\infty} t^2 f(t)dt-...$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(j\omega)^n}{n!}\int_{-\infty}^{\infty} t^n f(t)dt$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-jnt}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-j\omega)^n}{n!}\int_{-\infty}^{\infty} t^n f(t)dt$$

como $F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$ y además $m_n=\int_{-\infty}^{\infty} t^n f(t)dt$

por lo tanto se tiene : $F(\omega)=\sum_{n=0}^{\infty}(-j)^n m_n\frac{\omega^n}{n!}$ L.q.q.d.

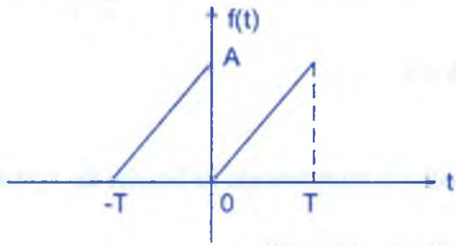
16.17. EJERCICIOS PROPUESTOS.-

1. Encontrar los coeficientes complejos de Fourier y dibujar los espectros de frecuencia para la semionda sinusoide rectificada f(t) definida por $f(t)=\begin{cases} A\operatorname{sen}\omega_0 t & , \ 0<t<\frac{T}{2} \\ 0 & , \ \frac{T}{2}<t<T\end{cases}$ y f(t + T) = f(t), donde $\omega_0=\frac{2\pi}{T}$.

(2) Encontrar los coeficientes complejos de Fourier y dibujar los espectros de frecuencia para la función diente de sierra definida por $f(t) = -\frac{1}{T}t + \frac{1}{2}$, para $0 < t < T$ y $f(t + T) = f(t)$.

(3) Aplicar el teorema de Parseval al resultado del ejercicio (2) para probar que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

(4) Mediante la diferenciación encontrar la serie compleja de Fourier para la función diente de sierra de la figura.



(5) Hallar la serie compleja de Fourier de $F(t) = |t^2 - 1|$, $-2 < t < 2$, graficar $F(t)$ y su espectro de amplitud.

(6) Si f(t) es una función periódica con periodo T, y los coeficientes complejos de Fourier son c_n, demostrar que los coeficientes complejos de Fourier de la función portadora, de amplitud modulada periódicamente $f(t)\cos m\omega_0 t$ están dados por $\frac{1}{2}(c_{n-m} + c_{n+m})$.

(7) Calcular la Transformada de Fourier de las siguientes funciones

a) $U(t - a)$ (función escalón unitario)

b) $S_a(4t) * e^{-at^2}$, donde $S_a(4t) = \frac{\operatorname{sen} 4t}{4t}$

(8) Sean $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} e^{-\frac{t^2}{2a^2}}$, $g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi b}} e^{-\frac{t^2}{2b^2}}$. Calcular $H(t) = f(t)*g(t)$

(9) Usando la definición de convolución, calcular $h(t) = |t| * e^{-at} U(t)$

10) Calcular $F[f''(t)*t^2U(t)]$

11) Usando la definición de convolución, calcular $e^{-|t|}*|t|U(t)$

12) Calcular $F[\frac{3j\omega+5}{\omega^2-3j\omega-2}]$

13) Calcular $F^{-1}[\frac{1}{\omega^2-5j\omega+6}+(\cos\omega+e^{\omega})\delta(\omega)]$

14) Si f(t) es integrable en el intervalo finito $<-\frac{T}{2},\frac{T}{2}>$ y ω es real, demostrar que:

$$\lim_{|\omega|\to\infty}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-j\omega t}dt=0$$

15) Si F(ω) = $\mathcal{F}$[f(t)], hallar la transformada de Fourier de $f(t)\operatorname{sen}\omega_0 t$

16) Calcular $\mathcal{F}$[| t | cos 100 πt + U(t – 4)]

17) Si $\mathcal{F}$[f(t)] = H(ω), Probar que : $\mathcal{F}$[H(t)] = 2π F(-ω)

18) Determinar $\mathcal{F}$[cos (at)] = H(ω) y gráficas || H(ω) ||

19) Si $\mathcal{F}$[f(t)] = H(ω), Probar que : $F[F(t)\cos at]=\frac{1}{2}[H(\omega-a)+H(\omega+a)]$

20) Verificar que: $F[e^{-a|t|}(1+a|t|)]=\frac{4a^3}{(a^2+\omega^2)^2}$

21) Si $H(t)=t^4$, -c < t < c, Halle su serie compleja de Fourier de H(t) y graficar su espectro y amplitud.

22) Por el método de impulsos unitarios, calcular la serie compleja de Fourier de la función:

$$f(t)=\begin{cases} 2 & , -\pi\le t<-\frac{\pi}{2} \\ -\frac{4}{\pi}t & , -\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2} \\ \frac{8t}{\pi}-6 & , \frac{\pi}{2}\le t\le\pi \end{cases}$$

(23) Demostrar que si f(t) es una función periódica y real con periodo T, entonces $\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)|^2\, dt = c_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$ donde c_n son los coeficientes complejos de Fourier de la función f(t).

(24) Demostrar que si f(t) es una función periódica y real con periodo T, entonces: $\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t+\tau)f(t)dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 e^{jn\omega_0 t}$, donde c_n son los coeficientes complejos de Fourier de f(t) y $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$.

(25) El momento enésimo m_n de una función f(t) esta definido por $m_n = \int_{-\infty}^{\infty} t^n f(t)dt$ para n = 0,1,2,... demostrar que $m_n = (j)^n \frac{d^n F(0)}{d\omega^n}$ para n = 0,1,2,.. donde $\frac{d^n F(0)}{d\omega^n} = \frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n}\Big|_{\omega=0}$ y $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$

(26) Si f(t) es una función imaginaria pura, esto es f(t) = j g(t), donde g(t) es real, demostrar que las partes real e imaginaria de F(ω) son $R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\operatorname{sen}\omega t\, dt$, $X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\cos\omega t\, dt$ así mismo, demostrar que R(ω) y X(ω) son funciones impar y par de ω, respectivamente, esto es : R(-ω) = -R(ω), X(-ω) = X(ω), F(-ω) = -F*(ω)

(27) Hallar la integral de Fourier que representa la función $f(t) = \begin{cases} 1 \text{ para } |t| < 1 \\ 0 \text{ para } |t| > 1 \end{cases}$

(28) Utilizar el resultado del ejercicio (27), para deducir $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\omega}{\omega}\, d\omega = \frac{\pi}{2}$

(sug: hacer t = 0 en el resultado de (27)).

BIBLIOGRAFIA

1. Matemáticas Superiores para Ingeniería por: C.R. – WYLIE, JR.
2. Matemática Avanzada para Ingeniería. Volumen I por: ERWIN KREYSZIG.
3. Ecuaciones Diferenciales por: KREIDER – KULLER – OSTBERG.
4. Problemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias por: A. KISELIOV – M. KROSNOV – G. MAKARENKO.
5. Ecuaciones Diferenciales por: DONALD – L. KREIDER.
6. Ecuaciones Diferenciales por: RALPH PALMER AGNEV.
7. Ecuaciones Diferenciales Aplicadas por: M.R. – SPIEGEL.
8. Ecuaciones Diferenciales Elementales por: L.M. KELLS.
9. Ecuaciones Diferenciales y Problemas con valores en la frontera por: WILLIAN E. BOYCE – RICHARD C. PRIMA.
10. Matemáticas Avanzadas para Ingeniería por: ERWIN KREYSZIG. Tomo II.
11. Ecuaciones Diferenciales por: TAKAUCHI – RAMIREZ – RUIZ.
12. Ecuaciones Diferenciales por: KAJL NIELSEN.
13. Ecuaciones Diferenciales por: SHEPLEY L. ROSS.
14. Ecuaciones Diferenciales Elementales por: EARL D. RAINVILLE.
15. Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones por: WILLIAN R. DERAICA – STANLEY Y GROSSMAN.
16. Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones por: F. SINMONS.
17. Curso Elemental de Matemática Superior. Tomo V por: J. QUINET.
18. Ecuaciones Diferenciales por: FRANK AYRES.
19. Introducción a las Ecuaciones Diferenciales por: WILLIAN E. BOYCE Y RICHARD C. DIPRIMA.
20. Ecuaciones Diferenciales y Calculo Variacional por: L. EL SGOLTS.
21. Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias por: EARL Y. CODDINGTON.
22. Problemas y Ejercicios de Análisis Matemático por: G. BARANENKOV – B. DEMIDOVICH.
23. Ecuaciones Diferenciales por: H. B. PHILLIPS.
24. Ecuaciones Diferenciales por: HARRY W. REDDICK y DONALD E. KIBBEY.

25. Introducción al Análisis Lineal por: KREIDER – KULLER – OSTBERG – PERKINS. Tomo II.
26. Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones por: BETZ BURCHAM EWING.
27. Ejercicios y Problemas de Matemática Superior por: P. DANKO y A. POPOV. Tomo II.
28. Matemática Superior en Ejercicios y Problemas por: T. y A. KOZHE'VNIKOVA.
29. Problemas y Ejercicios de Análisis Matemático por: G.N. BERMAN.
30. Matemática para Administración y Economía por: JEAN E. DRAPER, JANE S. KLINGMAN. JEAN WEBER.
31. Matemática para Economistas por: TARO YAMANE.
32. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias por: CARLOS IMOZ – ZOENEK VOREL.
33. Matemática Superior para Matemáticos, Física e Ingenieros. Volumen II por: R. ROTHE.
34. Análisis Matemático por: PROTTER – MORREY.
35. Análisis Matemático. Volumen II por HAASER – LASALLE – SULLIVAN.
36. Calculus. Volumen II por: TOM M. APOSTOL.
37. Ecuaciones Diferenciales por: F. MERCELLAN, L. CASASIAS, A. ZARZO.
38. Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones por: DENNIS G. ZILL.
39. Matemáticas Avanzadas para Ingeniería por: PETER V. O'NEIL.
40. Ecuaciones Diferenciales por: C.H.EDWARDS, JR. DAVID E. PENNEY.
41. Fundamentos de Ecuaciones Diferenciales por R. KENT NAGLE y EDWARDS B. SAFF.
42. Ecuaciones Diferenciales y problemas con condiciones en la frontera por: C.H. EDWARDS, Jr. y DAVID E. PENNEY.
43. Curso de Matemática Superior Tomo IV por: J. QUINET.
44. Transformada de Laplace por: MURRAY R. SPIEGEL.
45. Introducción to the Laplace Transfor por: HOLL, D.C. MAPLE Y B. WINDOGRADE.
46. Ecuaciones Diferenciales con Problemas de Valor de Frontera por: STEPHEN L. CAMPBELL y RICHARD HABERMAN.
47. Introducción al Análisis de Fourier por: R.D. STUART.
48. Introducción a las Series e Integrales de Fourier por: ROBERT SEELEY.
49. Series de Fourier y Problemas de Contorno por: RUEL V. CHURCHILL.
50. Análisis de Fourier por HWEI P. HSU.

Eduardo Espinoza Ramos
Graduado y Titulado en Matemática Pura.

Catedrático de las principales
Universidades de la Capital

OBRAS PUBLICADAS

EDITORIAL
EDUARDO ESPINOZA RAMOS